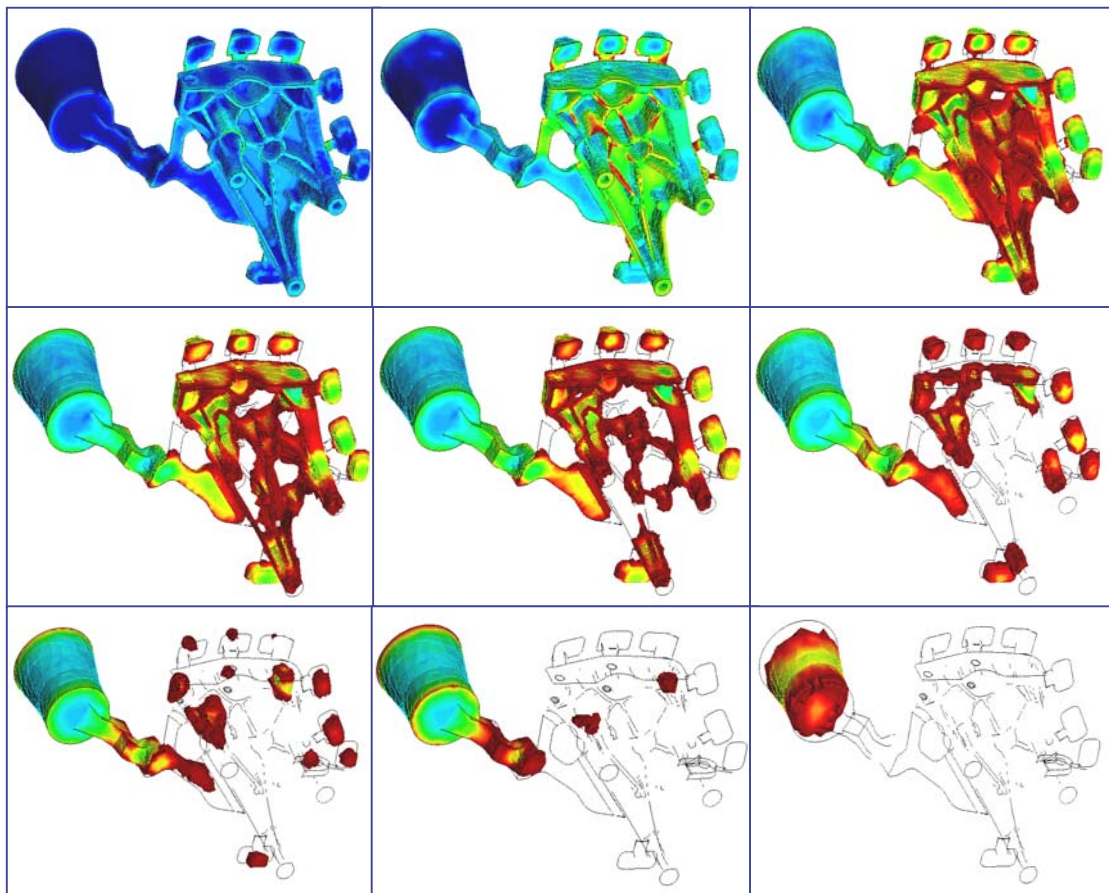


# SIMULACIÓN NUMÉRICA DE PROBLEMAS TERMOMECAÑICOS



**C. Agelet de Saracibar**

# Índice

---

## **Capítulo 1. Simulación Numérica de Problemas Termomecánicos de Contacto Friccional en Grandes Deformaciones**

- 1.1 Introducción
- 1.2 Formulación del Problema Termomecánico Acoplado
  - 1.2.1 Planteamiento del problema. Forma local de las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico acoplado
- 1.3 Formulación del Problema Termomecánico de Contacto Friccional
  - 1.3.1 Notación
  - 1.3.2 Restricciones mecánicas de contacto friccional
  - 1.3.3 Modelo de contacto térmico
  - 1.3.4 Formulación variacional del problema termomecánico acoplado
  - 1.3.5 Linealización de la cinemática de contacto termomecánico
  - 1.3.6 Contribuciones mecánicas y térmicas de contacto a la forma débil
- 1.4 El Problema Termomecánico Friccional Discreto
  - 1.4.1 Integración temporal del problema acoplado. Métodos de paso fraccionado
  - 1.4.2 Discretización espacial: La proyección de Galerkin
  - 1.4.3 Discretización temporal. Algoritmo friccional de retorno
  - 1.4.4 Implementación por el MEF. Expresiones matriciales del residuo y del operador tangente de contacto
- 1.5 Simulaciones Numéricas
- 1.6 Conclusiones
- 1.7 Referencias

## **Capítulo 2. Un Nuevo Algoritmo de Integración Friccional para Problemas con Grandes Deslizamientos y Deformaciones Finitas**

- 2.1 Introducción. Motivación y Objetivos
- 2.2 Un Problema Modelo: Deslizamiento de una Partícula sobre una Superficie Rugosa
  - 2.2.1 Descripción del problema
  - 2.2.2 El problema regularizado
  - 2.2.3 Definición de la trayectoria de deslizamiento. Cálculo del deslizamiento
- 2.3 Un Nuevo Algoritmo de Integración Friccional
- 2.4 Simulaciones Numéricas
- 2.5 Observaciones Finales
- 2.6 Referencias

## **Apéndice A. Un Nuevo Algoritmo de Integración Friccional para Problemas con Grandes Deslizamientos y Deformaciones Finitas**

## **Apéndice B. Linealización del Algoritmo**

## **Capítulo 3. Simulación Numérica de Problemas Termomecánicos Acoplados con Cambio de Fase**

*C. Agelet de Saracibar, M. Chiumenti, M. Cervera*

- 3.1 Introducción
- 3.2 Formulación del Problema Termomecánico Acoplado
  - 3.2.1 Ecuaciones de gobierno locales
  - 3.2.2 Un modelo constitutivo termoplástico J2
  - 3.2.3 Modelo termomecánico de contacto
  - 3.2.4 Un modelo constitutivo termofriccional
  - 3.2.5 Formulación variacional
- 3.3 Integración Temporal del Problema Termoplástico Acoplado
  - 3.3.1 Problema local de evolución
  - 3.3.2 Estimador “a-priori” de estabilidad
  - 3.3.3 Operadores de partición
  - 3.3.4 Algoritmo de formula producto
  - 3.3.5 Formulación variacional discretizada en el tiempo
- 3.4 Simulaciones Numéricas

3.4.1 Análisis numérico de los algoritmos de partición isotérmico e isentrópico

3.4.2 Simulaciones numéricas de procesos de solidificación

3.5 Conclusiones

3.6 Referencias

Apéndice 3.I Algoritmos de Retorno Termoplásticos

3.I.A Problema mecánico

3.I.B Problema térmico

Apéndice 3.II Algoritmos de Retorno Termofriccionales

3.II.A Problema mecánico

3.II.B Problema térmico

# Introducción

---

En esta Monografía se presentan distintos aspectos relacionados con la simulación numérica de problemas termomecánicos acoplados con cinemática no lineal. Especial énfasis se pone en la formulación de modelos de contacto termo-friccional en el marco de una cinemática no lineal con grandes deslizamientos y deformaciones finitas. En el contexto de las deformaciones infinitesimales se presenta una formulación termomecánica acoplada con cambios de fase que permite la simulación numérica de procesos de fundición.

El contenido de la Monografía se ha estructurado en base a tres capítulos, incluyéndose también algunos apéndices.

En el Capítulo 1 se presenta una formulación para el análisis de problemas termomecánicos acoplados no lineales en grandes deformaciones con contacto friccional. En el primer apartado se presenta una introducción al tema. La formulación del problema termomecánico y del problema termomecánico de contacto friccional en el continuo se presentan en los apartados 2 y 3, respectivamente. En el apartado 4 se presenta la formulación del problema termomecánico discretizado en el tiempo y se analizan dos algoritmos de integración de fórmula producto basados en la partición isotérmica e isentrópica, respectivamente, de las ecuaciones diferenciales de gobierno del problema. Para la integración temporal del problema friccional se presentan dos algoritmos de integración. Se presentan también las expresiones matriciales del residuo y operador tangente de contacto para su implementación por el método de los elementos finitos. Por último en el apartado 5 se presentan algunos ejemplos numéricos de aplicación.

En el Capítulo 2 se plantea un problema que aparece con frecuencia en las simulaciones numéricas de problemas de contacto friccional con grandes deslizamientos. Como solución al problema que se plantea, en el capítulo se propone un nuevo método de integración temporal del problema friccional. Para la introducción de las características básicas del nuevo algoritmo que se propone se propone la consideración de un problema modelo sencillo: el deslizamiento de una partícula sobre una superficie rugosa. En el contexto de este sencillo problema modelo se introducen las hipótesis que se consideran en el nuevo algoritmo de integración que se propone. Para ello se introduce una nueva parametrización de la curva incremental de deslizamiento en base a la

información que se dispone de la posición de la partícula sobre la superficie y de la normal a la superficie en los instantes inicial y final del incremento de tiempo considerado. Una vez introducida la nueva parametrización y evaluada numéricamente la longitud de la curva de deslizamiento se introduce en un esquema paso-a-paso el nuevo algoritmo de integración. La extensión del algoritmo a problemas con cinemática no lineal con grandes deformaciones se puede realizar de manera comprensible una vez introducidos los principales aspectos del algoritmo. La formulación del algoritmo para problemas con grandes deformaciones y su linealización exacta se presentan en los Apéndices A y B, respectivamente. Finalmente en el capítulo se presenta una serie de ejemplos numéricos y unas conclusiones finales.

En el Capítulo 3, escrito en colaboración con el Dr. M. Chiumenti y el Profesor M. Cervera, se presenta la formulación de problemas termomecánicos con contacto friccional y cambios de fase, en el contexto de deformaciones infinitesimales. Toda la formulación del problema se obtiene de manera consistente en el marco de la termodinámica. Después de una introducción al problema, en el apartado 2 se presenta la formulación del problema termomecánico en el continuo: las ecuaciones de gobierno del problema, un modelo constitutivo termoplástico J2, las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico de contacto friccional, un modelo constitutivo de contacto termofriccional y la formulación variacional del problema. En el apartado 3 se presenta la formulación discretizada en el tiempo, analizándose dos algoritmos de integración de fórmula producto, basados en la partición isotérmica e isentrópica de las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico con cambios de fase. En el apartado 4 se presentan distintos ejemplos numéricos de aplicación. En primer lugar se realiza un análisis numérico de los algoritmos de integración temporal isotérmico e isentrópico, para problemas termoelásticos y termoplásticos, cuasiestáticos y dinámicos, y débilmente y fuertemente acoplados. Los resultados obtenidos muestran claramente que para problemas fuertemente acoplados el algoritmo isotérmico es fuertemente inestable tanto para problemas termoelásticos como termoplásticos, cuasiestáticos y dinámicos. A continuación se presentan distintos ejemplos numéricos, académicos e industriales, de problemas de solidificación y enfriamiento. El capítulo finaliza con unas conclusiones. Se incluyen además dos apéndices en los que se presentan de forma detallada, los algoritmos de integración del problema termoplástico y termofriccional, respectivamente.

# CAPÍTULO 1

## SIMULACIÓN NUMÉRICA DE PROBLEMAS TERMOMECÁNICOS DE CONTACTO FRICCIONAL EN GRANDES DEFORMACIONES

### 1.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta una formulación para el análisis de problema termomecánicos acoplados no-lineales de contacto friccional en el contexto de deformaciones finitas. La simulación de problemas termomecánicos acoplados de contacto friccional ha sido uno de los principales temas de investigación en los últimos años. Problemas termomecánicos acoplados de contacto friccional aparecen en muchos campos de aplicación en ingeniería y en particular en distintos procesos de conformado de metales, tales como solidificación, conformado superplástico, embutición de chapas y laminado entre otros. A pesar de los importantes avances que se han producido en la mecánica computacional, la simulación a gran escala de este tipo de problemas, sigue siendo hoy en día una tarea muy compleja debido principalmente a la naturaleza altamente no lineal del problema, que incluye en muchos casos una cinemática no lineal, grandes deformaciones, grandes deformaciones inelásticas (plásticas o viscoplásticas), condiciones de contorno no lineales, tipos de contorno variables debido a la interacción por contacto friccional, fenómenos de desgaste por rozamiento, grandes deslizamientos, cambios de fase con generación/absorción de calor latente, grandes variaciones térmicas, contacto térmico, generación de calor por disipación friccional y otros fenómenos de acoplamiento termomecánico. En las últimas décadas, se ha producido un interés creciente por estos temas, tanto por parte de investigadores como de empresas de distintos sectores, tales como el automovilístico y el aeronáutico, entre otros, motivado por la necesidad de obtener productos finales de alta calidad, con altas prestaciones termomecánicas, y de reducir costes de producción.

Los problemas termomecánicos acoplados involucran, típicamente, diferentes escalas de tiempo asociadas con los campos mecánico y térmico. Está ampliamente aceptado que

un esquema de integración temporal efectivo del problema termomecánico acoplado debería tener en cuenta y aprovechar estas distintas escalas temporales asociadas a cada uno de los campos. Estas consideraciones motivaron la aparición de los algoritmos secuenciales, mediante los cuales el problema original se divide en varios subproblemas que se resuelven de forma consecutiva. Esta técnica resulta especialmente atractiva ya que permite evitar los típicamente grandes y no simétricos sistemas de ecuaciones que se obtienen en la formulación monolítica del problema acoplado, obteniéndose en este caso subsistemas de ecuaciones mucho menores, típicamente simétricos. Para problemas termomecánicos acoplados, una formulación secuencial natural del problema se puede obtener a partir de la división del problema original en dos subsistemas, un problema mecánico a temperatura constante seguido de un problema térmico a configuración fija. Tal como fue mostrado por SIMO & MIEHE (1991), esta clase de algoritmos puede enmarcarse dentro de los algoritmos de fórmula producto que surgen de la partición del operador que define la evolución de las ecuaciones de gobierno. El problema se resuelve en dos pasos, un primer paso en el que se resuelve el problema mecánico en condiciones isotérmicas, seguido de la solución de un problema térmico a configuración fija. Sin embargo, ARMERO & SIMO (1992A, 1992B, 1993) mostraron que una partición del problema original como la mencionada, no preservaba la propiedad de contractividad inherente al problema original, conduciendo por lo tanto a un algoritmo secuencial que como mucho será sólo condicionalmente estable. ARMERO & SIMO (1992, 1993) propusieron una partición alternativa, que denominaremos partición isentrópica, mediante la cual el problema original se descompone en un problema mecánico isentrópico (a entropía constante, pero con variación de temperatura) seguido de un problema térmico a configuración fija. Esta partición del problema termomecánico acoplado preserva las propiedades cruciales del problema original, permitiendo por lo tanto obtener un algoritmo secuencial incondicionalmente estable.

Desde un punto de vista matemático, la solución de un problema de contacto friccional supone encontrar la solución de un problema de contorno con valores iniciales, dentro de un espacio de soluciones con restricciones. La formulación de la forma débil de la ecuación de balance de cantidad de movimiento, induce limitaciones en las variaciones admisibles de los desplazamientos en el espacio tangente al espacio solución, impuestas por las restricciones físicas de contacto, conduciendo a desigualdades variacionales. Véase, por ejemplo, KIKUCHI & ODEN (1988) y DUVAUT & LIONS (1972). La introducción de una regularización de las restricciones de contacto friccional, utilizando por ejemplo métodos de penalización o de lagrangiano aumentado, permite evitar la necesidad de encontrar la solución del problema de contacto friccional dentro de un espacio de soluciones con restricciones y conduce a una formulación muy conveniente del problema desde el punto de vista numérico y de implementación computacional. El método de penalización ha sido utilizado por un número importante de investigadores, entre los que podríamos citar a ODEN & PIRES (1984), CHENG & KIKUCHI (1985), HALLQUIST, GOUDREAU & BENSON (1985), SIMO, WRIGGERS & TAYLOR (1985), CURNIER & ALART (1988), WRIGGERS, VU VAN & STEIN (1990), BELYTSCHKO & NEAL (1991), LAURSEN (1992), LAURSEN & SIMO (1992, 1993), entre otros muchos. Por otro lado, algoritmos basados en el método del lagrangiano aumentado han sido utilizados, entre otros, por LAURSEN (1992), SIMO & LAURSEN (1992), LAURSEN & SIMO (1992, 1994) y LAURSEN & GOVINDJEE (1994).



Una de las principales ventajas que tiene la regularización del problema de contacto friccional, es que se obtiene una formulación resultante conducida por los desplazamientos, con una estructura similar a la del problema plástico, permitiendo por lo tanto la utilización de los modelos numéricos y algoritmos desarrollados para problemas de plasticidad computacional. Véase por ejemplo SIMO & HUGHES (1998) y SIMO (1998), para una excelente presentación del análisis y solución numérica de problemas de plasticidad y termoplasticidad computacional.

El resto del contenido del capítulo es el siguiente. En el apartado 2 se presenta la formulación en el continuo del problema termomecánico no lineal en deformaciones finitas, con restricciones de contacto friccional. La formulación del problema termomecánico de contacto friccional se presenta en el apartado 3. En el apartado 4 se presenta la formulación discreta del problema termomecánico acoplado de contacto friccional y se analizan dos algoritmos de integración de formula producto, basados en la partición isotérmica e isentrópica del problema. Se presentan también los algoritmos de integración del problema friccional y se dan detalles de la implementación del modelo termomecánico de contacto friccional por el método de los elementos finitos. Por último, en el apartado 5 se presenta una serie de ejemplos numéricos de aplicación.

## 1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA TERMOMECÁNICO ACOPLADO

Se describe a continuación el sistema cuasi-lineal de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, las condiciones de contorno y las condiciones iniciales, que gobiernan la evolución del problema termomecánico acoplado. Consideraremos, en primer lugar, ecuaciones constitutivas generales que incorporan modelos actuales de plasticidad en deformación finita, y en particular, modelos basados en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformación y en la descomposición aditiva de la entropía específica. El modelo constitutivo se derivará dentro de un marco termodinámico consistente.

### 1.2.1 Planteamiento del problema. Forma local de las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico acoplado

Sea  $2 \leq n_{dim} \leq 3$  la dimensión del espacio y sea  $I := [0, T] \subset \mathbb{R}_+$  el intervalo de tiempo considerado. Sea el conjunto abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$  con contorno  $\partial\Omega$  y el conjunto cerrado  $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$ , la configuración de referencia de un medio continuo  $\mathcal{B}$ .

Sea  $\varphi : \bar{\Omega} \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$  la aplicación que preserva la orientación y representa el movimiento del medio  $\mathcal{B}$ , con descripción material de la velocidad  $\mathbf{V} := \partial_t \varphi = \dot{\varphi}$ , gradiente de deformación  $\mathbf{F} := D\varphi$  y temperatura absoluta  $\Theta : \bar{\Omega} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ . Para cada instante de tiempo  $t \in I$ , la aplicación  $t \in I \mapsto \varphi_t := \varphi(\cdot, t)$  representa una familia de configuraciones de un parámetro, indexada por el tiempo  $t$ , que hace corresponder a la configuración de referencia del medio  $\mathcal{B}$  su configuración actual o deformada  $\mathcal{S}_t : \varphi_t(\mathcal{B}) \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$ .

(A) *Forma local de las ecuaciones de gobierno.* El sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que gobiernan el problema termomecánico acoplado está definido

por las ecuaciones de balance de la cantidad de movimiento y de balance de energía, juntamente con las restricciones que aparecen por la segunda ley de la termodinámica. El sistema debe ser complementado con las adecuadas ecuaciones constitutivas definidas de forma consistente en el marco de la termodinámica. Adicionalmente, se deberán considerar las adecuadas condiciones de contorno y condiciones iniciales.

i. *Forma local de las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y de energía.* La forma local material de las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y de balance de energía para el cuerpo  $\mathcal{B}^{(i)}$ , pueden escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden, en la forma, véase por ejemplo, TRUESDELL & NOLL [1965],

$$\left. \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varphi}}^{(i)} &= \mathbf{V}^{(i)} \\ \rho_0^{(i)} \dot{\mathbf{V}}^{(i)} &= \text{DIV}[\mathbf{P}^{(i)}] + \mathbf{B}^{(i)} \\ \Theta^{(i)} \dot{H}^{(i)} &= -\text{DIV}[\mathbf{Q}^{(i)}] + R^{(i)} + \mathcal{D}_{int}^{(i)} \end{aligned} \right\} \quad \text{en } \bar{\Omega}^{(i)} \times I \quad (1.1)$$

donde  $\boldsymbol{\varphi}^{(i)} : \bar{\Omega}^{(i)} \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$  es la aplicación que define el movimiento del medio en el intervalo de interés  $I := [0, T]$ ,  $\mathbf{V}^{(i)} : \bar{\Omega}^{(i)} \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$  es el campo de velocidades del medio,  $\rho_0^{(i)} : \bar{\Omega}^{(i)} \rightarrow \mathbb{R}_+$  es la densidad en la configuración material,  $\mathbf{B}^{(i)} : \bar{\Omega}^{(i)} \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$  es el vector de fuerzas másicas por unidad de volumen en la configuración de referencia,  $\text{DIV}[\cdot]$  es el operador diferencial de divergencia material,  $\mathbf{P}^{(i)}$  es el primer tensor (no simétrico) de Piola-Kirchhoff,  $\Theta^{(i)}$  la temperatura absoluta,  $H^{(i)}$  la densidad de entropía o entropía por unidad de volumen en la configuración material,  $\mathbf{Q}^{(i)}$  el flujo nominal de calor por unidad de superficie en la configuración material,  $R^{(i)}$  es el término (prescrito) de fuente de calor en la configuración material o generación de calor por unidad de volumen material y unidad de tiempo,  $\mathcal{D}_{int}^{(i)}$  es la disipación interna por unidad de volumen material. Como caso particular, las ecuaciones de gobierno para un problema cuasi-estático pueden obtenerse haciendo  $\rho_0^{(i)} = 0$  en (1.1).

Adicionalmente, la entropía  $H^{(i)}$  y el tensor de tensiones primero de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{P}^{(i)}$  se definen mediante ecuaciones constitutivas, típicamente formuladas en términos de la función de energía interna por unidad de volumen material  $E^{(i)}$ , estando sujetas a las restricciones impuestas por el segundo principio de la termodinámica.

ii. *Restricciones termodinámicas.* La densidad (material) de entropía  $H^{(i)}$  y el tensor de tensiones primero de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{P}^{(i)}$  se definen mediante ecuaciones constitutivas, típicamente formuladas en términos de la función de energía interna por unidad de volumen material  $E^{(i)}$ , y sujetas a la siguiente restricción en la disipación interna  $\mathcal{D}_{int}^{(i)}$  impuestas por la ecuación de Clausius-Plank, véase por ejemplo, TRUESDELL & NOLL [1965],

$$\mathcal{D}_{int}^{(i)} = \mathbf{P}^{(i)} : \dot{\mathbf{F}}^{(i)} + \Theta^{(i)} \dot{H}^{(i)} - \dot{E}^{(i)} \geq 0 \quad \text{en } \bar{\Omega}^{(i)} \times I \quad (1.2)$$

donde  $\mathbf{F}^{(i)} := D\boldsymbol{\varphi}^{(i)}$  es el tensor gradiente de deformación.

Adicionalmente, el flujo nominal de calor por unidad de superficie material  $\mathbf{Q}^{(i)}$ , estará definido a través de una ecuación constitutiva, como por ejemplo la Ley de Fourier, y

sometido a la siguiente restricción sobre la disipación por conducción:

$$\mathcal{D}_{con}^{(i)} = -\frac{1}{\Theta^{(i)}} \text{GRAD}[\Theta^{(i)}] \cdot \mathbf{Q}^{(i)} \geq 0 \quad \text{en } \Omega^{(i)} \times I \quad (1.3)$$

**iii. Condiciones de contorno.** Vamos a suponer que tenemos las siguientes condiciones de contorno. El movimiento  $\varphi^{(i)}$  está prescrito en la parte del contorno  $\Gamma_\varphi^{(i)} \subset \partial\Omega^{(i)}$ , el vector nominal de tracciones  $\mathbf{t}^{(i)}$  está prescrito en la parte del contorno  $\Gamma_\sigma^{(i)} \subset \partial\Omega^{(i)}$ , con vector unitario normal exterior  $\mathbf{N}^{(i)} : \Gamma_\sigma^{(i)} \rightarrow S^2$ , la temperatura  $\Theta^{(i)}$  está prescrita en la parte del contorno  $\Gamma_\Theta^{(i)} \subset \partial\Omega^{(i)}$  y el flujo nominal saliente de calor por unidad de superficie material está prescrito en la parte del contorno  $\Gamma_Q^{(i)} \subset \partial\Omega^{(i)}$ , con normal unitaria exterior  $\mathbf{N}^{(i)} : \Gamma_\sigma^{(i)} \rightarrow S^2$ , de acuerdo con los siguientes valores:

$$\left. \begin{array}{ll} \varphi^{(i)} = \bar{\varphi}^{(i)} & \text{sobre } \Gamma_\varphi^{(i)} \times I \\ \mathbf{t}^{(i)} = \mathbf{P}^{(i)} \cdot \mathbf{N}^{(i)} = \bar{\mathbf{t}}^{(i)} & \text{sobre } \Gamma_\sigma^{(i)} \times I \\ \Theta^{(i)} = \bar{\Theta}^{(i)} & \text{sobre } \Gamma_\Theta^{(i)} \times I \\ \mathbf{Q}^{(i)} = \mathbf{Q}^{(i)} \cdot \mathbf{N}^{(i)} = \bar{\mathbf{Q}}^{(i)} & \text{sobre } \Gamma_Q^{(i)} \times I \end{array} \right\} \quad (1.4)$$

donde  $\bar{\varphi}^{(i)} : \Gamma_\varphi^{(i)} \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$ ,  $\bar{\mathbf{t}}^{(i)} : \Gamma_\sigma^{(i)} \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$ ,  $\bar{\Theta}^{(i)} : \Gamma_\Theta^{(i)} \times I \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\bar{\mathbf{Q}}^{(i)} : \Gamma_Q^{(i)} \times I \rightarrow \mathbb{R}$  son valores prescritos de configuración, tracción nominal, temperatura y flujo (saliente) nominal de calor.

Como es habitual, supondremos que se verifican las siguientes condiciones de completitud y de compatibilidad en las definiciones de las condiciones de contorno:

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma_\varphi^{(i)} \cup \Gamma_\sigma^{(i)} \cup \Gamma^{(i)} = \partial\Omega^{(i)} \\ \Gamma_\varphi^{(i)} \cap \Gamma_\sigma^{(i)} = \Gamma_\varphi^{(i)} \cap \Gamma^{(i)} = \Gamma_\sigma^{(i)} \cap \Gamma^{(i)} = \emptyset \\ \Gamma_\Theta^{(i)} \cup \Gamma_Q^{(i)} \cup \Gamma^{(i)} = \partial\Omega^{(i)} \\ \Gamma_\Theta^{(i)} \cap \Gamma_Q^{(i)} = \Gamma_\Theta^{(i)} \cap \Gamma^{(i)} = \Gamma_Q^{(i)} \cap \Gamma^{(i)} = \emptyset \end{array} \right\} \quad (1.5)$$

donde se ha denominado genéricamente como  $\Gamma^{(i)}$  la parte del contorno que en cada caso completa  $\partial\Omega^{(i)}$ , y que representa la parte del contorno en la que actúan las restricciones impuestas por el contacto.

**iv. Condiciones iniciales.** Adicionalmente, supondremos que existen las siguientes condiciones iniciales

$$\left. \begin{array}{l} \varphi^{(i)}(\cdot, t)|_{t=0} = \bar{\varphi}_0^{(i)}(\cdot) \\ \mathbf{V}^{(i)}(\cdot, t)|_{t=0} = \bar{\mathbf{V}}_0^{(i)}(\cdot) \\ \Theta^{(i)}(\cdot, t)|_{t=0} = \bar{\Theta}_0^{(i)}(\cdot) \end{array} \right\} \quad \text{en } \bar{\Omega}^{(i)} \quad (1.6)$$

(B) *Ecuaciones constitutivas de un modelo termoplástico genérico.* Consideramos a continuación un modelo constitutivo termoplástico genérico definido en función del tensor

gradiente de deformación  $\mathbf{F}^{(i)} := D\varphi^{(i)}$ , un conjunto de variables internas que denominaremos colectivamente como  $\mathbf{G}^{(i)}$ , que pueden incluir fenómenos de endurecimiento isotrópico o cinemático, y la densidad de entropía material  $H^{(i)}$ .

Una expresión genérica para la densidad de energía interna, energía interna por unidad de volumen material, tiene la expresión:

$$E^{(i)} := \hat{E}^{(i)}(\mathbf{F}^{(i)}, \mathbf{G}^{(i)}, H^{(i)}) \quad (1.7)$$

Siguiendo el procedimiento habitual, conocido como método de Coleman, sustituyendo (1.7) en la ecuación de Clausius-Plank, la restricción impuesta por la segunda ley de la termodinámica, conduce a las siguientes ecuaciones constitutivas para el tensor primero de tensiones de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{P}^{(i)}$  y la temperatura absoluta  $\Theta^{(i)}$ , junto con la expresión reducida de la disipación interna:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(i)} &:= \partial_{\mathbf{F}^{(i)}} \hat{E}^{(i)}(\mathbf{F}^{(i)}, \mathbf{G}^{(i)}, H^{(i)}), \\ \Theta^{(i)} &:= \partial_{H^{(i)}} \hat{E}^{(i)}(\mathbf{F}^{(i)}, \mathbf{G}^{(i)}, H^{(i)}), \\ \mathbf{A}^{(i)} &:= -\partial_{\mathbf{G}^{(i)}} \hat{E}^{(i)}(\mathbf{F}^{(i)}, \mathbf{G}^{(i)}, H^{(i)}), \\ \mathcal{D}_{int}^{(i)} &:= \mathbf{A}^{(i)} \cdot \dot{\mathbf{G}}^{(i)} \geq 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde hemos introducido la variable  $\mathbf{A}^{(i)}$  como el conjunto de variables que son termodinámicamente conjugadas del conjunto de variables internas colectivamente denominadas como  $\mathbf{G}^{(i)}$ .

Las ecuaciones de evolución para el conjunto de variables internas  $\mathbf{G}^{(i)}$  pueden expresarse como:

$$\dot{\mathbf{G}}^{(i)} = \hat{G}_{\mathbf{F}^{(i)}}^{(i)}(\mathbf{P}^{(i)}, \mathbf{A}^{(i)}, \Theta^{(i)}) \quad (1.9)$$

donde  $\hat{G}_{\mathbf{F}^{(i)}}^{(i)}$  es una función prescrita, no necesariamente regular, que depende implícitamente de  $\mathbf{F}^{(i)}$  con el objeto de asegurar la invarianza frente a un cambio de base. Nótese que las ecuaciones de evolución (1.9) están sujetas a la restricción impuesta por (1.8)<sub>4</sub>.

Adicionalmente, consideramos una ecuación constitutiva genérica para el flujo de calor  $\mathbf{Q}^{(i)}$ :

$$\mathbf{Q}^{(i)} = \hat{Q}^{(i)}(\mathbf{F}^{(i)}, \mathbf{G}^{(i)}, H^{(i)}) \quad (1.10)$$

que está sujeta a la restricción impuesta para la disipación por conducción  $\mathcal{D}_{con}^{(i)} \geq 0$ .

(B.1) *Modelo constitutivo termoplástico basado en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformación.* Consideramos a continuación un modelo fenomenológico de plasticidad en grandes deformaciones basado en la descomposición multiplicativa local del tensor gradiente de deformación en una parte elástica y otra plástica. Esta factorización local fue introducida en un contexto fenomenológico de la plasticidad por LEE & LIU [1967] y LEE [1969], que interpretaban la parte plástica del tensor gradiente de la deformación como una variable interna microestructural. Mecanismos de endurecimiento en el material, que tienen lugar a nivel microestructural, se caracterizan mediante un conjunto adicional de variables internas fenomenológicas, denominadas colectivamente como  $\xi_\alpha$ .

En el contexto de la formulación termomecánica acoplada, consideramos además una descomposición aditiva de la entropía local en una parte elástica y otra plástica. La parte plástica de la entropía local puede verse como una variable interna adicional que representa fenómenos microestructurales de dislocación. Esta descomposición aditiva de la entropía local fue adoptada por SIMO & MIEHE [1992].

Las consideraciones anteriores, motivan la definición del siguiente conjunto de variables internas (con el objeto de simplificar la notación, eliminaremos en la medida de lo posible, el índice  $[\cdot]^{(i)}$  que representa la particularización de las variables para el cuerpo  $\mathcal{B}^{(i)}$ )

$$\mathbf{G} := \{\mathbf{F}^p, \xi_\alpha, H^p\} \quad (1.11)$$

con

$$\mathbf{F} := \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p, \quad \text{y} \quad H := H^e + H^p \quad (1.12)$$

Consideraremos que la función de energía interna  $\hat{E}$  depende de la parte elástica del tensor gradiente de deformación  $\mathbf{F}^e$ , de la parte elástica de la entropía local  $H^e$  y de las variables internas plásticas de endurecimiento  $\xi_\alpha$ . Vamos a suponer por simplicidad que las contribuciones termoelásticas y de endurecimiento plástico están desacopladas, de manera que la energía interna tiene la forma:

$$E := \hat{E}(\bar{\mathbf{C}}^e, H^e) + \hat{\mathcal{H}}(\xi_\alpha) \quad (1.13)$$

donde  $\bar{\mathbf{C}}^e := \mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e$  es el tensor de deformación elástico derecho de Cauchy-Green, que puede verse como un tensor covariante de segundo orden definido localmente en la configuración intermedia.

PROPOSICIÓN 1.1. La derivada material del tensor elástico derecho de deformación de Cauchy-Green  $\bar{\mathbf{C}}^e$  puede escribirse como:

$$\frac{1}{2} \dot{\bar{\mathbf{C}}}^e := \bar{\mathbf{D}} - \bar{\mathbf{D}}^p \quad (1.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}^p &:= \text{sym}[\dot{\bar{\mathbf{C}}}^e \bar{\mathbf{L}}^p], & \text{donde} & \quad \bar{\mathbf{L}}^p := \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1} \\ \bar{\mathbf{D}} &:= \text{sym}[\dot{\bar{\mathbf{C}}}^e \bar{\mathbf{L}}], & \text{donde} & \quad \bar{\mathbf{L}} := \mathbf{F}^{e-1} \mathbf{l} \mathbf{F}^e \quad \text{y} \quad \mathbf{l} := \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde  $\bar{\mathbf{D}}^p$  y  $\bar{\mathbf{D}}$  son, respectivamente, el tensor plástico de velocidad de deformación y el tensor velocidad de deformación. Podemos ver estos tensores, como tensores covariantes definidos en la configuración local intermedia como la parte simétrica de los tensores de dos-puntos (contravariante-covariante), también definidos en la configuración intermedia, que son la parte plástica del tensor gradiente de velocidad  $\bar{\mathbf{L}}^p$  y la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad  $\bar{\mathbf{L}}$ , respectivamente. Nótese que en estas definiciones el tensor elástico de Cauchy-Green  $\bar{\mathbf{C}}^e$  actúa como tensor métrico en la configuración intermedia. De forma consistente con estas definiciones, el tensor de dos puntos gradiente de la velocidad  $\bar{\mathbf{L}}$ , puede verse como el pull-back a la configuración intermedia del tensor de dos puntos

gradiente espacial de la velocidad  $\mathbf{l}$ , con la parte elástica del tensor gradiente de deformación  $\mathbf{F}^e$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 1.2. Utilizando las relaciones anteriores, se puede establecer la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{\mathbf{C}}^e} \hat{\mathbf{E}} : \dot{\bar{\mathbf{C}}}^e &:= 2\partial_{\bar{\mathbf{C}}^e} \hat{\mathbf{E}} : \bar{\mathbf{D}} - 2\partial_{\bar{\mathbf{C}}^e} \hat{\mathbf{E}} : \bar{\mathbf{D}}^p \\ &:= (\mathbf{F}^e 2\partial_{\bar{\mathbf{C}}^e} \hat{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{p-T}) : \dot{\mathbf{F}} - (\mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e 2\partial_{\bar{\mathbf{C}}^e} \hat{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{p-T}) : \dot{\mathbf{F}}^p \end{aligned} \quad (1.16)$$

$\square$

Utilizando las expresiones anteriores, la restricción impuesta por la segunda ley de la termodinámica a través de la ecuación de Clausius-Planck, conduce a las siguientes ecuaciones constitutivas y expresión para la disipación interna:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &:= 2\partial_{\bar{\mathbf{C}}^e} \hat{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{C}}^e, H^e), \\ \Theta &:= \partial_{H^e} \hat{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{C}}^e, H^e), \\ \beta^\alpha &:= -\partial_{\xi_\alpha} \hat{\mathcal{H}}(\xi_\alpha), \\ \mathcal{D}_{int} &:= \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{D}}^p + \Theta \dot{H}^p + \beta^\alpha \dot{\xi}_\alpha \geq 0, \end{aligned} \quad (1.17)$$

donde  $\bar{\mathbf{S}}$  es el segundo tensor (contravariante) de Piola-Kirchhoff relativo a la configuración intermedia

Alternativamente, podemos escribir las ecuaciones constitutivas y la disipación interna como:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &:= \mathbf{F}^e 2\partial_{\bar{\mathbf{C}}^e} \hat{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{C}}^e, H^e) \mathbf{F}^{p-T}, \\ \Theta &:= \partial_{H^e} \hat{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{C}}^e, H^e), \\ \beta^\alpha &:= -\partial_{\xi_\alpha} \hat{\mathcal{H}}(\xi_\alpha), \\ \mathcal{D}_{int} &:= (\mathbf{F}^{eT} \mathbf{P}) : \dot{\mathbf{F}}^p + \Theta \dot{H}^p + \beta^\alpha \dot{\xi}_\alpha \geq 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

donde el primer tensor (de dos puntos) de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{P}$  puede expresarse en función del segundo tensor de tensiones (contravariante) de Piola-Kirchhoff en la configuración intermedia, mediante las operaciones clásicas de pull-back/push-forward, dando lugar a la relación  $\mathbf{P} = \mathbf{F}^e \bar{\mathbf{S}} \mathbf{F}^{p-T}$ . Además, el tensor de dos puntos, entre la configuración intermedia y la de referencia,  $\bar{\mathbf{P}} := \mathbf{F}^{eT} \mathbf{P}$ , puede verse como el tensor conjugado de la derivada material del tensor gradiente de deformación plástico  $\dot{\mathbf{F}}^p$ . Nótese también que la ecuación de balance del momento de la cantidad de movimiento que implica la simetría del tensor segundo de Piola-Kirchhoff en la configuración intermedia  $\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}}^T$ , implica la restricción  $\mathbf{F}^{e-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^{pT} = \mathbf{F}^p \mathbf{P}^T \mathbf{F}^{e-1}$  en el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{P}$ .

Una expresión equivalente para la disipación interna es:

$$\mathcal{D}_{int} := \bar{\mathbf{\Sigma}} : \bar{\mathbf{L}}^p + \Theta \dot{H}^p + \beta^\alpha \dot{\xi}_\alpha, \quad (1.19)$$

donde se ha introducido el tensor  $\bar{\mathbf{\Sigma}} := \bar{\mathbf{C}}^e \bar{\mathbf{S}}$  como tensor conjugado del tensor gradiente de velocidad plástico en la configuración intermedia. Nótese también que la ecuación de

balance de momento de la cantidad de movimiento conduce en este caso a la restricción  $\bar{\mathbf{C}}^{e-1} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^T \bar{\mathbf{C}}^{e-T}$ .

Nótese de nuevo, que el tensor elástico derecho de Cauchy-Green juega el papel de tensor métrico en la configuración intermedia, en la definición del tensor de dos puntos  $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$ . Este tensor de tensiones es conjugado del tensor de dos puntos gradiente de velocidad plástico, definido en la configuración intermedia,  $\bar{\mathbf{L}}^p$ .

En el marco de la formulación de problemas termomecánicos acoplados, podemos descomponer la disipación interna en suma de la disipación mecánica y de la disipación térmica, como:

$$\mathcal{D}_{int} := \mathcal{D}_{mech} + \mathcal{D}_{ther} \quad (1.20)$$

donde

$$\mathcal{D}_{mech} := \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{D}}^p + \beta^\alpha \dot{\xi}_\alpha = \bar{\boldsymbol{\Sigma}} : \bar{\mathbf{L}}^p + \beta^\alpha \dot{\xi}_\alpha, \quad \mathcal{D}_{ther} := \Theta \dot{H}^p. \quad (1.21)$$

La respuesta termoplástica del modelo puede definirse a partir de una función de fluencia de la forma  $\Phi = \hat{\Phi}(\bar{\mathbf{S}}, \Theta, \beta^\alpha)$ . En el contexto de plasticidad asociada, la evolución de las variables internas plásticas puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}^p &:= \gamma \partial_{\bar{\mathbf{S}}} \hat{\Phi}(\bar{\mathbf{S}}, \Theta, \beta^\alpha), \\ \dot{H}^p &:= \gamma \partial_{\Theta} \hat{\Phi}(\bar{\mathbf{S}}, \Theta, \beta^\alpha), \\ \dot{\xi}_\alpha &:= \gamma \partial_{\beta^\alpha} \hat{\Phi}(\bar{\mathbf{S}}, \Theta, \beta^\alpha). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Alternativamente, suponiendo una función de fluencia definida como  $\Phi = \tilde{\Phi}(\bar{\boldsymbol{\Sigma}}, \Theta, \beta^\alpha)$ , la ley de evolución de las variables internas plásticas puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{L}}^p &:= \gamma \partial_{\bar{\boldsymbol{\Sigma}}} \tilde{\Phi}(\bar{\boldsymbol{\Sigma}}, \Theta, \beta^\alpha), \\ \dot{H}^p &:= \gamma \partial_{\Theta} \tilde{\Phi}(\bar{\boldsymbol{\Sigma}}, \Theta, \beta^\alpha), \\ \dot{\xi}_\alpha &:= \gamma \partial_{\beta^\alpha} \tilde{\Phi}(\bar{\boldsymbol{\Sigma}}, \Theta, \beta^\alpha). \end{aligned} \quad (1.23)$$

**OBSERVACIÓN 1.3.** El modelo termoplástico anterior se ha definido considerando una expresión de la energía interna  $E = \hat{E}(\bar{\mathbf{C}}^e, H^e) + \mathcal{H}(\xi_\alpha)$ , como una función del tensor elástico derecho de Cauchy-Green (definido en la configuración intermedia) y la entropía elástica, más un potencial plástico función de las variables internas plásticas de endurecimiento. Alternativamente, podríamos adoptar la temperatura absoluta en lugar de la entropía elástica como variable principal, introduciendo la función de energía libre de Helmholtz  $\Psi = \hat{\Psi}(\bar{\mathbf{C}}^e, \Theta) + \hat{\mathcal{H}}(\xi_\alpha)$  a partir de la transformación de Legendre  $\hat{\Psi} = \hat{E} - \Theta H^e$ .

En términos de la función de energía libre, la disipación interna puede escribirse como:

$$\mathcal{D}_{int} := \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + H^e \dot{\Theta} - \dot{\Psi} + \Theta \dot{H}^p \geq 0 \quad (1.24)$$

con  $\mathcal{D}_{int} := \mathcal{D}_{mech} + \mathcal{D}_{ther}$ , donde

$$\mathcal{D}_{mech} := \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + H^e \dot{\Theta} - \dot{\Psi} \geq 0, \quad \text{y} \quad \mathcal{D}_{ther} := \Theta \dot{H}^p \quad (1.25)$$

Calculando la derivada material de la función de energía libre y aplicando la regla de la cadena, el método de Coleman conduce a las siguientes expresiones de las ecuaciones constitutivas y de la disipación interna

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{S}} &:= 2\partial_{\bar{\mathbf{C}}^e} \hat{\Psi}(\bar{\mathbf{C}}^e, \Theta), \\
 H^e &:= -\partial_{\Theta} \hat{\Psi}(\bar{\mathbf{C}}^e, \Theta), \\
 \beta^\alpha &:= -\partial_{\xi_\alpha} \hat{\mathcal{H}}(\xi_\alpha), \\
 \mathcal{D}_{int} &:= \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{D}}^p + \Theta \dot{H}^p + \beta^\alpha \dot{\xi}_\alpha \geq 0,
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Utilizando la descomposición aditiva de la entropía en su parte elástica y plástica, la descomposición aditiva de la disipación en su parte mecánica y parte térmica, y la ecuación constitutiva para la entropía elástica, la ecuación de balance de la energía puede escribirse, de forma alternativa, como:

$$c_0 \dot{\Theta} = -\text{DIV}[\mathbf{Q}] + R - \mathcal{H}^{ep} + \mathcal{D}_{mech} \tag{1.27}$$

donde  $c_0 := -\Theta \partial_{\Theta}^2 \hat{\Psi}(\bar{\mathbf{C}}^e, \Theta)$  es la capacidad calorífica en la configuración de referencia,  $\mathcal{H}^{ep} := -\Theta \partial_{\Theta}^2 \bar{\mathbf{C}}^e \hat{\Psi}(\bar{\mathbf{C}}^e, \Theta) : \dot{\bar{\mathbf{C}}}^e$  representa el término de acoplamiento por efecto Joule y  $\mathcal{D}_{mech} := \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{D}}^p + \beta^\alpha \dot{\xi}_\alpha$  es la disipación mecánica.  $\square$

### 1.3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA TERMOMECÁNICO DE CONTACTO FRICCIONAL

En este apartado vamos a presentar la descripción y la formulación del problema termomecánico de contacto, en el contexto de una cinemática no lineal con grandes deformaciones y deslizamientos.

#### 1.3.1 Notación

Sea  $2 \leq n_{dim} \leq 3$  la dimensión del espacio y  $I := [0, T] \subset \mathbb{R}_+$  el intervalo de tiempo de interés. Sean  $\Omega^{(1)} \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$  y  $\Omega^{(2)} \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$  conjuntos abiertos con contornos regulares  $\partial\Omega^{(1)}$  y  $\partial\Omega^{(2)}$  y sean los conjuntos cerrados  $\bar{\Omega}^{(1)} := \Omega^{(1)} \cup \partial\Omega^{(1)}$  y  $\bar{\Omega}^{(2)} := \Omega^{(2)} \cup \partial\Omega^{(2)}$ , las configuraciones de referencia de dos medios continuos  $\mathcal{B}^{(1)}$  y  $\mathcal{B}^{(2)}$ , con partículas materiales etiquetadas como  $\mathbf{X} \in \bar{\Omega}^{(1)}$  y  $\mathbf{Y} \in \bar{\Omega}^{(2)}$ , respectivamente.

Sea  $\varphi^{(i)} : \bar{\Omega}^{(i)} \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$  la función vectorial que preserva la orientación y caracteriza el movimiento del medio  $\mathcal{B}^{(i)}$ , con velocidad  $\mathbf{V}^{(i)} := \partial_t \varphi^{(i)}$ , gradiente de deformación  $\mathbf{F}^{(i)} := D\varphi^{(i)}$  y temperatura absoluta  $\Theta^{(i)} : \bar{\Omega}^{(i)} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ . Para cada instante de tiempo  $t \in I$ , la aplicación  $t \in I \mapsto \varphi_t^{(i)} := \varphi^{(i)}(\cdot, t)$  representa una familia, de un parametro, de configuraciones indexadas por el tiempo  $t$ , que hace corresponder a la configuración de referencia  $\mathcal{B}^{(i)}$ , su posición en el espacio definido por la configuración espacial  $\mathcal{S}_t^{(i)} : \varphi_t^{(i)}(\mathcal{B}^{(i)}) \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$ .

Spondremos que no existen fuerzas de contacto entre los dos medios en la configuración de referencia. Las configuraciones espaciales subsiguientes harán que los dos medios



entren en contacto y generen fuerzas de contacto en una parte del contorno durante el intervalo de tiempo  $I = [0, T]$ .

Denominaremos *superficie de contacto*  $\Gamma^{(i)} \subset \partial\Omega^{(i)}$  a la parte del contorno del medio  $\mathcal{B}^{(i)}$  que contiene todas las partículas materiales que pueden entrar en contacto en algún instante de tiempo  $t \in I$ . Denominaremos  $\gamma^{(i)} := \varphi_t^{(i)}(\Gamma^{(i)})$  la configuración actual o deformada de la superficie  $\Gamma^{(i)}$ . A continuación, vamos a prestar especial atención a los puntos materiales de las superficies de contacto  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  y  $\mathbf{Y} \in \Gamma^{(2)}$ . La posición actual en la configuración espacial de estas partículas vendrá dada por  $\mathbf{x} = \varphi_t^{(1)}(\mathbf{X}) \in \gamma^{(1)}$  y  $\mathbf{y} = \varphi_t^{(2)}(\mathbf{Y}) \in \gamma^{(2)}$ . Véase la FIGURA 1.1 para una ilustración de la notación utilizada.

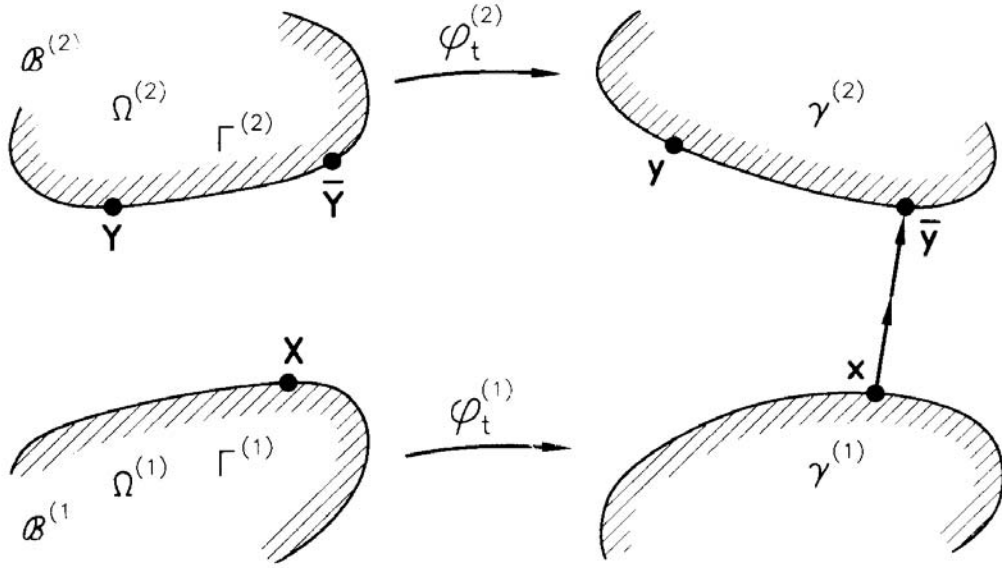


FIGURA 1.1. Descripción esquemática de la interacción entre dos medios en las configuraciones de referencia y deformada.

(A) *Parametrización de las superficies de contacto.* Sea  $\mathcal{A}^{(i)} \subset \mathbb{R}^{n_{dim}-1}$  un dominio paramétrico de referencia para la superficie de contacto del medio  $\mathcal{B}^{(i)}$ . La parametrización de las superficies de contacto para cada medio  $\mathcal{B}^{(i)}$  se introduce mediante una familia (que preserva la orientación) de aplicaciones de un parámetro indexadas por el tiempo  $\psi_t^{(i)} : \mathcal{A}^{(i)} \subset \mathbb{R}^{n_{dim}-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$  tal que  $\Gamma^{(i)} := \psi_0^{(i)}(\mathcal{A}^{(i)})$  y  $\gamma^{(i)} := \psi_t^{(i)}(\mathcal{A}^{(i)})$ . Utilizando la regla de composición de aplicaciones, se puede obtener la relación  $\psi_t^{(i)} = \varphi_t^{(i)} \circ \psi_0^{(i)}$ .

En particular, para cada punto material  $\mathbf{Y} \in \Gamma^{(2)}$ , con posición en la configuración espacial  $\mathbf{y} \in \gamma^{(2)}$ , existe algún punto  $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{A}^{(2)}$  tal que  $\mathbf{Y} := \psi_0^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$  y  $\mathbf{y} := \psi_t^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$ . Se va a suponer en lo que sigue que estas parametrizaciones tienen las condiciones mínimas necesarias de regularidad. La FIGURA 1.2 muestra la parametrización de las configuraciones de referencia y deformada de una superficie de contacto.

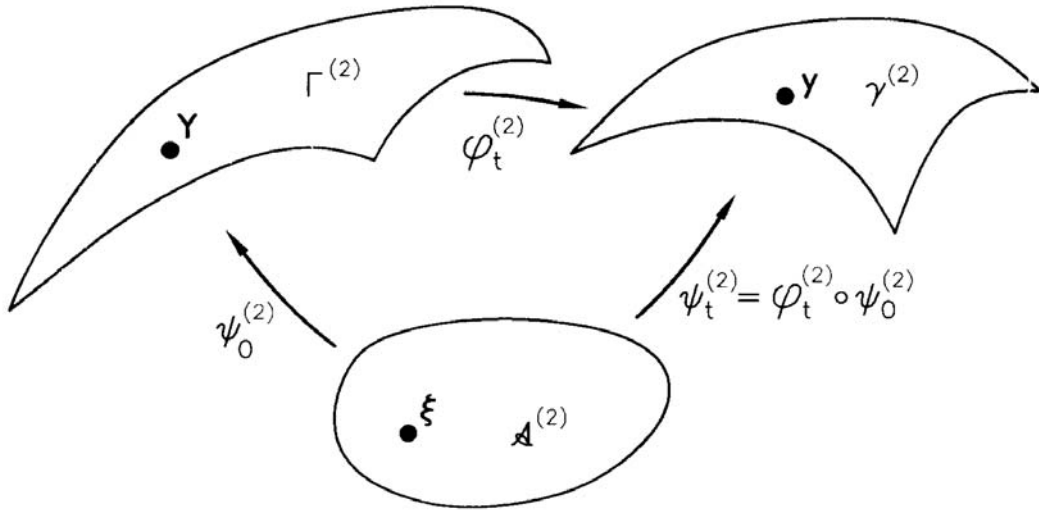


FIGURA 1.2. Parametrización de las superficies de contacto en las configuraciones de referencia y deformada.

### 1.3.2 Restricciones mecánicas de contacto friccional

Utilizando una notación estándar en la mecánica del contacto, asignaremos para cada par de superficies en contacto los papeles de superficie *slave* y *master*. En particular, sea  $\Gamma^{(1)}$  la superficie *slave* y  $\Gamma^{(2)}$  la superficie *master*. Adicionalmente, denominaremos partículas *slave* y partículas *master* a los puntos materiales, en la configuración de referencia, de las superficies *slave* y *master*, respectivamente. Con esta notación, en la formulación discretizada del problema de contacto, se impondrá que ninguna partícula *slave* pueda penetrar la superficie *master*, para todo instante de tiempo  $t \in I$ . Nótese, que a pesar de que en la formulación en el continuo del problema de contacto, los papeles asignados a cada superficie son irrelevantes, esto no ocurre así en la formulación discreta (espacial) del problema.

(A) *Punto más cercano de una partícula slave en la superficie master.* Consideremos una partícula arbitraria de la superficie *slave*  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  que ocupa la posición  $\mathbf{x} := \varphi_t^{(1)}(\mathbf{X}) \in \gamma^{(1)}$  en la configuración actual o deformada, y consideremos la superficie *master*  $\Gamma^{(2)}$ , con partículas  $\mathbf{Y} \in \Gamma^{(2)}$  que ocupan las posiciones  $\mathbf{y} := \varphi_t^{(2)}(\mathbf{Y}) \in \gamma^{(2)}$  en la configuración actual o deformada.

Sea  $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{X}, t) \in \gamma^{(2)}$  la proyección de la posición actual de la partícula *slave*  $\mathbf{X}$  sobre la configuración actual de la superficie *master*  $\Gamma^{(2)}$ , definida como:

$$\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t) := \arg \min_{\mathbf{Y} \in \Gamma^{(2)}} \{ \|\varphi_t^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi_t^{(2)}(\mathbf{Y})\| \} \quad (1.28)$$

$$\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{X}, t) := \varphi_t^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}) \quad (1.29)$$

La definición del punto de proyección de la partícula *slave* sobre la superficie *master* nos

permite definir la distancia entre la partícula *slave* y la superficie *master* para cualquier instante de tiempo  $t \in I$ .

Sea  $g_N(\mathbf{X}, t)$  la función penetración, definida para cada partícula *slave*  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  y para cada instante de tiempo  $t \in I$  como la distancia que existe entre la posición de la partícula *slave* y la superficie *master*  $\gamma^{(2)} := \varphi_t^{(2)}(\Gamma^{(2)})$  en la configuración deformada. Utilizando la definición de la proyección establecida anteriormente, la función penetración  $g_N(\mathbf{X}, t)$  puede definirse como:

$$\boxed{g_N(\mathbf{X}, t) := -[\varphi_t^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi_t^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t))] \cdot \boldsymbol{\nu}} \quad (1.30)$$

donde  $\boldsymbol{\nu} : \gamma^{(2)} \rightarrow S^2$  es la normal unitaria externa a la superficie *master* en el punto de proyección  $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{X}, t) \in \gamma^{(2)}$  y  $S^2$  es la esfera unitaria definida como:

$$S^2 := \{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^{n_{dim}} : \|\boldsymbol{\nu}\| = 1\} \quad (1.31)$$

(B) *Presión de contacto.* Sea  $\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{X}, t)$  el primer tensor de Piola-Kirchhoff y  $\mathbf{N}^{(1)}(\mathbf{X})$  la normal unitaria exterior a la superficie *slave*  $\Gamma^{(1)}$  en la configuración de referencia. La tracción nominal (de Piola) de contacto en la superficie *slave* en el punto material  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  viene dada por

$$\mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{N}^{(1)}(\mathbf{X}) \quad (1.32)$$

Adicionalmente, definimos la presión de contacto  $t_N(\mathbf{X}, t)$  como menos la proyección de la tracción nominal de contacto  $\mathbf{t}^{(1)}$  en la dirección de la normal unitaria exterior a la configuración actual de la superficie *slave*  $\mathbf{n}^{(1)}(\mathbf{X}, t)$ . De esta manera podemos descomponer el vector de tracción nominal de contacto como:

$$\mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X}, t) = -t_N(\mathbf{X}, t) \mathbf{n}^{(1)}(\mathbf{X}, t) + \mathbb{P}_{n^{(1)}} \mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X}, t) \quad (1.33)$$

donde  $\mathbb{P}_{n^{(1)}} \mathbf{t}^{(1)}$  es la proyección de  $\mathbf{t}^{(1)}$  sobre el plano tangente asociado al punto de contacto.

Con las condiciones adecuadas de regularidad de la superficie, cuando la partícula *slave*  $\mathbf{X}$  entra en contacto con la superficie *master*, se verifica la relación siguiente

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{n}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t) = -\mathbf{n}^{(1)}(\mathbf{X}, t) \quad (1.34)$$

donde  $\mathbf{n}^{(1)}$  es la normal unitaria exterior a la superficie *slave* en el punto  $\mathbf{x} = \varphi_t^{(1)}(\mathbf{X})$  y  $\boldsymbol{\nu} := \mathbf{n}^{(2)}$  es la normal unitaria exterior a la superficie *master* en el punto  $\bar{\mathbf{y}} = \varphi_t^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}})$ .

Una expresión equivalente para la descomposición de la tracción nominal de contacto viene dada por:

$$\boxed{\mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X}, t) = t_N(\mathbf{X}, t) \boldsymbol{\nu}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t) + \mathbb{P}_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X}, t)} \quad (1.35)$$

(C) *Restricciones normales de contacto.* Utilizando las definiciones introducidas anteriormente para la función penetración  $g_N(\mathbf{X}, t)$  y la presión de contacto  $t_N(\mathbf{X}, t)$  podemos establecer las restricciones unilaterales de contacto

i. *Restricción cinemática de impenetrabilidad.* La restricción cinemática de impenetrabilidad puede expresarse en función de la penetración  $g_N(\mathbf{X}, t)$ , mediante la desigualdad

$$g_N(\mathbf{X}, t) \leq 0 \quad (1.36)$$

ii. *Restricción de no adhesión.* La restricción de no adhesión implica que la presión de contacto debe ser no negativa. Matemáticamente, esta condición puede expresarse como:

$$\begin{aligned} t_N(\mathbf{X}, t) &\geq 0 & \text{if } g_N(\mathbf{X}, t) &= 0 \\ t_N(\mathbf{X}, t) &= 0 & \text{if } g_N(\mathbf{X}, t) < 0 \end{aligned} \quad (1.37)$$

iii. *Condición de persistencia en el contacto.* Esta condición implica que la velocidad normal de separación de los puntos en contacto debe ser cero cuando la presión de contacto es positiva. Es decir, que para valores positivos de la presión de contacto, los puntos deben de permanecer en contacto. Matemáticamente, esta condición de persistencia puede expresarse como:

$$t_N(\mathbf{X}, t) \dot{g}_N(\mathbf{X}, t) = 0 \quad (1.38)$$

Este conjunto de restricciones de contacto, impenetrabilidad, no adherencia y persistencia, puede expresarse en forma de condiciones complementarias de Kuhn-Tucker, como:

$$\boxed{\begin{aligned} g_N(\mathbf{X}, t) &\leq 0 \\ t_N(\mathbf{X}, t) &\geq 0 \\ t_N(\mathbf{X}, t) g_N(\mathbf{X}, t) &= 0 \\ t_N(\mathbf{X}, t) \dot{g}_N(\mathbf{X}, t) &= 0 \end{aligned}} \quad (1.39)$$

(D) *Base convectiva en la superficie master.* Utilizando la estructura geométrica inducida por la restricción de impenetrabilidad a través de la definición de la función penetración  $g_N(\mathbf{X}, t)$ , podemos introducir una base convectiva asociada, adecuada para la definición de las restricciones friccionales y el planteamiento del problema friccional. La definición de la base convectiva emana de la diferenciación de las coordenadas de las superficies de contacto con respecto a las coordenadas convectivas. Juntamente con la base convectiva, podemos definir la base dual o recíproca en la forma habitual. En lo que sigue, vamos a considerar el caso tridimensional  $n_{dim} = 3$ . La particularización para el caso bidimensional  $n_{dim} = 2$  es trivial una vez considerado el caso tridimensional.

Utilizando la parametrización de las superficies de contacto introducida anteriormente, vamos a considerar a continuación un punto  $\boldsymbol{\xi} := (\xi^1, \xi^2) \in \mathcal{A}^{(2)}$  perteneciente al dominio paramétrico de referencia, tal que

$$\mathbf{Y} := \boldsymbol{\psi}_0^{(2)}(\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{y} := \boldsymbol{\psi}_t^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.40)$$

Asociado a cada partícula *master*  $\mathbf{Y} \in \Gamma^{(2)}$  introducimos las bases convectivas superficiales  $\mathbf{E}_\alpha(\boldsymbol{\xi})$  y  $\mathbf{e}_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ ,  $\alpha = 1, 2$ , en las configuraciones de referencia y deformada, respectivamente, como

$$\mathbf{E}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) := \boldsymbol{\psi}_{0,\alpha}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{e}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) := \boldsymbol{\psi}_{t,\alpha}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.41)$$

donde  $(\cdot)_{,\alpha}$  indica derivada parcial con respecto a  $\xi^\alpha$ . Utilizando la composición de aplicaciones  $\psi_t^{(2)} = \varphi_t^{(2)} \circ \psi_0^{(2)}$ , obtenemos la relación

$$\mathbf{e}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{F}_t^{(2)}(\psi_0^{(2)}(\boldsymbol{\xi})) \cdot \mathbf{E}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.42)$$

donde  $\mathbf{F}_t^{(2)} := D\varphi_t^{(2)}$  es el gradiente de la deformación.

Consideremos ahora para cada partícula *slave*  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$ , la partícula de la superficie *master*  $\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t) \in \Gamma^{(2)}$  tal que verifica la condición de 'punto más cercano', solución del problema de minimización dado por (1.28). Entonces, existirá un punto  $\bar{\boldsymbol{\xi}} := (\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2) \in \mathcal{A}^{(2)}$  perteneciente al dominio de parametrización, tal que

$$\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t) := \psi_0^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, t)), \quad \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{X}, t) := \psi_t^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, t)) \quad (1.43)$$

Para cada partícula *master*  $\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t) \in \Gamma^{(2)}$  definimos sus bases convectivas asociadas en la configuración de referencia y deformada, respectivamente, como

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}_\alpha^{ref}(\mathbf{X}, t) := \mathbf{E}_\alpha(\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, t)), \quad \boldsymbol{\tau}_\alpha(\mathbf{X}, t) := \mathbf{e}_\alpha(\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, t))} \quad (1.44)$$

Utilizando la composición de aplicaciones  $\psi_t^{(2)} = \varphi_t^{(2)} \circ \psi_0^{(2)}$  podemos encontrar la relación

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha = \mathbf{F}_t^{(2)}(\psi_0^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}})) \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha^{ref} \quad (1.45)$$

que muestra que los vectores de las bases convectivas  $\boldsymbol{\tau}_\alpha^{ref}$  y  $\boldsymbol{\tau}_\alpha$  están relacionados de forma convectiva mediante el gradiente de deformación  $\mathbf{F}_t^{(2)}$  en la partícula *master*  $\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t)$ .

Adicionalmente, las normales unitarias exteriores  $\boldsymbol{\nu}^{ref} \in S^2$  y  $\boldsymbol{\nu} \in S^2$  en la partícula *master* en las configuraciones de referencia y deformada, respectivamente, pueden definirse como

$$\boldsymbol{\nu}^{ref} := \frac{\boldsymbol{\tau}_1^{ref} \times \boldsymbol{\tau}_2^{ref}}{\|\boldsymbol{\tau}_1^{ref} \times \boldsymbol{\tau}_2^{ref}\|}, \quad \boldsymbol{\nu} := \frac{\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2}{\|\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2\|} \quad (1.46)$$

Los vectores  $\boldsymbol{\tau}_\alpha^{ref} \in T_{\nu^{ref}} S^2$  y  $\boldsymbol{\tau}_\alpha \in T_\nu S^2$ ,  $\alpha = 1, 2$  definen los espacios tangentes  $T_{\nu^{ref}} S^2$  y  $T_\nu S^2$  a la esfera unidad  $S^2$  en  $\boldsymbol{\nu}^{ref}$  y  $\boldsymbol{\nu}$ , respectivamente. En particular, el espacio tangente a la esfera unidad  $S^2$  en  $\boldsymbol{\nu} \in S^2$  se define como

$$T_\nu S^2 := \{\delta\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^{dim} : \delta\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0\} \quad (1.47)$$

Los vectores de la base convectiva  $\boldsymbol{\tau}_\alpha^{ref}$  y  $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , juntamente con los vectores normales unitarios exteriores  $\boldsymbol{\nu}^{ref}$  y  $\boldsymbol{\nu}$ , definen sistemas locales en la partícula *master*  $\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t)$ , en la configuración de referencia y deformada, respectivamente.

(E) *Métrica superficial y curvatura en las configuraciones de referencia y deformada.* Los vectores de la base superficial convectiva  $\boldsymbol{\tau}_\alpha^{ref}$  y  $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , inducen una métrica superficial o primera forma fundamental en las configuraciones de referencia y deformada, definidas respectivamente como

$$\boxed{M_{\alpha\beta} := \boldsymbol{\tau}_\alpha^{ref} \cdot \boldsymbol{\tau}_\beta^{ref}, \quad m_{\alpha\beta} := \boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \boldsymbol{\tau}_\beta} \quad (1.48)$$

Métricas superficiales inversas  $M^{\alpha\beta}$  y  $m^{\alpha\beta}$  pueden definirse de forma habitual. Adicionalmente, bases duales en la configuración de referencia y deformada pueden definirse como

$$\boldsymbol{\tau}_{ref}^{\alpha} := M^{\alpha\beta} \boldsymbol{\tau}_{\beta}^{ref}, \quad \boldsymbol{\tau}^{\alpha} := m^{\alpha\beta} \boldsymbol{\tau}_{\beta} \quad (1.49)$$

La variación de la base convectiva superficial con respecto a las coordenadas convectivas, juntamente con la normal unitaria exterior, induce la segunda forma fundamental o curvatura de la superficie definida, en la configuración de referencia y deformada, respectivamente, como

$$\boxed{\kappa_{\alpha\beta}^{ref} := \mathbf{E}_{\alpha,\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \boldsymbol{\nu}^{ref}, \quad \kappa_{\alpha\beta} := \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \boldsymbol{\nu}} \quad (1.50)$$

(F) *Velocidad de deslizamiento relativa.* Introducimos la velocidad relativa de deslizamiento en la configuración de referencia definida como

$$\mathbf{v}_T^{ref}(\mathbf{X}, t) := \dot{\bar{\mathbf{Y}}}(\mathbf{X}, t) \quad (1.51)$$

La velocidad relativa en la configuración de referencia puede expresarse en función de la variación por unidad de tiempo de las coordenadas del dominio paramétrico, utilizando la aplicación dada por (1.40)<sub>1</sub>, la base convectiva superficial en la configuración de referencia dada por (1.41)<sub>1</sub> y aplicando la regla de la cadena, como

$$\mathbf{v}_T^{ref}(\mathbf{X}, t) := \dot{\bar{\xi}}^{\alpha} \boldsymbol{\tau}_{\alpha}^{ref} \quad (1.52)$$

Como era de esperar, la velocidad relativa de deslizamiento definida por (1.51) o (1.52) pertenece al plano tangente a la superficie *master* en el punto *master*  $\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t)$ .

La velocidad relativa de deslizamiento en la configuración deformada puede definirse como el 'push-forward' de la velocidad relativa de deslizamiento en la configuración de referencia, utilizando el gradiente de deformación  $\mathbf{F}_t^{(2)}$ , mediante la expresión

$$\mathbf{v}_T(\mathbf{X}, t) := \mathbf{F}_t^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, t)) \cdot \mathbf{v}_T^{ref}(\mathbf{X}, t) \quad (1.53)$$

La forma-uno asociada a la velocidad relativa de deslizamiento en la configuración de referencia se define como

$$\mathbf{v}_T^{bref}(\mathbf{X}, t) := \dot{\bar{\xi}}^{\alpha} M_{\alpha\beta} \boldsymbol{\tau}_{ref}^{\beta} \quad (1.54)$$

mientras que la forma-uno asociada a la velocidad relativa en la configuración deformada se define como el 'push-forward' de la correspondiente forma-uno en la configuración de referencia, en la forma

$$\boxed{\mathbf{v}_T^b(\mathbf{X}, t) := \dot{\bar{\xi}}^{\alpha} M_{\alpha\beta} \boldsymbol{\tau}^{\beta}} \quad (1.55)$$

OBSERVACIÓN 1.4. La definición de  $\mathbf{v}_T^b(\mathbf{X}, t)$  es *objetiva*, a pesar del hecho que los campos material y espacial de velocidad no lo son. Esta crucial propiedad se verifica gracias a que la definición de  $\mathbf{v}_T^b(\mathbf{X}, t)$  se realiza utilizando la base convectiva.  $\square$

OBSERVACIÓN 1.5. Nótese que en la definición de la forma-uno asociada a la velocidad relativa, interviene la métrica  $M_{\alpha\beta}$  en el punto  $\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t)$  en la configuración de referencia, y *no* la métrica  $m_{\alpha\beta}$  en la configuración deformada. Esto es así porque definimos  $\mathbf{v}_T^b$  como el 'push-forward' de la correspondiente forma-uno en la configuración de referencia, y *no* como la forma-uno asociada al vector espacial  $\mathbf{v}_T$  en la configuración deformada. Esta última definición conduciría a un aumento del coste computacional, debido a la complejidad existente en la linealización del algoritmo de integración friccional.  $\square$

(G) *Tracción friccional.* Definimos el vector de tracción tangente nominal  $\mathbf{t}_T(\mathbf{X}, t)$  como (menos) la proyección del vector de tracción nominal de contacto friccional  $\mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X}, t)$  en la dirección de la normal unitaria exterior  $\boldsymbol{\nu}$ , como

$$\mathbf{t}_T(\mathbf{X}, t) := -\mathbb{P}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X}, t) = t_T^\alpha(\mathbf{X}, t) \boldsymbol{\tau}_\alpha \quad (1.56)$$

Adicionalmente, la forma-uno asociada a este objeto se define como

$$\boxed{\mathbf{t}_T^b(\mathbf{X}, t) := -\mathbb{P}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{t}^{b(1)}(\mathbf{X}, t) = t_{T_\alpha}(\mathbf{X}, t) \boldsymbol{\tau}^\alpha} \quad (1.57)$$

(H) *Restricciones friccionales.* Utilizando las definiciones anteriores para la velocidad relativa de deslizamiento y el vector de tracción nominal de contacto friccional, introducimos las restricciones friccionales de la siguiente manera:

i. *Función deslizamiento. Espacio de tracciones admisibles.* Definimos la *función deslizamiento*  $\Phi : T_\nu S^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  de manera que los estados  $(\mathbf{t}_T^b, t_N) \in T_\nu S^2 \times \mathbb{R}_+$  en el espacio de tracciones, y las variables internas  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , estén restringidas a permanecer en el dominio cerrado de estados admisibles definido como

$$\mathbb{E}_{\mathbf{t}} := \{(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) \in T_\nu S^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) \leq 0\} \quad (1.58)$$

En particular, la clásica ley de rozamiento de Coulomb puede extenderse para acomodar efectos de desgaste o daño utilizando un coeficiente de rozamiento definido como una función de una variable interna  $\alpha$ , que puede identificarse como la disipación friccional o la magnitud del deslizamiento acumulado. Entonces, el espacio de estados admisibles se define mediante la función deslizamiento:

$$\Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) := \|\mathbf{t}_T^b\| - \mu(\alpha)t_N \quad (1.59)$$

donde  $\|\cdot\|$  indica la norma de su argumento y  $\mu(\alpha)$  es el coeficiente de rozamiento de la ley de Coulomb.

ii. *Regla de deslizamiento y ecuación de evolución de la variable interna.* La regla de deslizamiento se define como:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_T^b(\mathbf{X}, t) &:= 0 & \text{si } \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) < 0 \\ \mathbf{v}_T^b(\mathbf{X}, t) &:= \gamma \mathbf{p}_T^b & \text{si } \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) = 0 \end{aligned} \quad (1.60)$$

donde  $\mathbf{p}_T^b := \partial_{\mathbf{t}_T^b} \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha)$  y  $\gamma \in \mathbb{R}_+$  es el factor (no negativo) de consistencia. Para la ley de rozamiento de Coulomb  $\mathbf{p}_T^b$  es la forma-uno normalizada de la tracción friccional definida como  $\mathbf{p}_T^b := \mathbf{t}_T^b / \|\mathbf{t}_T^b\|$ .

Adicionalmente se necesita definir la ecuación de evolución para la variable interna  $\alpha$ . Tal como se ha comentado anteriormente, podemos definir  $\alpha$  como el deslizamiento acumulado, siendo en este caso su ecuación de evolución

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(\mathbf{X}, t) &:= 0 & \text{si } \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) < 0 \\ \dot{\alpha}(\mathbf{X}, t) &:= \gamma & \text{si } \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) = 0 \end{aligned} \quad (1.61)$$

o, de forma alternativa, podríamos definir  $\alpha$  como la disipación friccional, teniendo en este caso la ecuación de evolución siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(\mathbf{X}, t) &:= 0 & \text{si } \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) < 0 \\ \dot{\alpha}(\mathbf{X}, t) &:= \mathbf{t}_T^b \cdot \mathbf{v}_T^b = \gamma \|\mathbf{t}_T^b\| & \text{si } \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) = 0 \end{aligned} \quad (1.62)$$

donde la última expresión en (1.62)<sub>2</sub> se obtiene haciendo uso de la regla de deslizamiento (1.60).

Por comodidad en la notación, vamos a agrupar estas dos opciones alternativas en una expresión única en la forma

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(\mathbf{X}, t) &:= 0 & \text{if } \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) < 0 \\ \dot{\alpha}(\mathbf{X}, t) &:= \gamma [(1 - w) + w \|\mathbf{t}_T^b\|] & \text{if } \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) = 0 \end{aligned} \quad (1.63)$$

donde  $w$  es una constante tal que, para  $w = 0$  se recupera la expresión (1.61) y  $\alpha$  representa el deslizamiento acumulado, mientras que para  $w = 1$  se recupera (1.62) y  $\alpha$  representa la disipación friccional acumulada.

**iii. Condición de consistencia de deslizamiento.** La condición de consistencia de deslizamiento establece que la velocidad de deslizamiento debe ser cero para valores positivos del factor de consistencia de deslizamiento. Matemáticamente esta condición se puede expresar como

$$\gamma \dot{\Phi}(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) = 0 \quad (1.64)$$

Las expresiones anteriores conducen a un problema de evolución con restricciones definido por las ecuaciones de evolución

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{v}_T^b(\mathbf{X}, t) &= \gamma \mathbf{p}_T^b \\ \dot{\alpha}(\mathbf{X}, t) &= \gamma [(1 - w) + w \|\mathbf{t}_T^b\|] \end{aligned}} \quad (1.65)$$

sujetas a las restricciones, expresadas en forma de condiciones complementarias de Kuhn-Tucker como

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) &\leq 0 \\ \gamma &\geq 0 \\ \gamma \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) &= 0 \\ \gamma \dot{\Phi}(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) &= 0 \end{aligned}} \quad (1.66)$$



(I) *Regularización de las restricciones de contacto friccional.* Tal como se discute en KIKUCHI & ODEN [1988], por ejemplo, la solución de problemas de contorno con valores iniciales sujetos a restricciones tales como (1.39) y (1.66), implica encontrar una solución del problema dentro de un espacio de soluciones con restricciones. La formulación de la correspondiente forma variacional induce limitaciones en los valores de las variaciones admisibles en el espacio tangente, impuestas por las restricciones físicas de contacto, conduciendo a desigualdades variacionales. Véase, por ejemplo, KIKUCHI & ODEN [1988] o DUVAUT & LIONS [1972].

Se han propuesto diferentes métodos para sortear la necesidad de encontrar una solución dentro de un espacio de soluciones con restricciones. Uno de los métodos más utilizados para eliminar las restricciones asociadas al espacio de soluciones, es el método de *penalización*.

Utilizando el método de penalización, las restricciones normales de contacto se regularizan introduciendo un *coeficiente de penalización normal*  $\epsilon_N$  y sustituyendo las condiciones complementarias de Kuhn-Tucker definidas en (1.39) por la ecuación constitutiva para la presión de contacto

$$\boxed{t_N(\mathbf{X}, t) := \epsilon_N \langle g_N(\mathbf{X}, t) \rangle} \quad (1.67)$$

donde  $\langle \cdot \rangle$  es el operador de Macauley, que representa la parte positiva del operando. La expresión (1.67) puede verse como una regularización de las condiciones complementarias de Kuhn-Tucker dadas por (1.39), dando lugar a una ecuación constitutiva para la presión de contacto y a un modelo conducido por los desplazamientos análogo al modelo de plasticidad.

La comparación de (1.67) con (1.39) revela que ahora, se permite una violación (presumiblemente pequeña) de las restricciones (1.39) y que las restricciones se verificarán exactamente a medida que  $\epsilon_N \rightarrow \infty$ .

La regularización de las restricciones friccionales del problema de evolución definido por (1.65) y (1.66) se realiza introduciendo un *factor de penalización tangente*  $\epsilon_T$  que puede considerarse como un parámetro constitutivo en la expresión de la velocidad relativa de deslizamiento. Entonces, el problema regularizado de evolución friccional puede escribirse como

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{v}_T^b(\mathbf{X}, t) &= \gamma \mathbf{p}_T^b + \frac{1}{\epsilon_T} \mathcal{L}_{v_T} \mathbf{t}_T^b \\ \dot{\alpha}(\mathbf{X}, t) &= \gamma [(1 - w) + w \|\mathbf{t}_T^b\|] \end{aligned}} \quad (1.68)$$

sujeto a las restricciones siguientes

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) &\leq 0 \\ \gamma &\geq 0 \\ \gamma \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) &= 0 \\ \gamma \dot{\Phi}(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) &= 0 \end{aligned}} \quad (1.69)$$

donde  $\mathcal{L}_{v_T} \mathbf{t}_T^b$  es la derivada de Lie de la tracción tangente friccional a lo largo del flujo

inducido por la velocidad de deslizamiento relativa  $\mathbf{v}_T$ , definida como

$$\mathcal{L}_{v_T} \mathbf{t}_T^b := \dot{t}_{T\alpha} \boldsymbol{\tau}^\alpha \quad (1.70)$$

La comparación de (1.68) y (1.69) con (1.65) y (1.66), revela que las restricciones friccionales se satisfacen exactamente a medida que  $\epsilon_T \rightarrow \infty$ . En este caso el factor de consistencia de deslizamiento  $\gamma$  es igual a la norma de la velocidad de deslizamiento relativa  $\mathbf{v}_T^b$ . Por otro lado, se considera que la velocidad relativa de deslizamiento puede descomponerse en una parte elástica recuperable y una parte plástica o irreversible. La introducción de la derivada de Lie en la regularización de la expresión de la velocidad relativa de deslizamiento, permite mantener la objetividad de las ecuaciones de evolución del problema friccional.

Utilizando la definición de la forma-uno de la velocidad relativa de deslizamiento dada por (1.55) y la derivada de Lie de la tracción tangente friccional dada por (1.70), las ecuaciones de evolución para las componentes de la tracción tangente friccional (1.68)<sub>1</sub>, junto con la ecuación de evolución para la variable interna, toman la forma

$$\begin{aligned} \dot{t}_{T\alpha} &= \epsilon_T (M_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\beta - \gamma p_{T\alpha}) \\ \dot{\alpha} &= \gamma [(1-w) + w \|\mathbf{t}_T^b\|] \end{aligned} \quad (1.71)$$

Tal como se ha visto anteriormente, la regularización del problema friccional conduce al siguiente problema de evolución con restricciones

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{v_T} \mathbf{t}_T^b &= \epsilon_T [\mathbf{v}_T^b - \gamma \partial_{t_T^b} \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha)] \\ \dot{\alpha} &= \gamma [(1-w) + w \|\mathbf{t}_T^b\|] \\ \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) &\leq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad \gamma \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) = 0 \\ \gamma \dot{\Phi}(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (1.72)$$

Dentro del contexto de los métodos de paso fraccionado y de los algoritmos de formula producto, podemos introducir una descomposición del operador friccional que gobierna el problema de evolución, introduciendo un *estado de prueba*, definido mediante la congelación de la respuesta irreversible del deslizamiento plástico, es decir haciendo  $\gamma = 0$ , seguido de un algoritmo de retorno, de la siguiente manera

$$\begin{array}{cc} \textit{Estado de prueba} & \textit{Algoritmo de retorno} \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{v_T} \mathbf{t}_T^b := \epsilon_T \mathbf{v}_T^b \\ \dot{\alpha} := 0 \\ \text{unconstrained} \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{v_T} \mathbf{t}_T^b := -\epsilon_T \gamma \partial_{t_T^b} \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) \\ \dot{\alpha} := \gamma [(1-w) + w \|\mathbf{t}_T^b\|] \\ \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) \leq 0, \gamma \geq 0, \gamma \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) = 0 \end{array} \right\} \end{array} \quad (1.73)$$

OBSERVACIÓN 1.6. Nótese que únicamente se ha realizado la regularización de la regla de deslizamiento (1.68), mientras que (1.69) puede verse como las ecuaciones de gobierno

de un problema de evolución friccional con restricciones similar al de plasticidad. Por otro lado, la regularización de las condiciones complementarias de Kuhn-Tucker (1.66) análoga a la realizada para las condiciones complementarias de Kuhn-Tucker del problema de contacto normal dadas por (1.39), conduciría a un modelo constitutivo friccional similar al del problema viscoplástico.  $\square$

### 1.3.3 Modelo de contacto térmico

Consideraremos aquí un modelo de contacto térmico en la interfase de contacto que tenga en cuenta los fenómenos de conducción de calor a través de la superficie de contacto y el calor generado por disipación friccional en la interfase.

(A) *Conducción de calor en la superficie de contacto.* La conducción de calor a través de la superficie de contacto  $\Gamma^{(1)}$  puede expresarse como

$$Q_{hc} := Q_{hc}^{(1)}(\mathbf{X}, t) = \hat{h}(t_N, \theta_G) g_\theta(\mathbf{X}, t) \quad (1.74)$$

donde el coeficiente de transmisión de calor en la superficie de contacto  $\hat{h}(t_N, \theta_G)$  se supone que es una función de la presión de contacto  $t_N$  y de la temperatura media del gas encerrado entre las superficies de contacto  $\theta_G := \hat{\theta}_G(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)})$ , y  $g_\theta := \hat{g}_\theta(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)})$  representa la diferencia de temperatura entre los puntos de las superficies en contacto. Podemos definir entonces

$$\begin{aligned} g_\theta(\mathbf{X}, t) &:= \Theta^{(1)}(\mathbf{X}, t) - \Theta^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t) \\ \theta_G(\mathbf{X}, t) &:= h_\epsilon \Theta^{(1)}(\mathbf{X}, t) + (1 - h_\epsilon) \Theta^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t) \end{aligned} \quad (1.75)$$

donde  $h_\epsilon$  es el coeficiente de efusividad relativa de la superficie  $\Gamma^{(1)}$ , supuesto constante, definida como la efusividad de la superficie  $\Gamma^{(1)}$  dividida por la suma de las efusividades de las superficies  $\Gamma^{(1)}$  y  $\Gamma^{(2)}$ .

**i. Modelo de conducción de calor por contacto friccional.** La resistencia a la transmisión del calor en las superficies de contacto se debe principalmente a la reducida área efectiva de contacto existente en la interfase. Típicamente, cuando dos superficies entran en contacto, éste tiene lugar básicamente a través de un número reducido de puntos de contacto rodeados de microcavidades. Por lo tanto, básicamente la transmisión de calor se produce principalmente por conducción a través de los puntos que realmente están en contacto y por conducción a través del gas encerrado en las microcavidades. Otros efectos como la radiación entre las superficies de las microcavidades pueden en general despreciarse ya que los dos cuerpos están muy cerca. Realizando la hipótesis que los dos mecanismos de conducción de calor, a través de los puntos efectivos de contacto y a través del gas de las microcavidades, actúan en paralelo, el coeficiente de transmisión de calor  $\hat{h}(\theta_G, t_N)$  puede expresarse como

$$\hat{h}(t_N, \theta_G) := \hat{h}_S(t_N) + \hat{h}_G(t_N, \theta_G) \quad (1.76)$$

donde  $\hat{h}_S(t_N)$  es el coeficiente de transmisión de calor a través de los puntos de contacto, que se supone que es una función de la presión de contacto  $t_N$ , y  $\hat{h}_G(t_N, \theta_G)$  es el coeficiente

de transmisión de calor a través del gas encerrado en las microcavidades, que se supone que es una función de la presión de contacto y de la temperatura media del gas encerrado.

En base a modelos estadísticos y teniendo en cuenta la influencia de distintos factores de las superficies de contacto, tales como, parámetros de rugosidad, coeficientes de microdureza Vickers, variación de la dureza, etc. se considera una expresión del coeficiente de transmisión de calor propuesta por SONG & YOVANOVICH [1987]:

$$\hat{h}_S(t_N) := \frac{1.25 \hat{k} \bar{m}}{\sigma} \left[ \frac{t_N}{c_1} \left( 1.62 \frac{10^6 \sigma}{\bar{m}} \right)^{-c_2} \right]^{\frac{0.95}{1+0.71c_2}} \quad (1.77)$$

donde  $\hat{k}$  es la conductividad térmica media, que depende de las conductividades de los dos cuerpos en contacto,  $\sigma$  es la rugosidad de la superficie,  $\bar{m}$  es la pendiente media de las asperidades de la superficie y  $c_1, c_2$  describen la variación de la dureza.

La transmisión de calor a través de las microcavidades se debe básicamente a fenómenos de conducción a través del gas o líquido encerrado en ellas. En base a esta hipótesis y teniendo en cuenta la variación de la altura de las microcavidades debido a la presión de contacto  $t_N$ , YOVANOVICH [1981] obtuvo la siguiente expresión para el coeficiente de transmisión de calor a través de las microcavidades:

$$\hat{h}_G(t_N, \theta_G) := \frac{k_g}{1.36 \sigma \sqrt{-\log(5.59 \frac{t_N}{H_e}) + C_{PC} \theta_G}} \quad (1.78)$$

donde  $k_g$  es la conductividad del gas,  $C_{PC}$  es una constante constitutiva para el gas,  $H_e$  es la dureza Vickers y  $\sigma$  la rugosidad de la superficie.

**ii. Modelo de conducción de calor simplificado.** Para valores altos de la presión de contacto, se puede formular un modelo simplificado de contacto térmico en función de la dureza Vickers  $H_e$ , de un coeficiente de resistencia térmica de contacto  $h_{co}$  y un exponente  $\epsilon$ , obteniéndose

$$\hat{h}(t_N) := h_{co} \left[ \frac{t_N}{H_e} \right]^\epsilon \quad (1.79)$$

(B) *Generación de calor en las superficies de contacto.* La disipación friccional que se produce en las superficies de contacto  $\mathcal{D}_{fric} := \|\mathbf{t}_T^p\|_\gamma$  actúa como una fuente de calor.

### 1.3.4 Formulación variacional del problema termomecánico acoplado.

(A) *Espacios de configuraciones y de temperaturas admisibles.* Consideramos espacios de configuraciones y de temperaturas admisibles para el cuerpo  $\mathcal{B}^{(i)}$  definidos como,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{mech}^{(i)} &:= \{ \boldsymbol{\varphi}^{(i)} \in W^{1,p}(\Omega^{(i)})^{n_{dim}} : \det[D\boldsymbol{\varphi}^{(i)}] > 0 \text{ en } \Omega^{(i)} \text{ y } \boldsymbol{\varphi}^{(i)}|_{\Gamma_\varphi^{(i)}} = \bar{\boldsymbol{\varphi}}^{(i)} \} \\ \mathcal{C}_{ther}^{(i)} &:= \{ \Theta^{(i)} \in W^{1,q}(\Omega^{(i)})^{n_{dim}} : \Theta^{(i)} > 0 \text{ en } \Omega^{(i)} \text{ y } \Theta^{(i)}|_{\Gamma_\Theta^{(i)}} = \bar{\Theta}^{(i)} \} \end{aligned} \quad (1.80)$$

donde  $W^{1,p}(\Omega^{(i)})$  es el espacio de Sobolev de orden  $(1, p)$  para algún valor de  $p$  tal que  $2 \leq p < \infty$ .

(B) *Espacio de variaciones admisibles.* Asociados a los espacios de configuraciones y temperaturas admisibles, consideramos los espacios tangentes (lineales) de las variaciones de desplazamientos y temperaturas, definidos, respectivamente, como:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_0^{(i)} &:= \{\boldsymbol{\eta}_0^{(i)} : \bar{\Omega}^{(i)} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}} \mid \boldsymbol{\eta}_0^{(i)}|_{\Gamma_\varphi^{(i)}} = 0\} \\ \mathcal{T}_0^{(i)} &:= \{\zeta_0^{(i)} : \bar{\Omega}^{(i)} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}} \mid \zeta_0^{(i)}|_{\Gamma_\sigma^{(i)}} = 0\}\end{aligned}\tag{1.81}$$

(C) *Forma débil de las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico acoplado.* Utilizando procedimientos habituales, la forma débil de las ecuaciones de balance de la cantidad de movimiento y de balance de la energía puede obtenerse, formalmente, realizando el producto interno  $L_2$  de (1.1)<sub>1,2</sub> y (1.1)<sub>3</sub> con cualquier  $\boldsymbol{\eta}_0^{(i)} \in \mathcal{V}_0^{(i)}$  y cualquier  $\zeta_0^{(i)} \in \mathcal{T}_0^{(i)}$ , respectivamente, y haciendo uso del teorema de la divergencia. La expresión resultante es la siguiente:

$$\begin{aligned}\langle \dot{\boldsymbol{\varphi}}^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(i)} \rangle &= \langle \mathbf{V}^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(i)} \rangle \\ \langle \rho_0^{(i)} \dot{\mathbf{V}}^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(i)} \rangle + \langle \mathbf{P}^{(i)}, \text{GRAD}[\boldsymbol{\eta}_0^{(i)}] \rangle &= \langle \mathbf{B}^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(i)} \rangle + \langle \bar{\mathbf{t}}^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(i)} \rangle_{\Gamma_\sigma^{(i)}} + \langle \mathbf{t}^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(i)} \rangle_{\Gamma^{(i)}} \\ \langle \Theta^{(i)} \dot{H}^{(i)}, \zeta_0^{(i)} \rangle - \langle \mathbf{Q}^{(i)}, \text{GRAD}[\zeta_0^{(i)}] \rangle &= \langle R^{(i)} + \mathcal{D}_{int}^{(i)}, \zeta_0^{(i)} \rangle - \langle \bar{Q}^{(i)}, \zeta_0^{(i)} \rangle_{\Gamma_Q^{(i)}} - \langle Q^{(i)}, \zeta_0^{(i)} \rangle_{\Gamma^{(i)}}\end{aligned}\tag{1.82}$$

que debe verificarse para cualquier variación admisible  $\boldsymbol{\eta}_0^{(i)} \in \mathcal{V}_0^{(i)}$  y  $\zeta_0^{(i)} \in \mathcal{T}_0^{(i)}$ . En la notación utilizada,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  indica el producto interno  $L_2(\Omega^{(i)})$  y con un ligero abuso en la notación,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_\sigma^{(i)}}$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_Q^{(i)}}$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma^{(i)}}$  indican los productos internos  $L_2(\Gamma_\sigma^{(i)})$ ,  $L_2(\Gamma_Q^{(i)})$  y  $L_2(\Gamma^{(i)})$  en los contornos  $\Gamma_\sigma^{(i)}$ ,  $\Gamma_Q^{(i)}$  y  $\Gamma^{(i)}$ , respectivamente.

Sean  $G_{dyn,mech}^{(i)}(\mathbf{V}^{(i)}, \mathbf{P}^{(i)}; \boldsymbol{\eta}_0^{(i)})$  y  $G_{stat,mech}^{(i)}(\mathbf{P}^{(i)}; \boldsymbol{\eta}_0^{(i)})$  las formas débiles dinámicas y cuasiestáticas de la ecuación de balance de cantidad de movimiento, respectivamente, excluyendo las contribuciones debidas al contacto friccional, y sea  $G_{c,mech}^{(i)}(\mathbf{P}^{(i)}; \boldsymbol{\eta}_0^{(i)})$  la contribución a la forma débil de la ecuación de balance de cantidad de movimiento debida al contacto friccional, definidas como:

$$\begin{aligned}G_{dyn,mech}^{(i)}(\mathbf{V}^{(i)}, \mathbf{P}^{(i)}; \boldsymbol{\eta}_0^{(i)}) &:= \langle \rho_0^{(i)} \dot{\mathbf{V}}^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(i)} \rangle + G_{stat,mech}^{(i)}(\mathbf{P}^{(i)}; \boldsymbol{\eta}_0^{(i)}) \\ G_{stat,mech}^{(i)}(\mathbf{P}^{(i)}; \boldsymbol{\eta}_0^{(i)}) &:= \langle \mathbf{P}^{(i)}, \text{GRAD}[\boldsymbol{\eta}_0^{(i)}] \rangle - \langle \mathbf{B}^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(i)} \rangle - \langle \bar{\mathbf{t}}^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(i)} \rangle_{\Gamma_\sigma^{(i)}} \\ G_{c,mech}^{(i)}(\mathbf{P}^{(i)}; \boldsymbol{\eta}_0^{(i)}) &:= -\langle \mathbf{t}^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(i)} \rangle_{\Gamma^{(i)}} = -\langle \mathbf{P}^{(i)} \cdot \mathbf{N}^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(i)} \rangle_{\Gamma^{(i)}}\end{aligned}\tag{1.83}$$

y sean  $G_{dyn,ther}^{(i)}(\Theta^{(i)}, \mathbf{Q}^{(i)}; \zeta_0^{(i)})$  y  $G_{stat,ther}^{(i)}(\mathbf{Q}^{(i)}; \zeta_0^{(i)})$  las formas débiles dinámica y cuasiestática de la ecuación de balance de energía, respectivamente, excluyendo las contribuciones debidas al contacto friccional, y sea  $G_{c,ther}^{(i)}(\mathbf{Q}^{(i)}; \zeta_0^{(i)})$  la contribución del contacto friccional a la forma débil de la ecuación de balance de la energía, definidas, respectiva-

mente, como:

$$\begin{aligned}
 G_{dyn,ther}^{(i)}(\Theta^{(i)}, H^{(i)}, \mathbf{Q}^{(i)}; \zeta_0^{(i)}) &:= \langle \Theta^{(i)} \dot{H}^{(i)}, \zeta_0^{(i)} \rangle + G_{stat,ther}^{(i)}(\mathbf{Q}^{(i)}; \zeta_0^{(i)}) \\
 G_{stat,ther}^{(i)}(\mathbf{Q}^{(i)}; \zeta_0^{(i)}) &:= -\langle \mathbf{Q}^{(i)}, \text{GRAD}[\zeta_0^{(i)}] \rangle - \langle \mathbf{R}^{(i)} + \mathcal{D}_{int}^{(i)}, \zeta_0^{(i)} \rangle + \langle \bar{Q}^{(i)}, \zeta_0^{(i)} \rangle_{\Gamma_Q^{(i)}} \\
 G_{c,ther}^{(i)}(\mathbf{Q}^{(i)}; \zeta_0^{(i)}) &:= \langle \mathbf{Q}^{(i)}, \zeta_0^{(i)} \rangle_{\Gamma^{(i)}} = \langle \mathbf{Q}^{(i)} \cdot \mathbf{N}^{(i)}, \zeta_0^{(i)} \rangle_{\Gamma^{(i)}}
 \end{aligned} \tag{1.84}$$

Con la notación precedente, la forma débil de las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y de energía para un cuerpo  $\mathcal{B}^{(i)}$  puede expresarse de forma compacta como

$$\left. \begin{aligned}
 &\langle \dot{\boldsymbol{\varphi}}^{(i)} - \mathbf{V}^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(i)} \rangle = 0 \\
 &G_{dyn,mech}^{(i)}(\mathbf{V}^{(i)}, \mathbf{P}^{(i)}; \boldsymbol{\eta}_0^{(i)}) + G_{c,mech}^{(i)}(\mathbf{P}^{(i)}; \boldsymbol{\eta}_0^{(i)}) = 0 \\
 &G_{dyn,ther}^{(i)}(\Theta^{(i)}, H^{(i)}, \mathbf{Q}^{(i)}; \zeta_0^{(i)}) + G_{c,ther}^{(i)}(\mathbf{Q}^{(i)}; \zeta_0^{(i)}) = 0
 \end{aligned} \right\} \quad \forall \boldsymbol{\eta}_0^{(i)} \in \mathcal{V}_0^{(i)}, \zeta_0^{(i)} \in \mathcal{T}_0^{(i)} \tag{1.85}$$

Considerando ahora el sistema dinámico formado por los distintos cuerpos que intervienen en el análisis, la forma débil de las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y de energía, puede expresarse como:

$$\left. \begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^n \langle \dot{\boldsymbol{\varphi}}^{(i)} - \mathbf{V}^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(i)} \rangle = 0 \\
 &\sum_{i=1}^n G_{dyn,mech}^{(i)}(\mathbf{V}^{(i)}, \mathbf{P}^{(i)}; \boldsymbol{\eta}_0^{(i)}) + \sum_{i=1}^n G_{c,mech}^{(i)}(\mathbf{P}^{(i)}; \boldsymbol{\eta}_0^{(i)}) = 0 \\
 &\sum_{i=1}^n G_{dyn,ther}^{(i)}(\Theta^{(i)}, H^{(i)}, \mathbf{Q}^{(i)}; \zeta_0^{(i)}) + \sum_{i=1}^n G_{c,ther}^{(i)}(\mathbf{Q}^{(i)}; \zeta_0^{(i)}) = 0
 \end{aligned} \right\} \quad \forall \boldsymbol{\eta}_0^{(i)} \in \mathcal{V}_0^{(i)}, \zeta_0^{(i)} \in \mathcal{T}_0^{(i)} \tag{1.86}$$

En particular, si consideramos ahora la interacción de los distintos cuerpos agrupados por pares de cuerpo  $\mathcal{B}^{(1)}$  y  $\mathcal{B}^{(2)}$ , las contribuciones de contacto mecánico (a la forma débil de la ecuación de balance de cantidad de movimiento) y térmico (a la forma débil de la ecuación de balance de energía), en los puntos materiales de contacto  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  y  $\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t) \in \Gamma^{(2)}$ , para cualquier instante de tiempo  $t \in I$ , puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 \hat{G}_{c,mech}^{(1,2)}(\mathbf{P}^{(1)}, \mathbf{P}^{(2)}; \boldsymbol{\eta}_0^{(1)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(2)}) &:= G_{c,mech}^{(1)}(\mathbf{P}^{(1)}; \boldsymbol{\eta}_0^{(1)}) + G_{c,mech}^{(2)}(\mathbf{P}^{(2)}; \boldsymbol{\eta}_0^{(2)}) \\
 \hat{G}_{c,ther}^{(1,2)}(\mathbf{Q}^{(1)}, \mathbf{Q}^{(2)}; \zeta_0^{(1)}, \zeta_0^{(2)}) &:= G_{c,ther}^{(1)}(\mathbf{Q}^{(1)}; \zeta_0^{(1)}) + G_{c,ther}^{(2)}(\mathbf{Q}^{(2)}; \zeta_0^{(2)})
 \end{aligned} \tag{1.87}$$

Consideramos además las ecuaciones de balance (en forma débil) en las superficies de contacto, en la forma:

$$\begin{aligned}
 &\langle \mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X}, t), \boldsymbol{\eta}_0^{(2)} \rangle_{\Gamma^{(1)}} + \langle \mathbf{t}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t), \boldsymbol{\eta}_0^{(2)} \rangle_{\Gamma^{(2)}} = 0 \\
 &\langle Q_{hc}^{(1)}(\mathbf{X}, t), \zeta_0^{(2)} \rangle_{\Gamma^{(1)}} + \langle Q_{hc}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t), \zeta_0^{(2)} \rangle_{\Gamma^{(2)}} + \langle \mathcal{D}_{fric}(\mathbf{X}, t), \zeta_G \rangle_{\Gamma^{(1)}} = 0
 \end{aligned} \tag{1.88}$$

donde  $\zeta_G := \delta\theta_G$  es la variación de la temperatura media del gas.

Utilizando (1.83)-(1.88) las contribuciones mecánicas y térmicas a la forma débil de las ecuaciones de balance de la cantidad de movimiento y de la energía, en los puntos materiales de contacto  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  y  $\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t) \in \Gamma^{(2)}$ , para cualquier instante de tiempo  $t \in I$ , pueden escribirse como:

$$\boxed{\begin{aligned} G_{c,mech}^{(1,2)}(\mathbf{P}^{(1)}; \boldsymbol{\eta}_0^{(1)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(2)}) &:= -\langle \mathbf{t}^{(1)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(1)} - \boldsymbol{\eta}_0^{(2)} \rangle_{\Gamma^{(1)}} \\ G_{c,ther}^{(1,2)}(\mathbf{Q}^{(1)}; \zeta_0^{(1)}, \zeta_0^{(2)}) &:= \langle \mathbf{Q}_{hc}^{(1)}, \zeta_0^{(1)} - \zeta_0^{(2)} \rangle_{\Gamma^{(1)}} - \langle \mathcal{D}_{fric}, \zeta_G \rangle_{\Gamma^{(1)}} \end{aligned}} \quad (1.89)$$

donde la relación  $\mathbf{t}^{(1)} := \mathbf{P}^{(1)} \cdot \mathbf{N}^{(1)}$  y los argumentos en las variables  $\mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X}, t)$ ,  $\boldsymbol{\eta}_0^{(1)}(\mathbf{X})$  y  $\boldsymbol{\eta}_0^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t))$ , se han considerado de forma implícita.

### 1.3.5 Linealización de la cinemática de contacto termomecánico

(A) *Derivadas direccionales.* Dadas las configuraciones  $\boldsymbol{\varphi}^{(i)}$  y las variaciones admisibles  $\boldsymbol{\eta}_0^{(i)}$ , para los cuerpos  $\mathcal{B}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , definimos las configuraciones perturbadas  $\boldsymbol{\varphi}_\epsilon^{(i)}$  como

$$\boldsymbol{\varphi}_\epsilon^{(i)} := \boldsymbol{\varphi}^{(i)} + \epsilon \boldsymbol{\eta}_0^{(i)} \quad (1.90)$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro escalar de perturbación (no confundir con los parámetros de penalización  $\epsilon_N$  y  $\epsilon_T$ ).

Entonces, para un campo arbitrario  $A(\mathbf{X}, \boldsymbol{\varphi}^{(1)}, \boldsymbol{\varphi}^{(2)})$  para cualquier  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$ , la variación linealizada  $\delta A(\mathbf{X}, \boldsymbol{\varphi}^{(1)}, \boldsymbol{\varphi}^{(2)})$  se define en función de la derivada direccional como:

$$\delta A(\mathbf{X}, \boldsymbol{\varphi}^{(1)}, \boldsymbol{\varphi}^{(2)}) := \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} A(\mathbf{X}, \boldsymbol{\varphi}_\epsilon^{(1)}, \boldsymbol{\varphi}_\epsilon^{(2)}) \quad (1.91)$$

(B) *Variación linealizada de la función penetración  $g_N$ .* Utilizando la definición de la función penetración  $g_N(\mathbf{X}, t)$  y la definición de derivada direccional (1.91), la variación linealizada de la función penetración puede escribirse como

$$\begin{aligned} \delta g_N &= -[\boldsymbol{\eta}_0^{(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\eta}_0^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t)) - \boldsymbol{\tau}_\alpha(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t) \delta \bar{\boldsymbol{\xi}}^\alpha(\mathbf{X}, t)] \cdot \boldsymbol{\nu} \\ &\quad - [\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}, t) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t)] \cdot \delta \boldsymbol{\nu} \end{aligned} \quad (1.92)$$

Utilizando además la relación  $\boldsymbol{\tau}_\alpha \in T_\nu S^2$  y la restricción  $\delta \boldsymbol{\nu} \in T_\nu S^2$  la variación (1.92) puede escribirse como

$$\boxed{\delta g_N = -[\boldsymbol{\eta}_0^{(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\eta}_0^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t))] \cdot \boldsymbol{\nu}} \quad (1.93)$$

(C) *Variación linealizada de las coordenadas paramétricas de la superficie de contacto  $\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, t)$ .* La variación linealizada de las coordenadas paramétricas de la superficie de contacto  $\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, t)$  puede obtenerse de la siguiente manera. Utilizando la definición de punto-más-cercano, vemos que se verifica la siguiente condición de normalidad para  $\alpha = 1, 2$ ,

$$[\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}, t) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t)] \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha = 0 \quad (1.94)$$

La derivada direccional de (1.94) conduce a la siguiente expresión

$$A_{\alpha\beta}\delta\bar{\xi}^\beta = [\boldsymbol{\eta}_0^{(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\eta}_0^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t))] \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha - g_N(\mathbf{X}, t) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\eta}_{0,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t)) \quad (1.95)$$

donde

$$A_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta} + g_N \kappa_{\alpha\beta} \quad (1.96)$$

Nótese que la determinación de  $\delta\bar{\xi}^\alpha$  requerirá, por lo tanto, la inversión de una matriz simétrica de dos por dos  $\mathbf{A} = [A_{\alpha\beta}]$ , con componentes  $A_{\alpha\beta}$  definidas por (1.96). Denominando  $A^{\alpha\beta}$  a las componentes de la matriz inversa  $\mathbf{A}^{-1} = [A^{\alpha\beta}]$ , la variación linealizada  $\delta\bar{\xi}^\alpha$  puede escribirse como

$$\delta\bar{\xi}^\alpha = A^{\alpha\beta} \{ [\boldsymbol{\eta}_0^{(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\eta}_0^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t))] \cdot \boldsymbol{\tau}_\beta - g_N(\mathbf{X}, t) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\eta}_{0,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t)) \} \quad (1.97)$$

Para  $g_N = 0$ , se verifica que  $A_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta}$ ,  $A^{\alpha\beta} = m^{\alpha\beta}$  y (1.97) toma la expresión

$$\delta\bar{\xi}^\alpha|_{g_N=0} = [\boldsymbol{\eta}_0^{(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\eta}_0^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t))] \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha \quad (1.98)$$

(D) *Variación linealizada de  $\delta g_N$* . Utilizando la definición de derivada direccional y después de algunas operaciones, la linealización de la variación  $\delta g_N$  dada por (1.93), puede escribirse como

$$\begin{aligned} \Delta(\delta g_N) = & g_N (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\eta}_{0,\alpha}^{(2)} + \kappa_{\alpha\gamma} \delta\bar{\xi}^\gamma) m^{\alpha\beta} (\boldsymbol{\nu} \cdot \Delta\boldsymbol{\varphi}_{,\beta}^{(2)} + \kappa_{\beta\delta} \Delta\bar{\xi}^\delta) \\ & + \boldsymbol{\nu} \cdot (\delta\bar{\xi}^\alpha \Delta\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}^{(2)} + \Delta\bar{\xi}^\alpha \boldsymbol{\eta}_{0,\alpha}^{(2)}) + \kappa_{\alpha\beta} \delta\bar{\xi}^\alpha \Delta\bar{\xi}^\beta \end{aligned} \quad (1.99)$$

(E) *Variación linealizada de  $\delta\bar{\xi}^\alpha$* . La variación linealizada de  $\delta\bar{\xi}^\alpha$  puede calcularse de forma implícita, a partir del cálculo de la derivada direccional de (1.97). Después de una significant cantidad de operaciones algebraicas, puede obtenerse la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta} \Delta(\delta\bar{\xi}^\beta) = & -(\boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \boldsymbol{\eta}_{0,\beta}^{(2)} + g_N \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\eta}_{0,\alpha\beta}^{(2)}) \Delta\bar{\xi}^\beta \\ & - (\boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \Delta\boldsymbol{\varphi}_{,\beta}^{(2)} + g_N \boldsymbol{\nu} \cdot \Delta\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha\beta}^{(2)}) \delta\bar{\xi}^\beta \\ & + (\boldsymbol{\eta}_0^{(1)} - \boldsymbol{\eta}_0^{(2)} - \delta\bar{\xi}^\gamma \boldsymbol{\tau}_\gamma) \cdot (\Delta\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}^{(2)} + \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \Delta\bar{\xi}^\beta) \\ & + (\Delta\boldsymbol{\varphi}^{(1)} - \Delta\boldsymbol{\varphi}^{(2)} - \Delta\bar{\xi}^\gamma \boldsymbol{\tau}_\gamma) \cdot (\boldsymbol{\eta}_{0,\alpha}^{(2)} + \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \delta\bar{\xi}^\beta) \\ & - [\boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \mathbf{e}_{\beta,\gamma}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) + g_N \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{e}_{\alpha,\beta\gamma}(\bar{\boldsymbol{\xi}})] \delta\bar{\xi}^\beta \Delta\bar{\xi}^\gamma \end{aligned} \quad (1.100)$$

Particularizando (1.100) para  $g_N = 0$ , y después de algunas manipulaciones algebraicas y utilizando (1.50) y (1.93), la variación linealizada de  $\delta\bar{\xi}^\alpha$  para  $g_N = 0$ , puede escribirse como:

$$\begin{aligned} m_{\alpha\beta} \Delta(\delta\bar{\xi}^\beta) = & -(\boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \boldsymbol{\eta}_{0,\beta}^{(2)} \Delta\bar{\xi}^\beta|_{g_N=0} + \boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \Delta\boldsymbol{\varphi}_{,\beta}^{(2)} \delta\bar{\xi}^\beta|_{g_N=0}) \\ & - \delta g_N (\Delta\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\nu} + \kappa_{\alpha\beta} \Delta\bar{\xi}^\beta|_{g_N=0}) \\ & - \Delta g_N (\boldsymbol{\eta}_{0,\alpha}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\nu} + \kappa_{\alpha\beta} \delta\bar{\xi}^\beta|_{g_N=0}) \\ & - \boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \mathbf{e}_{\beta,\gamma}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \delta\bar{\xi}^\beta|_{g_N=0} \Delta\bar{\xi}^\gamma|_{g_N=0} \end{aligned} \quad (1.101)$$



(F) *Variación linealizada del salto de temperatura en la interfase  $g_\theta$ .* Utilizando la definición del salto térmico  $g_\theta$  dada por (1.75)<sub>1</sub>, su variación linealizada a configuración fija es trivial y viene dada por la expresión:

$$\boxed{\delta g_\theta = \zeta_0^{(1)}(\mathbf{X}) - \zeta_0^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t))} \quad (1.102)$$

(G) *Variación linealizada de la temperatura media del gas  $\theta_G$ .* Utilizando la definición de la temperatura media del gas encerrado en las microcavidades  $\theta_G$  dadas por (1.75)<sub>2</sub>, su variación linealizada a configuración fija tiene la expresión:

$$\boxed{\delta \theta_G = h_\epsilon \zeta_0^{(1)}(\mathbf{X}) + (1 - h_\epsilon) \zeta_0^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t))} \quad (1.103)$$

### 1.3.6 Contribuciones mecánicas y térmicas de contacto a la forma débil.

A partir de la expresión (1.55) para la contribución mecánica y térmica de contacto, utilizando la descomposición de la tracción friccional (1.57), las variaciones linealizadas (1.93) y (1.97), y las ecuaciones (1.102) y (1.103), las contribuciones mecánicas y térmicas de contacto a la forma débil de las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y de energía pueden escribirse como

$$\boxed{\begin{aligned} G_c^{mech}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\eta}_0) &:= \langle t_N, \delta g_N \rangle_{\Gamma^{(1)}} + \langle t_{T\alpha}, \delta \bar{\xi}^\alpha \rangle_{\Gamma^{(1)}} \\ G_c^{ther}(\Theta, \zeta_0) &:= \langle Q_{hc}, \delta g_\theta \rangle_{\Gamma^{(1)}} - \langle \mathcal{D}_{fric}, \delta \theta_G \rangle_{\Gamma^{(1)}} \end{aligned}} \quad (1.104)$$

donde, utilizando una notación compacta,  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}_{mech}$  y  $\boldsymbol{\eta}_0 \in \mathcal{V}_0$  es el conjunto de aplicaciones  $\boldsymbol{\varphi}^{(i)} \in \mathcal{C}_{mech}^{(i)}$  y  $\boldsymbol{\eta}_0^{(i)} \in \mathcal{V}_0^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , y  $\Theta \in \mathcal{C}_{ther}$  y  $\zeta_0 \in \mathcal{T}_0$  es el conjunto de aplicaciones  $\Theta^{(i)} \in \mathcal{C}_{ther}^{(i)}$  y  $\zeta_0^{(i)} \in \mathcal{T}_0^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , tal que la restricción de cada una de las aplicaciones  $\boldsymbol{\varphi}$ ,  $\boldsymbol{\eta}_0$ ,  $\Theta$  y  $\zeta_0$  al dominio  $\bar{\Omega}^{(i)}$  da idénticamente  $\boldsymbol{\varphi}^{(i)}$ ,  $\boldsymbol{\eta}_0^{(i)}$ ,  $\Theta^{(i)}$  y  $\zeta_0^{(i)}$ , respectivamente.

## 1.4 EL PROBLEMA TERMOMECAÁNICO FRICCIONAL DISCRETO

La solución numérica del problema de contorno con valores iniciales correspondiente al problema termomecánico acoplado con restricciones de contacto friccional en deformaciones finitas, implica la transformación de un sistema dinámico de dimensión infinita, gobernado por un sistema cuasi-lineal de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, en una secuencia de problemas algebraicos discretos, mediante los siguientes pasos:

**Paso 1.** El espacio de dimensión infinita  $Z = \mathcal{C}_{mech} \times \mathcal{V}_0 \times \mathcal{C}_{ther} \times \mathcal{T}_0$  es aproximado por un espacio de dimensión finita  $Z^h \subset Z$  por medio de una proyección de elementos finitos de Galerkin. La proyección en el espacio de la forma débil de las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y de energía, conduce a un sistema acoplado no lineal

de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen la evolución temporal de los grados de libertad nodales en el intervalo de interés  $I$ .

**Paso 2.** El sistema no-lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias describe la evolución temporal, en el intervalo de interés  $I$ , de los grados de libertad nodales y de las variables internas asociadas a la proyección de elementos finitos de Galerkin. Una discretización temporal del problema conlleva una partición  $I = \cup_{n=0}^N [t_n, t_{n+1}]$  del intervalo de interés  $I$ . Dentro de cada subintervalo de tiempo  $[t_n, t_{n+1}]$ , un algoritmo de integración temporal para la actualización de la configuración, la velocidad y la temperatura (variables primales) en  $Z^h$ , juntamente con un algoritmo de retorno para la actualización de las variables internas, resulta en un problema algebraico no lineal que debe ser resuelto de forma iterativa. La utilización de un *operador de partición*, aplicado al sistema acoplado no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias, en combinación con un *algoritmo de formula producto*, conduce a un *algoritmo secuencial* en el que cada uno de los subproblemas definidos por el operador de partición se resuelve de forma secuencial, dentro del marco general de los *métodos de paso fraccionado*.

#### 1.4.1. Integración temporal del problema acoplado. Métodos de paso fraccionado.

(A) *Problema de evolución genérico.* Dada una partición temporal  $I = \cup_{n=0}^N [t_n, t_{n+1}]$  del intervalo temporal de interés  $I$ , los algoritmos para la integración en el tiempo del problema acoplado termoplástico, se diseñan, típicamente, reescribiendo el sistema de ecuaciones de gobierno del problema, como un problema abstracto de evolución de primer orden en las variables primales.

Consideremos el siguiente problema abstracto de evolución de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} z(\cdot, t) &= \mathbf{A}[z(\cdot, t)] + \mathbf{f}(\cdot) && \text{en } \Omega \times I, \\ z(\cdot, t_0) &= z_0(\cdot) && \text{en } \Omega, \end{aligned} \quad (1.105)$$

donde  $z(\cdot, t) \in \mathcal{Z}$  pertenece a un espacio funcional adecuado  $\mathcal{Z}$ , típicamente un espacio de Banach de Sobolev,  $\mathbf{A}[\cdot]$  es un operador no lineal elíptico,  $\mathbf{f}$  es una función prescrita y  $z_0 \in \mathcal{Z}$  son unos valores iniciales especificados. Con las adecuadas hipótesis técnicas, la versión homogénea del problema abstracto de evolución define un semi-flujo, que denominaremos

$$\mathcal{F}_t : \mathcal{Z} \times [t_n, t_{n+1}] \rightarrow \mathcal{Z}, \quad (1.106)$$

el cual permite avanzar desde los datos iniciales  $z(\cdot, t_0) \in \mathcal{Z}$ , a la solución del problema abstracto de evolución en el tiempo  $t$ , de acuerdo con  $z(\cdot, t) = \mathcal{F}_t[z(\cdot, t_0)]$  y satisface que  $\mathcal{F}_{t+s} = \mathcal{F}_t \circ \mathcal{F}_s$  for  $t \geq s$ . En lo que sigue a continuación, supondremos que se verifican las condiciones técnicas que permiten asegurar (al menos localmente en el tiempo) la existencia de este flujo.

Sea  $\mathcal{K}_{\Delta t} : \mathcal{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Z}$  una familia de un parámetro de aplicaciones, que denominaremos como el *algoritmo*, que depende de forma continua del parámetro  $\Delta t \geq 0$  que

denominaremos *incremento de tiempo*. Supondremos que el algoritmo es *consistente* con el semi-flujo, y que por lo tanto verifica las siguientes condiciones

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{K}_{\Delta t}[z] = z \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\mathcal{K}_{\Delta t}[z] - z] = \mathbf{A}[z]. \quad (1.107)$$

Ahora la idea clave es la introducción de un *operador aditivo de partición*  $\mathbf{A}[\cdot] = \mathbf{A}^1[\cdot] + \mathbf{A}^2[\cdot]$ , donde  $\mathbf{A}^1[\cdot]$  y  $\mathbf{A}^2[\cdot]$  son dos operadores que definen los siguientes sub-problemas

*Problema 1*

*Problema 2*

$$\frac{d}{dt} z(\cdot, t) = \mathbf{A}^1[z(\cdot, t)] + \mathbf{f}^1(\cdot) \quad \frac{d}{dt} z(\cdot, t) = \mathbf{A}^2[z(\cdot, t)] + \mathbf{f}^2(\cdot) \quad (1.108)$$

donde, adicionalmente, se ha considerado también una partición de los términos forzados  $\mathbf{f} = \mathbf{f}^1 + \mathbf{f}^2$ .

Consideremos ahora los algoritmos  $\mathcal{K}_{\Delta t}^1[\cdot]$  y  $\mathcal{K}_{\Delta t}^2[\cdot]$ , consistentes con los flujos  $\mathcal{F}^1$  y  $\mathcal{F}^2$ , respectivamente. Entonces, el algoritmo  $\mathcal{K}_{\Delta t}[\cdot]$  viene definido por la *formula producto*

$$\mathcal{K}_{\Delta t}[\cdot] = \left( \mathcal{K}_{\Delta t}^2 \circ \mathcal{K}_{\Delta t}^1 \right) [\cdot], \quad \text{en} \quad \mathcal{Z} \times [t_n, t_{n+1}]. \quad (1.109)$$

Además, con el objetivo de que el algoritmo de formula producto definido por (1.109) preserve las propiedades cruciales del flujo, por ejemplo, estabilidad disipativa, cada uno de los algoritmos que emanan de la partición del operador debe diseñarse de manera que preserve estas propiedades. En particular, en el contexto de problemas termoplásticos acoplados, ARMERO & SIMO [1992A,1992B,1993] mostraron que la partición clásica isotérmica del problema, en un problema isotérmico y un problema térmico a configuración fija, no preservaba el estimador a-priori de estabilidad disipativa inherente al problema continuo, mientras que la partición isentrópica que proponían, sí que preservaba esta propiedad crucial y permitía por lo tanto obtener algoritmos de formula producto incondicionalmente estables.

(B) *Algoritmos de formula producto para problemas termomecánicos acoplados. Partición isentrópica.* La ecuaciones de gobierno del problema termomecánico acoplado se pueden expresar de forma abstracta como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden dadas por (3.1), en el cuál las variables primales, operador y términos forzados prescritos vienen dados por

$$z = \begin{Bmatrix} \varphi \\ \mathbf{V} \\ H \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A}[z] = \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \frac{1}{\rho_0} \text{DIV}[\mathbf{P}] \\ -\frac{1}{\Theta} \text{DIV}[\mathbf{Q}] + \frac{1}{\Theta} \mathcal{D}_{int} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\rho_0} \mathbf{B} \\ \frac{1}{\Theta} R \end{Bmatrix}. \quad (1.110)$$

Consideremos ahora el siguiente *operador de partición isentrópica*  $\mathbf{A}[\cdot] = \mathbf{A}_{ise}^1[\cdot] + \mathbf{A}_{ise}^2[\cdot]$ , donde

$$\mathbf{A}_{ise}^1[z] = \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \frac{1}{\rho_0} \text{DIV}[\mathbf{P}] \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{ise}^2[z] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\Theta} \text{DIV}[\mathbf{Q}] + \frac{1}{\Theta} \mathcal{D}_{int} \end{Bmatrix}, \quad (1.111)$$

junto con la partición de términos prescritos asociada dada por

$$\mathbf{f}_{ise}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\rho_0} \mathbf{B} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{ise}^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\Theta} R \end{Bmatrix}. \quad (1.112)$$

La utilización de un algoritmo de formula producto asociado a la partición isentrópica del operador conduce a un algoritmo de integración temporal secuencial, donde primero se resuelve un problema mecánico (con conducción de calor) a isentropía constante, y a continuación se resuelve un problema térmico a configuración constante (configuración fija). ARMERO & SIMO [1992A,1992B,1993] mostraron que, en marcado contraste con el algoritmo de solución secuencial basado en la partición isotérmica del operador, la partición isentrópica preservaba el estimador a-priori de estabilidad disipativa inherente al problema continuo, permitiendo obtener algoritmos incondicionalmente estables, basados en la formula producto de algoritmos incondicionalmente estables. Véase ARMERO & SIMO [1992A,1992B,1993] para los detalles de una implementación computacional eficiente del algoritmo.

(C) *Algoritmos de formula producto para problemas termomecánicos acoplados. Partición isotérmica.* Las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico acoplado se pueden expresar como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden abstracto dado por (1.105), en el cual las variables primales, operador y términos forzados prescritos vienen dados por

$$z = \begin{Bmatrix} \varphi \\ \mathbf{V} \\ \Theta \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A}[z] = \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \frac{1}{\rho_0} \text{DIV}[\mathbf{P}] \\ -\frac{1}{c_0} \text{DIV}[\mathbf{Q}] - \frac{1}{c_0} \mathcal{H}^{ep} + \frac{1}{c_0} \mathcal{D}_{mech} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\rho_0} \mathbf{B} \\ \frac{1}{c_0} R \end{Bmatrix}. \quad (1.113)$$

Consideremos ahora el *operador de partición isotérmico*  $\mathbf{A}[\cdot] = \mathbf{A}_{iso}^1[\cdot] + \mathbf{A}_{iso}^2[\cdot]$ , donde

$$\mathbf{A}_{iso}^1[z] = \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \frac{1}{\rho_0} \text{DIV}[\mathbf{P}] \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{iso}^2[z] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{c_0} \text{DIV}[\mathbf{Q}] - \frac{1}{c_0} \mathcal{H}^{ep} + \frac{1}{c_0} \mathcal{D}_{mech} \end{Bmatrix}, \quad (1.114)$$

junto con la partición asociada de los términos forzados dada por

$$\mathbf{f}_{iso}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\rho_0} \mathbf{B} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{iso}^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{c_0} R \end{Bmatrix}. \quad (1.115)$$

La utilización de un algoritmo de formula producto asociado a la partición isotérmica del operador conduce a un algoritmo de solución secuencial en el que se resuelve en primer lugar un problema mecánico (sin conducción de calor) a temperatura constante, seguido de un problema de conducción de calor a configuración fija.

### 1.4.2 Discretización espacial: La proyección de Galerkin

Consideremos una discretización espacial  $\Omega^{(i)} = \cup_{e=1}^{n_{elem}} \Omega_e^{(i)}$  de la configuración de referencia  $\Omega^{(i)} \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$ , que denominaremos de forma genérica triangularización  $\mathcal{T}^{(i)h}$ , en una colección disjunta de subconjuntos no superpuestos  $\Omega_e^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ . Denominaremos elemento finito a un elemento típico de esta colección de subconjuntos y llamaremos  $h > 0$  el tamaño característico de un elemento en una triangularización dada.

Asociada a la triangularización  $\mathcal{T}^{(i)h}$  se introduce una aproximación de dimensión finita  $\mathcal{C}_{mech}^{(i)h} \subset \mathcal{C}_{mech}^{(i)}$  y  $\mathcal{C}_{ther}^{(i)h} \subset \mathcal{C}_{ther}^{(i)}$  de los espacios de configuración y temperatura admisibles,  $\mathcal{C}_{mech}^{(i)}$  y  $\mathcal{C}_{ther}^{(i)}$ , respectivamente, definidos como

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{mech}^{(i)h} &:= \{\varphi^{(i)h} \in \mathcal{C}_{mech}^{(i)} : \varphi^{(i)h} \in [C^0(\Omega^{(i)})]^{n_{dim}} \text{ y } \varphi^{(i)h}|_{\Omega_e^{(i)}} \in [P^k(\Omega_e^{(i)})]^{n_{dim}}\} \\ \mathcal{C}_{ther}^{(i)h} &:= \{\Theta^{(i)h} \in \mathcal{C}_{ther}^{(i)} : \Theta^{(i)h} \in [C^0(\Omega^{(i)})] \text{ y } \Theta^{(i)h}|_{\Omega_e^{(i)}} \in [P^k(\Omega_e^{(i)})]\}, \end{aligned} \quad (1.116)$$

donde  $P^k(\Omega_e^{(i)})$  representa el espacio de polinómios completos de grado  $k \geq 1$ .

Los subespacios de dimensión finita  $\mathcal{V}_0^{(i)h} \subset \mathcal{V}_0^{(i)}$  y  $\mathcal{T}_0^{(i)h} \subset \mathcal{T}_0^{(i)}$  de variaciones admisibles (o funciones de prueba) asociados con  $\mathcal{C}_{mech}^{(i)h}$  y  $\mathcal{C}_{ther}^{(i)h}$  se definen como

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0^{(i)h} &:= \{\eta_0^{(i)h} \in \mathcal{V}_0^{(i)} : \eta_0^{(i)h} \in [C^0(\Omega^{(i)})]^{n_{dim}} \text{ y } \eta_0^{(i)h}|_{\Omega_e^{(i)}} \in [P^k(\Omega_e^{(i)})]^{n_{dim}}\} \\ \mathcal{T}_0^{(i)h} &:= \{\zeta_0^{(i)h} \in \mathcal{T}_0^{(i)} : \zeta_0^{(i)h} \in [C^0(\Omega^{(i)})] \text{ y } \zeta_0^{(i)h}|_{\Omega_e^{(i)}} \in [P^k(\Omega_e^{(i)})]\}. \end{aligned} \quad (1.117)$$

(A) *Proyección de Galerkin de las contribuciones mecánicas y térmicas a la forma débil.* La proyección de Galerkin de las contribuciones mecánicas y térmicas a la forma débil de las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y de energía, dadas para el caso del continuo por (1.104), pueden escribirse como

$$\boxed{\begin{aligned} G_c^{mech}(\varphi^h, \eta_0^h) &:= \langle t_N^h, \delta g_N^h \rangle_{\Gamma^{(1)h}} + \langle t_{T\alpha}^h, \delta \bar{\xi}^{\alpha h} \rangle_{\Gamma^{(1)h}} \\ G_c^{ther}(\Theta^h, \zeta_0^h) &:= \langle Q_{hc}^h, \delta g_\theta^h \rangle_{\Gamma^{(1)h}} - \langle \mathcal{D}_{fric}^h, \delta \theta_G^h \rangle_{\Gamma^{(1)h}} \end{aligned}} \quad (1.118)$$

donde  $(\cdot)^h$  representa la proyección de Galerkin de  $(\cdot)$ . En particular, utilizando la notación introducida en (1.104),  $\varphi^h$  y  $\eta_0^h$  hacen referencia a las colecciones discretas de aplicaciones  $\varphi^{(i)h}$  y  $\eta_0^{(i)h}$ ,  $i = 1, 2$ , tal que la restricción de cada una de las aplicaciones  $\varphi^h$  y  $\eta_0^h$  al dominio  $\bar{\Omega}^{(i)h}$  da como resultado  $\varphi^{(i)h}$  y  $\eta_0^{(i)h}$ , respectivamente. Análogamente,  $\Theta^h$  y  $\zeta_0^h$  se refiere a la colección discreta de aplicaciones  $\Theta^{(i)h}$  y  $\zeta_0^{(i)h}$ ,  $i = 1, 2$ , tal que la restricción de cada una de las aplicaciones  $\Theta^h$  y  $\zeta_0^h$  al dominio  $\bar{\Omega}^{(i)h}$  da como resultado  $\Theta^{(i)h}$  y  $\zeta_0^{(i)h}$ , respectivamente.

Las proyecciones  $\delta g_N^h$  y  $\delta \bar{\xi}^{\alpha h}$  vienen dadas por (1.93) y (1.98), y las proyecciones  $\delta g_\theta^h$  y  $\delta \theta_G^h$  vienen dadas por (1.102) y (1.103), con las cantidades discretas reemplazando a sus respectivas cantidades en el continuo.

(B) *Linealización*. La linealización de las contribuciones mecánicas y térmicas a la forma débil dada por (1.118), conduce a las siguientes formas bilineales

$$\boxed{\begin{aligned} B_{\varphi_t^h}^{mech}(\boldsymbol{\eta}_0^h, \Delta\boldsymbol{\varphi}^h) &:= B_{\varphi_t^h}^{mech,geo}(\boldsymbol{\eta}_0^h, \Delta\boldsymbol{\varphi}^h) + B_{\varphi_t^h}^{mech,mat}(\boldsymbol{\eta}_0^h, \Delta\boldsymbol{\varphi}^h) \\ B_{\Theta_t^h}^{ther}(\zeta_0^h, \Delta\Theta^h) &:= B_{\Theta_t^h}^{ther,geo}(\zeta_0^h, \Delta\Theta^h) + B_{\Theta_t^h}^{ther,mat}(\zeta_0^h, \Delta\Theta^h) \end{aligned}} \quad (1.119)$$

Aquí  $B_{\varphi_t^h}^{mech,geo}(\cdot, \cdot)$  es el *término geométrico* mecánico definido para valores fijos de la presión (nominal) de contacto  $t_N^h$  y de la tracción tangente (nominal) friccional  $t_{T\alpha}^h$  para una configuración dada  $\boldsymbol{\varphi}_t^h \in \mathcal{C}_{mech}^h$ , mediante la forma bilineal siguiente:

$$\boxed{B_{\varphi_t^h}^{mech,geo}(\boldsymbol{\eta}_0^h, \Delta\boldsymbol{\varphi}^h) := \langle t_N^h, \Delta(\delta g_N^h) \rangle_{\Gamma(1)^h} + \langle t_{T\alpha}^h, \Delta(\delta \bar{\xi}^{\alpha h}) \rangle_{\Gamma(1)^h},} \quad (1.120)$$

$B_{\varphi_t^h}^{mech,mat}(\cdot, \cdot)$  es el *término material* mecánico definido para una configuración fija  $\boldsymbol{\varphi}_t^h \in \mathcal{C}_{mech}^h$ , por la forma bilineal siguiente:

$$\boxed{B_{\varphi_t^h}^{mech,mat}(\boldsymbol{\eta}_0^h, \Delta\boldsymbol{\varphi}^h) := \langle \Delta t_N^h, \delta g_N^h \rangle_{\Gamma(1)^h} + \langle \Delta t_{T\alpha}^h, \delta \bar{\xi}^{\alpha h} \rangle_{\Gamma(1)^h},} \quad (1.121)$$

$B_{\Theta_t^h}^{ther,geo}(\cdot, \cdot)$  es el *término geométrico* térmico definido para un valor fijo del flujo (nominal) de calor por conducción  $Q_{hc}^h$  para una configuración fija  $\boldsymbol{\varphi}_t^h \in \mathcal{C}_{mech}^h$ , por la forma bilineal siguiente:

$$\boxed{B_{\Theta_t^h}^{ther,geo}(\zeta_0^h, \Delta\Theta^h) := \langle Q_{hc}^h, \Delta(\delta g_\theta^h) \rangle_{\Gamma(1)^h} - \langle \mathcal{D}_{fric}^h, \Delta(\delta \theta_G^h) \rangle_{\Gamma(1)^h},} \quad (1.122)$$

y  $B_{\Theta_t^h}^{ther,mat}(\cdot, \cdot)$  es el *término material* térmico definido para la configuración actual fija  $\Theta_t^h \in \mathcal{C}_{ther}^h$ , por la forma bilineal siguiente:

$$\boxed{B_{\Theta_t^h}^{ther,mat}(\zeta_0^h, \Delta\Theta^h) := \langle \Delta Q_{hc}^h, \delta g_\theta^h \rangle_{\Gamma(1)^h} - \langle \Delta \mathcal{D}_{fric}^h, \delta \theta_G^h \rangle_{\Gamma(1)^h}.} \quad (1.123)$$

### 1.4.3 Discretización temporal. Algoritmo friccional de retorno

Consideremos el intervalo temporal de interés  $I = [0, T]$  discretizado en una serie de subintervalos disjuntos  $I := \cup_{n=0}^N [t_n, t_{n+1}]$ . La solución incremental del problema de contorno con valores iniciales se obtiene mediante la aplicación de un algoritmo de integración temporal de las ecuaciones de evolución, para un intervalo temporal típico  $[t_n, t_{n+1}]$ , con valores conocidos de las variables nodales y de las variables internas en el instante inicial del intervalo  $t_n$ , como condiciones iniciales en los nodos y en los puntos de integración de un elemento típico de la discretización por elementos finitos  $\Omega_e^{(i)}$ , respectivamente.

En el marco de los *métodos de paso fraccionado*, que surgen a partir de una partición del operador de gobierno del sistema no-lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen la evolución temporal de los grados de libertad nodales y de las variables internas, aplicamos un algoritmo de integración temporal de las ecuaciones de evolución para cada una de las particiones, utilizando un *algoritmo de formula producta*.

Utilizando una notación habitual, utilizaremos  $(\cdot)_n$  o  $(\cdot)_{n+1}$  las aproximaciones algorítmicas en los instantes  $t_n$  y  $t_{n+1}$  de las correspondientes variables en el continuo  $(\cdot)_t$ .

(A) *Algoritmo de integración temporal friccional*. La mayoría de los algoritmos de integración temporal requieren la evaluación de la forma débil y de las variables internas en un instante de tiempo  $t_{n+\vartheta}$ , donde  $\vartheta \in (0, 1]$ . En SIMO [1992,1994] se puede encontrar un análisis de distintos algoritmos de integración temporal para problemas de plasticidad dinámica, incluyendo los métodos de multipaso lineal (LMS), y entre éstos los denominados métodos de diferencias hacia atrás (BD), y los métodos implícitos de Runge-Kutta (IRK). Aquí nos vamos a centrar en dos algoritmos para la integración temporal del problema friccional de evolución con restricciones definido por (1.68) y (1.69): el método de BD de orden más bajo, el método de Backward-Euler (BE), y de los métodos IRK, el método generalizado de proyección de punto medio (PMP).

(A1) *Método de Backward-Euler (BE)*. Consideremos la aproximación de (1.68) y (1.69) utilizando el método de BD de orden más bajo, el método de BE, para obtener la ecuación algebraica

$$\begin{aligned} t_{T_{n+1}\alpha} &= t_{T_n\alpha} + \epsilon_T [M_{\alpha\beta}(\bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta) - \gamma_{n+1} p_{T_{n+1}\alpha}] \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \gamma_{n+1} [(1-w) + w \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|] \end{aligned} \quad (1.124)$$

sujeta a las restricciones complementarias de Kuhn-Tucker discretizadas

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1} &:= \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\| - \mu(\alpha_{n+1}) t_{N_{n+1}} \leq 0 \\ \gamma_{n+1} &\geq 0 \\ \gamma_{n+1} \Phi_{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (1.125)$$

La solución del problema algebraico incremental con restricciones definido por (1.124) y (1.125) se obtiene mediante la introducción de un estado de prueba, obtenido mediante la congelación de la respuesta irreversible de deslizamiento, seguido de un algoritmo de retorno que fuerza la verificación de las restricciones friccionales.

*Step 1. Estado de prueba.* El estado friccional de prueba se obtiene congelando la respuesta de deslizamiento irreversible, es decir, haciendo  $\gamma_{n+1} = 0$ . En este caso no existen restricciones y el estado de prueba se define como:

$$\begin{aligned} t_{T_{n+1}\alpha}^{trial} &:= t_{T_n\alpha} + \epsilon_T M_{\alpha\beta}(\bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta) \\ \alpha_{n+1}^{trial} &:= \alpha_n \\ \Phi_{n+1}^{trial} &:= \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b\,trial}\| - \mu(\alpha_{n+1}^{trial}) t_{N_{n+1}} \end{aligned} \quad (1.126)$$

donde  $t_{N_{n+1}} = \epsilon_N \langle g_{N_{n+1}} \rangle$  es la presión de contacto en el instante  $t_{n+1}$ .

**Step 2. Algoritmo de retorno.** El algoritmo de retorno define el estado final como la solución del problema algebraico discreto con restricciones:

$$\begin{aligned} t_{T_{n+1}\alpha} &= t_{T_{n+1}\alpha}^{trial} - \epsilon_T \gamma_{n+1} p_{T_{n+1}\alpha} \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_{n+1}^{trial} + \gamma_{n+1} [(1-w) + w \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|] \end{aligned} \quad (1.127)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{n+1} &= \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\| - \mu(\alpha_{n+1}) t_{N_{n+1}} \leq 0 \\ \gamma_{n+1} &\geq 0 \\ \gamma_{n+1} \Phi_{n+1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.128)$$

Suponiendo que  $\Phi_{n+1}^{trial} > 0$ , en caso contrario  $\gamma_{n+1} = 0$  y el estado de prueba es de hecho el estado final, el parámetro de consistencia discreto  $\gamma_{n+1}$  puede calcularse imponiendo la versión discreta de la condición de consistencia  $\Phi_{n+1} = 0$ . Sustituyendo  $\mathbf{p}_{T_{n+1}}^b := \mathbf{t}_{T_{n+1}}^b / \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|$  en la expresión de la tracción friccional

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b = \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{btrial} - \epsilon_T \gamma_{n+1} \mathbf{p}_{T_{n+1}}^b \quad (1.129)$$

agrupando términos, haciendo  $\mathbf{p}_{T_{n+1}}^{btrial} := \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{btrial} / \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{btrial}\|$  y tomando las normas, se obtiene que,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{T_{n+1}}^b &= \mathbf{p}_{T_{n+1}}^{btrial} \\ \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\| &= \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{btrial}\| - \epsilon_T \gamma_{n+1} \end{aligned} \quad (1.130)$$

Sustituyendo (1.130) en (1.127)-(1.129), el algoritmo de retorno friccional puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{T_{n+1}}^b &= \left(1 - \epsilon_T \frac{\gamma_{n+1}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{btrial}\|}\right) \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{btrial} \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_{n+1}^{trial} + \gamma_{n+1} [(1-w) + w \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{btrial}\| - w \epsilon_T \gamma_{n+1}] \\ \Phi_{n+1} &:= \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{btrial}\| - \epsilon_T \gamma_{n+1} - \mu(\alpha_{n+1}) t_{N_{n+1}} = 0 \end{aligned} \quad (1.131)$$

o de forma alternativa, utilizando la condición de consistencia,

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{T_{n+1}}^b &= \mu(\alpha_{n+1}) t_{N_{n+1}} \mathbf{p}_{T_{n+1}}^{btrial} \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_{n+1}^{trial} + \gamma_{n+1} [(1-w) + w \mu(\alpha_{n+1}) t_{N_{n+1}}] \\ \Phi_{n+1} &:= \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{btrial}\| - \epsilon_T \gamma_{n+1} - \mu(\alpha_{n+1}) t_{N_{n+1}} = 0 \end{aligned} \quad (1.132)$$

El cálculo del parámetro de consistencia  $\gamma_{n+1}$  requerirá, en general, resolver la ecuación no lineal  $\Phi_{n+1} = \hat{\Phi}(\gamma_{n+1}) = 0$ , donde implícitamente se considera que  $\alpha_{n+1}$  es una función  $\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}(\gamma_{n+1})$ , utilizando (1.131)<sub>2</sub> en vez de (1.132)<sub>2</sub>. Utilizando el método de Newton-Raphson la linealización de la función de deslizamiento puede escribirse como:

$$\Phi_{n+1}^{(k)} + D\Phi_{n+1}^{(k)} \cdot \Delta\gamma_{n+1}^{(k)} = 0 \quad (1.133)$$



con

$$\begin{aligned}
\Phi_{n+1}^{(k)} &= \Phi_{n+1}^{trial} - \epsilon_T \gamma_{n+1}^{(k)} - [\mu(\alpha_{n+1}^{(k)}) - \mu(\alpha_{n+1}^{trial})] t_{N_{n+1}} \\
D\Phi_{n+1}^{(k)} &= -\epsilon_T - \partial_\alpha \mu(\alpha_{n+1}^{(k)}) D\alpha_{n+1}^{(k)} t_{N_{n+1}} \\
\alpha_{n+1}^{(k)} &= \alpha_{n+1}^{trial} + \gamma_{n+1}^{(k)} [(1-w) + w \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{btrial}\| - w \epsilon_T \gamma_{n+1}^{(k)}] \\
D\alpha_{n+1}^{(k)} &= (1-w) + w \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{btrial}\| - 2 w \epsilon_T \gamma_{n+1}^{(k)} \\
\Delta\gamma_{n+1}^{(k)} &= \gamma_{n+1}^{(k+1)} - \gamma_{n+1}^{(k)}
\end{aligned} \tag{1.134}$$

y con la condición inicial  $\gamma_{n+1}^{(0)} = 0$ .

Como es bien conocido, el algoritmo de BE es consistente y tiene una precisión de primer orden. Por otro lado, tal como mostró SIMO [1994] en el contexto de la plasticidad perfecta J2, a pesar de la restricción a una precisión de primer orden, tiene las propiedades disipativas y contractivas inherentes al problema continuo resultando ser un algoritmo óptimo para un comportamiento a largo plazo.

OBSERVACIÓN 1.7. La expresión intrínseca de la tracción friccional puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b &:= \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{btrial} - \epsilon_T \gamma_{n+1} \mathbf{p}_{T_{n+1}}^{btrial} \\
\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{btrial} &:= \mathbf{F}_{n+1}^{-T} \cdot \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{bref trial} \\
\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{bref trial} &:= \mathbf{A}_{n+1}^n \cdot \mathbf{t}_{T_n}^{bref} + \epsilon_T M_{\alpha\beta} (\bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta) \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\alpha ref}
\end{aligned} \tag{1.135}$$

donde el gradiente de deformación de la superficie  $\mathbf{F}_{n+1}$  y el operador de transporte superficial  $\mathbf{A}_{n+1}^n$  se definen como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{n+1}^{-T} &:= \boldsymbol{\tau}_{n+1}^\alpha \otimes \boldsymbol{\tau}_{\alpha_{n+1}}^{ref} \\
\mathbf{A}_{n+1}^n &:= \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\alpha ref} \otimes \boldsymbol{\tau}_{\alpha_n}^{ref}
\end{aligned} \tag{1.136}$$

La tracción friccional en el estado de prueba definida como  $\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{btrial} := t_{T_{n+1}\alpha}^{trial} \boldsymbol{\tau}_{n+1}^\alpha$  puede interpretarse como el resultado de aplicar un algoritmo de dos pasos:

i. Integración temporal de la tracción friccional en la configuración de referencia para obtener  $\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{bref trial}$ . Esta integración temporal se realiza, a su vez, en dos pasos. Primero, la tracción friccional en la configuración de referencia, en el último paso de tiempo convergido, se transporta con el operador  $\mathbf{A}_{n+1}^n$  al punto de proyección-más-cercano actual en la configuración de referencia. A continuación se actualiza con la contribución del deslizamiento de prueba, definido como la distancia, respecto a la métrica  $M_{\alpha\beta}$ , entre los puntos de proyección más cercanos actual y último convergido, en la configuración de referencia.

ii. "Push-forward" de la tracción friccional de prueba en la configuración de referencia a la configuración deformada o actual, para obtener finalmente  $\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{btrial}$ . Una vez se ha obtenido la tracción friccional de prueba, se aplica el algoritmo de retorno en la configuración actual, siguiendo el método habitual.  $\square$

(A2) *Método de proyección de medio punto generalizado (PMP). Método implícito de Runge-Kutta (IRK).* El método de IRK se aplica mediante un algoritmo de formula producto en dos pasos, tal como se describe a continuación.

*Fase I.* Se aplica un algoritmo de BE para integrar el problema de evolución con restricciones en el intervalo temporal de interés  $[t_n, t_{n+\vartheta}] \subset [t_n, t_{n+1}]$  donde  $t_{n+\vartheta} := (1 - \vartheta)t_n + \vartheta t_{n+1}$  y  $\vartheta \in (0, 1]$ . Por lo tanto la primera fase del algoritmo es idéntica al esquema descrito anteriormente. Explícitamente, supuesto conocido el valor inicial  $\{t_{T_{n\alpha}}^{ref}\}$  y para un valor dado del deslizamiento incremental  $\bar{g}_{T_{n+\vartheta}}^\alpha := \bar{\xi}_{n+\vartheta}^\alpha - \bar{\xi}_n^\alpha$ , se realizan los siguientes pasos:

*Paso 1.* Se define el estado de prueba:

$$\begin{aligned} t_{T_{n+\vartheta}\alpha}^{trial} &:= t_{T_n\alpha} + \epsilon_T M_{\alpha\beta} (\bar{\xi}_{n+\vartheta}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta) \\ \alpha_{n+\vartheta}^{trial} &:= \alpha_n \\ \Phi_{n+\vartheta}^{trial} &:= \|\mathbf{t}_{T_{n+\vartheta}}^{b\,trial}\| - \mu(\alpha_{n+\vartheta}^{trial}) t_{N_{n+\vartheta}} \end{aligned} \quad (1.137)$$

*Paso 2.* El algoritmo de retorno define el estado final en la configuración generalizada intermedia  $\mathcal{C}_{n+\vartheta}$  como la solución del problema algebraico discreto con restricciones:

$$\begin{aligned} t_{T_{n+\vartheta}\alpha} &= t_{T_{n+\vartheta}\alpha}^{trial} - \epsilon_T \gamma_{n+\vartheta} p_{T_{n+\vartheta}\alpha} \\ \alpha_{n+\vartheta} &= \alpha_{n+\vartheta}^{trial} + \gamma_{n+\vartheta} [(1 - w) + w \|\mathbf{t}_{T_{n+\vartheta}}^b\|] \end{aligned} \quad (1.138)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{n+\vartheta} &= \|\mathbf{t}_{T_{n+\vartheta}}^b\| - \mu(\alpha_{n+\vartheta}) t_{N_{n+\vartheta}} \leq 0 \\ &\quad \gamma_{n+\vartheta} \geq 0 \\ &\quad \gamma_{n+\vartheta} \Phi_{n+\vartheta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.139)$$

*Fase IIA.* Una vez que los valores de prueba  $t_{T_{n+\vartheta}\alpha}^{trial}$  y los valores convergidos  $t_{T_{n+\vartheta}\alpha}$  han sido calculados en la Fase I, y en el contexto de un algoritmo de formula producto, los datos iniciales  $t_{T_{n+\vartheta}\alpha}^*$  y  $\alpha_{n+\vartheta}^*$  para la segunda fase se definen mediante una extrapolación lineal:

$$\begin{aligned} t_{T_{n+\vartheta}\alpha}^* &:= \frac{1}{\vartheta} t_{T_{n+\vartheta}\alpha} - \frac{1 - \vartheta}{\vartheta} t_{T_{n+\vartheta}\alpha}^{trial} \\ \alpha_{n+\vartheta}^* &:= \frac{1}{\vartheta} \alpha_{n+\vartheta} - \frac{1 - \vartheta}{\vartheta} \alpha_{n+\vartheta}^{trial} \end{aligned} \quad (1.140)$$

En el marco de las grandes deformaciones, todos los objetos que intervienen en la extrapolación lineal dada por (1.140) deben verse como objetos que están definidos en la misma configuración  $\mathcal{C}_{n+\vartheta}$ . Para el modelo de rozamiento de Coulomb, esta extrapolación se realiza en el plano  $t_N = t_{N_{n+\vartheta}}$  del espacio de tracciones.

*Fase IIB.* La segunda parte de la fase II es idéntica a la fase I, donde ahora los valores iniciales prescritos son  $t_{T_{n+\vartheta}\alpha}^*$  y el incremento de deslizamiento relativo es  $\bar{g}_{T_{n+1}}^\alpha := \bar{\xi}_{n+1}^\alpha - \bar{\xi}_{n+\vartheta}^\alpha$ . Los pasos necesarios para la actualización son los siguientes:

*Paso 1.* Se define el estado de prueba de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} t_{T_{n+1}\alpha}^{trial} &:= t_{T_{n+\vartheta}\alpha}^* + \epsilon_T M_{\alpha\beta} (\bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_{n+\vartheta}^\beta) \\ \alpha_{n+1}^{trial} &:= \alpha_{n+\vartheta}^* \\ \Phi_{n+1}^{trial} &:= \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b,trial}\| - \mu(\alpha_{n+1}^{trial}) t_{N_{n+1}} \end{aligned} \quad (1.141)$$

*Paso 2.* El estado final en la configuración  $\mathcal{C}_{n+1}$  se obtiene, mediante un algoritmo de retorno, como la solución del problema algebraico incremental discreto con restricciones:

$$\begin{aligned} t_{T_{n+1}\alpha} &= t_{T_{n+1}\alpha}^{trial} - \epsilon_T \gamma_{n+1} p_{T_{n+1}\alpha} \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_{n+1}^{trial} + \gamma_{n+1} [(1-w) + w \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|] \end{aligned} \quad (1.142)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{n+1} &= \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\| - \mu(\alpha_{n+1}) t_{N_{n+1}} \leq 0 \\ \gamma_{n+1} &\geq 0 \\ \gamma_{n+1} \Phi_{n+1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.143)$$

Un análisis riguroso de estabilidad y precisión del algoritmo implícito de PMP en el contexto de la plasticidad J2 puede encontrarse en SIMO [1994]. Este análisis de estabilidad y precisión muestra que el algoritmo generalizado de PMP es consistente, de segundo orden para el algoritmo de PMP ( $\vartheta = 0.5$ ), B-estable para  $\vartheta \geq 0.5$  y garantiza que el estado final está en el dominio admisible. Es de remarcar que, en marcado contraste con otros algoritmos de segundo orden, como por ejemplo el algoritmo de punto medio, la precisión de segundo orden se obtiene realizando un retorno radial en cada una de las fases, garantizándose de esta manera que existe siempre una solución, incluso para incrementos de tiempo arbitrariamente grandes.

Sin embargo, el comportamiento a largo plazo de este esquema no es óptimo en comparación con el exhibido por el algoritmo, menos preciso, de BE. En contraste, este esquema resulta óptimo en el comportamiento a corto plazo.

(B) *Linealización del algoritmo de integración temporal friccional.* Los algoritmos de integración temporal presentados en los apartados anteriores pueden ser linealizados exactamente, permitiendo de esta manera obtener las contribuciones correspondientes al operador tangente consistente o algorítmico. Con el objeto de acomodar la linealización de los algoritmos de BE y PMP en una expresión unificada, obtendremos la linealización de la tracción friccional en el instante de tiempo  $t_{n+\vartheta}$ , para una configuración genérica  $\mathcal{C}_{n+\vartheta}$ , donde  $\vartheta = 1$  para el algoritmo de BE y  $\vartheta \in (0, 1]$  para el algoritmo de PMP. Nótese que la implementación del algoritmo de PMP IRK, requiere únicamente la linealización de la Fase I, mientras que la Fase II puede verse como una actualización que permite obtener las condiciones iniciales para el siguiente paso de tiempo, una vez se haya alcanzado la convergencia del proceso iterativo.

Utilizando de forma sistemática el concepto de derivada direccional, la linealización del algoritmo de integración temporal friccional conduce a las siguientes expresiones.

**Paso 1. Estado de prueba.** La linealización del estado de prueba puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\Delta t_{T_{n+\vartheta}\alpha} &:= \Delta t_{T_{n+\vartheta}\alpha}^{trial} \\ \Delta \alpha_{n+\vartheta} &:= \Delta \alpha_{n+\vartheta}^{trial} = 0\end{aligned}\quad (1.144)$$

**Paso 2. Algoritmo de retorno.** La linealización del algoritmo de retorno puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\Delta t_{T_{n+\vartheta}\alpha} &:= \mu(\alpha_{n+\vartheta}) \Delta t_{N_{n+\vartheta}} p_{T_{n+\vartheta}\alpha}^{trial} + \mu(\alpha_{n+\vartheta}) t_{N_{n+\vartheta}} \Delta p_{T_{n+\vartheta}\alpha}^{trial} \\ &\quad + \partial_\alpha \mu(\alpha_{n+\vartheta}) \Delta \alpha_{n+\vartheta} t_{N_{n+\vartheta}} p_{T_{n+\vartheta}\alpha}^{trial} \\ \Delta \alpha_{n+\vartheta} &:= \Delta \gamma_{n+\vartheta} [(1-w) + w \mu(\alpha_{n+\vartheta}) t_{N_{n+\vartheta}} - w \epsilon_T \gamma_{n+\vartheta}] \\ &\quad + \gamma_{n+\vartheta} w \Delta \|\mathbf{t}_{T_{n+\vartheta}}^{b\,trial}\| \\ &:= \Delta \gamma_{n+\vartheta} [(1-w) + w \mu(\alpha_{n+\vartheta}) t_{N_{n+\vartheta}}] \\ &\quad + \gamma_{n+\vartheta} w [\partial_\alpha \mu(\alpha_{n+\vartheta}) t_{N_{n+\vartheta}} \Delta \alpha_{n+\vartheta} + \mu(\alpha_{n+\vartheta}) \Delta t_{N_{n+\vartheta}}]\end{aligned}\quad (1.145)$$

con

$$\begin{aligned}\Delta t_{N_{n+\vartheta}} &:= \epsilon_N H(g_{N_{n+\vartheta}}) \Delta g_{N_{n+\vartheta}} \\ \Delta g_{N_{n+\vartheta}} &:= -\vartheta [\Delta \boldsymbol{\varphi}^{(1)h} - \Delta \boldsymbol{\varphi}^{(2)h} \circ \boldsymbol{\psi}_0^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_{n+\vartheta})] \cdot \boldsymbol{\nu} \\ \Delta t_{T_{n+\vartheta}\alpha}^{trial} &:= \Xi_{\alpha\beta} \Delta \bar{\boldsymbol{\xi}}_{n+\vartheta}^\beta\end{aligned}\quad (1.146)$$

$$\begin{aligned}\Delta p_{T_{n+\vartheta}\alpha}^{trial} &:= (\delta_\alpha^\beta - \pi_\alpha^\beta) \frac{\Delta t_{T_{n+\vartheta}\beta}^{trial}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+\vartheta}}^{b\,trial}\|} + \pi_\alpha^\beta \mathbf{p}_{T_{n+\vartheta}}^{b\,trial} \cdot [\vartheta \Delta \boldsymbol{\varphi}_{,\beta}^{(2)h}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) + \mathbf{e}_{\beta,\gamma}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \Delta \bar{\boldsymbol{\xi}}_{n+\vartheta}^\gamma] \\ \Delta \|\mathbf{t}_{T_{n+\vartheta}}^{b\,trial}\| &:= p_{T_{n+\vartheta}}^{trial} \alpha \Delta t_{T_{n+\vartheta}\alpha}^{trial} - p_{T_{n+\vartheta}}^{trial} \alpha \mathbf{t}_{T_{n+\vartheta}}^{b\,trial} \cdot [\vartheta \Delta \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}^{(2)h}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) + \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \Delta \bar{\boldsymbol{\xi}}_{n+\vartheta}^\beta] \\ \Delta \bar{\boldsymbol{\xi}}_{n+\vartheta}^\alpha &:= \vartheta A^{\alpha\beta} \{[\Delta \boldsymbol{\varphi}^{(1)h} - \Delta \boldsymbol{\varphi}^{(2)h}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_{n+\vartheta})] \cdot \boldsymbol{\tau}_\beta - g_{N_{n+\vartheta}} \boldsymbol{\nu} \cdot [\Delta \boldsymbol{\varphi}_{,\beta}^{(2)h}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_{n+\vartheta})]\} \\ \Delta \gamma_{n+\vartheta} &:= \frac{1}{\epsilon_T} [\Delta \|\mathbf{t}_{T_{n+\vartheta}}^{b\,trial}\| - \mu(\alpha_{n+\vartheta}) \Delta t_{N_{n+\vartheta}}] - \frac{1}{\epsilon_T} \partial_\alpha \mu(\alpha_{n+\vartheta}) t_{N_{n+\vartheta}} \Delta \alpha_{n+\vartheta}\end{aligned}\quad (1.147)$$

donde,

$$\begin{aligned}\Xi_{\alpha\beta} &:= \epsilon_T (M_{\alpha\beta} + M_{\alpha\gamma,\beta} g_T^\gamma) \\ g_T^\alpha &:= \bar{\boldsymbol{\xi}}_{n+\vartheta}^\alpha - \bar{\boldsymbol{\xi}}_n^\alpha \\ \pi_\alpha^\beta &:= p_{T_{n+\vartheta}\alpha}^{trial} p_{T_{n+\vartheta}}^{trial\beta}\end{aligned}\quad (1.148)$$

con el operador  $\Xi_{\alpha\beta}$ , en general no simétrico, evaluado en  $t_{n+\vartheta}$ . Aquí,  $\Delta \boldsymbol{\varphi}^{(1)h}$  y  $\Delta \boldsymbol{\varphi}^{(2)h}$  hacen referencia a los desplazamientos incrementales en el paso de tiempo, es decir de los instantes  $t_n$  al  $t_{n+1}$ , y se supone implícitamente que todos los objetos involucrados en las expresiones están evaluados en el instante de tiempo  $t_{n+\vartheta}$ . Sustituyendo  $\Delta \gamma_{n+\vartheta}$  en la expresión de  $\Delta \alpha_{n+\vartheta}$  y agrupando términos, se obtiene

$$\Delta \alpha_{n+\vartheta} := \beta_1 \Delta \|\mathbf{t}_{T_{n+\vartheta}}^{b\,trial}\| - \beta_2 \mu(\alpha_{n+\vartheta}) \Delta t_{N_{n+\vartheta}} \quad (1.149)$$

con

$$\begin{aligned}\beta_1 &:= \frac{\partial\alpha/\partial\gamma|_{n+\vartheta} + w \epsilon_T \gamma_{n+\vartheta}}{\epsilon_T + \partial\alpha/\partial\gamma|_{n+\vartheta} \partial_\alpha\mu(\alpha_{n+\vartheta}) t_{N_{n+\vartheta}}} \\ \beta_2 &:= \frac{\partial\alpha/\partial\gamma|_{n+\vartheta}}{\epsilon_T + \partial\alpha/\partial\gamma|_{n+\vartheta} \partial_\alpha\mu(\alpha_{n+\vartheta}) t_{N_{n+\vartheta}}}\end{aligned}\tag{1.150}$$

donde

$$\partial\alpha/\partial\gamma|_{n+\vartheta} := (1 - w) + w \mu(\alpha_{n+\vartheta}) t_{N_{n+\vartheta}} - w \epsilon_T \gamma_{n+\vartheta}\tag{1.151}$$

**OBSERVACIÓN 1.8.** Como resulta claro en (1.148) la pérdida de simetría de  $\Xi_{\alpha\beta}$  aparece como consecuencia de la variación de la métrica superficial en la configuración de referencia a medida que va variando la posición del punto de proyección más cercano. Tal como fue mostrado por LAURSEN & SIMO [1993,1994], un procedimiento sencillo para eliminar esta fuente de no simetría es utilizar la métrica en el centro del elemento *master* en lugar de la métrica en el punto de proyección más cercano en la configuración de referencia.  $\square$

#### 1.4.4 Implementación por el MEF. Expresiones matriciales del residuo y del operador tangente de contacto

En lo que sigue, vamos a centrar la atención en la discretización por el MEF de las superficies de contacto y a las expresiones matriciales resultantes del residuo y operadores tangentes de contacto friccional.

Sean  $n_{sele}$  y  $n_{mele}$  el número total de elementos *slave* y *master*,  $n_{snod}$  y  $n_{mnod}$  el número total de nodos *slave* y *master* en la triangularización de las superficies *slave* y *master*, respectivamente, y  $n_{snod}^e$  y  $n_{mnod}^e$  el número de nodos en un elemento genérico de las superficies *slave* y *master*  $\Gamma_e^{(1)h}$  y  $\Gamma_e^{(2)h}$ , respectivamente, etiquetados como  $\{\mathbf{X}_a^e \in \mathbb{R}^{n_{dim}} : a = 1, \dots, n_{snod}^e\}$  y  $\{\mathbf{Y}_a^e \in \mathbb{R}^{n_{dim}} : a = 1, \dots, n_{mnod}^e\}$ , respectivamente.

Este sistema de numeración local se relaciona con el sistema de numeración global a través de la siguiente notación:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_A &= \mathbf{X}_a^e \quad \text{con } A = ID_s^{(1)}(e, a), \quad e = 1, \dots, n_{sele}, \quad A = 1, \dots, n_{snod}^e \\ \mathbf{Y}_A &= \mathbf{Y}_a^e \quad \text{con } A = ID_s^{(2)}(e, a), \quad e = 1, \dots, n_{mele}, \quad A = 1, \dots, n_{mnod}^e\end{aligned}\tag{1.152}$$

donde la matriz  $ID_s^{(1)}(\cdot, \cdot)$ , de dimensión  $n_{sele} \times n_{snod}^e$ , y la matriz  $ID_s^{(2)}(\cdot, \cdot)$ , de dimensión  $n_{mele} \times n_{mnod}^e$ , se definen a partir de la geometría de la triangularización  $\mathcal{T}^{(i)h}$ . Una formulación conveniente de la proyección de Galerkin se obtiene escribiendo la base polinomial local como  $\{N^a(\zeta)\}$ , donde  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{n_{dim}-1})$  son coordenadas normalizadas en el dominio cuadrado unitario  $\square$  en  $\mathbb{R}^{n_{dim}-1}$  y utilizando la aplicación isoparamétrica:

$$\begin{aligned}\zeta \in \square \mapsto \mathbf{X}^h &:= \boldsymbol{\psi}_0^{e(1)}(\zeta) = \sum_{a=1}^{n_{snod}^e} N^a(\zeta) \mathbf{X}_a^e \in \Gamma_e^{(1)} \\ \zeta \in \square \mapsto \mathbf{Y}^h &:= \boldsymbol{\psi}_0^{e(2)}(\zeta) = \sum_{a=1}^{n_{mnod}^e} N^a(\zeta) \mathbf{Y}_a^e \in \Gamma_e^{(2)}\end{aligned}\tag{1.153}$$

donde las funciones polinómicas locales  $N^a : \square \rightarrow \mathbb{R}$  constituyen las funciones de forma locales y satisfacen las condiciones  $N^a(\zeta_b) = \delta_b^a$ , donde  $\zeta_a = (\zeta_{1a}, \dots, \zeta_{n_{dim}-1a})$  son los vertices del cuadrado de lados unidad.

La proyección de Galerkin de las contribuciones mecánica y térmica de contacto friccional a la forma débil dada por (1.119) y a las formas bilineales dadas por (1.120)-(1.124), pueden escribirse como el ensamblaje de integrales definidas sobre los  $n_{sele}$  elementos de la superficie *slave* de  $\Gamma^{(1)h}$  como:

$$\begin{aligned}
G_c^{mech}(\varphi^h, \eta_0^h) &:= \bigcup_{e=1}^{n_{sele}} G_c^{mech\ e}(\varphi^h, \eta_0^h) \\
G_c^{ther}(\Theta^h, \zeta_0^h) &:= \bigcup_{e=1}^{n_{sele}} G_c^{ther\ e}(\Theta^h, \zeta_0^h) \\
B_{\varphi_t^h}^{mech}(\eta_0^h, \Delta\varphi^h) &:= \bigcup_{e=1}^{n_{sele}} B_{\varphi_t^h}^{mech\ e}(\eta_0^h, \Delta\varphi^h) \\
B_{\Theta_t^h}^{ther}(\zeta_0^h, \Delta\Theta^h) &:= \bigcup_{e=1}^{n_{sele}} B_{\Theta_t^h}^{ther\ e}(\zeta_0^h, \Delta\Theta^h)
\end{aligned} \tag{1.154}$$

donde  $G_c^{mech\ e}(\varphi^h, \eta_0^h)$  y  $G_c^{ther\ e}(\Theta^h, \zeta_0^h)$ , y  $B_{\varphi_t^h}^{mech\ e}(\eta_0^h, \Delta\varphi^h)$  y  $B_{\Theta_t^h}^{ther\ e}(\zeta_0^h, \Delta\Theta^h)$  representan las contribuciones mecánica y térmica de contacto friccional a la forma débil y la forma bilineal, sobre un elemento *slave* típico de la superficie  $\Gamma_e^{(1)h} \subset \Gamma^{(1)h}$ , dadas por (1.119) y (1.120)-(1.124).

La integración numérica de éstas contribuciones de contacto friccional elementales conduce a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
G_c^{mech\ e}(\varphi_e^h, \eta_{0e}^h) &:= - \sum_{i=1}^{n_{int}} W_i j(\zeta_i) \delta\Phi_c^{e,i} \cdot \mathbf{R}_c^{mech\ e,i} \\
G_c^{ther\ e}(\Theta_e^h, \zeta_{0e}^h) &:= - \sum_{i=1}^{n_{int}} W_i j(\zeta_i) \delta\Theta_c^{e,i} \cdot \mathbf{R}_c^{ther\ e,i} \\
B_{\varphi_t^h}^{mech\ e}(\eta_0^h, \Delta\varphi^h) &:= \sum_{i=1}^{n_{int}} W_i j(\zeta_i) \delta\Phi_c^{e,i} \cdot \mathbf{K}_c^{mech\ e,i} \cdot \Delta\Phi_c^{e,i} \\
B_{\Theta_t^h}^{ther\ e}(\zeta_0^h, \Delta\Theta^h) &:= \sum_{i=1}^{n_{int}} W_i j(\zeta_i) \delta\Theta_c^{e,i} \cdot \mathbf{K}_c^{ther\ e,i} \cdot \Delta\Theta_c^{e,i}
\end{aligned} \tag{1.155}$$

donde  $n_{int}$  es el número de puntos de integración a utilizar en la regla de integración en el dominio  $\Gamma_e^{(1)h}$ ,  $W_i$  es el peso del punto de integración  $\zeta_i$ ,  $j(\zeta_i) = \|\mathbf{X}_{,1}(\zeta_i) \times \mathbf{X}_{,2}(\zeta_i)\|$ , donde  $\mathbf{X}_{,\alpha} = d\mathbf{X}/d\zeta^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , es el jacobiano de la proyección isoparamétrica en el punto de integración  $\zeta_i$ ,  $\delta\Phi_c^{e,i}$  y  $\Delta\Phi_c^{e,i}$  son vectores que intervienen en las variaciones de los desplazamientos nodales correspondientes al punto de integración  $i$  del elemento  $e$ ,  $\mathbf{R}_c^{mech\ e,i}$  y  $\mathbf{K}_c^{mech\ e,i}$  son el residuo y matriz tangente de contacto friccional elemental mecánico,

correspondientes al punto de integración  $i$ , respectivamente, y  $\mathbf{R}_c^{ther\ e,i}$  y  $\mathbf{K}_c^{ther\ e,i}$  son el residuo y matriz tangente de contacto friccional elemental térmico, correspondientes al punto de integración  $i$ , respectivamente.

**OBSERVACIÓN 1.9.** Como resulta evidente de (1.155), los operadores de residuo y matriz tangente se han organizado por punto de integración *slave* y no por elemento *slave*. Este esquema resulta mucho más conveniente teniendo en cuenta que cada punto de integración puede involucrar grados de libertad nodales de distintos elementos de la superficie *master*. Los operadores de elementos finitos asociados a un punto de integración típico involucrarán grados de libertad de los nodos *slave* pertenecientes al elemento *slave* donde se encuentra el punto de integración, así como grados de libertad de los nodos *master* del elemento *master* donde se encuentra el punto de proyección. Por otro lado, si los operadores estuvieran asociados a un elemento *slave*, además de involucrar los grados de libertad de los nodos *slave* del elemento, involucrarían los grados de libertad de los nodos de los elementos *master* (nótese que podrían ser distintos y como máximo tantos como puntos de integración *slave*) donde se encuentran los puntos de proyección de cada punto de integración *slave*.  $\square$

**OBSERVACIÓN 1.10.** Asociado a cada punto de integración *slave* definimos un *elemento de contacto* que involucra grados de libertad nodales de la superficie *slave* y de la superficie *master*. Cuando se utiliza una regla de integración nodal, el elemento de contacto tendrá como grados de libertad, los grados de libertad del nodo *slave* y de los nodos *master* del elemento donde está el punto de proyección del nodo *slave*. Cuando se utiliza otra regla de integración, el elemento de contacto tendrá como grados de libertad, todos los grados de libertad de los elementos *slave* y *master*.  $\square$

(A) *Aplicación: Operadores residuo y tangente para una discretización superficial 3D con elementos de n-nodos.* En este apartado, se presentan aspectos relativos a la implementación por el método de los elementos finitos del modelo de contacto friccional, suponiendo una discretización arbitraria de las superficies en 3D mediante elementos de n-nodos. Supondremos además que utilizamos una regla de integración nodal para definir (1.155).

En lo que sigue, vamos a prestar atención a un punto de integración *slave* típico, es decir un nodo *slave* típico utilizando una regla de integración nodal, definido mediante su vector posición  $\mathbf{x}$ , y al elemento de n-nodos de la superficie *master* que contiene su proyección  $\bar{\mathbf{y}} \in \gamma^{(2)h}$ , denominado  $\gamma_e^{(2)h}$ . Supondremos que el punto de proyección  $\bar{\mathbf{y}}$  pertenece al interior del dominio del elemento  $\gamma_e^{(2)h}$ .

Denominaremos *elemento de contacto* al conjunto de nodos formado por el nodo *slave* y los n-nodos del elemento de la superficie *master*  $\gamma_e^{(2)h}$ . Tomando los desplazamientos nodales como grados de libertad obtendremos el *elemento de contacto mecánico* mientras que tomando las temperaturas nodales como grados de libertad obtendremos el *elemento de contacto térmico*.

(A.1) *Elemento de contacto mecánico.* Asociado al elemento de contacto mecánico, definimos los vectores de variaciones de desplazamientos nodales  $\delta\Phi_c$  y  $\Delta\Phi_c$  que contienen las variaciones de desplazamientos del nodo *slave*, denominadas  $\delta\mathbf{d}_s$  y  $\Delta\mathbf{d}_s$ , respectiva-

mente, y las de los  $n$ -nodos *master* en  $\gamma_e^{(2)h}$ , denominadas  $\delta \mathbf{d}_a$  y  $\Delta \mathbf{d}_a$ ,  $a = 1, \dots, n$ , respectivamente.

$$\delta \Phi_c := \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{d}_s \\ \delta \mathbf{d}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta \mathbf{d}_n \end{Bmatrix}, \quad \Delta \Phi_c := \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{d}_s \\ \Delta \mathbf{d}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta \mathbf{d}_n \end{Bmatrix} \quad (1.156)$$

Introducimos además los siguientes operadores:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} \nu \\ -N_1(\bar{\xi}) \nu \\ \cdot \\ \cdot \\ -N_n(\bar{\xi}) \nu \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{T}_\alpha = \begin{Bmatrix} \tau_\alpha \\ -N_1(\bar{\xi}) \tau_\alpha \\ \cdot \\ \cdot \\ -N_n(\bar{\xi}) \tau_\alpha \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{N}_\alpha = \begin{Bmatrix} 0 \\ -N_{1,\alpha}(\bar{\xi}) \nu \\ \cdot \\ \cdot \\ -N_{n,\alpha}(\bar{\xi}) \nu \end{Bmatrix}, \quad (1.157)$$

donde  $\alpha = 1, 2$ , y  $N_a$ ,  $a = 1, \dots, n$  son las funciones de forma isoparamétricas para un elemento de superficie arbitrario de  $n$ -nodos. Utilizando los operadores definidos anteriormente, definimos también:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\alpha &:= A^{\alpha\beta} (\mathbf{T}_\beta + g_N \mathbf{N}_\beta) \\ \bar{\mathbf{N}}_\alpha &:= \mathbf{N}_\alpha - \kappa_{\alpha\beta} \mathbf{D}^\beta \end{aligned} \quad (1.158)$$

donde los índices  $\alpha$  y  $\beta$  varían de 1 a 2 y se utiliza la notación de Einstein que indica sumatorio de índices repetidos. En (1.158)  $A^{\alpha\beta}$  son las componentes de la matriz inversa de  $\mathbf{A}$  definida en (1.96).

Con esta notación y utilizando las relaciones discretas,

$$\begin{aligned} \delta g_N^h &:= -\mathbf{N} \cdot \delta \Phi_c \\ \delta \bar{\xi}^{\alpha h} &:= \mathbf{D}^\alpha \cdot \delta \Phi_c \end{aligned} \quad (1.159)$$

el residuo mecánico de contacto friccional  $\mathbf{R}_c^{mech}$  puede escribirse como,

$$\boxed{\mathbf{R}_c^{mech} := t_N \mathbf{N} - t_T \mathbf{D}^\alpha} \quad (1.160)$$

donde  $\alpha = 1, 2$ .

El operador tangente mecánico de contacto friccional puede descomponerse en una contribución *normal* y otra *tangente*.

$$\mathbf{K}_c^{mech} := \mathbf{K}_{c_N}^{mech} + \mathbf{K}_{c_T}^{mech} \quad (1.161)$$

Adicionalmente, a partir de los términos *material* y *geométrico* de la forma bilineal (1.120), los operadores tangentes mecánicos de contacto friccional pueden descomponerse como,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{c_N}^{mech} &:= \mathbf{K}_{c_N}^{mech,mat} + \mathbf{K}_{c_N}^{mech,geo} \\ \mathbf{K}_{c_T}^{mech} &:= \mathbf{K}_{c_T}^{mech,mat} + \mathbf{K}_{c_T}^{mech,geo} \end{aligned} \quad (1.162)$$



donde  $\mathbf{K}_{c_N}^{mech,mat}$  y  $\mathbf{K}_{c_N}^{mech,geo}$  son las contribuciones material y geométrica a las parte normal del operador tangente mecánico de contacto friccional, y  $\mathbf{K}_{c_T}^{mech,mat}$  y  $\mathbf{K}_{c_T}^{mech,geo}$  son las contribuciones material y geométrica a las parte material del operador tangente mecánico de contacto friccional, respectivamente.

Utilizando los operadores definidos anteriormente, los operadores tangentes mecánicos normales de contacto friccional pueden escribirse como

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{K}_{c_N}^{mech,mat} &:= \epsilon_N H(g_N) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \\ \mathbf{K}_{c_N}^{mech,geo} &:= t_N [g_N m^{\alpha\beta} \bar{\mathbf{N}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{N}}_\beta - (\mathbf{D}^\alpha \otimes \mathbf{N}_\alpha + \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{D}^\alpha) + \kappa_{\alpha\beta} \mathbf{D}^\alpha \otimes \mathbf{D}^\beta] \end{aligned}} \quad (1.163)$$

Para definir los operadores tangentes friccionales mecánicos, vamos a definir en primer lugar los siguientes operadores:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\alpha\beta} &:= [0^T, -N_{1,\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \boldsymbol{\tau}_\alpha^T, \dots, -N_{n,\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \boldsymbol{\tau}_\alpha^T]^T \\ \mathbf{N}_{\alpha\beta} &:= [0^T, -N_{1,\alpha\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \boldsymbol{\nu}^T, \dots, -N_{n,\alpha\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \boldsymbol{\nu}^T]^T \\ \mathbf{P}_\alpha &:= [0^T, -N_{1,\alpha}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{p}_T^b, \dots, -N_{n,\alpha}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{p}_T^b]^T \end{aligned} \quad (1.164)$$

donde  $\alpha, \beta = 1, 2$ , y las funciones de forma se evalúan en  $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ . En base a las definiciones (1.157), (1.158) y (1.164), definimos los siguientes operadores adicionales

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{\alpha\beta} &:= \mathbf{T}_{\alpha\beta} - (\mathbf{e}_{\beta,\gamma}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha) \mathbf{D}^\gamma \\ \bar{\mathbf{P}}_\alpha &:= \mathbf{P}_\alpha - (\mathbf{e}_{\alpha,\gamma}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \mathbf{p}_T^b) \mathbf{D}^\gamma \\ \hat{\mathbf{T}}_{\alpha\beta} &:= \mathbf{T}_{\alpha\beta} + g_N \mathbf{N}_{\alpha\beta} \\ \hat{\mathbf{D}}^\alpha &:= \mathbf{D}^\alpha - m^{\alpha\beta} \mathbf{T}_\beta \end{aligned} \quad (1.165)$$

donde  $\alpha, \beta = 1, 2$

Con las anteriores definiciones y utilizando las expresiones:

$$\begin{aligned} (\delta\boldsymbol{\varphi}^{(1)h} - \delta\boldsymbol{\varphi}^{(2)h}) \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha &:= \mathbf{T}_\alpha \cdot \delta\boldsymbol{\Phi}_c \\ \delta\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}^{(2)h} \cdot \boldsymbol{\nu} &:= -\mathbf{N}_\alpha \cdot \delta\boldsymbol{\Phi}_c \\ \delta\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}^{(2)h} \cdot \boldsymbol{\tau}_\beta &:= -\mathbf{T}_{\beta\alpha} \cdot \delta\boldsymbol{\Phi}_c \\ \delta\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha\beta}^{(2)h} \cdot \boldsymbol{\nu} &:= -\mathbf{N}_{\alpha\beta} \cdot \delta\boldsymbol{\Phi}_c \end{aligned} \quad (1.166)$$

la parte geométrica del operador tangente friccional puede escribirse como

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{K}_{c_T}^{mech,geo} &:= t_{T_\alpha} A^{\alpha\beta} \mathbf{K}_{c_{T_\beta}}^{mech,geo} \\ \mathbf{K}_{c_{T_\alpha}}^{mech,geo} &:= \hat{\mathbf{T}}_{\alpha\beta} \otimes \mathbf{D}^\beta + \mathbf{D}^\beta \otimes \hat{\mathbf{T}}_{\alpha\beta} \\ &\quad + \hat{\mathbf{D}}^\beta \otimes \bar{\mathbf{T}}_{\beta\alpha} + \bar{\mathbf{T}}_{\beta\alpha} \otimes \hat{\mathbf{D}}^\beta \\ &\quad - (\mathbf{N} \otimes \bar{\mathbf{N}}_\alpha + \bar{\mathbf{N}}_\alpha \otimes \mathbf{N}) \\ &\quad - (\mathbf{e}_{\beta,\gamma}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha + g_N \mathbf{e}_{\alpha,\beta\gamma}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \boldsymbol{\nu}) \mathbf{D}^\beta \otimes \mathbf{D}^\gamma \end{aligned}} \quad (1.167)$$

La parte material del operador tangente mecánico friccional dependerá del estado de deslizamiento/adhesión. Utilizando las definiciones anteriores, definimos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{c_T}^{mech,mat,stick} &:= \Xi_{\alpha\beta} \mathbf{D}^\alpha \otimes \mathbf{D}^\beta \\
\mathbf{K}_{c_T}^{mech,mat,slip} &:= -(1 - \bar{\beta}_2) \mu(\alpha) \epsilon_N H(g_N) p_{T_\alpha} \mathbf{D}^\alpha \otimes \mathbf{N} \\
&\quad + \left[ \frac{\mu(\alpha) t_N}{\|\mathbf{t}_T^{btrial}\|} (\delta_\alpha^\gamma - \pi_\alpha^\gamma) + \bar{\beta}_1 \pi_\alpha^\gamma \right] \Xi_{\gamma\beta} \mathbf{D}^\alpha \otimes \mathbf{D}^\beta \\
&\quad - \left[ \mu(\alpha) t_N - \frac{\bar{\beta}_1}{\|\mathbf{t}_T^{btrial}\|} \right] \pi_\alpha^\beta \mathbf{D}^\alpha \otimes \bar{\mathbf{P}}_\beta
\end{aligned} \tag{1.168}$$

donde  $\bar{\beta}_1 := \beta_1 \partial_\alpha \mu(\alpha) t_N$  y  $\bar{\beta}_2 := \beta_2 \partial_\alpha \mu(\alpha) t_N$ , con  $\beta_1$  y  $\beta_2$  dadas en (1.150).

OBSERVACIÓN 1.11. *Elementos de superficie bi-lineales.* Nótese que para el caso particular de elementos de 4 nodos bilineales de superficie,  $\mathbf{N}_{\alpha\beta} = \mathbf{0}$  for  $\alpha = \beta$ ,  $\mathbf{e}_{\alpha,\beta} = \mathbf{0}$  for  $\alpha = \beta$ ,  $\mathbf{e}_{\alpha,\beta\gamma} = \mathbf{0}$  for any  $\alpha, \beta, \gamma$ ,  $\mathbf{E}_{\alpha,\beta} = \mathbf{0}$  for  $\alpha = \beta$  y las componentes del operador no simétrico  $\Xi_{\alpha\beta}$  (1.148)<sub>1</sub> son:

$$\begin{aligned}
\Xi_{11} &:= \epsilon_T (M_{11} + \lambda_1 g_T^2) \\
\Xi_{12} &:= \epsilon_T (M_{12} + 2\lambda_1 g_T^1 + \lambda_2 g_T^2) \\
\Xi_{21} &:= \epsilon_T (M_{21} + \lambda_1 g_T^1 + 2\lambda_2 g_T^2) \\
\Xi_{22} &:= \epsilon_T (M_{22} + \lambda_2 g_T^1)
\end{aligned} \tag{1.169}$$

donde se ha utilizado la notación abreviada  $\lambda_\alpha := \mathbf{E}_{1,2}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha^{ref}$  y  $g_T^\alpha := \bar{\xi}_{n+\theta}^\alpha - \bar{\xi}_n^\alpha$ . En estas expresiones, los índices con letras griegas  $\alpha, \beta, \gamma$  varían de 1 a 2.  $\square$

(A.2) *Elemento de contacto térmico.* Asociado a cada elemento de contacto térmico definimos los vectores de variaciones nodales de temperatura  $\delta\boldsymbol{\Theta}_c$  y  $\Delta\boldsymbol{\Theta}_c$  que contienen las variaciones de temperatura del nodo *slave*, denominadas  $\delta\Theta_s$  y  $\Delta\Theta_s$ , respectivamente, y las de los  $n$ -nodos *master* en  $\gamma_e^{(2)h}$ , denominadas  $\delta\Theta_a$  y  $\Delta\Theta_a$ ,  $a = 1, \dots, n$ , respectivamente, como:

$$\delta\boldsymbol{\Theta}_c := \begin{Bmatrix} \delta\Theta_s \\ \delta\Theta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta\Theta_n \end{Bmatrix}, \quad \Delta\boldsymbol{\Theta}_c := \begin{Bmatrix} \Delta\Theta_s \\ \Delta\Theta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta\Theta_n \end{Bmatrix} \tag{1.170}$$

Definimos además los siguientes operadores

$$\mathbf{T}_\Theta = \begin{Bmatrix} 1 \\ -N_1(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \\ \cdot \\ \cdot \\ -N_n(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{T}_G = \begin{Bmatrix} h_\epsilon \\ (1 - h_\epsilon) N_1(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \\ \cdot \\ \cdot \\ (1 - h_\epsilon) N_n(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \end{Bmatrix}, \tag{1.171}$$

donde  $h_\epsilon$  es la efusividad relativa de la superficie *slave* y  $N_a$ ,  $a = 1, \dots, n$  son las funciones de forma isoparamétricas del elemento *master* arbitrario de  $n$ -nodos.

Con la notación anterior y utilizando las relaciones siguientes,

$$\begin{aligned}\delta g_\theta^h &:= \mathbf{T}_\Theta \cdot \delta \Theta_c \\ \delta \theta_G^h &:= \mathbf{T}_G \cdot \delta \Theta_c\end{aligned}\tag{1.172}$$

el residuo térmico de contacto friccional  $\mathbf{R}_c^{ther}$  puede escribirse como,

$$\boxed{\mathbf{R}_c^{ther} := -Q_{hc} \mathbf{T}_\Theta + \mathcal{D}_{fric} \mathbf{T}_G}\tag{1.173}$$

El operador tangente térmico de contacto friccional puede descomponerse en una parte de *conducción*  $\mathbf{K}_{cN}^{ther}$  y otra de *disipación friccional*  $\mathbf{K}_{cT}^{ther}$ .

$$\mathbf{K}_c^{ther} := \mathbf{K}_{cN}^{ther} + \mathbf{K}_{cT}^{ther}\tag{1.174}$$

Adicionalmente, a partir de los términos *material* y *geométrico* de la forma bilineal (1.120), los operadores tangentes térmicos de contacto friccional pueden descomponerse como,

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{cN}^{ther} &:= \mathbf{K}_{cN}^{ther,mat} + \mathbf{K}_{cN}^{ther,geo} \\ \mathbf{K}_{cT}^{ther} &:= \mathbf{K}_{cT}^{ther,mat} + \mathbf{K}_{cT}^{ther,geo}\end{aligned}\tag{1.175}$$

donde  $\mathbf{K}_{cN}^{ther,mat}$  y  $\mathbf{K}_{cN}^{ther,geo}$  son las contribuciones material y geométrica a las parte del operador tangente térmico de contacto friccional debida a la conducción, y  $\mathbf{K}_{cT}^{ther,mat}$  y  $\mathbf{K}_{cT}^{ther,geo}$  son las contribuciones material y geométrica a la parte del operador tangente térmico de contacto friccional debida a la disipación friccional, respectivamente.

Utilizando los operadores térmicos definidos anteriormente, los operadores tangente térmicos de conducción pueden escribirse como

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{K}_{cN}^{ther,mat} &:= \hat{h}(t_{N_{n+1}}, \theta_{G_{n+1}}) H(g_{N_{n+1}}) \mathbf{T}_\Theta \otimes \mathbf{T}_\Theta \\ &\quad + \partial_{\theta_G} \hat{h}(t_{N_{n+1}}, \theta_{G_{n+1}}) \mathbf{T}_\Theta \otimes \mathbf{T}_G \\ \mathbf{K}_{cN}^{ther,geo} &:= 0\end{aligned}}\tag{1.176}$$

donde la última expresión aparece debido al hecho que  $\Delta(\delta g_\theta) = 0$  para una configuración fija.

Los operadores tangentes térmicos friccionales pueden escribirse como

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{K}_{cT}^{ther,mat} &:= -\partial_{\theta_G} \mathcal{D}_{fric} \mathbf{T}_G \otimes \mathbf{T}_G \\ \mathbf{K}_{cT}^{ther,geo} &:= 0\end{aligned}}\tag{1.177}$$

donde la última expresión aparece al considerar implícitamente un parámetro de efusividad constante y que  $\Delta(\delta \theta_G) = 0$  para una configuración fija.

(B) *Aplicación: Operadores residuo y tangente para una discretización superficial 2D con elementos de n-nodos.* En este apartado, se presentan aspectos relativos a la

implementación por el método de los elementos finitos del modelo de contacto friccional, suponiendo una discretización arbitraria de las superficies en 2D mediante elementos de  $n$ -nodos. Supondremos además que utilizamos una regla de integración nodal para definir (1.155).

En lo que sigue, vamos a prestar atención a un punto de integración *slave* típico, es decir un nodo *slave* típico utilizando una regla de integración nodal, definido mediante su vector posición  $\mathbf{x}$ , y al elemento de  $n$ -nodos de la superficie *master* que contiene su proyección  $\bar{\mathbf{y}} \in \gamma_e^{(2)h}$ , denominado  $\gamma_e^{(2)h}$ . Supondremos que el punto de proyección  $\bar{\mathbf{y}}$  pertenece al interior del dominio del elemento  $\gamma_e^{(2)h}$ .

Denominaremos *elemento de contacto* al conjunto de nodos formado por el nodo *slave* y los  $n$ -nodos del elemento de la superficie *master*  $\gamma_e^{(2)h}$ . Tomando los desplazamientos nodales como grados de libertad obtendremos el *elemento de contacto mecánico* mientras que tomando las temperaturas nodales como grados de libertad obtendremos el *elemento de contacto térmico*.

(B.1) *Elemento de contacto mecánico.* Asociado al elemento de contacto mecánico, definimos los vectores de variaciones de desplazamientos nodales  $\delta\Phi_c$  y  $\Delta\Phi_c$  que contienen las variaciones de desplazamientos del nodo *slave*, denominadas  $\delta\mathbf{d}_s$  y  $\Delta\mathbf{d}_s$ , respectivamente, y las de los  $n$ -nodos *master* en  $\gamma_e^{(2)h}$ , denominadas  $\delta\mathbf{d}_a$  y  $\Delta\mathbf{d}_a$ ,  $a = 1, \dots, n$ , respectivamente.

$$\delta\Phi_c := \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{d}_s \\ \delta\mathbf{d}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta\mathbf{d}_n \end{Bmatrix}, \quad \Delta\Phi_c := \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{d}_s \\ \Delta\mathbf{d}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta\mathbf{d}_n \end{Bmatrix} \quad (1.178)$$

Definimos además los siguientes operadores

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} \nu \\ -N_1(\bar{\xi}) \nu \\ \cdot \\ \cdot \\ -N_n(\bar{\xi}) \nu \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{T}_1 = \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ -N_1(\bar{\xi}) \tau_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ -N_n(\bar{\xi}) \tau_1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{N}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -N_{1,1}(\bar{\xi}) \nu \\ \cdot \\ \cdot \\ -N_{n,1}(\bar{\xi}) \nu \end{Bmatrix}, \quad (1.179)$$

donde  $\alpha = 1, 2$ , y  $N_a$ ,  $a = 1, \dots, n$  son las funciones de forma isoparamétricas para un elemento de superficie arbitrario de  $n$ -nodos. Utilizando los operadores definidos anteriormente, definimos también:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^1 &:= A^{11}(\mathbf{T}_1 + g_N \mathbf{N}_1) \\ \bar{\mathbf{N}}_1 &:= \mathbf{N}_1 - \kappa_{11} \mathbf{D}^1 \end{aligned} \quad (1.180)$$

donde los índices  $\alpha$  y  $\beta$  varían de 1 a 2 y se utiliza la notación de Einstein que indica sumatorio de índices repetidos. En (1.180)  $A^{11}$  es la componente 11 de la inversa de  $A$ , siendo  $A_{11} = m_{11} + g_N \kappa_{11}$ .

Con esta notación y utilizando las relaciones discretas,

$$\begin{aligned} \delta g_N^h &:= -\mathbf{N} \cdot \delta\Phi_c \\ \delta \bar{\xi}^{1h} &:= \mathbf{D}^1 \cdot \delta\Phi_c \end{aligned} \quad (1.181)$$

el residuo mecánico de contacto friccional  $\mathbf{R}_c^{mech}$  puede escribirse como,

$$\boxed{\mathbf{R}_c := t_N \mathbf{N} - t_{T_1} \mathbf{D}^1} \quad (1.182)$$

El operador tangente mecánico de contacto friccional puede descomponerse en una contribución *normal* y otra *tangente*.

$$\mathbf{K}_c := \mathbf{K}_{c_N} + \mathbf{K}_{c_T} \quad (1.183)$$

Adicionalmente, a partir de los términos *material* y *geométrico* de la forma bilineal (1.120), los operadores tangentes mecánicos de contacto friccional pueden descomponerse como,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{c_N} &:= \mathbf{K}_{c_N}^{mat} + \mathbf{K}_{c_N}^{geo} \\ \mathbf{K}_{c_T} &:= \mathbf{K}_{c_T}^{mat} + \mathbf{K}_{c_T}^{geo} \end{aligned} \quad (1.184)$$

donde  $\mathbf{K}_{c_N}^{mech,mat}$  y  $\mathbf{K}_{c_N}^{mech,geo}$  son las contribuciones material y geométrica a las parte normal del operador tangente mecánico de contacto friccional, y  $\mathbf{K}_{c_T}^{mech,mat}$  y  $\mathbf{K}_{c_T}^{mech,geo}$  son las contribuciones material y geométrica a las parte material del operador tangente mecánico de contacto friccional, respectivamente.

Utilizando los operadores definidos anteriormente, los operadores tangentes mecánicos normales de contacto friccional pueden escribirse como

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{K}_{c_N}^{mat} &:= \epsilon_N H(g_N) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \\ \mathbf{K}_{c_N}^{geo} &:= t_N [g_N m^{11} \bar{\mathbf{N}}_1 \otimes \bar{\mathbf{N}}_1 - (\mathbf{D}^1 \otimes \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1 \otimes \mathbf{D}^1) + \kappa_{11} \mathbf{D}^1 \otimes \mathbf{D}^1] \end{aligned}} \quad (1.185)$$

Para definir los operadores tangentes friccionales mecánicos, vamos a definir en primer lugar los siguientes operadores:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{11} &:= [0^T, -N_{1,1}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \boldsymbol{\tau}_1^T, \dots, -N_{n,1}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \boldsymbol{\tau}_1^T]^T \\ \mathbf{N}_{11} &:= [0^T, -N_{1,11}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \boldsymbol{\nu}^T, \dots, -N_{n,11}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \boldsymbol{\nu}^T]^T \\ \mathbf{P}_1 &:= [0^T, -N_{1,1}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{p}_T^{bT}, \dots, -N_{n,1}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{p}_T^{bT}]^T \end{aligned} \quad (1.186)$$

donde las funciones de forma se evalúan en  $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ . En base a las definiciones (1.157), (1.158) y (1.164), definimos los siguientes operadores adicionales

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{11} &:= \mathbf{T}_{11} - (\mathbf{e}_{1,1}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \boldsymbol{\tau}_1) \mathbf{D}^1 \\ \bar{\mathbf{P}}_1 &:= \mathbf{P}_1 - (\mathbf{e}_{1,1}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \mathbf{p}_T^b) \mathbf{D}^1 \\ \hat{\mathbf{T}}_{11} &:= \mathbf{T}_{11} + g_N \mathbf{N}_{11} \\ \hat{\mathbf{D}}^1 &:= \mathbf{D}^1 - m^{11} \mathbf{T}_1 \end{aligned} \quad (1.187)$$

Utilizando la notación anterior y las relaciones discretas siguientes:

$$\begin{aligned} (\delta \varphi^{(1)h} - \delta \varphi^{(2)h}) \cdot \boldsymbol{\tau}_1 &:= \mathbf{T}_1 \cdot \delta \boldsymbol{\Phi}_c \\ \delta \varphi_{,1}^{(2)h} \cdot \boldsymbol{\nu} &:= -\mathbf{N}_1 \cdot \delta \boldsymbol{\Phi}_c \\ \delta \varphi_{,1}^{(2)h} \cdot \boldsymbol{\tau}_1 &:= -\mathbf{T}_{11} \cdot \delta \boldsymbol{\Phi}_c \\ \delta \varphi_{,11}^{(2)h} \cdot \boldsymbol{\nu} &:= -\mathbf{N}_{11} \cdot \delta \boldsymbol{\Phi}_c \end{aligned} \quad (1.188)$$

la parte geométrica del operador tangente friccional puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{c_T}^{geo} &:= t_{T_1} A^{11} \mathbf{K}_{c_{T_1}}^{geo} \\
\mathbf{K}_{c_{T_1}}^{geo} &:= \hat{\mathbf{T}}_{11} \otimes \mathbf{D}^1 + \mathbf{D}^1 \otimes \hat{\mathbf{T}}_{11} \\
&\quad + \hat{\mathbf{D}}^1 \otimes \bar{\mathbf{T}}_{11} + \bar{\mathbf{T}}_{11} \otimes \hat{\mathbf{D}}^1 \\
&\quad - (\mathbf{N} \otimes \bar{\mathbf{N}}_1 + \bar{\mathbf{N}}_1 \otimes \mathbf{N}) \\
&\quad - (\mathbf{e}_{1,1}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \boldsymbol{\tau}_1 + g_N \mathbf{e}_{1,11}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \boldsymbol{\nu}) \mathbf{D}^1 \otimes \mathbf{D}^1
\end{aligned} \tag{1.189}$$

La parte material del operador tangente mecánico friccional dependerá del estado de deslizamiento/adhesión. Utilizando las definiciones anteriores, definimos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{c_T}^{mat,stick} &:= \bar{\boldsymbol{\Xi}}_{11} \mathbf{D}^1 \otimes \mathbf{D}^1 \\
\mathbf{K}_{c_T}^{mat,slip} &:= -(1 - \bar{\beta}_2) \mu(\alpha) \epsilon_N H(g_N) p_{T_1} \mathbf{D}^1 \otimes \mathbf{N} \\
&\quad + \bar{\beta}_1 \bar{\boldsymbol{\Xi}}_{11} \mathbf{D}^1 \otimes \mathbf{D}^1 \\
&\quad - \left[ \mu(\alpha) t_N - \frac{\bar{\beta}_1}{\|t_T^{btrial}\|} \right] \mathbf{D}^1 \otimes \bar{\mathbf{P}}_1
\end{aligned} \tag{1.190}$$

donde  $\bar{\beta}_1 := \beta_1 \partial_\alpha \mu(\alpha) t_N$  y  $\bar{\beta}_2 := \beta_2 \partial_\alpha \mu(\alpha) t_N$  con  $\beta_1$  y  $\beta_2$  definidos en (1.150).

**OBSERVACIÓN 1.12.** *Elementos de superficie lineales.* Nótese que para el caso particular de elementos de superficie lineales de 2 nodos,  $\mathbf{N}_{11} = 0$ ,  $\mathbf{e}_{1,1} = 0$ ,  $\kappa_{11} = 0$ ,  $\mathbf{e}_{1,11} = 0$ ,  $\mathbf{E}_{1,1} = 0$ ,  $A^{11} = m^{11}$  y  $\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{11} := \epsilon_T M_{11}$ .  $\square$

(B.2) *Elemento de contacto térmico.* Las matrices y vectores de contacto térmico para un elemento de superficie lineal de 2 nodos son las mismas que las obtenidas para un elemento general en 3D.

## 1.5 SIMULACIONES NUMÉRICAS

La formulación presentada en los apartados anteriores se utiliza ahora para la simulación de diversos ejemplos numéricos. Los objetivos son mostrar de forma práctica la precisión del modelo de contacto termomecánico presentado y mostrar la robustez de la formulación global para la simulación de problemas termomecánicos con contacto friccional en diversos ejemplos y en especial en aplicaciones de conformado de metales. La simulación se realiza con una versión mejorada del programa de elementos finitos FEAP desarrollado por R.L. Taylor y J.C. Simo y documentado en ZIENKIEWICZ & TAYLOR [1991].

(A) *Calentamiento por disipación friccional de un bloque elástico que desliza sobre una superficie rígida.* Este ejemplo se ha tomado de WRIGGERS & MIEHE [1992] y reproduce el mecanismo de calentamiento por disipación friccional de un bloque elástico que desliza sobre la superficie de un bloque rígido. Se supone que los dos medios pueden transmitir el calor. El bloque superior, un bloque cuadrado de 1.25 mm, se mueve del

extremo izquierdo al derecho del bloque inferior en  $3.75 \cdot 10^{-3}$  s. El bloque inferior tiene 5.00 mm de longitud y 1.25 mm de altura. Durante este proceso, se aplica una presión de  $10 \text{ N/mm}^2$  sobre la cara superior del bloque superior. Se supone que los dos bloques son de aluminio. Las propiedades mecánicas y térmicas del aluminio vienen dadas en la Tabla I.1. El comportamiento friccional en la interfase se caracteriza mediante un modelo de rozamiento de Coulomb con un coeficiente de rozamiento constante de valor 0.2.

Tabla I.1. Propiedades del aluminio.

Módulo de deformación volumétrica	$\kappa = 58,333 \text{ N/mm}^2$
Módulo de deformación transversal	$G = 26,926 \text{ N/mm}^2$
Densidad	$\rho_0 = 2.7 \cdot 10^{-9} \text{ N s}^2/\text{mm}^4$
Coefficiente de expansión térmica	$\alpha = 23.86 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Conductividad térmica	$k = 150 \text{ N/s K}$
Capacidad térmica	$c = 0.9 \cdot 10^9 \text{ mm}^2/\text{s}^2 \text{ K}$
Coefficiente de resistencia térmica	$h_{co} = 150 \text{ N/s K}$
Dureza Vickers	$H_e = 932 \text{ N/mm}^2$
Exponente	$\varepsilon = 0.95$
Efusividad térmica relativa	$h_\varepsilon = 0.5$

La geometría del problema se ha discretizado utilizando 25 elementos de continuo para el bloque elástico superior y 100 elementos de continuo para el bloque rígido inferior. Las restricciones de contacto friccional se han regularizado mediante el método de penalización, siendo los coeficientes de penalización normal y tangente  $\varepsilon_N = 1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$  y  $\varepsilon_T = 1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ , respectivamente. Los desplazamientos del bloque superior se han impuesto prescribiendo los desplazamientos horizontales de los nodos de la cara superior del bloque superior. El proceso de deslizamiento se ha discretizado temporalmente en 100 intervalos iguales. Las caras de los bloques que no están en contacto se han considerado que están térmicamente aisladas. En la interfase de contacto se han considerado los fenómenos de flujo de calor por conducción y de generación de calor por disipación friccional. El problema se ha analizado bajo la hipótesis de deformación plana. Para la solución global del problema termomecánico, se ha considerado un método de paso fraccionado resultante de la partición isotérmica de las ecuaciones de gobierno del problema. La solución de los sistemas no lineales de ecuaciones resultantes se ha realizado mediante un algoritmo de Newton-Raphson, en combinación con un algoritmo de búsqueda y optimización unidireccional. La convergencia del proceso iterativo se ha condicionado requiriendo una tolerancia de  $10^{-20}$  en la norma de energía.

La Tabla I.2 muestra las normas Euclídeas del residuo para tres pasos de tiempo, mecánico + térmico, típicos. Para cada paso de tiempo la línea en negrita muestra la separación de las normas de los residuos obtenidos para el problema mecánico y el problema térmico.

Las FIGURAS 1.3 y 1.4 muestran la distribución de las temperaturas relativas y la

Tabla I.2. Generación de calor por rozamiento entre dos bloques.  
Norma Euclidea del residuo para tres pasos de tiempo típicos.

<i>Paso 20</i>	<i>Paso 50</i>	<i>Paso 80</i>
1.67464E+03	1.67464E+03	1.67463E+03
1.48534E+02	1.48549E+02	1.48556E+02
3.27963E+01	3.27688E+01	3.27540E+01
1.25703E+02	1.25322E+02	1.25152E+02
5.26016E+00	5.18675E+00	5.15008E+00
4.78359E-03	4.60015E-03	4.50579E-03
1.90039E-09	1.79104E-09	1.74612E-09
3.77591E+02	3.53182E+02	3.59583E+02
4.11398E-02	3.20033E-02	3.93119E-02
9.07564E-10	6.40018E-10	9.97886E-10

componente vertical del flujo de calor, respectivamente, para cada uno de los bloques, para tres pasos de tiempo: (a) Paso=20, Tiempo= $7.500 \cdot 10^{-4}$ ; (b) Paso=50, Tiempo= $1.875 \cdot 10^{-3}$ ; (c) Paso=100, Tiempo= $3.000 \cdot 10^{-3}$ .

Las FIGURAS 1.5 y 1.6 muestran la distribución de la disipación friccional y de la presión de contacto en la interfase de contacto para tres pasos de tiempo.

(B) *Aplastamiento de un bloque*. Este ejemplo se ha tomado de WRIGGERS & MIEHE [1992] y consiste en la simulación numérica del proceso termoplástico de aplastamiento de un bloque de aluminio. El bloque se aplasta mediante la aplicación de dos placas rígidas que pueden conducir el calor. En este proceso, se produce el calentamiento del bloque debido a la disipación plástica en el bloque y la disipación friccional en la superficie de contacto. Consideramos un modelo termoplástico  $J_2$  con deformaciones finitas, con una función de energía libre logarítmica y una ley de endurecimiento isotrópico de saturación exponencial combinada con una ley de ablandamiento térmico. Un resumen del modelo se presenta en la Tabla I.3.

El modelo considerado se enmarca dentro de una clase general de modelos para plasticidad basados en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación descrito en el apartado 1.2, en los que la condición de incompresibilidad viene impuesta mediante la expresión  $\det[\mathbf{F}^p] = 1$ . Entonces,  $J := \det[\mathbf{F}] = \det[\mathbf{F}^e]$  y denominamos  $\bar{\mathbf{b}}^e := J^{-2/3} \mathbf{b}^e$  a la parte del tensor elástico izquierdo de Cauchy-Green  $\mathbf{b}^e$  que preserva el volumen. Véase SIMO [1992,1994] y ARMERO & SIMO [1992B,1993] para una descripción detallada de una clase particular de algoritmo de retorno para plasticidad multiplicativa, que preservan el esquema clásico de los algoritmos de retorno para plasticidad infinitesimal.

Las propiedades del aluminio vienen dadas en la Tabla I.1. Se ha supuesto que existe una distribución inicial uniforme de temperatura, igual a la temperatura de referencia  $\Theta_0 = 293.15$  K. La respuesta plástica viene caracterizada por una ley de endurecimiento plástico isotrópico lineal, siendo la tensión de fluencia inicial a la temperatura de referencia



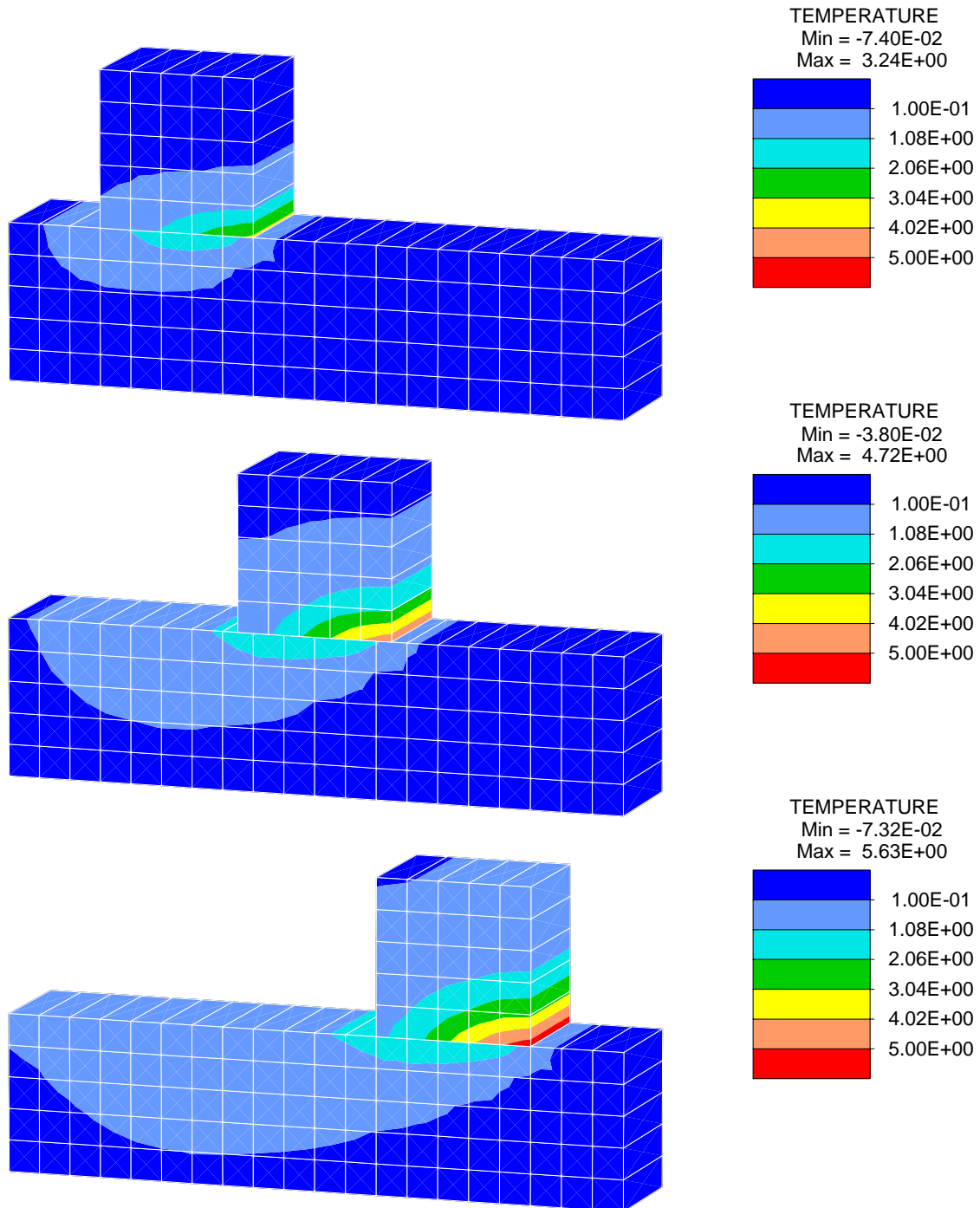


FIGURA 1.3. Calentamiento por disipación friccional de un bloque elástico que desliza sobre una superficie rígida. Distribución de temperaturas relativas en tres pasos de tiempo: (a) Paso=20, Tiempo= $7.500 \cdot 10^{-4}$ ; (b) Paso=50, Tiempo= $1.875 \cdot 10^{-3}$ ; (c) Paso=100, Tiempo= $3.000 \cdot 10^{-3}$ .

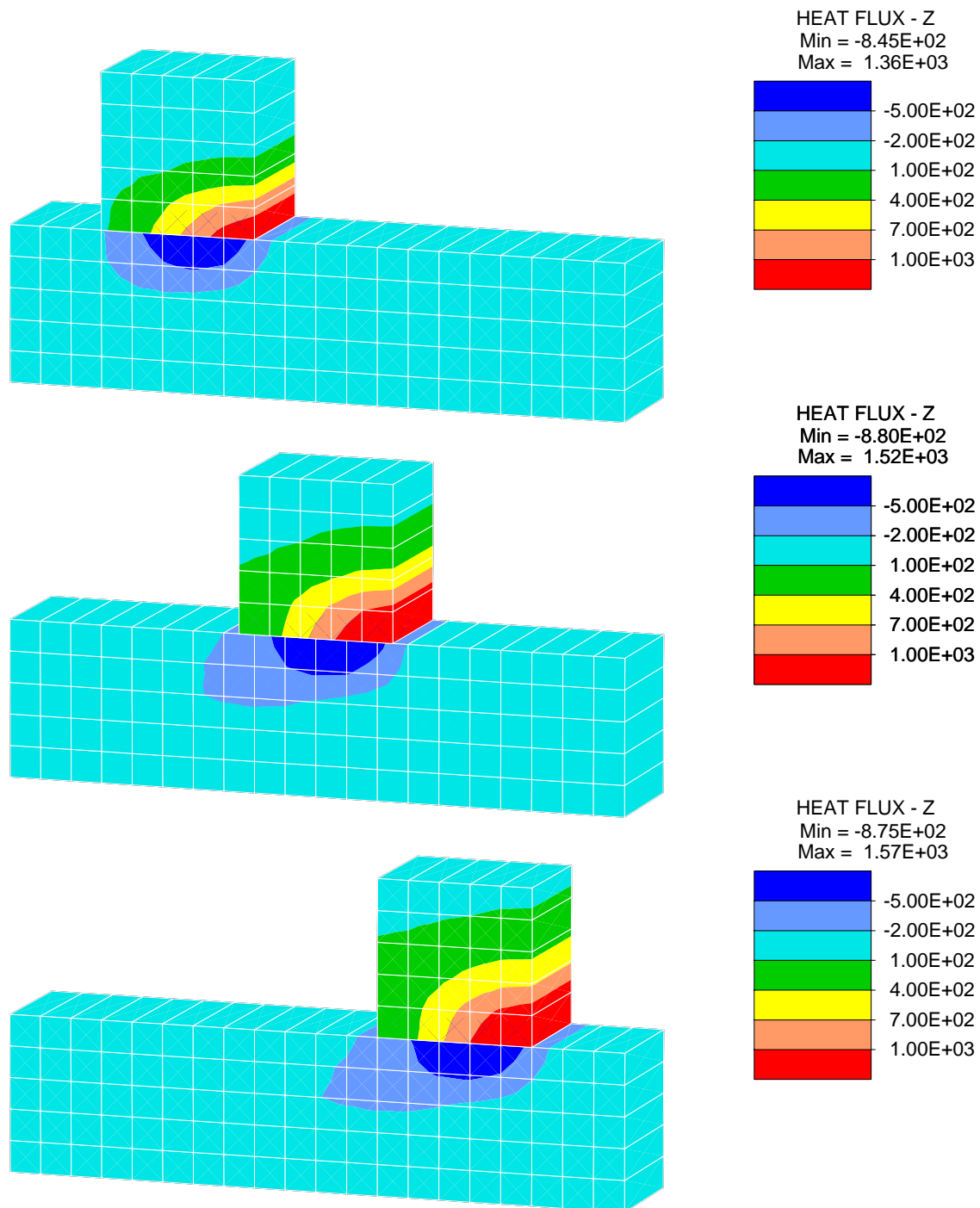


FIGURA 1.4. Calentamiento por disipación friccional de un bloque elástico que desliza sobre una superficie rígida. Flujo de calor vertical para tres pasos de tiempo: (a) Paso=20, Tiempo= $7.500 \cdot 10^{-4}$ ; (b) Paso=50, Tiempo= $1.875 \cdot 10^{-3}$ ; (c) Paso=100, Tiempo= $3.000 \cdot 10^{-3}$ .

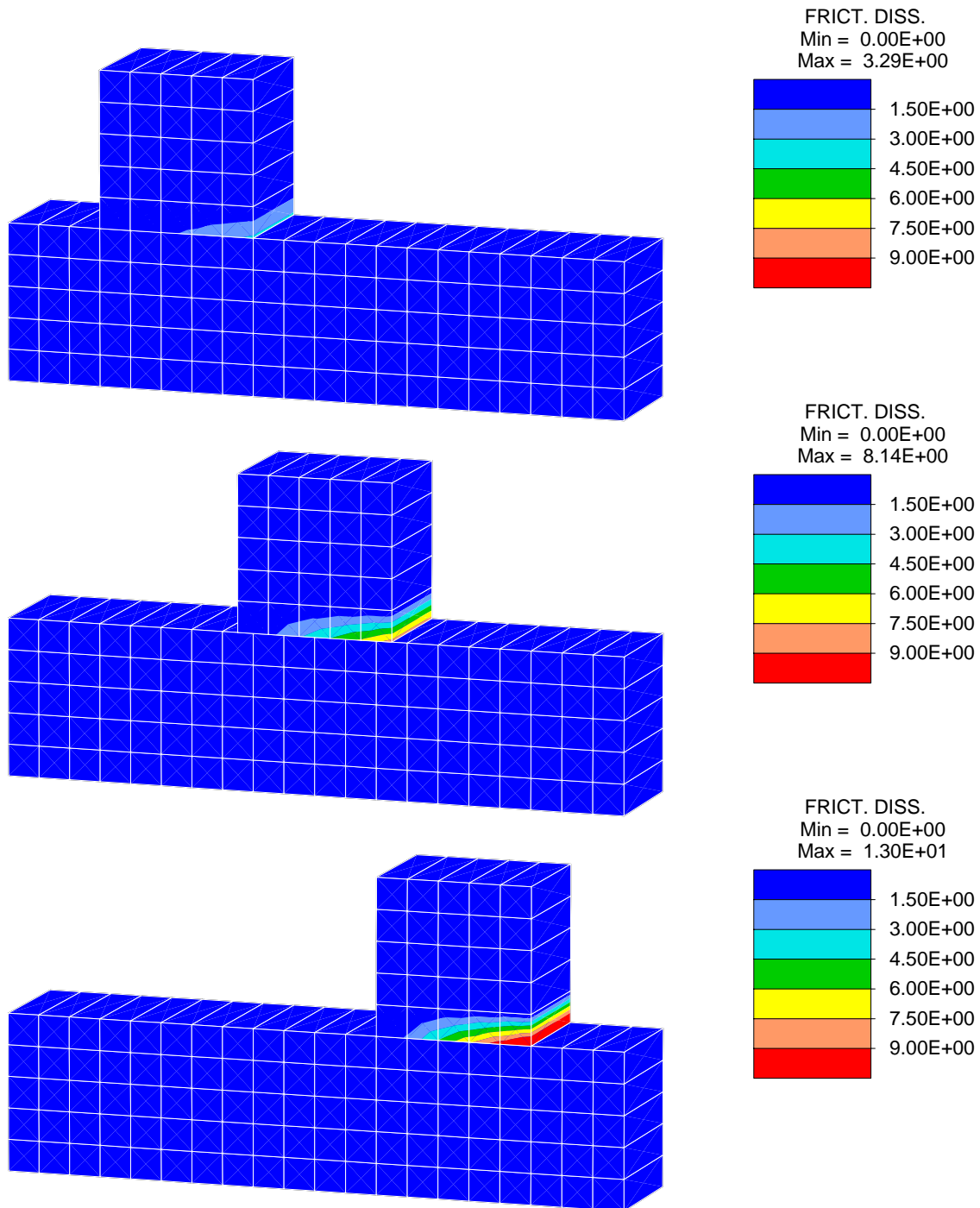


FIGURA 1.5. Calentamiento por disipación friccional de un bloque elástico que desliza sobre una superficie rígida. Disipación friccional en la interfase de contacto para tres pasos de tiempo: (a) Paso=20, Tiempo= $7.500 \cdot 10^{-4}$ ; (b) Paso=50, Tiempo= $1.875 \cdot 10^{-3}$ ; (c) Paso=100, Tiempo= $3.000 \cdot 10^{-3}$ .

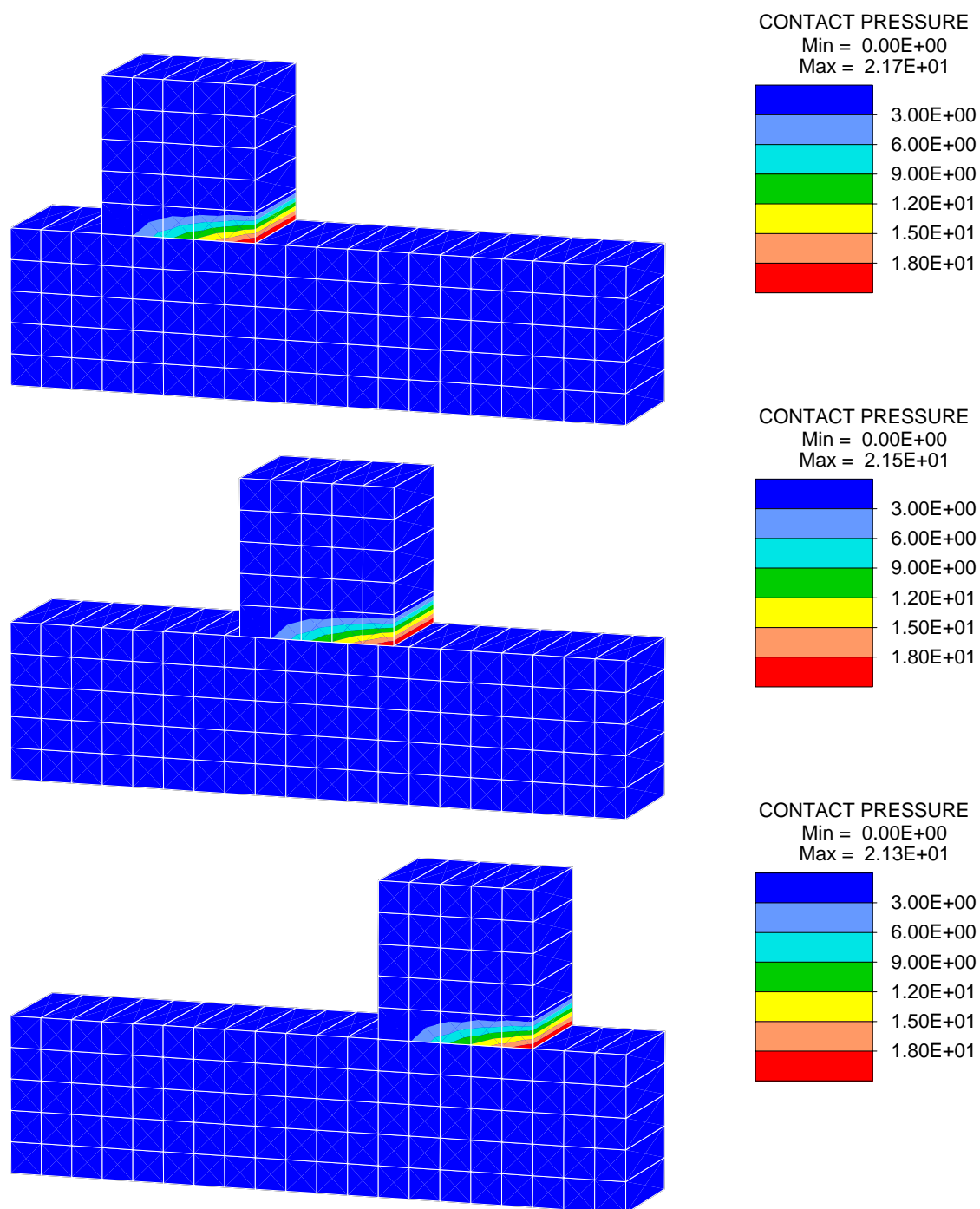


FIGURA 1.6. Calentamiento por disipación friccional de un bloque elástico que desliza sobre una superficie rígida. Distribución de la presión de contacto en la interfase para tres pasos de tiempo: (a)  $\text{Paso}=20$ ,  $\text{Tiempo}=7.500 \cdot 10^{-4}$ ; (b)  $\text{Paso}=50$ ,  $\text{Tiempo}=1.875 \cdot 10^{-3}$ ; (c)  $\text{Paso}=100$ ,  $\text{Tiempo}=3.000 \cdot 10^{-3}$ .

$y_0(\Theta_0) = 70$  MPa y el parámetro de endurecimiento a la temperatura de referencia  $h(\Theta_0) = 210$  MPa. Se considera también una ley de ablandamiento térmico lineal definida por los parámetros de ablandamiento térmico  $w_0 = 3 \cdot 10^{-4}$  y  $w_h = 3 \cdot 10^{-4}$ . El comportamiento friccional en la interfase se modela considerando una ley de Coulomb con coeficiente de rozamiento constante de valor 0.2.

Debido a la simetría del problema sólo se ha discretizado una cuarta parte del mismo utilizando 50 elementos en el bloque y 60 elementos en la placa rígida. En la discretización espacial del bloque se han utilizado los elementos Q1/E12 de deformaciones mejoradas en grandes deformaciones desarrollado por SIMO, ARMERO & TAYLOR [1993]. La discretización del bloque utilizada en WRIGGERS & MIEHE [1992] no era lo suficientemente fina para capturar la distribución de temperaturas generada por la conducción del calor y la disipación friccional, para valores altos de la compactación del bloque. La máxima compactación del bloque, correspondiente a una reducción de altura de un 60%, se obtiene en un intervalo de tiempo de 0.0035 s. El proceso de compactación se consigue prescribiendo el desplazamiento vertical de los nodos de la placa rígida. La simulación numérica se realiza en 100 pasos de tiempo.

La integración temporal del problema termoplástico acoplado se realiza mediante un algoritmo de formula producto basado en una partición isotérmica de las ecuaciones de gobierno del problema. Para la integración temporal, tanto de las variables nodales como de las variables internas, se utiliza un algoritmo implícito de Backward-Euler. Para la solución global de los sistema de ecuaciones resultantes se utiliza el método de Newton-Raphson en combinación con un algoritmo de búsqueda unidireccional. Se establece que la convergencia del proceso iterativo se alcanza para una tolerancia en la norma de energía de  $10^{-20}$ .

Tabla I.4. Compactación de un bloque.  
Norma Euclídea en energía para tres pasos de tiempo.

<i>Paso 50</i>	<i>Paso 75</i>	<i>Paso 100</i>
8.15773E+02	8.13804E+02	8.05270E+02
5.91627E+01	6.20615E+01	6.78419E+01
1.26919E+01	3.25550E+01	6.89033E+01
1.21883E+00	7.96927E+00	3.43222E+01
1.11981E-02	1.41444E-01	5.82032E+00
9.33841E-07	6.39979E-05	6.48231E-02
9.66732E-11	9.39676E-11	1.90928E-05
		1.20049E-10
1.45432E+04	2.75136E+04	7.88499E+04
1.03186E+01	4.29962E+01	3.91760E+02
1.09560E-05	1.88359E-04	2.21231E-02
8.65355E-10	8.86778E-10	9.28287E-10

Tabla I.3. Modelo termoplástico.

**1. Función de energía libre:**

$$\hat{\psi}(\mathbf{b}^e, \xi, \Theta) = W(\bar{\mathbf{b}}^e) + U(J) + M(J, \Theta) + T(\Theta) + K(\xi, \Theta),$$

**i.** Respuesta hiperelástica logarítmica ( $\mu > 0$  y  $\kappa > 0$  constantes),

$$W(\bar{\mathbf{b}}^e) = \mu \sum_{A=1,3} [\log(\bar{\lambda}_A^e)]^2 \quad \text{y} \quad U(J) = \frac{1}{2} \kappa \log^2 J,$$

donde  $\bar{\lambda}_A^e = J^{-1/3} \lambda_A^e$  y  $\lambda_A^e$  son los estiramientos elásticos principales.

**ii.** Acoplamiento termoelástico,

$$M(J, \Theta) = -3\kappa\alpha(\Theta - \Theta_0) \log J.$$

**iii.** Contribución térmica,

$$T(\Theta) = c_0[(\Theta - \Theta_0) - \Theta \log(\Theta/\Theta_0)].$$

**iv.** Potencial de endurecimiento,

$$K(\xi, \Theta) = \frac{1}{2} h(\Theta) \xi^2 - [y_0(\Theta) - y_\infty(\Theta)] H(\xi),$$

donde

$$H(\xi) := \begin{cases} \xi - (1 - \exp^{-\delta\xi})/\delta, & \text{if } \delta \neq 0; \\ 0, & \text{if } \delta = 0. \end{cases}$$

**2. Respuesta plástica:****i.** Criterio de fluencia de Von Mises con tensión de fluencia  $\sigma_Y(\Theta) := y_0(\Theta)$ ,

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}, \beta, \Theta) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}]\| + \beta - \sigma_Y(\Theta) \leq 0,$$

**ii.** Variable de endurecimiento  $\beta$  conjugada de  $\xi$ ,

$$\beta := -\partial_\xi \hat{\psi} = -[h(\Theta)\xi - (y_0(\Theta) - y_\infty(\Theta))(1 - \exp^{-\delta\xi})].$$

**iii.** Ablandamiento térmico lineal,

$$\left. \begin{aligned} y_0(\Theta) &= y_0(\Theta_0)[1 - w_0(\Theta - \Theta_0)] \\ h(\Theta) &= h(\Theta_0)[1 - w_h(\Theta - \Theta_0)] \\ y_\infty(\Theta) &= y_\infty(\Theta_0)[1 - w_h(\Theta - \Theta_0)] \end{aligned} \right\}$$

El análisis se realizó en una Silicon Graphics Power Challenge L Workstation en 7 : 58 min de CPU. La Tabla I.4 muestra las normas Euclídeas de la energía para tres pasos de tiempo, mecánico + térmico, típicos. Para cada paso de tiempo la línea en negrita muestra la separación de las normas de los residuos obtenidos para el problema mecánico y el problema térmico.

Las FIGURAS 1.7 y 1.8 muestran la distribución de la temperatura (relativa) y la deformación plástica equivalente, respectivamente, para tres pasos de tiempo, correspondientes a reducciones en altura del bloque de 30%, 45% y 60%.

Las FIGURAS 1.9 y 1.10 muestran la distribución de la disipación friccional y de la presión de contacto, respectivamente, en las superficies de contacto, para tres pasos de tiempo, correspondientes a reducciones en altura del bloque de 30%, 45% y 60%.

## 1.6 CONCLUSIONES

En este capítulo se ha presentado un modelo numérico para el análisis de problemas termomecánicos acoplados con contacto friccional y en un contexto de deformaciones finitas. La formulación de contacto friccional se ha desarrollado completamente en el continuo, utilizando una cinemática no-lineal. Se ha considerado un modelo térmico de contacto que depende de la la presión de contacto y de la temperatura.

La solución del problema acoplado se ha formulado en el contexto de los métodos de paso fraccionado utilizando un algoritmo de formula producto. El algoritmo emerge a partir de una partición de las ecuaciones de gobierno del problema. Este método conduce a una partición del problema acoplado en una fase mecánica y otra térmica que se resuelven de forma secuencial.

En el contexto de una formulación del problema de contacto friccional conducida por los desplazamientos, utilizando el marco de trabajo desarrollado para plasticidad, se han considerado dos algoritmos de retorno para la integración del problema de fricción: el algoritmo de Backward-Euler y el algoritmo de Proyección de Medio Punto. Los algoritmos desarrollados se han linealizado exactamente para obtener el operador friccional tangente consistente.

Las simulaciones numéricas muestran la excelente adecuación del modelo numérico propuesto para el análisis de problemas termomecánicos acoplados.

## 1.7 REFERENCIAS

- AGELET DE SARACIBAR, C. [1995], "Numerical Analysis of Frictional Contact Problems", *Lecture notes of Short Course on Computational Techniques for Plasticity*, International Center for Numerical Methods in Engineering, Barcelona, Spain.
- AGELET DE SARACIBAR, C. [1997], "A New Frictional Time Integration Algorithm for Multi-Body Large Slip Frictional Contact Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **142**, 303-334.

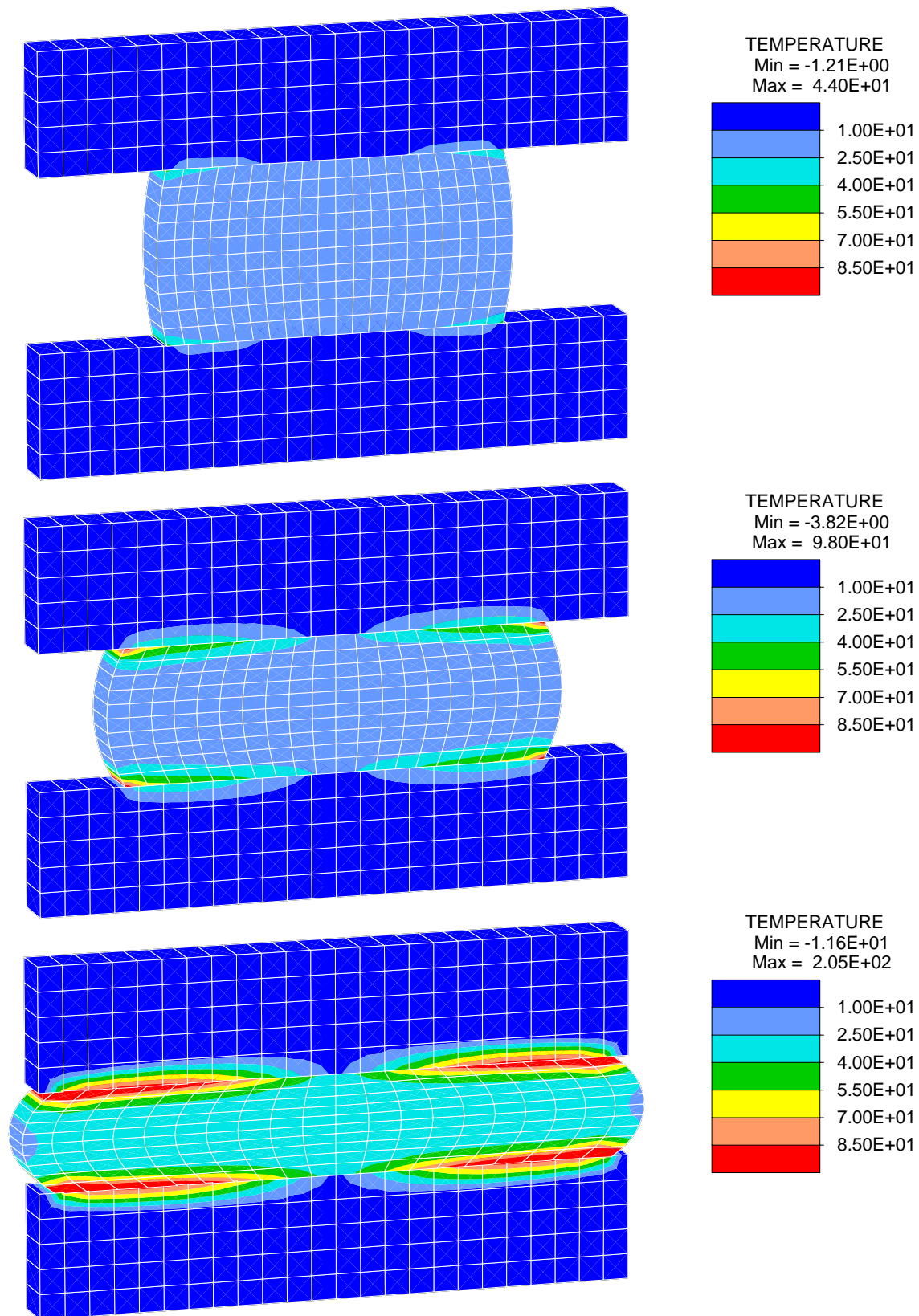


FIGURA 1.7. Compactación de un bloque. Distribución de temperaturas para tres pasos de tiempo, correspondientes a reducciones en altura del bloque de 30%, 45% y 60%.



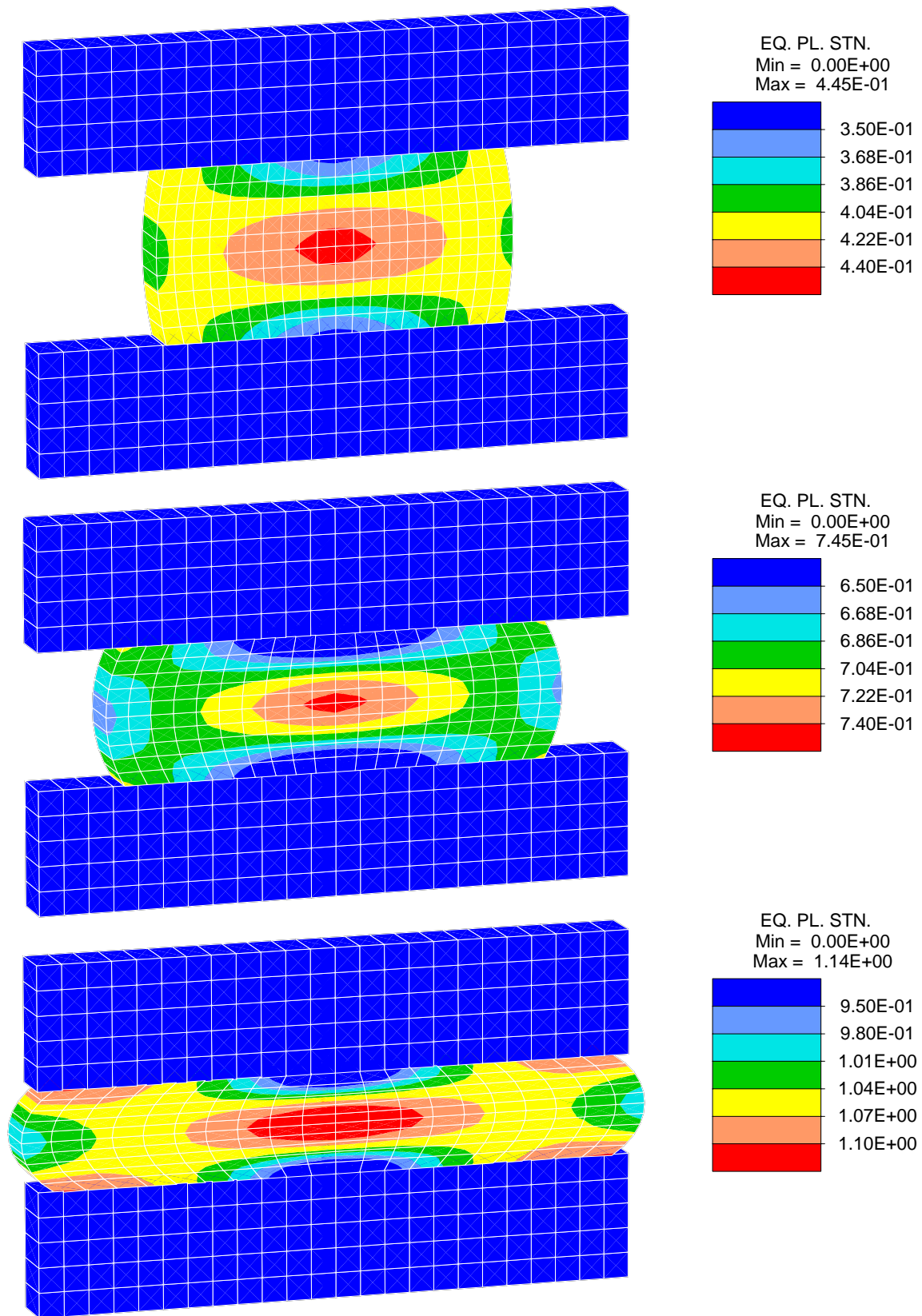


FIGURA 1.8. Compactación de un bloque. Distribución de la deformación plástica equivalente para tres pasos de tiempo, correspondientes a reducciones en altura del bloque de 30%, 45% y 60%.

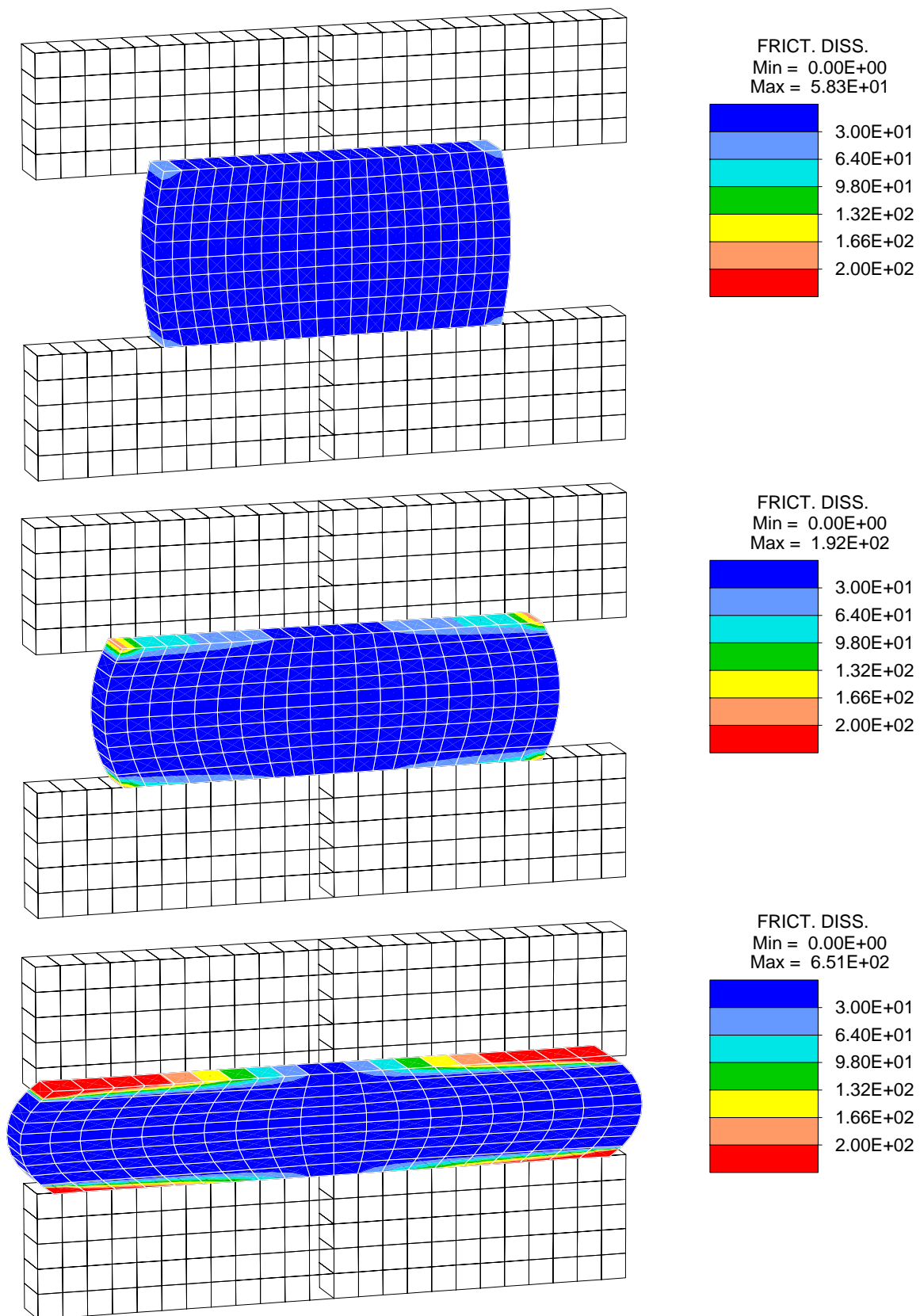


FIGURA 1.9. Compactación de un bloque. Distribución de la disipación friccional para tres pasos de tiempo, correspondientes a reducciones en altura del bloque de 30%, 45% y 60%.

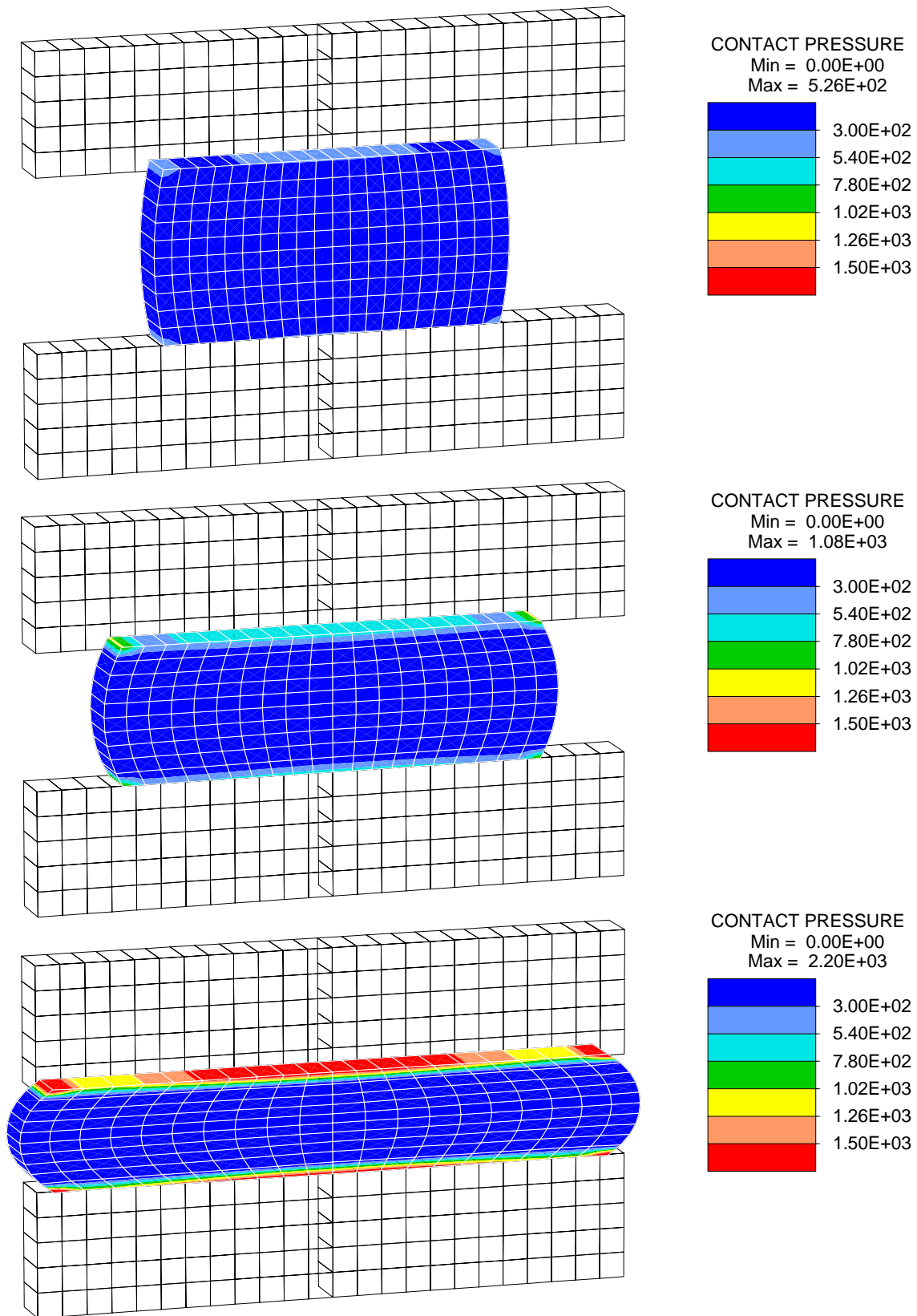


FIGURA 1.10. Compactación de un bloque. Distribución de la presión de contacto para tres pasos de tiempo, correspondientes a reducciones en altura del bloque de 30%, 45% y 60%.

- AGELET DE SARACIBAR, C. & M. CHIUMENTI [1999], "On the Numerical Modeling of Frictional Wear Phenomena", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **177**, 401-426.
- ARMERO, F. & J.C. SIMO [1992A], "A new Unconditionally Stable Fractional Step Method for Nonlinear Coupled Thermomechanical Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **35**, 737-766.
- ARMERO F. & J.C. SIMO [1992B], "Product Formula Algorithms for Nonlinear Coupled Thermoplasticity: Formulation and Nonlinear Stability Analysis", *Division of Applied Mechanics, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Stanford, California*, SUDAM Report no. 92-4, March 1992.
- ARMERO F. & J.C. SIMO [1993], "A Priori Stability Estimates and Unconditionally Stable Product Algorithms for Nonlinear Coupled Thermoplasticity", *International Journal of Plasticity*, **9**, 749-782.
- BATHE, K.-J. & A. CHAUDHARY [1985], "A Solution Method for Planar and Axisymmetric Contact Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **21**, 65-88.
- BELYTSCHKO, T. & M.O. NEAL [1991], "Contact-Impact by the Pinball Algorithm with Penalty and Lagrangian Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **31**(3), 547-572.
- BENSON, D.J. & J.O. HALLQUIST [1990], "A Single Surface Contact Algorithm for the Post-Buckling Analysis of Shell Structures", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **78**, 141-163.
- CAMPOS, L.T., J.T. ODEN & N. KIKUCHI [1982], "A Numerical Analysis of a Class of Contact Problems with Friction in Elastostatics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **34**, 821-845.
- CARPENTER, N.J., R.L. TAYLOR & M.G. KATONA [1991], "Lagrange Constraints for Transient Finite Element Surface Contact", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **32**, 103-128.
- CHENG, J.-H. & N. KIKUCHI [1985], "An Analysis of Metal Forming Processes Using Large Deformation Elastic-Plastic Formulations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **49**, 71-108.
- CIARLET, P.G. [1988], *Mathematical Elasticity. Volume 1: Three-Dimensional Elasticity*, North-Holland, Amsterdam.
- CURNIER, A. [1984], "A theory of friction", *International Journal of Solids and Structures*, **20**, 637-647.
- CURNIER, A. & P. ALART [1988], "A Generalized Newton Method for Contact Problems with Friction", *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, supplement no. 1 to **7**, 67-82.

- 
- DUVAUT, G. & J.L. LIONS [1972], *Les Inequations en Mecanique et en Physique*, Dunod, Paris.
- GALLEGO, F.J. & J.J. ANZA [1989], “A Mixed Finite Element Model for the Elastic Contact Problem”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **28**, 1249-1264.
- GIANNAKOPOULOS, A.E. [1989], “The Return Mapping Method for the Integration of Friction Constitutive Relations”, *Computers and Structures*, **32**, 157-167.
- HALLQUIST, J.O., G.L. GOUDREAU & D.J. BENSON [1985], “Sliding interfaces with Contact-Impact in Large-Scale Lagrangian Computations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **51**, 107-137.
- HUGHES, T.J.R. [1987], *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- JU, J.-W. & R.L. TAYLOR [1988], “A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Nonlinear Frictional Contact Problems”, *Journal de Mecanique Theorique et Appliquee*, supplement no. 1 to volume **7**, 1-14.
- JU, J.-W., R.L. TAYLOR & L.Y. CHENG [1987], “A Consistent Finite Element Formulation of Nonlinear Frictional Contact Problems”, *Proceedings of the International Conference NUMETA '87*, J. Middleton & G.N. Pande, eds., Nijhoff, Dordrecht.
- KIKUCHI, N. & J.T. ODEN [1988], *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia.
- KLARBRING, A. & G. BJÖRKMAN [1992], “Solution of Large Displacement Contact Problems with Friction Using Newton’s Method for Generalized Equations”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **34**, 249-269.
- LAURSEN, T.A. [1992], “Formulation and Treatment of Frictional Contact Problems Using Finite Elements”, *Ph.D. Dissertation*, Stanford University, Division of Applied Mechanics, Report no. 92-6.
- LAURSEN, T.A. & S. GOVINDJEE [1994], “A Note on the Treatment of Frictionless Contact Between Non-smooth Surfaces in Fully Non-linear Problems”, *Communications in Applied Numerical Methods*, **10**, 869-878
- LAURSEN, T.A. & J.C. SIMO [1991], “On the Formulation and Numerical Treatment of Finite Deformation Frictional Contact Problems”, in *Nonlinear Computational Mechanics—State of the Art*, P. Wriggers & W. Wagner, eds., Springer-Verlag, Berlin, pp. 716-736.
- LAURSEN, T.A. & J.C. SIMO [1992], “Formulation and Regularization of Frictional Contact Problems for Lagrangian Finite Element Computations”, in *Proc. of The Third International Conference on Computational Plasticity: Fundamentals and Applications, COMPLAS III*, D.R.J. Owen, E. Oñate & E. Hinton, eds., Pineridge Press, Swansea, pp. 395-407.

- LAURSEN, T.A. & J.C. SIMO [1993A], "A Continuum-Based Finite Element Formulation for the Implicit Solution of Multi-Body, Large Deformation Frictional Contact Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **36**(20), 3451-3485.
- LAURSEN, T.A. & J.C. SIMO [1993B], "Algorithmic Symmetrization of Coulomb Frictional Problems Using Augmented Lagrangians", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **108**, 133-146.
- LEE, E.H. [1969], "Elastic-plastic Deformation at Finite Strains", *Journal of Applied Mechanics*, **36**, 1-6.
- LEE, E.H. & D.T. LIU [1967], "Finite Strain Elastic-Plastic Theory Particularly for Plane Wave Analysis", *Journal of Applied Physics*, **38**.
- LUENBERGER, D.G. [1984], *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- MANDEL, J. [1974], "Thermodynamics and Plasticity", in *Foundations of Continuum Thermodynamics*, J.J. Delgado et al. eds., McMillan, London, 283-304.
- MARSDEN, J.E. & T.J.R. HUGHES [1983], *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- MORAN, B., M. ORTIZ & C.F. SHIH [1990], "Formulation of Implicit Finite Element Methods for Multiplicative Deformation Plasticity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **29**, 483-514.
- ODEN, J.T. & J.A.C. MARTINS [1985], "Models and Computational Methods for Dynamic Friction Phenomena", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **52**, 527-634.
- ODEN, J.T. & E.B. PIRES [1984], "Algorithms and Numerical Results for Finite Element Approximations of Contact Problems with Non-Classical Friction Laws", *Computer and Structures*, **19**, 137-147.
- OWEN, D.R.J., D. PERIĆ, A.J.L. CROOK, E.A. DE SOUZA NETO, J. YU & M. DUTKO [1995], "Advanced Computational Strategies for 3D Large Scale Metal Forming Simulations", *Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes*
- PAPADOPOULOS, P. & R.L. TAYLOR [1990], "A Mixed Formulation for the Finite Element Solution of Contact Problems", *UCB/SEMM Report*, 90/18, University of California at Berkeley.
- PARISCH, H. [1989], "A Consistent Tangent Stiffness Matrix for Three-Dimensional Non-Linear Contact Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **28**, 1803-1812.
- SHAI, I. & M. SANTO [1982], "Heat transfer with contact resistance", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **24**, 465-470.

- 
- SIMO, J.C. [1988], "A Framework for Finite Strain Elastoplasticity Based on the Multiplicative Decomposition and Hyperelastic Relations. Part II: Computational Aspects", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **68**, 1-31.
- SIMO, J.C. [1992], "Algorithms for Static and Dynamic Multiplicative Plasticity that Preserve the Classical Return Mapping Schemes of the Infinitesimal Theory", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **99**, 61-112.
- SIMO, J.C. [1994], "Numerical Analysis Aspects of Plasticity", in *Handbook of Numerical Analysis, Volume IV*, P.G. Ciarlet and J.J. Lions, eds., Nort-Holland.
- SIMO, J.C. & F. ARMERO [1991], "Recent Advances in the Formulation and Numerical Analysis of Thermoplasticity at Finite Strains", in *Finite Inelastic Deformations - Theory and Applications*, E. Stein and D. Besdo, eds., IUTAM/IACM Symposium, Hannover, FRG, August, 19-23, 1991 Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- SIMO J.C. & F. ARMERO [1992], "Geometrically Nonlinear Enhanced Strain Mixed Methods and the Method of Incompatible Modes", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**, 1413-1449.
- SIMO, J.C., F. ARMERO & R.L. TAYLOR [1993], "Improved Versions of Assumed Enhanced Strain Tri-Linear Elements for 3D Finite Deformation Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **110**, 359-386.
- SIMO, J.C. & T.J.R. HUGHES [1994], "Elastoplasticity and Viscoplasticity: Computational Aspects", to be published by Springer-Verlag, Berlin.
- SIMO, J.C. & T.A. LAURSEN [1992], "An Augmented Lagrangian Treatment of Contact Problems Involving Friction", *Computers and Structures*, **42**, 97-116.
- SIMO, J.C. & C. MIEHE [1992], "Associative Coupled Thermoplasticity at Finite Strains: Formulation, Numerical Analysis and Implementation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **98**, 41-104.
- SIMO, J.C., P. WRIGGERS, K. SCHWEIZERHOF & R.L. TAYLOR [1986], "Finite Deformation Postbuckling Analysis Involving Inelasticity and Contact Constraints", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **23**, 779-800.
- SIMO, J.C., P. WRIGGERS & R.L. TAYLOR [1985], "A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Contact Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **50**, 163-180.
- SONG, S. & M.M. YOVANOVICH [1987], "Explicit relative contact pressure expression: dependence upon surface roughness parameters and Vickers microhardness coefficients", *AIAA*, Paper 87-0152.
- DE SOUZA NETO, K. HASHIMOTO, D. PERIĆ & D.R.J. OWEN [1995], "A Phenomenological Model for Frictional Contact of Coated Steel Sheets Accounting for Wear Effects: Theory, Experiments and Numerical Simulation", *Journal of Materials Processing Technology*, **50**, 252-263

- WRIGGERS, P. [1987], "On Consistent Tangent Matrices for Frictional Contact Problems", in *Proceedings of the International Conference NUMETA '87*, J. Middleton & G.N. Pande, eds., Nijhoff, Dordrecht.
- WRIGGERS, P. [1995], "Finite Element Algorithms for Contact Problems", *Archives of Computational Methods in Engineering*, **2**, 4, 1-50.
- WRIGGERS, P. & M. IMHOF [1993], "On the Treatment of Nonlinear Unilateral Contact Problems", *Ing. Archiv.*, **63**, 116-129.
- WRIGGERS, P. & C. MIEHE [1992], "Recent Advances in the Simulation of Thermomechanical Contact Processes", in *Proc. of The Third International Conference on Computational Plasticity: Fundamentals and Applications, COMPLAS III*, D.R.J. Owen, E. Oñate & E. Hinton, eds., Pineridge Press, Swansea, pp. 325-347.
- WRIGGERS, P. & C. MIEHE [1994], "Contact Constraints within Coupled Thermomechanical Analysis. A Finite Element Model", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **113**, 301-319.
- WRIGGERS, P. & O. SCHERF [1995], "An adaptive finite element method for elastoplastic contact problems", in *Proc. of The Fourth International Conference on Computational Plasticity: Fundamentals and Applications, COMPLAS IV*, D.R.J. Owen, E. Oñate & E. Hinton, eds., Pineridge Press, Swansea.
- WRIGGERS, P., O. SCHERF & C. CARSTENSEN [1995], "Adaptive Techniques for the Contact of Elastic Bodies", in *Recent Developments in Finite Element Analysis*, T.J.R. Hughes, E. Oñate & O.C. Zienkiewicz, eds. CIMNE, Barcelona.
- WRIGGERS, P. & J.C. SIMO [1985], "A Note on Tangent Stiffness for Fully Nonlinear Contact Problems", *Communications in Applied Numerical Methods*, **1**, 199-203.
- WRIGGERS, P., J.C. SIMO & R.L. TAYLOR [1985], "Penalty and Augmented Lagrangian Formulations for Contact Problems", *Proceedings of the International Conference NUMETA '85*, J. Middleton & G.N. Pande, eds., A.A. Balkema, Rotterdam.
- WRIGGERS, P., T. VU VAN & E. STEIN [1990], "Finite Element Formulation of Large Deformation Impact-Contact Problems with Friction", *Computers and Structures*, **37**, 319-331.
- WRIGGERS, P. & G. ZAVARISE [1993], "On the Application of Augmented Lagrangian Techniques for Nonlinear Constitutive Laws in Contact Interfaces", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **9**, 815-824.
- WRIGGERS, P. & G. ZAVARISE [1993], "Thermomechanical Contact. A Rigorous but Simple Numerical Approach", *Computers and Structures*, **46**, 47-53.
- YOVANOVICH, M.M. [1981], "Thermal Contact Correlations", *AIAA*, Paper 81-1164.
- ZAVARISE, G., P. WRIGGERS & B. A. SCHREFLER [1995], "On Augmented Lagrangian Algorithms for Thermomechanical Contact Problems With Friction", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **38**(17), 2929-2949.



- 
- ZAVARISE, G., P. WRIGGERS, E. STEIN & B. A. SCHREFLER [1992], “Real Contact Mechanisms and Finite Element Formulation—A Coupled Thermomechanical Approach”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **35**(4), 767-785.
- ZIENKIEWICZ, O.C. & R.L. TAYLOR [1991], *The Finite Element Method, 4th ed., Volume 2: Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-linearity*, McGraw-Hill, London.



## CAPÍTULO 2

# UN NUEVO ALGORITMO DE INTEGRACIÓN FRICCIONAL PARA PROBLEMAS CON GRANDES DESLIZAMIENTOS Y DEFORMACIONES FINITAS

En este capítulo se presenta un algoritmo para la integración del problema de fricción con grandes deslizamientos. El algoritmo se introduce en el contexto más sencillo de un problema modelo: el deslizamiento de una partícula sobre una superficie rugosa. La integración temporal de la tracción debida al contacto friccional se realiza introduciendo una parametrización de la trayectoria de deslizamiento seguida por la partícula. Esta parametrización se define de manera independiente de la parametrización local de la superficie utilizada en la discretización de los cuerpos por el método de los elementos finitos. El punto crucial del algoritmo es que ahora, en presencia de grandes deslizamientos, el algoritmo permite evitar los problemas típicos asociados con situaciones en las que el deslizamiento incremental de la partícula se producía atravesando uno o más de los elementos utilizados en la triangularización de la superficie, por el método de los elementos finitos.

Es de remarcar, además, que el algoritmo se define en base a la normal unitaria (exterior) a la superficie discretizada, sin utilizar la parametrización local de la triangularización resultante del método de los elementos finitos. Desde el punto de vista geométrico, la trayectoria de deslizamiento que se construye puede verse como una aproximación a la geodésica que, para cada configuración incremental, pasa por los puntos inicial y final obtenidos a partir de la solución incremental iterativa en desplazamientos.

El algoritmo es susceptible de ser linealizado de forma exacta, por lo que podría obtenerse una velocidad cuadrática de convergencia dentro de un contexto de solución iterativa por el método de Newton-Raphson. El algoritmo puede extenderse, de manera sencilla, para la solución de problemas de contacto friccional entre múltiples cuerpos con deformaciones finitas.

## 2.1 INTRODUCCIÓN. MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS

Desde un punto de vista matemático, la formulación de problemas de contacto friccional conduce a la búsqueda de la solución de un problema de valores iniciales en un espacio con restricciones. La formulación variacional del problema conduce a desigualdades variacionales.

Referencias significativas en el campo de las desigualdades variacionales son los libros de DUVAUT & LIONS [1] y KIKUCHI & ODEN [2]. La regularización del problema de contacto friccional, utilizando por ejemplo métodos de penalización o de Lagrangiano aumentado, permite evitar la necesidad de buscar la solución dentro de un espacio con restricciones, y conduce a una formulación muy conveniente, en desplazamientos, del problema de contacto friccional. El método de penalización puede ser considerado como el procedimiento más habitual de regularización y ha sido utilizado en el contexto de problemas de contacto, por ODEN & PIRES [3], CHENG & KIKUCHI [4], HALLQUIST, GOUDREAU & BENSON [5], SIMO, WRIGGERS & TAYLOR [6], CURNIER & ALART [7], WRIGGERS, VU VAN & STEIN [8], BELYTSCHKO & NEAL [9], LAURSEN [10], LAURSEN & SIMO [11,12] y AGELET DE SARACIBAR [13,14] entre otros. Para evitar los conocidos problemas inherentes a los métodos de penalización, tales como sensibilidad al parámetro de penalización y posible mal condicionamiento del sistema de ecuaciones, y por otro lado preservar sus ventajas, se han utilizado otros métodos alternativos de regularización, siendo uno de estos métodos el del Lagrangiano aumentado. En el contexto de la formulación de problemas de contacto, el método del Lagrangiano aumentado ha sido utilizado por LAURSEN [10], SIMO & LAURSEN [15], LAURSEN & SIMO [11,16] y LAURSEN & GOVINDJEE [17], entre otros.

Una formulación del problema de contacto sin rozamiento con cinemática no lineal, incluyendo la derivación de los operadores algorítmicos de contacto, puede encontrarse en WRIGGERS & SIMO [18] para elementos lineales de superficie en 2D y en PARISH [19] para elementos lineales de superficie (triángulos) en 3D. Una extensión al caso friccional para problemas en 2D utilizando elementos lineales puede encontrarse en WRIGGERS [20]. Nótese que en los casos mencionados anteriormente, la derivación de los operadores de contacto se realiza para una triangularización específica de la superficie, y no se realiza en el continuo. Una formulación del problema de contacto friccional, dentro de un contexto cinemático no lineal y en grandes deformaciones, completamente desarrollada en el continuo para geometrías en 2D y en 3D, puede encontrarse por primera vez en LAURSEN & SIMO [12]. Posteriores extensiones en esta línea, que incorporaban un modelo de desgaste, pueden encontrarse en AGELET DE SARACIBAR & CHIUMENTI [13].

Por otro lado, la formulación regularizada del problema de contacto friccional permite la utilización sistemática de todo el marco de trabajo desarrollado para plasticidad computacional. Puede consultarse SIMO & HUGHES [21] y SIMO [22] para una excelente y clara presentación de temas relacionados con plasticidad computacional. En particular, los algoritmos desarrollados originalmente para la integración de la tensión en plasticidad, pueden aplicarse de forma similar para la integración de la tracción de fricción en el problema de contacto friccional. Uno de los métodos más populares en los últimos años para la integración en el tiempo de estos problemas, es el método de orden más bajo de los métodos de Diferencias-hacia-atrás, el método de Backward-Euler (BE). Algoritmos de

integración, algoritmos de retorno, del problema de fricción, utilizando el método de BE, han sido utilizados por WRIGGERS [20], GIANNAKOPOULOS [23], WRIGGERS, VU VAN & STEIN [8], LAURSEN & SIMO [12,16] y AGELET DE SARACIBAR [13,14], entre otros. En el contexto de plasticidad J2, SIMO [22] utilizó un método de integración implícito de Runge-Kutta (IRK), el denominado algoritmo de proyección del punto medio (PMP). La extensión de este algoritmo para problemas de contacto friccional puede encontrarse en AGELET DE SARACIBAR [13,14].

En las referencias citadas anteriormente, la formulación del problema de contacto friccional, y en particular, la integración del problema de fricción, se realiza en base a la parametrización local inducida por la triangularización de las superficies de contacto utilizando el método de los elementos finitos. En el contexto del método de los elementos finitos, la aplicación isoparamétrica surge de manera natural como la parametrización local de las superficies de contacto. Sin embargo, nótese que debido al carácter local de la parametrización, algoritmos de integración basados en esta parametrización, pueden en gran medida perder su utilidad en situaciones en las que los puntos inicial y final de la trayectoria incremental de deslizamiento se encuentran sobre elementos finitos distintos y por lo tanto con parametrizaciones locales distintas.

Situaciones como las consideradas anteriormente, que ocurren con frecuencia en un problema típico de contacto friccional, han sido resueltas habitualmente mediante una proyección de la trayectoria de deslizamiento sobre la superficie extrapolada de un elemento de la triangularización, definida a partir de un dominio paramétrico extendido. Este procedimiento permite utilizar una única parametrización (dentro del dominio paramétrico extendido). Estos procedimientos son habituales en la práctica y se utilizan en distintos programas de elementos finitos, como DYNA o FEAP, por ejemplo, aunque no es habitual encontrar referencias sobre el tema.

Algunas de las desventajas de los procedimientos basados en la proyección de la trayectoria de deslizamiento son las siguientes:

i. Para calcular la proyección de la trayectoria de deslizamiento, es necesario realizar una proyección fuera de los límites del dominio de parametrización. Nótese, que en este caso, la preservación de la orientación de la aplicación inducida por la parametrización local está garantizada únicamente dentro del dominio de parametrización. Por lo tanto, pueden surgir situaciones en las cuales los puntos de proyección estén situados en zonas con jacobiano cero o negativo, ocasionando severos problemas al algoritmo.

ii. La magnitud del deslizamiento es uno de los principales parámetros que intervienen en la caracterización del fenómeno del desgaste. Vease, por ejemplo, AGELET DE SARACIBAR & CHIUMENTI [13] para la formulación de un modelo de desgaste basado en este parámetro. La proyección de la trayectoria de deslizamiento puede llevar a una subestimación considerable del deslizamiento, y por lo tanto, a una subestimación de la tracción tangente friccional, de la disipación friccional y del estimador de desgaste.

Estas consideraciones han motivado la necesidad de buscar un nuevo algoritmo de integración temporal que sea adecuado para problemas de contacto friccional con grandes deslizamientos. El nuevo algoritmo debería tener las siguientes características de diseño:

i. Deben evitarse los procedimientos basados en la proyección de la trayectoria de deslizamiento, debido a las desventajas y problemas inherentes a esta opción mencionados

anteriormente.

ii. Debe evitarse la utilización de la parametrización local de la triangularización de la superficie.

iii. Debe introducirse una parametrización nueva de la trayectoria de deslizamiento, que sea adecuada para grandes deslizamientos, es decir, para situaciones en las que la trayectoria se produce a lo largo de más de un elemento de la triangularización.

iv. El nuevo algoritmo de integración temporal debería de ser susceptible de linealizarse exactamente, con el objetivo de preservar la velocidad cuadrática de convergencia de la solución iterativa del problema, utilizando el método de Newton-Raphson.

Con estas consideraciones en mente, se propone a continuación un nuevo algoritmo de integración temporal de la tracción friccional. Para introducir las principales características del nuevo algoritmo, es suficiente considerar un problema modelo, lo más sencillo posible: el movimiento de deslizamiento de una partícula sobre una superficie rugosa.

El contenido del resto del capítulo es el siguiente. En el apartado 2 se presenta el planteamiento del problema modelo a considerar, para la introducción de las principales características del nuevo algoritmo de integración del problema friccional. Se formulan las restricciones holonómicas y no holonómicas del problema, así como su regularización. La utilización de un algoritmo de formula producto y un operador de partición motivan la integración numérica del problema de evolución con restricciones que se presentará más adelante. En el apartado 3 se presenta el nuevo algoritmo de integración temporal de la fricción, en el contexto del problema modelo considerado. En el apartado 4 se presentan algunos ejemplos numéricos representativos, mientras que las observaciones finales se recogen en el apartado 5. La extensión del algoritmo para el caso general de contacto multicuerpo en grandes deformaciones se presenta en el apéndice A. Finalmente en el apéndice B se incluye la linealización exacta del nuevo algoritmo de integración temporal.

## 2.2 UN PROBLEMA MODELO: DESLIZAMIENTO DE UNA PARTÍCULA SOBRE UNA SUPERFICIE RUGOSA

Las principales características del nuevo algoritmo que se propone para la integración temporal del problema friccional, pueden introducirse convenientemente en el marco de un problema modelo sencillo: el movimiento de una partícula sobre una superficie rugosa.

La cinemática del movimiento de una partícula sobre una superficie rugosa constituye un ejemplo de movimiento de una partícula sujeta a restricciones holonómicas y no holonómicas. Las restricciones holonómicas aparecen por la restricción que obliga a la partícula a permanecer sobre la superficie. Restricciones no holonómicas aparecen como resultado de las condiciones de rozamiento en la superficie.

La formulación regularizada del problema conduce a una formulación en desplazamientos, muy conveniente desde el punto de vista numérico. En el contexto de los algoritmos de formula producto, la introducción de una partición del operador de gobierno del problema regularizado, motiva el subsiguiente algoritmo de integración temporal.

Uno de los puntos clave del nuevo algoritmo reside en el cálculo del deslizamiento. El objetivo es poder calcular el deslizamiento incremental en función de, únicamente, la posición y la normal a la superficie en los instantes inicial y final del intervalo. Es crucial evitar la utilización de la parametrización local subyacente en el cálculo del deslizamiento.

### 2.2.1 Descripción del problema

Sea  $2 \leq n_{dim} \leq 3$  la dimensión del espacio y  $I := [0, T] \subset \mathbb{R}_+$  el intervalo temporal de interés. Sea  $\mathbf{X}$  la configuración de referencia de una partícula  $\mathcal{P}$  que está restringida a permanecer sobre una superficie rugosa  $\Gamma$ . Sea  $\varphi : \mathcal{P} \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$  la función que describe el movimiento de la partícula  $\mathcal{P}$ , cuya velocidad es  $\mathbf{V} := \partial_t \varphi$ . Para cada instante de tiempo  $t \in I$ , la aplicación  $t \in I \mapsto \varphi_t := \varphi^{(i)}(\cdot, t)$  representa una familia de configuraciones indexada por el tiempo  $t$ , que hace corresponder a la configuración de referencia de la partícula  $\mathcal{P}$ , su configuración actual. La configuración actual de la partícula en el instante  $t \in I$  vendrá representada por  $\mathbf{x} := \varphi_t(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X}, t)$ .

Sea  $\Gamma$  una superficie rígida, regular y orientada, definida como:

$$\Gamma := \{\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n_{dim}} : g_N(\mathbf{Y}) = 0\} \quad (2.1)$$

con normal unitaria  $\boldsymbol{\nu} \in S^2$  definida como

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{Y}) := -\nabla g_N(\mathbf{Y}) / \|\nabla g_N(\mathbf{Y})\| \quad (2.2)$$

donde  $S^2 := \{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^{n_{dim}} : \|\boldsymbol{\nu}\| = 1\}$  representa la esfera unitaria.

La dinámica de una partícula deslizando sobre una superficie rígida constituye un ejemplo de movimiento de una partícula sujeta a restricciones holonómicas y no holonómicas. La FIGURA 2.1 muestra la descripción cinemática del problema modelo considerado.

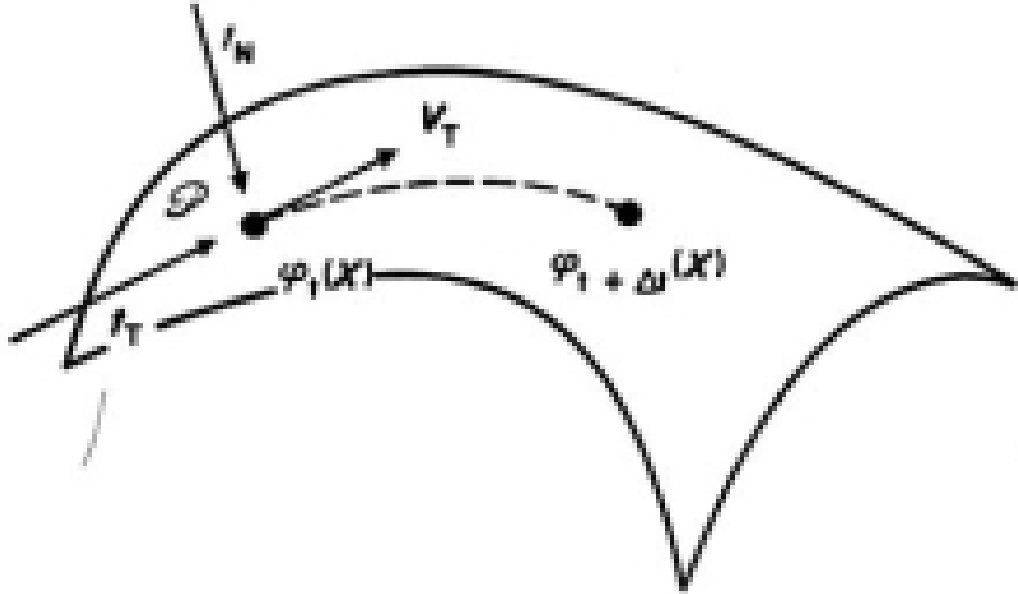


FIGURA 2.1. Descripción del problema modelo: deslizamiento de una partícula sobre una superficie rugosa rígida. ■

(A) *Restricciones unilaterales holonómicas.* Las restricciones unilaterales holonómicas aparecen por el hecho de que el movimiento de la partícula está restringido a la superficie rígida.

i. *Restricción de impenetrabilidad.* La presencia de la superficie rígida actúa como un obstáculo al movimiento libre de la partícula e induce la restricción de impenetrabilidad, dando lugar a una restricción unilateral holonómica para las configuraciones admisibles de la partícula. Sin pérdida de generalidad, supondremos que el movimiento de la partícula  $\mathcal{P}$  con configuración de referencia  $\mathbf{X}$ , está sujeta, para cualquier instante de tiempo  $t \in I$ , a la siguiente condición unilateral holonómica:

$$g_N \circ \varphi(\mathbf{X}, t) \leq 0 \quad (2.3)$$

ii. *Restricción de no adhesión.* Cuando la partícula se encuentra moviéndose sobre la superficie, se produce una interacción entre las tracciones debidas a la restricción de impenetrabilidad y a la rugosidad de la superficie. La tracción debida a la restricción de impenetrabilidad es normal a la superficie. Por otro lado, la rugosidad de la superficie induce la aparición de la tracción de fricción que es tangente a la superficie y que se opone al deslizamiento de la partícula sobre la misma.

Denominando  $\mathbf{t}(\mathbf{X}, t)$  a la reacción en la partícula, definimos la reacción normal de valor  $t_N(\mathbf{X}, t)$  como la proyección de  $\mathbf{t}(\mathbf{X}, t)$  en la dirección de la normal unitaria a la superficie  $\boldsymbol{\nu}$ , y consideramos la siguiente descomposición de la reacción  $\mathbf{t}(\mathbf{X}, t)$  en componentes normal y tangencial:

$$\mathbf{t}(\mathbf{X}, t) := t_N(\mathbf{X}, t) \boldsymbol{\nu} \circ \varphi(\mathbf{X}, t) + \mathbb{P}_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{t}(\mathbf{X}, t) \quad (2.4)$$

Con la notación introducida, la restricción unilateral de no adhesión implica que la reacción normal debe ser no negativa cuando la partícula está sobre la superficie, y debe ser nula en caso contrario. Matemáticamente, esta condición puede escribirse como:

$$\begin{aligned} t_N(\mathbf{X}, t) &\geq 0 && \text{if } g_N \circ \varphi(\mathbf{X}, t) = 0 \\ t_N(\mathbf{X}, t) &= 0 && \text{if } g_N \circ \varphi(\mathbf{X}, t) < 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

iii. *Condición de persistencia del contacto.* La condición de persistencia del contacto requiere que la velocidad de separación de la partícula de la superficie debe ser cero para valores positivos de la reacción normal de contacto. Matemáticamente, esta condición de persistencia puede escribirse como:

$$t_N(\mathbf{X}, t) \nabla g_N \circ \varphi(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = 0 \quad (2.6)$$

Utilizando la definición de la normal unitaria dada por (2.2), la condición de persistencia puede escribirse como:

$$t_N(\mathbf{X}, t) \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \cdot \boldsymbol{\nu} \circ \varphi(\mathbf{X}, t) = 0 \quad (2.7)$$

y establece que la componente normal de la velocidad de la partícula debe ser cero para valores no nulos (positivos) de la componente normal de la reacción de contacto.



Las restricciones de impenetrabilidad, no adherencia a la superficie y persistencia del contacto, indicadas más arriba, pueden expresarse en forma de condiciones complementarias de Kuhn-Tucker como:

$$\boxed{\begin{aligned} g_N \circ \varphi(\mathbf{X}, t) &\leq 0 \\ t_N(\mathbf{X}, t) &\geq 0 \\ t_N(\mathbf{X}, t) g_N \circ \varphi(\mathbf{X}, t) &= 0 \\ t_N(\mathbf{X}, t) \nabla g_N \circ \varphi(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) &= 0 \end{aligned}} \quad (2.8)$$

(B) *Restricciones no holonómicas friccionales.* El comportamiento friccional en la superficie induce restricciones no holonómicas en las configuraciones admisibles de la partícula.

Consideremos la siguiente partición de la velocidad  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  de la partícula que desliza sobre la superficie rugosa:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) := V_N(\mathbf{X}, t) \boldsymbol{\nu} \circ \varphi(\mathbf{X}, t) + \mathbf{V}_T \quad (2.9)$$

donde  $V_N(\mathbf{X}, t)$  es la proyección de la velocidad en la dirección de la normal unitaria, es decir la velocidad de separación de la partícula de la superficie, y  $\mathbf{V}_T := \mathbb{P}_\nu \mathbf{V}$  es la proyección de la velocidad sobre el plano tangente a la superficie.

Tal como se ha mostrado más arriba, la condición de persistencia de contacto implica que la velocidad de separación de la partícula de la superficie debe ser cero para valores positivos de la reacción normal de contacto. Utilizando (2.7) y (2.9) esta condición puede expresarse como:

$$V_N = 0 \quad \text{if } t_N(\mathbf{X}, t) > 0 \quad (2.10)$$

y entonces

$$\mathbf{V}_T := \mathbb{P}_\nu \mathbf{V} = \mathbf{V} \quad \text{if } t_N(\mathbf{X}, t) > 0 \quad (2.11)$$

Adicionalmente, denominaremos  $\mathbf{V}_T^b$  a la forma uno asociada a la velocidad de deslizamiento.

Sea  $\mathbf{t}_T(\mathbf{X}, t)$  la proyección de la reacción de contacto friccional sobre el plano tangente cambiada de signo:

$$\mathbf{t}_T(\mathbf{X}, t) := -\mathbb{P}_\nu \mathbf{t}(\mathbf{X}, t) \quad (2.12)$$

tal que, utilizando (2.4), la tracción de contacto friccional sobre la partícula puede escribirse como:

$$\mathbf{t}(\mathbf{X}, t) := t_N(\mathbf{X}, t) \boldsymbol{\nu} \circ \varphi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{t}_T(\mathbf{X}, t) \quad (2.13)$$

mientras que denominaremos  $\mathbf{t}^b$ , la forma uno asociada a la tracción de contacto friccional.

Con la notación introducida anteriormente, las restricciones no holonómicas friccionales pueden introducirse de la siguiente manera:

**i. Función deslizamiento. Espacio de tracciones admisibles.** Definimos una *función deslizamiento*  $\Phi : T_\nu S^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $(\mathbf{t}_T^b, t_N) \in T_\nu S^2 \times \mathbb{R}_+$  pertenecen al espacio de tracciones admisibles definido como

$$\mathbb{E}_{\mathbf{t}} := \{(\mathbf{t}_T^b, t_N) \in T_\nu S^2 \times \mathbb{R}_+ : \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N) \leq 0\} \quad (2.14)$$

En particular, para la clásica ley de rozamiento de Coulomb el espacio de tracciones admisibles viene definido por la función deslizamiento

$$\Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N) := \|\mathbf{t}_T^b\| - \mu t_N \quad (2.15)$$

donde  $\|\cdot\|$  indica la norma de su argumento y  $\mu$  es el coeficiente de rozamiento de Coulomb.

ii. *Regla de deslizamiento.* Definimos la regla de deslizamiento como

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_T^b(\mathbf{X}, t) &:= 0 & \text{if } \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N) < 0 \\ \mathbf{V}_T^b(\mathbf{X}, t) &:= \gamma \mathbf{p}_T^b & \text{if } \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N) = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde  $\mathbf{p}_T^b := \partial_{\mathbf{t}_T^b} \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N)$  y  $\gamma \in \mathbb{R}_+$  es el parámetro (no negativo) de consistencia de deslizamiento. Para la ley de rozamiento de Coulomb  $\mathbf{p}_T^b$  es igual a la forma uno normalizada de la tracción friccional, definida como  $\mathbf{p}_T^b := \mathbf{t}_T^b / \|\mathbf{t}_T^b\|$ .

iii. *Condición de consistencia de deslizamiento.* La condición de consistencia del deslizamiento establece que la velocidad de deslizamiento debe ser cero para valores positivos del parámetro de consistencia. Matemáticamente, esta condición puede expresarse como:

$$\gamma \dot{\Phi}(\mathbf{t}_T^b, t_N) = 0 \quad (2.17)$$

Las anteriores restricciones conducen a la siguiente restricción no holonómica

$$\boxed{\mathbf{V}_T^b(\mathbf{X}, t) = \gamma \mathbf{p}_T^b} \quad (2.18)$$

sometida a las condiciones complementarias de Kuhn-Tucker y de consistencia

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N) &\leq 0 \\ \gamma &\geq 0 \\ \gamma \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N) &= 0 \\ \gamma \dot{\Phi}(\mathbf{t}_T^b, t_N) &= 0 \end{aligned}} \quad (2.19)$$

### 2.2.2 El problema regularizado

La solución de la dinámica de una partícula sujeta a restricciones holonómicas y no holonómicas dadas por (2.8), (2.18) y (2.19) supone encontrar una solución en un espacio de soluciones con restricciones. Diferentes métodos se han propuesto para evitar esta restricción en el espacio de soluciones. Aquí, vamos a considerar únicamente uno de estos métodos, basado en la reularización de las restricciones impuestas por el problema de contacto.

(A) *Regularización de las restricciones holonómicas.* Las restricciones holonómicas unilaterales de impenetrabilidad, no adherencia y persistencia del contacto, pueden regularizarse introduciendo un *parámetro de penalización normal*  $\epsilon_N$  y sustituyendo las condiciones complementarias de Kuhn-Tucker dadas por (2.8) por la siguiente pseudo ecuación constitutiva para la presión normal de contacto:

$$\boxed{t_N(\mathbf{X}, t) := \epsilon_N \langle g_N \circ \varphi(\mathbf{X}, t) \rangle} \quad (2.20)$$

donde  $\langle \cdot \rangle$  es el denominado operador de Macauley, que representa la parte positiva de su operando.

La comparación de (2.20) con (2.8) revela que ahora, se permite una (es de esperar que pequeña) violación de las restricciones de contacto normal, y que las restricciones se verifican de forma exacta cuando  $\epsilon_N \rightarrow \infty$ .

(B) *Regularización de las restricciones friccionales no holonómicas.* La regularización de las restricciones friccionales no holonómicas definidas por (2.18) y (2.19) se realiza introduciendo un *parámetro de penalización tangente*  $\epsilon_T$  que actúa como parámetro constitutivo en la ecuación de la velocidad de deslizamiento. Entonces, las restricciones friccionales regularizadas pueden expresarse como:

$$\boxed{\mathbf{V}_T^b(\mathbf{X}, t) = \gamma \mathbf{p}_T^b + \frac{1}{\epsilon_T} \mathcal{L}_{\mathbf{V}_T} \mathbf{t}_T^b} \quad (2.21)$$

sujeta a las condiciones complementarias (no regularizadas) de Kuhn-Tucker:

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N) &\leq 0 \\ \gamma &\geq 0 \\ \gamma \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N) &= 0 \\ \gamma \dot{\Phi}(\mathbf{t}_T^b, t_N) &= 0 \end{aligned}} \quad (2.22)$$

En las expresiones anteriores,  $\mathcal{L}_{\mathbf{V}_T} \mathbf{t}_T^b$  representa la derivada de Lie de la tracción tangente de fricción, a lo largo del flujo inducido por la velocidad de deslizamiento  $\mathbf{V}_T$ .

La comparación de (2.21) y (2.18), revela que las restricciones friccionales se satisfacen de forma exacta cuando  $\epsilon_T \rightarrow \infty$ , siendo en este caso el parámetro de consistencia de deslizamiento  $\gamma$  igual a la norma de la velocidad de deslizamiento  $\mathbf{V}_T^b$ . En caso contrario, se supone que la velocidad de deslizamiento puede descomponerse en una parte recuperable o elástica y una parte irreversible o plástica. La introducción de la derivada de Lie en la expresión regularizada de la velocidad de deslizamiento, mantiene la objetividad de las ecuaciones de evolución del problema friccional.

(C) *Descomposición del operador friccional.* Tal como se ha visto anteriormente, la regularización del problema friccional conduce a las siguientes ecuaciones de evolución:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{V}_T} \mathbf{t}_T^b &= \epsilon_T [\mathbf{V}_T^b - \gamma \partial_{t_T^b} \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N)] \\ \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N) &\leq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad \gamma \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N) = 0 \\ \gamma \dot{\Phi}(\mathbf{t}_T^b, t_N) &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

En el contexto de los algoritmos de formula producto, podemos considerar una partición del operador de gobierno del problema friccional introduciendo un *estado de prueba*, definido mediante la congelación de la respuesta irreversible (plástica) de deslizamiento, es decir haciendo  $\gamma = 0$ , seguido de un algoritmo de retorno:

Problema 1: *Estado de prueba*

Problema 2: *Algoritmo de retorno*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{V_T} \mathbf{t}_T^b := \epsilon_T \mathbf{V}_T^b \\ \text{unconstrained} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{V_T} \mathbf{t}_T^b := -\epsilon_T \gamma \partial_{\mathbf{t}_T^b} \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N) \\ \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N) \leq 0, \gamma \geq 0, \gamma \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N) = 0 \end{array} \right\} \quad (2.24)$$

El Problema 1 viene definido por unas ecuaciones de evolución sin restricciones para la tracción friccional y tiene como condiciones iniciales las mismas que las del problema original. La solución del Problema 1 conduce al *estado de prueba*. El Problema 2 viene definido por las ecuaciones de evolución con restricciones para la tracción friccional y tiene como condiciones iniciales la solución obtenida en el Problema 1.

Nótese que los problemas asociados con la elección de la parametrización local asociada a la triangularización para la parametrización de la trayectoria de deslizamiento, aparecen únicamente durante la solución del Problema 1. La solución final se obtiene como solución del Problema 2 mediante la aplicación de un algoritmo de retorno. Por lo tanto, para la introducción del nuevo algoritmo vamos a centrarnos en la solución del Problema 1 y la obtención del *estado de prueba*.

El Problema 2 puede integrarse utilizando un algoritmo de diferencias hacia atrás, por ejemplo, típicamente el algoritmo de Backward-Euler, o alternativamente utilizando un algoritmo del tipo implícito de Runge-Kutta, como por ejemplo el algoritmo del punto medio proyectado propuesto en el contexto de la plasticidad por SIMO [22]. Una aplicación de este último algoritmo para problemas friccionales puede encontrarse en AGELET DE SARACIBAR [13,14].

### 2.2.3 Definición de la trayectoria de deslizamiento. Cálculo del deslizamiento

La integración temporal del problema de evolución sin restricciones definido como Problema 1 y dado por (2.24), supone tener que calcular el deslizamiento que ha experimentado la partícula en su movimiento sobre la superficie rígida. El punto clave del nuevo algoritmo de integración friccional reside en la forma en que se integra el Problema 1 y cómo se calcula el deslizamiento experimentado por la partícula. Nuestro objetivo es poder calcular el deslizamiento en un intervalo de tiempo típico, en función únicamente de la posición de la partícula y de la normal a la superficie en los puntos inicial y final de la trayectoria incremental de deslizamiento. Evitar el cálculo del deslizamiento en función de la parametrización local de la superficie es uno de los puntos cruciales del diseño del nuevo algoritmo y tiene especial relevancia cuando la trayectoria de deslizamiento atraviesa varios elementos de la triangularización, estando los puntos inicial y final de la trayectoria en distintos elementos de la triangularización.

La principal idea subyacente al nuevo algoritmo de integración temporal de la fricción es la siguiente. La velocidad de deslizamiento de la partícula se integra en un intervalo de tiempo típico para obtener el deslizamiento incremental. Esta integración se realiza construyendo una trayectoria de deslizamiento, definida localmente en función de la posición

de la partícula y la normal unitaria a la superficie en los puntos inicial y final de la trayectoria incremental. Geométricamente, la trayectoria que se construye puede verse como una aproximación a la geodésica definida por estos dos puntos y sus normales unitarias a la superficie. Nótese que la trayectoria de deslizamiento y el cálculo del deslizamiento se realizan sin utilizar las parametrizaciones locales de la triangularización, permitiendo de esta manera obtener un algoritmo adecuado para integrar el problema friccional en presencia de grandes deslizamientos.

Consideremos el intervalo temporal de interés  $I = [0, T]$  discretizado en una serie de subintervalos disjuntos  $I := \cup_{n=0}^N [t_n, t_{n+1}]$ . Siguiendo un convenio estándar de notación, denominaremos  $(\cdot)_n$  y  $(\cdot)_{n+1}$ , las aproximaciones algorítmicas de la variable en el continuo  $(\cdot)_t$  en los instantes  $t_n$  y  $t_{n+1}$ , respectivamente.

Una descripción paso a paso de la parametrización de la trayectoria de deslizamiento y del cálculo del deslizamiento en un típico intervalo de tiempo  $[t_n, t_{n+1}]$ , es la siguiente:

*Paso 1. Datos geométricos.* Consideremos como condiciones iniciales dadas en el instante  $t_n$ , la posición de la partícula en la superficie  $\mathbf{Y}_n := \varphi(\mathbf{X}, t_n)$  y la normal unitaria  $\boldsymbol{\nu}_n := \boldsymbol{\nu} \circ \varphi(\mathbf{X}, t_n)$ . En el contexto de problemas conducidos por los desplazamientos, consideremos un movimiento incremental prescrito de la partícula del instante  $t_n$  al  $t_{n+1}$ , siendo  $\mathbf{Y}_{n+1} := \varphi(\mathbf{X}, t_{n+1})$  y  $\boldsymbol{\nu}_{n+1} := \boldsymbol{\nu} \circ \varphi(\mathbf{X}, t_{n+1})$ , la posición de la partícula sobre la superficie y la normal unitaria a la superficie, respectivamente, en el instante  $t_{n+1}$ .

*Paso 2. Definición de los sistemas ortonormales locales asociados a las posiciones  $\mathbf{Y}_n$  y  $\mathbf{Y}_{n+1}$ .* El punto crucial del nuevo algoritmo de integración reside en la construcción y parametrización de la trayectoria de deslizamiento, como una aproximación de segundo orden de la geodésica que pasa por los puntos inicial  $\mathbf{Y}_n$  y final  $\mathbf{Y}_{n+1}$  de la superficie. Asociados a los puntos  $\mathbf{Y}_n$  y  $\mathbf{Y}_{n+1}$ , e inducidos por la trayectoria de deslizamiento supuesta, definimos los sistemas ortonormales locales definidos, respectivamente, por los vectores de las bases  $\{\boldsymbol{\nu}_n, \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha_n}\}$  y  $\{\boldsymbol{\nu}_{n+1}, \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha_{n+1}}\}$ , con  $\alpha = 1, 2$ . Aquí  $\boldsymbol{\nu}_n \in S^2$  y  $\boldsymbol{\nu}_{n+1} \in S^2$  son las normales unitarias a la superficie en los puntos  $\mathbf{Y}_n$  y  $\mathbf{Y}_{n+1}$ , respectivamente,  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha_n} \in T_{\boldsymbol{\nu}_n} S^2$  y  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha_{n+1}} \in T_{\boldsymbol{\nu}_{n+1}} S^2$  para  $\alpha = 1, 2$  son vectores unitarios tangentes a la superficie en los puntos  $\mathbf{Y}_n$  y  $\mathbf{Y}_{n+1}$ , respectivamente, y  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n} \in T_{\boldsymbol{\nu}_n} S^2$  y  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}} \in T_{\boldsymbol{\nu}_{n+1}} S^2$  se definen de manera que son vectores unitarios tangentes a la curva de deslizamiento en los puntos  $\mathbf{Y}_n$  y  $\mathbf{Y}_{n+1}$ , respectivamente.

La definición de los sistemas locales ortonormales  $(\hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n}, \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n}, \boldsymbol{\nu}_n)$  y  $(\hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_{n+1}}, \boldsymbol{\nu}_{n+1})$ , asociados a los puntos  $\mathbf{Y}_n$  y  $\mathbf{Y}_{n+1}$ , respectivamente, se realiza de la siguiente manera. Consideremos el vector de distancia Euclídea  $\mathbf{d}$  entre los puntos  $\mathbf{Y}_n$  y  $\mathbf{Y}_{n+1}$ , con norma de distancia Euclídea  $d := \|\mathbf{d}\|$  y vector unitario  $\mathbf{m}$  definido como

$$\mathbf{d} = \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{Y}_n, \quad d = \|\mathbf{d}\|, \quad \mathbf{m} = \mathbf{d}/d \quad (2.25)$$

Utilizando las normales unitarias  $\boldsymbol{\nu}_n$  y  $\boldsymbol{\nu}_{n+1}$  y el vector unitario  $\mathbf{m}$  definido anteriormente, construimos los sistemas ortonormales locales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n} &:= \frac{\boldsymbol{\nu}_n \times \mathbf{m}}{\|\boldsymbol{\nu}_n \times \mathbf{m}\|}, & \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n} &:= \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n} \times \boldsymbol{\nu}_n \\ \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_{n+1}} &:= \frac{\boldsymbol{\nu}_{n+1} \times \mathbf{m}}{\|\boldsymbol{\nu}_{n+1} \times \mathbf{m}\|}, & \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}} &:= \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_{n+1}} \times \boldsymbol{\nu}_{n+1} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Una interpretación geométrica de los sistemas ortonormales locales asociados a los puntos inicial y final de la curva de deslizamiento incremental puede verse en la FIGURA 2.2.

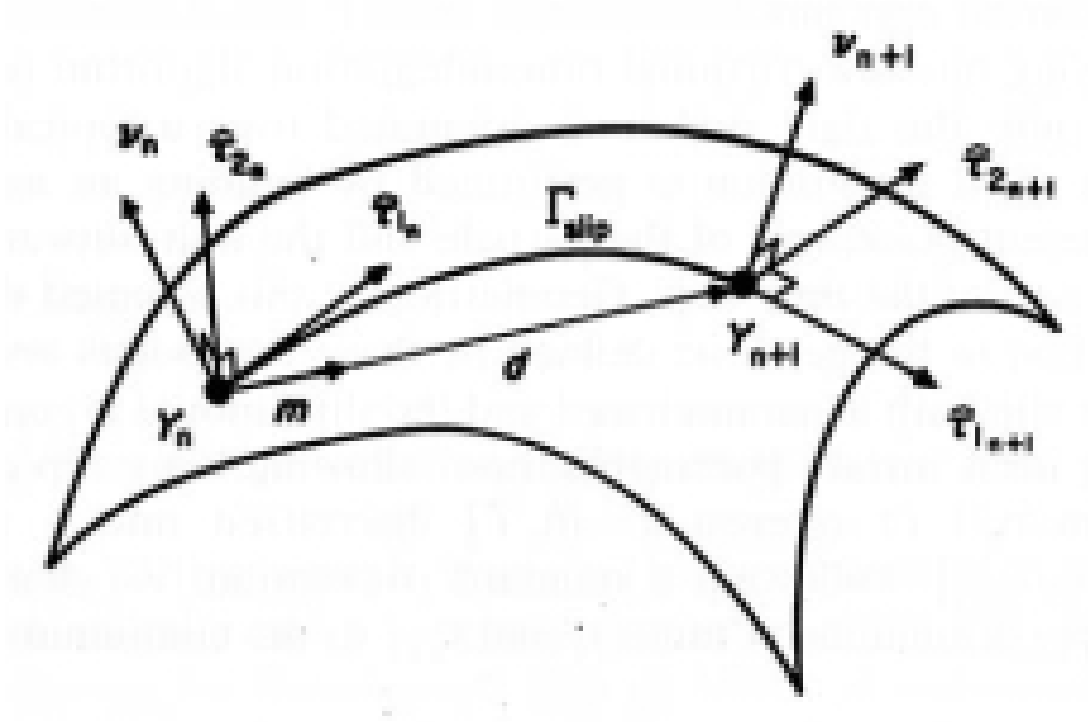


FIGURA 2.2. Definición de las bases locales ortonormales asociadas a los puntos inicial y final de la trayectoria incremental de deslizamiento.

**Paso 3. Parametrización de la curva de deslizamiento.** Utilizando los sistemas ortonormales definidos anteriormente, definimos la curva de deslizamiento como una aproximación de segundo orden a la geodésica que pasa por los puntos inicial y final, utilizando la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \zeta \in [-1, +1] \mapsto \mathbf{Y}(\zeta) := & \mathcal{H}^1(\zeta) \mathbf{Y}_n + \frac{d}{2 \cos \Theta_n} \bar{\mathcal{H}}^1(\zeta) \hat{\tau}_{1_n} \\ & + \mathcal{H}^2(\zeta) \mathbf{Y}_{n+1} + \frac{d}{2 \cos \Theta_{n+1}} \bar{\mathcal{H}}^2(\zeta) \hat{\tau}_{1_{n+1}} \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde

$$\begin{aligned} \cos \Theta_n &:= \hat{\tau}_{1_n} \cdot \mathbf{m} \\ \cos \Theta_{n+1} &:= \hat{\tau}_{1_{n+1}} \cdot \mathbf{m} \end{aligned} \quad (2.28)$$

y  $\mathcal{H}_\alpha, \bar{\mathcal{H}}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$  son las funciones de forma de Hermite definidas en el dominio

isoparamétrico  $[-1, 1]$  como

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1(\zeta) &= (2 + \zeta)(1 - \zeta)^2/4, & \bar{\mathcal{H}}^1(\zeta) &= (1 + \zeta)(1 - \zeta)^2/4 \\ \mathcal{H}^2(\zeta) &= (2 - \zeta)(1 + \zeta)^2/4, & \bar{\mathcal{H}}^2(\zeta) &= -(1 - \zeta)(1 + \zeta)^2/4\end{aligned}\quad (2.29)$$

*Paso 4. Cálculo del deslizamiento.* El cálculo del deslizamiento  $\Gamma^{slip}$  se realiza de la siguiente manera. La aplicación tangente a la curva definida por (2.27) puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\zeta \in [-1, +1] \mapsto \mathbf{Y}_T(\zeta) &:= \nabla \mathcal{H}^1(\zeta) \mathbf{Y}_n + \frac{d}{2 \cos \Theta_n} \nabla \bar{\mathcal{H}}^1(\zeta) \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n} \\ &+ \nabla \mathcal{H}^2(\zeta) \mathbf{Y}_{n+1} + \frac{d}{2 \cos \Theta_{n+1}} \nabla \bar{\mathcal{H}}^2(\zeta) \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}}\end{aligned}\quad (2.30)$$

donde  $\nabla \mathcal{H}^A(\zeta) := d\mathcal{H}^A(\zeta)/d\zeta$  y  $\nabla \bar{\mathcal{H}}^A(\zeta) := d\bar{\mathcal{H}}^A(\zeta)/d\zeta$  para  $A = 1, 2$ .

Utilizando la aplicación tangente definida arriba, la longitud de deslizamiento puede calcularse como la integral, definida en el dominio isoparamétrico, de la norma Euclídea de la aplicación tangente:

$$\Gamma^{slip} = \int_{-1}^1 \|\mathbf{Y}_T(\zeta)\| d\zeta \quad (2.31)$$

Esta integral puede evaluarse numéricamente utilizando una regla de integración, dando lugar a una expresión de la forma:

$$\Gamma^{slip} = \sum_{I=1}^{N_{int}} W_I \|\mathbf{Y}_T(\zeta_I)\| \quad (2.32)$$

donde  $\zeta_I \in [-1, +1]$  son las posiciones de los puntos de integración en el dominio isoparamétrico  $[-1, +1]$ ,  $W_I$  son las funciones de peso de integración y  $N_{int}$  es el número de puntos de integración a utilizar en la regla de integración.

### 2.3 UN NUEVO ALGORITMO DE INTEGRACIÓN FRICCIONAL

En este apartado se presenta el nuevo algoritmo de integración temporal que se propone para problemas friccionales con grandes deslizamientos. Para centrarnos en la idea principal del algoritmo, éste se va a introducir en el contexto más sencillo posible. Para ello consideraremos el problema modelo introducido en el apartado anterior. El algoritmo puede linealizarse exactamente, permitiendo obtener velocidades de convergencia cuadráticas cuando se utiliza en el contexto de un esquema iterativo de solución de Newton-Raphson. El algoritmo es adecuado para problemas de contacto con grandes deformaciones y grandes deslizamientos.

Tal como hemos visto anteriormente, en el contexto de algoritmos de formula producto obtenidos a partir de una partición del operador de gobierno, el algoritmo se centra en la integración temporal y solución del Problema 1 de la partición, mientras que el Problema 2 puede integrarse mediante un algoritmo de retorno estándar.

La idea principal del nuevo algoritmo es la siguiente. El deslizamiento incremental experimentado por la partícula puede obtenerse a partir de la velocidad de deslizamiento de la partícula. El procedimiento seguido para definir la curva de deslizamiento incremental y el algoritmo utilizado para calcular su longitud se ha descrito más arriba. Tal como se ha mencionado, éste es el punto clave del algoritmo. Por otro lado, la derivada de Lie a lo largo del flujo inducido por la velocidad de deslizamiento, que aparece en el problema 1 en (2.24), se integra mediante un *operador de desplazamiento* u *operador de transporte paralelo ortogonal*, a lo largo de la curva de deslizamiento.

La integración de las ecuaciones de evolución con restricciones (2.24) del problema friccional 2, que tiene lugar a configuración fija, se realiza mediante una aplicación estándar de un algoritmo de retorno. Como que la integración se realiza a configuración fija, puede utilizarse la parametrización local de la superficie.

Consideremos el intervalo temporal de interés  $I = [0, T]$  discretizado en una serie de subintervalos disjuntos  $I := \cup_{n=0}^N [t_n, t_{n+1}]$ . La solución incremental al problema friccional de evolución definido por (2.23), se obtiene aplicando un algoritmo de integración temporal para integrar las ecuaciones de evolución dentro de un incremento de tiempo  $[t_n, t_{n+1}]$ , con condiciones iniciales conocidas en  $t_n$ .

Siguiendo una notación convencional, denominaremos  $(\cdot)_n$  o  $(\cdot)_{n+1}$ , las aproximaciones algorítmicas de la variable continua  $(\cdot)_t$ , en los instantes  $t_n$  y  $t_{n+1}$ , respectivamente.

Una descripción paso a paso del algoritmo es la siguiente:

**Paso 1. Condiciones iniciales en el instante  $t_n$ : Base de datos.** Consideramos como condiciones iniciales conocidas en el instante  $t_n$ , la tracción friccional  $\mathbf{t}_{T_n}^b$ , la posición de la partícula sobre la superficie  $\mathbf{Y}_n := \varphi(\mathbf{X}, t_n)$  y la normal unitaria a la superficie  $\boldsymbol{\nu}_n := \boldsymbol{\nu} \circ \varphi(\mathbf{X}, t_n)$ . Consideramos un movimiento prescrito de la partícula del instante de tiempo  $t_n$  al  $t_{n+1}$ , siendo  $\mathbf{Y}_{n+1} := \varphi(\mathbf{X}, t_{n+1})$  la posición de la partícula en la superficie en el instante  $t_{n+1}$  y  $\boldsymbol{\nu}_{n+1} := \boldsymbol{\nu} \circ \varphi(\mathbf{X}, t_{n+1})$  la normal unitaria a la superficie en esta posición.

**Paso 2. Definición del sistema ortonormal asociado a los puntos  $\mathbf{Y}_n$  y  $\mathbf{Y}_{n+1}$ .** Utilizando las normales unitarias  $\boldsymbol{\nu}_n \in S^2$  y  $\boldsymbol{\nu}_{n+1} \in S^2$  y (2.25), definimos los vectores unitarios tangentes  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha_n} \in T_{\boldsymbol{\nu}_n} S^2$  y  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha_{n+1}} \in T_{\boldsymbol{\nu}_{n+1}} S^2$  dados por (2.26). Las normales unitarias junto con los vectores unitarios tangentes definen las bases de los sistemas ortonormales  $(\boldsymbol{\nu}_n, \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n}, \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n}) \in S^2 \times T_{\boldsymbol{\nu}_n} S^2 \times T_{\boldsymbol{\nu}_n} S^2$  y  $(\boldsymbol{\nu}_{n+1}, \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_{n+1}}) \in S^2 \times T_{\boldsymbol{\nu}_{n+1}} S^2 \times T_{\boldsymbol{\nu}_{n+1}} S^2$ , asociados a los puntos  $\mathbf{Y}_n$  e  $\mathbf{Y}_{n+1}$ , respectivamente.

**Paso 3. Parametrización de la trayectoria de deslizamiento y cálculo del deslizamiento.** Utilizando las bases ortonormales definidas anteriormente, definimos la trayectoria de deslizamiento utilizando la aplicación (2.27). La aplicación tangente (2.30) se utiliza para definir el valor del deslizamiento dado por (2.31). El deslizamiento puede evaluarse numéricamente, utilizando una regla de integración para calcular (2.31), obteniéndose la expresión (2.32).

**Paso 4. Tracción friccional de prueba.** La tracción friccional de prueba puede calcularse utilizando un algoritmo de dos pasos:

- i. *Transporte paralelo* de la tracción friccional  $\mathbf{t}_{T_n}^b$  en el instante  $t_n$ , a lo largo de la



trayectoria de deslizamiento, desde el punto  $\mathbf{Y}_n$  al  $\mathbf{Y}_{n+1}$ .

- ii. Contribución del deslizamiento de prueba, utilizando un algoritmo de Backward-Euler.

Este algoritmo de dos pasos, conduce a la siguiente expresión

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b\,trial} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_{T_n}^b + \epsilon_T \Gamma^{slip} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}} \quad (2.33)$$

donde  $\Gamma_{slip}$  es el deslizamiento,  $\mathbf{A} \in SO(3)$  es el *operador de desplazamiento* u *operador ortogonal de transporte paralelo* definido como

$$\mathbf{A} := \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha_{n+1}} \otimes \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha_n}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.34)$$

y donde  $SO(3)$  es el grupo ortogonal especial definido como

$$SO(3) := \{\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \text{ y } \det[\mathbf{A}] = +1\} \quad (2.35)$$

La expresión (2.33) representa la expresión semi-discreta del problema de evolución dado por el estado de prueba en (2.24), donde el operador ortogonal de transporte paralelo se ha introducido para integrar la derivada de Lie a lo largo del flujo inducido por la velocidad de deslizamiento y se ha utilizado un algoritmo de Backward-Euler para la integración temporal de la velocidad de deslizamiento.

*Paso 4. Proyección en el disco de Coulomb. Algoritmo de retorno.* La tracción friccional calculada en la configuración actual se proyecta en el disco de Coulomb utilizando un algoritmo de retorno. Esta proyección, involucra el cálculo de la función de deslizamiento de prueba, definida como:

$$\Phi_{n+1}^{trial} := \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b\,trial}\| - \mu t_{N_{n+1}} \quad (2.36)$$

Si  $\Phi_{n+1}^{trial} \leq 0$  entonces la tracción friccional calculada satisface las restricciones friccionales y la proyección es simplemente:

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b := \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b\,trial} \quad (2.37)$$

En caso contrario, debe realizarse la proyección sobre el disco de Coulomb de los valores de prueba calculados. Para el caso más sencillo, el modelo clásico de Coulomb, el algoritmo de retorno conduce a un cálculo directo de la tracción friccional que puede expresarse como:

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b := \mu t_{N_{n+1}} \mathbf{p}_{T_{n+1}}^{b\,trial} \quad (2.38)$$

donde  $\mathbf{p}_{T_{n+1}}^{b\,trial} = \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b\,trial} / \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b\,trial}\|$ .

Un resumen del algoritmo de integración puede verse en la Tabla II.1.

**OBSERVACIÓN 2.1.** El algoritmo ha sido introducido en su totalidad, en el contexto de un problema modelo lo más sencillo posible: el deslizamiento de una partícula sobre una superficie. La extensión del algoritmo para el caso de contacto entre varios cuerpos, en presencia de deformaciones finitas y grandes deslizamientos, puede realizarse de forma

Tabla II.1. Algoritmo de integración temporal friccional.

1. *Condiciones iniciales en el instante  $t_n$ : Base de datos.* Dadas las variables históricas  $\{\mathbf{t}_{T_n}^b, \mathbf{Y}_n, \boldsymbol{\nu}_n\}$  para la (forma uno) tracción friccional, coordenadas cartesianas y normal unitaria exterior (en los puntos de cuadratura) y para valores prescritos de  $\{\mathbf{Y}_{n+1}, \boldsymbol{\nu}_{n+1}\}$

2. *Definición de los sistemas ortonormales asociados a los puntos  $\mathbf{Y}_n$  e  $\mathbf{Y}_{n+1}$ .*

Sea

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n} &:= \frac{\boldsymbol{\nu}_n \times \mathbf{m}}{\|\boldsymbol{\nu}_n \times \mathbf{m}\|}, & \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n} &:= \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n} \times \boldsymbol{\nu}_n \\ \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_{n+1}} &:= \frac{\boldsymbol{\nu}_{n+1} \times \mathbf{m}}{\|\boldsymbol{\nu}_{n+1} \times \mathbf{m}\|}, & \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}} &:= \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_{n+1}} \times \boldsymbol{\nu}_{n+1}\end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{d} = \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{Y}_n, \quad d = \|\mathbf{d}\|, \quad \mathbf{m} = \mathbf{d}/d$$

3. *Parametrización de la trayectoria de deslizamiento y cálculo del deslizamiento.*

i. *Parametrización de la trayectoria de deslizamiento.*

$$\begin{aligned}\zeta \in [-1, +1] \mapsto \mathbf{Y}(\zeta) &:= \mathcal{H}^1(\zeta) \mathbf{Y}_n + \frac{d}{2 \cos \Theta_n} \bar{\mathcal{H}}^1(\zeta) \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n} \\ &+ \mathcal{H}^2(\zeta) \mathbf{Y}_{n+1} + \frac{d}{2 \cos \Theta_{n+1}} \bar{\mathcal{H}}^2(\zeta) \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}}\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\cos \Theta_n &:= \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n} \cdot \mathbf{m}, & \cos \Theta_{n+1} &:= \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}} \cdot \mathbf{m} \\ \mathcal{H}^1(\zeta) &= (2 + \zeta)(1 - \zeta)^2/4, & \bar{\mathcal{H}}^1(\zeta) &= (1 + \zeta)(1 - \zeta)^2/4 \\ \mathcal{H}^2(\zeta) &= (2 - \zeta)(1 + \zeta)^2/4, & \bar{\mathcal{H}}^2(\zeta) &= -(1 - \zeta)(1 + \zeta)^2/4\end{aligned}$$

ii. *Aplicación tangente.*

$$\begin{aligned}\zeta \in [-1, +1] \mapsto \mathbf{Y}_T(\zeta) &:= \nabla \mathcal{H}^1(\zeta) \mathbf{Y}_n + \frac{d}{2 \cos \Theta_n} \nabla \bar{\mathcal{H}}^1(\zeta) \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n} \\ &+ \nabla \mathcal{H}^2(\zeta) \mathbf{Y}_{n+1} + \frac{d}{2 \cos \Theta_{n+1}} \nabla \bar{\mathcal{H}}^2(\zeta) \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}}\end{aligned}$$

iii. *Deslizamiento.*

$$\Gamma^{slip} = \sum_{I=1}^{N_{int}} W_I \|\mathbf{Y}_T(\zeta_I)\|$$

Tabla II.1. Algoritmo de integración temporal friccional.

**4. Estado de prueba.****i. Tracción friccional de prueba.**

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b\,trial} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_{T_n}^b + \epsilon_T \Gamma^{slip} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}}$$

donde

$$\mathbf{A} := \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha_{n+1}} \otimes \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha_n}, \quad \alpha = 1, 2$$

**ii. Función de deslizamiento de prueba.**

$$\Phi_{n+1}^{trial} := \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b\,trial}\| - \mu t_{N_{n+1}}$$

**5. Algoritmo de retorno friccional: Proyección en el disco de Coulomb.****i. Algoritmo de retorno.**

$$t_{T_{n+1}\alpha} = \begin{cases} t_{T_{n+1}\alpha}^{trial} & \text{if } \Phi_{n+1}^{trial} \leq 0 \text{ (stick)} \\ \mu t_{N_{n+1}} p_{T_{n+1}\alpha}^{trial} & \text{otherwise (slip)} \end{cases}$$

donde

$$\mathbf{p}_{T_{n+1}}^{b\,trial} = \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b\,trial} / \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b\,trial}\|$$

directa. En este caso, dentro del marco general de deformación finita, el cálculo de la tracción friccional de prueba se realiza en la configuración (fija) de referencia. Una vez se ha calculado la tracción friccional de prueba en la configuración de referencia, debe realizarse la operación de push-forward a la configuración actual y a continuación realizar la proyección en el disco de Coulomb por medio de un algoritmo de retorno definido en la configuración actual.  $\square$

**OBSERVACIÓN 2.2.** El algoritmo descrito anteriormente es susceptible de ser linealizado exactamente, pudiéndose obtener el operador consistente o algorítmico tangente. La linealización del algoritmo, en el contexto general de problemas de contacto multi-cuerpo en deformación finita, se presenta en el Apéndice B.  $\square$

**OBSERVACIÓN 2.3.** La implementación del nuevo algoritmo de integración temporal friccional en el contexto de los métodos de Lagrangiano aumentado es inmediata. En este caso, sería necesario construir una trayectoria de deslizamiento en cada una de las iteraciones anidadas de actualización de los multiplicadores de Lagrange.  $\square$

## 2.4 SIMULACIONES NUMÉRICAS

La formulación presentada en los apartados anteriores se ilustra a continuación en una serie de simulaciones numéricas de problemas tridimensionales. Los objetivos son básicamente dos, por un lado mostrar el comportamiento del nuevo algoritmo de integración temporal de la fricción en situaciones en las que se producen grandes deslizamientos y deformaciones finitas, y por otro lado mostrar la robustez de la formulación presentada, globalmente en el contexto del método de los elementos finitos, en diferentes simulaciones numéricas. Los cálculos se realizan con una versión mejorada del programa de elementos finitos de propósito general FEAP desarrollado originalmente por R.L. Taylor y J.C. Simo, y que está documentado en ZIENKIEWICZ & TAYLOR [24].

(A) *Conformado de una bandeja de aceite.* Este ejemplo se ha tomado de LAURSEN & SIMO [12] y muestra una aplicación de carácter industrial de la teoría presentada en los apartados anteriores. La descripción del problema es la siguiente. Se tiene una chapa de metal, inicialmente plana, que quiere conformarse mediante la aplicación de un punzón, que se supone rígido. Se considera que la chapa está empotrada en sus extremos a un molde supuesto rígido. Para la chapa, se supone un modelo constitutivo elastoplástico del tipo  $J_2$ , con propiedades del material  $E = 70$  GPa,  $\nu = 0.3$ ,  $\sigma_Y = 140$  MPa y endurecimiento isotrópico lineal con parámetro  $H = 100$  MPa. El comportamiento friccional entre la chapa y los útiles rígidos, el punzón y el molde, se describe mediante un modelo friccional clásico de Coulomb, con coeficiente de rozamiento 0.25. Las dimensiones iniciales de la chapa son 600 mm de largo, 560 mm de ancho y 5 mm de espesor. El punzón tiene una parte central plana y zonas inclinadas laterales. El proceso de conformado se produce hasta que la parte plana del punzón se ha movido una distancia igual a 100 mm.

Por razones de simetría, sólo se modela la mitad de la geometría del problema, utilizando 800 elementos de continuo en la discretización de la chapa. Se utiliza una formulación mixta de elementos finitos Q1/P0 en deformación finita, utilizando interpolaciones discontinuas constantes para la presión y el volumen, junto con una interpolación trilineal para los desplazamientos. Puede consultarse, por ejemplo, SIMO [22], para una descripción de la formulación.

Los parámetros de penalización normal, para el contacto, y tangente, para el rozamiento, se han tomado  $\varepsilon_N = \varepsilon_T = 10^{10}$  y se ha utilizado el nuevo algoritmo de integración temporal de la fricción. El proceso de conformado se ha realizado en 100 pasos de tiempo, utilizando control de desplazamientos del punzón. Para la solución del sistema no lineal de ecuaciones se ha utilizado el método de Newton-Raphson en combinación con un algoritmo de búsqueda unidireccional.

La simulación se ha realizado en una Silicon Graphics Power Challenge L Workstation. El tiempo de CPU utilizado en la simulación ha sido de 2 horas y 31 minutos. La Tabla II.2 muestra los valores de la norma Euclídea del residuo para cuatro pasos de tiempo típicos, correspondientes a desplazamientos del punzón de 25, 50, 75 y 100 mm, dentro de un esquema incremental iterativo que utiliza el método de Newton-Raphson. La velocidad de convergencia cuadrática puede obtenerse gracias a la linealización exacta del algoritmo de integración temporal y la obtención del operador tangente consistente.

La FIGURA 2.3 muestra la configuración inicial de la chapa y de los útiles de con-

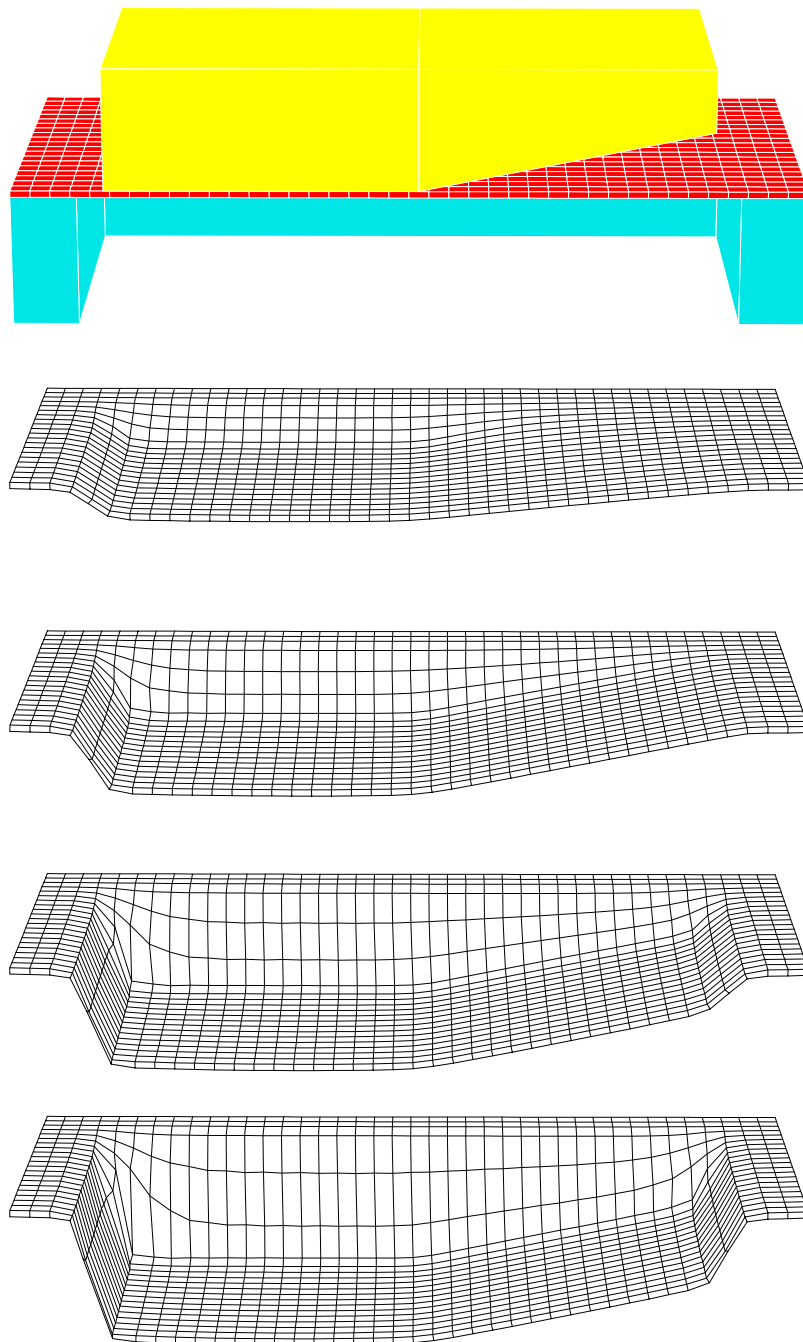


FIGURA 2.3. Conformado de una bandeja de aceite. Configuración inicial para la chapa y los útiles, y configuraciones deformadas para desplazamientos del punzón de 25, 50, 75 y 100 mm.

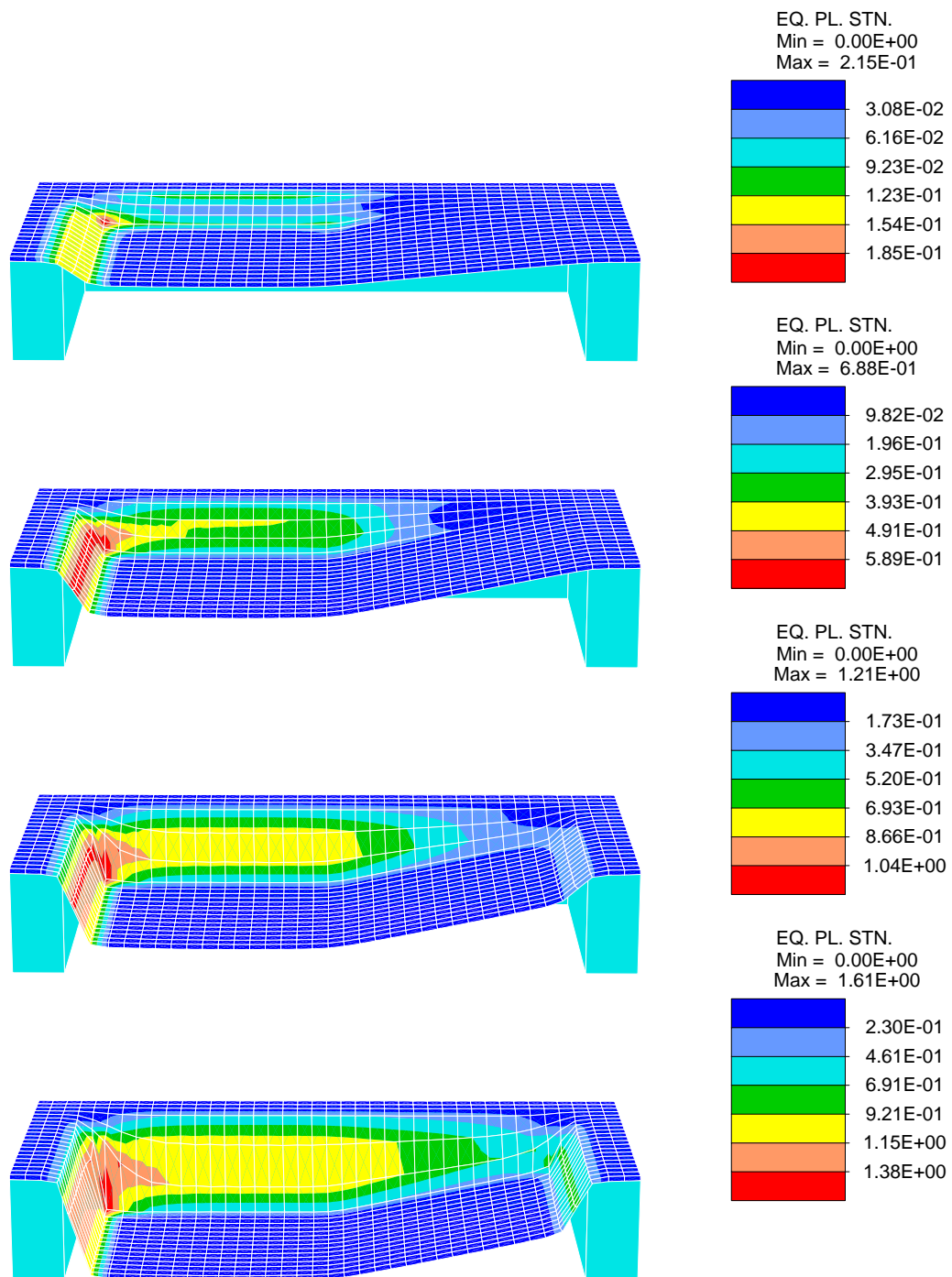


FIGURA 2.4. Conformado de una bandeja de aceite. Distribución de la deformación plástica equivalente para desplazamientos del punzón de 25, 50, 75 y 100 mm.

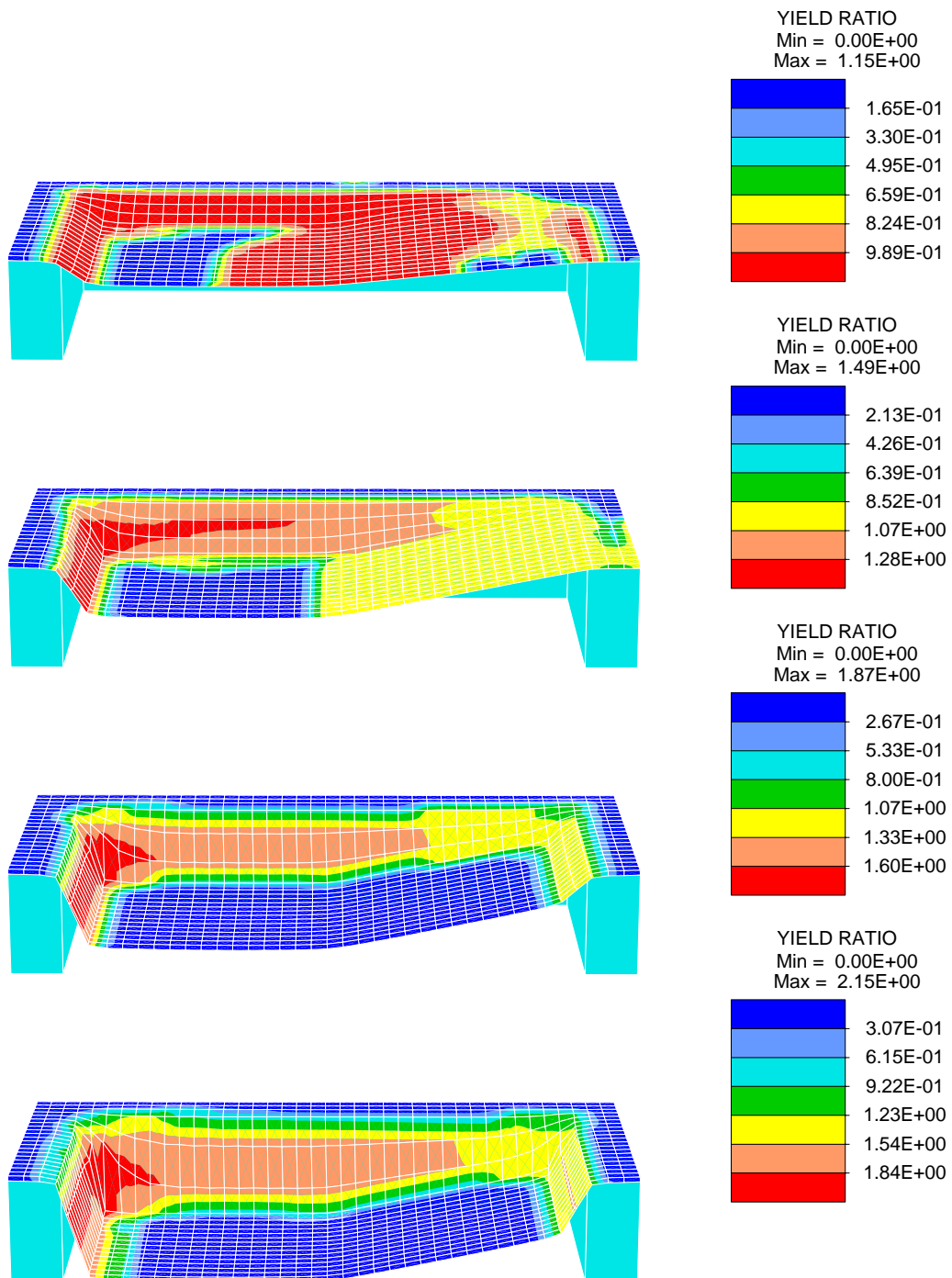


FIGURA 2.5. Conformado de una bandeja de aceite. Distribución de la relación de fluencia para desplazamientos del punzón de 25, 50, 75 y 100 mm.

Tabla II.2. Conformado de una bandeja de aceite  
Norma Euclídea del residuo para cuatro pasos de tiempo típicos

<i>Step 25</i>	<i>Step 50</i>	<i>Step 75</i>	<i>Step 100</i>
2.72291E+04	2.99612E+04	3.31514E+04	3.09564E+04
7.24502E+04	7.95762E+04	6.04478E+04	5.94460E+04
1.63322E+04	1.87194E+04	8.44338E+04	3.50416E+04
1.57428E+03	2.38115E+03	6.17215E+03	2.21297E+03
1.60151E+02	1.59523E+02	1.22857E+02	5.76473E+01
1.12800E+01	2.08237E+00	2.29146E+01	1.50948E+00
4.32125E-03	2.50423E-04	5.38027E-01	1.34566E-04
6.46626E-08	6.48886E-08	2.12824E-06	1.38417E-07

formado, junto con las configuraciones deformadas de la chapa para cuatro instantes del proceso de conformado, correspondientes a desplazamientos del punzón de 25, 50, 75 y 100 mm. Las FIGURAS 2.4 y 2.5 muestran, respectivamente, la distribución de la deformación plástica equivalente y la relación de fluencia, para los mismos cuatro instantes de tiempo.

(B) *Aplastamiento de una tubería entre dos placas.* Este ejemplo se ha tomado de LAURSEN & SIMO [11] y corresponde al aplastamiento de una tubería de aluminio mediante la aplicación de dos placas, también de aluminio. Las propiedades del material, tanto para la tubería como para las dos placas, son módulo de deformación volumétrica  $K = 74.4$  GPa, módulo de deformación transversal  $G = 28.5$  GPa y tensión de fluencia  $\sigma_Y = 485$  MPa. No se han considerado efectos de endurecimiento plástico. La tubería, en la configuración inicial, tenía un radio interior de 9 cm, un radio exterior de 10 cm y una longitud de 40 cm. Las placas tenían un espesor de 2 cm, 40 cm de longitud y 15 cm de ancho. Se ha considerado una ley de rozamiento de Coulomb con un coeficiente de rozamiento  $\mu = 0.1$  entre las placas y la tubería.

Debido a la simetría del problema, se ha discretizado sólo una octava parte de la geometría utilizando 128 elementos de continuo para la tubería y 15 elementos de continuo para cada una de las placas. Se ha utilizado una formulación mixta de elementos finitos Q1/P0 en deformación finita, utilizando interpolación discontinua constante para la presión y el volumen, junto con una interpolación continua trilineal para los desplazamientos. Véase, por ejemplo, SIMO [22], para una descripción del método. Los parámetros de penalización normal de contacto y tangente de fricción se han tomado como  $\varepsilon_N = \varepsilon_T = 10^{10}$ . El análisis se ha realizado en 100 pasos de carga, utilizando control de desplazamientos de los lados menores de las placas. Para la solución del sistema no lineal de ecuaciones se ha utilizado el método de Newton-Raphson en combinación con un algoritmo de búsqueda unidireccional.

La simulación se ha realizado en una Silicon Graphics Power Challenge L Workstation. El tiempo de CPU utilizado en la simulación ha sido de 27 minutos. La Tabla II.3 muestra los valores de la norma Euclídea del residuo para cuatro pasos de tiempo típicos, correspondientes a desplazamientos del punzón de 25, 50, 75 y 100 mm, dentro de un



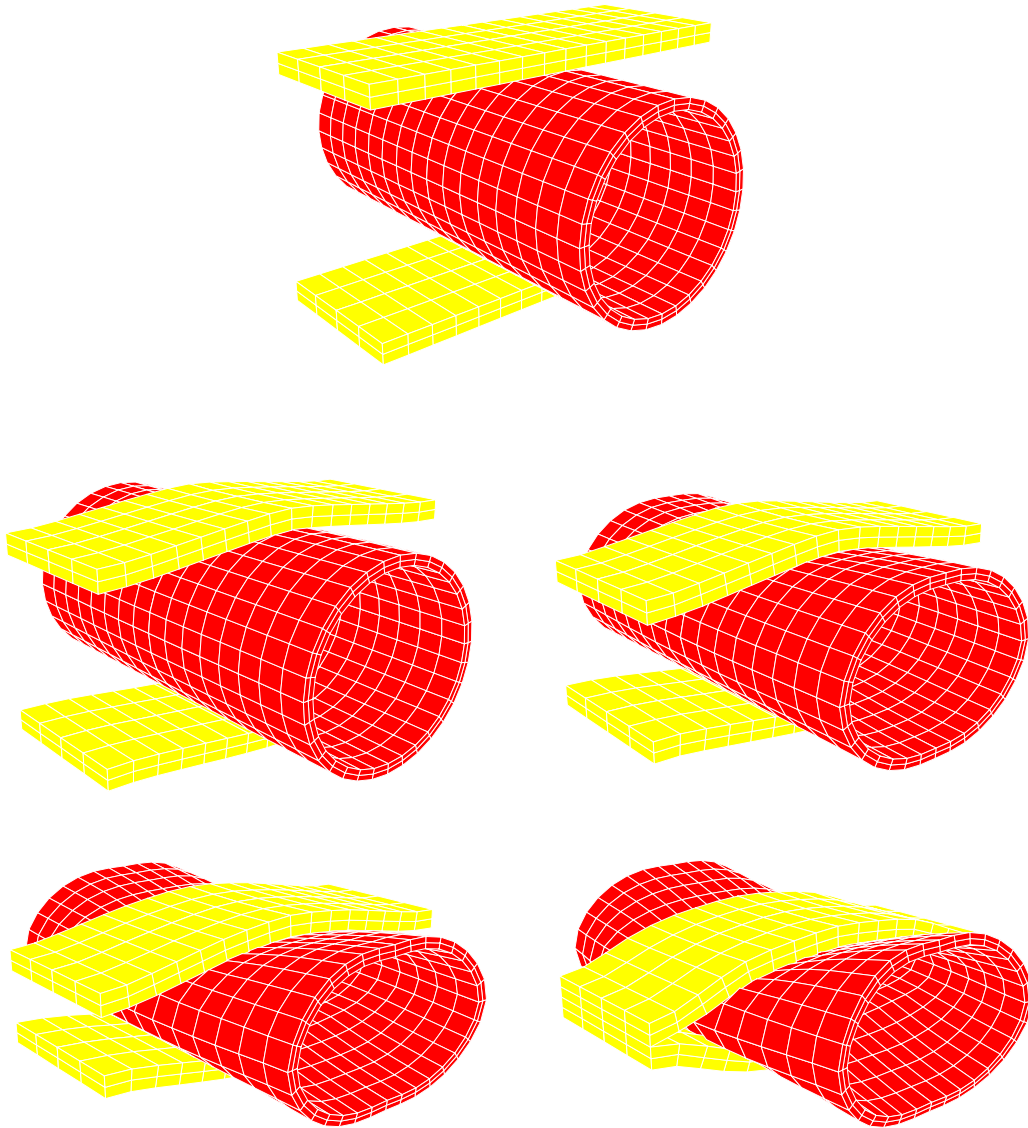


FIGURA 2.6 Aplastamiento de una tubería entre dos placas flexibles. Configuración inicial de la tubería y de las placas y configuraciones deformadas para desplazamientos de los lados de las placas de 25, 50, 75 y 100 mm.

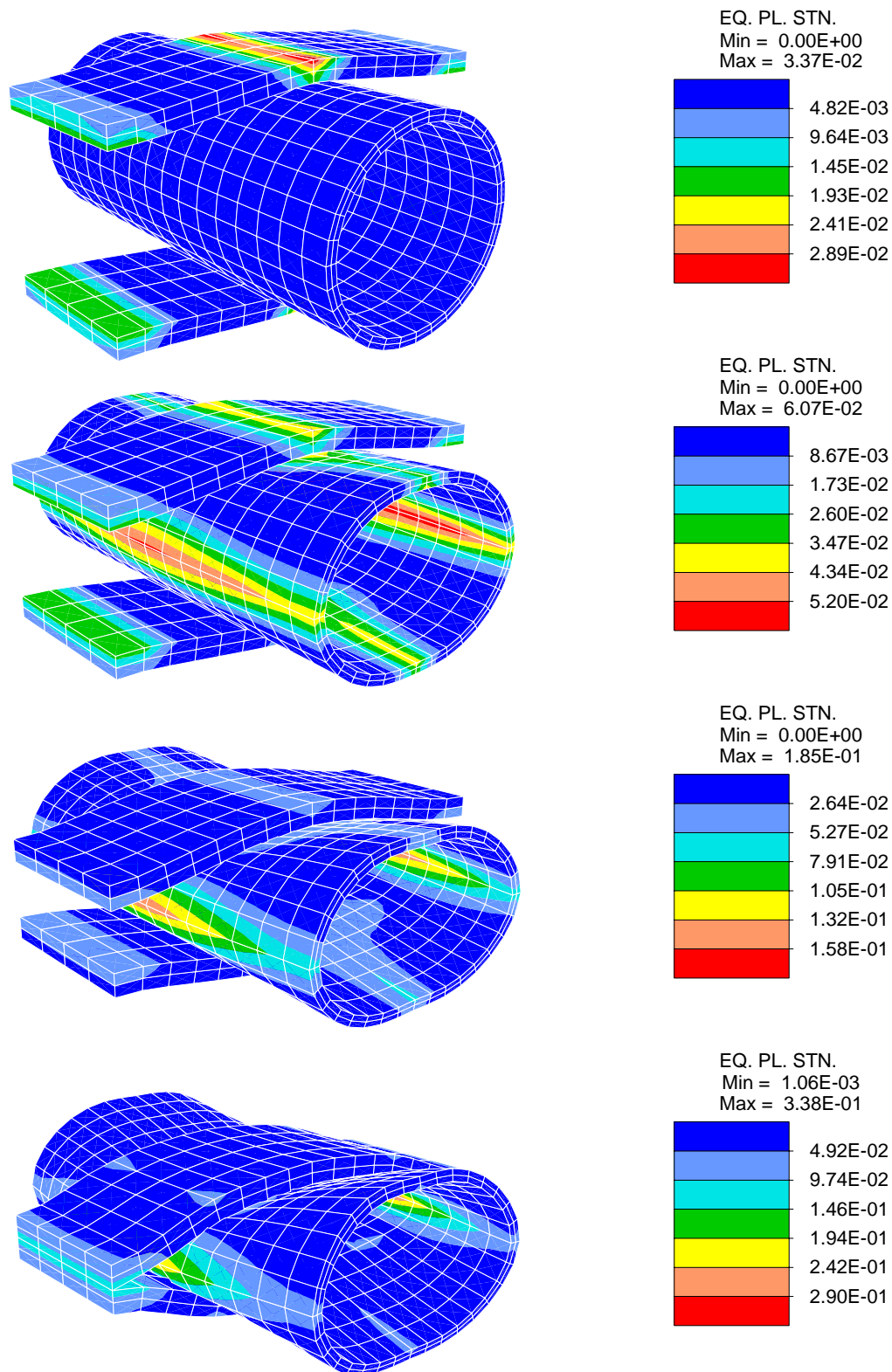


FIGURA 2.7. Aplastamiento de una tubería entre dos placas flexibles. Distribución de la deformación plástica equivalente para desplazamientos de los lados de las placas de 25, 50, 75 y 100 mm.

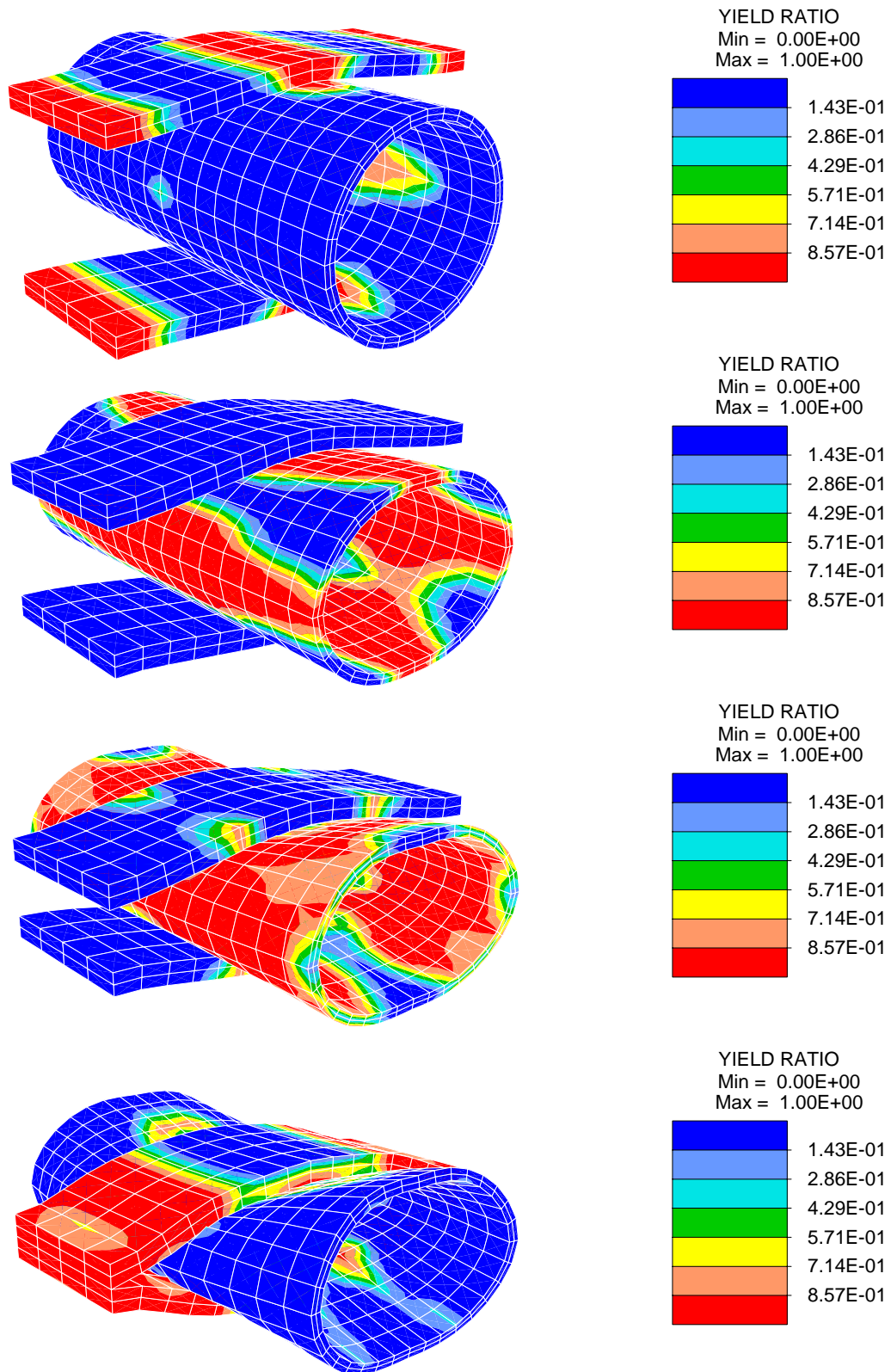


FIGURA 2.8. Aplastamiento de una tubería entre dos placas flexibles. Distribución de la relación de fluencia para desplazamientos de los lados de las placas de 25, 50, 75 y 100 mm.

esquema incremental iterativo que utiliza el método de Newton-Raphson. La velocidad de convergencia cuadrática puede obtenerse gracias a la linealización exacta del algoritmo de integración temporal y la obtención del operador tangente consistente.

Tabla II.3. Aplastamiento de una tubería entre dos placas flexibles.  
Norma Euclídea del residuo para cuatro pasos típicos de carga.

<i>Step 25</i>	<i>Step 50</i>	<i>Step 75</i>	<i>Step 100</i>
8.11798E+09	1.12212E+10	1.02522E+10	9.94982E+09
8.48452E+07	4.69798E+08	6.32628E+08	3.16392E+09
2.06944E+06	8.54720E+07	6.33897E+08	1.50084E+09
2.05370E+04	1.42299E+07	1.74784E+07	5.68297E+08
5.81648E+00	7.20342E+04	2.33905E+06	5.20430E+07
8.62700E-04	4.33376E+00	6.22580E+02	4.68104E+06
	9.95670E-04	8.67621E-04	9.75066E+04
			2.44372E+00
			9.69764E-04

Este ejemplo muestra las posibilidades que tiene la formulación propuesta de analizar problemas que involucran deformaciones finitas entre cuerpos. La FIGURA 2.6 muestra la geometría del problema en la configuración inicial junto con las configuraciones deformadas para cuatro pasos típicos del proceso de carga. Las FIGURAS 2.7 y 2.8 muestran las distribuciones de la deformación plástica equivalente y de la relación de fluencia, respectivamente, para los mismos cuatro pasos del análisis considerados. La FIGURA 2.9 muestra la distribución de la deformación plástica equivalente al final del análisis. Se muestra la mitad de la geometría para apreciar mejor la deformada de la tubería en la sección media y la distribución de la deformación plástica equivalente en la zona media interior de la tubería.

(C) *Simulador de un freno en un proceso de embutición profunda.* En este ejemplo se analiza un simulador de freno en un proceso de embutición profunda. En el simulador se tiene una chapa metálica que está inicialmente plana y que se hará pasar entre una serie de rodillos. Las propiedades de la chapa son, módulo de deformación volumétrica  $K = 171.6$  GPa, módulo de deformación transversal  $G = 79.2$  GPa y endurecimiento plástico isotrópico dado por la ecuación de Swift

$$\sigma_Y = 536.0 (0.0033 + \bar{\epsilon}^p)^{0.21} \text{ MPa}$$

Los rodillos se han considerado que son rígidos. La chapa tiene un espesor inicial de 1 mm, una longitud inicial de 60 mm y una anchura inicial de 2 mm. Los rodillos tienen una anchura de 4 mm y distintos radios de 5 y 2 mm. Con respecto al extremo izquierdo de la chapa, los centros de los rodillos están situados a unas distancias de 9, 20, 31, 34 y 44 mm, tal como se indica en la FIGURA 2.10. Se ha supuesto un coeficiente de rozamiento

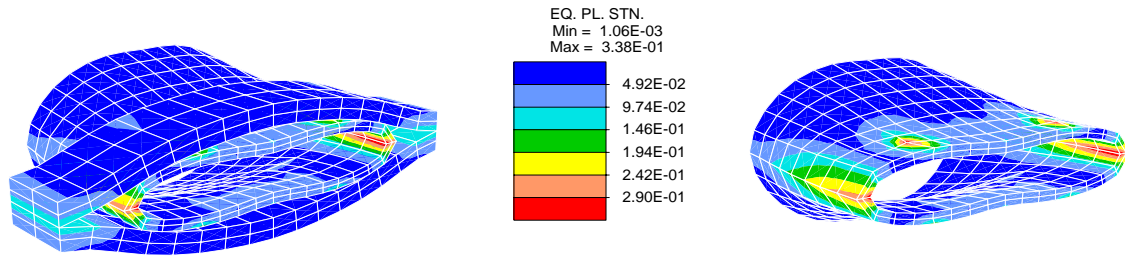


FIGURA 2.9. Aplastamiento de una tubería entre dos placas flexibles. Distribución de la deformación plástica equivalente al final del análisis. Se muestra la mitad de la geometría para apreciar mejor la deformada de la tubería en la sección media y la distribución de la deformación plástica equivalente en la zona media interior de la tubería.

de Coulomb entre la chapa y los rodillos de  $\mu = 0.144$ . Se ha analizado el problema en condiciones de deformación plana, permitiendo de esta manera un análisis bidimensional del mismo. Únicamente se ha discretizado la mitad de los rodillos que interacciona con la chapa. El proceso de carga consta de dos fases. En la primera fase el rodillo principal superior (en la izquierda) se mueve hacia abajo una distancia igual a 6.35 mm mientras que el extremo izquierdo de la chapa se mantiene fijo. En la segunda etapa, los rodillos se mantienen fijos y se estira la chapa, horizontalmente desde la izquierda, hasta una distancia final igual a 6.35 mm.

Para la discretización del problema se han utilizado 320 elementos de continuo para la chapa y 100 elementos de superficie para cada uno de los rodillos. Para la chapa se ha utilizado una formulación mixta de elementos finitos Q1/P0 en deformación finita, utilizando interpolación discontinua constante para la presión y el volumen, junto con una interpolación continua bilineal para los desplazamientos. Los parámetros de penalización normal de contacto y tangente de fricción se han tomado igual a  $\varepsilon_N = 5 \cdot 10^{12}$  y  $\varepsilon_T = 5 \cdot 10^{10}$ , respectivamente. El análisis se ha realizado en 200 pasos de carga, 100 en cada una de las fases, utilizando control de desplazamientos del rodillo principal y del extremo izquierdo de la chapa en cada una de las fases, respectivamente. Para la solución del sistema no lineal de ecuaciones se ha utilizado el método de Newton-Raphson en combinación con un algoritmo de búsqueda de optimización unidireccional. La convergencia del proceso incremental iterativo se verifica en la norma de energía, utilizando una tolerancia de  $10^{-25}$ .

La simulación se ha realizado en una Silicon Graphics Power Challenge L Workstation. El tiempo de CPU utilizado en la simulación ha sido de 2 horas y 5 minutos. La Tabla II.4 muestra los valores de la norma Euclídea del residuo para cuatro pasos de tiempo típicos.

La FIGURA 2.10 muestra la geometría inicial de la chapa y la posición inicial de los rodillos. La FIGURA 2.11 muestra la deformada de la chapa para cuatro etapas diferentes del proceso, correspondientes a desplazamientos del rodillo principal de 3.175 y 6.350 mm durante la primera fase y a desplazamientos horizontales prescritos del extremo izquierdo de la chapa de 3.175 y 6.350 mm durante la segunda fase.

La FIGURA 2.12 muestra la evolución de la reacción horizontal en el extremo izquierdo de la chapa y la evolución del desplazamiento horizontal del extremo derecho de la chapa.

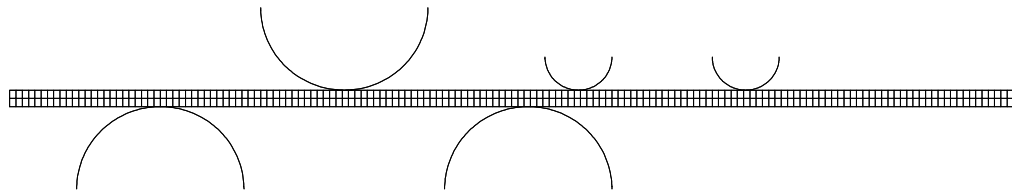


FIGURA 2.10. Simulador de freno en proceso de embutición profunda. Geometría inicial de la chapa y posición inicial de los rodillos.

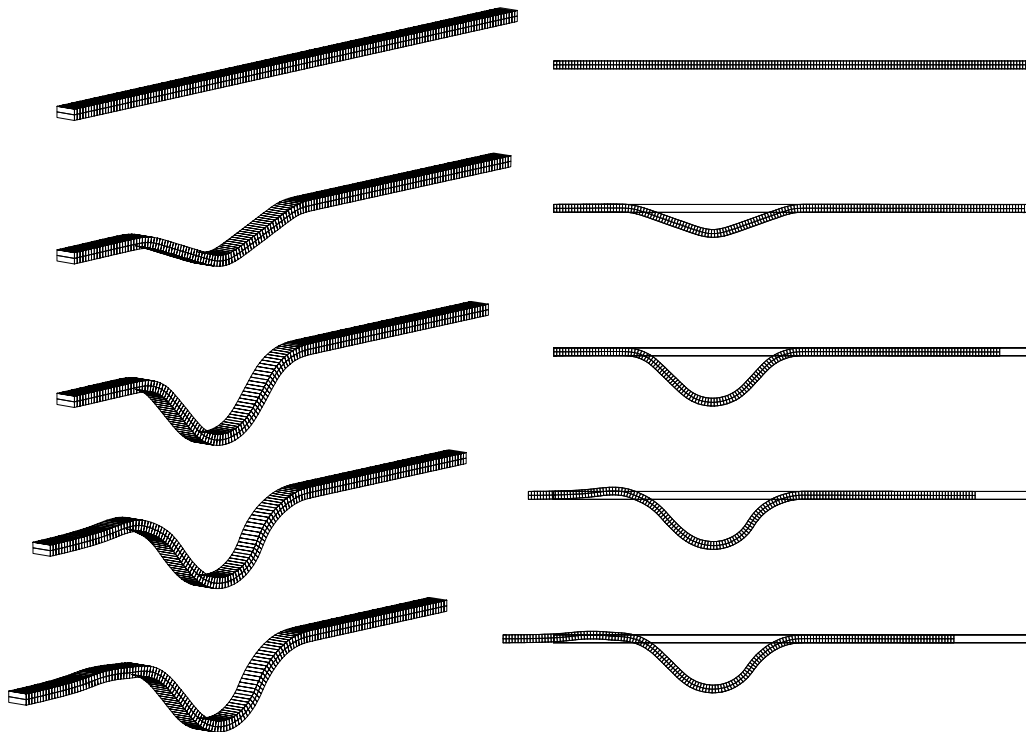


FIGURA 2.11. Simulador de freno en proceso de embutición profunda. Configuración deformada de la chapa en cuatro diferentes etapas del proceso, correspondientes a desplazamientos del rodillo principal de 3.175 y 6.350 mm durante la primera fase y a desplazamientos horizontales prescritos del extremo izquierdo de la chapa de 3.175 y 6.350 mm durante la segunda fase.

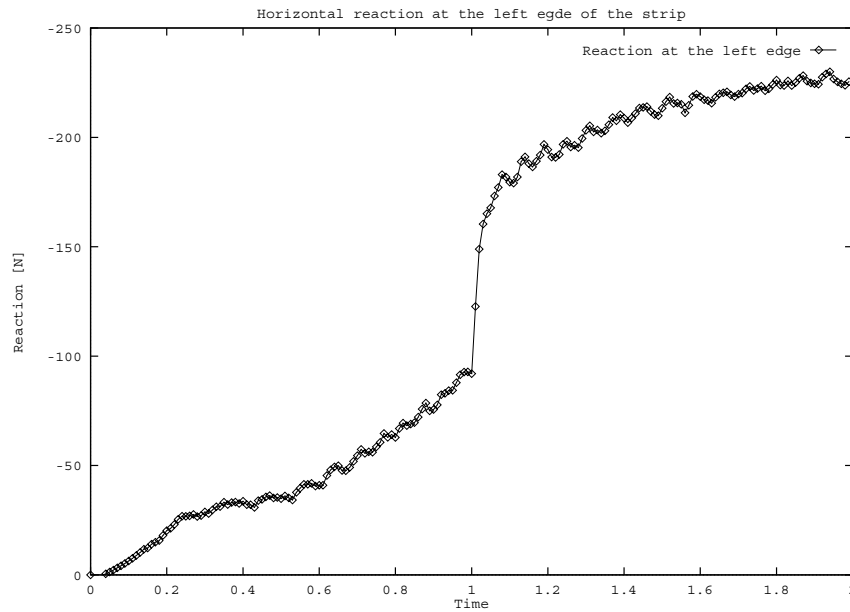


FIGURA 2.12. Simulador de freno en proceso de embutición profunda. Evolución de la reacción horizontal en el extremo izquierdo de la chapa y la evolución del desplazamiento horizontal del extremo derecho de la chapa. La escala de tiempo es tal que  $t = 1$  corresponde al final de la primera fase del proceso de carga, correspondiente a un desplazamiento vertical del rodillo principal de 6.350 mm.

La escala de tiempo es tal que  $t = 1$  corresponde al final de la primera fase del proceso de carga, correspondiente a un desplazamiento vertical del rodillo principal de 6.350 mm.

La FIGURA 2.13 muestra la distribución de la deformación plástica equivalente en la chapa, para cuatro diferentes etapas del proceso correspondientes a desplazamientos del rodillo principal de 3.175 y 6.350 mm durante la primera fase y a desplazamientos horizontales prescritos del extremo izquierdo de la chapa de 3.175 y 6.350 mm durante la segunda fase. En la FIGURA 2.14 se muestra un detalle de la distribución de la deformación plástica equivalente en la parte central de la chapa, para un desplazamiento del rodillo principal de 6.350 mm durante la primera fase y para un desplazamiento del extremo izquierdo de la chapa de 6.350 mm durante la segunda etapa.

(D) *Embutición profunda de una bandeja cuadrada.* Este ejemplo se ha tomado de una serie de ejemplos de prueba propuestos en la Conferencia Internacional *Numerical Simulation of 3-D Sheet Metal Forming Processes*, NUMISHEET'93, August 31-September 2, Tokyo, Japan. El ejemplo consiste en la embutición profunda de una chapa inicialmente cuadrada, mediante la aplicación de un punzón y utilizando unos útiles de frenos. Durante el proceso de embutición, los extremos de la placa no tienen restringido el movimiento horizontal y pueden deslizarse entre los útiles de conformado. La magnitud de este deslizamiento dependerá de las condiciones de rozamiento entre la placa y los útiles y de la presión ejercida por los útiles de frenado sobre la misma.

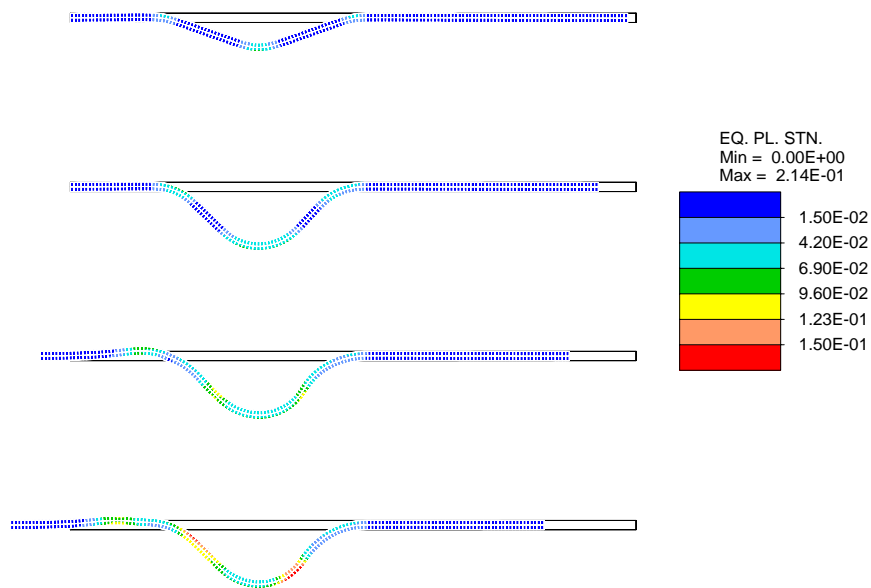


FIGURA 2.13. Simulador de freno en proceso de embutición profunda. Distribución de la deformación plástica equivalente en la chapa, para cuatro diferentes etapas del proceso correspondientes a desplazamientos del rodillo principal de 3.175 y 6.350 mm durante la primera fase y a desplazamientos horizontales prescritos del extremo izquierdo de la chapa de 3.175 y 6.350 mm durante la segunda fase.

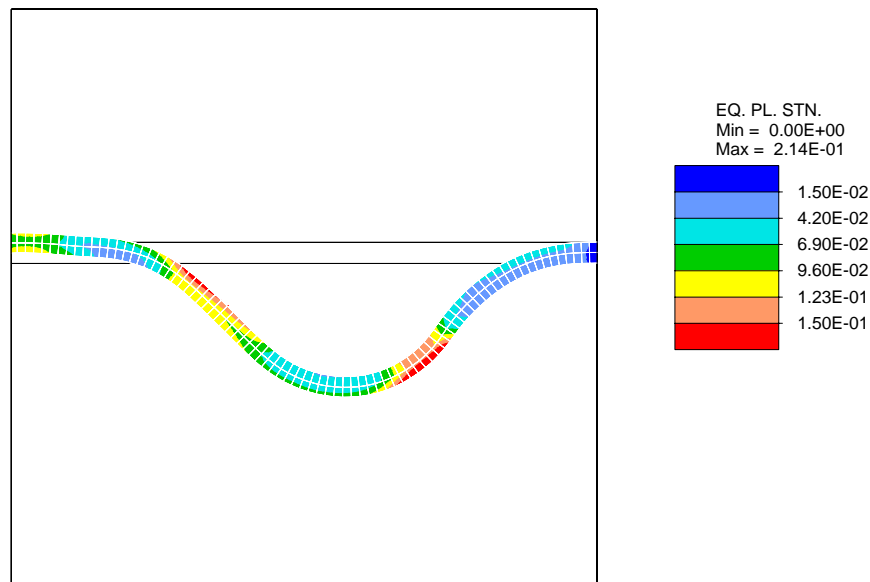


FIGURA 2.14. Simulador de freno en proceso de embutición profunda. Detalle de la distribución de la deformación plástica equivalente en la parte central de la chapa, para un desplazamiento del rodillo principal de 6.350 mm durante la primera fase y para un desplazamiento del extremo izquierdo de la chapa de 6.350 mm durante la segunda etapa.



Tabla II.4. Simulador de freno en proceso de embutición profunda  
Norma Euclídea del residuo para cuatro pasos típicos de tiempo

<i>Step</i> 50	<i>Step</i> 100	<i>Step</i> 150	<i>Step</i> 200
5.28310E+02	6.53489E+02	4.12709E+04	4.12687E+04
3.81569E+02	3.58552E+02	2.51557E+02	1.58693E+02
2.37672E+01	1.14570E+02	2.82030E+01	3.67684E+01
1.42762E+01	2.48702E+01	3.65624E+00	6.23131E+00
3.97753E+00	5.95389E+00	2.94132E-01	2.14350E-01
1.81214E-01	5.91212E-01	5.56107E-02	9.54870E-03
5.06938E-04	2.36497E-03	1.29838E-05	2.17244E-07
5.21445E-09	6.42952E-08	5.46098E-10	5.29836E-10
5.96470E-10	5.03292E-10		

Teniendo en cuenta las condiciones de simetría, se ha discretizado únicamente una cuarta parte del problema. La simulación numérica se ha realizado en una Silicon Graphics Power Challenge L Workstation y se ha completado en 14 h 26 min de tiempo de CPU. La evolución de la norma Euclídea del residuo para cuatro pasos de tiempo típicos muestra una velocidad cuadrática de convergencia.

La FIGURA 2.15 muestra el proceso de embutición de la chapa para cuatro pasos de tiempo, correspondientes a desplazamientos del punzón de 10, 20, 30 y 40 mm. La FIGURA 2.16 muestra la geometría final de la chapa al final del proceso y en la FIGURA 2.17 puede verse la evolución de los deslizamientos horizontales de la chapa en la esquina y en los puntos medios de los lados, hasta un desplazamiento máximo del punzón de 40 mm. Los valores finales obtenidos para este desplazamiento concuerdan excelentemente con los valores medios numéricos y experimentales obtenidos en los análisis presentados en NUMISHEET'93. benchmark test.

Las FIGURAS 2.18-2.19 muestran la presión de contacto en la parte superior e inferior de la chapa, respectivamente, para desplazamientos del punzón de 10, 20, 30 y 40 mm. Las FIGURAS 2.20-2.21 muestran la disipación friccional en la parte superior e inferior de la chapa, respectivamente, para desplazamientos del punzón de 10, 20, 30 y 40 mm.

## 2.5 OBSERVACIONES FINALES

En este capítulo se ha presentado un nuevo algoritmo de integración temporal del problema friccional, adecuado para grandes deslizamientos y problemas de contacto multi-cuerpo con deformaciones finitas. Para introducir los aspectos básicos del algoritmo es suficiente considerar un sencillo problema modelo: el movimiento de una partícula deslizando sobre una superficie rígida. Las principales características del algoritmo pueden introducirse en el contexto de este problema modelo, siendo relativamente sencillo la extensión del algoritmo para una situación general de contacto multi-cuerpo, con grandes deformaciones.

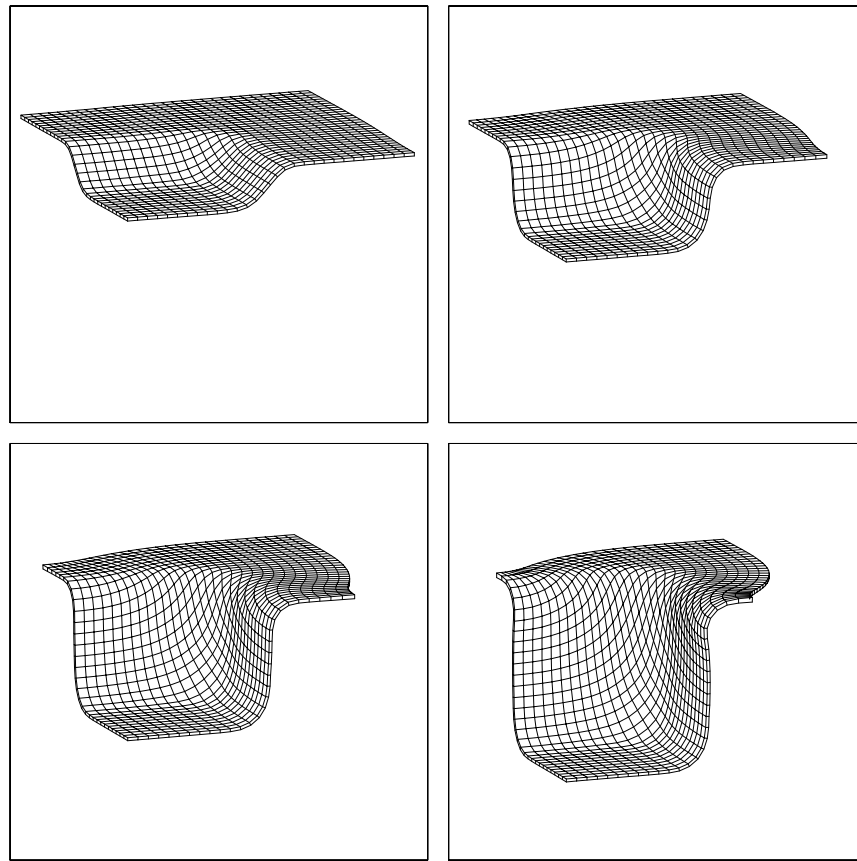


FIGURA 2.15 Embutición profunda de una chapa cuadrada. Evolución de la deformada de la chapa para un desplazamientos del punzón de 10, 20, 30 y 40 mm.

El punto clave del algoritmo reside en la parametrización de la trayectoria incremental de deslizamiento como una aproximación a una geodésica. Una restricción de diseño en la parametrización es que ésta se define, únicamente en función de las posiciones inicial y final de la partícula en el incremento de tiempo considerado y de las normales a la superficie en estos puntos, sin utilizar la parametrización local subyacente inherente a la discretización de la superficie utilizando el método de los elementos finitos. Esta restricción de diseño permite abordar situaciones en las que se producen grandes deslizamientos.

El algoritmo es susceptible de ser linealizado exactamente, permitiendo obtener velocidades cuadráticas de convergencia cuando se utiliza el método de Newton-Raphson para la solución del sistema de ecuaciones del problema. El buen comportamiento del algoritmo se ha mostrado en una serie representativa de ejemplos numéricos.

## 2.6 REFERENCIAS

- [1] DUVAUT, G. & J.L. LIONS [1972], *Les Inequations en Mecanique et en Physique*,

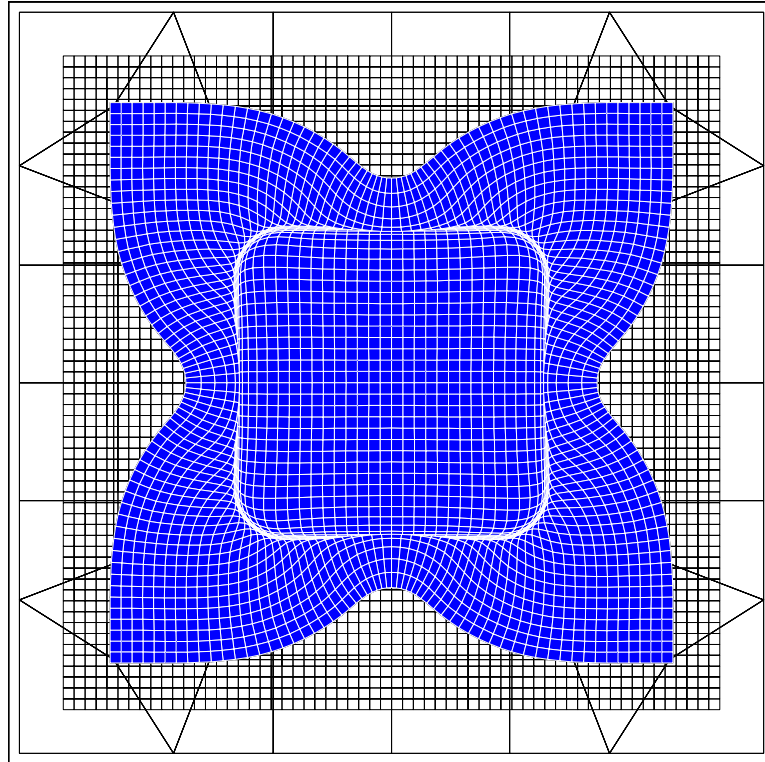


FIGURA 2.16 Embutición profunda de una chapa cuadrada. Geometría final de la chapa para un desplazamiento del punzón de 40 mm.

Dunod, Paris.

- [2] KIKUCHI, N. & J.T. ODEN [1988], *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia.
- [3] ODEN, J.T. & E.B. PIRES [1984], "Algorithms and Numerical Results for Finite Element Approximations of Contact Problems con Non-Classical Friction Laws", *Computer and Structures*, **19**, 137-147.
- [4] CHENG, J.-H. & N. KIKUCHI [1985], "An Analysis of Metal Forming Processes Using Large Deformation Elastic-Plastic Formulations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **49**, 71-108.
- [5] HALLQUIST, J.O., G.L. GOUDREAU & D.J. BENSON [1985], "Sliding Interfaces con Contact-Impact in Large-Scale Lagrangian Computations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **51**, 107-137.
- [6] SIMO, J.C., P. WRIGGERS & R.L. TAYLOR [1985], "A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Contact Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **50**, 163-180.
- [7] CURNIER, A. & P. ALART [1988], "A Generalized Newton Method for Contact Problems con Friction", *Journal de Mecanique Theorique et Appliquee*, supplement no. 1 to **7**, 67-82.
- [8] WRIGGERS, P., T. VU VAN & E. STEIN [1990], "Finite Element Formulation of

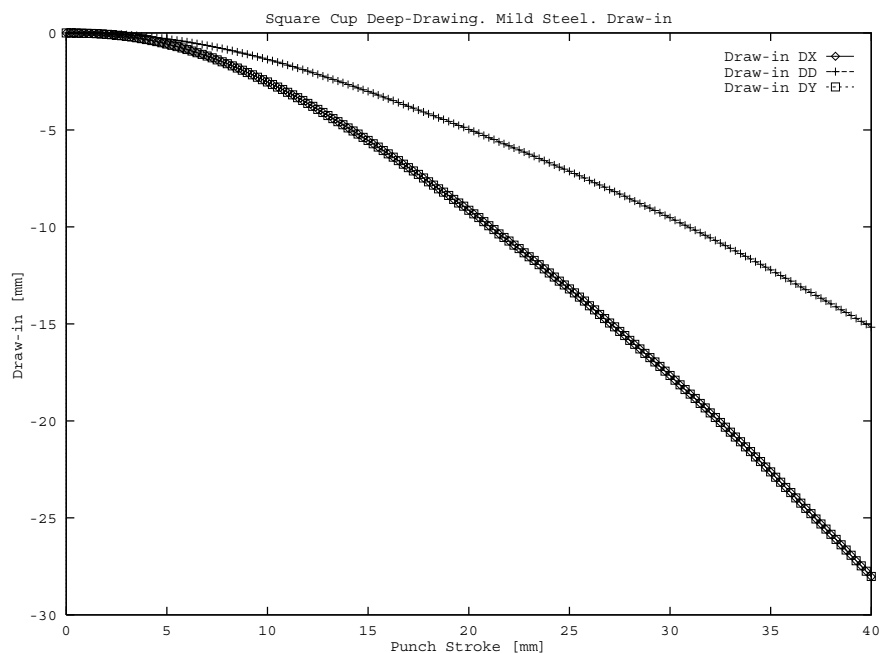
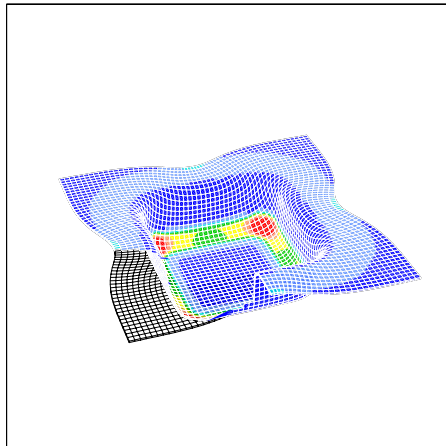
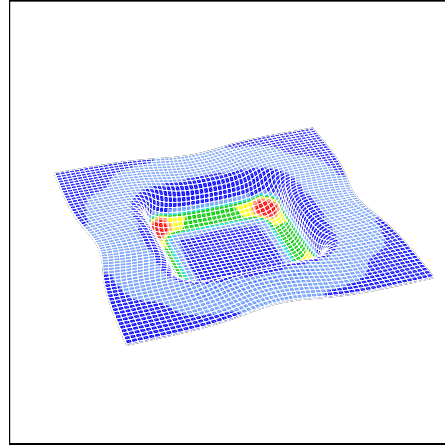
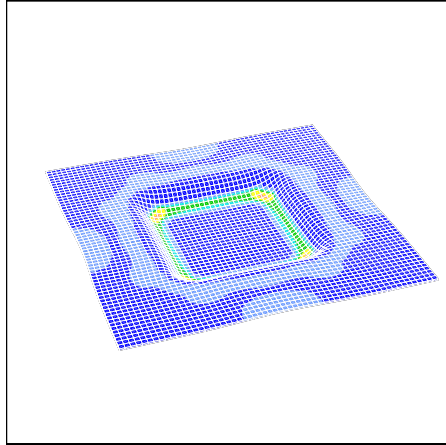


FIGURA 2.17 Embutición profunda de una chapa cuadrada. Evolución del desplazamiento horizontal en la esquina (DD) y en los puntos medios de los lados (DX y DY).

Large Deformation Impact-Contact Problems con Friction”, *Computers and Structures*, **37**, 319-331.

- [9] BELYTSCHKO, T. & M.O. NEAL [1991], “Contact-Impact by the Pinball Algorithm with Penalty and Lagrangian Methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **31**, (3), 547-572.
- [10] LAURSEN, T.A. [1992], “Formulation and Treatment of Frictional Contact Problems Using Finite Elements”, *Ph.D. Dissertation*, Stanford University, Division of Applied Mechanics, Report no. 92-6.
- [11] LAURSEN, T.A. & J.C. SIMO [1992], “Formulation and Regularization of Frictional Contact Problems for Lagrangian Finite Element Computations”, in *Proc. of The Third International Conference on Computational Plasticity: Fundamentals and Applications, COMPLAS III*, D.R.J. Owen, E. Onate & E. Hinton, eds., Pineridge Press, Swansea, pp. 395-407.
- [12] LAURSEN, T.A. & J.C. SIMO [1993], “A Continuum-Based Finite Element Formulation for the Implicit Solution of Multi-Body, Large Deformation Frictional Contact Problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **36**, 3451-3485.
- [13] AGELET DE SARACIBAR, C. & M. CHIUMENTI [1999], “On the Numerical Modeling of Frictional Wear Phenomena”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **177**, 401-426.
- [14] AGELET DE SARACIBAR, C. [1995], “Numerical Analysis of Frictional Contact Prob-



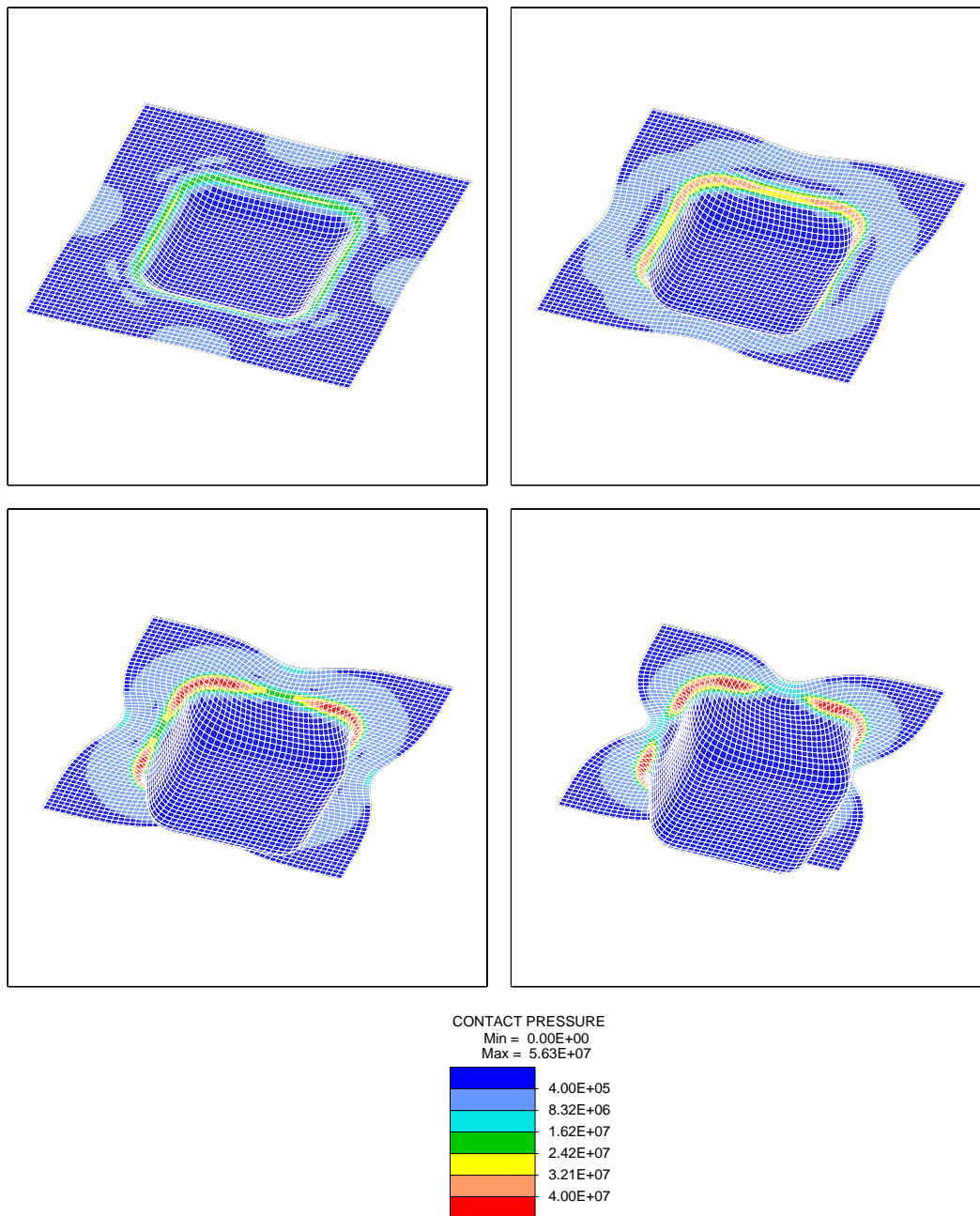


FIGURA 2.19 Embutición profunda de una chapa cuadrada. Distribución de la presión de contacto en la cara inferior de la chapa: (a) Paso=40, Desplazamiento del punzón=10 mm; (b) Paso=80, Desplazamiento del punzón=20 mm; (c) Paso=120, Desplazamiento del punzón=30 mm; (d) Paso=160, Desplazamiento del punzón=40 mm.

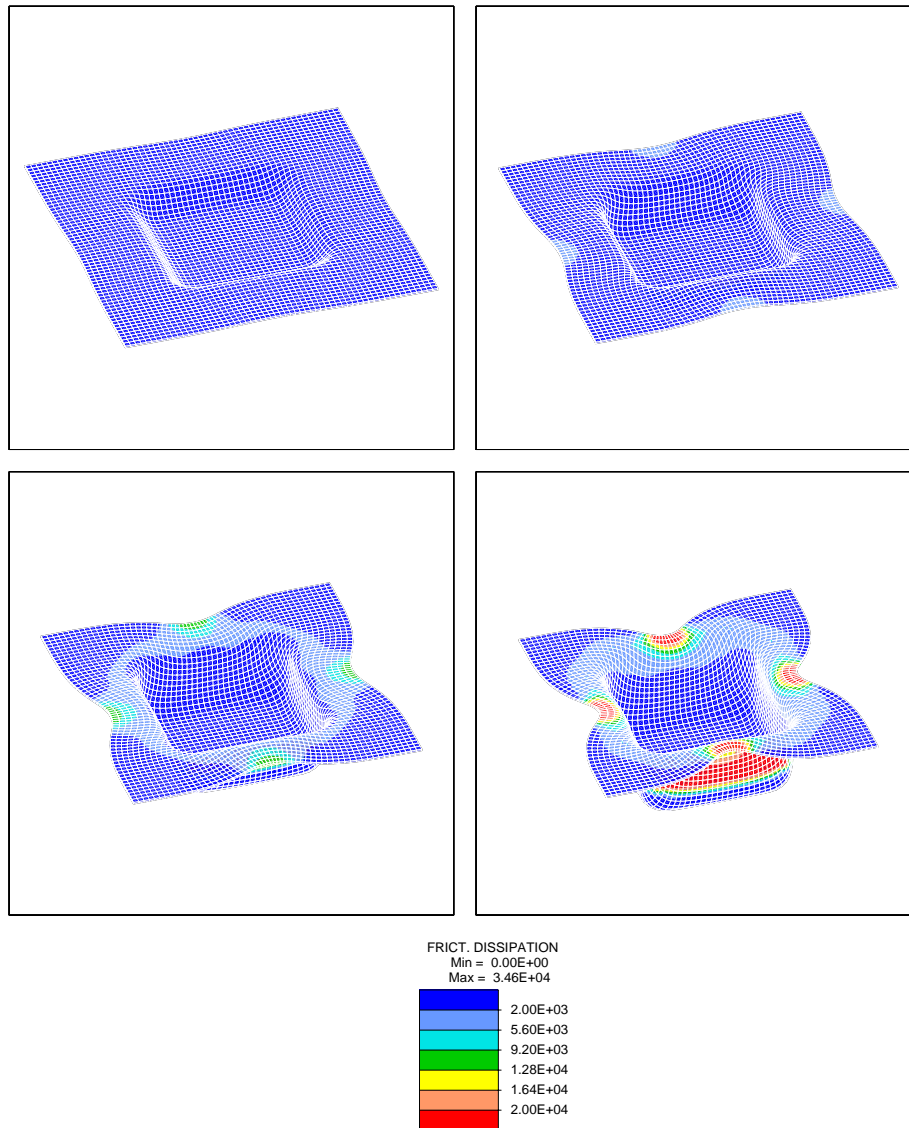


FIGURE 2.20 Embutición profunda de una chapa cuadrada. Distribución de la disipación friccional en la cara superior de la chapa: (a) Paso=40, Desplazamiento del punzón=10 mm; (b) Paso=80, Desplazamiento del punzón=20 mm; (c) Paso=120, Desplazamiento del punzón=30 mm; (d) Paso=160, Desplazamiento del punzón=40 mm.

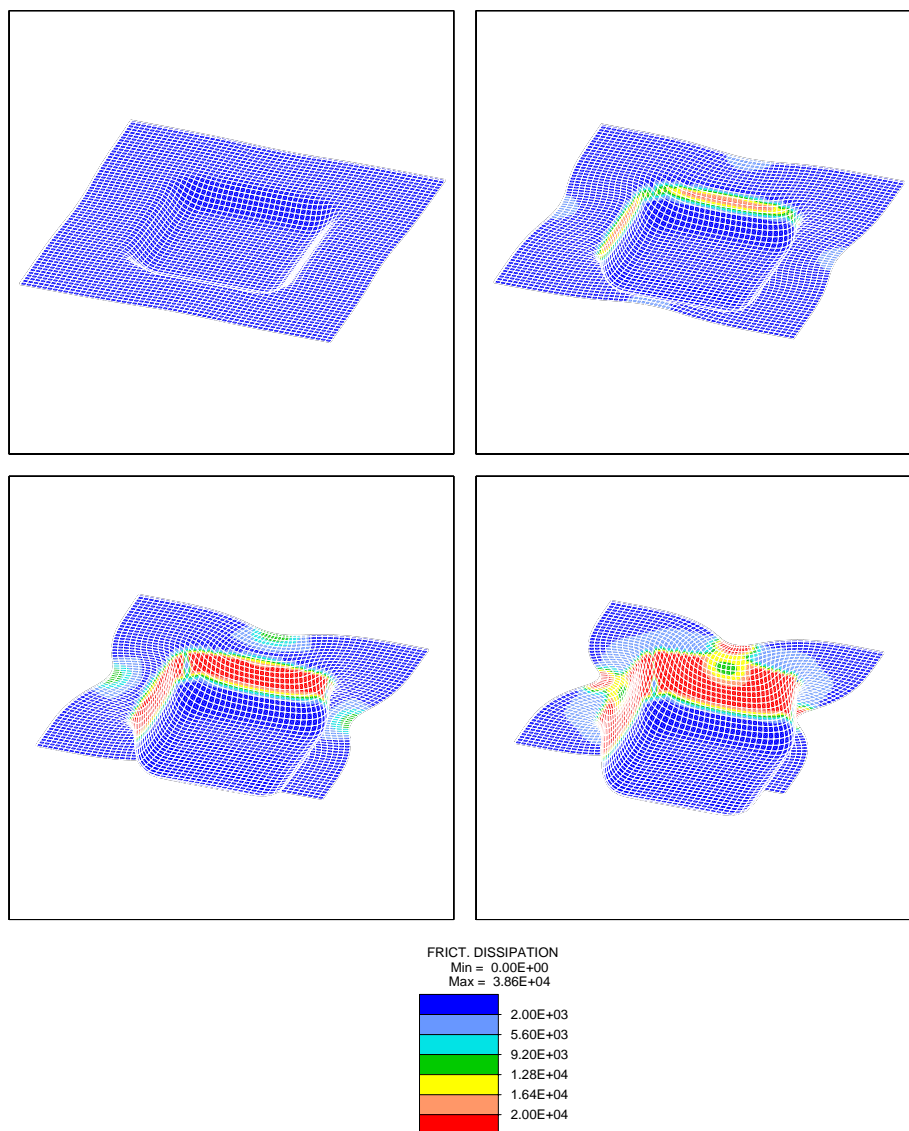


FIGURE 2.21 Embutición profunda de una chapa cuadrada. Distribución de la disipación friccional en la cara inferior de la chapa: (a) Paso=40, Desplazamiento del punzón=10 mm; (b) Paso=80, Desplazamiento del punzón=20 mm; (c) Paso=120, Desplazamiento del punzón=30 mm; (d) Paso=160, Desplazamiento del punzón=40 mm.



- lems”, in *Lecture notes of Short Course on Computational Techniques for Plasticity*, International Center for Numerical Methods in Engineering, Barcelona, Spain.
- [15] SIMO, J.C. & T.A. LAURSEN [1992], “An Augmented Lagrangian Treatment of Contact Problems Involving Friction”, *Computers and Structures*, **42**, 97-116.
- [16] LAURSEN, T.A. & J.C. SIMO [1993], “Algorithmic Symmetrization of Coulomb Frictional Problems Using Augmented Lagrangians”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **108**, 133-146.
- [17] LAURSEN, T.A. & S. GOVINDJEE [1994], “A Note on the Treatment of Frictionless Contact Between Non-smooth Surfaces in Fully Non-linear Problems”, *Communications in Applied Numerical Methods*, **10**, 869-878
- [18] WRIGGERS, P. & J.C. SIMO [1985], “A Note on Tangent Stiffness for Fully Nonlinear Contact Problems”, *Communications in Applied Numerical Methods*, **1**, 199-203.
- [19] PARISCH, H. [1989], “A Consistent Tangent Stiffness Matrix for Three-Dimensional Non-Linear Contact Analysis”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **28**, 1803-1812.
- [20] WRIGGERS, P. [1987], “On Consistent Tangent Matrices for Frictional Contact Problems”, in *Proceedings of the International Conference NUMETA '87*, J. Middleton & G.N. Pande, eds., Nijhoff, Dordrecht.
- [21] SIMO, J.C. & T.J.R. HUGHES [1994], “Elastoplasticity and Viscoplasticity: Computational Aspects”, to be published by Springer-Verlag, Berlin.
- [22] SIMO, J.C. [1994], “Numerical Analysis Aspects of Plasticity”, in *Handbook of Numerical Analysis, Volume IV*, P.G. Ciarlet and J.J. Lions, eds., North-Holland.
- [23] GIANNAKOPOULOS, A.E. [1989], “The Return Mapping Method for the Integration of Friction Constitutive Relations”, *Computers and Structures*, **32**, 157-167.
- [24] ZIENKIEWICZ, O.C. & R.L. TAYLOR [1991], *The Finite Element Method, 4th ed., Volume 2: Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-linearity*, McGraw-Hill, London.

## Apéndice A

### Un Nuevo Algoritmo de Integración Friccional para Problemas con Grandes Deslizamientos y Deformaciones Finitas

En este Apéndice se presenta un algoritmo de integración temporal friccional adecuado para problemas de contacto multi-cuerpo con grandes deformaciones y grandes deslizamientos.

(A) *Notación.* Sea  $2 \leq n_{dim} \leq 3$  la dimensión del espacio y  $I := [0, T] \subset \mathbb{R}_+$  el intervalo temporal de interés. Consideremos los conjuntos abiertos  $\Omega^{(1)} \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$  y  $\Omega^{(2)} \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$  con contornos regulares  $\partial\Omega^{(1)}$  and  $\partial\Omega^{(2)}$  y sean los conjuntos cerrados  $\bar{\Omega}^{(1)} := \Omega^{(1)} \cup \partial\Omega^{(1)}$  y  $\bar{\Omega}^{(2)} := \Omega^{(2)} \cup \partial\Omega^{(2)}$ , las configuraciones de referencia de dos medios continuos  $\mathcal{B}^{(1)}$  y  $\mathcal{B}^{(2)}$ , con partículas materiales etiquetadas como  $\mathbf{X} \in \bar{\Omega}^{(1)}$  y  $\mathbf{Y} \in \bar{\Omega}^{(2)}$ , respectivamente.

Sea  $\varphi^{(i)} : \bar{\Omega}^{(i)} \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$  la aplicación que preserva la orientación y define el movimiento del cuerpo  $\mathcal{B}^{(i)}$ , con velocidades materiales  $\mathbf{V}^{(i)} := \partial_t \varphi^{(i)}$  y gradiente de deformación  $\mathbf{F}^{(i)} := D\varphi^{(i)}$ . Para cada instante de tiempo  $t \in I$ , la aplicación  $t \in I \mapsto \varphi_t^{(i)} := \varphi^{(i)}(\cdot, t)$  representa una familia de configuraciones indexada por el tiempo  $t$ , que hace corresponder a cada cuerpo  $\mathcal{B}^{(i)}$  su posición actual  $\mathcal{S}_t^{(i)} : \varphi_t^{(i)}(\mathcal{B}^{(i)}) \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$ .

Denominaremos *superficie de contacto*  $\Gamma^{(i)} \subset \partial\Omega^{(i)}$  la parte del contorno del cuerpo  $\mathcal{B}^{(i)}$  tal que incluye a todos los puntos materiales susceptibles de entrar en contacto en algún instante de tiempo  $t \in I$ . La configuración actual de la superficie de contacto  $\Gamma^{(i)}$  es  $\gamma^{(i)} := \varphi_t^{(i)}(\Gamma^{(i)})$ .

En lo que sigue a continuación, vamos a prestar especial atención a las partículas situadas sobre estas superficies y que denominaremos como  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  e  $\mathbf{Y} \in \Gamma^{(2)}$ . Las posiciones de estas partículas en las configuraciones actuales serán  $\mathbf{x} = \varphi_t^{(1)}(\mathbf{X}) \in \gamma^{(1)}$  y  $\mathbf{y} = \varphi_t^{(2)}(\mathbf{Y}) \in \gamma^{(2)}$ .

Utilizando una notación estándar en la mecánica del contacto, asignaremos a cada una de las superficies de un par de superficies en contacto, los papeles de superficie *slave* y superficie *master*. En particular, denominaremos como  $\Gamma^{(1)}$  la superficie *slave* y  $\Gamma^{(2)}$  la superficie *master*. Adicionalmente, denominaremos partículas *slave* y partículas *master* a las partículas de las superficies *slave* y superficie *master*, respectivamente. Utilizando esta notación, vamos a imponer la restricción que las partículas *slave* no puedan penetrar la superficie *master*, para cualquier instante de tiempo  $t \in I$ . Nótese, que a pesar de que en el continuo la asignación de estos papeles a las superficies es irrelevante, no ocurre lo mismo para el problema discretizado en el espacio, siendo importante en este último caso los papeles que juegan cada una de las superficies del par de superficies considerado.

(B) *Parametrización de las superficies de contacto.* Sea  $\mathcal{A}^{(i)} \subset \mathbb{R}^{n_{dim}-1}$  el dominio

paramétrico de referencia para la superficie de contacto del cuerpo  $\mathcal{B}^{(i)}$ . Introducimos una parametrización de la superficie de contacto para cada cuerpo  $\mathcal{B}^{(i)}$  por medio de una familia de aplicaciones indexadas por el tiempo y que preservan la orientación, definidas como  $\psi_t^{(i)} : \mathcal{A}^{(i)} \subset \mathbb{R}^{n_{dim}-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$  tal que  $\Gamma^{(i)} := \psi_0^{(i)}(\mathcal{A}^{(i)})$  y  $\gamma^{(i)} := \psi_t^{(i)}(\mathcal{A}^{(i)})$ . Utilizando la regla de composición de aplicaciones, podemos escribir que  $\psi_t^{(i)} = \varphi_t^{(i)} \circ \psi_0^{(i)}$ . En lo sucesivo, supondremos que estas parametrizaciones tienen las condiciones necesarias de regularidad. Adicionalmente, consideraremos problemas tridimensionales y por lo tanto supondremos que  $n_{dim} = 3$ . La particularización para el caso  $n_{dim} = 2$  resulta trivial una vez considerado el caso tridimensional.

A continuación, y teniendo en cuenta los papeles de superficie "slave" y "master" asignados a cada una de las superficies, vamos a considerar la parametrización de la superficie "master". Utilizando la parametrización de las superficies de contacto introducida anteriormente, consideramos un punto  $\boldsymbol{\xi} := (\xi^1, \xi^2) \in \mathcal{A}^{(2)}$  del dominio paramétrico de referencia, tal que:

$$\mathbf{Y} := \psi_0^{(2)}(\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{y} := \psi_t^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) \quad (\text{A.1})$$

Asociada a cada partícula "master"  $\mathbf{Y} \in \Gamma^{(2)}$  definimos las bases convectivas de superficie  $\mathbf{E}_\alpha(\boldsymbol{\xi})$  y  $\mathbf{e}_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ ,  $\alpha = 1, 2$  en la configuración de referencia y en la actual, respectivamente, como

$$\mathbf{E}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) := \psi_{0,\alpha}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{e}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) := \psi_{t,\alpha}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) \quad (\text{A.2})$$

donde  $(\cdot)_{,\alpha}$  indica derivada parcial con respecto a  $\xi^\alpha$ .

(C) *Restricciones normales de contacto.* Sea  $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{X}, t) \in \gamma^{(2)}$  el punto de la configuración actual de la superficie "master"  $\Gamma^{(2)}$ , que es el punto-más-cercano de la posición actual de la partícula "slave"  $\mathbf{X}$ , definido como:

$$\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t) := \arg \min_{\mathbf{Y} \in \Gamma^{(2)}} \{ \|\varphi_t^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi_t^{(2)}(\mathbf{Y})\| \} \quad (\text{A.3})$$

$$\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{X}, t) := \varphi_t^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}) \quad (\text{A.4})$$

y sea  $g_N(\mathbf{X}, t)$  la función distancia definida para cada partícula "slave"  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  y para cada instante de tiempo  $t \in I$  como

$$g_N(\mathbf{X}, t) := -[\varphi_t^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi_t^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t))] \cdot \boldsymbol{\nu} \quad (\text{A.5})$$

donde  $\boldsymbol{\nu} : \gamma^{(2)} \rightarrow S^2$  es la normal unitaria a la configuración actual de la superficie "master" en el punto-más-cercano  $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{X}, t) \in \gamma^{(2)}$ .

Sea  $\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{X}, t)$  el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff y  $\mathbf{N}^{(1)}(\mathbf{X})$  la normal unitaria a la superficie "slave"  $\Gamma^{(1)}$  en la configuración de referencia. El vector de tracciones nominales de contacto friccional en  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  es:

$$\mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{N}^{(1)}(\mathbf{X}) \quad (\text{A.6})$$

y la presión nominal de contacto  $t_N(\mathbf{X}, t)$  viene definida como:

$$t_N(\mathbf{X}, t) := \mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X}, t) \cdot \boldsymbol{\nu} \quad (\text{A.7})$$

Con la notación precedente, las restricciones normales de contacto de impenetrabilidad, no-adhesión y persistencia de contacto, pueden escribirse en forma de condiciones complementarias de Kuhn-Tucker, como:

$$\begin{aligned} t_N \geq 0, \quad g_N \leq 0, \quad t_N g_N &= 0 \\ t_N \dot{g}_N &= 0 \quad \text{if } t_N > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

(D) *Bases convectivas, tensores métricos y de curvatura en el punto-más-cercano.* Asociado al punto de proyección más-cercano dado por (A.3) – (A.4), para algún punto  $\bar{\xi} := (\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2) \in \mathcal{A}^{(2)}$  del dominio paramétrico de referencia, tendremos que

$$\bar{Y}(\mathbf{X}, t) := \psi_0^{(2)}(\bar{\xi}(\mathbf{X}, t)), \quad \bar{y}(\mathbf{X}, t) := \psi_t^{(2)}(\bar{\xi}(\mathbf{X}, t)) \quad (\text{A.9})$$

Para la partícula "master"  $\bar{Y}(\mathbf{X}, t) \in \Gamma^{(2)}$  definimos las bases convectivas de superficie en las configuraciones de referencia y actual, respectivamente, como:

$$\tau_\alpha^{ref}(\mathbf{X}, t) := \mathbf{E}_\alpha(\bar{\xi}(\mathbf{X}, t)), \quad \tau_\alpha(\mathbf{X}, t) := \mathbf{e}_\alpha(\bar{\xi}(\mathbf{X}, t)) \quad (\text{A.10})$$

Adicionalmente, las normales unitarias exteriores  $\nu^{ref} \in S^2$  y  $\nu \in S^2$  en la partícula "master"  $\bar{Y}(\mathbf{X}, t)$  en las configuraciones de referencia y actual, respectivamente, pueden definirse como:

$$\nu^{ref} := \frac{\tau_1^{ref} \times \tau_2^{ref}}{\|\tau_1^{ref} \times \tau_2^{ref}\|}, \quad \nu := \frac{\tau_1 \times \tau_2}{\|\tau_1 \times \tau_2\|} \quad (\text{A.11})$$

Los vectores  $\tau_\alpha^{ref} \in T_{\nu^{ref}} S^2$  y  $\tau_\alpha \in T_\nu S^2$ ,  $\alpha = 1, 2$  definen los espacios tangentes  $T_{\nu^{ref}} S^2$  y  $T_\nu S^2$  a la esfera unitaria  $S^2$  en los puntos  $\nu^{ref}$  y  $\nu$ , respectivamente. El espacio tangente a la esfera unitaria  $S^2$  en  $\nu \in S^2$  se define como:

$$T_\nu S^2 := \{\delta\nu \in \mathbb{R}^{dim} : \delta\nu \cdot \nu = 0\} \quad (\text{A.12})$$

Los vectores de las bases convectivas de superficie  $\tau_\alpha^{ref}$  y  $\tau_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , aumentados con las normales unitarias exteriores  $\nu^{ref}$  y  $\nu$ , forman unos sistemas de vectores ortonormales que definen unos sistemas de ejes locales para la partícula "master" en las configuraciones de referencia y actual, respectivamente.

Los vectores de la base convectiva de superficie  $\tau_\alpha^{ref}$  y  $\tau_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , inducen unas métricas de superficie o primeras formas fundamentales en las configuraciones de referencia y actual, respectivamente, definidas como:

$$M_{\alpha\beta} := \tau_\alpha^{ref} \cdot \tau_\beta^{ref}, \quad m_{\alpha\beta} := \tau_\alpha \cdot \tau_\beta \quad (\text{A.13})$$

Las métricas inversas de superficie  $M^{\alpha\beta}$  y  $m^{\alpha\beta}$  pueden definirse en la forma habitual. Adicionalmente, podemos definir bases duales de superficie en las configuraciones de referencia y actual, respectivamente, como:

$$\tau_{ref}^\alpha := M^{\alpha\beta} \tau_\beta^{ref}, \quad \tau^\alpha := m^{\alpha\beta} \tau_\beta \quad (\text{A.14})$$

La variación de las bases convectivas de superficie a lo largo de las coordenadas convectivas, junto con las normales unitarias, inducen las segundas formas fundamentales o curvaturas de las superficies en las configuraciones de referencia y actual, respectivamente, definidas como:

$$\kappa_{\alpha\beta}^{ref} := \mathbf{E}_{\alpha,\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \boldsymbol{\nu}^{ref}, \quad \kappa_{\alpha\beta} := \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \boldsymbol{\nu} \quad (\text{A.15})$$

(E) *Problema friccional de evolución con restricciones.* La velocidad relativa de deslizamiento en la configuración de referencia  $\mathbf{v}_T^{ref}$  se define como:

$$\mathbf{v}_T^{ref}(\mathbf{X}, t) := \dot{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t) \quad (\text{A.16})$$

La velocidad relativa de deslizamiento en la configuración actual  $\mathbf{v}_T$  se define como el "push-forward" de la velocidad relativa de deslizamiento convectiva y puede expresarse como:

$$\mathbf{v}_T(\mathbf{X}, t) := \mathbf{F}_t^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, t)) \cdot \mathbf{v}_T^{ref}(\mathbf{X}, t) \quad (\text{A.17})$$

Definimos la tracción friccional nominal tangente  $\mathbf{t}_T(\mathbf{X}, t)$  como (menos) la proyección de la tracción nominal de contacto friccional  $\mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X}, t)$  en la dirección de la normal unitaria  $\boldsymbol{\nu}$ , como

$$\mathbf{t}_T(\mathbf{X}, t) := -\mathbb{P}_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X}, t) = t_T^\alpha(\mathbf{X}, t) \boldsymbol{\tau}_\alpha \quad (\text{A.18})$$

Con la notación precedente la regla de deslizamiento y las restricciones friccionales de contacto pueden escribirse en forma de condiciones complementarias de Kuhn-Tucker como:

$$\mathbf{v}_T^b(\mathbf{X}, t) = \gamma \mathbf{p}_T^b \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\mathbf{t}_T^b, t_N) &\leq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad \gamma \bar{\Phi}(\mathbf{t}_T^b, t_N) = 0 \\ \gamma \dot{\bar{\Phi}}(\mathbf{t}_T^b, t_N) &= 0 \quad \text{if} \quad \bar{\Phi}(\mathbf{t}_T^b, t_N) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

donde  $\bar{\Phi}(\mathbf{t}_T^b, t_N)$  es la función de deslizamiento que define los estados de tracciones nominales admisibles,  $\mathbf{p}_T^b$  es el gradiente del potencial de deslizamiento, habitualmente definido como la función de deslizamiento a presión constante,  $\gamma$  es el módulo de la velocidad de deslizamiento y  $(\cdot)^b$  hace referencia a la forma-uno asociada al vector correspondiente.

(F) *Problema regularizado.* La regularización por penalización de (A.8) y (A.19) define el siguiente problema de evolución friccional regularizado. Las restricciones normales de contacto regularizadas se definen como:

$$t_N(\mathbf{X}, t) := \epsilon_N \langle g_N(\mathbf{X}, t) \rangle \quad (\text{A.21})$$

donde  $\langle \cdot \rangle$  es el operador de Macauley y representa la parte positiva del operando. El problema friccional regularizado puede escribirse en la forma

$$\mathbf{v}_T^b(\mathbf{X}, t) = \gamma \mathbf{p}_T^b + \frac{1}{\epsilon_T} \mathcal{L}_{v_T} \mathbf{t}_T^b \quad (\text{A.22})$$

sujeto a las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N) &\leq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad \gamma \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N) = 0 \\ \gamma \dot{\Phi}(\mathbf{t}_T^b, t_N) &= 0 \quad \text{if } \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

donde  $\mathcal{L}_{v_T} \mathbf{t}_T^b$  es la derivada de Lie de la tracción friccional tangente a lo largo del flujo inducido por la velocidad relativa de deslizamiento  $\mathbf{v}_T$ , definida como

$$\mathcal{L}_{v_T} \mathbf{t}_T^b := \dot{t}_T \alpha \boldsymbol{\tau}^\alpha \quad (\text{A.24})$$

En el contexto de los algoritmos de formula producto, podemos considerar una partición del operador friccional del problema de evolución con restricciones, considerando un *estado de prueba*, definido congelando la respuesta plástica o irreversible del deslizamiento, es decir haciendo  $\gamma = 0$ , resultando

Problema 1: *Estado de prueba*

Problema 2: *Algoritmo de retorno*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{v_T} \mathbf{t}_T^b := \epsilon_T \mathbf{v}_T^b \\ \text{sin restricciones} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{v_T} \mathbf{t}_T^b := -\epsilon_T \gamma \partial_{\mathbf{t}_T^b} \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N, \alpha) \\ \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N) \leq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad \gamma \Phi(\mathbf{t}_T^b, t_N) = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{A.25})$$

(G) *Algoritmo de integración temporal friccional*. Una descripción paso-a-paso del nuevo algoritmo de integración temporal friccional, adecuado para grandes deslizamientos, es la siguiente:

**Paso 1. Condiciones iniciales: Base de datos.** Consideramos como condiciones iniciales dadas en el instante  $t_n$ , la tracción nominal friccional en la configuración de referencia  $\mathbf{t}_{T_n}^{bref}$ , las coordenadas isoparamétricas del punto proyección más-cercano  $\bar{\boldsymbol{\xi}}_n$  en el último paso de tiempo convergido y el elemento  $\Gamma_n^e$  de la superficie que contiene a este punto.

Utilizando las aplicaciones  $\boldsymbol{\psi}_0^{(i)} : \mathcal{A}^{(i)} \subset \mathbb{R}^{n_{dim}-1} \rightarrow \Gamma^{(2)} \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$  y  $\boldsymbol{\psi}_t^{(i)} : \mathcal{A}^{(i)} \subset \mathbb{R}^{n_{dim}-1} \rightarrow \gamma^{(2)} \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$  definidas anteriormente, las posiciones del punto proyección más-cercano en la configuración de referencia y actual en el instante  $t_n$  pueden escribirse como  $\bar{\mathbf{Y}}_n := \boldsymbol{\psi}_0^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_n)$  y  $\bar{\mathbf{y}}_n := \boldsymbol{\psi}_n^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_n)$ , respectivamente.

Consideremos un movimiento prescrito de los cuerpos, tal que en el instante  $t_{n+1}$  las coordenadas isoparamétricas del punto proyección más-cercano son  $\bar{\boldsymbol{\xi}}_{n+1}$ , siendo  $\Gamma_{n+1}^e$  el elemento de la superficie "master" que contiene este punto en este instante de tiempo. Las posiciones de este punto en las configuraciones de referencia y actual pueden entonces escribirse como  $\bar{\mathbf{Y}}_{n+1} := \boldsymbol{\psi}_0^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_{n+1})$  y  $\bar{\mathbf{y}}_{n+1} := \boldsymbol{\psi}_{n+1}^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_{n+1})$ , respectivamente.

**Paso 2. Definición de los sistemas ortonormales locales en  $\bar{\boldsymbol{\xi}}_n$  y  $\bar{\boldsymbol{\xi}}_{n+1}$  en la configuración de referencia.** Definimos dos conjuntos de vectores base ortonormales en los puntos inicial  $\bar{\boldsymbol{\xi}}_n$  y final  $\bar{\boldsymbol{\xi}}_{n+1}$  en la configuración de referencia. Los vectores que constituyen estas bases ortonormales son  $\{\boldsymbol{\nu}_n^{ref}, \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha_n}^{ref}\}$  y  $\{\boldsymbol{\nu}_{n+1}^{ref}, \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha_{n+1}}^{ref}\}$ , con  $\alpha = 1, 2$ . Aquí,  $\boldsymbol{\nu}_n^{ref} \in S^2$  y  $\boldsymbol{\nu}_{n+1}^{ref} \in S^2$  son las normales unitarias exteriores a los elementos  $\Gamma_n^e$  y  $\Gamma_{n+1}^e$  de la superficie "master" en los puntos  $\bar{\boldsymbol{\xi}}_n$  y  $\bar{\boldsymbol{\xi}}_{n+1}$ , respectivamente, en la configuración de referencia.

Los vectores tangentes unitarios  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n}^{ref} \in T_{\nu^{ref}} S^2$  y  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}}^{ref} \in T_{\nu^{ref}} S^2$  se definen tal como se indicó en el apartado 2 de este capítulo, de manera que son tangentes a la trayectoria de deslizamiento supuesta en el modelo. Nótese que no es necesario considerar restricciones del tipo  $\Gamma_n^e \equiv \Gamma_{n+1}^e$  o  $\bar{\Gamma}_n^e \cap \bar{\Gamma}_{n+1}^e \neq \emptyset$ .

**Paso 3.** *Tracción friccional de prueba en la configuración de referencia.* La tracción friccional en la configuración de referencia puede calcularse mediante un algoritmo de dos pasos:

- i. *Transporte paralelo* de la tracción friccional  $\mathbf{t}_{T_n}^{b^{ref}}$  en la configuración de referencia en el instante  $t_n$ , a lo largo de la trayectoria de deslizamiento desde el punto  $\bar{\boldsymbol{\xi}}_n$  al  $\bar{\boldsymbol{\xi}}_{n+1}$  en la configuración de referencia.
- ii. Contribución al deslizamiento de prueba, utilizando un algoritmo de Backward-Euler.

El algoritmo de dos-pasos conduce a la siguiente expresión

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b^{ref \ trial}} := \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{t}_{T_n}^{b^{ref}} + \epsilon_T \Gamma^{slip} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}}^{ref} \quad (\text{A.26})$$

donde  $\Gamma^{slip}$  es el deslizamiento en la configuración de referencia calculado tal como se mostró en el apartado 2 de este capítulo, y  $\bar{\mathbf{A}} \in SO(3)$  es el *operador ortogonal de transporte paralelo* definido como:

$$\bar{\mathbf{A}} := \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha_{n+1}}^{ref} \otimes \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha_n}^{ref}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (\text{A.27})$$

donde  $SO(3)$  es el grupo ortogonal especial definido como

$$SO(3) := \{\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \text{ y } \det[\mathbf{A}] = +1\} \quad (\text{A.28})$$

**Paso 4.** *"Push-forward" a la configuración actual.* Una vez que se ha calculado la tracción nominal de fricción en el punto  $\bar{\boldsymbol{\xi}}_{n+1}$  en la configuración de referencia, realizamos la operación tensorial de "push-forward" a la configuración actual, definida como

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b^{trial}} := \boldsymbol{\varphi}_*^{(2)}(\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b^{ref \ trial}}) = (\boldsymbol{\tau}_{n+1}^\alpha \otimes \boldsymbol{\tau}_{\alpha_{n+1}}^{ref}) \cdot \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b^{ref \ trial}}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (\text{A.29})$$

donde  $\boldsymbol{\tau}_{n+1}^\alpha$  y  $\boldsymbol{\tau}_{\alpha_{n+1}}^{ref}$ ,  $\alpha = 1, 2$  son, respectivamente, la base recíproca convectiva en el punto  $\bar{\boldsymbol{\xi}}_{n+1}$  en la configuración actual, y la base natural convectiva en el punto  $\bar{\boldsymbol{\xi}}_{n+1}$  en la configuración de referencia, respectivamente.

**Step 5.** *Proyección en el disco de Coulomb. Algoritmo de retorno friccional.* La tracción friccional de prueba calculada en la configuración actual debe de proyectarse sobre el disco de Coulomb utilizando un algoritmo de retorno. Esta proyección, involucra el cálculo de la función de deslizamiento de prueba, definida como

$$\Phi_{n+1}^{trial} := \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b^{trial}}\| - \mu t_{N_{n+1}} \quad (\text{A.30})$$

Si  $\Phi_{n+1}^{trial} \leq 0$  entonces la tracción friccional de prueba satisface las restricciones friccionales y la proyección es simplemente

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b := \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b^{trial}} \quad (\text{A.31})$$

Tabla A.1. Algoritmo de integración temporal friccional en deformación finita.

1. *Condiciones iniciales en el instante  $t_n$ : Base de datos.*

Dados  $\{t_{T_n}^{bref}, \bar{\xi}_n, \nu_n^{ref}\}$ , la tracción friccional, coordenadas isoparamétricas y normal unitaria exterior en la configuración de referencia (en los puntos de cuadratura de la superficie "slave") y para valores prescritos  $\{\bar{\xi}_{n+1}, \nu_{n+1}\}$

Definimos:

$$\begin{aligned}\bar{Y}_n &:= \psi_0^{(2)}(\bar{\xi}_n), & \bar{Y}_{n+1} &:= \psi_0^{(2)}(\bar{\xi}_{n+1}) \\ \bar{y}_n &:= \psi_n^{(2)}(\bar{\xi}_n), & \bar{y}_{n+1} &:= \psi_{n+1}^{(2)}(\bar{\xi}_{n+1})\end{aligned}$$

2. *Definición de las bases ortonormales locales asociadas a  $\bar{Y}_n$  y  $\bar{Y}_{n+1}$ .*

Definimos

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_{2_n}^{ref} &:= \frac{\nu_n^{ref} \times m^{ref}}{\|\nu_n^{ref} \times m^{ref}\|}, & \hat{\tau}_{1_n}^{ref} &:= \hat{\tau}_{2_n}^{ref} \times \nu_n^{ref} \\ \hat{\tau}_{2_{n+1}}^{ref} &:= \frac{\nu_{n+1}^{ref} \times m^{ref}}{\|\nu_{n+1}^{ref} \times m^{ref}\|}, & \hat{\tau}_{1_{n+1}}^{ref} &:= \hat{\tau}_{2_{n+1}}^{ref} \times \nu_{n+1}^{ref}\end{aligned}$$

donde

$$d^{ref} = \bar{Y}_{n+1} - \bar{Y}_n, \quad d^{ref} = \|d^{ref}\|, \quad m^{ref} = d^{ref}/d^{ref}$$

3. *Parametrización de la trayectoria de deslizamiento y cálculo del deslizamiento.*

i. *Parametrización de la trayectoria de deslizamiento.*

$$\begin{aligned}\zeta \in [-1, +1] \mapsto \bar{Y}(\zeta) &:= \mathcal{H}^1(\zeta) \bar{Y}_n + \frac{d}{2 \cos \Theta_n} \bar{\mathcal{H}}^1(\zeta) \hat{\tau}_{1_n}^{ref} \\ &+ \mathcal{H}^2(\zeta) \bar{Y}_{n+1} + \frac{d}{2 \cos \Theta_{n+1}} \bar{\mathcal{H}}^2(\zeta) \hat{\tau}_{1_{n+1}}^{ref}\end{aligned}$$

donde

$$\cos \Theta_n := \hat{\tau}_{1_n}^{ref} \cdot m^{ref}, \quad \cos \Theta_{n+1} := \hat{\tau}_{1_{n+1}}^{ref} \cdot m^{ref}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1(\zeta) &= (2 + \zeta)(1 - \zeta)^2/4, & \bar{\mathcal{H}}^1(\zeta) &= (1 + \zeta)(1 - \zeta)^2/4 \\ \mathcal{H}^2(\zeta) &= (2 - \zeta)(1 + \zeta)^2/4, & \bar{\mathcal{H}}^2(\zeta) &= -(1 - \zeta)(1 + \zeta)^2/4\end{aligned}$$

ii. *Aplicación tangente.*

$$\begin{aligned}\zeta \in [-1, +1] \mapsto \bar{Y}_T(\zeta) &:= \nabla \mathcal{H}^1(\zeta) \bar{Y}_n + \frac{d}{2 \cos \Theta_n} \nabla \bar{\mathcal{H}}^1(\zeta) \hat{\tau}_{1_n}^{ref} \\ &+ \nabla \mathcal{H}^2(\zeta) \bar{Y}_{n+1} + \frac{d}{2 \cos \Theta_{n+1}} \nabla \bar{\mathcal{H}}^2(\zeta) \hat{\tau}_{1_{n+1}}^{ref}\end{aligned}$$



Tabla A.1. Algoritmo de integración temporal en deformación finita.

iii. Deslizamiento.

$$\Gamma^{slip} = \sum_{I=1}^{N_{int}} W_I \|\bar{\mathbf{Y}}_T(\zeta_I)\|$$

4. *Estado de prueba.*

i. Tracción friccional de prueba en la configuración de referencia.

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b\,ref\,trial} := \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{t}_{T_n}^{b\,ref} + \epsilon_T \Gamma^{slip} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}}^{ref}$$

donde

$$\bar{\mathbf{A}} := \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha_{n+1}}^{ref} \otimes \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha_n}^{ref}, \quad \alpha = 1, 2$$

ii. "Push-forward" a la configuración actual.

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b\,trial} := \boldsymbol{\varphi}_*^{(2)}(\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b\,ref\,trial}) = (\boldsymbol{\tau}_{n+1}^\alpha \otimes \boldsymbol{\tau}_{\alpha_{n+1}}^{ref}) \cdot \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b\,ref\,trial}, \quad \alpha = 1, 2$$

iii. Función de deslizamiento de prueba.

$$\Phi_{n+1}^{trial} := \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b\,trial}\| - \mu t_{N_{n+1}}$$

5. *Retorno friccional: Proyección en el disco de Coulomb.*

i. Retorno friccional.

$$t_{T_{n+1}\alpha} = \begin{cases} t_{T_{n+1}\alpha}^{trial} & \text{if } \Phi_{n+1}^{trial} \leq 0 \text{ (stick)} \\ \mu t_{N_{n+1}} p_{T_{n+1}\alpha}^{trial} & \text{otherwise (slip)} \end{cases}$$

donde

$$\mathbf{p}_{T_{n+1}}^{b\,trial} = \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b\,trial} / \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b\,trial}\|$$

en caso contrario, debe realizarse una proyección de los valores de prueba calculados sobre el disco de Coulomb. Para el caso más sencillo, la ley de Coulomb clásica, el algoritmo de retorno se reduce a un cálculo directo de la tracción friccional tangente, dada por:

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b := \mu t_{N_{n+1}} \mathbf{p}_{T_{n+1}}^{b\,trial} \quad (\text{A.32})$$

donde  $\mathbf{p}_{T_{n+1}}^{b\,trial} = \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b\,trial} / \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b\,trial}\|$ .

**Paso 6.** "Pull-back" a la configuración de referencia y almacenamiento en la base de datos. Finalmente, la tracción friccional en la configuración de referencia se obtiene como el "pull-back" de la tracción friccional que se ha calculado en la configuración actual, definida como:

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{bref} := \boldsymbol{\varphi}^{(2)*}(\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b) = (\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\alpha ref} \otimes \boldsymbol{\tau}_{\alpha_{n+1}}) \cdot \mathbf{t}_{T_{n+1}}^b, \quad \alpha = 1, 2 \quad (A.33)$$

La tracción friccional en la configuración de referencia se almacena en la base de datos a utilizar, una vez obtenida la convergencia, como condiciones iniciales en el siguiente paso de tiempo.

Un resumen del algoritmo de integración temporal en deformación finita se muestra en la Tabla A.1.

## Apéndice B

### Linealización del algoritmo

El algoritmo de integración temporal friccional en deformación finita descrito en el Apéndice A, puede ser linealizado exactamente, permitiendo calcular el operador friccional algorítmico tangente.

La linealización se realiza mediante la aplicación sistemática de la derivada direccional. Teniendo en cuenta que los cálculos necesarios para la linealización son bastante largos y elaborados, vamos a incluir aquí únicamente las expresiones claves, centrándonos en la linealización de la tracción friccional de prueba  $t_{T_{\alpha n+1}}^{trial}$  que conduce al operador no simétrico de componentes  $\Xi_{\alpha\beta}$ , y que constituye el punto principal del algoritmo.

Calculando la derivada direccional de (A.31) – (A.32) la linealización del nuevo algoritmo de integración temporal puede escribirse como:

$$\Delta t_{T_{n+1}\alpha} = \begin{cases} \Delta t_{T_{n+1}\alpha}^{trial} \text{ (stick)} \\ \mu \Delta t_{N_{n+1}} p_{T_{n+1}\alpha}^{trial} + \mu t_{N_{n+1}} \Delta p_{T_{n+1}\alpha}^{trial} \text{ (slip)} \end{cases} \quad (B.1)$$

con

$$\begin{aligned} \Delta t_{N_{n+1}} &:= \epsilon_N H(g_{N_{n+1}}) \Delta g_{N_{n+1}} \\ \Delta g_{N_{n+1}} &:= -[\Delta \varphi^{(1)h} - \Delta \varphi^{(2)h} \circ \psi_0^{(2)}(\bar{\xi}_{n+1})] \cdot \nu \\ \Delta t_{T_{n+1}\alpha}^{trial} &:= \Xi_{\alpha\beta} \Delta \bar{\xi}_{n+1}^\beta \end{aligned} \quad (B.2a)$$

$$\Delta p_{T_{n+1}\alpha}^{trial} := (\delta_\alpha^\beta - \pi_\alpha^\beta) \frac{\Delta t_{T_{n+1}\beta}^{trial}}{\|t_{T_{n+1}}^{trial}\|} + \pi_\alpha^\beta p_{T_{n+1}}^{trial} \cdot [\Delta \varphi_{,\beta}^{(2)h}(\bar{\xi}) + e_{\beta,\gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}_{n+1}^\gamma] \quad (B.2b)$$

$$\Delta \bar{\xi}_{n+1}^\alpha := A^{\alpha\beta} \{[\Delta \varphi^{(1)h} - \Delta \varphi^{(2)h}(\bar{\xi}_{n+1})] \cdot \tau_\beta - g_{N_{n+1}} \nu \cdot [\Delta \varphi_{,\beta}^{(2)h}(\bar{\xi}_{n+1})]\}$$

donde  $H(\cdot)$  es la función de Heaviside,  $\pi_\alpha^\beta$  se define como

$$\pi_\alpha^\beta = p_{T_{n+1}\alpha}^{trial} p_{T_{n+1}}^{trial\beta} \quad (B.3)$$

y  $A^{\alpha\beta}$  son las componentes de la matriz inversa  $\mathbf{A}^{-1} = [A^{\alpha\beta}]$ , donde

$$A_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta} + g_N \kappa_{\alpha\beta} \quad (B.4)$$

El operador no simétrico  $\Xi_{\alpha\beta}$  aparece a partir de la linealización de la tracción friccional de prueba dada por (A.29) y puede escribirse como:

$$\Xi_{\alpha\beta} := \bar{\Xi}_{\alpha\beta} + \epsilon_T \Gamma_{,\beta}^{slip} \hat{\tau}_{1_{n+1}}^{ref} \cdot \tau_{\alpha_{n+1}}^{ref} \quad (B.5)$$

donde el operador no simétrico  $\bar{\Xi}_{\alpha\beta}$  aparece a partir de la linealización del transporte paralelo de  $\mathbf{t}_{T_n}^{ref}$  desde  $\bar{\xi}_n$  a  $\bar{\xi}_{n+1}$  y puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \bar{\Xi}_{\alpha\beta} &:= (\mathbf{t}_{T_n}^{ref} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\gamma_n, \beta}^{ref}) (\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\gamma_{n+1}}^{ref} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\alpha_{n+1}}^{ref}) \\ &+ (\mathbf{t}_{T_n}^{ref} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\gamma_n}^{ref}) [\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\gamma_{n+1}, \beta}^{ref} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\alpha_{n+1}}^{ref} + \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\gamma_{n+1}}^{ref} \cdot \mathbf{E}_{\alpha, \beta}(\bar{\xi}_{n+1})] \\ &+ \epsilon_T \Gamma^{slip} [\hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}, \beta}^{ref} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\alpha_{n+1}}^{ref} + \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}}^{ref} \cdot \mathbf{E}_{\alpha, \beta}(\bar{\xi}_{n+1})] \end{aligned} \quad (B.6)$$

El cálculo del término  $\Gamma_{\beta}^{slip}$ , asociado a la variación del deslizamiento, es bastante elaborado y vamos a mostrar a continuación una descripción detallada del mismo.

(A) *Objetos geométricos básicos y cinemática del deslizamiento.* Sean  $\bar{\mathbf{Y}}_n \in \Gamma^{(2)}$  y  $\bar{\mathbf{Y}}_{n+1} \in \Gamma^{(2)}$  las posiciones en la configuración de referencia de las proyecciones de una típica partícula "slave"  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  sobre las superficies  $\gamma_n^{(2)} := \boldsymbol{\varphi}_n^{(2)}(\Gamma^{(2)})$  y  $\gamma_{n+1}^{(2)} := \boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{(2)}(\Gamma^{(2)})$ , respectivamente.

Consideremos una parametrización local de la superficie de contacto tal que  $\bar{\mathbf{Y}}_n := \boldsymbol{\psi}_0^{e_n(2)}(\bar{\xi}_n)$  y  $\bar{\mathbf{Y}}_{n+1} := \boldsymbol{\psi}_0^{e_{n+1}(2)}(\bar{\xi}_{n+1})$ , donde, en general,  $\boldsymbol{\psi}_0^{e_n(2)}$  y  $\boldsymbol{\psi}_0^{e_{n+1}(2)}$  no coincidirán, es decir las posiciones en la configuración de referencia  $\bar{\mathbf{Y}}_n$  y  $\bar{\mathbf{Y}}_{n+1}$  no estarán, en general, sobre el mismo elemento de superficie de la superficie discretizada y por lo tanto estará descrita utilizando diferentes parametrizaciones locales.

Con la notación establecida, definimos el vector de distancia Euclídea en la configuración de referencia  $\mathbf{d}^{ref}$ , con norma Euclídea  $d^{ref}$  y vector unitario unitario  $\mathbf{m}^{ref}$ , como:

$$\mathbf{d}^{ref} := \bar{\mathbf{Y}}_{n+1} - \bar{\mathbf{Y}}_n, \quad d^{ref} := \|\mathbf{d}^{ref}\|, \quad \mathbf{m}^{ref} := \mathbf{d}^{ref}/d^{ref} \quad (B.7)$$

Siguiendo los pasos descritos en el apartado 2, construimos dos conjuntos de bases ortonormales asociados a cada una de las partículas  $\bar{\mathbf{Y}}_n$  y  $\bar{\mathbf{Y}}_{n+1}$ , respectivamente, de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n} &:= \frac{\boldsymbol{\nu}_n^{ref} \times \mathbf{m}^{ref}}{\|\boldsymbol{\nu}_n^{ref} \times \mathbf{m}^{ref}\|}, & \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n} &:= \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n} \times \boldsymbol{\nu}_n^{ref} \\ \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_{n+1}} &:= \frac{\boldsymbol{\nu}_{n+1}^{ref} \times \mathbf{m}^{ref}}{\|\boldsymbol{\nu}_{n+1}^{ref} \times \mathbf{m}^{ref}\|}, & \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}} &:= \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_{n+1}} \times \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{ref} \end{aligned} \quad (B.8)$$

En la expresión anterior  $\boldsymbol{\nu}_n^{ref}$  y  $\boldsymbol{\nu}_{n+1}^{ref}$  son las normales unitarias a la superficie "master" en la configuración de referencia, en los puntos  $\bar{\mathbf{Y}}_n$  y  $\bar{\mathbf{Y}}_{n+1}$ , respectivamente. Utilizando las bases convectivas  $\{\boldsymbol{\tau}_{1_n}^{ref}, \boldsymbol{\tau}_{2_n}^{ref}\}$  y  $\{\boldsymbol{\tau}_{1_{n+1}}^{ref}, \boldsymbol{\tau}_{2_{n+1}}^{ref}\}$  inducidas por las aplicaciones tangentes  $D\boldsymbol{\psi}_0^{e_n(2)}$  y  $D\boldsymbol{\psi}_0^{e_{n+1}(2)}$  las normales unitarias a los puntos  $\bar{\mathbf{Y}}_n$  y  $\bar{\mathbf{Y}}_{n+1}$  pueden expresarse como,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu}_n^{ref} &:= (\boldsymbol{\tau}_{1_n}^{ref} \times \boldsymbol{\tau}_{2_n}^{ref}) / \|\boldsymbol{\tau}_{1_n}^{ref} \times \boldsymbol{\tau}_{2_n}^{ref}\| \\ \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{ref} &:= (\boldsymbol{\tau}_{1_{n+1}}^{ref} \times \boldsymbol{\tau}_{2_{n+1}}^{ref}) / \|\boldsymbol{\tau}_{1_{n+1}}^{ref} \times \boldsymbol{\tau}_{2_{n+1}}^{ref}\| \end{aligned} \quad (B.9)$$

(B) *Trayectoria de deslizamiento y cálculo de la longitud de deslizamiento.* Utilizando los sistemas de bases ortonormales definidas anteriormente, podemos construir una trayectoria de deslizamiento a partir de los vectores tangentes unitarios  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n}$  y  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}}$  definidos en

los puntos inicial y final  $\bar{\mathbf{Y}}_n$  y  $\bar{\mathbf{Y}}_{n+1}$ , respectivamente. La curva de deslizamiento se define mediante la introducción de las funciones de forma de Hermite:

$$\begin{aligned} \zeta \in [-1, +1] \mapsto \bar{\mathbf{Y}}(\zeta) := & \mathcal{H}^1(\zeta) \bar{\mathbf{Y}}_n + \frac{d^{ref}}{2 \cos \Theta_n} \bar{\mathcal{H}}^1(\zeta) \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n} \\ & + \mathcal{H}^2(\zeta) \bar{\mathbf{Y}}_{n+1} + \frac{d^{ref}}{2 \cos \Theta_{n+1}} \bar{\mathcal{H}}^2(\zeta) \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}} \end{aligned} \quad (B.10)$$

donde  $\cos \Theta_n := \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n} \cdot \mathbf{m}^{ref}$  y  $\cos \Theta_{n+1} := \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}} \cdot \mathbf{m}^{ref}$  y las funciones de forma de Hermite vienen dadas por (2.29).

La curva de deslizamiento definida por (B.10) puede verse como una aproximación a la geodésica que pasa por los puntos  $\bar{\mathbf{Y}}_n$  y  $\bar{\mathbf{Y}}_{n+1}$  de la superficie "master"  $\Gamma^{(2)h}$ .

La aplicación tangente a la curva definida por (B.10) viene dada por:

$$\begin{aligned} \zeta \in [-1, +1] \mapsto \bar{\mathbf{Y}}_T(\zeta) := & \nabla \mathcal{H}^1(\zeta) \mathbf{Y}_n + \frac{d^{ref}}{2 \cos \Theta_n} \nabla \bar{\mathcal{H}}^1(\zeta) \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n} \\ & + \nabla \mathcal{H}^2(\zeta) \mathbf{Y}_{n+1} + \frac{d^{ref}}{2 \cos \Theta_{n+1}} \nabla \bar{\mathcal{H}}^2(\zeta) \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}} \end{aligned} \quad (B.11)$$

donde  $\nabla \mathcal{H}^A(\zeta) := d\mathcal{H}^A(\zeta)/d\zeta$  y  $\nabla \bar{\mathcal{H}}^A(\zeta) := d\bar{\mathcal{H}}^A(\zeta)/d\zeta$  for  $A = 1, 2$ . Con el objeto de simplificar la notación en los desarrollos siguientes vamos a introducir las siguientes definiciones:

$$\bar{\mathbf{Y}}_{T_n} := \frac{d^{ref}}{2 \cos \Theta_n}, \quad \bar{\mathbf{Y}}_{T_{n+1}} := \frac{d^{ref}}{2 \cos \Theta_{n+1}} \quad (B.12)$$

Nótese que estas definiciones son tales que  $\bar{\mathbf{Y}}_{T_n} = \|\bar{\mathbf{Y}}_T(\zeta = -1)\| =: \|\bar{\mathbf{Y}}_{T_n}\|$  y  $\bar{\mathbf{Y}}_{T_{n+1}} = \|\bar{\mathbf{Y}}_T(\zeta = 1)\| =: \|\bar{\mathbf{Y}}_{T_{n+1}}\|$ .

Utilizando la aplicación tangente definida anteriormente, la longitud de la curva de deslizamiento puede expresarse como:

$$\Gamma^{slip} = \int_{-1}^1 \|\bar{\mathbf{Y}}_T(\zeta)\| d\zeta \quad (B.13)$$

Esta integral puede evaluarse numéricamente utilizando una regla de integración, obteniéndose una expresión de la forma

$$\Gamma^{slip} = \sum_{I=1}^{N_{int}} W_I \|\bar{\mathbf{Y}}_T(\zeta_I)\| \quad (B.14)$$

donde  $\zeta_I \in [-1, +1]$  son las posiciones de los puntos de integración en el dominio isoparamétrico  $[-1, +1]$ ,  $W_I$  son los pesos de la regla de integración y  $N_{int}$  es el número de puntos de integración utilizado en la regla de integración numérica.

(C) *Linealización de la cinemática.* La linealización del algoritmo de integración temporal presentado en el Apéndice A requiere la linealización de los vectores de las bases ortonormales locales definidos anteriormente.

i. *Linealización del vector distancia (normalizado) en la configuración de referencia.* La linealización del vector de distancia Euclídea  $\mathbf{d}^{ref}$ , de la distancia  $d^{ref}$  y del vector distancia normalizado  $\mathbf{m}^{ref}$ , puede expresarse en función de la variación de las coordenadas isoparamétricas  $\delta\bar{\xi}^\alpha$  como

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{d}^{ref} &:= \mathbf{d}_{,\alpha}^{ref} \delta\bar{\xi}^\alpha \\ \delta d^{ref} &:= d_{,\alpha}^{ref} \delta\bar{\xi}^\alpha \\ \delta\mathbf{m}^{ref} &:= \mathbf{m}_{,\alpha}^{ref} \delta\bar{\xi}^\alpha\end{aligned}\tag{B.15}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{,\alpha}^{ref} &:= \boldsymbol{\tau}_{\alpha_{n+1}}^{ref} \\ d_{,\alpha}^{ref} &:= \mathbf{m}^{ref} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\alpha_{n+1}}^{ref} \\ \mathbf{m}_{,\alpha}^{ref} &:= \frac{1}{d^{ref}} \mathbb{P}_{m^{ref}}[\boldsymbol{\tau}_{\alpha_{n+1}}^{ref}]\end{aligned}\tag{B.16}$$

Aquí  $\mathbb{P}_{m^{ref}}[\bullet]$  es el operador de proyección definido como

$$\mathbb{P}_{m^{ref}}[\bullet] := (1 - \mathbf{m}^{ref} \otimes \mathbf{m}^{ref}) \cdot [\bullet]\tag{B.17}$$

ii. *Linealización de la base ortonormal local asociada al punto  $\bar{\mathbf{Y}}_n$ .* La variación linealizada de la base ortonormal  $\{\hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n}, \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n}, \boldsymbol{\nu}_n^{ref}\}$  asociada al punto  $\bar{\mathbf{Y}}_n$  en la configuración de referencia, puede escribirse como

$$\begin{aligned}\delta\hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n} &:= \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n,\alpha} \delta\bar{\xi}^\alpha \\ \delta\hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n} &:= \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n,\alpha} \delta\bar{\xi}^\alpha \\ \delta\boldsymbol{\nu}_n^{ref} &:= \boldsymbol{\nu}_{n,\alpha}^{ref} \delta\bar{\xi}^\alpha\end{aligned}\tag{B.18}$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n,\alpha} &:= \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n,\alpha} \times \boldsymbol{\nu}_n^{ref} \\ \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n,\alpha} &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{\nu}_n^{ref} \times \mathbf{m}_{,\alpha}^{ref}\|} \mathbb{P}_{\hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n}}[\boldsymbol{\nu}_n^{ref} \times \mathbf{m}_{,\alpha}^{ref}] \\ \boldsymbol{\nu}_{n,\alpha}^{ref} &:= 0\end{aligned}\tag{B.19}$$

Aquí el operador de proyección  $\mathbb{P}_{\hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n}}[\bullet]$  se define como

$$\mathbb{P}_{\hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n}}[\bullet] := (1 - \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n} \otimes \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n}) \cdot [\bullet]\tag{B.20}$$

iii. *Linealización de la base ortonormal local asociada al punto  $\bar{\mathbf{Y}}_{n+1}$ .* La variación linealizada de la base ortonormal  $\{\hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_{n+1}}, \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{ref}\}$  asociada al punto  $\bar{\mathbf{Y}}_{n+1}$  en la configuración de referencia, puede escribirse como

$$\begin{aligned}\delta\hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}} &:= \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1},\alpha} \delta\bar{\xi}^\alpha \\ \delta\hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_{n+1}} &:= \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_{n+1},\alpha} \delta\bar{\xi}^\alpha \\ \delta\boldsymbol{\nu}_{n+1}^{ref} &:= \boldsymbol{\nu}_{n+1,\alpha}^{ref} \delta\bar{\xi}^\alpha\end{aligned}\tag{B.21}$$

donde

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1},\alpha} &:= \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_{n+1},\alpha} \times \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{ref} + \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_{n+1}} \times \boldsymbol{\nu}_{n+1,\alpha}^{ref} \\
\hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_{n+1},\alpha} &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{\nu}_{n+1}^{ref} \times \mathbf{m}^{ref}\|} \mathbb{P}_{\hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_{n+1}}} [\boldsymbol{\nu}_{n+1,\alpha}^{ref} \times \mathbf{m}^{ref} + \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{ref} \times \mathbf{m}_{,\alpha}^{ref}] \\
\boldsymbol{\nu}_{n+1,\alpha}^{ref} &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}_{1_{n+1}}^{ref} \times \boldsymbol{\tau}_{2_{n+1}}^{ref}\|} \mathbb{P}_{\boldsymbol{\nu}_{n+1}^{ref}} [\mathbf{E}_{1,\alpha}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_{n+1}) \times \boldsymbol{\tau}_{2_{n+1}}^{ref} + \boldsymbol{\tau}_{1_{n+1}}^{ref} \times \mathbf{E}_{2,\alpha}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_{n+1})]
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Aquí los operadores de proyección  $\mathbb{P}_{\hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_{n+1}}}[\bullet]$  y  $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\nu}_{n+1}^{ref}}[\bullet]$  se definen como

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n}}[\bullet] &:= (1 - \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n} \otimes \hat{\boldsymbol{\tau}}_{2_n}) \cdot [\bullet] \\
\mathbb{P}_{\boldsymbol{\nu}_{n+1}^{ref}}[\bullet] &:= (1 - \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{ref} \otimes \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{ref}) \cdot [\bullet]
\end{aligned} \tag{B.23}$$

**iv.** *Linealización de la longitud de deslizamiento.* La variación linealizada de la longitud de la curva de deslizamiento dada por (B.14) puede escribirse como:

$$\delta \Gamma^{slip} := \Gamma_{,\alpha}^{slip} \delta \bar{\xi}^\alpha \tag{B.24}$$

donde

$$\Gamma_{,\alpha}^{slip} := \sum_{I=1}^{N_{int}} W_I \frac{\bar{\mathbf{Y}}_T(\zeta_I)}{\|\bar{\mathbf{Y}}_T(\zeta_I)\|} \cdot \bar{\mathbf{Y}}_{T,\alpha}(\zeta_I) \tag{B.25}$$

Aquí  $\bar{\mathbf{Y}}_{T,\alpha}(\zeta_I)$  puede calcularse a partir de (B.11) y puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{Y}}_{T,\alpha}(\zeta_I) &:= \nabla \mathcal{H}^2(\zeta_I) \boldsymbol{\tau}_{\alpha_{n+1}}^{ref} \\
&\quad + \nabla \bar{\mathcal{H}}^1(\zeta_I) [\bar{\mathbf{Y}}_{T_n,\alpha} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n} + \bar{\mathbf{Y}}_{T_n} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n,\alpha}] \\
&\quad + \nabla \bar{\mathcal{H}}^2(\zeta_I) [\bar{\mathbf{Y}}_{T_{n+1},\alpha} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}} + \bar{\mathbf{Y}}_{T_{n+1}} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1},\alpha}]
\end{aligned} \tag{B.26}$$

donde

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{Y}}_{T_n,\alpha} &:= \frac{d_{,\alpha}^{ref}}{2 \cos \Theta_n} - \frac{d^{ref}}{2 \cos^2 \Theta_n} [\cos \Theta_n]_{,\alpha} \\
\bar{\mathbf{Y}}_{T_{n+1},\alpha} &:= \frac{d_{,\alpha}^{ref}}{2 \cos \Theta_{n+1}} - \frac{d^{ref}}{2 \cos^2 \Theta_{n+1}} [\cos \Theta_{n+1}]_{,\alpha}
\end{aligned} \tag{B.27}$$

y

$$\begin{aligned}
[\cos \Theta_n]_{,\alpha} &:= \mathbf{m}_{,\alpha}^{ref} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n} + \mathbf{m}^{ref} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_n,\alpha} \\
[\cos \Theta_{n+1}]_{,\alpha} &:= \mathbf{m}_{,\alpha}^{ref} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1}} + \mathbf{m}^{ref} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_{1_{n+1},\alpha}
\end{aligned} \tag{B.28}$$





## CAPÍTULO 3

# SIMULACIÓN NUMÉRICA DE PROBLEMAS TERMOMECAÑICOS ACOPLADOS CON CAMBIO DE FASE

C. Agelet de Saracibar, M. Chiumenti, M. Cervera

En este capítulo se presenta una formulación numérica para problemas termoplásticos acoplados con cambio de fase y con contacto friccional. El objetivo final es obtener un modelo numérico preciso, eficiente y robusto, que permita la simulación numérica de problemas industriales, a gran escala, de solidificación. Algunos de los aspectos que se tratan en este capítulo son los siguientes. Para la solución del sistema no lineal de ecuaciones del problema acoplado, se utiliza un método de paso fraccionado. Este método surge como resultado de una partición del operador que define el sistema de ecuaciones diferenciales de gobierno del problema y conduce a un algoritmo de solución secuencial. Se consideran dos particiones posibles del operador de gobierno, la partición isotérmica y la partición isentrópica, y se analizan aspectos relacionados con la estabilidad de los algoritmos en cada caso. Para la partición isentrópica, se introduce una restricción adicional de diseño en la partición del operador, al requerir para la partición mecánica, no sólo que la entropía específica total permanezca constante, si no que además la entropía específica elástica y plástica deben permanecer constantes, así como la entropía elástica inducida por el cambio de fase y debida al calor latente

La formulación del modelo se obtiene de forma consistente dentro de un marco termodinámico. Se considera que, en general, todas las propiedades del material son función de la temperatura. El comportamiento constitutivo del material se ha definido a partir de una función de energía libre termoelástica con potencial termoplástico e incluyendo una contribución térmica debida al calor latente en el cambio de fase. La respuesta plástica se ha modelado utilizando una formulación de plasticidad J2 dependiente de la temperatura, que incluye endurecimiento plástico y ablandamiento térmico. El modelo constitutivo que se propone permite una transición continua entre el estado líquido inicial, el estado pastoso intermedio y el estado sólido final. En particular, permite utilizar un modelo desviador exclusivamente viscoso para el estado líquido inicial. La formulación del problema

acoplado incorpora un modelo termomecánico de contacto que se obtiene en un contexto termodinámico consistente. El modelo de contacto termomecánico se deriva a partir de una función de energía libre termoelástica de contacto que incorpora un potencial termofriccional de endurecimiento.

El modelo numérico se ha implementado en el código de elementos finitos COMET/VULCAN desarrollado en CIMNE. Se presentan distintos ejemplos numéricos representativos, así como la simulación de diversos problemas industriales de solidificación. Las simulaciones numéricas presentadas muestran el buen comportamiento del modelo computacional desarrollado.

### 3.1. INTRODUCCIÓN

La solución numérica de problemas acoplados utilizando métodos secuenciales, es un procedimiento eficiente de solución, en el cual el problema original se subdivide en una serie de subproblemas que se resuelven de forma secuencial. Para la solución de problemas termomecánicos acoplados, el método tradicional de solución secuencial utilizaba la partición natural del problema en una fase mecánica a temperatura constante, seguida de una fase térmica a configuración constante.

Tal como se muestra en SIMO & MIEHE [1991], estos algoritmos pueden enmarcarse dentro de la familia de algoritmos que surgen a partir de una partición del operador de gobierno de las ecuaciones de evolución, en una parte isotérmica y otra de conducción de calor a configuración fija. ARMERO & SIMO [1992A,1992B,1993] mostraron que la partición isotérmica del problema termoelástico acoplado no preservaba la contractividad del problema original, dando lugar, por lo tanto, a esquemas de solución que como mucho eran condicionalmente estables. En base a estas observaciones, ARMERO & SIMO [1992A,1992B,1993] propusieron una partición alternativa del problema acoplado, denominada partición isentrópica, en la cual el problema original se descomponía en un problema mecánico isentrópico, con conducción de calor a entropía total constante, seguido de un problema térmico a configuración fija. Los autores mostraron que una partición como la propuesta conducía a un algoritmo secuencial incondicionalmente estable, que preservaba las propiedades cruciales del problema acoplado. En este capítulo, vamos a extender y aplicar esta formulación para problemas acoplados termomecánicos con cambio de fase y contacto, con el objetivo final de obtener un modelo numérico preciso, eficiente y robusto, que permita la simulación de procesos industriales de solidificación.

El resto del contenido del capítulo es el siguiente. En el apartado 2 se presenta la formulación de las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico en el contexto de deformaciones infinitesimales. La formulación del modelo se realiza de forma consistente, en el marco de referencia de la termodinámica. Se postula una descomposición aditiva del tensor de deformaciones infinitesimales y de la entropía específica, en partes elástica y plástica. El comportamiento constitutivo se define a partir de una función de energía libre y se considera que las propiedades de los materiales son función de la temperatura. En la contribución térmica a la función de energía libre, se incorpora el calor latente asociado a los fenómenos de cambio de fase. La respuesta plástica se ha modelado mediante una formulación de plasticidad J2 que depende de la temperatura, que incluye endurecimiento no lineal debido a la deformación plástica y ablandamiento térmico lineal.

El modelo termofriccional de contacto se formula de manera consistente en el marco de la termodinámica. Siguiendo la formulación presentada por LAURSEN [1999], se introducen las variables de temperatura de contacto y entropía de contacto en la interfase de contacto entre los cuerpos, y se establece la ecuación de balance de energía en la interfase. Se considera, en particular, un modelo termofriccional de contacto que incluye endurecimiento friccional y acoplamiento térmico. Estableciendo una analogía con el modelo termomecánico acoplado presentado en el continuo, se considera también una descomposición aditiva del deslizamiento tangencial y de la entropía específica de contacto, en partes elástica y plástica. Se utiliza un modelo térmico de transmisión de calor que depende de la presión y de la temperatura de contacto. Adicionalmente, se considera un modelo de transmisión de calor que depende de la separación entre las superficies de contacto, cuando éstas pierden el contacto y se produce una separación entre ellas. El modelo incluye también la contribución del calor generado por disipación friccional. Este apartado concluye con la formulación variacional del problema termomecánico acoplado.

En el apartado 3, se presenta la formulación de los métodos de paso fraccionado que surgen de la partición del sistema de ecuaciones diferenciales de gobierno. Se consideran las particiones isentrópicas e isotérmicas y se discuten temas relacionados con la estabilidad. Un punto clave en la formulación de la partición isentrópica es el establecimiento de restricciones adicionales de diseño en la definición del problema mecánico. En este sentido, se establece que, no sólo la entropía específica total debe de permanecer constante, sino que además la entropía específica elástica y plástica, así como la parte elástica inducida por el cambio de fase debido al calor latente, deben de permanecer constantes en el problema mecánico. Estas restricciones adicionales motivan la definición de las variables y operadores no lineales considerados en la formulación que se presenta. En el contexto de la formulación discretizada en el tiempo, la descomposición aditiva de los operadores de gobierno conduce a un algoritmo de formula producto y a una solución secuencial del problema acoplado. Finalmente, se presenta la formulación variacional discretizada en el tiempo para las dos particiones consideradas.

En el apartado 4 se presentan algunas simulaciones numéricas de procesos de solidificación y en el apartado 5 se incluyen algunas observaciones y conclusiones finales. Se han incluido, además dos apéndices en los que se presentan una formulación paso-a-paso de los algoritmos de retorno termoplástico y termofriccional para los problemas mecánico y térmico, y para cada una de las particiones, isentrópica e isotérmica, consideradas.

## 3.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA TERMOMECÁNICO ACOPLADO

Se describe a continuación el sistema de ecuaciones diferenciales cuasi-lineales que gobiernan la evolución del problema termomecánico acoplado con cambios de fase y contacto termofriccional.

### 3.2.1. Ecuaciones de gobierno locales

Sea  $2 \leq n_{dim} \leq 3$  la dimensión del espacio y  $\mathbb{I} := [0, T] \subset \mathbb{R}_+$  el intervalo temporal de interés. Consideremos el conjunto abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$  con contorno regular  $\partial\Omega$  y sea  $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$  la configuración de referencia de un medio continuo  $\mathcal{B}$ .

Sea  $\varphi : \bar{\Omega} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$  la deformación del medio  $\mathcal{B}$ , con velocidad  $\mathbf{V} := \partial_t \varphi = \dot{\varphi}$ , gradiente de deformación  $\mathbf{F} := D\varphi$  y temperatura absoluta  $\Theta : \bar{\Omega} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ . Para cada instante de tiempo  $t \in \mathbb{I}$ , la aplicación  $t \in \mathbb{I} \mapsto \varphi_t := \varphi(\cdot, t)$  representa una familia de configuraciones indexada por el tiempo  $t$ , que hace corresponder a la configuración de referencia del medio  $\mathcal{B}$  su configuración actual  $\mathcal{S}_t : \varphi_t(\mathcal{B}) \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$ .

El sistema local de ecuaciones diferenciales de gobierno del problema termomecánico acoplado viene definido por las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y de energía, con las restricciones que establece el segundo principio de la termodinámica. Este sistema debe complementarse con unas ecuaciones constitutivas adecuadas. Adicionalmente, se deben establecer las condiciones de contorno e iniciales adecuadas y considerar las ecuaciones de balance en las superficies de contacto.

(A) *Forma local de las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y de energía.* La forma local de las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y de energía pueden escribirse como, véase por ejemplo, TRUESDELL & NOLL [1965],

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi} &= \mathbf{V} \\ \rho_0 \dot{\mathbf{V}} &= \text{DIV}[\boldsymbol{\sigma}] + \mathbf{B} \\ \Theta \dot{H} &= -\text{DIV}[\mathbf{Q}] + R + \mathcal{D}_{int} \end{aligned} \right\} \quad \text{en } \bar{\Omega} \times \mathbb{I} \quad (3.1)$$

donde  $\rho_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}_+$  es la densidad en la configuración de referencia,  $\mathbf{B}$  son las fuerzas másicas por unidad de volumen de referencia,  $\text{DIV}[\cdot]$  el operador divergencia con respecto a la configuración de referencia,  $\boldsymbol{\sigma}$  el tensor de tensiones de Cauchy,  $H$  la entropía específica por unidad de volumen de la configuración de referencia,  $\mathbf{Q}$  el flujo (nominal) de calor,  $R$  el término de fuente de calor por unidad de volumen en la configuración de referencia y  $\mathcal{D}_{int}$  la disipación interna por unidad de volumen de referencia. Formalmente, las ecuaciones de gobierno del problema cuasi-estático asociado pueden obtenerse haciendo simplemente  $\rho_0 = 0$  en (3.1).

(B) *Desigualdades de disipación.* La entropía específica  $H$  y el tensor de tensiones de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  se definen mediante relaciones constitutivas típicamente formuladas a partir de la energía interna  $E$ , y sujetas a la siguiente restricción en la disipación interna, véase por ejemplo, TRUESDELL & NOLL [1965],

$$\mathcal{D}_{int} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \Theta \dot{H} - \dot{E} \geq 0 \quad \text{en } \bar{\Omega} \times \mathbb{I} \quad (3.2)$$

donde  $\boldsymbol{\epsilon} := \text{SYMM}[\mathbf{F} - \mathbf{I}]$  es el tensor de deformaciones infinitesimales. Aquí  $\text{SYMM}[\cdot]$  es el operador simétrico y  $\mathbf{I}$  es el tensor unidad de segundo orden.

El flujo de calor  $\mathbf{Q}$  se define mediante ecuaciones constitutivas, la ley de Fourier, sujeta a la restricción impuesta por la disipación por conducción:

$$\mathcal{D}_{con} = -\frac{1}{\Theta} \text{GRAD}[\Theta] \cdot \mathbf{Q} \geq 0 \quad \text{en } \bar{\Omega} \times \mathbb{I} \quad (3.3)$$

(C) *Ecuaciones constitutivas termoplásticas.* Los modelos fenomenológicos basados en la micromecánica para plasticidad infinitesimal adoptan la hipótesis de la descomposición

aditiva de la deformación en una parte elástica y otra plástica. Los mecanismos de endurecimiento por deformación plástica que tienen lugar a nivel microestructural vienen caracterizados por un conjunto adicional de variables internas fenomenológicas denominadas colectivamente  $\xi_\alpha$ . Un comportamiento viscoelástico viene caracterizado mediante una variable adicional de deformación denominada  $\alpha$ . El objetivo para la introducción de este comportamiento viscoso es adoptar un modelo puramente viscoso desviador para muy altas temperaturas, es decir en estado líquido, e introducir efectos viscosos en el estado pastoso. En la teoría termomecánica acoplada, se adopta una descomposición aditiva de la entropía específica en una parte elástica y otra plástica, donde ésta puede verse como una variable interna adicional debida a la dislocación y movimientos a escala microestructural. Esta descomposición aditiva de la entropía específica fué adoptada inicialmente por ARMERO & SIMO [1993].

Las hipótesis establecidas motivan la siguiente descomposición aditiva del tensor de deformaciones infinitesimales  $\epsilon := \epsilon^e + \epsilon^p$  y de la entropía específica  $H := H^e + H^p$ , junto con el siguiente conjunto de variables internas  $\mathbf{G} := \{\epsilon^p, H^p, \xi_\alpha, \alpha\}$ .

La función de energía interna  $\hat{E}$  depende de la parte elástica del tensor de deformaciones  $\epsilon^e$ , las variables de endurecimiento isotrópico por deformación plástica  $\xi_\alpha$ , la parte elástica de la entropía específica  $H^e$  y el tensor de deformaciones viscosas  $\alpha$ , adoptando la forma funcional  $E = \hat{E}(\epsilon^e, H^e, \xi_\alpha, \alpha)$ . Substituyendo esta expresión en la expresión de la disipación interna, derivando respecto al tiempo, utilizando la regla de la cadena y la descomposición aditiva del tensor de deformaciones infinitesimales y de la entropía específica, un argumento estándar conduce a las siguientes ecuaciones constitutivas y a la expresión de la disipación reducida:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &:= \partial_{\epsilon^e} \hat{E}(\epsilon^e, H^e, \xi_\alpha, \alpha), \\ \Theta &:= \partial_{H^e} \hat{E}(\epsilon^e, H^e, \xi_\alpha, \alpha), \\ \beta^\alpha &:= -\partial_{\xi_\alpha} \hat{E}(\epsilon^e, H^e, \xi_\alpha, \alpha), \\ \beta &:= -\partial_\alpha \hat{E}(\epsilon^e, H^e, \xi_\alpha, \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{int} &:= \mathcal{D}_{mech} + \mathcal{D}_{ther} \geq 0, \quad \text{con} \\ \mathcal{D}_{mech} &:= \sigma : \dot{\epsilon}^p + \beta^\alpha \dot{\xi}_\alpha + \beta : \dot{\alpha} \geq 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{D}_{ther} := \Theta \dot{H}^p. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Utilizando la transformación de Legendre  $\Psi = E - \Theta H^e$ , la función de energía libre toma la forma funcional  $\Psi = \hat{\Psi}(\epsilon^e, \Theta, \xi_\alpha, \alpha)$ . Calculando la derivada temporal de la función de energía libre y aplicando la regla de la cadena, se pueden obtener las siguientes expresiones alternativas para las ecuaciones constitutivas

$$\left. \begin{aligned} \sigma &:= \partial_{\epsilon^e} \hat{\Psi}(\epsilon^e, \Theta, \xi_\alpha, \alpha), \\ H^e &:= -\partial_\Theta \hat{\Psi}(\epsilon^e, \Theta, \xi_\alpha, \alpha), \\ \beta^\alpha &:= -\partial_{\xi_\alpha} \hat{\Psi}(\epsilon^e, \Theta, \xi_\alpha, \alpha), \\ \beta &:= -\partial_\alpha \hat{\Psi}(\epsilon^e, \Theta, \xi_\alpha, \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Suponiendo una función de fluencia de la forma  $\Phi := \hat{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}, \beta^\alpha, \Theta)$ , las leyes de evolución de las variables internas plásticas, suponiendo flujo asociado, pueden escribirse como:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p &:= \gamma \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \hat{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}, \beta^\alpha, \Theta), \\ \dot{\xi}_\alpha &:= \gamma \partial_{\beta^\alpha} \hat{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}, \beta^\alpha, \Theta), \\ \dot{H}^p &:= \gamma \partial_{\Theta} \hat{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}, \beta^\alpha, \Theta), \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

junto con las condiciones complementarias de Kuhn-Tucker  $\gamma \geq 0, \Phi \leq 0, \gamma\Phi = 0$  y de consistencia plástica  $\gamma\dot{\Phi} = 0$  que deben de verificarse para un modelo plástico independiente del tiempo.

La ley de evolución para el tensor de deformaciones viscosas  $\boldsymbol{\alpha}$  se puede escribir como:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} := \frac{1}{\eta_v} \boldsymbol{\beta} \quad (3.8)$$

donde  $\eta_v$  es el parámetro de viscosidad elástica del material.

Adicionalmente, el flujo de calor está relacionado con la temperatura absoluta a través de la Ley de Fourier, que para el caso de material isotrópico puede escribirse como  $\mathbf{Q} = -K(\Theta) \text{GRAD}[\Theta]$ , donde  $K(\Theta)$  es la conductividad térmica del material.

**OBSERVACIÓN 3.1.** *Formas equivalentes de la ecuación de balance de energía.* Utilizando la descomposición aditiva de la entropía específica en una parte elástica y otra plástica, y la descomposición de la disipación interna en una parte mecánica y otra térmica, la ecuación reducida de balance de energía puede escribirse como:

$$\Theta \dot{H}^e = -\text{DIV}[\mathbf{Q}] + R + \mathcal{D}_{mech} \quad \text{en } \bar{\Omega} \times \mathbb{I}. \quad (3.9)$$

De forma alternativa, utilizando la ecuación constitutiva para la entropía elástica, calculando su derivada temporal y aplicando la regla de la cadena, la ecuación reducida de la energía en función de la temperatura puede escribirse como

$$c_0 \dot{\Theta} = -\text{DIV}[\mathbf{Q}] + R + \mathcal{D}_{mech} - \mathcal{H}^{ep} \quad \text{en } \bar{\Omega} \times \mathbb{I}, \quad (3.10)$$

con

$$\begin{aligned} c_0 &:= -\Theta \partial_{\Theta}^2 \hat{\Psi}(\boldsymbol{\epsilon}^e, \Theta, \xi_\alpha, \boldsymbol{\alpha}), \\ \mathcal{H}^{ep} &:= -\Theta [\partial_{\Theta}^2 \hat{\Psi}(\boldsymbol{\epsilon}^e, \Theta, \xi_\alpha, \boldsymbol{\alpha}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \partial_{\Theta \xi_\alpha}^2 \hat{\Psi}(\boldsymbol{\epsilon}^e, \Theta, \xi_\alpha, \boldsymbol{\alpha}) \cdot \dot{\xi}_\alpha + \partial_{\Theta \boldsymbol{\alpha}}^2 \hat{\Psi}(\boldsymbol{\epsilon}^e, \Theta, \xi_\alpha, \boldsymbol{\alpha}) : \dot{\boldsymbol{\alpha}}], \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde  $c_0$  es la capacidad calorífica en la configuración de referencia y  $\mathcal{H}^{ep}$  el término de acoplamiento elastoplástico. Utilizando las ecuaciones constitutivas (3.6) pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} c_0 &:= \Theta \partial_{\Theta} \hat{H}^e(\boldsymbol{\epsilon}^e, \Theta, \xi_\alpha, \boldsymbol{\alpha}), \\ \mathcal{H}^{ep} &:= -\Theta \partial_{\Theta} [\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathcal{D}_{mech}]. \quad \square \end{aligned} \quad (3.12)$$

**OBSERVACIÓN 3.2.** *Contribuciones térmicas de cambio de fase.* La función de energía libre para un modelo termomecánico acoplado con cambio de fase puede descomponerse

en unas contribuciones termoelástica  $\Psi_{te}$ , termoplástica  $\Psi_{tp}$ , térmica (exceptuando cambio de fase)  $\Psi_t$  y térmica de cambio de fase  $\Psi_{tpc}$ , en la forma  $\Psi = \hat{\Psi}_{te}(\epsilon^e, \Theta, \alpha) + \hat{\Psi}_{tp}(\Theta, \xi_\alpha) + \hat{\Psi}_t(\Theta) + \hat{\Psi}_{tpc}(\Theta)$ .

Agrupando todas estas contribuciones excepto la de cambio de fase en una parte termoelastoplástica  $\hat{\Psi}_{tep}(\epsilon^e, \Theta, \xi_\alpha, \alpha)$  y estableciendo  $H^e := H_{tep}^e + H_{tpc}^e$  con  $H_{tep}^e := -\partial_\Theta \hat{\Psi}_{tep}(\epsilon^e, \Theta, \xi_\alpha, \alpha)$  y  $H_{tpc}^e := -\partial_\Theta \hat{\Psi}_{tpc}(\Theta)$ , la ecuación reducida de balance de energía en función de la entropía, puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \Theta \dot{H}_{tep}^e &= -\text{DIV}[\mathbf{Q}] + R + \mathcal{D}_{mech} - \mathcal{H}^{pc} \quad \text{con} \\ \mathcal{H}^{pc} &:= \dot{L} = \Theta \dot{H}_{tpc}^e = -\Theta \partial_{\Theta\Theta}^2 \hat{\Psi}_{tpc}(\Theta) \cdot \dot{\Theta}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde  $\mathcal{H}^{pc} := \dot{L}$  es el calor debido al cambio de fase dado por la variación temporal de calor latente  $L$  por unidad de volumen de referencia.

De manera similar, la capacidad calorífica de referencia puede descomponerse en la forma  $c_0 = c_{0tep} + c_{0tpc}$  donde  $c_{0tep} = -\Theta \partial_{\Theta\Theta}^2 \hat{\Psi}_{tep}(\epsilon^e, \Theta, \xi_\alpha, \alpha)$  y  $c_{0tpc} = -\Theta \partial_{\Theta\Theta}^2 \hat{\Psi}_{tpc}(\Theta)$ , y la ecuación de balance de energía en función de la temperatura puede escribirse como:

$$\begin{aligned} c_{0tep} \dot{\Theta} &= -\text{DIV}[\mathbf{Q}] + R + \mathcal{D}_{mech} - \mathcal{H}^{ep} - \mathcal{H}^{pc} \quad \text{con} \\ \mathcal{H}^{pc} &:= \dot{L} = c_{0tpc} \dot{\Theta} = -\Theta \partial_{\Theta\Theta}^2 \hat{\Psi}_{tpc}(\Theta) \cdot \dot{\Theta}. \quad \square \end{aligned} \quad (3.14)$$

**OBSERVACIÓN 3.3.** *Modelo mecánico de la fase líquida.* El modelo constitutivo presentado incluye respuesta termoviscosa, termoelástica y termoplástica. En particular, un modelo constitutivo puramente viscoso puede utilizarse en la fase líquida inicial, mientras que un modelo termoelastoplástico, con o sin efectos viscosos, puede utilizarse en la fase sólida final del proceso de solidificación. Un modelo de transición continua puede utilizarse en la fase pastosa intermedia, en función de la fracción líquida  $f_l(\Theta) \in [0, 1]$  y la fracción sólida  $f_s(\Theta) \in [0, 1]$ , de manera que  $f_l(\Theta) = 1 - f_s(\Theta)$ . Un modelo continuo, desde un comportamiento puramente viscoso desviador en la fase líquida hasta un comportamiento puramente elástico en la fase sólida, puede obtenerse dividiendo por  $f_s(\Theta)$  el módulo de deformación transversal y dividiendo por  $f_l(\Theta)$  el parámetro de viscosidad del material.  $\square$

### 3.2.2. Un modelo constitutivo termoplástico J2

A continuación vamos a considerar el modelo constitutivo termoplástico descrito en el CUADRO 3.1, CUADRO 3.2 y CUADRO 3.3. En el modelo se considera una contribuciones termoelásticas y de endurecimiento desacopladas de la función de energía libre dada en el CUADRO 1, tal y como sugieren los resultados experimentales obtenidos en ZBEDEL & LEHMANN [1987]. Todas las propiedades termomecánicas del material se suponen que son función de la temperatura. En particular, se ha considerado el caso en el que la capacidad calorífica es función de la temperatura y el calor latente es distinto de cero. Nótese que en este caso, el funcional asociado a la contribución puramente térmica se obtiene a partir de una expresión integral. La contribución termoelástica a la función de energía libre incluye deformación debido al cambio de fase. El comportamiento mecánico en la transición del

estado líquido inicial al sólido final se caracteriza dividiendo por la fracción volumétrica de sólido  $f_s(\Theta)$  el módulo de deformación transversal  $\bar{\mu}(\Theta)$  y dividiendo por la fracción de volumen líquido  $f_l(\Theta)$  la viscosidad  $\bar{\eta}_v(\Theta)$ .

CUADRO 3.3. Modelo constitutivo termoplástico J2. Respuesta termoplástica.

■ **Respuesta termoplástica**

- i. Función de fluencia de Von Mises con tensión de fluencia  $\sigma_Y(\Theta) := y_0(\Theta)$ ,

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, q, \Theta) = \|\text{dev}[\boldsymbol{\sigma}]\| - \sqrt{\frac{2}{3}}[\sigma_Y(\Theta) - q].$$

- ii. Variable de endurecimiento  $q$  conjugada de  $\xi$ ,

$$q := -\partial_\xi \hat{\psi} = -[h(\Theta)\xi - (y_0(\Theta) - y_\infty(\Theta))(1 - \exp(-\delta\xi))].$$

- iii. Ablandamiento térmico lineal,

$$\left. \begin{aligned} y_0(\Theta) &= y_0(\Theta_0)[1 - w_0(\Theta - \Theta_0)], \\ y_\infty(\Theta) &= y_\infty(\Theta_0)[1 - w_\infty(\Theta - \Theta_0)], \\ h(\Theta) &= h(\Theta_0)[1 - w_h(\Theta - \Theta_0)]. \end{aligned} \right\}$$

- iv. Leyes de evolución plásticas,

$$\left. \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p &:= \gamma \mathbf{n} \quad \text{con} \quad \mathbf{n} := \text{dev}[\boldsymbol{\sigma}]/\|\text{dev}[\boldsymbol{\sigma}]\|, \\ \dot{\xi}_\alpha &:= \gamma \sqrt{2/3}, \\ \dot{H}^p &:= -\gamma \sqrt{2/3} \sigma'_Y(\Theta). \end{aligned} \right\}$$

### 3.2.3. Modelo termomecánico de contacto

(A) *Cinemática del contacto.* Sea  $2 \leq n_{dim} \leq 3$  la dimensión del espacio y  $I := [0, T] \subset \mathbb{R}_+$  el intervalo temporal de interés. Sean los conjuntos abiertos  $\Omega^{(1)} \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$  y  $\Omega^{(2)} \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$  con contornos regulares  $\partial\Omega^{(1)}$  y  $\partial\Omega^{(2)}$  y conjuntos cerrados asociados  $\bar{\Omega}^{(1)} := \Omega^{(1)} \cup \partial\Omega^{(1)}$  y  $\bar{\Omega}^{(2)} := \Omega^{(2)} \cup \partial\Omega^{(2)}$ , las posiciones de referencia de dos cuerpos continuos  $\mathcal{B}^{(1)}$  y  $\mathcal{B}^{(2)}$ , con partículas materiales etiquetadas  $\mathbf{X} \in \bar{\Omega}^{(1)}$  y  $\mathbf{Y} \in \bar{\Omega}^{(2)}$ , respectivamente.

Denominamos  $\boldsymbol{\varphi}^{(i)} : \bar{\Omega}^{(i)} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$  la aplicación que preserva la orientación y representa el movimiento del cuerpo  $\mathcal{B}^{(i)}$ , con velocidad material  $\mathbf{V}^{(i)} := \partial_t \boldsymbol{\varphi}^{(i)}$  y gradiente de deformación  $\mathbf{F}^{(i)} := D\boldsymbol{\varphi}^{(i)}$ . Para cada instante de tiempo  $t \in I$ , la aplicación  $t \in \mathbb{I} \mapsto \boldsymbol{\varphi}_t^{(i)} := \boldsymbol{\varphi}^{(i)}(\cdot, t)$  representa una familia de configuraciones indexada por el tiempo  $t$ , que hace corresponder a cada cuerpo  $\mathcal{B}^{(i)}$  su posición actual  $\mathcal{S}_t^{(i)} : \boldsymbol{\varphi}_t^{(i)}(\mathcal{B}^{(i)}) \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$ .



CUADRO 3.1. Modelo constitutivo termoplástico J2. Función de energía libre.

■ **Función de energía libre**

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{\epsilon}^e, \xi, \Theta, \boldsymbol{\alpha}) = \hat{W}(\boldsymbol{\epsilon}^e, \Theta, \boldsymbol{\alpha}) + \hat{M}(\boldsymbol{\epsilon}^e, \Theta, \boldsymbol{\alpha}) + \hat{T}(\Theta) + \hat{K}(\xi, \Theta)$$

i. Respuesta hiperelástica lineal ( $\mu(\Theta) > 0$ ,  $\kappa(\Theta) > 0$ ),

$$\hat{W}(\boldsymbol{\epsilon}^e, \Theta, \boldsymbol{\alpha}) = \hat{W}(\text{dev}[\boldsymbol{\epsilon}^e - \boldsymbol{\alpha}], \Theta) + \hat{U}(\text{tr}[\boldsymbol{\epsilon}^e - \boldsymbol{\alpha}], \Theta)$$

$$\hat{W}(\text{dev}[\boldsymbol{\epsilon}^e - \boldsymbol{\alpha}], \Theta) = \mu(\Theta) \text{dev}^2[\boldsymbol{\epsilon}^e - \boldsymbol{\alpha}],$$

$$\hat{U}(\text{tr}[\boldsymbol{\epsilon}^e - \boldsymbol{\alpha}], \Theta) = \frac{1}{2} \kappa(\Theta) \text{tr}^2[\boldsymbol{\epsilon}^e - \boldsymbol{\alpha}],$$

con  $\mu(\Theta) = \bar{\mu}(\theta)/f_s(\theta)$  donde  $f_s(\theta) \in [0, 1]$ .

ii. Acoplamiento termoelástico,

$$\hat{M}(\boldsymbol{\epsilon}^e, \Theta, \boldsymbol{\alpha}) = -\kappa(\Theta)[\hat{e}(\Theta) - \hat{e}(\Theta_0)] \text{tr}[\boldsymbol{\epsilon}^e - \boldsymbol{\alpha}],$$

donde

$$\hat{e}(\Theta) := 3\alpha(\Theta)(\Theta - \Theta_{ref}) + e^{ps}(\Theta),$$

iii. Contribución térmica ( $c_s(\Theta) > 0$ ),

IF ( $c_s(\Theta) = \text{constant}$  Y  $L(\Theta) = 0$ ) THEN

$$\hat{T}(\Theta) = \rho_0 c_s [(\Theta - \Theta_0) - \Theta \log(\Theta/\Theta_0)],$$

ELSE

$$\hat{T}(\Theta) = \int_{\Theta_0}^{\Theta} \hat{T}_{\Theta}(\bar{\Theta}) d\bar{\Theta}, \quad \hat{T}_{\Theta}(\Theta) = - \int_{\Theta_0}^{\Theta} [\rho_0 c_s(\bar{\Theta}) + L'(\bar{\Theta})] \frac{d\bar{\Theta}}{\bar{\Theta}},$$

END IF

iv. Potencial de endurecimiento,

$$\hat{K}(\xi, \Theta) = \frac{1}{2} h(\Theta) \xi^2 - [y_0(\Theta) - y_{\infty}(\Theta)] \hat{H}(\xi),$$

$$\text{donde } \hat{H}(\xi) := \begin{cases} \xi - [1 - \exp(-\delta\xi)]/\delta, & \text{if } \delta \neq 0; \\ 0, & \text{if } \delta = 0. \end{cases}$$

CUADRO 3.2. Modelo constitutivo termoplástico J2. Respuesta termoelástica/viscosa.

<p>■ <b>Respuesta termoelástica</b></p> <p>i. <u>Tensiones de Cauchy</u>,</p> $\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= p\mathbf{1}_3 + \mathbf{s}, \\ p &= \kappa(\Theta) \operatorname{tr}[\boldsymbol{\epsilon}^e - \boldsymbol{\alpha}] - \kappa(\Theta)[\hat{e}(\Theta) - \hat{e}(\Theta_0)], \\ \mathbf{s} &= 2\mu(\Theta) \operatorname{dev}[\boldsymbol{\epsilon}^e - \boldsymbol{\alpha}].\end{aligned}$ <p>ii. <u>Entropía elástica</u>,</p> <p>IF (<math>c_s(\Theta)=\text{constant}</math> Y <math>L(\Theta) = 0</math>) THEN</p> $\begin{aligned}H^e &= \rho_0 c_s \log(\Theta/\Theta_0) + \kappa(\Theta)[3\alpha(\Theta) + e_{\Theta}^{ps}(\Theta)] \operatorname{tr}[\boldsymbol{\epsilon}^e - \boldsymbol{\alpha}] - \hat{K}_{\Theta}(\xi) \\ &+ 3\kappa(\Theta)\alpha'(\Theta)(\Theta - \Theta_{ref})\operatorname{tr}[\boldsymbol{\epsilon}^e - \boldsymbol{\alpha}] + \kappa'(\Theta)[\hat{e}(\Theta) - \hat{e}(\Theta_0)]\operatorname{tr}[\boldsymbol{\epsilon}^e - \boldsymbol{\alpha}] \\ &- \hat{W}_{\Theta}(\boldsymbol{\epsilon}^e, \Theta, \boldsymbol{\alpha}),\end{aligned}$ <p>ELSE</p> $\begin{aligned}H^e &= \int_{\Theta_0}^{\Theta} [\rho_0 c_s(\bar{\Theta}) + L'(\bar{\Theta})] \frac{d\bar{\Theta}}{\bar{\Theta}} + \kappa(\Theta)[3\alpha(\Theta) + e_{\Theta}^{ps}(\Theta)] \operatorname{tr}[\boldsymbol{\epsilon}^e - \boldsymbol{\alpha}] - \hat{K}_{\Theta}(\xi) \\ &+ 3\kappa(\Theta)\alpha'(\Theta)(\Theta - \Theta_{ref})\operatorname{tr}[\boldsymbol{\epsilon}^e - \boldsymbol{\alpha}] + \kappa'(\Theta)[\hat{e}(\Theta) - \hat{e}(\Theta_0)]\operatorname{tr}[\boldsymbol{\epsilon}^e - \boldsymbol{\alpha}] \\ &- \hat{W}_{\Theta}(\boldsymbol{\epsilon}^e, \Theta, \boldsymbol{\alpha}),\end{aligned}$ <p>END IF</p> <p>■ <b>Respuesta termoviscosa</b></p> <p>i. <u>Tensiones viscosas</u>,</p> $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\sigma}$ <p>ii. <u>Ecuaciones de evolución</u> (<math>\bar{\eta}_v(\Theta) &gt; 0, f_l(\Theta) \in [0, 1]</math>),</p> $\begin{aligned}\operatorname{dev}[\dot{\boldsymbol{\alpha}}] &= \frac{1}{\eta_v^{dev}} \mathbf{s} = \frac{f_l(\Theta)}{\bar{\eta}_v(\Theta)} \mathbf{s}, \\ \operatorname{tr}[\dot{\boldsymbol{\alpha}}] &= \frac{1}{\eta_v^{vol}} 3p.\end{aligned}$
--

Denominaremos como superficie de contacto  $\Gamma^{(i)} \subset \partial\Omega^{(i)}$  la parte del contorno del cuerpo  $\mathcal{B}^{(i)}$  tal que incluye todos los puntos materiales que pueden estar en contacto en algún instante  $t \in \mathbb{I}$ . La configuración actual de la superficie de contacto  $\Gamma^{(i)}$  viene dada

por  $\gamma^{(i)} := \varphi_t^{(i)}(\Gamma^{(i)})$ .

A continuación vamos a prestar atención a las partículas materiales en estas superficies, denominados  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  y  $\mathbf{Y} \in \Gamma^{(2)}$ . Las posiciones actuales de estas partículas serán  $\mathbf{x} = \varphi_t^{(1)}(\mathbf{X}) \in \gamma^{(1)}$  y  $\mathbf{y} = \varphi_t^{(2)}(\mathbf{Y}) \in \gamma^{(2)}$ .

Utilizando una notación estándar en la mecánica del contacto, asignaremos para cada par de superficies en contacto los papeles de superficie *slave* y *master*. En particular, sea  $\Gamma^{(1)}$  la superficie *slave* y  $\Gamma^{(2)}$  la superficie *master*. Adicionalmente, denominaremos partículas *slave* y partículas *master* a los puntos materiales, en la configuración de referencia, de las superficies *slave* y *master*, respectivamente. Con esta notación, en la formulación discretizada del problema de contacto, se impondrá que ninguna partícula *slave* pueda penetrar la superficie *master*, para todo instante de tiempo  $t \in \mathbb{I}$ . Nótese, que a pesar de que en la formulación en el continuo del problema de contacto, los papeles asignados a cada superficie son irrelevantes, esto no ocurre así en la formulación discreta (espacial) del problema.

*Parametrización de las superficies de contacto.* Sea  $\mathcal{A}^{(i)} \subset \mathbb{R}^{n_{dim}-1}$  un dominio paramétrico de referencia para la superficie de contacto del medio  $\mathcal{B}^{(i)}$ . La parametrización de las superficies de contacto para cada medio  $\mathcal{B}^{(i)}$  se introduce mediante una familia (que preserva la orientación) de aplicaciones de un parámetro indexadas por el tiempo  $\psi_t^{(i)} : \mathcal{A}^{(i)} \subset \mathbb{R}^{n_{dim}-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$  tal que  $\Gamma^{(i)} := \psi_0^{(i)}(\mathcal{A}^{(i)})$  y  $\gamma^{(i)} := \psi_t^{(i)}(\mathcal{A}^{(i)})$ . Utilizando la regla de composición de aplicaciones, se puede obtener la relación  $\psi_t^{(i)} = \varphi_t^{(i)} \circ \psi_0^{(i)}$ .

Utilizando la designación de superficies *slave* y *master*, consideramos una parametrización de la superficie *master*. En particular, consideramos un punto  $\boldsymbol{\xi} := (\xi^1, \xi^2) \in \mathcal{A}^{(2)}$  del dominio de parametrización de referencia, tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &:= \psi_0^{(2)}(\boldsymbol{\xi}), & \mathbf{y} &:= \psi_t^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) \\ \mathbf{E}_\alpha &:= \psi_{0,\alpha}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}), & \mathbf{e}_\alpha &:= \psi_{t,\alpha}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde  $\mathbf{Y}$  y  $\mathbf{y}$  son, respectivamente, las posiciones de referencia y actual de la partícula *master*, y  $\mathbf{E}_\alpha$  y  $\mathbf{e}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$  son las bases convectivas de superficie asociadas a la partícula *master*  $\mathbf{Y} \in \Gamma^{(2)}$ , en la configuración de referencia y actual, respectivamente. La notación  $(\cdot)_{,\alpha}$  significa derivada parcial respecto  $\xi^\alpha$ .

*Punto más cercano de una partícula slave en la superficie master.* Sea  $\hat{\mathbf{Y}} : \Gamma^{(2)} \rightarrow \Gamma^{(1)}$  la aplicación del punto más cercano definida como

$$\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t) := \arg \min_{\mathbf{Y} \in \Gamma^{(2)}} \{ \|\varphi_t^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi_t^{(2)}(\mathbf{Y})\| \}, \quad (3.16)$$

y sea

$$\bar{\mathbf{Y}} := \hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), \quad \bar{\mathbf{y}} := \varphi_t^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}) \quad (3.17)$$

donde  $\bar{\mathbf{y}} \in \gamma^{(2)}$  es el punto de proyección más cercano de la posición actual de la partícula *slave*  $\mathbf{X}$  sobre la posición actual de la superficie *master*  $\Gamma^{(2)}$ . Sea  $g_N := \hat{g}_N(\mathbf{X}, t)$  la

distancia normal definida para cada partícula *slave*  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  y para cada instante tiempo  $t \in \mathbb{I}$  como

$$g_N := \hat{g}_N(\mathbf{X}, t) := -\llbracket \boldsymbol{\varphi} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\nu} \quad (3.18)$$

donde  $\llbracket \boldsymbol{\varphi} \rrbracket := \boldsymbol{\varphi}_t^{(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}_t^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}})$  representa la diferencia entre las configuraciones y  $\boldsymbol{\nu} : \gamma^{(2)} \rightarrow S^2$  es la normal unitaria a la configuración actual de la superficie *master* en el punto de proyección  $\bar{\mathbf{y}} \in \gamma^{(2)}$ .

*Bases convectivas, métricas y tensores de curvatura en el punto de proyección más cercano.* Para el punto de proyección más cercano dado por (3.16), existirá un punto  $\bar{\boldsymbol{\xi}} := (\bar{\boldsymbol{\xi}}^1, \bar{\boldsymbol{\xi}}^2) \in \mathcal{A}^{(2)}$  del dominio paramétrico tal que

$$\bar{\mathbf{Y}} := \boldsymbol{\psi}_0^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}), \quad \bar{\mathbf{y}} := \boldsymbol{\psi}_t^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \quad (3.19)$$

Asociada a la partícula *master*  $\bar{\mathbf{Y}} \in \Gamma^{(2)}$  definimos las bases convectivas de superficie en las configuraciones de referencia y actual, respectivamente, como

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha^{ref} := \mathbf{E}_\alpha(\bar{\boldsymbol{\xi}}), \quad \boldsymbol{\tau}_\alpha := \mathbf{e}_\alpha(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \quad (3.20)$$

Adicionalmente, las normales unitarias  $\boldsymbol{\nu}^{ref} \in S^2$  y  $\boldsymbol{\nu} \in S^2$  en la partícula *master*  $\bar{\mathbf{Y}}$  en las configuraciones de referencia y actual, respectivamente, se pueden definir como:

$$\boldsymbol{\nu}^{ref} := \frac{\boldsymbol{\tau}_1^{ref} \times \boldsymbol{\tau}_2^{ref}}{\|\boldsymbol{\tau}_1^{ref} \times \boldsymbol{\tau}_2^{ref}\|}, \quad \boldsymbol{\nu} := \frac{\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2}{\|\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2\|} \quad (3.21)$$

Los vectores  $\boldsymbol{\tau}_\alpha^{ref} \in T_{\boldsymbol{\nu}^{ref}}S^2$  y  $\boldsymbol{\tau}_\alpha \in T_{\boldsymbol{\nu}}S^2$ ,  $\alpha = 1, 2$  definen los espacios tangentes  $T_{\boldsymbol{\nu}^{ref}}S^2$  y  $T_{\boldsymbol{\nu}}S^2$  a la esfera unidad  $S^2$  en los puntos  $\boldsymbol{\nu}^{ref}$  y  $\boldsymbol{\nu}$ , respectivamente, definidos como:

$$T_{\boldsymbol{\nu}}S^2 := \{\delta\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^{n_{dim}} : \delta\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0\} \quad (3.22)$$

Los vectores de la base convectiva de superficie  $\boldsymbol{\tau}_\alpha^{ref}$  y  $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , aumentados con las normales unitarias  $\boldsymbol{\nu}^{ref}$  y  $\boldsymbol{\nu}$ , forman bases locales espaciales en la partícula *master*  $\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t)$  en las configuraciones de referencia y actual, respectivamente.

Los vectores de la base convectiva de superficie  $\boldsymbol{\tau}_\alpha^{ref}$  y  $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , inducen una métrica de superficie o primera forma fundamental en las configuraciones de referencia y actual, definidas respectivamente como:

$$M_{\alpha\beta} := \boldsymbol{\tau}_\alpha^{ref} \cdot \boldsymbol{\tau}_\beta^{ref}, \quad m_{\alpha\beta} := \boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \boldsymbol{\tau}_\beta \quad (3.23)$$

Las inversas de las métricas de superficie,  $M^{\alpha\beta}$  y  $m^{\alpha\beta}$ , se definen de manera habitual. Adicionalmente, bases duales de superficie en las configuraciones de referencia y actual se definen como

$$\boldsymbol{\tau}_{ref}^\alpha := M^{\alpha\beta} \boldsymbol{\tau}_\beta^{ref}, \quad \boldsymbol{\tau}^\alpha := m^{\alpha\beta} \boldsymbol{\tau}_\beta \quad (3.24)$$

La variación de la base convectiva de superficie a lo largo de las coordenadas convectivas, junto con la normal unitaria, inducen la segunda forma fundamental o curvatura de superficie, en las configuraciones de referencia y actual, como

$$\kappa_{\alpha\beta}^{ref} := \mathbf{E}_{\alpha,\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \boldsymbol{\nu}^{ref}, \quad \kappa_{\alpha\beta} := \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \boldsymbol{\nu} \quad (3.25)$$

(B) *Forma local de la ecuación de balance de energía.* La forma local de la ecuación de balance de energía en la superficie de contacto puede escribirse como, véase LAURSEN [1999],

$$\Theta_c \dot{H}_c = Q_c^{(1)} + Q_c^{(2)} + \mathcal{D}_{c,int} \quad \text{sobre } \Gamma^{(1)} \times \mathbb{I} \quad (3.26)$$

donde  $\Theta_c > 0$  es la temperatura absoluta de contacto,  $H_c$  la entropía contacto por unidad de superficie en la configuración de referencia  $\Gamma^{(1)}$ ,  $Q_c^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2$  son los flujos normales (exteriores) de calor en las superficies de contacto de los cuerpos  $\mathcal{B}^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , por unidad de superficie en la configuración de referencia  $\Gamma^{(1)}$  y  $\mathcal{D}_{c,int}$  es la disipación interna de contacto por unidad de superficie en la configuración de referencia  $\Gamma^{(1)}$ .

(C) *Inecuaciones de disipación.* La entropía específica de contacto  $H_c$  se define mediante una ecuación constitutiva, típicamente formulada en términos de la energía interna de contacto  $E_c$ , y sujeta las siguientes restricciones para la disipación interna de contacto, véase LAURSEN [1999],

$$\mathcal{D}_{c,int} := -\mathbf{t}^{(1)} \cdot \llbracket \mathbf{V} \rrbracket + \Theta_c \dot{H}_c - \dot{E}_c \geq 0 \quad \text{sobre } \Gamma^{(1)} \times \mathbb{I} \quad (3.27)$$

donde  $\llbracket \mathbf{V} \rrbracket := \mathbf{V}^{(1)} - \mathbf{V}^{(2)}$  indica el salto en las velocidades materiales a través de las superficies de contacto y  $\mathbf{t}^{(1)}$  es la tracción nominal de contacto sobre  $\Gamma^{(1)}$ .

Definiendo la presión nominal de contacto  $t_N$  como la proyección de la tracción nominal de contacto  $\mathbf{t}^{(1)}$  en la dirección de la normal unitaria  $\boldsymbol{\nu}$ , y las componentes tangentes de la tracción nominal friccional  $t_{T\alpha}$  en la base dual convectiva  $\boldsymbol{\tau}^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , como (menos) la proyección de la tracción nominal  $\mathbf{t}^{(1)}$  en la dirección de la base convectiva  $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ ,

$$t_N := \mathbf{t}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad t_{T\alpha} := -\mathbf{t}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha \quad (3.28)$$

y utilizando las expresiones

$$\dot{g}_N = -\llbracket \mathbf{V} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \dot{g}_T^\alpha|_{g_N=0} := \llbracket \mathbf{V} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha \quad (3.29)$$

se verifica que

$$-\mathbf{t}^{(1)} \cdot \llbracket \mathbf{V} \rrbracket = t_N \dot{g}_N + t_{T\alpha} \dot{g}_T^\alpha \quad (3.30)$$

y la disipación interna de contacto dada por (3.27) puede escribirse como

$$\mathcal{D}_{c,int} := t_N \dot{g}_N + t_{T\alpha} \dot{g}_T^\alpha + \Theta_c \dot{H}_c - \dot{E}_c \geq 0 \quad \text{sobre } \Gamma^{(1)} \times \mathbb{I} \quad (3.31)$$

Los flujos nominales normales (exteriores) de calor  $Q_c^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , están sujetos a las siguientes restricciones en la disipación por conducción

$$\mathcal{D}_{c,con} := \frac{Q_c^{(1)}}{\Theta^{(1)}} (\Theta^{(1)} - \Theta_c) + \frac{Q_c^{(2)}}{\Theta^{(2)}} (\Theta^{(2)} - \Theta_c) \geq 0 \quad \text{sobre } \Gamma^{(1)} \times \mathbb{I} \quad (3.32)$$

(D) *Ecuaciones constitutivas termofriccionales de contacto.* Consideramos un modelo friccional basado en la descomposición aditiva del deslizamiento tangencial en una parte elástica (recuperable) y otra plástica (irreversible). Los mecanismos de endurecimiento friccional se caracterizan mediante un conjunto adicional de variables internas, que denominaremos colectivamente como  $\zeta_{c\beta}$ . Siguiendo un planteamiento paralelo al utilizado en el modelo continuo, consideramos también una descomposición aditiva de la entropía local de contacto en una parte elástica y otra plástica. Con estas hipótesis tenemos que  $g_{T\alpha} := g_{T\alpha}^{e\alpha} + g_{T\alpha}^{p\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $H_c := H_c^e + H_c^p$  y definimos el conjunto de variables internas friccionales  $\mathbf{G}_c^p := \{g_{T\alpha}^p, H_c^p, \zeta_{c\beta}\}$ .

La energía interna de contacto  $\hat{E}_c$  por unidad de superficie de contacto  $\Gamma^{(1)}$  depende de la penetración normal, la parte elástica del deslizamiento tangente  $g_{T\alpha}^{e\alpha}$ , las variables de endurecimiento friccional  $\zeta_{c\beta}$  y la parte elástica de la entropía de contacto  $H_c^e$ , teniendo la siguiente forma funcional  $E_c = \hat{E}_c(g_{T\alpha}^{e\alpha}, H_c^e, \zeta_{c\beta})$ . Substituyendo la expresión de la energía interna de contacto en la expresión de la disipación interna de contacto, derivando respecto al tiempo, utilizando la regla de la cadena y la descomposición aditiva del deslizamiento tangencial y de la entropía de contacto, un argumento estándar conduce a las siguientes relaciones constitutivas y expresión de la disipación interna reducida

$$\left. \begin{aligned} t_N &= \partial_{g_N} \hat{E}_c(g_N, g_{T\alpha}^{e\alpha}, H_c^e, \zeta_{c\beta}), \\ t_{T\alpha} &= \partial_{g_{T\alpha}^{e\alpha}} \hat{E}_c(g_N, g_{T\alpha}^{e\alpha}, H_c^e, \zeta_{c\beta}), \\ \Theta_c &= \partial_{H_c^e} \hat{E}_c(g_N, g_{T\alpha}^{e\alpha}, H_c^e, \zeta_{c\beta}), \\ q_c^\beta &:= -\partial_{\zeta_{c\beta}} \hat{E}_c(g_N, g_{T\alpha}^{e\alpha}, H_c^e, \zeta_{c\beta}), \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{c,int} &:= \mathcal{D}_{c,mech} + \mathcal{D}_{c,ther} \geq 0, \quad \text{con} \\ \mathcal{D}_{c,mech} &:= t_{T\alpha} \dot{g}_{T\alpha}^{p\alpha} + q_c^\beta \dot{\zeta}_{c\beta} \geq 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{D}_{c,ther} := \Theta_c \dot{H}_c^p. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Utilizando la transformada de Legendre  $\Psi_c = E_c - \Theta_c H_c^e$ , la función de energía libre de contacto es de la forma  $\Psi_c = \hat{\Psi}_c(g_N, g_{T\alpha}^{e\alpha}, \Theta_c, \zeta_{c\beta})$ . Derivando esta expresión respecto al tiempo y utilizando la regla de la cadena, se obtienen las siguientes relaciones constitutivas

$$\left. \begin{aligned} t_N &= \partial_{g_N} \hat{\Psi}_c(g_N, g_{T\alpha}^{e\alpha}, \Theta_c, \zeta_{c\beta}), \\ t_{T\alpha} &= \partial_{g_{T\alpha}^{e\alpha}} \hat{\Psi}_c(g_N, g_{T\alpha}^{e\alpha}, \Theta_c, \zeta_{c\beta}), \\ H_c^e &= -\partial_{\Theta_c} \hat{\Psi}_c(g_N, g_{T\alpha}^{e\alpha}, \Theta_c, \zeta_{c\beta}), \\ q_c^\beta &:= -\partial_{\zeta_{c\beta}} \hat{\Psi}_c(g_N, g_{T\alpha}^{e\alpha}, \Theta_c, \zeta_{c\beta}). \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Ecuaciones constitutivas para los flujos nominales normales de calor por unidad de superficie en la configuración de referencia  $\Gamma^{(1)}$  se definen como

$$\begin{aligned} Q_{c,cond}^{(1)} &= \hat{h}_{cond}^{(1)}(t_N, \Theta_c) g_\Theta^{(1)} \quad \text{con} \quad g_\Theta^{(1)} := \Theta^{(1)} - \Theta_c, \\ Q_{c,cond}^{(2)} &= \hat{h}_{cond}^{(2)}(t_N, \Theta_c) g_\Theta^{(2)} \quad \text{con} \quad g_\Theta^{(2)} := \Theta^{(2)} - \Theta_c, \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde  $\hat{h}_{cond}^{(\alpha)}(t_N, \Theta_c) > 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ , es el coeficiente de transmisión de calor de la superficie  $\Gamma^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , que se supone que, en general, es función de la presión de contacto y de la temperatura de contacto. Nótese que (3.36) permite que la restricción en la disipación de contacto por conducción de calor dada por (3.32) se satisfice incondicionalmente.

Suponiendo una función de deslizamiento de la forma  $\Phi_c = \hat{\Phi}_c(t_N, t_{T\alpha}, \Theta_c, q_c^\beta)$ , las leyes de evolución de las variables internas de contacto se definen como

$$\left. \begin{aligned} \dot{g}_T^p &= \gamma_c \partial_{t_{T\alpha}} \hat{\Phi}_c(t_N, t_{T\alpha}, \Theta_c, q_c^\beta), \\ \dot{H}_c^p &= \gamma_c \partial_{\Theta_c} \hat{\Phi}_c(t_N, t_{T\alpha}, \Theta_c, q_c^\beta), \\ \dot{\zeta}_{c\beta} &= \gamma_c \partial_{q_c^\beta} \hat{\Phi}_c(t_N, t_{T\alpha}, \Theta_c, q_c^\beta), \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

y las condiciones de Kuhn-Tucker  $\gamma_c \geq 0, \Phi_c \leq 0, \gamma_c \Phi_c = 0$  y de consistencia  $\gamma_c \dot{\Phi}_c = 0$  deben de verificarse para un modelo friccional independiente de la velocidad.

**OBSERVACIÓN 3.4.** *Expresiones equivalentes de la ecuación de balance de energía.* Utilizando la descomposición aditiva de la entropía de contacto en una parte elástica y otra plástica, y la descomposición aditiva de la disipación interna de contacto en una parte mecánica y otra térmica, la ecuación de balance de energía puede escribirse como

$$\Theta_c \dot{H}_c^e = Q_c^{(1)} + Q_c^{(2)} + \mathcal{D}_{c,mech} \quad \text{sobre } \Gamma^{(1)} \times \mathbb{I} \quad (3.38)$$

De forma alternativa, utilizando la ecuación constitutiva de la entropía elástica, derivando respecto al tiempo y aplicando la regla de la cadena, la ecuación de balance de energía puede expresarse en función de la temperatura como

$$c_{c0} \dot{\Theta}_c = Q_c^{(1)} + Q_c^{(2)} + \mathcal{D}_{c,mech} - \mathcal{H}^{fc} \quad \text{sobre } \Gamma^{(1)} \times \mathbb{I} \quad (3.39)$$

donde la capacidad calorífica de referencia de contacto  $c_{c0}$  y la función de calentamiento friccional  $\mathcal{H}^{fc}$  son

$$c_{c0} := -\Theta_c \partial_{\Theta_c}^2 \hat{\psi}_c(g_N, g_T^{e\alpha}, \Theta_c, \zeta_{c\beta}), \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{fc} := & -\Theta_c \left[ \partial_{\Theta_c g_N}^2 \hat{\psi}_c(g_N, g_T^{e\alpha}, \Theta_c, \zeta_{c\beta}) \cdot \dot{g}_n \right. \\ & + \partial_{\Theta_c g_T^{e\alpha}}^2 \hat{\psi}_c(g_N, g_T^{e\alpha}, \Theta_c, \zeta_{c\beta}) \cdot \dot{g}_T^{e\alpha} \\ & \left. + \partial_{\Theta_c \zeta_{c\beta}}^2 \hat{\psi}_c(g_N, g_T^{e\alpha}, \Theta_c, \zeta_{c\beta}) \cdot \dot{\zeta}_{c\beta} \right], \end{aligned} \quad (3.41)$$

o, alternativamente, utilizando las ecuaciones constitutivas (3.35),

$$\begin{aligned} c_{c0} &:= \Theta_c \partial_{\Theta_c} H_c^e, \\ \mathcal{H}^{fc} &:= -\Theta_c \partial_{\Theta_c} (t_n \dot{g}_n + t_{T\alpha} \dot{g}_T^{e\alpha} - \mathcal{D}_{c,mech}). \quad \square \end{aligned} \quad (3.42)$$

### 3.2.4. Un modelo constitutivo termofriccional

Se considera a continuación el modelo termofriccional descrito en los CUADROS 3.4 Y 3.5. El acoplamiento termofriccional se considera mediante un potencial de endurecimiento termofriccional.

CUADRO 3.4. Modelo constitutivo termofriccional. Función de energía libre

■ **Función de energía libre**

$$\hat{\psi}_c(g_N, g_T^e, \Theta_c, \zeta_c) = \hat{W}_c(g_N, g_T^e) + \hat{T}_c(\Theta_c) + \hat{K}_c(\zeta_c, \Theta_c)$$

i. Respuesta hiperelástica lineal ( $\epsilon_N > 0$ ,  $\epsilon_T > 0$ ),

$$\hat{W}_c(g_N, g_T^e) := \frac{1}{2}\epsilon_N \langle g_N \rangle^2 + \frac{1}{2}\epsilon_T g_T^e M_{\alpha\beta} g_T^{e\beta}.$$

ii. Contribución térmica ( $c_c > 0$ ),

$$\hat{T}_c(\Theta_c) := c_c [(\Theta_c - \Theta_0) - \Theta_c \log(\Theta_c/\Theta_0)].$$

iii. Potencial de endurecimiento,

$$\hat{K}_c(\zeta_c, \Theta_c) := \sum_{n=1}^m \frac{1}{n+1} \hat{\mu}_n(\Theta_c) \zeta_c^{n+1}.$$

### 3.2.5. Formulación variacional

Utilizando procedimientos estándar, la forma débil de la ecuación de balance de momento (por simplicidad supondremos el caso cuasi-estático) y de balance de energía en  $\bar{\Omega} \times \mathbb{I}$  pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}, \text{GRAD}[\boldsymbol{\eta}_0] \rangle - \langle \mathbf{B}, \boldsymbol{\eta}_0 \rangle - \langle \bar{\mathbf{t}}, \boldsymbol{\eta}_0 \rangle_{\Gamma_\sigma} - \langle \mathbf{t}^{(1)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(1)} \rangle_{\Gamma^{(1)}} - \langle \mathbf{t}^{(2)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(2)} \rangle_{\Gamma^{(2)}} &= 0 \\ \langle \Theta \dot{H}^e, \zeta_0 \rangle - \langle \mathbf{Q}, \text{GRAD}[\zeta_0] \rangle - \langle R + \mathcal{D}_{mech}, \zeta_0 \rangle + \langle \bar{\mathbf{Q}}, \zeta_0 \rangle_{\Gamma_Q} & \\ + \langle \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}^{(1)}, \zeta_0^{(1)} \rangle_{\Gamma^{(1)}} + \langle \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}^{(2)}, \zeta_0^{(2)} \rangle_{\Gamma^{(2)}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

que debe verificarse para cualquier variación admisible de desplazamientos y temperaturas  $\boldsymbol{\eta}_0$  y  $\zeta_0$ , respectivamente. Aquí,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto interno  $L_2(\bar{\Omega})$  y con un ligero abuso en la notación  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_\sigma}$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_Q}$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma^{(\alpha)}}$  son los productos internos  $L_2(\Gamma_\sigma)$ ,  $L_2(\Gamma_Q)$  y  $L_2(\Gamma^{(\alpha)})$  en los contornos  $\Gamma_\sigma$ ,  $\Gamma_Q$  y  $\Gamma^{(\alpha)}$ , respectivamente. Por compacidad en la notación, supondremos que  $\bar{\Omega} := \cup_{\alpha=1}^2 \bar{\Omega}^{(\alpha)}$ ,  $\Gamma_\sigma := \cup_{\alpha=1}^2 \Gamma_\sigma^{(\alpha)}$  y  $\Gamma_Q := \cup_{\alpha=1}^2 \Gamma_Q^{(\alpha)}$ .

Imponiendo el equilibrio de fuerzas en las superficies de contacto e introduciendo los flujos (nominales) de calor  $Q_c^{(1)}$  y  $Q_c^{(2)}$  por unidad de superficie  $\Gamma^{(1)}$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}^{(1)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(2)} \rangle_{\Gamma^{(1)}} + \langle \mathbf{t}^{(2)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(2)} \rangle_{\Gamma^{(2)}} &= 0 \\ \langle \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}^{(1)}, \zeta_0^{(1)} \rangle_{\Gamma^{(1)}} - \langle Q_c^{(1)}, \zeta_0^{(1)} \rangle_{\Gamma^{(1)}} &= 0 \\ \langle \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}^{(2)}, \zeta_0^{(2)} \rangle_{\Gamma^{(2)}} - \langle Q_c^{(2)}, \zeta_0^{(2)} \rangle_{\Gamma^{(1)}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$



CUADRO 3.5. Modelo constitutivo termofriccional. Respuesta termofriccional

■ **Respuesta termoelástica**

i. Presión de contacto y tracción tangente friccional,

$$\begin{aligned} t_N &= \epsilon_N \langle g_N \rangle, \\ t_{T\alpha} &= \epsilon_T M_{\alpha\beta} g_T^{e\beta}. \end{aligned}$$

ii. Entropía elástica,

$$H_c^e = c_c \log(\Theta_c/\Theta_0) - \sum_{n=1}^m \frac{1}{n+1} \hat{\mu}'_n(\Theta_c) \zeta_c^{n+1}.$$

■ **Respuesta thermoplástica**

i. Función de deslizamiento,

$$\hat{\Psi}_c(t_N, t_{T\alpha}, \Theta_c, q_c) := \|\mathbf{t}_T^b\|_{ref} - (\hat{\mu}_0(\Theta_c) - q_c) t_N,$$

donde  $\|\mathbf{t}_T^b\|_{ref} := (t_{T\alpha} M^{\alpha\beta} t_{T\beta})^{1/2}$ .

ii. Variable de endurecimiento  $q_c$  conjugada de  $\zeta_c$ ,

$$q_c := -\partial_{\zeta_c} \hat{\Psi}_c = - \sum_{n=1}^m \hat{\mu}_n(\Theta_c) \zeta_c^n.$$

iii. Ablandamiento térmico lineal,

$$\hat{\mu}_n(\Theta_c) = \hat{\mu}_n(\Theta_0)[1 - w_n(\Theta_c - \Theta_0)], \quad n = 1, m.$$

iv. Disipación mecánica friccional,

$$\mathcal{D}_{c,mech} = \gamma_c \hat{\mu}_0(\Theta_c) t_N.$$

Utilizando (3.44) la forma débil de las ecuaciones de balance (3.43) pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}, \text{GRAD}[\boldsymbol{\eta}_0] \rangle - \langle \mathbf{B}, \boldsymbol{\eta}_0 \rangle - \langle \bar{\mathbf{t}}, \boldsymbol{\eta}_0 \rangle_{\Gamma_\sigma} - \langle \mathbf{t}^{(1)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(1)} - \boldsymbol{\eta}_0^{(2)} \rangle_{\Gamma^{(1)}} &= 0 \\ \langle \Theta \dot{H}^e, \zeta_0 \rangle - \langle \mathbf{Q}, \text{GRAD}[\zeta_0] \rangle - \langle R + \mathcal{D}_{mech}, \zeta_0 \rangle + \langle \bar{\mathbf{Q}}, \zeta_0 \rangle_{\Gamma_Q} & \\ + \langle Q_c^{(1)}, \zeta_0^{(1)} \rangle_{\Gamma^{(1)}} + \langle Q_c^{(2)}, \zeta_0^{(2)} \rangle_{\Gamma^{(1)}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde nótese que *todas las contribuciones de contacto* están definidas en la superficie de contacto  $\Gamma^{(1)}$ .

### 3.3. INTEGRACIÓN TEMPORAL DEL PROBLEMA TERMOPLÁSTICO ACOPLADO

La solución numérica del problema termoplástico acoplado implica la transformación de un sistema dinámico de dimensión infinita, gobernado por un sistema cuasi-lineal de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, en una secuencia de problemas algebraicos no lineales, utilizando la proyección de Galerkin del método de los elementos finitos y un esquema de integración temporal para las variables nodales primales, junto con un algoritmo de retorno para la integración temporal de las variables internas.

A continuación vamos a prestar atención a la integración temporal de las ecuaciones de gobierno del problema termoplástico acoplado. En particular, estaremos interesados en una clase de algoritmos incondicionalmente estables basados en algoritmos de fórmula producto, obtenidos a partir de una partición de las ecuaciones de gobierno. Estos métodos pertenecen a los métodos clásicos de paso fraccionado.

#### 3.3.1. Problema local de evolución

Consideremos el problema local de evolución disipativo de primer orden y homogéneo siguiente, véase SIMO [1994], AGELET DE SARACIBAR *et al.* [1997], LAURSEN [1999],

i. *Problema de evolución en  $\bar{\Omega} \times \mathbb{I}$ .* Consideremos el problema local disipativo de evolución para el problema termoplástico definido por

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{Z} &= \mathbf{A}[\mathbf{Z}, \boldsymbol{\Gamma}] & \text{en } \bar{\Omega} \times \mathbb{I}, \\ \mathbf{Z}|_{t=0} &= \mathbf{Z}_0 & \text{en } \bar{\Omega}, \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

junto con

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Gamma}^p &= \gamma \mathbf{G}^p[\mathbf{Z}, \boldsymbol{\Gamma}] & \text{en } \bar{\Omega} \times \mathbb{I}, \\ \boldsymbol{\Gamma}^p|_{t=0} &= 0 & \text{en } \bar{\Omega}, \end{aligned} \right\} \text{ y } \left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Gamma}^v &= \mathbf{G}^v[\mathbf{Z}, \boldsymbol{\Gamma}] & \text{en } \bar{\Omega} \times \mathbb{I}, \\ \boldsymbol{\Gamma}^v|_{t=0} &= 0 & \text{en } \bar{\Omega}, \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

donde  $\mathbf{Z}$ , perteneciente a un espacio de Sobolev  $\mathcal{Z}$ , es un conjunto de variables primales independientes,  $\boldsymbol{\Gamma} := \{\boldsymbol{\Gamma}^p, \boldsymbol{\Gamma}^v\}$  es un conjunto de variables internas,  $\mathbf{A}[\mathbf{Z}, \boldsymbol{\Gamma}]$  y  $\mathbf{G}[\mathbf{Z}, \boldsymbol{\Gamma}]$  son operadores no lineales y  $\gamma \geq 0$  es un multiplicador plástico.

ii. *Problema de evolución en  $\Gamma^{(1)} \times \mathbb{I}$ .* Consideremos el problema disipativo local de evolución del problema de contacto friccional,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{Z}_c &= \mathbf{A}_c[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\boldsymbol{\Gamma}}] & \text{sobre } \Gamma^{(1)} \times \mathbb{I}, \\ \mathbf{Z}_c|_{t=0} &= \mathbf{Z}_{c0} & \text{sobre } \Gamma^{(1)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

junto con

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Gamma}_c &= \gamma_c \mathbf{G}_c[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\boldsymbol{\Gamma}}] \quad \text{sobre } \Gamma^{(1)} \times \mathbb{I}, \\ \boldsymbol{\Gamma}_c|_{t=0} &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma^{(1)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

donde  $\mathbf{Z}_c$ , perteneciente a un espacio de Sobolev  $\mathcal{Z}_c$ , es un conjunto de variables primales independientes,  $\boldsymbol{\Gamma}_c$  es un conjunto de variables internas,  $\mathbf{A}_c[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\boldsymbol{\Gamma}}]$  y  $\mathbf{G}_c[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\boldsymbol{\Gamma}}]$  son operadores no lineales y  $\gamma_c \geq 0$  es un multiplicador friccional. Adicionalmente, agrupando variables y utilizando una notación compacta, definimos el conjunto de variables,  $\bar{\mathbf{Z}} := \{\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_c\}$  y  $\bar{\boldsymbol{\Gamma}} := \{\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Gamma}_c\}$ , y operadores no lineales,  $\bar{\mathbf{A}}[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\boldsymbol{\Gamma}}] := \{\mathbf{A}[\mathbf{Z}, \boldsymbol{\Gamma}], \mathbf{A}_c[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\boldsymbol{\Gamma}}]\}$  y  $\bar{\mathbf{G}}[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\boldsymbol{\Gamma}}] := \{\mathbf{G}[\mathbf{Z}, \boldsymbol{\Gamma}], \mathbf{G}_c[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\boldsymbol{\Gamma}}]\}$ .

En la formulación del método de paso fraccionado descrito más abajo, es esencial ver el conjunto de variables internas  $\bar{\boldsymbol{\Gamma}}$  como variables definidas implícitamente en función de las variables  $\bar{\mathbf{Z}}$  a partir de las ecuaciones de evolución. Por lo tanto,  $\bar{\mathbf{Z}}$  son las únicas variables independientes y su elección constituye un aspecto crucial en la formulación del método de paso fraccionado. Véase SIMO [1994], AGELET DE SARACIBAR *et al.* [1997] y LAURSEN [1999] para una descripción más detallada.

Motivados por la estructura y las restricciones de diseño de la partición isentrópica descrita más abajo, consideramos el siguiente conjunto de variables  $\bar{\mathbf{Z}}$

$$\bar{\mathbf{Z}} := \{\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_c\}, \quad (3.52)$$

donde

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{Z} &:= \{\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{p}, H^e, H^p, L\} \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{I}, \\ \mathbf{Z}_c &:= \{H_c^e, H_c^p\} \quad \text{sobre } \Gamma^{(1)} \times \mathbb{I}, \end{aligned}} \quad (3.53)$$

junto con el conjunto de variables internas  $\bar{\boldsymbol{\Gamma}}$  definido como

$$\bar{\boldsymbol{\Gamma}} := \{\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Gamma}_c\} \quad \text{con } \boldsymbol{\Gamma} := \{\boldsymbol{\Gamma}^p, \boldsymbol{\Gamma}^v\}, \quad (3.54)$$

donde

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}^p &:= \{\boldsymbol{\epsilon}^p, \xi_\alpha\} \quad \text{y } \boldsymbol{\Gamma}^v := \{\text{dev}[\boldsymbol{\alpha}], \text{tr}[\boldsymbol{\alpha}]\} \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{I}, \\ \boldsymbol{\Gamma}_c &:= \{g_T^{p\alpha}, \zeta_{c\beta}\} \quad \text{sobre } \Gamma^{(1)} \times \mathbb{I}. \end{aligned}} \quad (3.55)$$

En las expresiones anteriores  $\boldsymbol{\varphi}$  es la aplicación que define el movimiento,  $\mathbf{p} := \rho_0 \mathbf{V}$  es el momento lineal,  $H^e$  y  $H^p$  son la entropía elástica (incluyendo la contribución de cambio de fase) y plástica por unidad de volumen en la configuración de referencia,  $\boldsymbol{\epsilon}^p$  la deformación plástica,  $\xi_\alpha$  la variable de endurecimiento plástico y  $\boldsymbol{\alpha}$  la deformación viscosa. Adicionalmente,  $H_c^e$  y  $H_c^p$  son la entropía de contacto elástica y plástica por unidad de superficie en la configuración de referencia,  $g_T^{p\alpha}$  el deslizamiento plástico y  $\zeta_{c\beta}$  las variables de endurecimiento friccional.

El resto de variables del problema puede definirse en función de  $\bar{\mathbf{Z}}$  y  $\bar{\boldsymbol{\Gamma}}$  mediante las adecuadas ecuaciones cinemáticas y constitutivas. En particular,

- i. La deformación elástica  $\boldsymbol{\epsilon}^e := \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p$ .

- ii. El tensor de tensiones de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma} := \partial_{\boldsymbol{\epsilon}^e} \hat{E}(\boldsymbol{\epsilon}^e, H^e, \xi_\alpha, \boldsymbol{\alpha})$  y las variables de tensión de endurecimiento  $\beta^\alpha := -\partial_{\xi_\alpha} \hat{E}(\boldsymbol{\epsilon}^e, H^e, \xi_\alpha, \boldsymbol{\alpha})$ .
- iii. La temperatura  $\Theta := \partial_{H^e} \hat{E}(\boldsymbol{\epsilon}^e, H^e, \xi_\alpha, \boldsymbol{\alpha})$  y el flujo de calor  $\mathbf{Q} = -K \text{GRAD}[\Theta]$ .
- iv. La penetración normal  $g_N := -\llbracket \boldsymbol{\varphi} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\nu}$  y el deslizamiento tangencial  $g_T^\alpha$  dado por la integración temporal de  $\dot{g}_T^\alpha := \llbracket \mathbf{V} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha$ .
- v. La presión nominal de contacto  $t_N := \partial_{g_N} \hat{E}_c(g_N, g_T^{\alpha}, H_c^e, \zeta_{c\beta})$ , la tracción nominal tangente friccional  $t_{T\alpha} := \partial_{g_T^\alpha} \hat{E}_c(g_N, g_T^{\alpha}, H_c^e, \zeta_{c\beta})$  y la variable conjugada de la de endurecimiento friccional  $q_c^\beta := -\partial_{\zeta_c} \hat{E}_c(g_N, g_T^{\alpha}, H_c^e, \zeta_{c\beta})$ .
- vi. La temperatura de contacto  $\Theta_c = \partial_{H_c^e} \hat{E}_c(g_N, g_T^{\alpha}, H_c^e, \zeta_{c\beta})$ .

(A) *Operadores no lineales termoplásticos/viscosos en  $\bar{\Omega} \times \mathbb{I}$ .* Con las definiciones anteriores, y suponiendo que no existen fuerzas másicas ni fuentes de calor, las ecuaciones de evolución de gobierno del problemas termomecánico pueden escribirse en la forma dada por (3.48) y (3.49), donde los operadores no lineales  $\mathbf{A}[\mathbf{Z}, \boldsymbol{\Gamma}]$  y  $\mathbf{G}[\mathbf{Z}, \boldsymbol{\Gamma}] = \{\mathbf{G}^p[\mathbf{Z}, \boldsymbol{\Gamma}], \mathbf{G}^v[\mathbf{Z}, \boldsymbol{\Gamma}]\}$  se definen como:

$$\mathbf{A}[\mathbf{Z}, \boldsymbol{\Gamma}] := \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{\rho_0} \mathbf{p} \\ \text{DIV}[\boldsymbol{\sigma}] \\ -\frac{1}{\Theta} \text{DIV}[\mathbf{Q}] + \frac{1}{\Theta} \mathcal{D}_{mech} \\ \frac{1}{\Theta} \mathcal{D}_{ther} \\ \mathcal{H}^{pc} \end{array} \right\}, \quad (3.56)$$

$$\mathbf{G}^p[\mathbf{Z}, \boldsymbol{\Gamma}] := \left\{ \begin{array}{c} \partial_\sigma \hat{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}, q^\alpha, \Theta) \\ \partial_{q^\alpha} \hat{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}, q^\alpha, \Theta) \end{array} \right\}, \quad \mathbf{G}^v[\mathbf{Z}, \boldsymbol{\Gamma}] := \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{\eta_v^{dev}} \text{dev}[\boldsymbol{\beta}] \\ \frac{1}{\eta_v^{vol}} \text{tr}[\boldsymbol{\beta}] \end{array} \right\},$$

donde  $\mathcal{H}^{pc}$  viene dado por

$$\mathcal{H}^{pc} := -\Theta \partial_{\Theta}^2 \hat{\Psi}_{tpc}(\Theta) \cdot \dot{\Theta}, \quad (3.57)$$

y la disipación mecánica  $\mathcal{D}_{mech}$  y térmica  $\mathcal{D}_{ther}$  son

$$\mathcal{D}_{mech} := \gamma \boldsymbol{\Sigma}^p : \mathbf{G}^p[\mathbf{Z}, \boldsymbol{\Gamma}] + \boldsymbol{\Sigma}^v : \mathbf{G}^v[\mathbf{Z}, \boldsymbol{\Gamma}] \geq 0, \quad \mathcal{D}_{ther} := \gamma \Theta \partial_\Theta \hat{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}, \beta^\alpha, \Theta), \quad (3.58)$$

donde, utilizando una notación compacta, hemos denominado como  $\boldsymbol{\Sigma}^{pT} := [\boldsymbol{\sigma}^T, \beta^\alpha]$  y  $\boldsymbol{\Sigma}^{vT} := [\text{dev}[\boldsymbol{\beta}]^T, \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\beta}]]$ .

(B) *Operadores no lineales termofrictionales en  $\Gamma^{(1)} \times \mathbb{I}$ .* Utilizando las definiciones anteriores, las ecuaciones de evolución del problema termofrictional pueden escribirse en la forma dada por (3.50) y (3.51), donde los operadores termofrictionales no lineales  $\mathbf{A}_c[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\boldsymbol{\Gamma}}]$  y  $\mathbf{G}_c[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\boldsymbol{\Gamma}}]$  pueden escribirse como

$$\mathbf{A}_c[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\boldsymbol{\Gamma}}] := \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{\Theta_c} (Q_c^{(1)} + Q_c^{(2)}) + \frac{1}{\Theta_c} \mathcal{D}_{c,mech} \\ \frac{1}{\Theta_c} \mathcal{D}_{c,ther} \end{array} \right\}, \quad (3.59)$$

$$\mathbf{G}_c[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\boldsymbol{\Gamma}}] := \left\{ \begin{array}{c} \partial_{t_{T\alpha}} \hat{\Phi}_c(t_N, t_{T\alpha}, \Theta_c, q_c^\beta) \\ \partial_{q_c^\beta} \hat{\Phi}_c(t_N, t_{T\alpha}, \Theta_c, q_c^\beta) \end{array} \right\},$$

donde la disipación mecánica  $\mathcal{D}_{c,mech}$  y disipación térmica  $\mathcal{D}_{c,ther}$  vienen dadas por

$$\mathcal{D}_{c,mech} := t_{T\alpha} \dot{g}_T^{p\alpha} + q_c^\beta \dot{\zeta}_{c\beta} \geq 0, \quad \mathcal{D}_{c,ther} := \gamma_c \Theta_c \partial_{\Theta_c} \hat{\Phi}_c(t_N, t_{T\alpha}, \Theta_c, q_c^\beta). \quad (3.60)$$

### 3.3.2. Estimador "a-priori" de estabilidad

Para problemas de evolución no lineales disipativos, la estabilidad no lineal puede establecerse en función de un estimador "a-priori" en la forma

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mathcal{L}(\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\Gamma}) \leq 0 \quad \text{for } t \in [0, T]} \quad (3.61)$$

donde  $\mathcal{L}(\cdot)$  es una función no negativa del tipo *Lyapunov*.

Para problemas de termoplasticidad no lineal con contacto friccional, véase ARMERO & SIMO [1993] y LAURSEN [1999], consideramos un funcional de energía libre canónico ampliado  $\mathcal{L}(\cdot)$  definido como

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}(\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\Gamma}) = & \int_{\Omega} \left[ \frac{|\mathbf{p}|^2}{2\rho_0} + \hat{E}(\boldsymbol{\epsilon}^e, H^e, \xi_{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) - \Theta_0 H^e \right] d\Omega + V_{ext}(\boldsymbol{\varphi}) \\ & + \int_{\Gamma^{(1)}} [\hat{E}_c(g_N, g_T^{\alpha}, H_c^e, \zeta_{c\beta}) - \Theta_0 H_c^e] d\Gamma, \end{aligned}} \quad (3.62)$$

y suponemos que se verifican las siguientes condiciones,

- i. No existen fuentes internas de calor, es decir,  $R = 0$ ,
- ii. Fuerzas conservativas que derivan de un potencial  $V_{ext}(\boldsymbol{\varphi})$ , es decir,  $DV_{ext} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 := -\langle \mathbf{B}, \boldsymbol{\eta}_0 \rangle - \langle \bar{\mathbf{t}}, \boldsymbol{\eta}_0 \rangle_{\Gamma_{\sigma}}$ ,
- iii. Condiciones de contorno de tipo Dirichlet para la temperatura, con temperatura prescrita constante  $\Theta_0 > 0$ , es decir,  $\Theta = \Theta_0$  en  $\Gamma_{\Theta} \times \mathbb{I}$  y  $\Gamma_Q = \emptyset$ , o condiciones de contorno de tipo Von Neuman para el flujo normal de calor, es decir,  $\bar{Q} = 0$  en  $\Gamma_Q \times \mathbb{I}$  y  $\Gamma_{\Theta} = \emptyset$ , o en general condiciones de contorno mixtas tal que se verifica que  $\bar{Q}(\Theta - \Theta_0) = 0$  en  $\Gamma_{\Theta} \cup \Gamma_Q \times \mathbb{I}$ .

Entonces  $\mathcal{L}(\cdot)$  es una función no-creciente del tipo *Lyapunov* a lo largo del flujo generado por el problema termoplástico y un cálculo estándar muestra que se verifica el estimador "a-priori" de estabilidad en  $\mathbb{I}$ :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\Gamma}) = & - \int_{\Omega} \frac{\Theta_0}{\Theta} [\mathcal{D}_{mech} + \mathcal{D}_{con}] d\Omega \\ & - \int_{\Gamma^{(1)}} \frac{\Theta_0}{\Theta_c} [\mathcal{D}_{c,mech} + \mathcal{D}_{c,con}] d\Gamma \leq 0. \end{aligned}} \quad (3.63)$$

Esta condición puede verse, véase ARMERO & SIMO [1993], LAURSEN [1999], como un estimador fundamental "a-priori" de estabilidad para el problema de evolución termoplástico, el cual debe ser preservado por el algoritmo de integración temporal.

### 3.3.3. Operadores de partición

Consideremos el problema disipativo de evolución dado por (3.48)-(3.51) con la función no-creciente tipo Lyapunov asociada  $\mathcal{L}(\cdot)$  dada por (3.62). Consideremos una partición aditiva del campo vectorial  $\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}^{(1)} + \bar{\mathbf{A}}^{(2)}$ , con  $\bar{\mathbf{A}}^{(\alpha)} := \{\mathbf{A}^{(\alpha)}, \mathbf{A}_c^{(\alpha)}\}$ , dando lugar a los siguientes dos sub-problemas

$$\left. \begin{array}{l} \textit{Problema 1} \\ \dot{\bar{\mathbf{Z}}} = \bar{\mathbf{A}}^{(1)}[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\Gamma}], \\ \dot{\bar{\Gamma}}^p = \gamma \mathbf{G}^p[\mathbf{Z}, \Gamma], \\ \dot{\bar{\Gamma}}^v = \mathbf{G}^v[\mathbf{Z}, \Gamma], \\ \dot{\bar{\Gamma}}_c = \gamma_c \mathbf{G}_c[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\Gamma}], \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \textit{Problema 2} \\ \dot{\bar{\mathbf{Z}}} = \bar{\mathbf{A}}^{(2)}[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\Gamma}], \\ \dot{\bar{\Gamma}}^p = \gamma \mathbf{G}^p[\mathbf{Z}, \Gamma], \\ \dot{\bar{\Gamma}}^v = \mathbf{G}^v[\mathbf{Z}, \Gamma], \\ \dot{\bar{\Gamma}}_c = \gamma_c \mathbf{G}_c[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\Gamma}]. \end{array} \right\} \quad (3.64)$$

La restricción crítica en el diseño del operador partición es que cada uno de los sub-problemas *debe preservar la estructura disipativa subyacente del problema original*, es decir,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \mathcal{L}(\bar{\mathbf{Z}}^{(\alpha)}, \bar{\Gamma}^{(\alpha)}) \leq 0, \quad \alpha = 1, 2} \quad (3.65)$$

donde  $t \mapsto (\bar{\mathbf{Z}}^{(\alpha)}, \bar{\Gamma}^{(\alpha)})$  denota el flujo generado por el campo vectorial  $\bar{\mathbf{A}}^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Vamos a considerar dos operadores de partición distintos. En primer lugar, siguiendo a ARMERO & SIMO [1992A,1992B,1993], véase también LAURSEN [1999] para problemas de contacto friccional, consideramos una partición isentrópica del problema original, que satisface la restricción crítica de diseño mencionada anteriormente. Esta partición es comparada más adelante con una partición isotérmica del problema, la cual no satisface la restricción de diseño.

(A) *El operador de partición isentrópico.* Consideremos la siguiente partición del problema original, basada en un operador isentrópico del campo vectorial  $\bar{\mathbf{A}}[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\Gamma}]$ :

$$\bar{\mathbf{A}}[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\Gamma}] := \bar{\mathbf{A}}_{ise}^{(1)}[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\Gamma}] + \bar{\mathbf{A}}_{ise}^{(2)}[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\Gamma}], \quad (3.66)$$

donde definimos los campos vectoriales  $\bar{\mathbf{A}}_{ise}^{(1)} := \{\mathbf{A}_{ise}^{(1)}, \mathbf{A}_{c,ise}^{(1)}\}$  y  $\bar{\mathbf{A}}_{ise}^{(2)} := \{\mathbf{A}_{ise}^{(2)}, \mathbf{A}_{c,ise}^{(2)}\}$  como

$$\boxed{\mathbf{A}_{ise}^{(1)}[\mathbf{Z}, \Gamma] := \begin{Bmatrix} \frac{1}{\rho_0} \mathbf{p} \\ \text{DIV}[\boldsymbol{\sigma}] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{ise}^{(2)}[\mathbf{Z}, \Gamma] := \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\theta} \text{DIV}[\mathbf{Q}] + \frac{1}{\theta} \mathcal{D}_{mech} \\ \frac{1}{\theta} \mathcal{D}_{ther} \\ \mathcal{H}^{pc} \end{Bmatrix},} \quad (3.67)$$

$$\boxed{\mathbf{A}_{c,ise}^{(1)}[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\Gamma}] := \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{c,ise}^{(2)}[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\Gamma}] := \begin{Bmatrix} \frac{1}{\theta_c} (Q_c^{(1)} + Q_c^{(2)}) + \frac{1}{\theta_c} \mathcal{D}_{c,mech} \\ \frac{1}{\theta_c} \mathcal{D}_{c,ther} \end{Bmatrix},} \quad (3.68)$$

y consideremos los siguientes dos problemas de evolución:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\text{Problema 1}} \\ \dot{\bar{\mathbf{Z}}} = \bar{\mathbf{A}}_{ise}^{(1)}[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\mathbf{\Gamma}}], \\ \dot{\bar{\mathbf{\Gamma}}}^p = \gamma \mathbf{G}^p[\mathbf{Z}, \mathbf{\Gamma}], \\ \dot{\bar{\mathbf{\Gamma}}}^v = \mathbf{G}^v[\mathbf{Z}, \mathbf{\Gamma}], \\ \dot{\bar{\mathbf{c}}} = \gamma_c \mathbf{G}_c[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\mathbf{\Gamma}}], \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \underline{\text{Problema 2}} \\ \dot{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{A}}_{ise}^{(2)}[\mathbf{Z}, \mathbf{\Gamma}], \\ \dot{\mathbf{\Gamma}}^p = \gamma \mathbf{G}^p[\mathbf{Z}, \mathbf{\Gamma}], \\ \dot{\mathbf{\Gamma}}^v = \mathbf{G}^v[\mathbf{Z}, \mathbf{\Gamma}], \\ \dot{\mathbf{c}} = \gamma_c \mathbf{G}_c[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\mathbf{\Gamma}}]. \end{array} \right\} \quad (3.69)$$

En esta partición, el *Problema 1* define un problema mecánico a entropía constante y el *Problema 2* define un problema térmico a configuración fija. Nótese que en el *Problema 1* se ha impuesto una condición más fuerte, mediante la restricción adicional que no sólo la entropía específica total debe permanecer constante, sino también la parte elástica y plástica, así como el calor latente, deben permanecer constantes. Nótese también, que la evolución de las variables internas plásticas  $\mathbf{\Gamma}$  se impone en ambos problemas.

Denominando  $t \mapsto (\bar{\mathbf{Z}}^{(\alpha)}, \bar{\mathbf{\Gamma}}^{(\alpha)})$  el flujo generado por el campo vectorial  $\bar{\mathbf{A}}_{ise}^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , un cálculo estándar muestra que debe verificarse el siguiente estimador de estabilidad:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(\bar{\mathbf{Z}}^{(1)}, \bar{\mathbf{\Gamma}}^{(1)}) &= - \int_{\Omega} \mathcal{D}_{mech}^{(1)} d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma^{(1)}} \mathcal{D}_{c,mech}^{(1)} d\Gamma \leq 0, \\ \frac{d}{dt} \mathcal{L}(\bar{\mathbf{Z}}^{(2)}, \bar{\mathbf{\Gamma}}^{(2)}) &= - \int_{\Omega} \frac{\Theta_0}{\Theta^{(2)}} [\mathcal{D}_{mech}^{(2)} + \mathcal{D}_{con}^{(2)}] d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma^{(1)}} \frac{\Theta_0}{\Theta_c^{(2)}} [\mathcal{D}_{c,mech}^{(2)} + \mathcal{D}_{c,con}^{(2)}] d\Gamma \leq 0, \end{aligned}} \quad (3.70)$$

donde  $\mathcal{D}_{mech}^{(\alpha)}$ ,  $\mathcal{D}_{con}^{(\alpha)}$  y  $\Theta^{(\alpha)}$  son la disipación mecánica, disipación térmica y temperatura absoluta, respectivamente, y  $\mathcal{D}_{c,mech}^{(\alpha)}$ ,  $\mathcal{D}_{c,con}^{(\alpha)}$  y  $\Theta_c^{(\alpha)}$  son la disipación mecánica de contacto friccional, disipación térmica por conducción de contacto y la temperatura de contacto, respectivamente, en el *Problema*  $\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Por lo tanto, vemos que la partición isentrópica del problema termoplástico con contacto preserva la estructura disipativa subyacente del mismo.

(B) *El operador de partición isotérmico.* Consideremos la siguiente partición del problema original, basada en un operador isotérmico del campo vectorial  $\bar{\mathbf{A}}[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\mathbf{\Gamma}}]$ :

$$\bar{\mathbf{A}}[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\mathbf{\Gamma}}] := \bar{\mathbf{A}}_{iso}^{(1)}[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\mathbf{\Gamma}}] + \bar{\mathbf{A}}_{iso}^{(2)}[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\mathbf{\Gamma}}], \quad (3.71)$$

donde definimos los campos vectoriales  $\bar{\mathbf{A}}_{iso}^{(1)} := \{\mathbf{A}_{iso}^{(1)}, \mathbf{A}_{c,iso}^{(1)}\}$  y  $\bar{\mathbf{A}}_{iso}^{(2)} := \{\mathbf{A}_{iso}^{(2)}, \mathbf{A}_{c,iso}^{(2)}\}$  como

$$\boxed{\mathbf{A}_{iso}^{(1)}[\mathbf{Z}, \mathbf{\Gamma}] := \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_0} \mathbf{p} \\ \text{DIV}[\boldsymbol{\sigma}] \\ \frac{1}{\Theta} \mathcal{H}^{ep} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{iso}^{(2)}[\mathbf{Z}, \mathbf{\Gamma}] := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\Theta} \text{DIV}[\mathbf{Q}] + \frac{1}{\Theta} (\mathcal{D}_{mech} - \mathcal{H}^{ep}) \\ \frac{1}{\Theta} \mathcal{D}_{ther} \\ \mathcal{H}^{pc} \end{pmatrix},} \quad (3.72)$$

$$\mathbf{A}_{c,iso}^{(1)}[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\Gamma}] := \begin{Bmatrix} \frac{1}{\Theta_c} \mathcal{H}^{fc} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{c,iso}^{(2)}[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\Gamma}] := \begin{Bmatrix} \frac{1}{\Theta_c} (Q_c^{(1)} + Q_c^{(2)}) + \frac{1}{\Theta_c} (\mathcal{D}_{c,mech} - \mathcal{H}^{fc}) \\ \frac{1}{\Theta_c} \mathcal{D}_{c,ther} \end{Bmatrix}, \quad (3.73)$$

y consideramos los siguientes dos problemas de evolución:

$$\left. \begin{array}{l} \textit{Problema 1} \\ \dot{\bar{\mathbf{Z}}} = \bar{\mathbf{A}}_{iso}^{(1)}[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\Gamma}], \\ \dot{\bar{\Gamma}}^p = \gamma \mathbf{G}^p[\mathbf{Z}, \Gamma], \\ \dot{\bar{\Gamma}}^v = \mathbf{G}^v[\mathbf{Z}, \Gamma], \\ \dot{\bar{\Gamma}}_c = \gamma_c \mathbf{G}_c[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\Gamma}], \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \textit{Problema 2} \\ \dot{\bar{\mathbf{Z}}} = \bar{\mathbf{A}}_{iso}^{(2)}[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\Gamma}], \\ \dot{\bar{\Gamma}}^p = \gamma \mathbf{G}^p[\mathbf{Z}, \Gamma], \\ \dot{\bar{\Gamma}}^v = \mathbf{G}^v[\mathbf{Z}, \Gamma], \\ \dot{\bar{\Gamma}}_c = \gamma_c \mathbf{G}_c[\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\Gamma}]. \end{array} \right\} \quad (3.74)$$

En esta partición del problema original, el *Problema 1* define un problema mecánico a temperatura constante y el *Problema 2* define un problema térmico a configuración fija. Nótese también, que la evolución de las variables internas plásticas viene impuesta en los dos problemas.

Denominando  $t \mapsto (\bar{\mathbf{Z}}^{(\alpha)}, \bar{\Gamma}^{(\alpha)})$  al flujo generado por el campo vectorial  $\bar{\mathbf{A}}_{iso}^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , un cálculo estándar muestra que se verifica que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(\bar{\mathbf{Z}}^{(1)}, \bar{\Gamma}^{(1)}) &= - \int_{\Omega} \mathcal{D}_{mech}^{(1)} d\Omega + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{\Theta_0}{\Theta^{(1)}}\right) \mathcal{H}^{ep(1)} d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma^{(1)}} \mathcal{D}_{c,mech}^{(1)} d\Gamma + \int_{\Gamma^{(1)}} \left(1 - \frac{\Theta_0}{\Theta_c^{(1)}}\right) \mathcal{H}^{fc(1)} d\Gamma \not\leq 0, \\ \frac{d}{dt} \mathcal{L}(\bar{\mathbf{Z}}^{(2)}, \bar{\Gamma}^{(2)}) &= - \int_{\Omega} \frac{\Theta_0}{\Theta^{(2)}} [\mathcal{D}_{mech}^{(2)} + \mathcal{D}_{con}^{(2)}] d\Omega - \int_{\Omega} \left(1 - \frac{\Theta_0}{\Theta^{(2)}}\right) \mathcal{H}^{ep(2)} d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma^{(1)}} \frac{\Theta_0}{\Theta_c^{(2)}} [\mathcal{D}_{c,mech}^{(2)} + \mathcal{D}_{c,con}^{(2)}] d\Gamma - \int_{\Gamma^{(1)}} \left(1 - \frac{\Theta_0}{\Theta_c^{(2)}}\right) \mathcal{H}^{fc(2)} d\Gamma \not\leq 0, \end{aligned} \quad (3.75)$$

donde  $\mathcal{D}_{mech}^{(\alpha)}$ ,  $\mathcal{D}_{con}^{(\alpha)}$ ,  $\mathcal{H}^{ep(\alpha)}$  y  $\Theta^{(\alpha)}$  son la disipación mecánica, disipación térmica por conducción, calor estructural y temperatura absoluta, respectivamente, y  $\mathcal{D}_{c,mech}^{(\alpha)}$ ,  $\mathcal{D}_{c,con}^{(\alpha)}$ ,  $\mathcal{H}^{fc(\alpha)}$  y  $\Theta_c^{(\alpha)}$  son la disipación mecánica de contacto friccional, la disipación térmica por conducción de contacto friccional, calor friccional por endurecimiento y temperatura de contacto, respectivamente, en el *Problema*  $\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Nótese ahora, que las contribuciones de  $\mathcal{H}^{ep(\alpha)}$  y de  $\mathcal{H}^{fc(\alpha)}$  a las ecuaciones de evolución de cada uno de los problemas que surgen de la partición isotérmica del problema original, rompe la estructura disipativa del mismo.

### 3.3.4. Algoritmo de formula producto

La partición aditiva de las ecuaciones de gobierno conduce a un algoritmo de formula producto y a un esquema de solución secuencial del problema acoplado, en la cual cada uno de los subproblemas se resuelve de forma secuencial. Recuérdese que el conjunto de variables internas  $\bar{\Gamma}$  viene definido de forma implícita en función del conjunto de variables



$\bar{\mathbf{Z}}$ , que son consideradas como las únicas variables independientes. Por lo tanto, nuestro interés residirá ahora en la versión discretizada en el tiempo de las ecuaciones de evolución (3.48) y (3.50), y la actualización en el tiempo de las variables  $\bar{\mathbf{Z}}$  utilizando un algoritmo de integración temporal.

Consideremos algoritmos  $\mathbb{K}_{\Delta t}^{(\alpha)}[\cdot]$  que sean *consistentes* con los flujos  $t \mapsto (\bar{\mathbf{Z}}^{(\alpha)}, \bar{\Gamma}^{(\alpha)})$ ,  $\alpha = 1, 2$ , y *disipativo estables*, es decir, que verifican el estimador de estabilidad "a priori" para el problema dinámico dado por (3.63). Entonces, el algoritmo definido por la *formula producto*:

$$\mathbb{K}_{\Delta t}[\cdot] = \left( \mathbb{K}_{\Delta t}^{(2)} \circ \mathbb{K}_{\Delta t}^{(1)} \right) [\cdot] \quad (3.76)$$

es también *consistente* y *disipativo estable*. Para *sistemas dinámicos disipativos* si cada uno de los algoritmos es incondicionalmente disipativo estable, entonces el *algoritmo de formula producto* es también incondicionalmente disipativo estable. Este algoritmo de formula producto es sólo de primer orden. Un algoritmo de segundo orden puede definirse utilizando una técnica de doble paso, véase STRANG [1969],

$$\mathbb{K}_{\Delta t}[\cdot] = \left( \mathbb{K}_{\Delta t/2}^{(1)} \circ \mathbb{K}_{\Delta t}^{(2)} \circ \mathbb{K}_{\Delta t/2}^{(1)} \right) [\cdot]. \quad (3.77)$$

Nótese que, de acuerdo con (3.75), algoritmos basados en la partición isotérmica del problema darán lugar a esquemas secuenciales que como mucho serán únicamente condicionalmente estables y únicamente particiones isentrópicas del problema pueden conducir a esquemas incondicionalmente estables.

### 3.3.5. Formulación variacional discretizada en el tiempo

La utilización de un operador de partición, aplicado al sistema acoplado no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias, y un algoritmo de formula producto, conduce a un algoritmo secuencial en el cual cada uno de los subproblemas definidos por la partición se resuelve de forma secuencial, en el marco de los métodos de paso fraccionado clásicos. Nótese que las ecuaciones de evolución de las variables internas se impone en las dos fases del operador de partición. Para la discretización temporal se ha utilizado un algoritmo de Backward-Euler (BE). Se han considerado dos operadores de partición:

(A) *Partición isentrópica*. En la partición isentrópica, introducida por primera vez por ARMERO & SIMO [1992A,1992B,1993], el problema acoplado se divide en una fase mecánica a entropía constante, seguida de una fase térmica a configuración fija, conduciendo a un esquema secuencial incondicionalmente estable. En la fase mecánica, se introducen restricciones adicionales de diseño, imponiendo además que la entropía elástica y el calor latente permamezcan constantes en  $\bar{\mathcal{Q}}$ , y que las entropías elástica y plástica de contacto permanezcan constantes en  $\Gamma^{(1)}$ . Una implementación eficiente del algoritmo puede realizarse utilizando la temperatura como variable principal. Véase ARMERO & SIMO [1992A,1992B,1993] y SIMO [1994].

i. *Fase mecánica*. El problema mecánico se resuelve a entropía constante. Por simplicidad consideraremos únicamente el caso cuasi-estático. De acuerdo con la definición de  $\bar{\mathbf{Z}}$  dada por (3.52)-(3.53) y el operador de partición dado por (3.66)-(3.69), se han introducido

las restricciones adicionales de diseño imponiendo además que la entropía elástica y el calor latente permamezcan constantes en  $\bar{\Omega}$ , y que las entropías elástica y plástica de contacto permanezcan constantes en  $\Gamma^{(1)}$ . La evolución de la temperatura y de la temperatura de contacto se realiza localmente. Las expresiones discretizadas en el tiempo de la forma débil de la ecuación de balance de la cantidad de movimiento, actualización local de la entropía elástica, entropía plástica, calor latente y variables internas en  $\bar{\Omega}$  y entropía elástica de contacto, entropía plástica de contacto y variables internas de contacto en  $\Gamma^{(1)}$ , son:

$$\left. \begin{aligned} \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \text{GRAD}[\boldsymbol{\eta}_0] \rangle - \langle \mathbf{B}, \boldsymbol{\eta}_0 \rangle - \langle \bar{\mathbf{t}}_{n+1}, \boldsymbol{\eta}_0 \rangle_{\Gamma_\sigma} - \langle \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}^{(1)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(1)} - \boldsymbol{\eta}_0^{(2)} \rangle_{\Gamma^{(1)}} = 0, \\ \tilde{H}_{n+1}^e = H_n^e, \\ \tilde{H}_{n+1}^p = H_n^p, \\ \tilde{L}_{n+1} = L_n, \\ \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{n+1}^p = \boldsymbol{\Gamma}_n^p + \tilde{\gamma}_{n+1} \tilde{\mathbf{G}}_{n+1}^p, \\ \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{n+1}^v = \boldsymbol{\Gamma}_n^v + \Delta t \tilde{\mathbf{G}}_{n+1}^v, \end{aligned} \right\} \text{ en } \bar{\Omega} \quad (3.78a)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{H}_{c_{n+1}}^e &= H_{c_n}^e, \\ \tilde{H}_{c_{n+1}}^p &= H_{c_n}^p, \\ \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{c_{n+1}} &= \boldsymbol{\Gamma}_{c_n} + \tilde{\gamma}_{c_{n+1}} \tilde{\mathbf{G}}_{c_{n+1}}, \end{aligned} \right\} \text{ sobre } \Gamma^{(1)} \quad (3.78b)$$

y la temperatura y temperatura de contacto se actualizan localmente mediante  $\tilde{\Theta}_{n+1} = \partial_{H^e} \hat{E}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^e, H_n^e, \tilde{\xi}_{\alpha_{n+1}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{n+1})$  y  $\tilde{\Theta}_{c_{n+1}} = \partial_{H_c^e} \hat{E}_c(\tilde{g}_{N_{n+1}}, \tilde{g}_{T_{n+1}}^{\alpha}, H_{c_n}^e, \tilde{\zeta}_{c_{n+1}})$ , respectivamente.

ii. *Fase térmica.* Utilizando un esquema de integración de BE, la expresión discretizada de la forma débil de la ecuación de balance de la energía, actualización local de la entropía elástica, entropía plástica, calor latente y variables internas en  $\bar{\Omega}$  y entropía elástica de contacto, entropía plástica de contacto y variables internas de contacto en  $\Gamma^{(1)}$ , en la fase térmica, son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \langle \Theta_{n+1} (H_{n+1}^e - H_n^e), \zeta_0 \rangle - \langle \mathbf{Q}_{n+1}, \text{GRAD}[\zeta_0] \rangle - \langle R + \mathcal{D}_{mech_{n+1}}, \zeta_0 \rangle \\ + \langle \bar{Q}_{n+1}, \zeta_0 \rangle_{\Gamma_Q} + \langle Q_{c_{n+1}}^{(1)}, \zeta_0^{(1)} \rangle_{\Gamma^{(1)}} + \langle Q_{c_{n+1}}^{(2)}, \zeta_0^{(2)} \rangle_{\Gamma^{(1)}} = 0, \\ H_{n+1}^e = -\partial_{\Theta} \hat{\Psi}(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e, \Theta_{n+1}, \xi_{\alpha_{n+1}}, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}), \\ H_{n+1}^p = H_n^p + \frac{\Delta t}{\Theta_{n+1}} \mathcal{D}_{ther_{n+1}}, \\ L_{n+1} = L(\Theta_{n+1}), \\ \boldsymbol{\Gamma}_{n+1}^p = \boldsymbol{\Gamma}_n^p + \gamma_{n+1} \mathbf{G}_{n+1}^p, \\ \boldsymbol{\Gamma}_{n+1}^v = \boldsymbol{\Gamma}_n^v + \Delta t \mathbf{G}_{n+1}^v, \end{aligned} \right\} \text{ en } \bar{\Omega} \quad (3.79a)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{c_{n+1}}^e &= H_{c_n}^e + \frac{\Delta t}{\Theta_{c_{n+1}}} (Q_{c_{n+1}}^{(1)} + Q_{c_{n+1}}^{(2)}) + \frac{\Delta t}{\Theta_{c_{n+1}}} \mathcal{D}_{c,mech_{n+1}}, \\ H_{c_{n+1}}^p &= H_{c_n}^p + \frac{\Delta t}{\Theta_{c_{n+1}}} \mathcal{D}_{c,ther_{n+1}}, \\ \mathbf{\Gamma}_{c_{n+1}} &= \mathbf{\Gamma}_{c_n} + \gamma_{c_{n+1}} \mathbf{G}_{c_{n+1}}, \end{aligned} \right\} \text{sobre } \Gamma^{(1)} \quad (3.79b)$$

donde  $\Theta_{c_{n+1}} = \partial_{H_c^e} \hat{E}_c(g_{N_{n+1}}, g_{T_{n+1}}^{e\alpha}, H_{c_{n+1}}^e, \zeta_{c_{n+1}})$ .

(B) *Partición isotérmica.* En la partición isotérmica el sistema de ecuaciones acoplado se divide en una fase mecánica a temperatura constante en  $\bar{\Omega}$  y temperatura de contacto constante en  $\Gamma^{(1)}$ , seguida de una fase térmica a configuración fija. Nótese que, en el contexto de los algoritmos de formula producto, utilizando la ecuación de la energía en función de la entropía, la entropía elástica y la entropía elástica de contacto calculadas al finalizar la fase mecánica son utilizadas como condiciones iniciales para la solución de la fase térmica.

i. *Fase mecánica.* Nótese que en condiciones isotérmicas, la entropía plástica, calor latente y entropía plástica de contacto permanecen constantes. Las expresiones discretizadas en el tiempo de la forma débil de la ecuación de balance de la cantidad de movimiento, actualización local de la entropía elástica, entropía plástica, calor latente y variables internas en  $\bar{\Omega}$  y entropía elástica de contacto, entropía plástica de contacto y variables internas de contacto en  $\Gamma^{(1)}$ , son:

$$\left. \begin{aligned} \langle \tilde{\sigma}_{n+1}, \text{GRAD}[\eta_0] \rangle - \langle \mathbf{B}, \boldsymbol{\eta}_0 \rangle - \langle \bar{\mathbf{t}}_{n+1}, \boldsymbol{\eta}_0 \rangle_{\Gamma_\sigma} - \langle \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}^{(1)}, \boldsymbol{\eta}_0^{(1)} - \boldsymbol{\eta}_0^{(2)} \rangle_{\Gamma^{(1)}} &= 0, \\ \tilde{H}_{n+1}^e &= -\partial_{\Theta} \hat{\Psi}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}, \Theta_n, \tilde{\xi}_{\alpha_{n+1}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{n+1}), \\ \tilde{H}_{n+1}^p &= H_n^p, \\ \tilde{L}_{n+1} &= L_n, \\ \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{n+1}^p &= \mathbf{\Gamma}_n^p + \tilde{\gamma}_{n+1} \tilde{\mathbf{G}}_{n+1}^p, \\ \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{n+1}^v &= \mathbf{\Gamma}_n^v + \Delta t \tilde{\mathbf{G}}_{n+1}^v, \end{aligned} \right\} \text{en } \bar{\Omega} \quad (3.80a)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{H}_{c_{n+1}}^e &= -\partial_{\Theta_c} \hat{\Psi}_c(\tilde{g}_{N_{n+1}}, \tilde{g}_{T_{n+1}}^{e\alpha}, \Theta_{c_n}, \tilde{\zeta}_{c_{n+1}}), \\ \tilde{H}_{c_{n+1}}^p &= H_{c_n}^p, \\ \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{c_{n+1}} &= \mathbf{\Gamma}_{c_n} + \tilde{\gamma}_{c_{n+1}} \tilde{\mathbf{G}}_{c_{n+1}}. \end{aligned} \right\} \text{sobre } \Gamma^{(1)} \quad (3.80b)$$

Nótese que las condiciones de diseño  $\tilde{\Theta}_{n+1} = \Theta_n$  y  $\tilde{\Theta}_{c_{n+1}} = \Theta_{c_n}$  han sido introducidas en (80a)<sub>2</sub> y (3.80b)<sub>1</sub>, respectivamente.

ii. *Fase térmica.* Utilizando un esquema de integración temporal de BE, la expresión discretizada de la forma débil de la ecuación de balance de la energía, actualización local de la entropía elástica, entropía plástica, calor latente y variables internas en  $\bar{\Omega}$  y entropía elástica de contacto, entropía plástica de contacto y variables internas de contacto en  $\Gamma^{(1)}$ ,

en la fase térmica, son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \langle \Theta_{n+1} (H_{n+1}^e - \tilde{H}_{n+1}^e), \zeta_0 \rangle - \langle \mathbf{Q}_{n+1}, \text{GRAD}[\zeta_0] \rangle - \langle R + \mathcal{D}_{mech_{n+1}}, \zeta_0 \rangle \\ + \langle \bar{Q}_{n+1}, \zeta_0 \rangle_{\Gamma_Q} + \langle Q_{c_{n+1}}^{(1)}, \zeta_0^{(1)} \rangle_{\Gamma^{(1)}} + \langle Q_{c_{n+1}}^{(2)}, \zeta_0^{(2)} \rangle_{\Gamma^{(1)}} = 0, \\ H_{n+1}^e = -\partial_{\Theta} \hat{\Psi}(\epsilon_{n+1}^e, \Theta_{n+1}, \xi_{\alpha_{n+1}}, \alpha_{n+1}), \\ H_{n+1}^p = H_n^p + \frac{\Delta t}{\Theta_{n+1}} \mathcal{D}_{ther_{n+1}}, \\ L_{n+1} = L(\Theta_{n+1}), \\ \mathbf{I}_{n+1}^p = \mathbf{I}_n^p + \gamma_{n+1} \mathbf{G}_{n+1}^p, \\ \mathbf{I}_{n+1}^v = \mathbf{I}_n^v + \Delta t \mathbf{G}_{n+1}^v, \end{aligned} \right\} \text{ en } \bar{\Omega} \quad (3.81a)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{c_{n+1}}^e &= \tilde{H}_{c_{n+1}}^e + \frac{\Delta t}{\Theta_{c_{n+1}}} (Q_{c_{n+1}}^{(1)} + Q_{c_{n+1}}^{(2)}) + \frac{\Delta t}{\Theta_{c_{n+1}}} (\mathcal{D}_{c,mech_{n+1}} - \mathcal{H}_{n+1}^{fc}), \\ H_{c_{n+1}}^p &= H_{c_n}^p + \frac{\Delta t}{\Theta_{c_{n+1}}} \mathcal{D}_{c,ther_{n+1}}, \\ \mathbf{I}_{c_{n+1}} &= \mathbf{I}_{c_n} + \gamma_{c_{n+1}} \mathbf{G}_{c_{n+1}}. \end{aligned} \right\} \text{ sobre } \Gamma^{(1)} \quad (3.81b)$$

donde  $\Theta_{c_{n+1}} = \partial_{H_c^e} \hat{E}_c(g_{N_{n+1}}, g_{T_{n+1}}^e, H_{c_{n+1}}^e, \zeta_{c_{n+1}})$ .

### 3.4. SIMULACIONES NUMÉRICAS

La formulación presetada en los apartados anteriores, se ilustra aquíen una serie representativa de simulaciones numéricas. En primer lugar se realiza un análisis numérico de la precisión, robustez y estabilidad de la solución de problemas termomecánicos acoplados utilizando los algoritmos de formula producto basados en los operadores de partición isotérmico e isentrópico, en el contexto de un análisis cuasi-estático y dinámico, de un cilindro presurizado de paredes gruesas con un comportamiento constitutivo termoelástico y termoplástico. A continuación, los objetivos son validar de forma práctica el modelo termomecánico desarrollado y mostrar la robustez de la formulación global en una serie de ejemplos académicos e industriales de solidificación. Los cálculos se han realizado utilizando el programa de elementos finitos COMET. Los sistemas de ecuaciones resultantes de la formulación discretizada se resuelven utilizando el método de Newton-Raphson en combinación con un método de optimización unidireccional. La convergencia del procedimiento incremental iterativo, se comprueba requiriendo una tolerancia del 0.1% en la norma de error del residuo.

#### 3.4.1. Análisis numérico de los algoritmos de partición isotérmico e isentrópico.

(A) *Enfriamiento de un cilindro termoelástico/termoplástico de paredes gruesas.* En este ejemplo se presenta un análisis cuasiestático/dinámico del enfriamiento de un cilindro termoelástico/termoplástico presurizado. Los objetivos son realizar un análisis numérico de la precisión, robustez y estabilidad de los algoritmos de partición isotérmica e isentrópica,

para problemas acoplados con un nivel de acoplamiento débil (Caso 1) y fuerte (Caso 2). Con el objetivo de obtener un grado fuerte de acoplamiento, se ha considerado un coeficiente de expansión térmica  $\alpha$  mucho mayor que el real, multiplicándolo por un factor de 6 en el caso cuasiestático y de 3 en el caso dinámico.

La FIGURA 3.1 muestra la geometría inicial del problema, así como las condiciones de contorno. Se han supuesto condiciones de deformación plana en la dirección del eje, por lo que únicamente se ha discretizado una banda unidad en esta dirección. Los radios interior y exterior son  $R_i = 100$  mm y  $R_o = 200$  mm, respectivamente. Las propiedades del material se suponen que varían linealmente con la temperatura. La temperatura inicial del cilindro es  $593$  °K, mientras que la temperatura de referencia (ambiente) es  $293$  °K. Se consideran diferentes coeficientes de convección (constantes) para las superficies interior  $h = 1.16$  N/mm s °K, y exterior,  $h = 0.01$  N/mm s K. La presión exterior sobre la superficie interior del cilindro es de  $200$  N/mm<sup>2</sup>. Se utilizan elementos isoparamétricos bi-lineales axisimétricos para la discretización del cilindro.

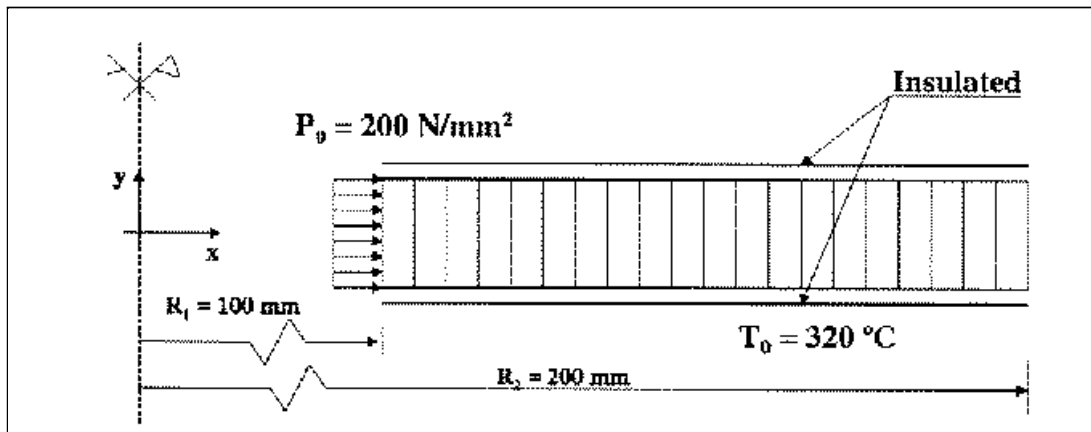


FIGURA 3.1. Enfriamiento de un cilindro presurizado de paredes gruesas. Geometría inicial y condiciones de contorno.

Los resultados obtenidos para el caso cuasi-estático se recogen en las FIGURAS 3.2 y 3.3 para una respuesta constitutiva termoelástica y termoplástica, respectivamente. Las FIGURAS 3.4 y 3.5 recogen los resultados obtenidos para el caso dinámico, con respuestas constitutivas termoelástica y termoplástica, respectivamente. En cada una de estas figuras, se muestra para los Casos 1 y 2, la evolución del desplazamiento radial y de la temperatura en la superficie interior y exterior del cilindro, utilizando las particiones isentrópica e isotérmica. Como era de esperar, estas figuras muestran que para problemas fuertemente acoplados (Caso 2), la partición isotérmica conduce a un comportamiento completamente inestable que finaliza con una explosión de la solución, mientras que la partición isentrópica permite obtener una solución estable. A pesar de esto, nótese que para problemas débilmente acoplados las dos particiones proporcionan prácticamente la misma solución. Este mismo comportamiento se ha encontrado tanto en el análisis cuasi-estático como dinámico, así como para materiales termoelásticos y termoplásticos.

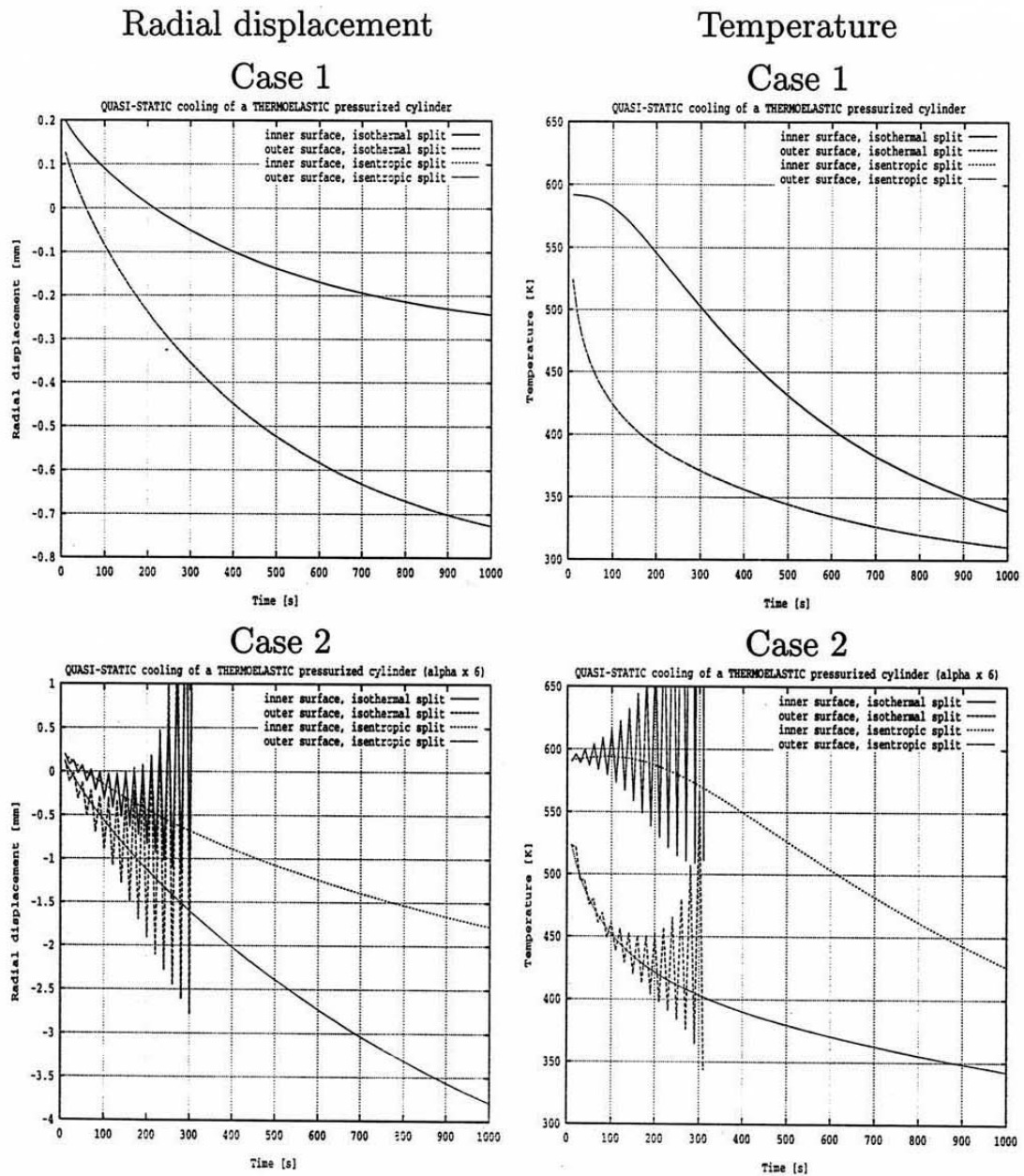


FIGURA 3.2. Análisis cuasi-estático del enfriamiento de un cilindro termoeástico presurizado. Desplazamiento radial y temperatura en las superficies interior y exterior, utilizando la partición isentrópica e isotérmica, para el caso débilmente acoplado (Caso 1) y fuertemente acoplado (Caso 2).

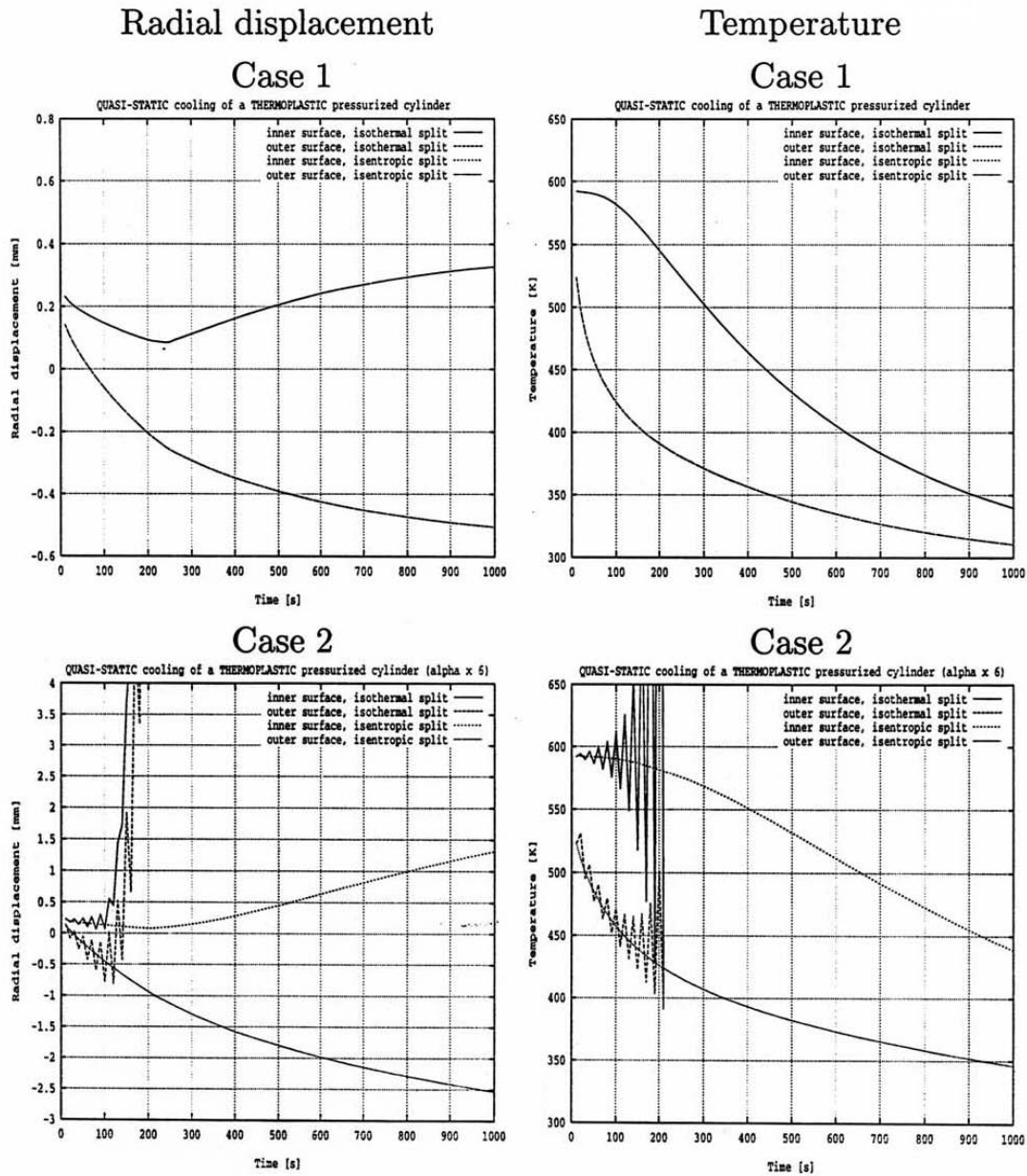


FIGURA 3.3. Análisis cuasi-estático del enfriamiento de un cilindro termoplástico presurizado. Desplazamiento radial y temperatura en las superficies interior y exterior, utilizando la partición isentrópica e isotérmica, para el caso débilmente acoplado (Caso 1) y fuertemente acoplado (Caso 2).

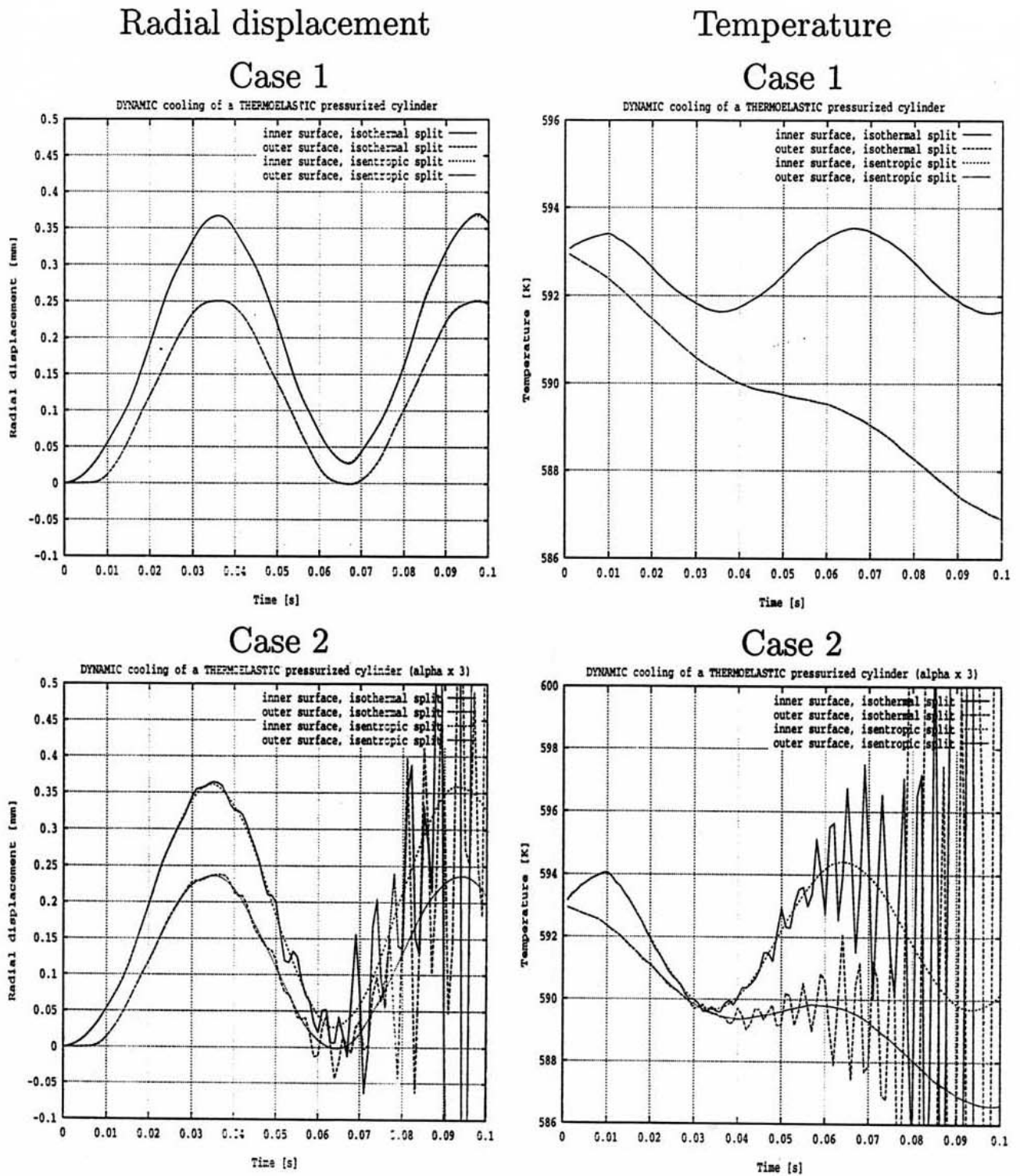


FIGURA 3.4. Análisis dinámico del enfriamiento de un cilindro termoelástico presurizado. Desplazamiento radial y temperatura en las superficies interior y exterior, utilizando la partición isentrópica e isotérmica, para el caso débilmente acoplado (Caso 1) y fuertemente acoplado (Caso 2).



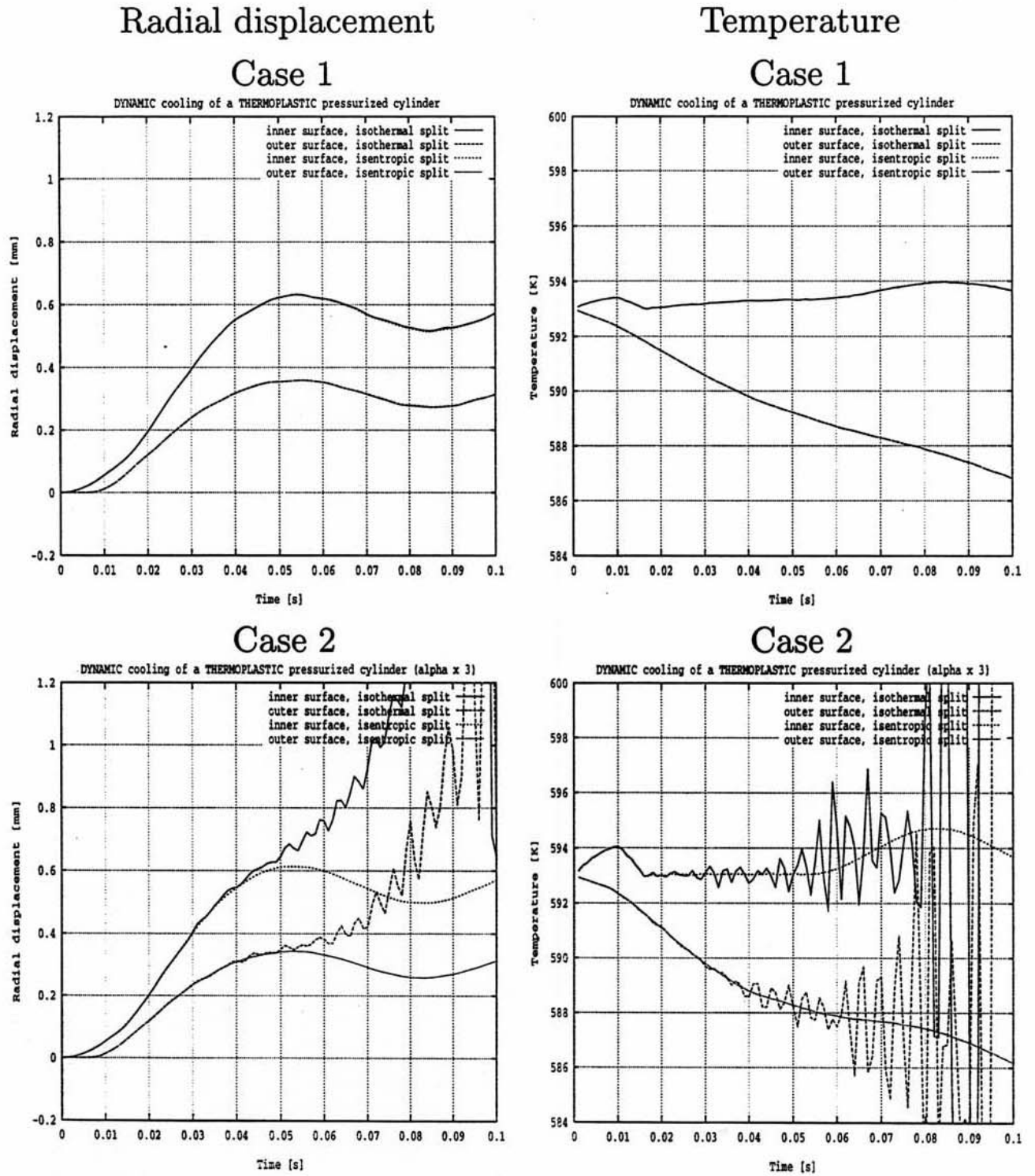


FIGURA 3.5. Análisis dinámico del enfriamiento de un cilindro termoplástico presurizado. Desplazamiento radial y temperatura en las superficies interior y exterior, utilizando la partición isentrópica e isotérmica, para el caso débilmente acoplado (Caso 1) y fuertemente acoplado (Caso 2).

### 3.4.2. Simulaciones numéricas de procesos de solidificación.

(A) *Solidificación de un cilindro de aluminio en un molde de acero.* Este ejemplo, tomado de CELENTANO, OLLER & OÑATE [1996], corresponde a la solidificación de un cilindro de aluminio en un molde de acero. La geometría del problema se muestra en la FIGURA 3.6. Se supone que inicialmente el molde está completamente lleno de aluminio en estado líquido a una temperatura uniforme de  $670^{\circ}\text{C}$ . La temperatura inicial del molde es  $200^{\circ}\text{C}$ . Las propiedades del aluminio se han supuesto que son función de la temperatura, mientras que se han supuesto propiedades constantes para el molde de acero. Se ha considerado que las superficies exteriores del molde, así como la superficie superior de la pieza, están completamente aisladas. Se ha supuesto un coeficiente de transmisión de calor constante de valor  $h_{co} = 10 \text{ N/mm s } ^{\circ}\text{K}$  y un coeficiente de convección-radiación función de la temperatura entre la pieza y el molde. Únicamente se han considerado fuerzas gravitatorias. Más detalles sobre los datos geométricos y de material pueden encontrarse en la mencionada referencia.

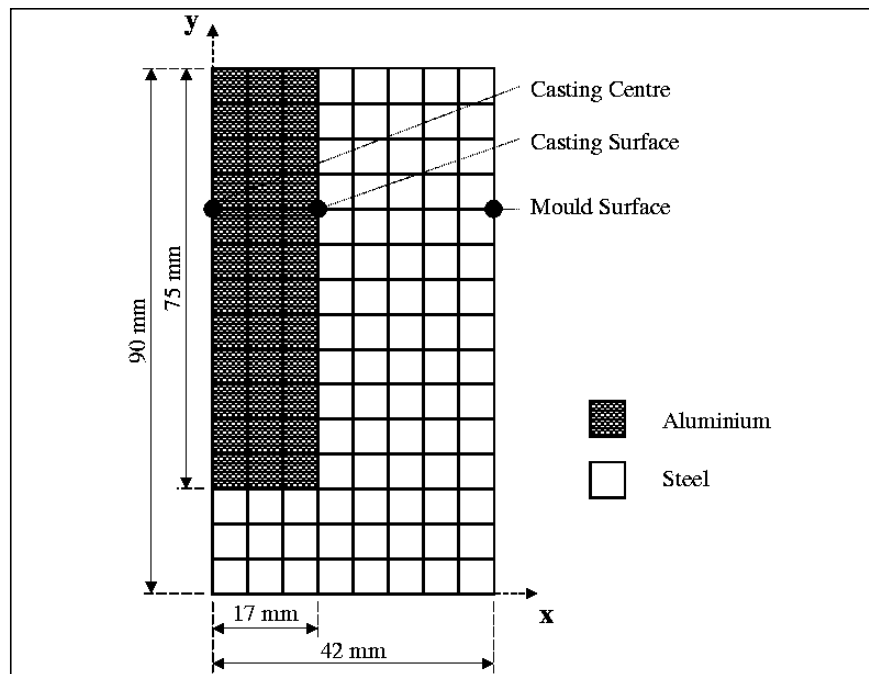


FIGURA 3.6. Solidificación de un cilindro de aluminio en un molde de acero. Geometría del problema.

Para la discretización espacial del cilindro y del molde se han utilizado distintas mallas de elementos finitos: elementos de revolución de 3 y 4 nodos, y elementos tridimensionales tetraédricos y hexaédricos. La simulación numérica se ha realizado hasta un tiempo de 90 segundos utilizando incrementos de tiempo de 1 segundo.

La FIGURA 3.7A muestra la evolución de la temperatura en el centro de la pieza y en la superficie de la pieza y del molde para una sección intermedia. Como puede verse, se produce en el centro de la pieza una típica respuesta horizontal de la evolución de la temperatura debido a la producción del calor latente durante la solidificación, que

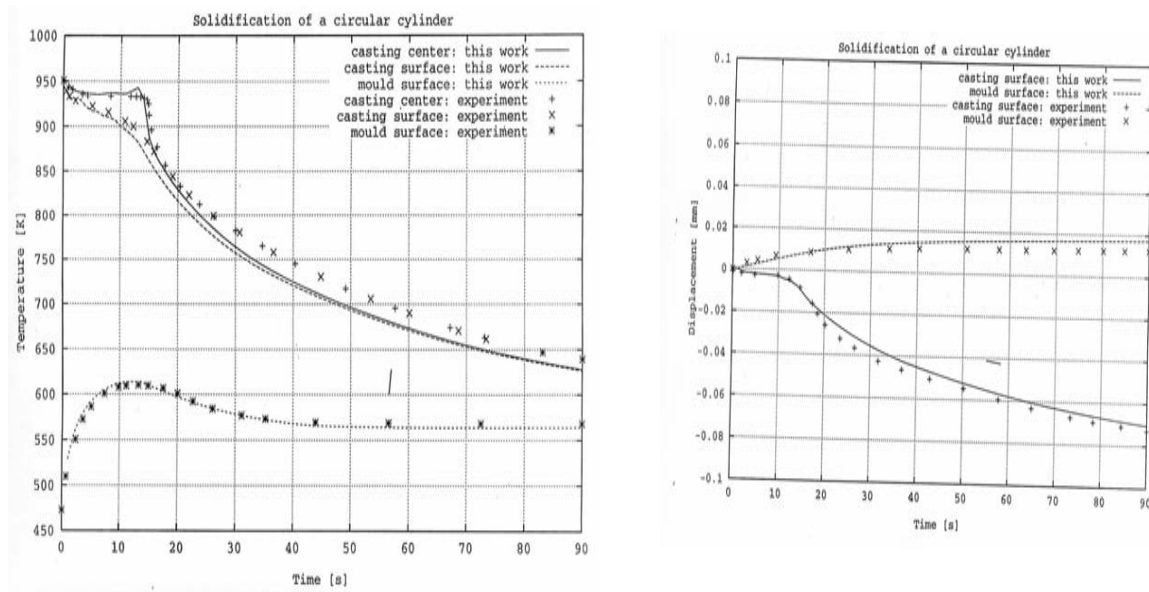
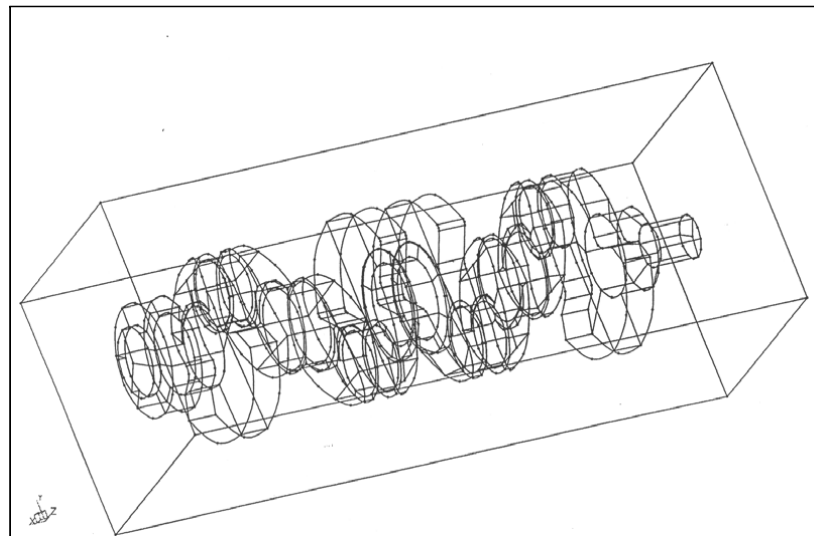


FIGURA 3.7. Solidificación de un cilindro de aluminio en un molde de acero. (a) Evolución de la temperatura en el centro de la pieza y en la superficie de la pieza y del molde para una sección intermedia. (b) Evolución del desplazamiento radial en la superficie de la pieza y del molde para una sección intermedia.

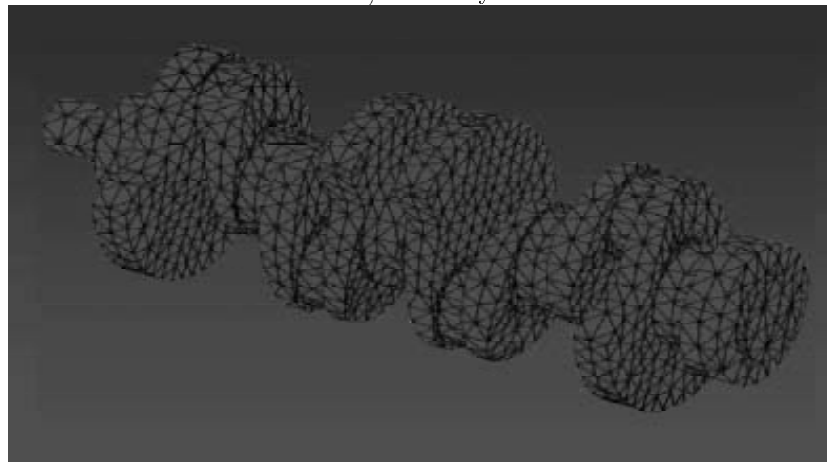
se extiende hasta aproximadamente 15 segundos. La FIGURA 3.7B muestra la evolución de los desplazamientos radiales en la superficie de la pieza y del molde para la misma sección intermedia. La diferencia entre las dos curvas da como resultado la evolución de la separación entre la pieza y el molde, para esta sección intermedia. Las evoluciones de las temperaturas y de la separación obtenidas concuerdan excelentemente con los resultados experimentales disponibles. Un análisis de sensibilidad ha mostrado una fuerte influencia del coeficiente de transmisión de calor por convección entre la pieza y el molde, en la evolución de la temperatura.

(B) *Solidificación de un cigñal de un Renault Clio.* En este ejemplo se realiza la simulación numérica del proceso de solidificación de una pieza industrial, que en este caso corresponde a un cigñal de un Renault *Clio*. Los datos geométricos y de los materiales, así como resultados experimentales, fueron proporcionados por Renault. La FIGURA 3.8 muestra una vista de la malla de elementos finitos utilizada para la pieza, consistente en aproximadamente 15,000 tetraedros de 4 nodos. El molde de arena se ha discretizado utilizando otros 30,000 tetraedros, aproximadamente.

La distribución de temperaturas en la pieza para diferentes etapas del análisis se muestra en la FIGURA 3.9. Las FIGURAS 3.10 y 3.11 muestran la distribución de temperaturas en las secciones x-y y x-z, respectivamente, de la pieza deformada. En estas figuras puede verse también la evolución de la separación que se produce entre la pieza y el molde. La evolución de la zona pastosa intermedia, caracterizada por la temperatura en la interfase liquido-sólido, puede verse en la FIGURA 3.12. Una buena correlación entre los resultados numéricos y experimentales de la evolución de la temperatura en diferentes puntos de la



a) Geometry



b) Finite element mesh of the part.

FIGURA 3.8. Solidificación de un cigüeñal de un Renault *Clio*. Geometría y malla de elementos finitos de la pieza.

pieza y molde puede verse en las FIGURAS 3.13A y 3.13B.

### 3.5. CONCLUSIONES

En este capítulo se ha presentado una formulación para problemas termoplásticos acoplados, con cambio de fase y contacto friccional. La formulación se ha derivado consistentemente en un marco de referencia termodinámico. Las propiedades del material se han considerado que en general son una función de la temperatura. En el contexto de los métodos de paso fraccionado, se han analizado dos operadores de partición de las ecuaciones diferenciales de gobierno del problema acoplado. Para el operador de partición isentrópico, se han considerado restricciones adicionales de diseño. La formulación desarrollada se ha aplicado en la simulación numérica de una serie de ejemplos numéricos representativos, incluyendo ejemplos académicos e industriales de solidificación.

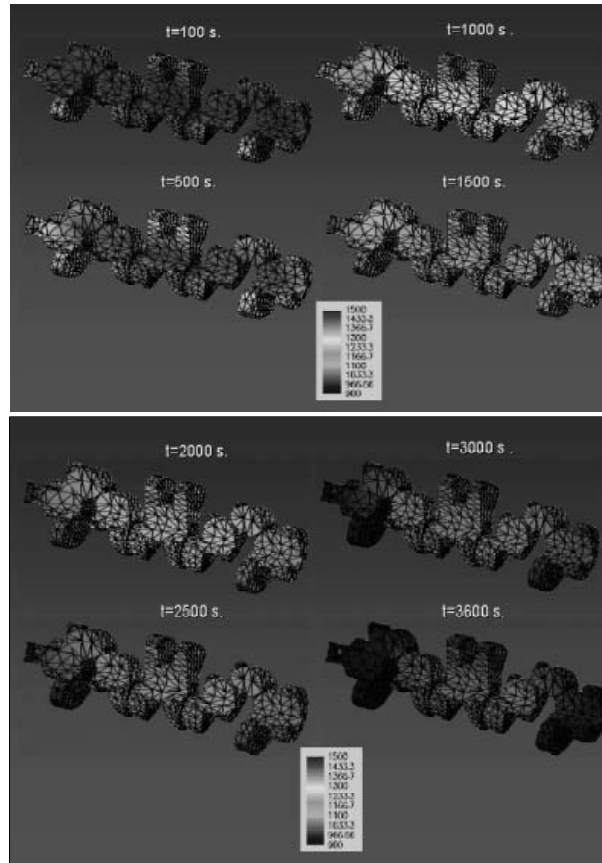


FIGURA 3.9. Solidificación de un cigesimal de un Renault *Clio*. Distribución de la temperatura para diferentes etapas del proceso de solidificación.

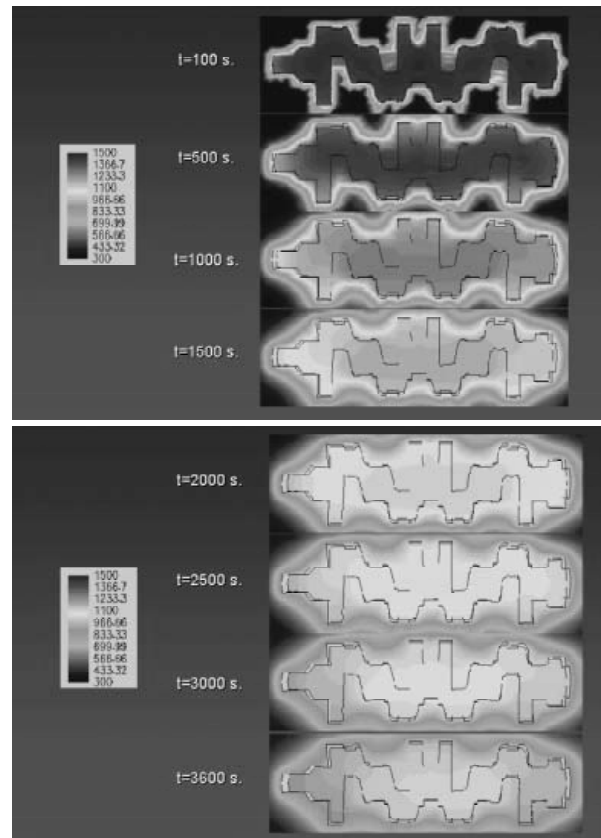


FIGURA 3.10. Solidificación de un cigñal de un Renault *Clio*. Distribución de la temperatura para diferentes etapas del proceso de solidificación. Sección x-y.

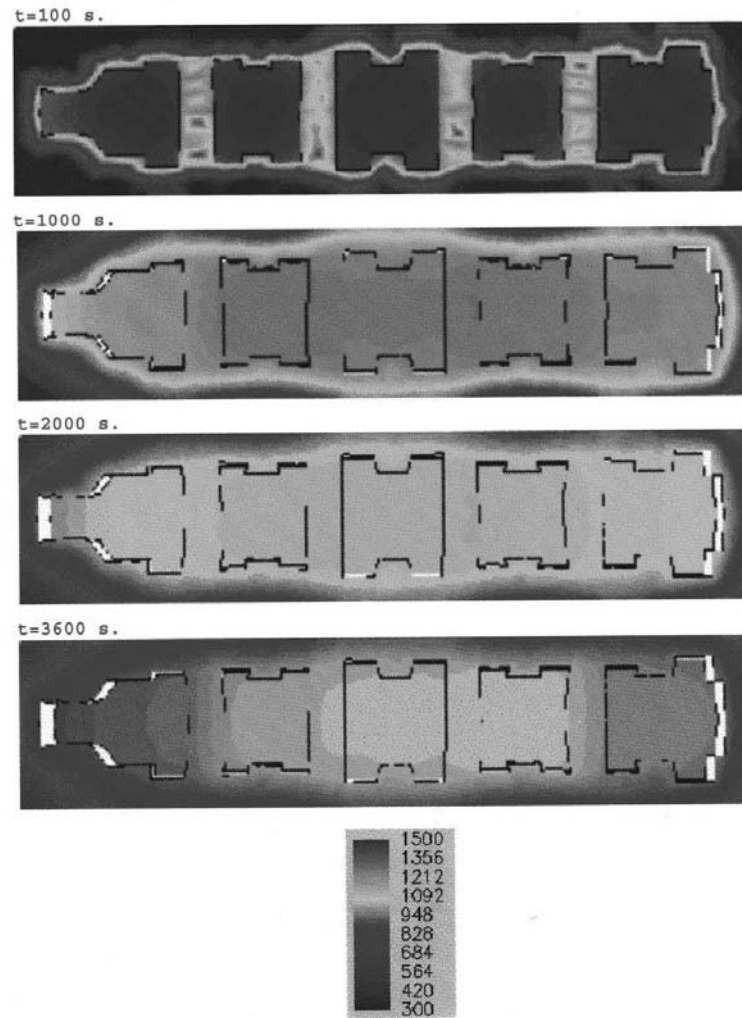


FIGURA 3.11. Solidificación de un cigüeñal de un Renault *Clio*. Distribución de la temperatura para diferentes etapas del proceso de solidificación. Sección x-z.

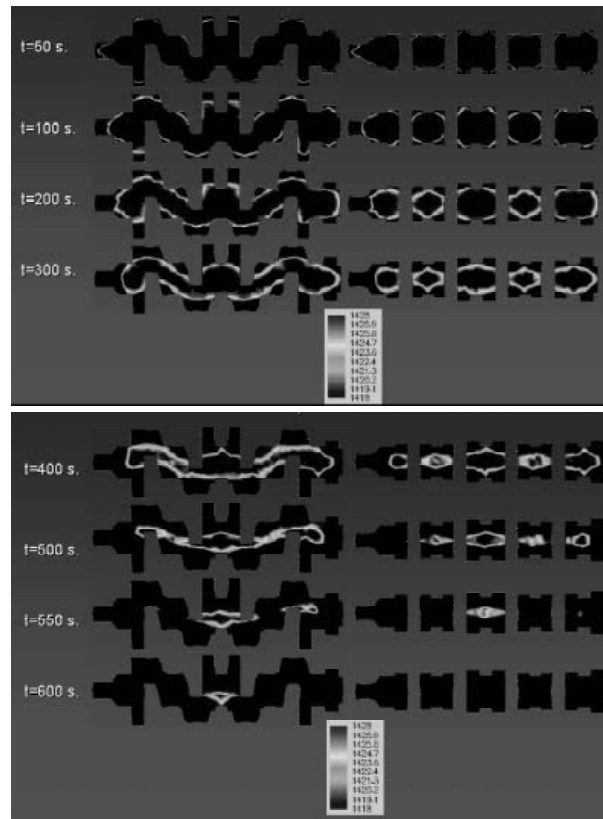


FIGURA 3.12. Solidificación de un cigüeñal de un Renault *Clio*. Evolución de la zona pastosa. Distribución de la temperatura para diferentes etapas del proceso de solidificación. Secciones x-y y x-z.



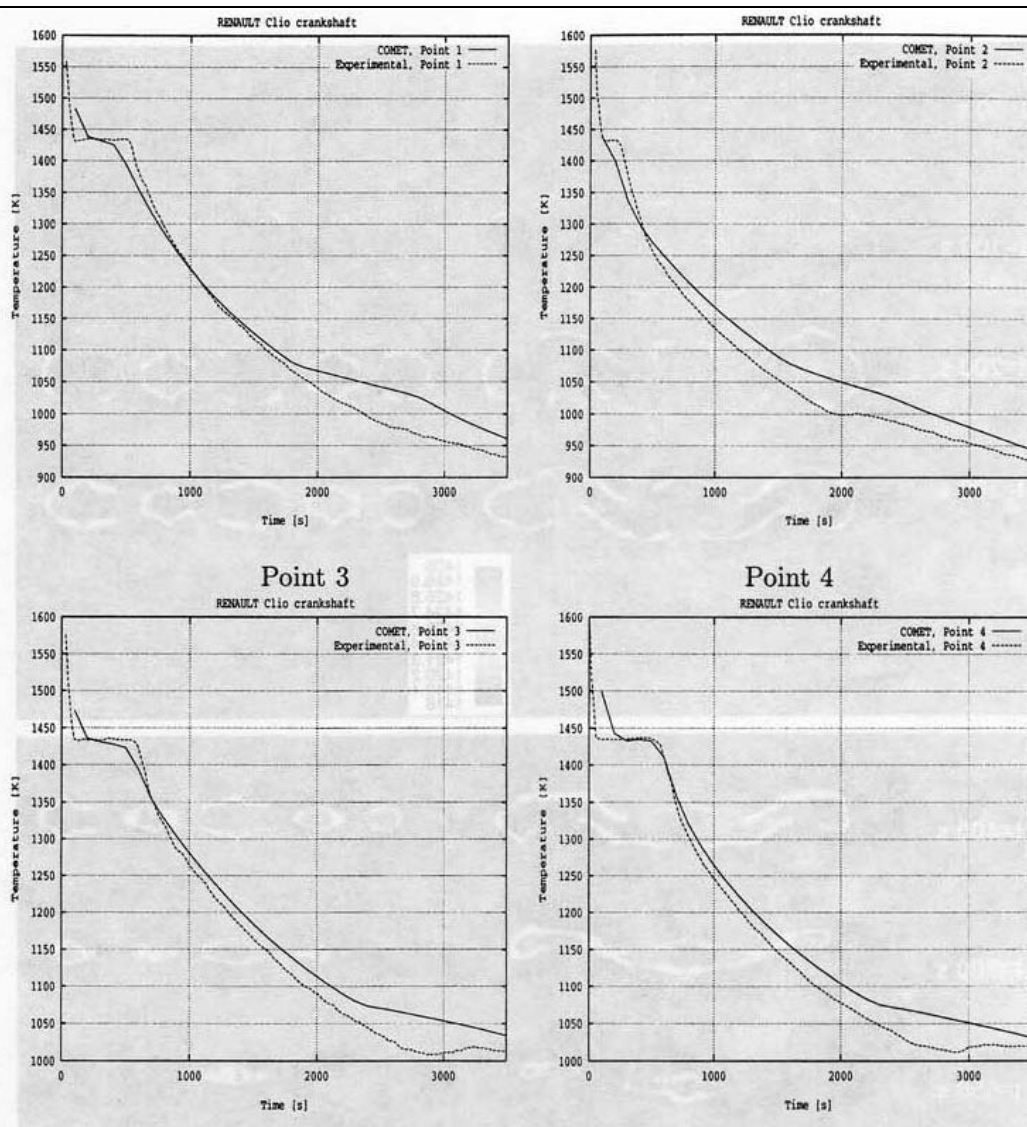


FIGURA 3.13A. Solidificación de un cigüeñal de un Renault *Clio*. Evolución de la temperatura en diferentes puntos.

### 3.6. REFERENCIAS

- AGELET DE SARACIBAR, C. [1998], "Numerical Analysis of Coupled Thermomechanical Contact Problems. Computational Model and Applications", *Archives of Computational Methods in Engineering*, **5**, 3, 243.
- AGELET DE SARACIBAR, C. [1997], "A New Frictional Time Integration Algorithm for Multi-Body Large Slip Frictional Contact Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **142**, 303-334.
- AGELET DE SARACIBAR, C. & M. CHIUMENTI [1999], "On the Numerical Modeling of Frictional Wear Phenomena", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **177**, 401-426.

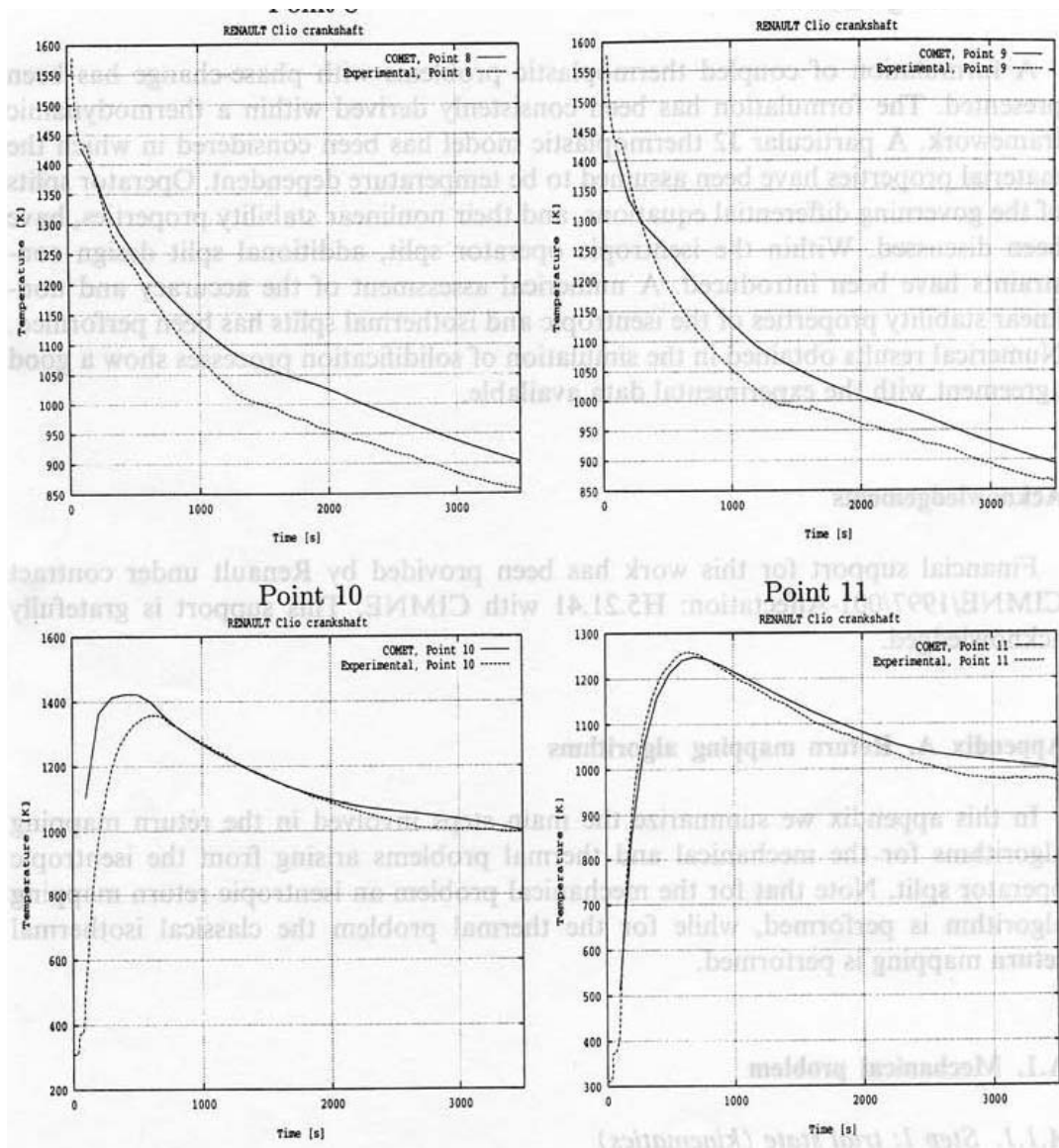


FIGURA 3.13B. Solidificación de un cigüeñal de un Renault *Clio*. Evolución de la temperatura en diferentes puntos.

AGELET DE SARACIBAR, C. & M. CHIUMENTI [1995], "Numerical Analysis of Frictional Wear Contact Problems. Computational Model and Applications", *Research Report no. 70*, CIMNE.

AGELET DE SARACIBAR, C., M. CERVERA & M. CHIUMENTI [1999], "On the Constitutive Modeling of Thermoplastic Phase-change Problems", *Proc. of The 7th Int. Symp. on Plasticity and its Current Applications, January 5-13, 1999, Cancun, Mexico*, A.S. Khan, ed., 1999.

AGELET DE SARACIBAR, C., M. CERVERA & M. CHIUMENTI [1999], "On the Formulation of Coupled Thermoplastic Problems with Phase-change", *International Journal of Plasticity*, **15**, 1, 1-34.

- 
- AGELET DE SARACIBAR, C., M. CERVERA & M. CHIUMENTI [1997], "Current Issues in the Numerical Simulation of Casting Processes.", *Physics and Mechanics of Finite Plastic and Viscoplastic Deformation, Proc. of The 6th Int. Symp. on Plasticity and its Current Applications, July 14-18, 1997, Juneau, Alaska, USA*, A.S. Khan, ed., 1997
- AGELET DE SARACIBAR, C., M. CERVERA & M. CHIUMENTI [1997], "Current Issues in the Numerical Simulation of Casting Processes.", *Proc. Proc. Int. Conf. on Computational Engineering and Sciences, ICES'97, May 4-9, 1997, San Jose, Costa Rica*.
- AGELET DE SARACIBAR, C., M. CERVERA & M. CHIUMENTI [1997], "VULCAN 2000: A Finite Element System for the Simulation of Casting Processes.", *Proc. 5th Int. Conf. on Computational Plasticity, COMPLAS V, March 17-20, 1997, Barcelona, Spain*, D.R.J. Owen, E. Oñate and E. Hinton, eds., CIMNE.
- ARMERO F. & J.C. SIMO [1993], "A Priori Stability Estimates and Unconditionally Stable Product Algorithms for Nonlinear Coupled Thermoplasticity", *International Journal of Plasticity*, **9**, 749-782.
- ARMERO, F. & J.C. SIMO [1992A], "A new Unconditionally Stable Fractional Step Method for Nonlinear Coupled Thermomechanical Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **35**, 737-766.
- ARMERO F. & J.C. SIMO [1992B], "Product Formula Algorithms for Nonlinear Coupled Thermoplasticity: Formulation and Nonlinear Stability Analysis", *Division of Applied Mechanics, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Stanford, California*, SUDAM Report no. 92-4, March 1992.
- CERVERA, M., C. AGELET DE SARACIBAR & M. CHIUMENTI [1999], "Thermo-mechanical analysis of industrial solidification processes", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46**, 1575-1591.
- CERVERA, M., C. AGELET DE SARACIBAR & M. CHIUMENTI [1998], "Thermo-mechanical analysis of industrial solidification processes", *Computational Mechanics, New Trends and Applications, Proc. of the Fourth World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, Argentina, 29 June - 2 July, 1998*, E. Oñate and S. Idelsohn, eds., CIMNE.
- CERVERA, M., C. AGELET DE SARACIBAR & M. CHIUMENTI [1998], "Coupled Thermo-mechanical simulation of industrial solidification processes", *Proc. Int. Conf. Modeling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes VIII, San Diego, CA, USA, 1998*.
- CHIUMENTI, M. [1998], "Constitutive Modeling and Numerical Analysis of Thermo-mechanical Phase-change Systems", *Ph.D. Dissertation*, Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería, ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, UPC, September 1998.

- CHIUMENTI, M., C. AGELET DE SARACIBAR & M. CERVERA [1998], “Un Modelo Constitutivo Termomecánico para Sistemas Multifase”, *Proc. IV Congreso Métodos Numéricos en Ingeniería, Sevilla, España, 7-10 Junio, 1999*, to appear.
- LAURSEN, T.A. [1999], “On the Development of Thermodynamically Consistent Algorithms for Thermomechanical Frictional Contact”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **177**, 273-287 .
- LAURSEN, T.A. [1992], “Formulation and Treatment of Frictional Contact Problems Using Finite Elements”, *Ph.D. Dissertation*, Stanford University, Division of Applied Mechanics, Report no. 92-6.
- LAURSEN, T.A. & S. GOVINDJEE [1994], “A Note on the Treatment of Frictionless Contact Between Non-smooth Surfaces in Fully Non-linear Problems”, *Communications in Applied Numerical Methods*, **10**, 869-878
- LAURSEN, T.A. & J.C. SIMO [1993A], “A Continuum-Based Finite Element Formulation for the Implicit Solution of Multi-Body, Large Deformation Frictional Contact Problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **36**(20), 3451-3485.
- LAURSEN, T.A. & J.C. SIMO [1993B], “Algorithmic Symmetrization of Coulomb Frictional Problems Using Augmented Lagrangians”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **108**, 133-146.
- LAURSEN, T.A. & J.C. SIMO [1992], “Formulation and Regularization of Frictional Contact Problems for Lagrangian Finite Element Computations”, in *Proc. of The Third International Conference on Computational Plasticity: Fundamentals and Applications, COMPLAS III*, D.R.J. Owen, E. Oñate & E. Hinton, eds., Pineridge Press, Swansea, pp. 395-407.
- LAURSEN, T.A. & J.C. SIMO [1991], “On the Formulation and Numerical Treatment of Finite Deformation Frictional Contact Problems”, in *Nonlinear Computational Mechanics—State of the Art*, P. Wriggers & W. Wagner, eds., Springer-Verlag, Berlin, pp. 716-736.
- NIYAMA, E., T. UCHIDA, M. MORIKAWA & S. SAITO [1982], “A method of shrinkage prediction and its application to steel casting practice”, *AFS Int. Cast Metals J.*, **52**
- SIMO, J.C. [1994], “Numerical Analysis Aspects of Plasticity”, in *Handbook of Numerical Analysis, Volume IV*, P.G. Ciarlet and J.J. Lions, eds., North-Holland.
- SIMO, J.C. & F. ARMERO [1991], “Recent Advances in the Formulation and Numerical Analysis of Thermoplasticity at Finite Strains”, in *Finite Inelastic Deformations - Theory and Applications*, E. Stein and D. Besdo, eds., IUTAM/IACM Symposium, Hannover, FRG, August, 19-23, 1991 Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- SIMO, J.C. & C. MIEHE [1992], “Associative Coupled Thermoplasticity at Finite Strains: Formulation, Numerical Analysis and Implementation”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **98**, 41-104.

- STRANG, G. [1969], “Approximating Semigroups and the Consistency of Difference Schemes”, *Proc. American Mathematical Society*, **20**, 1-7.
- TRUESDELL, C. & W. NOLL [1965], “The nonlinear field theories of mechanics”, in *Handbuch der Physics Bd. III/3*, ed. by S. Flügge, Springer-Verlag, Berlin.
- WRIGGERS, P. & C. MIEHE [1994], “Contact Constraints within Coupled Thermomechanical Analysis. A Finite Element Model”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **113**, 301-319.
- WRIGGERS, P. & C. MIEHE [1992], “Recent Advances in the Simulation of Thermomechanical Contact Processes”, in *Proc. of The Third International Conference on Computational Plasticity: Fundamentals and Applications, COMPLAS III*, D.R.J. Owen, E. Oñate & E. Hinton, eds., Pineridge Press, Swansea, pp. 325-347.
- WRIGGERS, P. & G. ZAVARISE [1993], “Thermomechanical Contact. A Rigorous but Simple Numerical Approach”, *Computers and Structures*, **46**, 47-53.
- ZDEBEL, U. & T. LEHMANN [1987], “Some theoretical considerations and experimental investigations on a constitutive law in thermoplasticity”, *International Journal of Plasticity*, **3**, 369-389.

### APÉNDICE 3.I. ALGORITMOS DE RETORNO TERMOPLÁSTICOS

En este apéndice se resumen los pasos principales de los algoritmos de retorno termoplásticos, en los problemas mecánico y térmico correspondientes al operador de partición isentrópico. Nótese que para el problema mecánico se realiza un retorno isentrópico, mientras que para el problema térmico se realiza el clásico retorno isotérmico.

#### 3.I.A. Problema mecánico

**Paso 1. Estado de prueba (cinemática).** Dados los datos iniciales  $\{\epsilon_n, \Theta_n\}$ , la base de datos  $\{\epsilon_n^p, \xi_n, \alpha_n\}$  en el instante  $t_n$  y el valor  $\epsilon_{n+1}$  en el instante  $t_{n+1}$ , se define:

$$\begin{aligned}\epsilon_{n+1}^{p\,trial} &:= \epsilon_n^p, \\ \xi_{n+1}^{trial} &:= \xi_n, \\ \epsilon_{n+1}^{e\,trial} &:= \epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^{p\,trial},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\text{dev}[\alpha_{n+1}^{trial}] &:= \text{dev}[\alpha_n] + \frac{\Delta t}{\tau_{\mu_{n+1}}^{trial} + \Delta t} \text{dev}[\epsilon_{n+1}^{e\,trial} - \alpha_n], \\ \text{tr}[\alpha_{n+1}^{trial}] &:= \text{tr}[\alpha_n] + \frac{\Delta t}{\tau_{\kappa_{n+1}}^{trial} + \Delta t} \text{tr}[\epsilon_{n+1} - \alpha_n] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\tau_{\kappa_{n+1}}^{trial} + \Delta t} [\hat{e}(\Theta_{n+1}^{trial}) - \hat{e}(\Theta_0)],\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\tau_{\mu_{n+1}}^{trial} &:= \eta_{v_{n+1}}^{dev\,trial} / 2\mu_{n+1}^{trial}, \\ \tau_{\kappa_{n+1}}^{trial} &:= \eta_{v_{n+1}}^{vol\,trial} / 3\kappa_{n+1}^{trial},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\hat{e}(\Theta_{n+1}^{trial}) &= 3\alpha(\Theta_{n+1}^{trial})(\Theta_{n+1}^{trial} - \Theta_{ref}) + e^{ps}(\Theta_{n+1}^{trial}), \\ \hat{e}(\Theta_0) &= 3\alpha(\Theta_0)(\Theta_0 - \Theta_{ref}) + e^{ps}(\Theta_0).\end{aligned}$$

**Paso 2.** *Temperatura de prueba.* Se calcula la temperatura (isentrópica) de prueba en el instante  $t_{n+1}$  a entropía elástica constante de valor  $H_n^e$ .

IF (propiedades de material constantes) THEN

$$\begin{aligned}\Theta_{n+1}^{trial} &:= \hat{\Theta}(\epsilon_{n+1}^{e\,trial}, H_n^e, \xi_{n+1}^{trial}, \alpha_{n+1}^{trial}), \\ \text{con } H_n^e &:= \hat{H}^e(\epsilon_n^e, \Theta_n, \xi_n, \alpha_n),\end{aligned}$$

ELSE

Se obtiene  $\Theta_{n+1}^{trial}$  resolviendo la ecuación no lineal implícita:

$$\begin{aligned}\hat{H}^e(\epsilon_{n+1}^{e\,trial}, \Theta_{n+1}^{trial}, \xi_{n+1}^{trial}, \alpha_{n+1}^{trial}) - H_n^e &= 0, \\ \text{con } H_n^e &:= \hat{H}^e(\epsilon_n^e, \Theta_n, \xi_n, \alpha_n).\end{aligned}$$

END IF

**Paso 3.** *Tensiones (generalizadas) de prueba.* Se calculan las tensiones generalizadas a la temperatura de prueba  $\Theta_{n+1}^{trial}$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_{n+1}^{trial} &:= \text{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}] = 2\hat{\mu}_{n+1}^{trial} \text{dev}[\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \boldsymbol{\alpha}_n], \\ p_{n+1}^{trial} &:= \hat{\kappa}_{n+1}^{trial} \text{tr}[\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_n] - \hat{\kappa}_{n+1}^{trial} [\hat{e}(\Theta_{n+1}^{trial}) - \hat{e}(\Theta_0)], \\ q_{n+1}^{trial} &:= -\hat{K}_\xi(\xi_{n+1}^{trial}, \Theta_{n+1}^{trial}),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{n+1}^{trial} &:= \frac{\tau_{\mu_{n+1}}^{trial}}{\tau_{\mu_{n+1}}^{trial} + \Delta t} \mu_{n+1}^{trial}, \\ \hat{\kappa}_{n+1}^{trial} &:= \frac{\tau_{\kappa_{n+1}}^{trial}}{\tau_{\kappa_{n+1}}^{trial} + \Delta t} \kappa_{n+1}^{trial},\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\tau_{\mu_{n+1}}^{trial} &:= \eta_{v_{n+1}}^{dev\,trial} / 2\mu_{n+1}^{trial}, \\ \tau_{\kappa_{n+1}}^{trial} &:= \eta_{v_{n+1}}^{vol\,trial} / 3\kappa_{n+1}^{trial},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\hat{e}(\Theta_{n+1}^{trial}) &= 3\alpha(\Theta_{n+1}^{trial})(\Theta_{n+1}^{trial} - \Theta_{ref}) + e^{ps}(\Theta_{n+1}^{trial}), \\ \hat{e}(\Theta_0) &= 3\alpha(\Theta_0)(\Theta_0 - \Theta_{ref}) + e^{ps}(\Theta_0).\end{aligned}$$

**Paso 4.** *Función de fluencia de prueba.* Se calcula la función de fluencia de prueba a temperatura constante  $\Theta_n$ , como una consecuencia de la restricción adicional de diseño de entropía plástica constante.

$$\Phi_{n+1}^{trial} := \hat{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}, q_{n+1}^{trial}, \Theta_n) = \|\mathbf{s}_{n+1}^{trial}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}[y_0(\Theta_n) - q_{n+1}^{trial}]$$

IF  $\Phi_{n+1}^{trial} \leq 0$  THEN

Set  $(\cdot)_{n+1} := (\cdot)_{n+1}^{trial}$  y actualizar la base de datos

RETURN

END IF

**Paso 5.** *Algoritmo de retorno isentrópico.* Se realiza un retorno a entropía elástica y plástica constantes.

IF (propiedades del material constantes) THEN

Obtener  $\gamma_{n+1}$  resolviendo la ecuación no lineal implícita:

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1} &:= \hat{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, q_{n+1}, \Theta_n) = 0 \quad \text{con} \\ \Theta_{n+1} &= \hat{\Theta}(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e, \mathbf{H}_n^e, \xi_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}), \end{aligned}$$

ELSE

Obtener  $\gamma_{n+1}$  y  $\Theta_{n+1}$  resolviendo el sistema de ecuaciones no lineales implícitas:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{n+1} &:= \hat{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, q_{n+1}, \Theta_n) = 0, \\ \hat{H}^e(e_{n+1}, \Theta_{n+1}, \xi_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}) - H_n^e &= 0, \end{aligned} \right\}$$

END IF

donde

$$\Phi_{n+1} := \frac{\hat{\mu}_{n+1}}{\hat{\mu}_{n+1}^{trial}} \|\mathbf{s}_{n+1}^{trial}\| - 2\hat{\mu}_{n+1}\gamma_{n+1} - \sqrt{\frac{2}{3}}[y_0(\Theta_n) - q_{n+1}],$$

$$q_{n+1} = -\hat{K}_\xi(\xi_{n+1}, \Theta_{n+1}),$$

$$\xi_{n+1} = \xi_{n+1}^{trial} + \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma_{n+1},$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \frac{\hat{\mu}_{n+1}}{\hat{\mu}_{n+1}^{trial}} \mathbf{s}_{n+1}^{trial} - 2\hat{\mu}_{n+1}\gamma_{n+1} \mathbf{n}_{n+1}^{trial},$$

$$p_{n+1} = \hat{\kappa}_{n+1} \text{tr}[\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_n] - \hat{\kappa}_{n+1} [\hat{e}(\Theta_{n+1}) - \hat{e}(\Theta_0)],$$

$$\text{dev}[\boldsymbol{\alpha}_{n+1}] = \text{dev}[\boldsymbol{\alpha}_n] + \frac{\Delta t}{\eta_{v_{n+1}}^{dev}} \mathbf{s}_{n+1},$$

$$\text{tr}[\boldsymbol{\alpha}_{n+1}] = \text{tr}[\boldsymbol{\alpha}_n] + \frac{\Delta t}{\eta_{v_{n+1}}^{vol}} 3p_{n+1},$$

con

$$\hat{\mu}_{n+1} := \frac{\tau_{\mu_{n+1}}}{\tau_{\mu_{n+1}} + \Delta t} \mu_{n+1}, \quad \hat{\mu}_{n+1}^{trial} := \frac{\tau_{\mu_{n+1}}^{trial}}{\tau_{\mu_{n+1}}^{trial} + \Delta t} \mu_{n+1}^{trial},$$

$$\hat{\kappa}_{n+1} := \frac{\tau_{\kappa_{n+1}}}{\tau_{\kappa_{n+1}} + \Delta t} \kappa_{n+1},$$

y

$$\tau_{\mu_{n+1}} := \eta_{v_{n+1}}^{dev} / 2\mu_{n+1}, \quad \tau_{\mu_{n+1}}^{trial} := \eta_{v_{n+1}}^{dev\ trial} / 2\mu_{n+1}^{trial},$$

$$\tau_{\kappa_{n+1}} := \eta_{v_{n+1}}^{vol} / 3\kappa_{n+1},$$

y

$$\hat{e}(\Theta_{n+1}) = 3\alpha(\Theta_{n+1})(\Theta_{n+1} - \Theta_{ref}) + e^{ps}(\Theta_{n+1}),$$

$$\hat{e}(\Theta_0) = 3\alpha(\Theta_0)(\Theta_0 - \Theta_{ref}) + e^{ps}(\Theta_0).$$

**Paso 6.** Actualización de la base de datos y cálculo de tensiones.

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{p\ trial} + \gamma_{n+1} \mathbf{n}_{n+1}^{trial},$$

$$\xi_{n+1} = \xi_{n+1}^{trial} + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma_{n+1},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n + \frac{\Delta t}{\eta_{v_{n+1}}^{dev}} \mathbf{s}_{n+1} + \frac{\Delta t}{\eta_{v_{n+1}}^{vol}} p_{n+1} \mathbf{1}_3,$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \frac{\hat{\mu}_{n+1}}{\hat{\mu}_{n+1}^{trial}} \mathbf{s}_{n+1}^{trial} - 2\hat{\mu}_{n+1} \gamma_{n+1} \mathbf{n}_{n+1}^{trial},$$

$$p_{n+1} = \hat{\kappa}_{n+1} \text{tr}[\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_n] - \hat{\kappa}_{n+1} [\hat{e}(\Theta_{n+1}) - \hat{e}(\Theta_0)],$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = p_{n+1} \mathbf{1}_3 + \mathbf{s}_{n+1},$$

donde

$$\mathbf{n}_{n+1}^{trial} := \mathbf{s}_{n+1}^{trial} / \|\mathbf{s}_{n+1}^{trial}\|,$$

$$\hat{e}(\Theta_{n+1}^{trial}) = 3\alpha(\Theta_{n+1}^{trial})(\Theta_{n+1}^{trial} - \Theta_{ref}) + e^{ps}(\Theta_{n+1}^{trial}),$$

$$\hat{e}(\Theta_0) = 3\alpha(\Theta_0)(\Theta_0 - \Theta_{ref}) + e^{ps}(\Theta_0),$$

y

$$\hat{\mu}_{n+1} := \frac{\tau_{\mu_{n+1}}}{\tau_{\mu_{n+1}} + \Delta t} \mu_{n+1}, \quad \hat{\mu}_{n+1}^{trial} := \frac{\tau_{\mu_{n+1}}^{trial}}{\tau_{\mu_{n+1}}^{trial} + \Delta t} \mu_{n+1}^{trial},$$

$$\hat{\kappa}_{n+1} := \frac{\tau_{\kappa_{n+1}}}{\tau_{\kappa_{n+1}} + \Delta t} \kappa_{n+1},$$

con

$$\tau_{\mu_{n+1}} := \eta_{v_{n+1}}^{dev} / 2\mu_{n+1}, \quad \tau_{\mu_{n+1}}^{trial} := \eta_{v_{n+1}}^{dev\ trial} / 2\mu_{n+1}^{trial},$$

$$\tau_{\kappa_{n+1}} := \eta_{v_{n+1}}^{vol} / 3\kappa_{n+1}.$$



### 3.I.B. Problema térmico

**Paso 1.** *Estado de prueba (cinemática).* Dados los datos iniciales  $\{\epsilon_n, \Theta_n\}$ , la base de datos  $\{\epsilon_n^p, \xi_n, \alpha_n\}$  en el instante  $t_n$  y los valores  $\{\epsilon_{n+1}, \Theta_{n+1}\}$  en el instante  $t_{n+1}$ , se define:

$$\begin{aligned}\epsilon_{n+1}^{p \text{ trial}} &:= \epsilon_n^p, \\ \xi_{n+1}^{\text{trial}} &:= \xi_n, \\ \epsilon_{n+1}^{e \text{ trial}} &:= \epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^{p \text{ trial}},\end{aligned}$$

y

$$\text{dev}[\alpha_{n+1}^{\text{trial}}] := \text{dev}[\alpha_n] + \frac{\Delta t}{\tau_{\mu_{n+1}} + \Delta t} \text{dev}[\epsilon_{n+1}^{e \text{ trial}} - \alpha_n],$$

donde

$$\tau_{\mu_{n+1}} := \eta_{v_{n+1}}^{\text{dev}} / 2\mu_{n+1}.$$

**Paso 2.** *Tensiones (generalizadas) de prueba.* Se calculan las tensiones generalizadas a la temperatura actual  $\Theta_{n+1}$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} &:= \text{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}] = 2\mu_{n+1} \text{dev}[\epsilon_{n+1}^{e \text{ trial}} - \alpha_{n+1}^{\text{trial}}], \\ q_{n+1}^{\text{trial}} &:= -K_\xi(\xi_{n+1}^{\text{trial}}, \Theta_{n+1}).\end{aligned}$$

**Paso 3.** *Función de fluencia de prueba.* Se calcula la función de fluencia de prueba a la temperatura actual  $\Theta_{n+1}$ .

$$\Phi_{n+1}^{\text{trial}} := \hat{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}, q_{n+1}^{\text{trial}}, \Theta_{n+1}) = \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}[y_0(\Theta_{n+1}) - q_{n+1}^{\text{trial}}]$$

IF  $\Phi_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0$  THEN

Set  $(\cdot)_{n+1} := (\cdot)_{n+1}^{\text{trial}}$  y actualizar la base de datos

RETURN

END IF

**Paso 4.** *Algoritmo de retorno isotérmico.* Obtener  $\gamma_{n+1}$  resolviendo la ecuación no lineal implícita:

$$\begin{aligned}\Phi_{n+1} &:= \hat{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, q_{n+1}, \Theta_{n+1}) = 0 \quad \text{con} \\ \Phi_{n+1} &:= \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| - 2\mu_{n+1}\gamma_{n+1} - \sqrt{\frac{2}{3}}[y_0(\Theta_{n+1}) - q_{n+1}], \\ \xi_{n+1} &= \xi_{n+1}^{\text{trial}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma_{n+1}, \\ q_{n+1} &= -\hat{K}_\xi(\xi_{n+1}, \Theta_{n+1}).\end{aligned}$$

**Paso 5.** *Actualización de la base de datos.*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p &= \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{p \text{ trial}} + \gamma_{n+1} \mathbf{n}_{n+1}^{\text{trial}}, \\ \xi_{n+1} &= \xi_{n+1}^{\text{trial}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma_{n+1}, \\ \boldsymbol{\alpha}_{n+1} &= \boldsymbol{\alpha}_n + \frac{\Delta t}{\eta_{v_{n+1}}^{\text{dev}}} \mathbf{s}_{n+1} + \frac{\Delta t}{\eta_{v_{n+1}}^{\text{vol}}} p_{n+1} \mathbf{1}_3,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_{n+1}^{\text{trial}} &:= \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} / \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\|, \\ \mathbf{s}_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\hat{\mu}_{n+1}\gamma_{n+1}\mathbf{n}_{n+1}^{\text{trial}}, \\ p_{n+1} &= \hat{\kappa}_{n+1} \text{tr}[\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_n] - \hat{\kappa}_{n+1} [\hat{e}(\Theta_{n+1}) - \hat{e}(\Theta_0)], \\ \hat{e}(\Theta_{n+1}^{\text{trial}}) &= 3\alpha(\Theta_{n+1}^{\text{trial}})(\Theta_{n+1}^{\text{trial}} - \Theta_{\text{ref}}) + e^{ps}(\Theta_{n+1}^{\text{trial}}), \\ \hat{e}(\Theta_0) &= 3\alpha(\Theta_0)(\Theta_0 - \Theta_{\text{ref}}) + e^{ps}(\Theta_0),\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{n+1} &:= \frac{\tau_{\mu_{n+1}}}{\tau_{\mu_{n+1}} + \Delta t} \mu_{n+1}, \\ \hat{\kappa}_{n+1} &:= \frac{\tau_{\kappa_{n+1}}}{\tau_{\kappa_{n+1}} + \Delta t} \kappa_{n+1},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tau_{\mu_{n+1}} &:= \eta_{v_{n+1}}^{\text{dev}} / 2\mu_{n+1}, \\ \tau_{\kappa_{n+1}} &:= \eta_{v_{n+1}}^{\text{vol}} / 3\kappa_{n+1}.\end{aligned}$$

**Paso 6.** *Disipación mecánica plástica.*

$$\mathcal{D}_{\text{mech}_{n+1}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma_{n+1} y_0(\Theta_{n+1}) / \Delta t + \frac{1}{\eta_{v_{n+1}}^{\text{dev}}} \|\mathbf{s}_{n+1}\|^2 + \frac{3}{\eta_{v_{n+1}}^{\text{vol}}} p_{n+1}^2.$$

## APENDICE 3.II. ALGORITMOS DE RETORNO TERMOFRICCIONALES

En este apéndice se resumen los principales pasos que hay que realizar en los algoritmos de retorno termofrictionales para los problemas mecánico y térmico, utilizando un operador de partición isentrópico.

### 3.II.A. Problema mecánico

**Paso 1.** *Estado de prueba (cinemática)* Dados los datos iniciales  $\{g_{N_n}, g_{T_n}^\alpha\}$ , la base de datos  $\{g_{T_n}^{p\alpha}, \Theta_{c_n}, \zeta_{c_n}\}$  en el instante  $t_n$ , y los valores prescritos  $\{g_{N_{n+1}}, g_{T_{n+1}}^\alpha\}$  en el instante  $t_{n+1}$ , se define:

$$\begin{aligned} g_{T_{n+1}}^{p\alpha trial} &:= g_{T_n}^{p\alpha}, \\ \zeta_{c_{n+1}}^{trial} &:= \zeta_{c_n}, \\ g_{T_{n+1}}^{e\alpha trial} &:= g_{T_{n+1}}^\alpha - g_{T_{n+1}}^{p\alpha trial}. \end{aligned}$$

**Paso 2.** *Temperatura de contacto de prueba.* Obtener  $\Theta_{c_{n+1}}^{trial}$  resolviendo la ecuación implícita no lineal:

$$\begin{aligned} \hat{H}_c^e(g_{N_{n+1}}, g_{T_{n+1}}^{e\alpha trial}, \Theta_{c_{n+1}}^{trial}, \zeta_{c_{n+1}}^{trial}) - H_{c_n}^e &= 0, \\ \text{con } H_{c_n}^e &:= \hat{H}_c^e(g_{N_n}, g_{T_n}^{e\alpha}, \Theta_{c_n}, \zeta_{c_n}). \end{aligned}$$

**Paso 3.** *Tracción (generalizada) de prueba.*

$$\begin{aligned} t_{N_{n+1}} &:= \begin{cases} \frac{1}{2}\epsilon_N \frac{\langle g_{N_{n+1}} \rangle^2 - \langle g_{N_n} \rangle^2}{g_{N_{n+1}} - g_{N_n}}; & \text{if } g_{N_{n+1}} \neq g_{N_n}, \\ \epsilon_N \langle g_{N_{n+1}} \rangle; & \text{if } g_{N_{n+1}} = g_{N_n}, \end{cases} \\ t_{T_{\alpha n+1}}^{trial} &:= \epsilon_T M_{\alpha\beta n+1} g_{T_{n+1}}^{e\beta trial}, \\ q_{c_{n+1}}^{trial} &:= -\partial_{\zeta_c} \hat{K}_c(\zeta_{c_{n+1}}^{trial}, \Theta_{c_{n+1}}^{trial}). \end{aligned}$$

**Paso 4.** *Función de deslizamiento de prueba.* Calcular la función de deslizamiento de prueba a temperatura de contacto fija  $\Theta_{c_n}$ , para satisfacer la restricción de diseño de entropía plástica de contacto constante.

$$\begin{aligned} \Phi_{c_{n+1}}^{trial} &:= \hat{\Phi}_c(t_{N_{n+1}}, t_{T_{\alpha n+1}}^{trial}, \Theta_{c_n}, q_{c_{n+1}}^{trial}) \\ &= \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|_{ref}^{trial} - (\hat{\mu}_0(\Theta_{c_n}) - q_{c_{n+1}}^{trial}) t_{N_{n+1}} \end{aligned}$$

$$\text{con } \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|_{ref}^{trial} = (t_{T_{\alpha n+1}}^{trial} M_{n+1}^{\alpha\beta} t_{T_{\beta n+1}}^{trial})^{1/2}.$$

IF  $\Phi_{c_{n+1}}^{trial} \leq 0$  THEN

Set  $(\cdot)_{n+1} := (\cdot)_{n+1}^{trial}$  y actualizar la base de datos

RETURN

END IF

**Paso 5.** *Algoritmo de retorno isentrópico.* Obtener  $\gamma_{c_{n+1}}$  y  $\Theta_{c_{n+1}}$  resolviendo el sistema no lineal de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{c_{n+1}} &:= \hat{\Phi}_c(t_{N_{n+1}}, t_{T_{\alpha n+1}}, \Theta_{c_n}, q_{c_{n+1}}) = 0, \\ \hat{H}_c^e(g_{N_{n+1}}, g_{T_{n+1}}^{e\alpha}, \Theta_{c_{n+1}}, \zeta_{c_{n+1}}) - H_{c_n}^e &= 0, \end{aligned} \right\}$$

donde

$$\begin{aligned}\Phi_{cn+1} &= \|\mathbf{t}_{Tn+1}^b\|_{ref} - (\hat{\mu}_0(\Theta_{cn}) - q_{cn+1}) t_{Nn+1}, \\ t_{T\alpha n+1} &= t_{T\alpha n+1}^{trial} - \gamma_{cn+1} \epsilon_T t_{T\alpha n+1}^{trial} / \|\mathbf{t}_{Tn+1}^b\|_{ref}, \\ g_{Tn+1}^{p\alpha} &= g_{Tn+1}^{p\alpha trial} + \gamma_{cn+1} M_{n+1}^{\alpha\beta} t_{T\beta n+1}^{trial} / \|\mathbf{t}_{Tn+1}^b\|_{ref}, \\ \zeta_{cn+1} &= \zeta_{cn+1}^{trial} + \gamma_{cn+1} t_{Nn+1}, \\ q_{cn+1} &= -\partial_{\zeta_c} \hat{K}_c(\zeta_{cn+1}, \Theta_{cn+1}),\end{aligned}$$

$$\text{con } \|\mathbf{t}_{Tn+1}^b\|_{ref} = (t_{T\alpha n+1} M_{n+1}^{\alpha\beta} t_{T\beta n+1})^{1/2}.$$

**Paso 6.** *Actualización de la base de datos y cálculo de la tracción de contacto.*

$$\begin{aligned}g_{Tn+1}^{p\alpha} &= g_{Tn+1}^{p\alpha trial} + \gamma_{cn+1} M_{n+1}^{\alpha\beta} t_{T\beta n+1}^{trial} / \|\mathbf{t}_{Tn+1}^b\|_{ref}, \\ \zeta_{cn+1} &= \zeta_{cn+1}^{trial} + \gamma_{cn+1} t_{Nn+1}, \\ t_{T\alpha n+1} &:= \epsilon_T M_{\alpha\beta n+1} g_{Tn+1}^{e\beta}, \\ q_{cn+1} &:= -\partial_{\zeta_c} \hat{K}_c(\zeta_{cn+1}, \Theta_{cn+1}).\end{aligned}$$

### 3.II.B. Problema térmico

**Paso 1.** *Estado de prueba (cinemática).* Dados los datos iniciales  $\{g_{Nn}, g_{Tn}^\alpha\}$ , la base de datos  $\{g_{Tn}^{p\alpha}, \Theta_{cn}, \zeta_{cn}\}$  en el instante  $t_n$ , y los valores prescritos  $\{g_{Nn+1}, g_{Tn+1}^\alpha\}$  en el instante  $t_{n+1}$ , se define:

$$\begin{aligned}g_{Tn+1}^{p\alpha trial} &:= g_{Tn}^{p\alpha}, \\ \zeta_{cn+1}^{trial} &:= \zeta_{cn}, \\ g_{Tn+1}^{e\alpha trial} &:= g_{Tn+1}^\alpha - g_{Tn+1}^{p\alpha trial}.\end{aligned}$$

**Paso 2.** *Temperatura de contacto de prueba.* Obtener  $\Theta_{cn+1}^{trial}$  resolviendo la ecuación implícita no lineal:

$$H_{cn+1}^{e trial} - H_{cn}^e = \frac{\Delta t}{\Theta_{cn+1}^{trial}} (Q_c^{(1) trial} + Q_c^{(2) trial}),$$

donde

$$\begin{aligned}H_{cn+1}^{e trial} &:= \hat{H}_c^e(g_{Nn+1}, g_{Tn+1}^{e\alpha trial}, \Theta_{cn+1}^{trial}, \zeta_{cn+1}^{trial}), \\ H_{cn}^e &:= \hat{H}_c^e(g_{Nn}, g_{Tn}^{e\alpha}, \Theta_{cn}, \zeta_{cn}), \\ Q_c^{(1) trial} &:= \hat{h}_{cond}^{(1)}(t_{Nn+1}, \Theta_{cn+1}^{trial})(\Theta_{n+1}^{(1)} - \Theta_{cn+1}^{trial}), \\ Q_c^{(2) trial} &:= \hat{h}_{cond}^{(2)}(t_{Nn+1}, \Theta_{cn+1}^{trial})(\Theta_{n+1}^{(2)} - \Theta_{cn+1}^{trial}).\end{aligned}$$

**Paso 3.** *Tracción (generalizada) de prueba.*

$$t_{N_{n+1}} := \begin{cases} \frac{1}{2} \epsilon_N \frac{\langle g_{N_{n+1}} \rangle^2 - \langle g_{N_n} \rangle^2}{g_{N_{n+1}} - g_{N_n}}; & \text{if } g_{N_{n+1}} \neq g_{N_n}, \\ \epsilon_N \langle g_{N_{n+1}} \rangle; & \text{if } g_{N_{n+1}} = g_{N_n}, \end{cases}$$

$$t_{T_{\alpha n+1}}^{trial} := \epsilon_T M_{\alpha\beta_{n+1}} g_{T_{n+1}}^{e\beta trial},$$

$$q_{c_{n+1}}^{trial} := -\partial_{\zeta_c} \hat{K}_c(\zeta_{c_{n+1}}^{trial}, \Theta_{c_{n+1}}^{trial}).$$

**Paso 4.** *Función de deslizamiento de prueba.*

$$\Phi_{c_{n+1}}^{trial} := \hat{\Phi}_c(t_{N_{n+1}}, t_{T_{\alpha n+1}}^{trial}, \Theta_{c_{n+1}}^{trial}, q_{c_{n+1}}^{trial})$$

$$= \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|_{ref} - (\hat{\mu}_0(\Theta_{c_{n+1}}^{trial}) - q_{c_{n+1}}^{trial}) t_{N_{n+1}}$$

con  $\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|_{ref} = (t_{T_{\alpha n+1}}^{trial} M_{n+1}^{\alpha\beta} t_{T_{\beta n+1}}^{trial})^{1/2}$ .

IF  $\Phi_{c_{n+1}}^{trial} \leq 0$  THEN

Set  $(\cdot)_{n+1} := (\cdot)_{n+1}^{trial}$  y actualizar la base de datos

RETURN

END IF

**Paso 5.** *Algoritmo de retorno isotérmico.* Obtener  $\gamma_{c_{n+1}}$  y  $\Theta_{c_{n+1}}$  resolviendo el sistema no lineal de ecuaciones implícitas:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{c_{n+1}} &:= \hat{\Phi}_c(t_{N_{n+1}}, t_{T_{\alpha n+1}}, \Theta_{c_{n+1}}, q_{c_{n+1}}) = 0, \\ H_{c_{n+1}}^e - H_{c_n}^e &= \frac{\Delta t}{\Theta_{c_{n+1}}} (Q_{c_{n+1}}^{(1)} + Q_{c_{n+1}}^{(2)}) + \frac{\Delta t}{\Theta_{c_{n+1}}} \mathcal{D}_{c, mech_{n+1}}, \end{aligned} \right\}$$

donde

$$\Phi_{c_{n+1}} := \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|_{ref} - (\hat{\mu}_0(\Theta_{c_{n+1}}) - q_{c_{n+1}}) t_{N_{n+1}},$$

$$H_{c_{n+1}}^e := \hat{H}_c^e(g_{N_{n+1}}, g_{T_{n+1}}^{e\alpha}, \Theta_{c_{n+1}}, \zeta_{c_{n+1}}),$$

$$H_{c_n}^e := \hat{H}_c^e(g_{N_n}, g_{T_n}^{e\alpha}, \Theta_{c_n}, \zeta_{c_n}),$$

$$Q_{c_{n+1}}^{(1)} := \hat{h}_{cond}^{(1)}(t_{N_{n+1}}, \Theta_{c_{n+1}})(\Theta_{n+1}^{(1)} - \Theta_{c_{n+1}}),$$

$$Q_{c_{n+1}}^{(2)} := \hat{h}_{cond}^{(2)}(t_{N_{n+1}}, \Theta_{c_{n+1}})(\Theta_{n+1}^{(2)} - \Theta_{c_{n+1}}),$$

$$\mathcal{D}_{c, mech_{n+1}} := \gamma_{c_{n+1}} \hat{\mu}_0(\Theta_{c_{n+1}}) t_{N_{n+1}} / \Delta t,$$

$$t_{T_{\alpha n+1}} = t_{T_{\alpha n+1}}^{trial} - \gamma_{c_{n+1}} \epsilon_T t_{T_{\alpha n+1}}^{trial} / \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|_{ref},$$

$$g_{T_{n+1}}^{p\alpha} = g_{T_{n+1}}^{p\alpha trial} + \gamma_{c_{n+1}} M_{n+1}^{\alpha\beta} t_{T_{\beta n+1}}^{trial} / \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|_{ref},$$

$$\zeta_{c_{n+1}} = \zeta_{c_{n+1}}^{trial} + \gamma_{c_{n+1}} t_{N_{n+1}},$$

$$q_{c_{n+1}} = -\partial_{\zeta_c} \hat{K}_c(\zeta_{c_{n+1}}, \Theta_{c_{n+1}}),$$

con  $\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|_{ref} = (t_{T_{\alpha_{n+1}}} M_{n+1}^{\alpha\beta} t_{T_{\beta_{n+1}}})^{1/2}$ .

**Paso 6.** *Actualización de la base de datos.*

$$g_{T_{n+1}}^p{}^\alpha = g_{T_{n+1}}^{p\ \alpha\ trial} + \gamma_{c_{n+1}} M_{n+1}^{\alpha\beta} t_{T_{\beta_{n+1}}}^{trial} / \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b{}^{trial}\|_{ref},$$

$$\zeta_{c_{n+1}} = \zeta_{c_{n+1}}^{trial} + \gamma_{c_{n+1}} t_{N_{n+1}}.$$