

# Análisis dinámico de presas

J. Miquel Canet  
E. Oñate  
J. Buil  
E. Herrero

# Análisis dinámico de presas

J. Miquel Cante  
E. Oñate  
J. Buil  
E. Herrero

Monografía CIMNE Nº-5, Enero 1991

**Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería**  
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España

Diseño de la cubierta de la colección: Jordi Pallí

Primerá edición, Enero 1991

© Los Autores

Edita:

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería  
C/ Gran Capitán, s/n  
08034 Barcelona, España.

ISBN: 84-404-8715-0

## ANALISIS DINAMICO DE PRESAS

Este trabajo ha sido realizado por Profesores de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, bajo la dirección de los Catedráticos:

- Juan Miquel Canet
- Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra

y por técnicos de ENHER, bajo la dirección de los Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos:

- Juan Buil Sanz
- Eugenio Herrero Pérez

El análisis dinámico experimental de la presa de Llauset por voladuras in situ fué realizado por la empresa Sociedad de Reconocimientos Geofísicos, S. A., bajo la dirección del Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos Dn. Miguel Fernández Bollo.

## NOTA PRELIMINAR

El estudio del comportamiento de las presas sometidas a efectos sísmicos, no ha recibido en nuestro país toda la atención que la importancia del tema aconseja. Consciente de ello, ENHER planteó al Plan de Investigación Electrotécnica (P.I.E.) la necesidad de llevar a cabo una exhaustivo estudio acerca del comportamiento de este tipo de estructuras contemplando una triple faceta:

- Desarrollo de una metodología numérica que permitiera predecir el funcionamiento de las presas ante una eventualidad sísmica, evaluando e identificando aquellos parámetros que pudieran resultar más determinantes.
- Realización de una campaña de ensayos experimentales *in situ*, a efectos de medir a escala real las características dinámicas de las presas.
- Comparación de los resultados anteriores entre si y con el ensayo en modelo reducido de una presa bóveda. Dicha presa bóveda es la de Llauset (propiedad de ENHER), la cual fue ensayada dinámicamente en el laboratorio del ISMES (Bérgamo. Italia)

## INDICE

### PARTE I

#### 1. Introducción.

1.1. Sumario	1
1.2. Antecedentes, motivación y objetivos.	2

#### 2. Ecuaciones básicas.

2.1. Introducción	6
2.2. Movimiento sismico del terreno.	12
2.3. Formulación.	14
2.3.1. Expresiones matriciales.	14
2.3.2. Matrices de masa consistente y concentrada.	20
2.3.3. Matrices de amortiguamiento.	22
2.3.4. Elementos utilizados.	22
2.3.4.1. Elemento de 20 nodos.	23
2.3.4.2. Elemento de 15 nodos.	26
2.4. Generación automática de malla.	26
2.4.1. Generación del cuerpo de la presa bóveda.	28
2.4.2. Generación de malla en la zona de cimentación.	31
2.5. Resolución de la ecuación dinámica.	35
2.5.1. Obtención de la respuesta en el tiempo.	38
2.5.2. Obtención de la respuesta mediante espectros.	39

#### 3. Presa de Morrow Point.

3.1. Introducción.	41
3.2. Malla de elementos finitos.	43
3.3. Análisis dinámico.	48

**PARTE II****4. Efectos hidrodinámicos. Planteamiento matemático.**

4.1. Introducción.	67
4.2. Hipótesis básicas.	68
4.3. Ecuación de comportamiento del fluido.	69
4.4. Condiciones de contorno.	72
4.4.1. Condición de superficie libre.	72
4.4.2. Contornos con aceleraciones prescritas.	74
4.4.3. Contornos fijos.	74
4.4.4. Contornos amortiguadores.	75

**5. Modelización del fluido mediante elementos finitos.**

5.1. Desducción de las ecuaciones generales discretizadas.	77
5.2. Condiciones de contorno.	80
5.2.1. Ondas superficiales.	80
5.2.2. Contacto del fluido con contornos sólidos.	81
5.2.3. Matriz de amortiguamiento con el terreno.	85
5.3. Ecuación matricial del fluido.	86
5.4. Elementos usados en la discretización del fluido.	88

**6. Dominios infinitos.**

6.1. Introducción	89
6.2. Ejemplo introductorio.	91
6.2.1. Solución analítica.	92
6.2.2. Solución numérica.	96
6.3. La condición de radiación.	103
6.3.1. Planteamiento.	103
6.3.2. Discretización de la condición de radiación.	110
6.4. Elementos infinitos.	111
6.5. Formulación semianalítica.	116

**7. Dominio fluido finito: Estudio paramétrico.**

7.1. Introducción	125
7.2. Resolución del sistema de ecuaciones.	125
7.3. Recinto finito de fluido.	129
7.3.1. Resolución directa del sistema de ecuaciones.	132
7.3.2. Resolución mediante descomposición modal.	138

7.3.3. Fluido incompresible.	138
7.3.4. Efecto de las ondas superficiales.	142

### 8. Dominio fluido infinito: Estudio paramétrico.

8.1. Introducción.	146
8.2. Dominio fluido infinito.	146
8.2.1. Condición de radiación.	148
8.2.1.1. Comparación entre las tres condiciones de radiación	151
8.2.1.2. Amortiguamiento con el terreno.	156
8.2.1.3. Influencia de la compresibilidad del fluido.	157
8.2.1.4. Leyes de presiones.	159

## PARTE III

### 9. Interacción dinámica presa-embalse.

9.1. Introducción.	167
9.2. Ecuaciones de interacción.	168
9.3. Presa de gravedad	175
9.3.1. Resolución mediante el método directo.	177
9.3.2. Frecuencias propias del problema de interacción.	182
9.3.3. Resolución con la formulación semianalítica.	182
9.3.4. Efecto de la interacción con el terreno.	185
9.3.5. Condición de radiación de Hurnar y de Zienkiewicz en el problema de interacción.	187
9.3.6. Compresibilidad del fluido.	191
9.4. Fluido finito	191
9.5. Presa bóveda.	196

### 10. Análisis experimental.

10.1. Introducción.	197
10.2. Modelo reducido.	199
10.2.1. Criterios de semejanza.	199
10.2.2. Materiales del modelo.	204
10.2.3. Relaciones de semejanza.	206
10.2.4. Observaciones sobre la validez del modelo.	207
10.2.5. Técnica experimental.	209

10.2.6. Presiones hidrodinámicas y matriz de masa equivalente.	214
10.3. Ensayo a escala real.	227
10.4. Análisis numérico: Embalse vacío.	234
10.4.1. Discretización de la presa.	234
10.4.2. Frecuencias y modos propios de vibración.	242
10.4.2.1. Estudio de los modos propios con las distintas mallas.	242
10.4.2.2. Cálculo de la respuesta mediante espectros.	242
10.5. Análisis numérico: Embalse lleno.	256
10.5.1. Modos y frecuencias propias a embalse lleno.	260
10.5.1.1. Modelización del dominio fluido como infinito.	260
10.5.1.2. Modelización del dominio fluido como finito.	261
10.5.2. Incompresibilidad del fluido.	277
	277

## 11. Análisis modal. Modelo propuesto.

11.1. Introducción.	287
11.2. Modelo numérico propuesto.	288
11.2.1. Presiones hidrodinámicas y matriz de masa equivalente.	288
11.2.2. Aplicación del concepto de matriz de masa equivalente.	290
11.2.3. Análisis modal del sistema fluido-estructura.	291
11.2.4. Determinación de los vectores propios del sistema.	291
11.2.5. Cálculo de los vectores propios del sistema.	292
11.2.6. Obtención de la respuesta mediante espectros de respuesta.	295
11.3. Resultados obtenidos.	297
11.3.1. Introducción.	297
11.3.2. Frecuencias propias de vibración de la estructura a embalse lleno.	298
11.3.3. Matriz de masa equivalente.	299
11.3.4. Proceso iterativo de cálculo de los vectores de la estructura considerando la interacción con el fluido.	312
11.3.5. Espectros de respuesta	317

<b>Conclusiones</b>	325
<b>Referencias</b>	329



# PARTE I



## *CAPITULO 1*

### **INTRODUCCION**

#### **1.1. SUMARIO**

Se desarrolla en los Capítulos siguientes un estudio numérico – experimental acerca del comportamiento dinámico de las presas bóvedas considerando su interacción con el agua del embalse. Para ello, se ha realizado un análisis de los factores que inciden más directamente en el comportamiento dinámico de tales tipos de estructuras. Dicho análisis se realiza mediante el método de los elementos finitos, estudiando distintas alternativas de formulación. Asimismo se ha realizado un ensayo a escala real de una presa bóveda existente, mediante una serie de explosiones y midiendo la respuesta obtenida. Los resultados a escala real, se han procesado y comparado con los proporcionados por el análisis numérico. Igualmente, estos mismos resultados se han comparado con otros ya existentes procedentes de un ensayo en modelo realizado previamente. Las tres vías citadas han convergido de forma satisfactoria, validando de esta manera las conclusiones obtenidas.

Por lo que respecta al contenido, el trabajo se ha dividido en tres partes. La primera de ellas, se dedica la estudio de la presa bóveda a embalse vacío, esto es, sin considerar la influencia que en su

## INTRODUCCION

comportamiento ejerce el agua embalsada. De esta forma, en el Capítulo 2 se estudian las ecuaciones básicas de equilibrio dinámico y su resolución mediante el método de los elementos finitos. En el Capítulo 3, se trata la Presa de Morrow Point, comparando los resultados obtenidos con los proporcionados por estudios anteriores.

La segunda parte, se dedica al análisis dinámico del agua del embalse, estudiando distintas formulaciones, y viendo la importancia relativa de los diversos factores que inciden en su solución. En el Capítulo 4 se plantean las ecuaciones básicas asociadas a las condiciones de contorno. En el Capítulo 5 se modeliza el fluido mediante el método de los elementos finitos, dedicándose el Capítulo 6 al estudio de los dominios de fluido infinitos. El Capítulo 7 está dedicado a realizar un estudio paramétrico en un dominio de fluido finito, mientras que el Capítulo 8, dicho estudio se realiza en dominios de fluido infinitos.

Por lo que respecta a la tercera parte, en el Capítulo 9 se realiza la interacción dinámica con el agua del embalse, estudiante nuevamente la influencia en la solución de algunos factores, mientras que el Capítulo 10, está dedicado a la comparación entre los resultados numéricos y los experimentales para la presa bóveda de Llauset, obtenidos en modelo reducido y a escala real.

### 1.2. ANTECEDENTES, MOTIVACION Y OBJETIVOS

La distribución de las presiones hidrodinámicas producidas por el agua del embalse en una presa, presenta unas características peculiares, por cuanto interesa no tanto la distribución de presiones en el interior del dominio fluido, sino solamente en uno de sus contornos: la presa. El primero en estudiar este problema fue Westergaard [21], en 1933. Supuso la presa infinitamente rígida, y realizó su estudio en dos dimensiones. A partir de entonces numerosos investigadores se han dedicado a estudiar este fenómeno. Las primeras publicaciones, continuaron tratando la presa como un sólido indeformable a fin de abordar dicho problema [23],[33]. Ello comporta importantes consecuencias en el tratamiento del fenómeno, puesto que permite abordar el estudio dinámico de la presa, prescindiendo

## INTRODUCCION

de la interacción, y pudiéndose por tanto considerar los efectos dinámicos del agua del embalse como cargas dinámicas a aplicar directamente a la presa al realizar su estudio dinámico.

Chopra [34], por otro lado, trató los efectos debidos a la flexibilidad de la estructura sólida. En su estudio utilizó soluciones analíticas para el embalse, bajo la hipótesis de que la cara aguas arriba de la presa es vertical, y el fondo del embalse es plano. Se consideraba los efectos bidimensionales y se supuso fluido infinito. Posteriormente Saini et al. [31], trataron tanto la presa como el fluido mediante la técnica de discretizar sus ecuaciones de comportamiento mediante el método de los elementos finitos.

Todos los estudios anteriores estaban realizados en dos dimensiones. Posteriormente, Chopra [35], Clough [36], Hall [37] y Shiojiri [38], estudian la interacción entre presa y agua del embalse de forma tridimensional.

Por lo que respecta a nuestro país, existe en la actualidad una gran preocupación entre los ingenieros dedicados a la construcción o conservación de presas por su comportamiento a largo plazo. Reflejo de ello, son las recientes actuaciones de diversas empresas eléctricas en este sentido, bien de forma individual o de forma conjunta a través del P.I.E. Asimismo, el Servicio de Vigilancia de Presas, ha emprendido diversas iniciativas a fin de mejorar el conocimiento actual acerca del comportamiento de las presas. En esta actuación se enmarca el actual debate acerca de una nueva Instrucción para el Proyecto y Construcción de Grandes Presas.

Es dentro de este contexto, en donde se enmarca el presente trabajo, como parte de un estudio más extenso en el campo de las presas. Se pretende realizar un estudio teórico experimental acerca del comportamiento de presas bóveda, sometidas a efectos sísmicos. Se trata de estudiar formulaciones válidas para simular su comportamiento, analizar los parámetros que más influyen en su estado tensional y comparar los resultados obtenidos con los proporcionados por la

## INTRODUCCION

experimentación, bien sea ésta en modelo reducido o a escala real. Una segunda fase de este trabajo, consistirá en suponer comportamiento no lineal para el cuerpo de la presa, con el objetivo de poder establecer criterios de aceptación del diseño de presas bajo acciones sísmicas.

## CAPITULO 2

# ECUACIONES BASICAS

### 2.1. INTRODUCCION

Conceptualmente, la utilización del arco como elemento resistente frente a cargas normales a él es conocida desde mucho tiempo atrás. La idea de la presa bóveda, como elemento idóneo para soportar los empujes producidos por el agua del embalse, obedece a esta misma idea. Frente a las presas de gravedad en las que la propia masa del monolito desempeña el papel fundamental en las tareas resistentes, en las presas bóveda se busca una forma de trabajo totalmente distinta. Sin entrar en consideraciones de tipo hidráulico, sino ciñéndonos fundamentalmente al aspecto estructural, se pretende diseñar un tipo de estructura *masiva* en la cual el reparto de tensiones (necesariamente de compresión) sea lo más favorable posible. La complicada forma de estas presas obedece justamente a esta razón, junto con la necesidad de lograr una incidencia favorable a la roca de cimentación a fin de proporcionar un asiento estable que reduzca al máximo los movimientos y evite posibles deslizamientos.

El hecho de que la estructura sea masiva, le confiere a la presa bóveda algunas peculiaridades importantes. Quizás la más importante de todas ellas estructuralmente hablando, sea el hecho de que todas las tensiones

deban ser de compresión o que las tracciones estén limitadas a valores muy pequeños. Aunque se disponen armaduras en zonas muy localizadas de la presa, no se puede pensar en colocar acero en el cuerpo de la misma para absorber las tracciones, por lo que su diseño debe partir de este hecho. De esta manera, la forma final obedece a estos principios. Sin embargo, el problema se agrava debido a que ello debe cumplirse para los tres estados de cargas que se presentan:

- a) *Presas en construcción*, en donde la bóveda no existe como tal, sino únicamente unas ménsulas verticales sometidas a su propio peso.
- b) *Presas a embalse vacío* una vez selladas todas las juntas.
- c) *Presas a embalse lleno* actuando todo el empuje del agua.

La forma de la presa bóveda nace de un compromiso resistente entre las tres situaciones descritas.

Fácilmente se comprende que una estructura tan compleja y al mismo tiempo tan comprometida, dado el elevado riesgo que implica su fallo, haya representado un complicado problema de cálculo. Previamente a la aparición de los ordenadores electrónicos así como de algoritmos numéricos adecuados, el cálculo se realizaba mediante hipótesis simplificativas que reducían de forma drástica el problema. Los primeros cálculos realizados, se limitaban a considerar solamente la resistencia de los arcos horizontales suponiéndolos empotados en las laderas y sometidos a la sobrecarga correspondiente al empuje hidrostático, el cual es función de la profundidad. A lo sumo, para tener en cuenta la posibilidad de que el empotramiento no fuera perfecto, se repetía el cálculo suponiendo apoyo con giro libre, dimensionándose los arcos de forma que las tensiones debidas a ambas hipótesis fueran aceptables. Es obvio observar que este método no garantiza la compatibilidad de desplazamientos entre los distintos arcos horizontales consecutivos, por lo que la aproximación proporcionada es muy primaria.

Un avance importante, fue el método preconizado por el suizo Stucky hacia los años treinta y que con ligeras variaciones y mejoras ha venido utilizándose hasta hace muy poco, ya bien entrado el decenio de los sesenta, con el nombre de *trial load method*. Este método concibe la estructura (figura 2.1) formada por una serie de elementos horizontales (arcos) y verticales (ménulas), trabados entre sí, y colaborando conjuntamente en la resistencia. De esta forma, el empuje hidrostático puede considerarse compuesto por dos sumandos: uno de ellos que carga sobre la ménula y el otro sobre el arco. De esta forma, la ley de empujes sobre la ménula no es triangular, y los empujes sobre los arcos no son constantes en su desarrollo. El método por tanto, consiste en hallar esta distribución de cargas sobre los arcos y sobre las ménulas, de modo que se cumpla la condición de compatibilidad de desplazamientos en los puntos de intersección arco-ménula. Dicha compatibilidad se exigía de forma total o parcial (considerando por ejemplo solamente la igualdad de alguno o algunos de los desplazamientos y prescindiendo de los giros) dependiendo de la exactitud deseada. El método del *trial load* no es por tanto más que un método iterativo de tanteo y error.

El método anterior, conceptualmente muy atractivo ha constituido una herramienta muy importante no solamente para el cálculo de presas bóveda, sino también para su diseño. En su aplicación práctica constituye un importante medio de trabajo al permitir visualizar de forma clara el comportamiento de la estructura. Permite intuir de forma cualitativa los efectos, que un cambio de forma o de espesor, producirán en la redistribución de esfuerzos.

Recientemente [1], se están desarrollando algoritmos numéricos de optimización, entre cuyas aplicaciones se encuentra el diseño idóneo de presas bóvedas.

Los métodos de cálculo anteriores, quedaron completamente desbancados con la aparición del método de los elementos finitos. En [2] y en [3] se describe una amplia aplicación del método de los elementos finitos al análisis de presas en general y en [4] se proporciona una amplia gama de aplicaciones. De este modo, el método de los elementos finitos ha

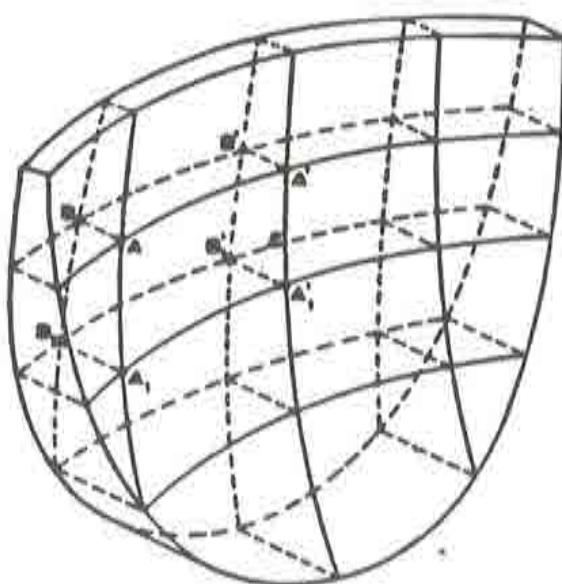


Fig. 2.1. *Método del "trial load". Descomposición en ménulas y arcos.*

cambiado completamente el panorama en lo que a cálculo se refiere. Las compatibilidades de movimientos se exigen de forma estricta, es posible introducir, sin que ello represente un mayor problema, otro tipo de cargas aparte de la hidrostática (retracción, temperaturas, etc). Por otra parte, los efectos debidos al terreno de cimentación pueden ser considerados de forma mucho más realista. Así por ejemplo en la figura 2.2 se muestra la idealización propuesta para la roca y la estructura, compuesta por un conjunto de elementos tridimensionales. Como puede observarse, la estructura objeto del cálculo incluye no solamente la presa, sino también una determinada porción de terreno.

Los elementos finitos utilizados para el cálculo de presas bóveda son fundamentalmente de dos tipos:

- *Elementos de lámina gruesa*, mediante los cuales se idealiza la presa mediante su superficie media. Tienen cinco grados de libertad (tres desplazamientos y dos giros) por nodo. En su formulación se incluye

## ECUACIONES BASICAS

de forma aproximada la energía de deformación debida al esfuerzo cortante y admite la hipótesis de Navier de las secciones planas [5],[6],[7],[8].

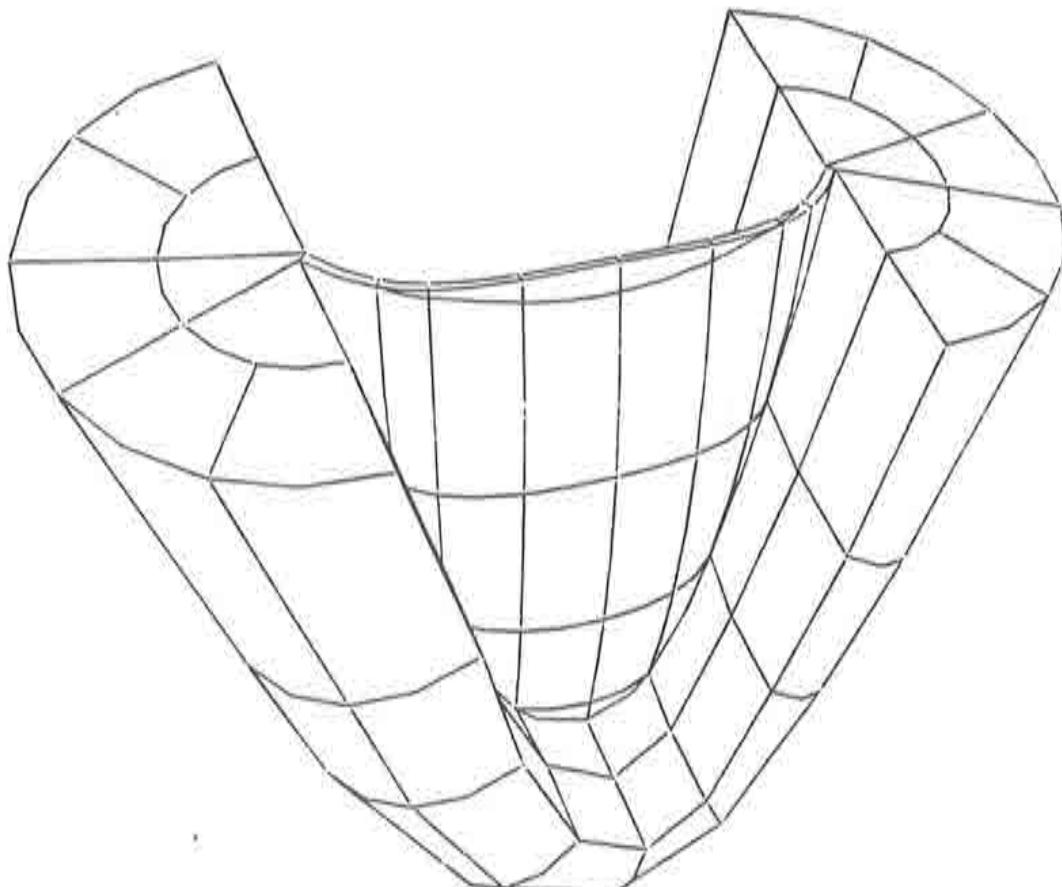


Fig. 2.2. Idealización para presa y roca en zona de estribación. Malla de elementos finitos tridimensionales.

- *Elementos finitos tridimensionales*, los cuales se basan en la utilización directa de la teoría de la elasticidad tridimensional sin más hipótesis simplificativas adicionales. Dichos elementos tienen tres grados de libertad por nodo (los tres desplazamientos según cada uno de los tres ejes coordenados) [9].

## ECUACIONES BASICAS

Con los elementos de lámina gruesa, puede exclusivamente modelarse el cuerpo de la presa, debiendo recurrir a los elementos tridimensionales para estudiar la cimentación. Por ello, en el caso de utilizar dicho tipo de elementos, es necesario introducir un elemento de transición entre la presa y el terreno, esto es, entre los elementos lámina y tridimensionales.

Aunque todas las acciones señaladas hasta ahora son de carácter estático, y ellas son las que deciden de manera prioritaria la forma a dar a la bóveda, existe una acción de tipo dinámico, que si bien se presenta de forma excepcional no puede ser olvidada en el diseño y cálculo de las presas bóveda, por las tensiones a que pueda dar lugar, y los efectos desastrosos que puede producir. Nos estamos refiriendo obviamente a las acciones sísmicas. Como se sabe, dichas acciones consisten en unas aceleraciones variables con el tiempo que excitan la base de la estructura produciendo unas fuerzas, primordialmente horizontales, en el cuerpo de la presa. Al estudio de los movimientos y tensiones producidos por estas fuerzas en la presa a embalse vacío, se dedica esta primera parte del presente trabajo.

Tal como se ha señalado en el capítulo primero, se considera la interacción con el terreno de forma parcial. Es decir, se supone la cimentación sin masa, pero dotada de los efectos de flexibilidad. Ello permite reducir el tamaño del problema y lo simplifica de forma extraordinaria, fundamentalmente por dos razones: La primera de ellas es que permite considerar conocido el "input" sísmico, es decir suponerlo igual al movimiento de campo libre. Y la segunda es que permite considerar una determinada porción de terreno (porción finita) sin más precauciones, es decir no aparecen los problemas derivados de la reflexión de onda que se producirían en los límites artificiales del terreno si a éste se le dotara de masa, y no se adoptaran disposiciones especiales. El alcance y la aproximación conseguidas utilizando tal simplificación, podrán observarse mediante el estudio de la presa de Llauset.

En esta primera parte se desarrollan las herramientas de trabajo necesarias para el estudio y diseño de presas bóveda. El modelo empleado es el de los elementos finitos y análisis elástico lineal.

## 2.2 MOVIMIENTO SISMICO DEL TERRENO

En el estudio de la respuesta sismica de estructuras, un problema previo al análisis y de capital importancia, lo constituye la definición de la propia acción sismica. Para ello, existen en cada país las normas o reglamentos símicos que definen para cada zona del territorio y para cada tipo de estructura a calcular, el valor del *input* sísmico. Concretamente en el caso español, se dispone de la Norma Sismoresistente, la cual aparte de otras indicaciones proporciona el valor o espectro de respuesta a utilizar en el análisis. Estudios posteriores [10] parecen confirmar la validez de dicho espectro, por lo que a Cataluña se refiere.

Sin embargo, tanto el espectro como la casi totalidad de la información disponible se refiere a datos y registros obtenidos en la superficie del terreno. Por otra parte, cuando la estructura a analizar es pequeña es de esperar que, por un lado, el *input* sísmico sea el mismo para todas las partes de la estructura (es decir no se considera la distribución espacial del mismo), y por otro, dicho *input* no se vea modificado por la presencia de la propia estructura. Estas aproximaciones no son evidentemente apropiadas en el caso de una presa bóveda, en el que su desarrollo supera al centenar de metros, por lo que es de esperar que el movimiento sísmico de campo libre varíe a lo largo de la altura. Es posible introducir en el análisis [11] movimientos de la base no uniformes, sin que ello represente una dificultad adicional en el cálculo. La principal dificultad se presenta sin embargo en la definición racional de tales movimientos con la altura, puesto que hasta ahora no se han medido en presas bóvedas las variaciones de dichos movimientos. Una aproximación al problema puede obtenerse definiendo el movimiento sísmico en la base del modelo de elementos finitos (presa más zona de cimentación). Sin embargo se conoce poco del valor de los movimientos sísmicos en el interior del terreno, porque las medidas se realizan en la superficie. Cabe también realizar estudios de deconvolución a partir de los datos de campo libre, aunque un estudio completo de dicho fenómeno requiere del análisis completo de la interacción suelo-estructura, lo cual queda fuera del alcance de dicho estudio.

Como los objetivos de este trabajo consisten en desarrollar una metodología válida para el estudio de presas bóveda en su interacción con el agua del embalse, se ha prescindido del problema anterior, suponiendo conocidos dichos movimientos sísmicos. Específicamente, se introduce en el modelo una porción de la masa rocosa la cual simula únicamente los efectos estáticos de flexibilidad. La roca de cimentación se supone carente de masa para el estudio dinámico de la presa [12]. Al no existir mecanismo de propagación de onda en el terreno, el movimiento de la base se transmite sin modificación a la unión presa-roca. Dicha aproximación es equivalente a considerar válido para el análisis el movimiento conocido de campo libre.

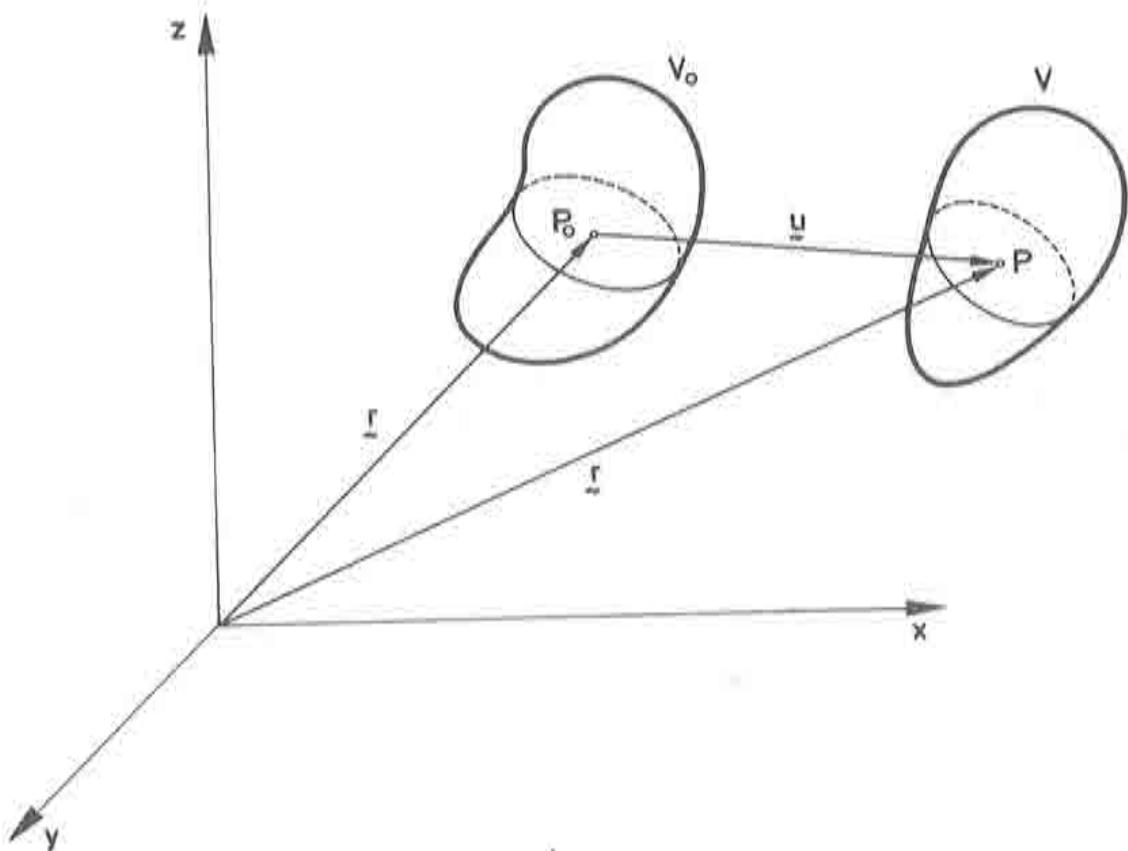


Fig. 2.3. Descripción de la geometría y movimiento del cuerpo.

### 2.3. FORMULACION

Se desarrolla en el presente apartado la formulación de la presa bóveda en elementos finitos, así como los diferentes tipos de elementos utilizados.

#### 2.3.1 Expresiones matriciales

Considérese un cuerpo (figura 2.3) elástico tridimensional. Sea  $P_0$  la posición de un punto del cuerpo en su configuración inicial  $V_0$ . Este punto quedará definido por las coordenadas materiales  $x_0, y_0, z_0$ . Una vez deformado el cuerpo, el punto  $P_0$  ocupará la posición  $P$  en la configuración deformada  $V$ , quedando determinado por las coordenadas  $x, y, z$ . Si  $\mathbf{r}(x, y, z)$  es la posición de  $P$  en  $V$  y  $\mathbf{r}_0(x, y, z)$  es la de  $P_0$  en  $V_0$ , se tendrá

$$\mathbf{r}(x, y, z) = \mathbf{r}_0(x, y, z) + \mathbf{u}(x, y, z) \quad (2.1)$$

o también

$$\begin{aligned} x(x, y, z) &= x_0(x, y, z) + u(x, y, z) \\ y(x, y, z) &= y_0(x, y, z) + v(x, y, z) \\ z(x, y, z) &= z_0(x, y, z) + w(x, y, z) \end{aligned} \quad (2.2)$$

en donde  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ , y  $w(x, y, z)$  son los desplazamientos según los ejes cartesianos  $x, y, z$  respectivamente del punto  $P_0$ .

El tensor de deformación de Green viene dado por [13]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \delta_{ij}) \quad (2.3)$$

en donde  $g_{ij}$  es el tensor definido por

$$g_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial x_{oi}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{oj}} \quad (2.4)$$

sustituyendo (2.4) en (2.3), teniendo en cuenta (2.1) y despreciando los términos cuadráticos (pequeñas deformaciones) se tiene

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.5)$$

pudiéndose escribir las deformaciones en forma matricial

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T \quad (2.6)$$

Asimismo el vector de tensiones se escribe

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}]^T \quad (2.7)$$

estableciéndose la relación elástica lineal entre  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\boldsymbol{\epsilon}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.8)$$

en donde  $\mathbf{D}$  es la matriz de elasticidad

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Para establecer las ecuaciones de equilibrio dinámico, se aplica el teorema de los trabajos virtuales, el cual establece que [14] cuando a un cuerpo en equilibrio (estático o dinámico) se le da un movimiento virtual, la diferencia entre el trabajo realizado por las fuerzas exteriores y las fuerzas internas es nulo:

$$\delta W^{int} - \delta W^{ext} = 0 \quad (2.10)$$

en donde el trabajo virtual realizado por las fuerzas internas se expresa

$$\delta W^{int} = \int_V \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dV \quad (2.11)$$

y el de las fuerzas externas como

$$\delta W^{ext} = \int_A \delta u_k t_k dA + \int_V \delta u_k \bar{t}_k dV \quad (2.12)$$

siendo  $t_k$  y  $\bar{t}_k$  las fuerzas por unidad de superficie y por unidad de volumen respectivamente,  $A$  y  $V$  son el volumen y el área del cuerpo y  $\delta u_k$  y  $\delta \epsilon_{ij}$  son los desplazamientos virtuales y las deformaciones virtuales asociadas a ellos, respectivamente.

## ECUACIONES BASICAS

Descomponiendo  $\bar{t}_k$  en sus partes constituyentes, la expresión (2.12) se transforma en

$$\delta W^{ext} = \int_A \delta u_k t_k dA + \int_V \delta u_k (b_k - \rho \ddot{u}_k - c \dot{u}_k) dV \quad (2.13)$$

siendo  $b_k, \rho \ddot{u}_k, c \dot{u}_k$  respectivamente, las fuerzas de volumen, de inercia y las de amortiguamiento,  $\rho$  es la densidad,  $c$  es el amortiguamiento volumétrico y  $\ddot{u}_k$  y  $\dot{u}_k$  las derivadas temporales del desplazamiento  $u_k$

Sustituyendo (2.12) y (2.13) en (2.10) se obtiene

$$\int_V \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dV - \int_V \delta u_k (b_k - \rho \ddot{u}_k - c \dot{u}_k) dV - \int_A \delta u_k t_k dA = 0 \quad (2.14)$$

y si se prescinde de las fuerzas por unidad de volumen y de superficie

$$\int_V \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dV + \int_V \delta u_k (\rho \ddot{u}_k + c \dot{u}_k) dV = 0 \quad (2.15)$$

Para obtener la ecuación de equilibrio discretizada en elementos finitos, el vector de corrimientos  $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$  se escribe

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \sum N_i(x, y, z) \mathbf{a}_i = \mathbf{N} \mathbf{a} \quad (2.16)$$

siendo  $N_i$  las funciones de forma y  $\mathbf{a}_i$  el vector de parámetros incógnita.

De acuerdo con (2.5), (2.6) y (2.15) el campo de deformaciones se escribe

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (2.17)$$

en donde la expresión de la matriz  $\mathbf{B}$  para cada elemento y nodo vale

$$\mathbf{B}_i^{(e)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Sustituyendo (2.8), (2.16) y (2.17) en (2.15) queda

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{a}^T \left( \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{a} + \delta \mathbf{a}^T \left( \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \right) \ddot{\mathbf{a}}^T + \\ \delta \mathbf{a}^T \left( \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{c} \mathbf{N} dV \right) \dot{\mathbf{a}} = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

y puesto que los valores  $\delta \mathbf{a}^T$  son arbitrarios, la ecuación (2.19) se expresa

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}^t + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

expresión que constituye la ecuación de equilibrio dinámico discretizada en elementos finitos, para el caso en que se considera exclusivamente fuerzas de tipo sísmico. En dicha expresión, las matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ , y  $\mathbf{K}$  valen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \\
 \mathbf{C} &= \int_V \mathbf{N}^T c \mathbf{N} dV \\
 \mathbf{K} &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Los valores del vector  $\mathbf{a}^t$  constituyen los movimientos *totales* de los nodos respecto a la posición de reposo sin deformar, mientras que  $\mathbf{a}$  contiene los movimientos *relativos* de los nodos de la estructura respecto a los movimientos de sólido rígido. El vector de aceleraciones totales  $\ddot{\mathbf{a}}^t$  puede escribirse

$$\ddot{\mathbf{a}}^t = \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{J} \mathbf{a}_g \tag{2.22}$$

en donde  $\mathbf{a}_g$  es un vector de  $3 \times 1$  cuyas tres componentes son las aceleraciones impuestas en la base rígida, y  $\mathbf{J}$  es una matriz de  $n \times 3$  (siendo  $n$  el número total de grados de libertad de la estructura) denominada matriz de coeficientes de influencia, la cual expresa el desplazamiento de cada uno de los grados de libertad del modelo de elementos finitos, debido a un desplazamiento unidad en cada componente de la base rígida. En el caso que se considere exclusivamente movimiento sísmico en una de las direcciones de los ejes coordenados, la matriz  $\mathbf{J}$  se convierte en una matriz de  $n \times 1$  y  $\mathbf{a}_g$  en un escalar. Sustituyendo (2.22) en (2.20) se obtiene

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} \mathbf{a} = -\mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{a}_g \tag{2.23}$$

La expresión (2.23) constituye la forma usual de presentación de la ecuación de equilibrio dinámico de una estructura sometida a un movimiento sísmico.

### 2.3.2. Matrices de masa consistente y concentrada

A la matriz de masa  $M$  obtenida anteriormente y definida por la ecuación (2.21), se le denomina matriz consistente de masa. Tiene elementos no nulos fuera de la diagonal principal. Su estructura global es la misma que la de la matriz de rigidez, es decir su ancho de banda es el mismo.

Una interesante simplificación resulta de concentrar la matriz de masa, de forma que solamente tenga elementos no nulos en la diagonal principal. Conceptualmente dicha concentración equivale a suponer compartir el efecto de la traslación de un determinado nodo con la zona del elemento más próxima a él, quedando el resto del elemento sin afectar. En esquemas sencillos, resulta fácil formular esquemas de concentración de masas utilizando razonamientos intuitivos [9].

En la referencia [15] pueden verse los distintos métodos utilizados en la concentración de masas. Presentan dos líneas fundamentales:

- Los nodos de los elementos se utilizan como puntos de la integración numérica. Ello proporciona una matriz de rigidez diagonal. Sin embargo, algunos elementos pueden resultar negativos dando lugar a frecuencias de vibración imaginarias.
- Utilización de funciones de forma distintas para la matriz de masa y para la de rigidez. Se toman de manera que valgan uno en la zona cercana al nodo y cero en el resto. De esta forma se obtiene una matriz diagonal.

Los términos de la matriz concentrada se obtienen de modo que se mantenga el valor de la masa total

$$M = \frac{M_i M_i}{\sum_{i=1}^n M_i} \quad (2.24)$$

Se ha incorporado en el presente estudio, una formulación sencilla que en la práctica ha proporcionado resultados correctos. La concentración de la masa se realiza sumando los términos de cada fila de la matriz elemental de masa consistente. Posteriormente se ensamblan las matrices de masa concentrada [15]. La matriz de masa resultante es evidentemente diagonal.

La concentración de masa afecta ligeramente al valor de las frecuencias naturales de vibración. Los refinos de mallas pueden mejorar las frecuencias obtenidas. En la figura 2.4 pueden verse los resultados obtenidos para las frecuencias propias de vibración en la presa de Pacoima, mediante análisis modal [7].

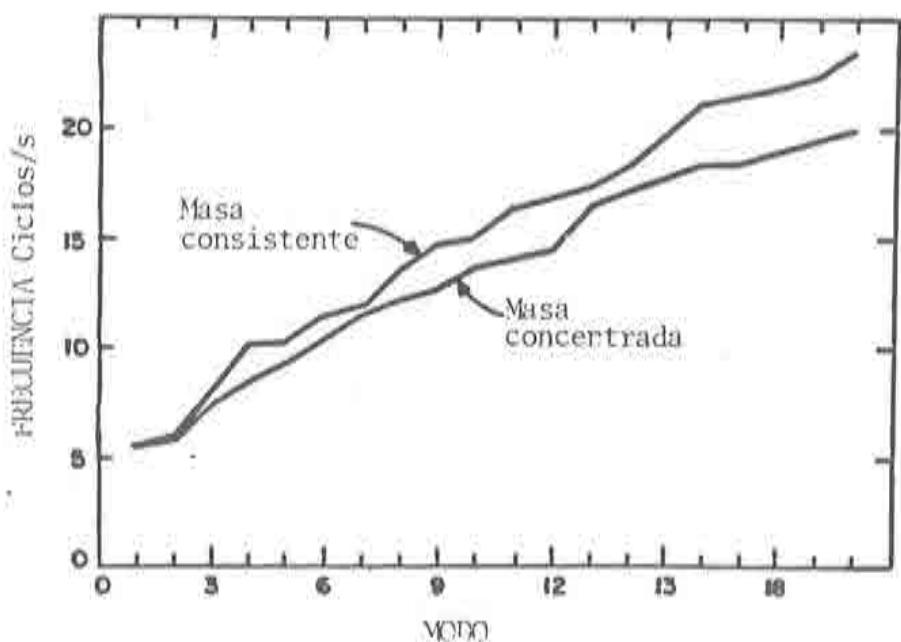


Fig. 2.4. Frecuencias propias de la presa de Pacoima. Matrices de masa consistente y diagonal [7].

### 2.3.3 Matriz de amortiguamiento

La expresión de la matriz de amortiguamiento obtenida en (2.2.1), aunque formalmente correcta, presenta el problema de la determinación del parámetro  $c$ . En general, dicho parámetro es desconocido, por lo que se precisa de otra metodología para formar la matriz  $C$ . Una forma de operar muy corriente, y que se ha seguido en el presente estudio, es suponer que el amortiguamiento total de la estructura, es la suma de los amortiguamientos aportados individualmente por cada uno de los modos presentes en el sistema.

De esta forma, el amortiguamiento se define en cada modo mediante un factor  $\xi_i$ , el cual representa el tanto por uno de amortiguamiento, respecto al amortiguamiento crítico de cada modo.

### 2.3.4. Elementos utilizados

Para modelar correctamente la presa se han utilizado dos tipos de elementos tridimensionales: Un elemento de veinte nodos para discretizar el cuerpo de la presa, así como la roca de cimentación, y otro de quince para las zonas de la presa en contacto con dicha roca. Esta discretización resulta muy ventajosa desde el punto de vista de la generación automática de la malla (ver apartado 2.4): En efecto, si cortamos la estructura por planos horizontales y verticales, se forma una cuadrícula paralelepípedica de base rectangular curvilínea, a excepción del contacto con la ladera en que aparecen paralelepípedos de base triangular (figura 2.5). De esta forma, ambos tipos de elementos se introducen dentro de la estructura de la presa para su tratamiento numérico.

En ambos casos se utiliza la representación isoparamétrica para la definición geométrica de cualquier punto de la estructura:

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i \\
 y &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i \\
 z &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

en donde  $n$  es el número de nodos del elemento (15 ó 20 dependiendo del tipo de elemento) y  $\xi, \eta$  y  $\zeta$  son sus coordenadas locales. Su valor varía de -1 a 1.

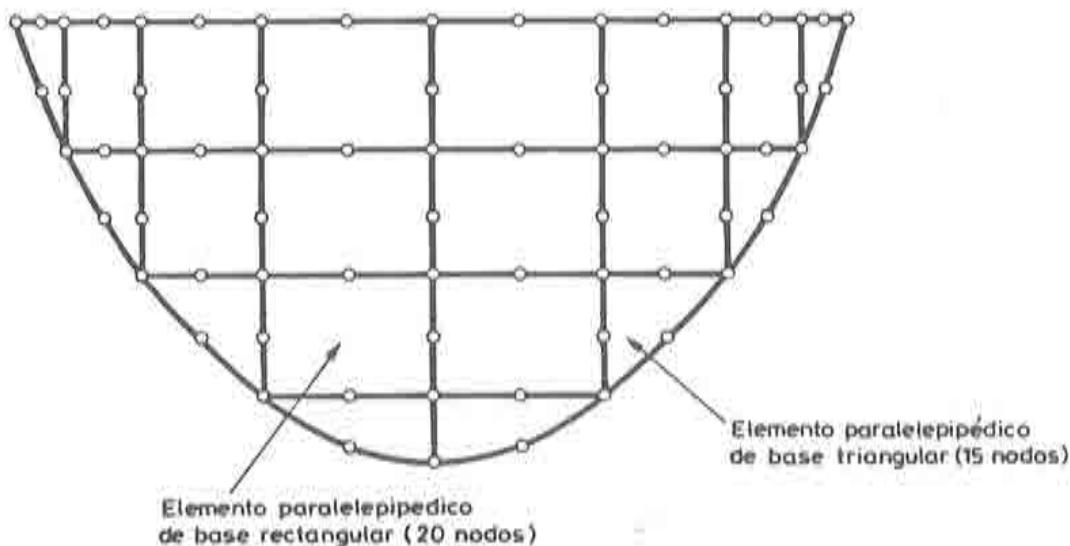


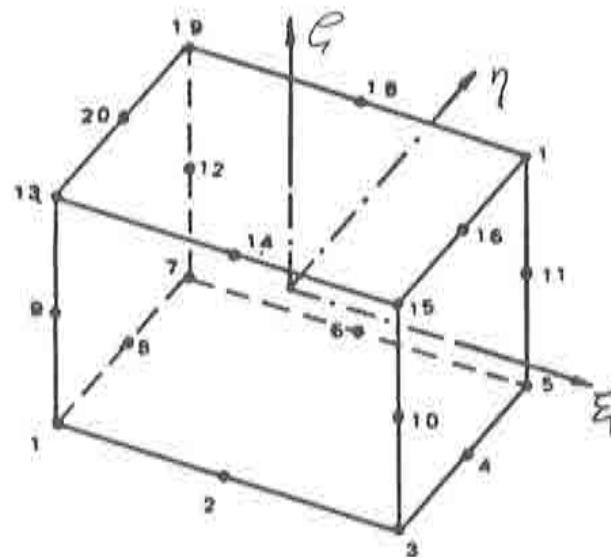
Fig. 2.5. Discretización de una presa bóveda en elementos paralelepédicos de base triangular y rectangular.

#### 2.3.4.1 Elemento de 20 nodos

El elemento de 20 nodos es el serendipito cuadrático de la familia

## ECUACIONES BASICAS

paralelepípedica (figura 2.6). Sus funciones de forma en coordenadas



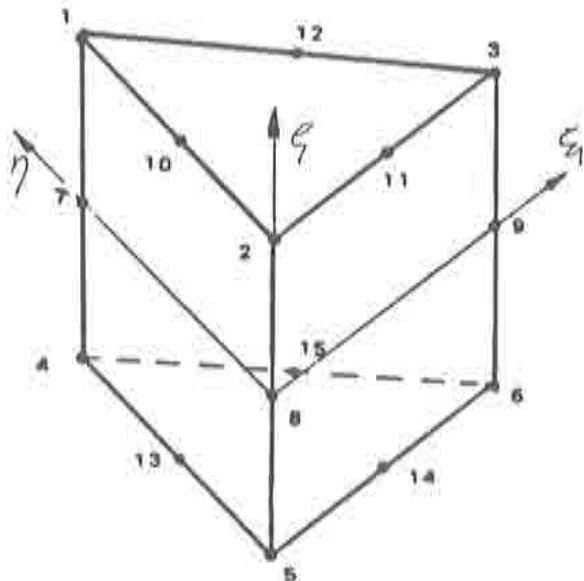
NODO	Coordenadas Locales		
	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
1	-1	-1	-1
2	0	-1	-1
3	1	-1	-1
4	1	0	-1
5	1	1	-1
6	0	1	-1
7	-1	1	-1
8	-1	0	-1
9	-1	-1	0
10	1	-1	0
11	1	1	0
12	-1	1	0
13	-1	-1	1
14	0	-1	1
15	1	-1	1
16	1	0	1
17	1	1	1
18	0	1	1
19	-1	1	1
20	-1	0	1

Fig. 2.6. Elemento serendipito de 20 nodos. Coordenadas locales.

locales vienen dadas por:

Para los nodos de vértice

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2)$$



Coordenadas Locales			
NODO	$\xi_1$	$\eta$	$\zeta$
1	0	1	1
2	0	0	1
3	1	0	1
4	0	1	-1
5	0	0	-1
6	1	0	-1
7	0	1	0
8	0	0	0
9	1	0	0
10	0	1/2	1
11	1/2	0	1
12	1/2	1/2	1
13	0	1/2	-1
14	1/2	0	-1
15	1/2	1/2	-1

Fig. 2.7. Elemento prismático triangular de 15 nodos. Coordenadas locales.

Para un nodo de arista típico

$$\xi_i = 0; \quad \eta_i = \pm 1; \quad \zeta_i = \pm 1$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)$$

Siendo

$$\xi_0 = \xi \xi_i \quad \eta_0 = \eta \eta_i \quad \zeta_0 = \zeta \zeta_i$$

Para la realización de la integración numérica de la matriz de rigidez se ha utilizado la cuadratura de Gauss, con  $3 \times 3 \times 3$  puntos de integración.

#### 2.3.4.2 Elemento de 15 nodos

El segundo elemento utilizado es el serendípito cuadrático de la familia del prisma triangular (figura 2.7).

Para la integración numérica, se ha utilizado la cuadratura de Hammer [9].

### 2.4 GENERACION AUTOMATICA DE MALLA

La primera etapa a realizar en un análisis de una estructura mediante elementos finitos, consiste en la idealización del sistema estructural, mediante el ensamblaje de los distintos elementos. En general, la interpolación tanto de la geometría como de los desplazamientos mediante funciones de forma, debe seleccionarse de forma que reproduzca lo más fielmente posible tanto la geometría como los desplazamientos reales.

En el estudio de una presa bóveda, la discretización debe comprender no sólo la estructura de la presa, sino también una zona determinada de terreno.

## ECUACIONES BASICAS

La definición práctica de la malla de elementos finitos, así como de las coordenadas de cada uno de los nodos plantea un problema de primera magnitud [16]. Requiere en efecto la especificación de las coordenadas cartesianas de cada uno de los nodos, la numeración de los mismos y de los elementos en secuencias lógicas, definición de las propiedades del material que constituye cada elemento, y la indicación de cuales de los puntos nodales tienen movimientos previamente conocidos (en general nulos). De esta forma, la mayor parte del coste práctico del análisis se consume en la generación de la malla.

Este problema viene agravado por otros dos adicionales:

- Dificultad de definición de la malla en el espacio en geometrías como las de las presas bóvedas, en general complejas.
- Necesidad de reducir cualquier error en la definición de la malla. Error que con casi absoluta certeza se producirá si esta labor se realiza de forma manual.

Todo ello aconseja por tanto tomar dos acciones: En primer lugar proceder a una generación de la malla de forma automática. Es decir dicha generación debe ser capaz de formar la malla completa así como sus conexiones nodales a partir exclusivamente de los datos de la presa. En segundo lugar, es necesario comprobar que la malla así definida responde efectivamente a las características geométricas de la presa y del terreno. Para ello, la solución más correcta consiste en dibujar el mallado del conjunto en pantalla gráfica y/o en plotter. Solamente de esta forma es posible estar seguro que la estructura calculada corresponde con toda seguridad a la estructura real.

Ambas acciones se han realizado en el presente estudio, realizando un generador de malla basado en la referencia [7] e incluyendo algunas mejoras. Asimismo se ha llevado a cabo un procesador gráfico que permite visualizar en pantalla gráfica y en plotter tanto la geometría sin deformar, como la deformada, modos de vibración etc.

### 2.4.1 Generación del cuerpo de la presa bóveda

La generación de la malla se genera según planos horizontales y verticales, de modo equivalente al planteamiento en arcos en el método del *Trial Load*. Estos arcos y ménsulas se obtienen en la superficie aguas arriba (superficie de referencia). El resto de coordenadas de la presa se calculan mediante una proyección radial respecto los ejes verticales que contienen los centros aguas arriba, en el plano de coronación.

La figura 2.8 muestra una sección en planta de una presa bóveda de tres centros correspondiente a un caso general. La presa está referida a un sistema de coordenadas ortogonales cartesianas dextrógiros, O-X-Y-Z tal que el origen de coordenadas está en el plano de coronación. El eje OZ tiene sentido positivo hacia la base de la presa, el eje OX con sentido positivo aguas abajo.

Los puntos  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , representan los centros de la porción derecha, izquierda y central respectivamente, de la superficie aguas arriba, para cada plano de elevación. Igualmente los puntos  $C_4$ ,  $C_5$  y  $C_6$  representan los mismos centros para la superficie aguas abajo. Los puntos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$  representan los puntos de unión de los arcos de diferente radio a lo largo de las superficies aguas arriba y aguas abajo (puntos de curvatura compuesta). Estos puntos se identifican mediante los ángulos  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$ ,  $\phi_4$  (ángulos compuestos). La unión entre los arcos aguas arriba y aguas abajo con la zona de estribos queda definida con los ángulos  $\gamma$  (ángulos de estribación). Estos ángulos tienen su vértice en el centro de los arcos aguas arriba y se miden respecto una recta paralela al eje de coordenadas Y.

La geometría de la presa bóveda se define utilizando unos parámetros de diseño (tabla 2.1). Los parámetros de diseño se pueden introducir de dos formas distintas:

- Valores de los parámetros en unas alturas determinadas, independientes para cada parámetro de diseño. Mediante

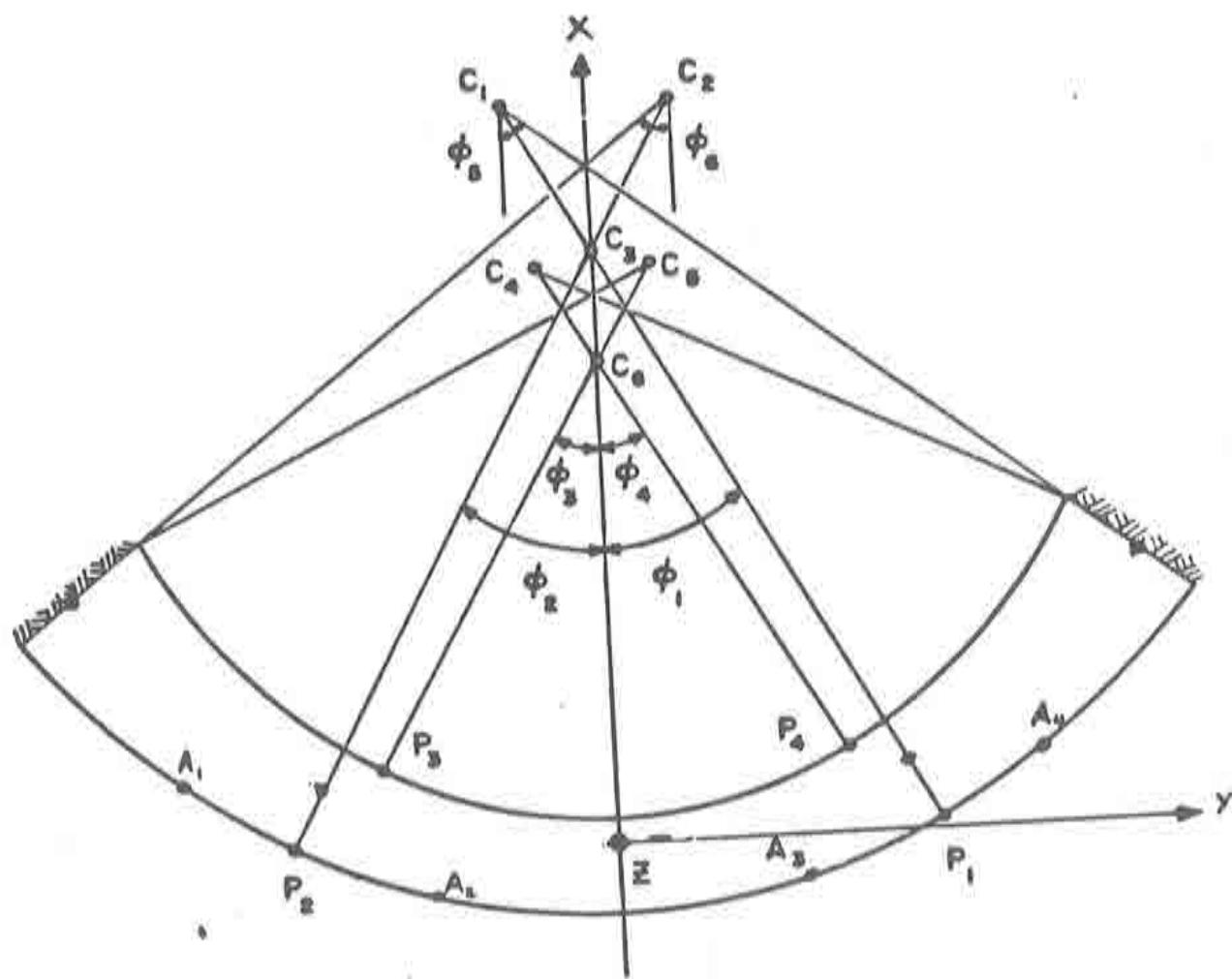


Fig. 2.8. Sección general horizontal de una presa bóveda de tres centros. Parámetros de diseño correspondientes a la definición geométrica de un plano horizontal de malla.

## ECUACIONES BASICAS

interpolación cúbica, se obtiene el valor del parámetro de diseño en cualquier altura de la presa.

- b) Los parámetros se definen mediante una función dependiente de la coordenada Z.

Los planos horizontales de la malla de elementos finitos no han de coincidir con las alturas de diseño. Todos los parámetros definidos en un plano horizontal de la malla, se calculan mediante uno de los dos procedimientos descritos anteriormente; dependiendo de como se hayan introducido los parámetros de diseño.

Una vez introducidos los planos horizontales, los verticales quedan determinados por la intersección entre los planos horizontales con la zona de estribación, y los centros  $C_1$ ,  $C_2$  ó  $C_3$  (figura 2.8) en el plano de coronación.

Tabla 2.1

- Radio central aguas arriba
- Radio central aguas abajo
- Radio lateral derecho aguas arriba
- Radio lateral derecho aguas abajo
- Radio lateral izquierdo aguas arriba
- Radio lateral izquierdo aguas abajo
- Angulo central lado derecho aguas arriba
- Angulo central lado izquierdo aguas arriba
- Angulo central lado derecho aguas abajo
- Angulo central lado izquierdo aguas arriba

- Angulo lateral derecho
- Angulo lateral izquierdo
- Coordenadas centro arco central aguas abajo
- Coordenadas centro arco central aguas arriba

La intersección de la serie de planos horizontales y verticales, genera la malla de elementos finitos, en la superficie aguas arriba.

Una vez la malla de elementos finitos está definida aguas arriba, se proyecta aguas abajo. Para ello se utilizan los centros  $C_1$ ,  $C_2$  ó  $C_3$  (figura 2.8), dependiendo de la zona en que se encuentre el punto, en la superficie aguas arriba. Los puntos localizados en la zona central de la superficie de referencia tales como  $A_2$  ó  $A_3$ , se proyectan desde el centro  $C_3$ . Los puntos de la zona lateral derecha (izquierda), tales como  $A_4$  ( $A_1$ ), se proyectan desde el punto  $C_1$  ( $C_2$ ) (figura 2.8).

La malla generada, proporciona elementos de 15 nodos a lo largo de todo el contorno, y elementos de 20 nodos en el resto de la presa. En caso de que el plano de malla más bajo genere elementos excesivamente gruesos, caso en que la presa se asiente sobre un plano horizontal, se generan automáticamente planos verticales consiguiendo una malla más homogénea.

El espesor de la presa puede discretizarse según diversas capas, generándose entre la superficie aguas arriba y aguas abajo unas superficies del mismo espesor, creándose una malla más tupida.

#### 2.4.2. Generación de malla en la roca de cimentación

La generación de malla en la roca correspondiente a la zona de estribación y a la base de la presa, es mucho más arbitraria que en la presa, porque ni el volumen de roca a discretizar, ni el número de elementos, quedan fijados por la geometría de la zona de estribación.

ECUACIONES BASICAS

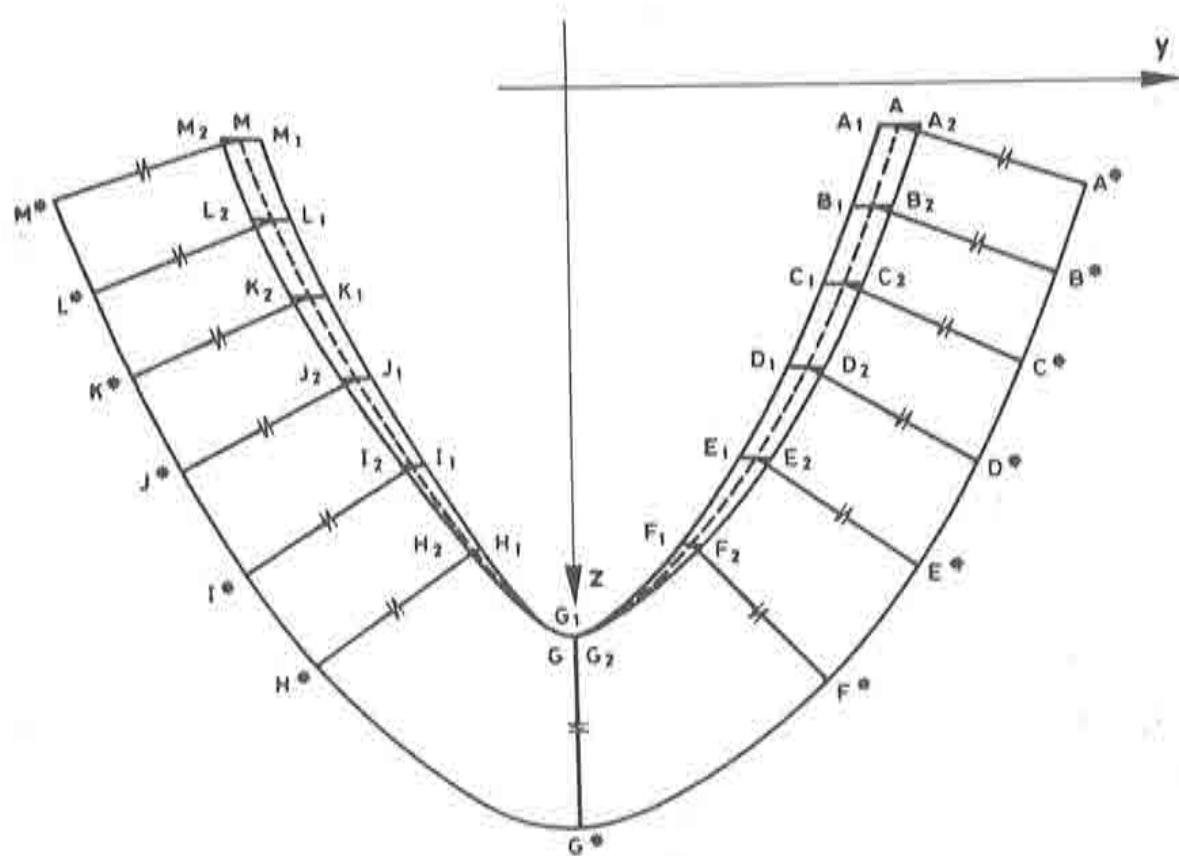


Fig. 2.9. Planos inclinados. Proyección plano Y-Z. Generación de malla en sona de estribación.

## ECUACIONES BASICAS

En general, la geometría de la roca de cimentación será completamente distinta en las diversas presas que el modelo deba analizar. Es por ello, que ningún algoritmo para generar malla podrá abordar todos los casos que se pueden dar en la práctica.

El modelo propone una forma prismática para el valle. Se considera que esta generación de malla para la cimentación podrá utilizarse para analizar una gran variedad de presas bóveda teniendo en cuenta la flexibilidad de la roca de cimentación.

El método para definir la generación de malla en cimentación, se explica en referencia a la figura 2.9. Esta muestra la proyección de la zona de estribación, respecto del plano  $Y - Z$ . Los puntos  $A_1$  y  $A_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$ , etc... son nodos pertenecientes a las superficies de la presa aguas arriba y aguas abajo, respectivamente, en contacto con la roca de estribación. Los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ..., pertenecen a la superficie media de la presa. Desde cada uno de estos puntos medios, se traza un plano normal a la línea que los une ( $AA'$ ,  $BB'$ , ...). Los planos definidos por las rectas anteriores y paralelos al eje de coordenadas  $y$ , se denominan *planos inclinados*.

Los planos inclinados dividen la roca de cimentación en semi-espacios que sirven de ubicación para los elementos que idealizan la roca de la zona de estribación. Topológicamente, las mallas generadas para los distintos segmentos son idénticas. Todos los nodos de los elementos están situados en los planos inclinados, excepto los nodos en contacto con las caras de la presa, nodos  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ , ... .Las coordenadas de estos nodos se definen por la idealización de la presa. Para ello se ha tomado el nodo central  $O$  (figura 2.10) del segmento en contacto cimentación-presa, como centro de un sistema de referencia local situado en cada plano inclinado, y como base de referencia local, la base ortonormal generada por: el eje  $Y$ , el eje perpendicular al plano inclinado por  $O$  y por último el eje perpendicular a los dos anteriores.

El generador de malla de la cimentación sólo precisa dos datos, el número de bandas existentes en cada plano inclinado, y la longitud total

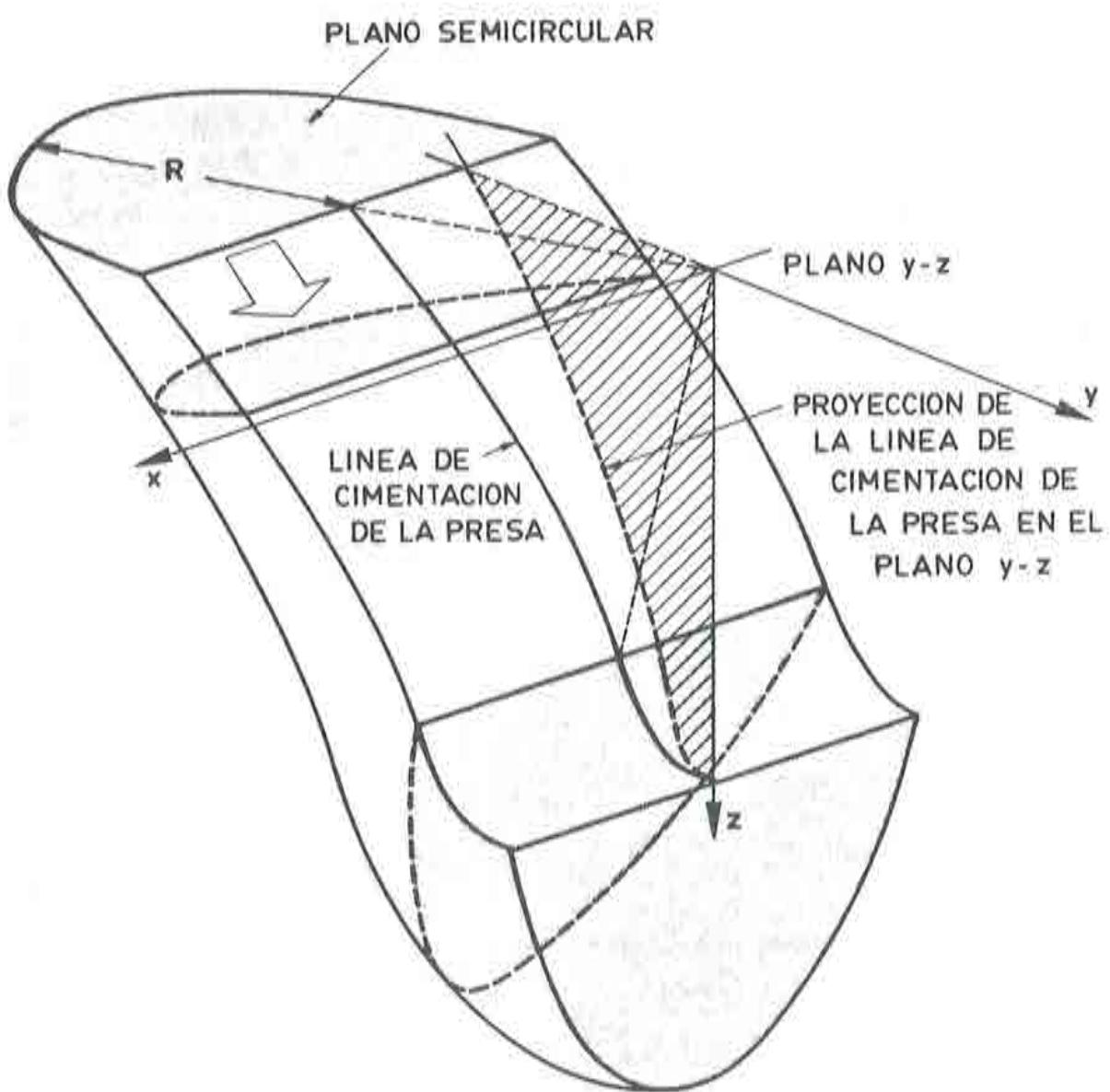


Fig. 2.10. Sistema de referencia local en planos inclinados. Parámetros de definición en la generación de malla para la roca de cimentación.

desde el centro  $O$ ,  $R_f$  (figura 2.10) hasta la banda más alejada. El generador automáticamente establece la anchura de cada banda para los planos inclinados de acuerdo a los dos datos anteriores: la longitud total y el número de bandas; siendo las bandas menos anchas las más cercanas a la presa (mayor gradiente de tensiones) y aumenta progresivamente a medida que se aleja de la presa bóveda.

Los elementos en contacto cimentación-presa (figura 2.2), se generan de forma distinta al resto. Se generan  $n+2$  elementos, siendo  $n$  el número de capas en que se discretiza el espesor de la presa.

Hay que establecer valores adecuados para los dos datos anteriores, puesto que una longitud grande con pocas bandas, falsea el resultado obtenido, estableciendo una flexibilidad artificial debido a la extremada anchura que adquieren los elementos. Igualmente, una longitud reducida, pero con gran cantidad de bandas supone un coste altísimo de cálculo por la gran cantidad de elementos generados. Por tanto para cada problema, habrá que escoger unos valores adecuados para estos dos parámetros estudiando el coste y la aproximación del problema.

## 2.5. RESOLUCION DE LA ECUACION DINAMICA

Como es sabido existen dos grandes grupos de procedimientos para resolver la ecuación dinámica (2.23) en régimen lineal:

- Métodos de integración directa.
- Métodos basados en la descomposición modal.

En ambos casos es posible el estudio en el tiempo o en el campo de la frecuencia.

Para sistemas lineales, el primer método resulta más costoso que el segundo por lo que siempre que ello sea posible se recurre a la descomposición modal. Tal posibilidad viene en general marcada por el hecho de que la matriz de amortiguamiento sea o no proporcional.

En el presente estudio, se considera que para el cuerpo de la presa el amortiguamiento es del tipo proporcional, por lo que se ha resuelto el sistema dinámico de ecuaciones mediante la descomposición modal.

Se han utilizado tres técnicas diferentes para la obtención de la respuesta:

- Integración paso a paso de las ecuaciones desacopladas.
- Integración utilizando el espectro de respuesta.
- Integración en el campo complejo de la frecuencia de las ecuaciones desacopladas.

Las técnicas anteriores tienen en común la necesidad de obtener las frecuencias y modos propios de vibración, y realizar el desacoplamiento modal, lo cual consume la mayor parte del tiempo de CPU necesario para la resolución del problema.

Puesto que la resolución del problema de interacción dinámica fluido-estructura se realiza en la parte III en el campo complejo de la frecuencia, vamos a ceñirnos en esta primera parte a la resolución mediante espectros y en la obtención de la historia de la respuesta.

Para la obtención de los modos y frecuencias propias de vibración se han utilizado de forma indistinta los métodos de iteración en el subespacio y de búsqueda del determinante [18]. Ambos procedimientos permiten un substancial ahorro de espacio de memoria y de tiempo de CPU al obtener y proporcionar solamente los primeros  $q$  modos de vibración pedidos.

Procediendo de esta forma, la ecuación dinámica (2.23)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = -\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{a}_g \quad (2.28)$$

se premultiplica por la transpuesta de cada uno de los modos obtenidos

$$\phi_i^T M \ddot{\mathbf{a}} + \phi_i^T C \dot{\mathbf{a}} + \phi_i^T K \mathbf{a} = -\phi_i^T M J \mathbf{a}_g \quad (2.29)$$

y escribiendo los vectores desplazamientos, velocidades y aceleraciones incógnita  $\ddot{\mathbf{a}}$ ,  $\dot{\mathbf{a}}$  y  $\mathbf{a}$  respectivamente como combinación lineal de los primeros  $q$  modos de vibración  $\phi_j$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{a}} &= \sum_{j=1}^q \phi_j \ddot{y}_j \\ \dot{\mathbf{a}} &= \sum_{j=1}^q \phi_j \dot{y}_j \\ \mathbf{a} &= \sum_{j=1}^q \phi_j y_j \end{aligned} \quad (2.30)$$

Sustituyendo (2.30) en (2.29)

$$\phi_i^T M \sum_{j=1}^q \phi_j \ddot{y}_j + \phi_i^T C \sum_{j=1}^q \phi_j \dot{y}_j + \phi_i^T K \sum_{j=1}^q \phi_j y_j = -\phi_i^T M J \mathbf{a}_g \quad (2.31)$$

y haciendo uso de las propiedades ortogonales de los modos propios de vibración respecto a las matrices de masa y de rigidez (y también respecto a la de amortiguamiento si ésta se considera proporcional), el sistema de ecuaciones (2.31) se desacopla, quedando  $q$  ecuaciones de la forma:

$$\ddot{y}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = -\phi_i^T M J \mathbf{a}_g \quad (2.32)$$

siendo  $\xi_i$  el tanto por uno del amortiguamiento respecto al crítico y correspondiente al modo  $i$ , y  $w_i$  es la frecuencia propia asociada a dicho modo.

En la ecuación (2.32) se ha supuesto que los modos propios han sido normalizados respecto a la matriz de masa, es decir

$$\phi_i^T M \phi_i = 1 \quad (2.33)$$

### 2.5.1 Obtención de la respuesta en el tiempo

Para obtener la historia de la respuesta en el tiempo, se integra paso a paso cada una de las ecuaciones (2.32) utilizando el método de Newmark, en donde se suponen las siguientes expresiones para desplazamientos y velocidades

$$\begin{aligned} \dot{y}_{t+\Delta t} &= \dot{y}_t + [(1-\delta)\ddot{y}_t + \delta\ddot{y}_{t+\Delta t}]\Delta t \\ y_{t+\Delta t} &= y_t + \dot{y}_t \Delta t + [(\frac{1}{2} - \alpha)\ddot{y}_t + \alpha\ddot{y}_{t+\Delta t}]\Delta t^2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

en donde los  $\delta$  y  $\alpha$  son dos parámetros a fijar. En el presente estudio se ha tomado  $\delta = 1/2$ ,  $\alpha = 1/4$ .

Las ecuaciones (2.34) juntamente con la (2.32) permiten obtener la respuesta en el tiempo  $t + \Delta t$  conocida la solución para los tiempos anteriores. El tiempo  $\Delta t$  de integración puede ser constante o variable a lo largo del tiempo.

Combinando la respuesta para cada uno de los modos utilizando las expresiones (2.30) se obtiene la respuesta en desplazamientos, velocidades y aceleraciones.

### 2.5.2. Obtención de la respuesta mediante espectros

La obtención de la respuesta mediante espectros, utiliza un método de superposición modal en el cual se evita el esfuerzo de cálculo necesario para la obtención de la historia en el tiempo de desplazamientos, velocidades, aceleraciones y tensiones. Se obtiene de esta forma una estimación de la respuesta máxima [19].

El valor máximo del desplazamiento espectral correspondiente a la ecuación (2.32) valdrá

$$y_{i,\max} = \frac{-\phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{J}}{\omega_i^2} S_a(\omega_i, \xi_i) \quad (2.35)$$

en donde  $S_a(\omega_i, \xi_i)$  es el valor de las aceleraciones espectrales proporcionadas por el espectro. En el presente estudio se ha utilizado el espectro especificado por la Norma Sismoresistente Española (figura 2.11).

Los valores máximos de los desplazamientos de la estructura correspondientes al modo  $i$  vienen dadas por

$$a_{i,\max} = \phi_i y_{i,\max} \quad (2.36)$$

Para obtener los valores máximos absolutos de los desplazamientos, se ha utilizado la técnica de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados [20].

Análogamente para las tensiones, se obtienen las tensiones máximas correspondientes a cada modo, a partir de los desplazamientos (2.36), como si de un análisis estático se tratara. Posteriormente se combinan

## ECUACIONES BASICAS

dichas tensiones de la misma forma que en el caso de los desplazamientos.

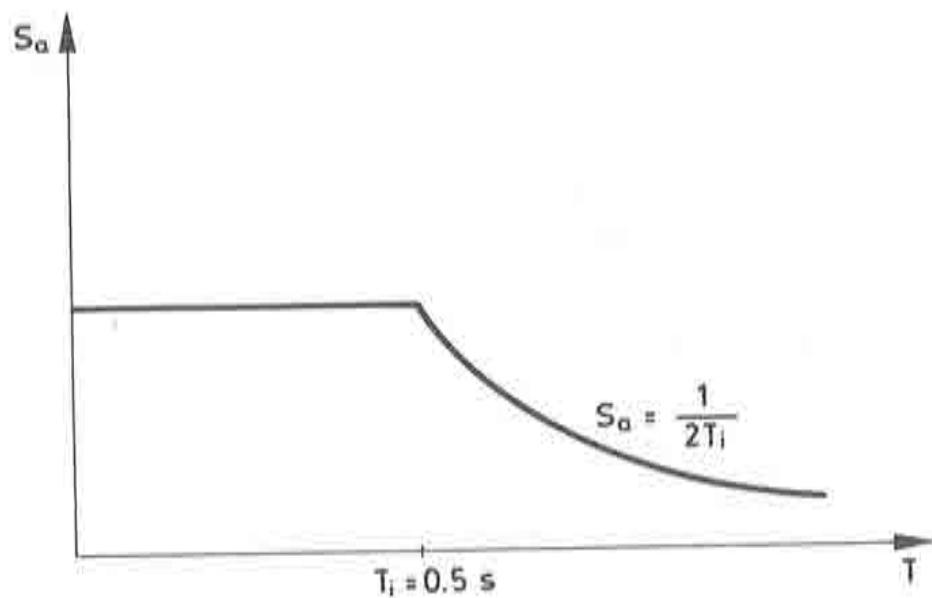


Fig. 2.11. Definición de la respuesta sísmica

## CAPITULO 3

### PRESA DE MORROW POINT

#### 3.1. INTRODUCCION

La primera de las dos presas estudiadas, corresponde a la de Morrow Point. El objetivo de elegir esta presa para comprobar el programa y estudiar su efectividad, es debido a la gran cantidad de estudios y resultados que de ella existen [2] [7] [17]. Ello permite contrastar resultados y probar la efectividad del modelo.

La presa bóveda de Morrow Point, está situada en el río Gunnison en el Estado de Colorado (U.S.A). Es una presa bóveda de 144 metros de altura, aproximadamente simétrica y de un solo centro. En la tabla 3.1 puede verse su definición geométrica.

Las propiedades elásticas son [7]

- Módulo de elasticidad:  $2.07 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
- Coeficiente de Poisson: 0.17
- Densidad del hormigón:  $2.4 \text{ T/m}^3$

PRESA DE MORROW POINT

Tabla 3.1

Coordenadas Y de los centros		Radio de los arcos (pies)	
	Intradós	extradós	intradós
1	153.849	200.329	136.621
2	156.212	202.571	141.973
3	158.910	205.025	147.409
4	175.322	218.736	173.104
5	199.146	236.946	201.335
6	235.373	262.748	236.820
7	283.500	294.855	279.872
8	333.697	333.904	325.883
9	375.000	375.000	363.000
			375.000

Angulo central de abertura  
(grados)

	Altura (pies)	Angulo (geados)
1	6700	0
2	6705	14.750
3	6730	29.550
4	6790	44.350
5	6865	48.125
6	6940	49.600
7	7015	50.250
8	7090	51.625
9	7165	54.875

## PRESA DE MORROW POINT

Por lo que se refiere al terreno de cimentación, sus características elásticas son

- Módulo de elasticidad:  $1.76 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
- Coeficiente de Poisson: 0.20
- Densidad de la roca:  $2.0 \text{ T/m}^3$

Se realiza un análisis dinámico, en donde se calculan las primeras frecuencias propias, realizando un análisis modal con matriz de masa consistente. Se estudia la variación de dichas frecuencias en función de la profundidad de la zona de terreno considerada en el análisis. Por último se efectúa un análisis sísmico, utilizando el acelerograma correspondiente al terremoto de Taft.

### 3.2. MALLA DE ELEMENTOS FINITOS

Para el análisis dinámico de la presa de Morrow Point, se han estudiado cuatro discretizaciones distintas, con el fin de observar la importancia que en los resultados, introduce la inclusión de distintas zonas de terreno.

Las cuatro mallas con que se ha modelado la presa y el terreno pueden verse en las figuras 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4.

La primera de las mallas (figura 3.1) hace referencia a la presa rígidamente unida al terreno. Este último se considera infinitamente rígido por lo que no se incluye en el análisis. La presa se divide en 20 elementos, con 163 nodos y un total de 360 grados de libertad activos (es decir, no se incluyen aquellos cuyos desplazamientos respecto a la posición de sólido rígido son nulos).

En la figura 3.2 puede verse la discretización de la presa y de una zona de terreno cuya profundidad es igual a la altura de la presa. El conjunto consta de 84 elementos, 547 nodos y 1284 grados de libertad.

## PRESA DE MORROW POINT

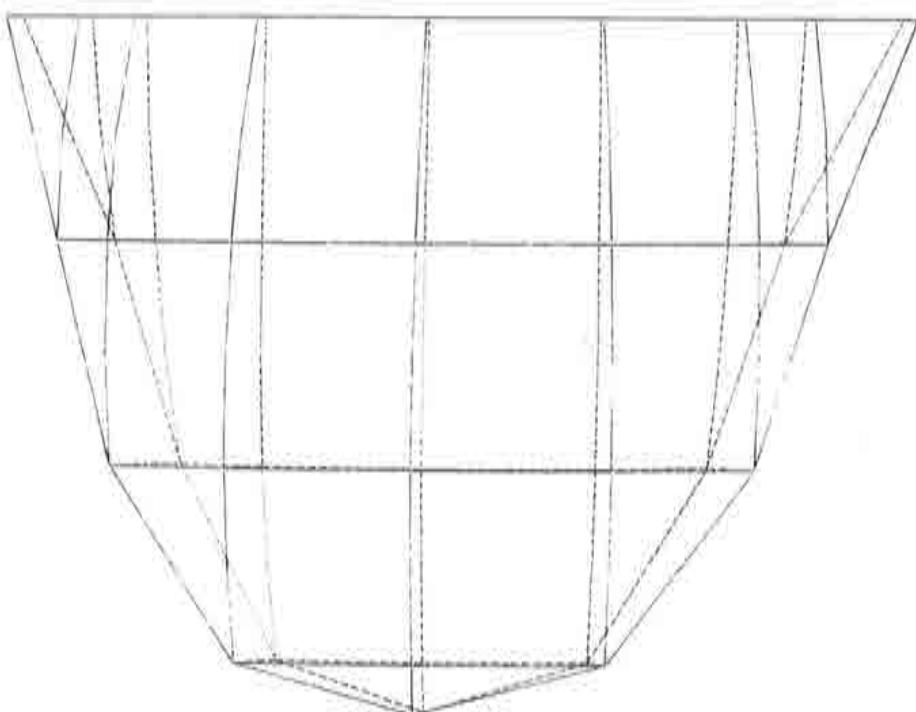


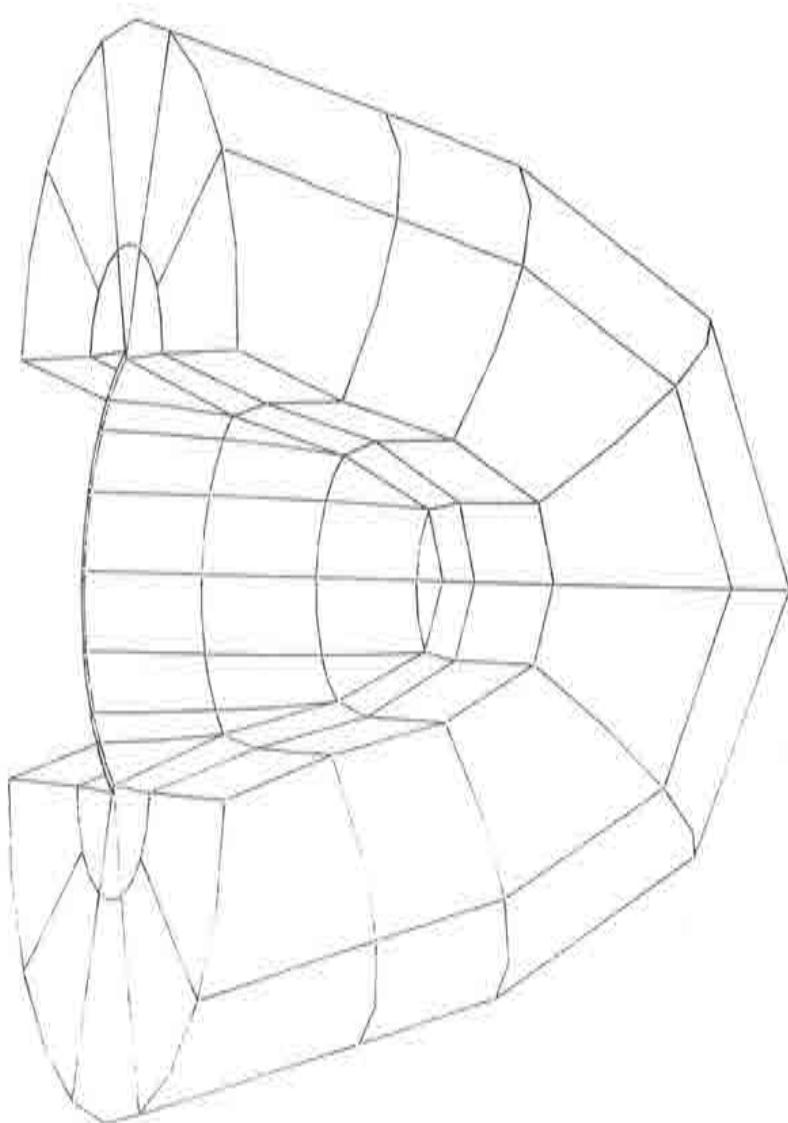
Fig. 3.1. Presa de Morrow Point. Modelización de la presa en elementos finitos.

La presa discretizada juntamente con una profundidad de roca igual a dos veces su altura se observa en la figura 3.3. La discretización total consta de 164 elementos, 949 nodos y 2490 grados de libertad.

Por último, la figura 3.4 permite visualizar la modelización del conjunto, con una profundidad de terreno de tres veces la altura de la presa. El total de elementos es de 244 con 1351 nodos y 3696 grados de libertad.

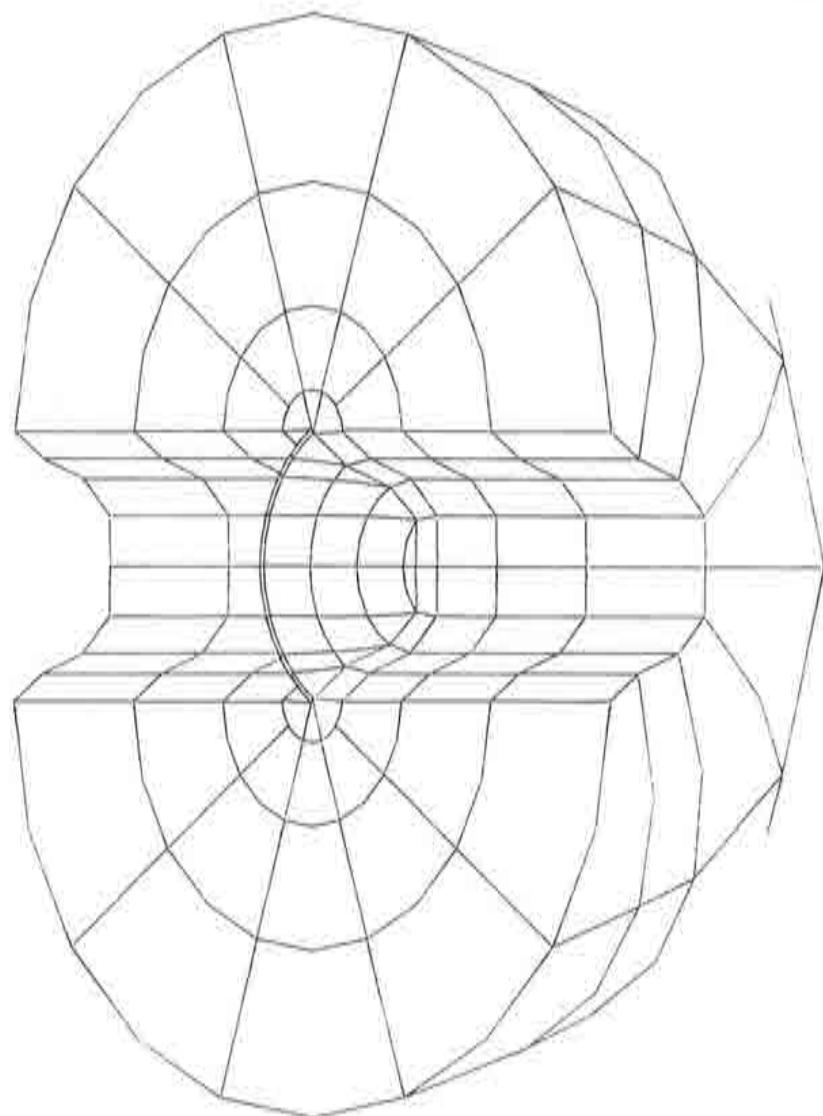
En la tabla 3.2 puede verse un resumen de tales datos

PRESA DE MORROW POINT



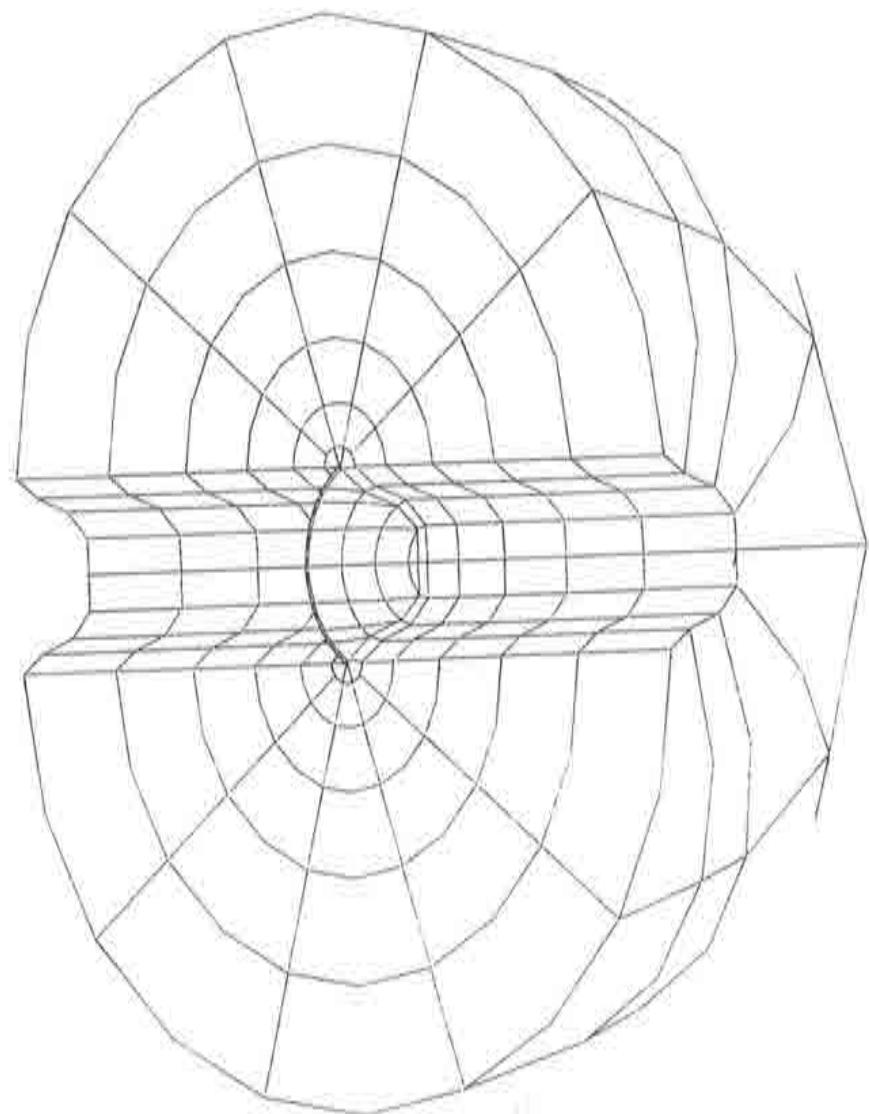
*Fig. 3.2. Discretización de la Presa de Morrow Point con una profundidad de terreno igual a su altura.*

PRESA DE MORROW POINT



*Fig. 3.3. Discretización de la Presa de Morrow Point con una profundidad de terreno igual a dos veces su altura.*

PRESA DE MORROW POINT



*Fig. 3.4. Discretización de la Presa de Morrow Point con una profundidad de terreno igual a tres veces su altura.*

Tabla 3.2

Profundidad de la zona de terreno incluida en el análisis	No. de elementos	No. de nodos	No. total de grados de libertad
Presa aislada	20	163	360
$R = H$	84	547	1284
$R = 2H$	164	949	2490
$R = 3H$	244	1351	3696

### 3.3 ANALISIS DINAMICO

El análisis dinámico realizado en la presa de Morrow Point, comprende una doble vertiente de resultados

- Cálculo de las frecuencias propias de vibración.
- Análisis de la respuesta en el tiempo.

Las frecuencias propias de vibración utilizando las distintas mallas descritas en el apartado 3.2 pueden verse en la tabla 3.3

Tabla 3.3

Profundidad de la zona de terreno incluida en el análisis	Primera frecuencia (rdn/s)	Segunda frecuencia (rdn/s)	Tercera frecuencia (rdn/s)	Cuarta frecuencia (rdn/s)
Presa aislada	23.648	25.002	38.395	40.860
$R = H$	21.448	22.881	36.315	36.610
$R = 2H$	20.876	22.482	35.506	35.849
$R = 3H$	20.712	22.479	35.399	35.614

En las figuras 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8 pueden verse los cuatro primeros modos de vibración de la presa de Morrow Point suponiendo terreno infinitamente rígido. Las frecuencias propias obtenidas difieren del orden del 15% de las dadas por la referencia [7]. Ello es debido a que en dicha referencia se trabaja con elementos de lámina gruesa para discretizar la presa. Dichos elementos proporcionan rigideces más elevadas que los elementos tridimensionales al considerar indeformable la estructura en el

PRESA DE MORROW POINT

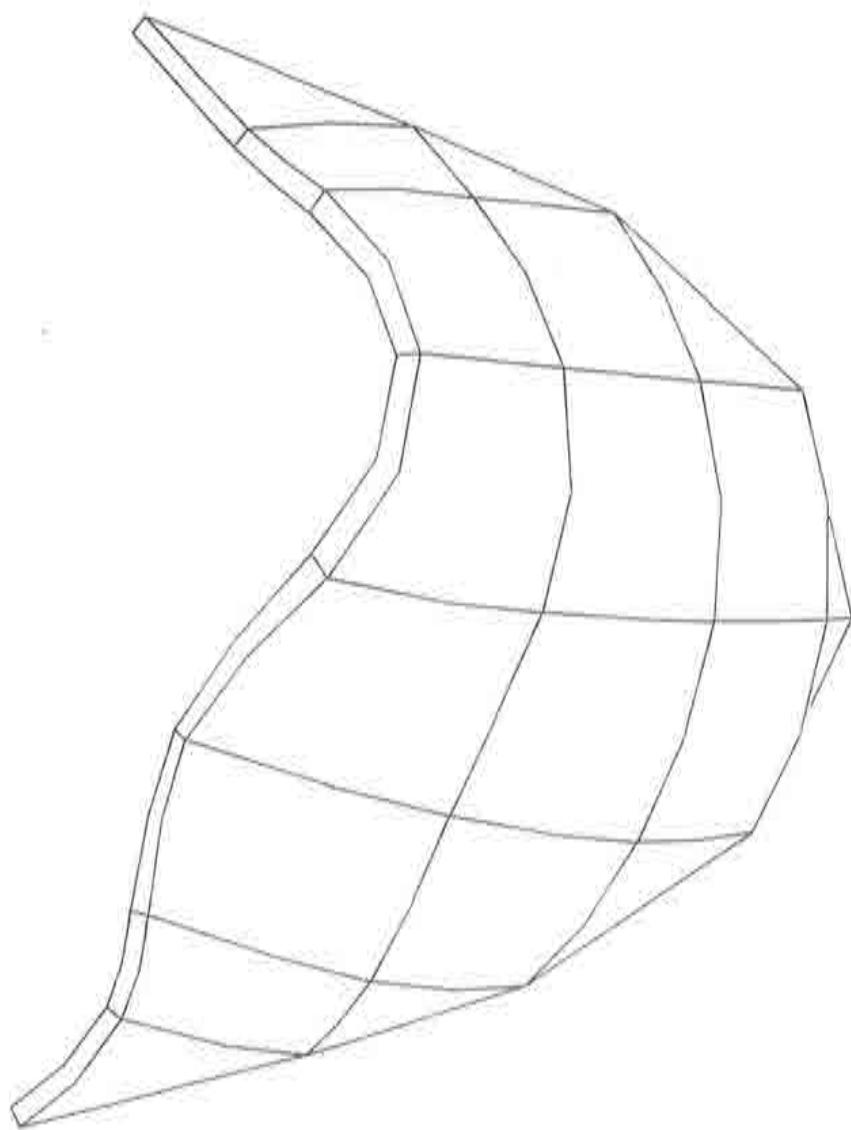


Fig. 3.5. Presa de Morrow Point. Primer modo de vibración. Terreno rígido.

PRESA DE MORROW POINT

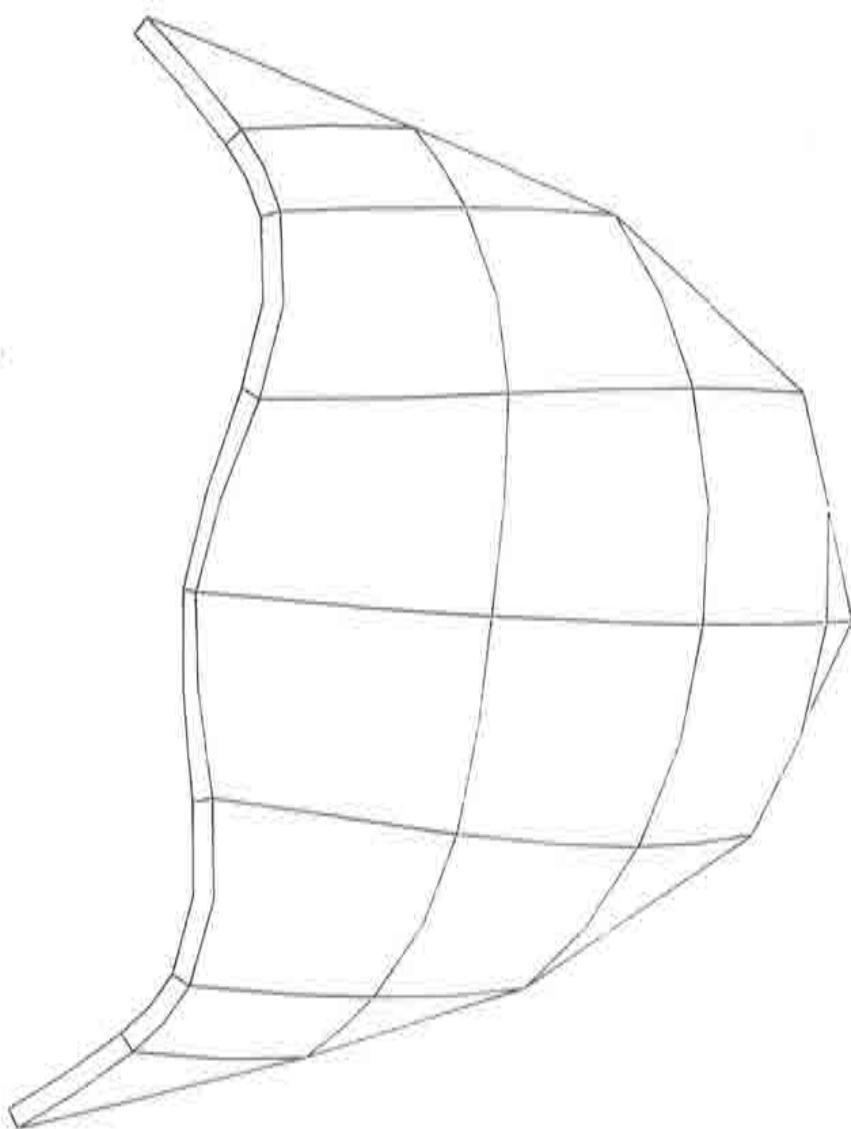
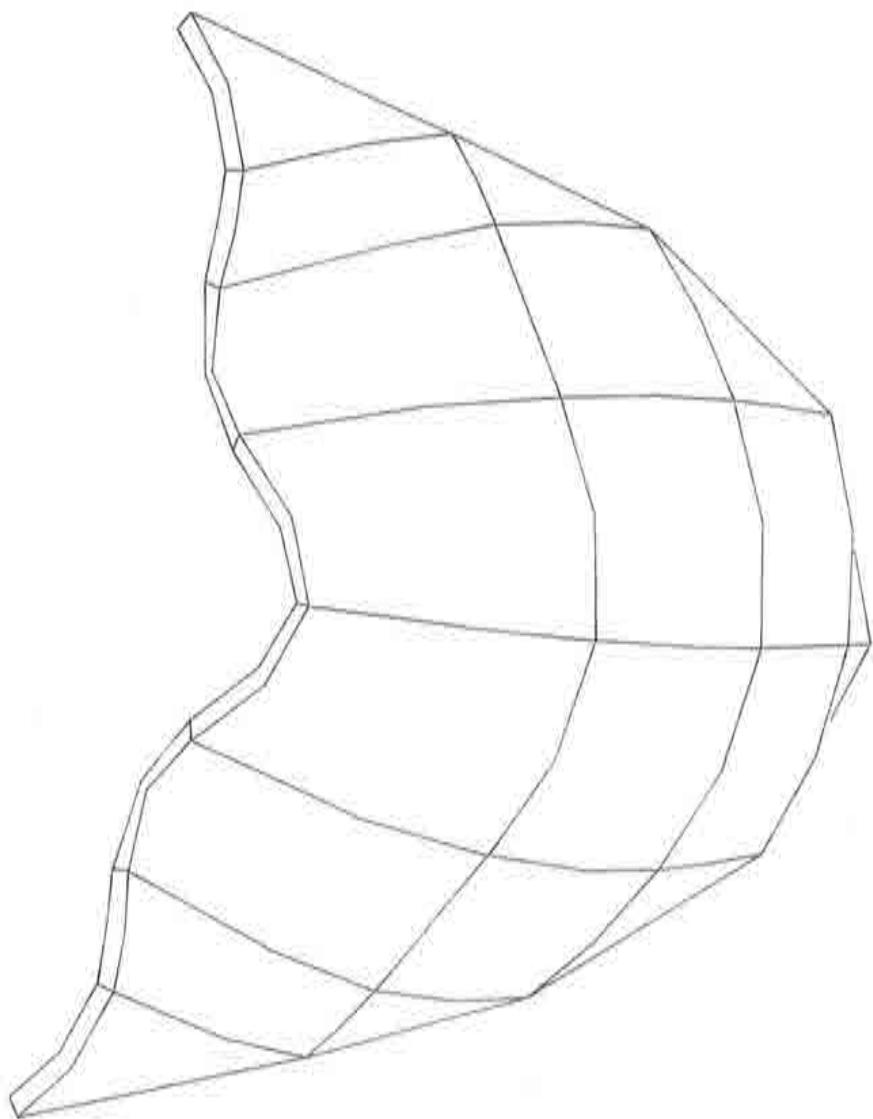


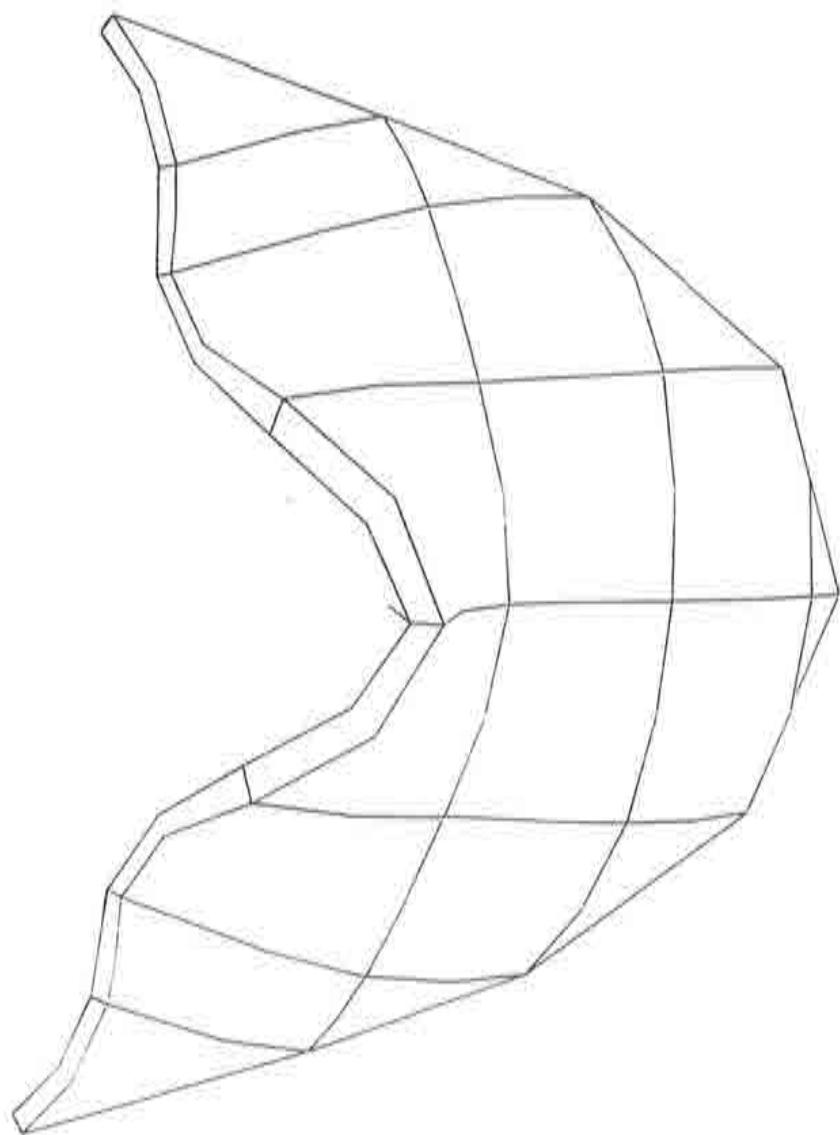
Fig. 3.6. Presa de Morrow Point. Segundo modo de vibración. Terreno rígido.

PRESA DE MORROW POINT



*Fig. 3.7. Presa de Morrow Point. Tercer modo de vibración. Terreno rígido.*

PRESA DE MORROW POINT



*Fig. 3.8. Presa de Morrow Point. Cuarto modo de vibración. Terreno rígido.*

## PRESA DE MORROW POINT

plano perpendicular a la lámina. Por ello, las frecuencias obtenidas en la referencia [7] son más elevadas que las proporcionadas en el presente estudio.

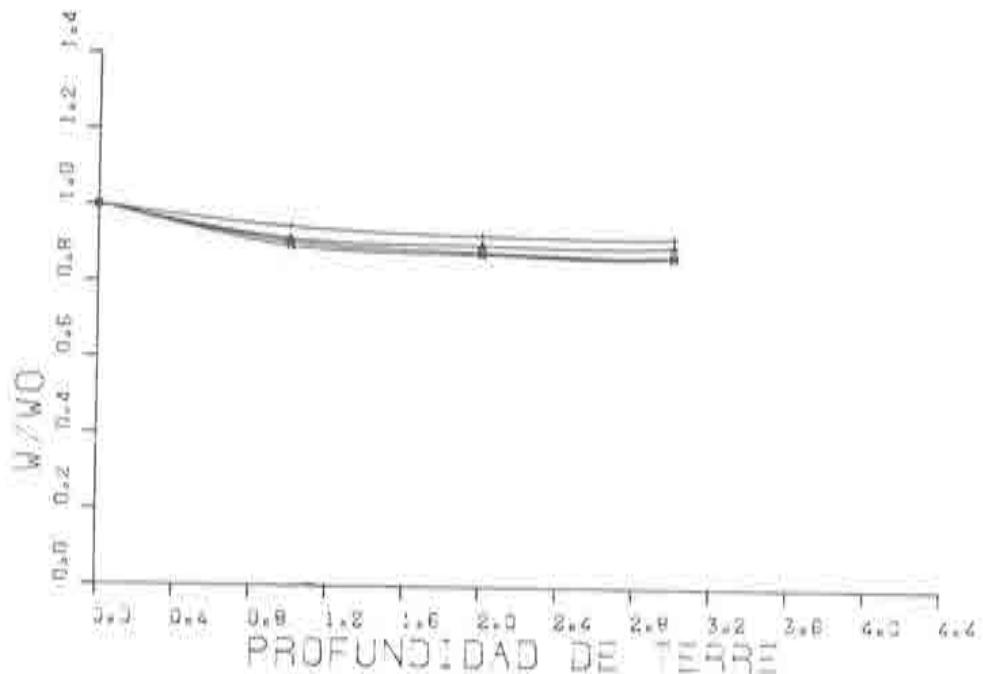
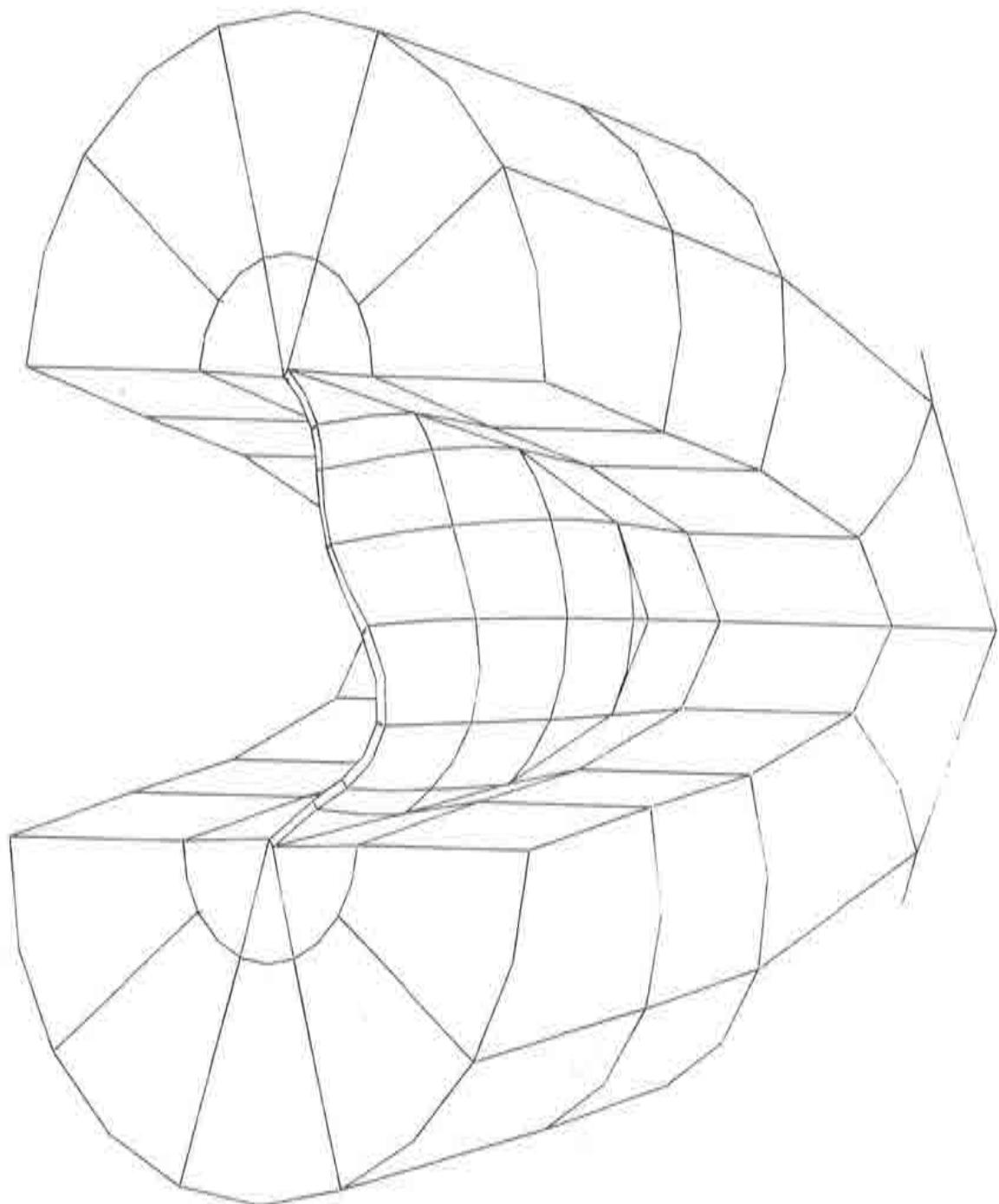


Fig. 3.9. Variación de las frecuencias propias con la profundidad de terreno considerada.

La incorporación en el análisis de la flexibilidad de la roca de cimentación provoca una disminución de las frecuencias propias. El tiempo de ordenador crece de forma sustancial según aumente el tamaño de la malla, por lo que se hace necesario estudiar la variación de los resultados frente a la profundidad de terreno considerada. En la figura 3.9 puede verse la expresión gráfica de los resultados dados por la tabla 3.3. Como puede observarse la diferencia entre los valores de las frecuencias propias obtenidas utilizando una malla  $R = H$  ó  $R = 2H$ , oscila solamente alrededor del 2%, cantidad a todas luces despreciable.

PRESA DE MORROW POINT



*Fig. 3.10. Presa de Morrow Point. Primer modo de vibración considerando el terreno.*

PRESA DE MORROW POINT

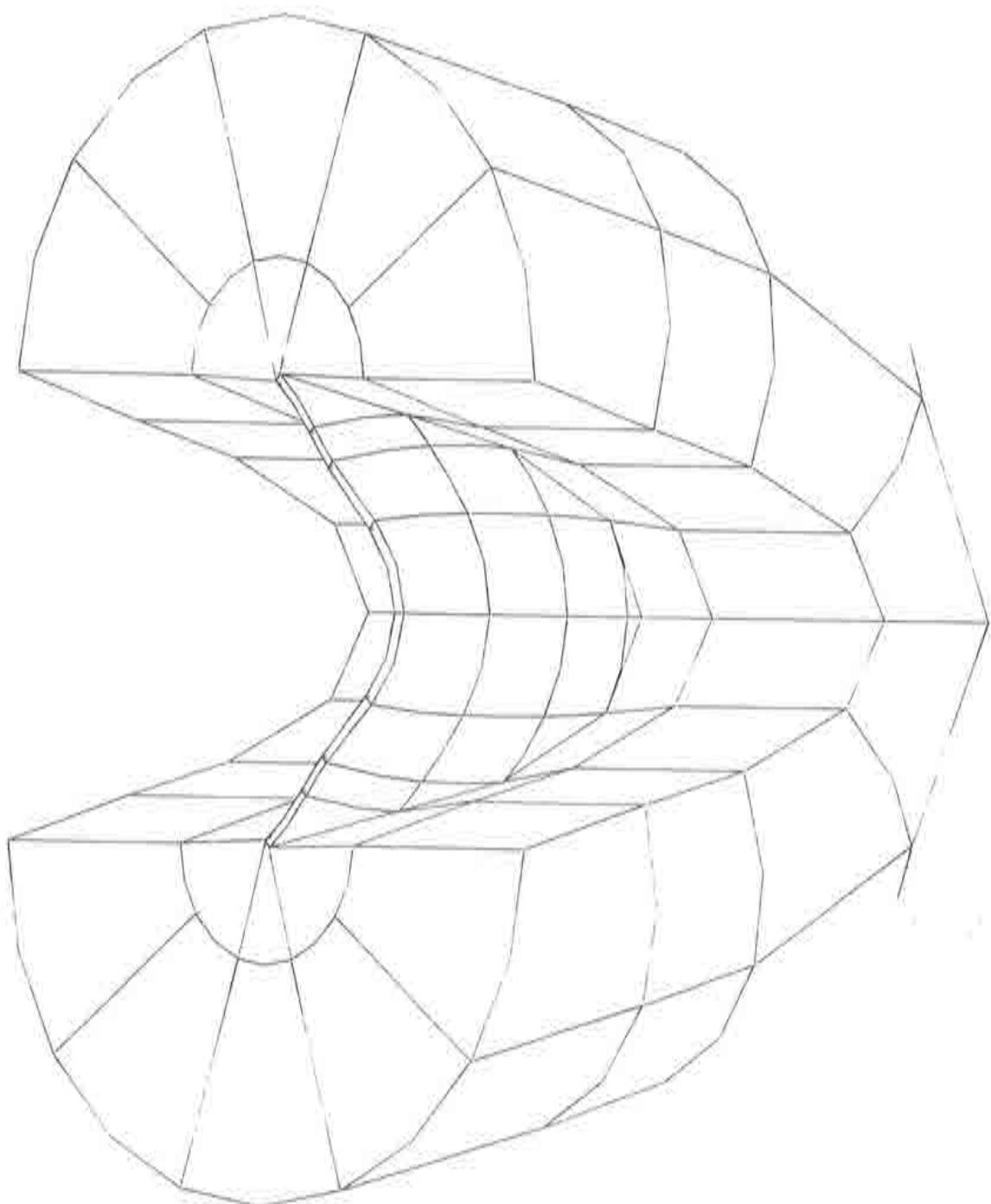
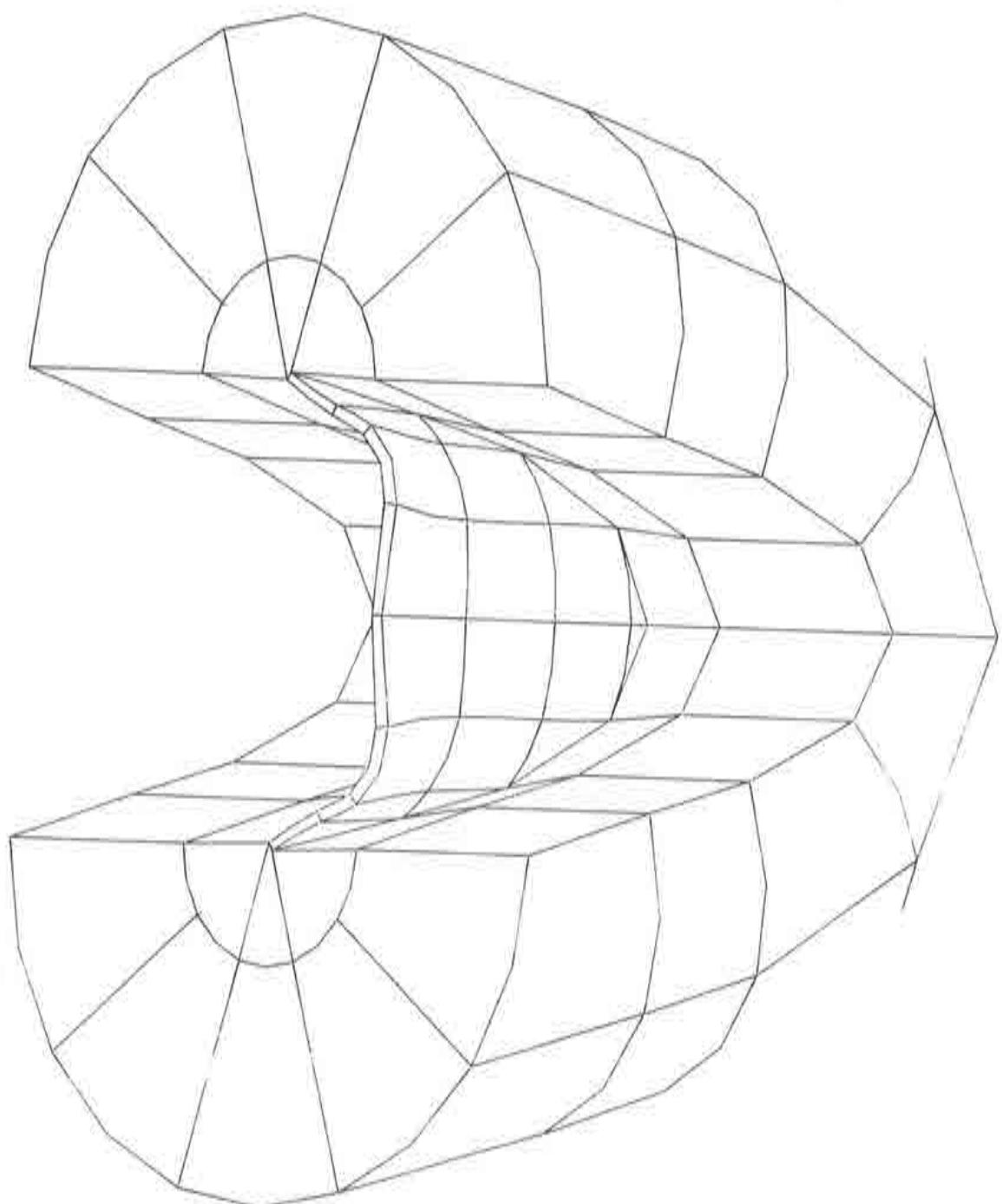


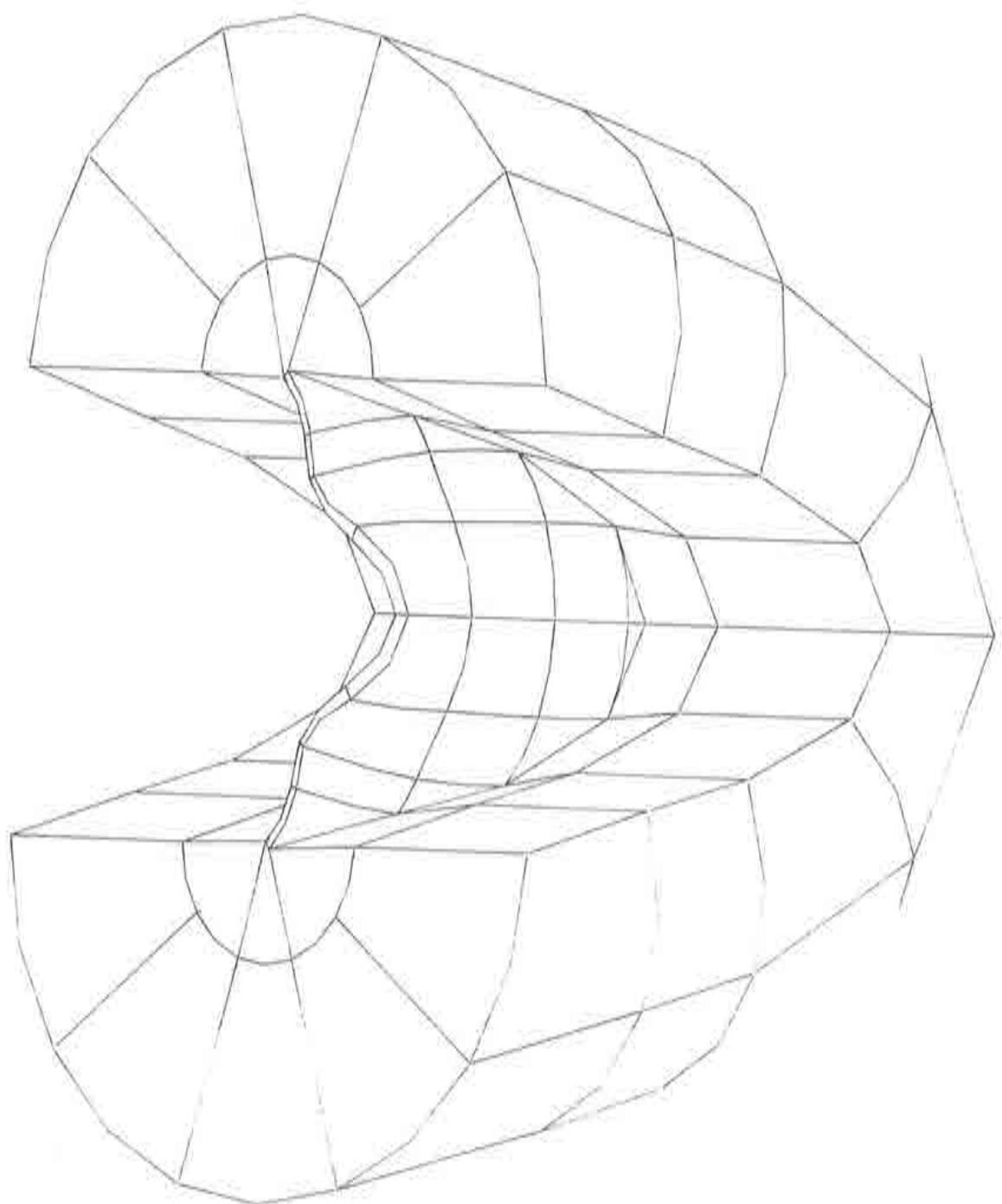
Fig. 3.11. Presa de Morrow Point. Segundo modo de vibración considerando el terreno.

PRESA DE MORROW POINT



*Fig. 3.12. Presa de Morrow Point. Tercer modo de vibración considerando el terreno.*

PRESA DE MORROW POINT



*Fig. 3.13. Presa de Morrow Point. Cuarto modo de vibración considerando el terreno.*

PRESA DE MORROW POINT

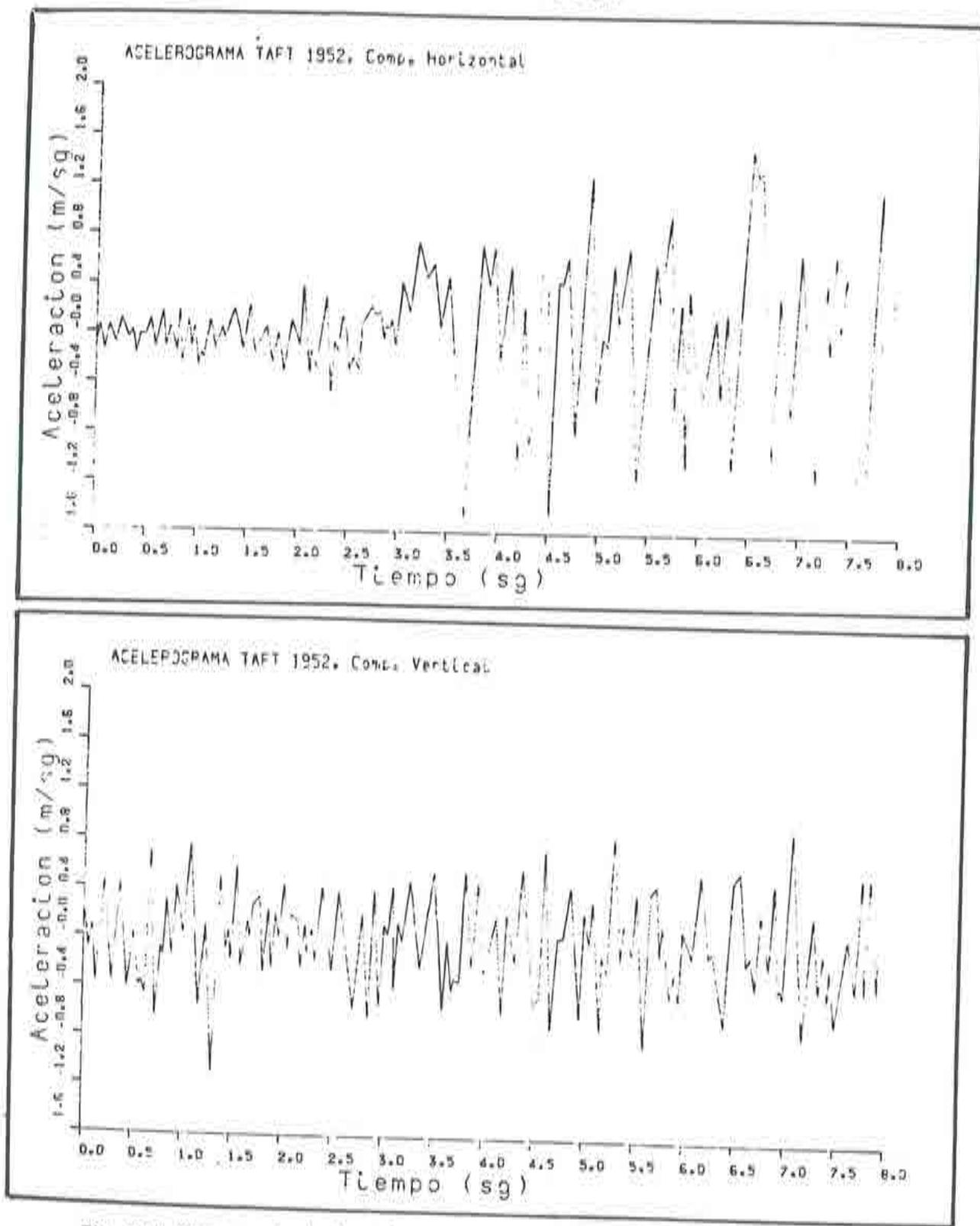
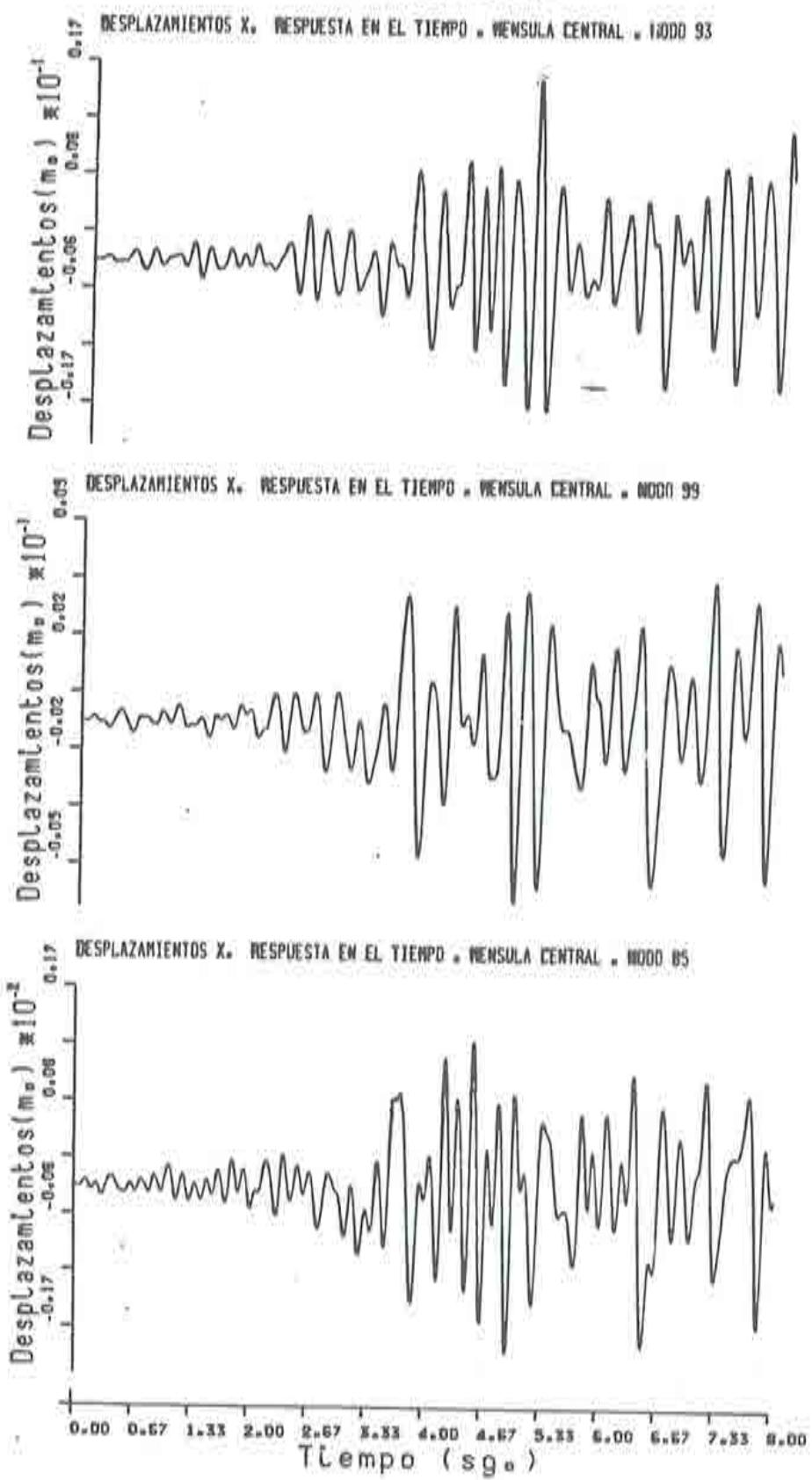


Fig. 3.14. Componentes horizontal y vertical del terremoto de Taft (1952).

PRESA DE MORROW POINT



PRESA DE MORROW POINT

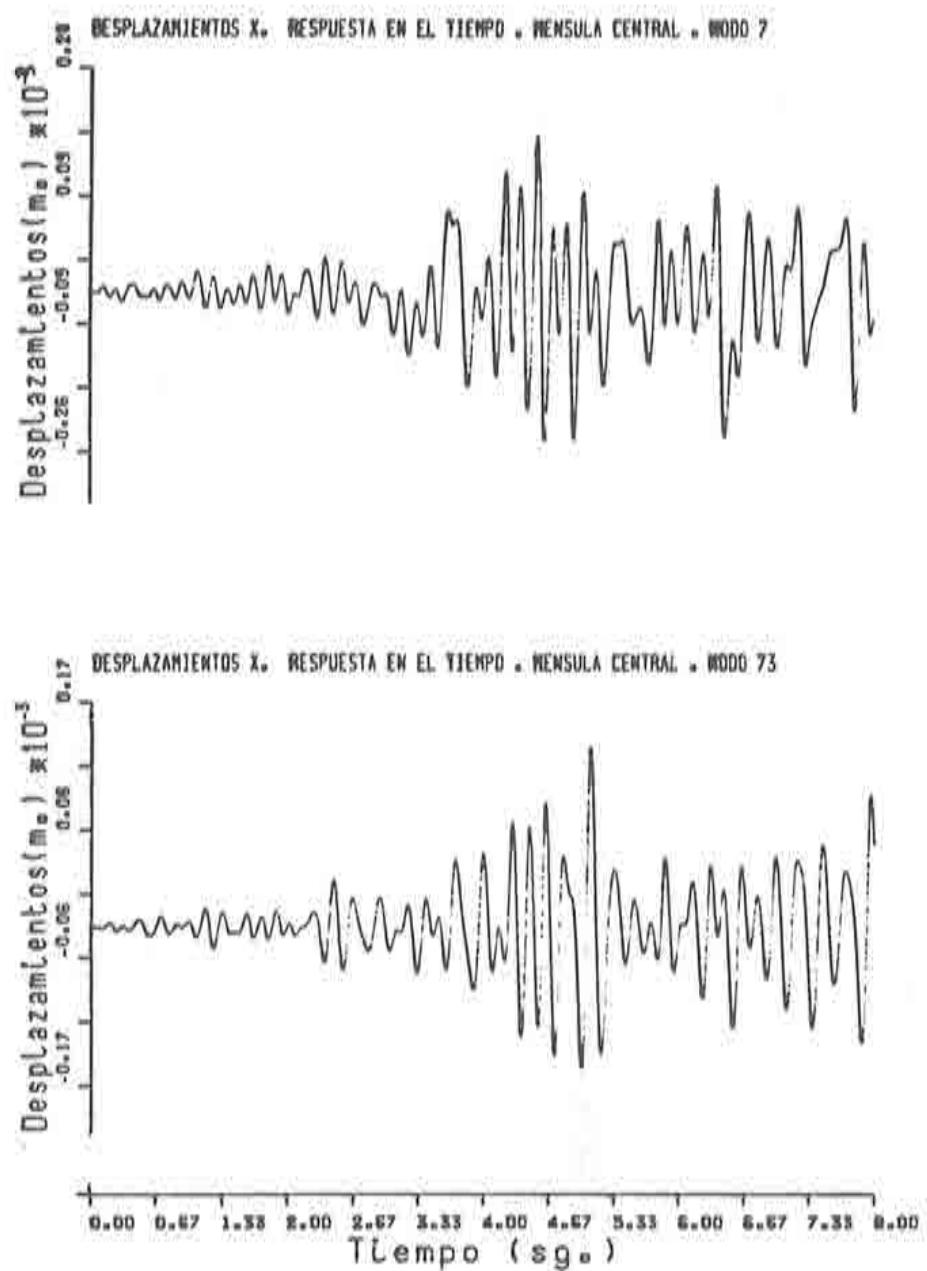
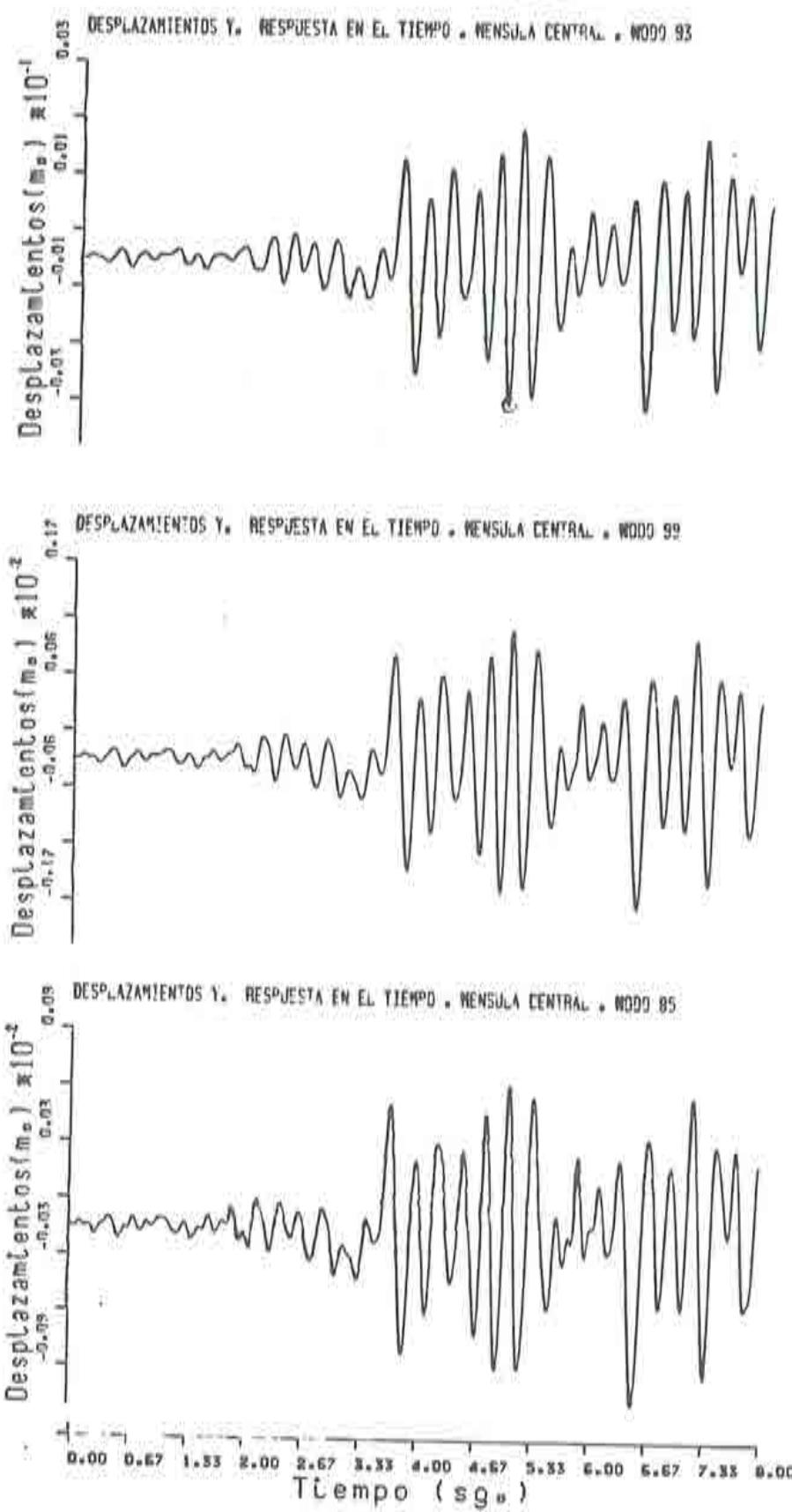


Fig. 3.15. Presa de Morrow Point. Respuesta al terremoto de Taft.  
Componente dirección valle.

PRESA DE MORROW POINT



PRESA DE MORROW POINT

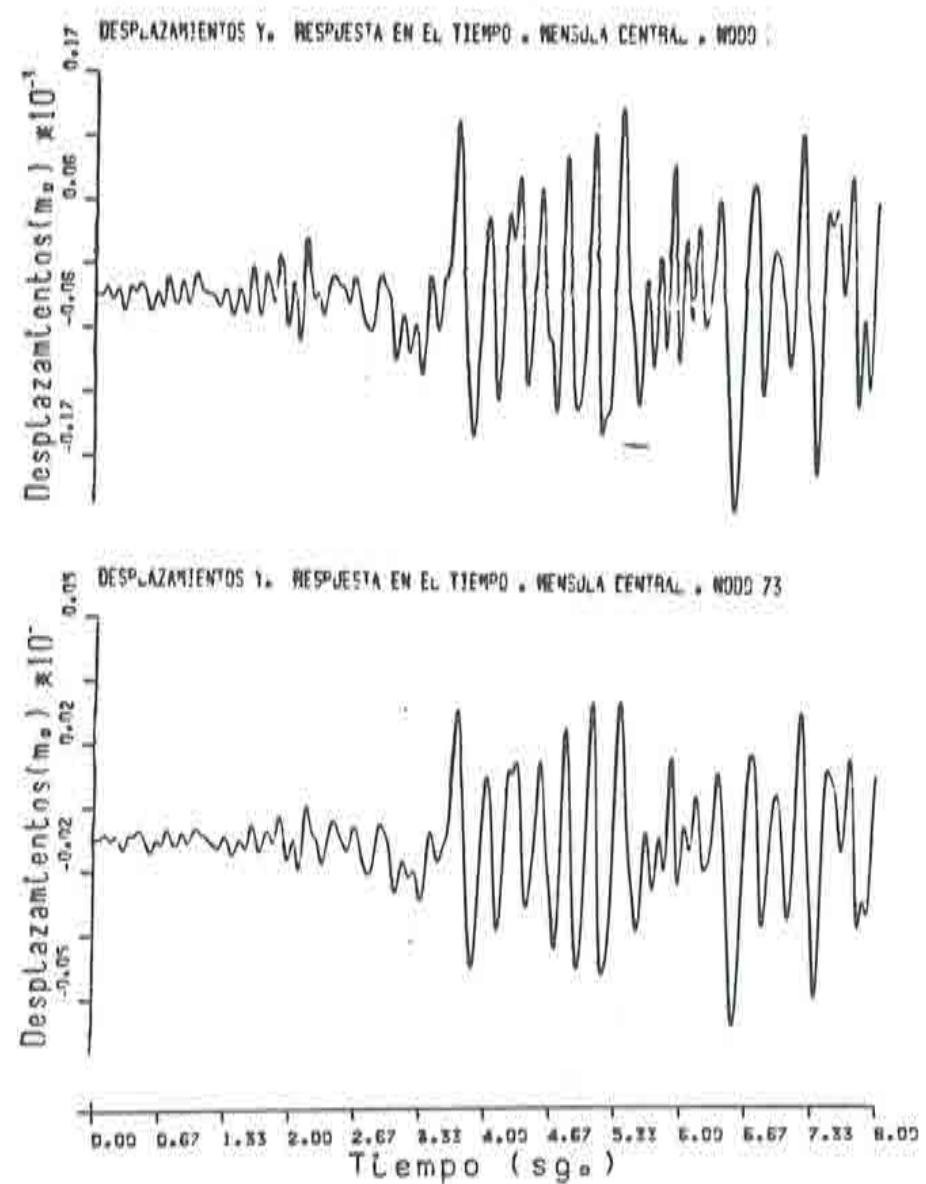
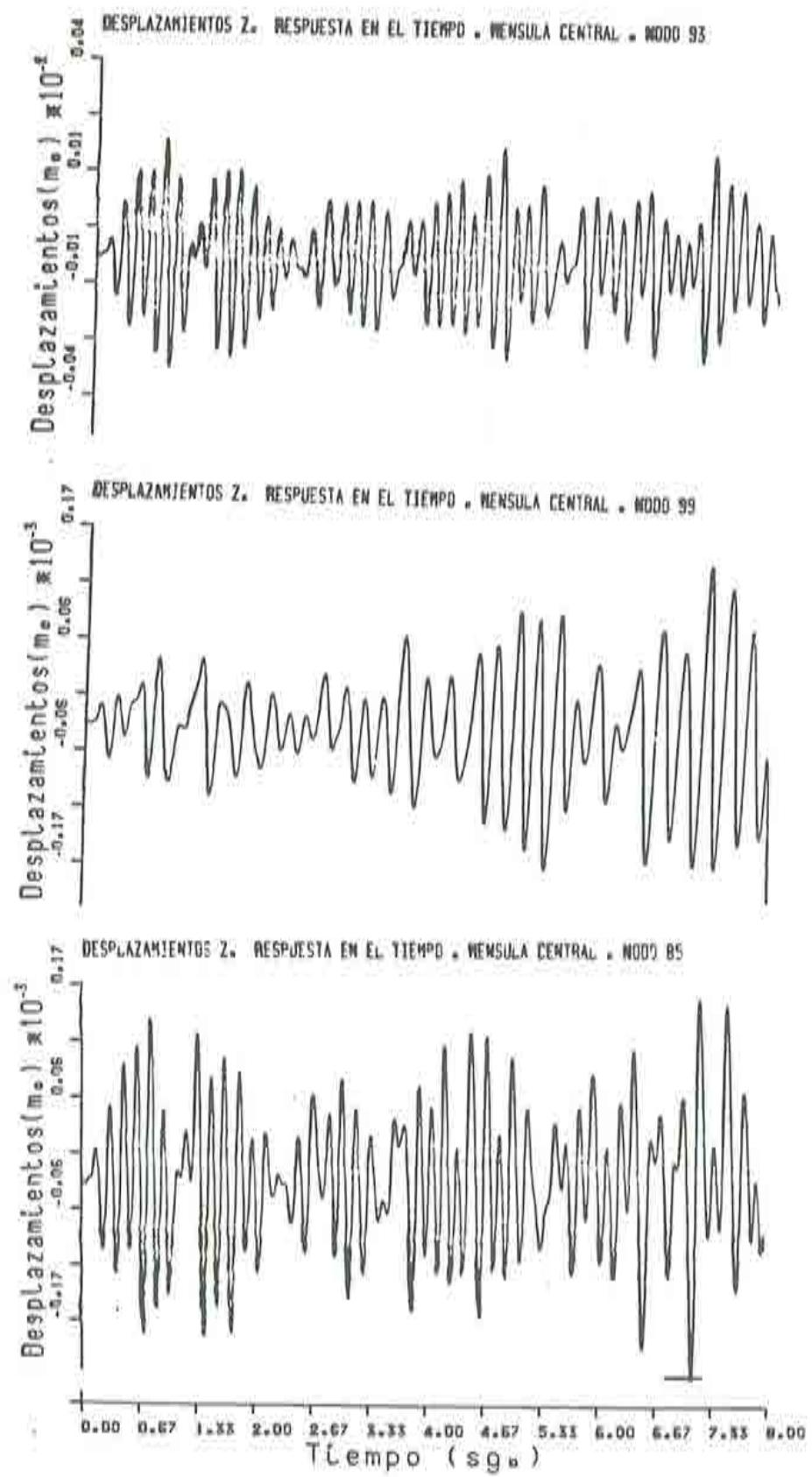


Fig. 3.16. Presa de Morrow Point. Respuesta al terremoto de Taft. Componente Transversal al valle.

PRESA DE MORROW POINT



PRESA DE MORROW POINT

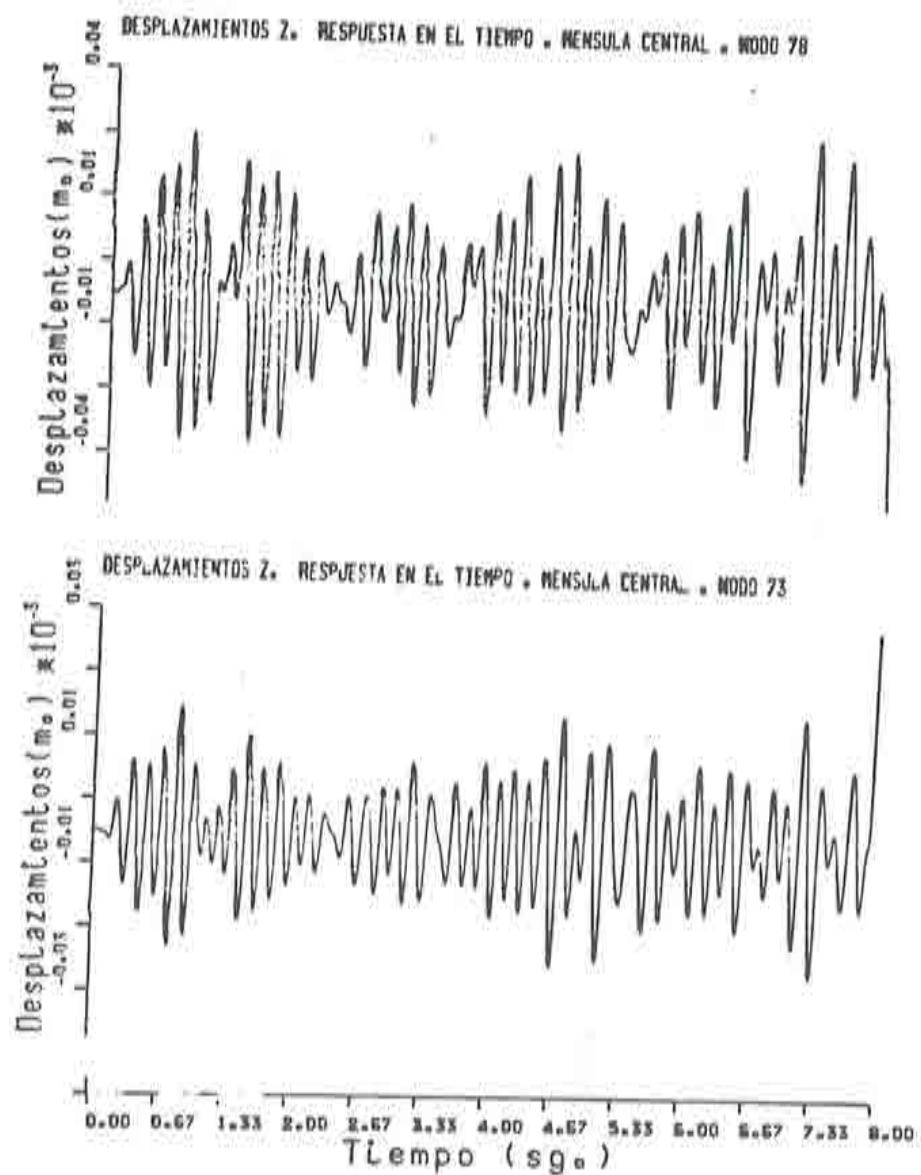


Fig. 3.17. Presa de Morrow Point. Respuesta al terremoto de Taft. Componente vertical.

#### PRESA DE MORROW POINT

Puede concluirse que para el estudio dinámico de esta presa es suficiente considerar una profundidad de terreno de cimentación igual a la altura de la estructura. De esta forma, la dimensión del problema es muy aceptable (1284 grados de libertad) y los resultados proporcionados son correctos.

En las figuras 3.10, 3.11, 3.12 y 3.13 pueden verse las cuatro primeras frecuencias de vibración de la presa de Morrow Point, para una profundidad de terreno igual a la altura de la presa.

Para analizar la respuesta en el tiempo de la presa de Morrow Point frente a una acción sísmica, se consideran las componentes noreste horizontal y vertical del acelerograma correspondiente al terremoto de Taft, ocurrido en Julio de 1952 (figura 3.14). La componente horizontal se dispone según el eje  $z$  (dirección del embalse) y según el eje  $y$  (dirección transversal al valle). Se ha tomado un incremento de tiempo de 0.05 segundos durante 8 segundos de respuesta, es decir, con 160 incrementos de tiempo. Para cada modo de vibración, se considera un coeficiente de amortiguamiento del 5%. En la figura 3.15 se muestra la respuesta en el tiempo en los modos correspondientes a la ménsula central según la componente horizontal en la dirección del embalse. La figura 3.16, según la dirección transversal al valle, y la figura 3.17 según la componente vertical.

## PARTE II



## CAPITULO 4

### EFFECTOS HIDRODINAMICOS. PLANTEAMIENTO MATEMATICO

#### 4.1. INTRODUCCION

En el análisis de estructuras son numerosos los casos en que la acción ejercida sobre la estructura es debida a efectos hidrodinámicos. Un planteamiento matemático riguroso asocia dichas acciones a fenómenos de interacción fluido-estructura. Tal sucede por ejemplo con las acciones sísmicas sobre depósitos, estructuras off-shore, presas etc.

Esta segunda parte del presente trabajo se encuadra dentro de la problemática del cálculo sísmico de presas bóveda y su comprobación experimental, incluyendo la interacción con el agua del embalse. Como un eslabón más de dicho estudio, dicha segunda parte estudia el comportamiento del fluido sometido a acciones dinámicas. Por tanto, parte de las ecuaciones y métodos de resolución que se aborden serán generales, y parte específicas para el tratamiento concreto de este tipo de problemas.

En ocasiones, el dominio geométrico abarcado por el fluido es muy grande, lo que lleva a abordar su modelización considerándolo de

## EFFECTOS HIDRODINAMICOS. PLANTEAMIENTO MATEMATICO

extensión infinita. Este es precisamente el caso del fluido contenido en el embalse, generalmente de grandes dimensiones. Ello motiva la necesidad de analizar también el caso de dominios infinitos de fluidos.

Para el tipo de problemas que se están tratando, es aceptable la hipótesis de linealidad del fluido, cosa no válida siempre en cualquier problema de interacción. Por otra parte, se considera la compresibilidad del fluido, aunque el estudio comprende también el caso de fluidos sometidos a bajas frecuencias de excitación.

El tipo de excitación se supone periódico es decir del tipo  $A \exp(iwt)$ . Ello representa una serie de ventajas que se irán viendo a lo largo del desarrollo. Para una excitación de tipo cualquiera, por ejemplo el caso sísmico, se estudia separadamente cada una de sus componentes armónicas, mediante la técnica de la transformada rápida de Fourier.

No se pretende aquí, realizar una extensa exposición sobre la mecánica de fluidos, por estar fuera del objeto de este trabajo. Nos centraremos directamente por el contrario en las ecuaciones que rigen el comportamiento del fluido bajo las condiciones que nos interesan. Se ha planteando la ecuación en presiones. La ventaja de esta formulación es que reduce el número de variables a considerar.

Para poder realizar todo el estudio, se han desarrollado una serie de programas de ordenador, correspondientes a la distintas formulaciones.

### 4.2. HIPOTESIS BASICAS

Las hipótesis efectuadas para modelar el fluido son:

- a) Las velocidades en el fluido son pequeñas. Ello permite despreciar el término convectivo e igualar las derivadas totales con respecto al tiempo, a las derivadas parciales.

## EFECTOS HIDRODINAMICOS. PLANTEAMIENTO MATEMATICO

- b) se considera la compresibilidad del fluido (como más tarde se estudiará). Para el tipo de problemas a analizar, el suponer el fluido incompresible conduce a resultados totalmente diferentes de los verdaderos.
- c) El fluido se considera no viscoso, es decir que se supone que la única disipación de energía se produce por radiación.
- d) Se desprecia el efecto debido a la turbulencia.

### 4.3. ECUACION DE COMPORTAMIENTO DEL FLUIDO

La ecuación dinámica en presiones que rige el comportamiento del fluido, puede deducirse a partir de las ecuaciones generales [13][22] de Navier-Stokes, juntamente con las hipótesis simplificativas apuntadas en el apartado anterior. Sin embargo, por su interés, vamos a deducirlas directamente de las ecuaciones de la elasticidad.

Las ecuaciones de equilibrio interno, se escribirán

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (4.1)$$

Ya que las tensiones tangenciales  $\tau_{ij}$  son nulas (hipótesis de fluido no viscoso) y las tres tensiones  $\sigma_x, \sigma_y$  y  $\sigma_z$  son iguales entre sí e iguales a la presión. En la expresión anterior  $P$  es la presión,  $\rho$  la densidad y  $u, v$  y  $w$  los tres desplazamientos del fluido según cada uno de los tres ejes coordenados.

## EFECTOS HIDRODINAMICOS. PLANTEAMIENTO MATEMATICO

Derivando la primera de las expresiones (4.1) respecto a  $x$ , la segunda respecto a  $y$  y la tercera respecto a  $z$ , y teniendo presente las relaciones entre deformaciones y corrimientos se tendrá:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} &= \rho \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} &= \rho \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{4.2}$$

en donde  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\epsilon_z$  son las tres deformaciones normales según cada uno de los tres ejes coordenados. Sumando las tres expresiones (4.2) se obtiene

$$\nabla^2 P = \rho \frac{\partial^2 \epsilon_v}{\partial t^2}\tag{4.3}$$

siendo  $\epsilon_v$  la deformación volumétrica

$$\epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z\tag{4.4}$$

y teniendo en cuenta que

$$P = E \epsilon_v\tag{4.5}$$

sustituyendo en (4.3)

$$\nabla^2 P = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\tag{4.6}$$

siendo  $c$  la velocidad de transmisión de onda

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4.7)$$

La expresión (4.6) es la ecuación de ondas en presiones, la cual en este caso gobierna el comportamiento del fluido.

Considerar el fluido incompresible, equivale a tener un valor de la velocidad de la onda de compresión en su interior igual a infinito. En dicho caso, la ecuación que rige la distribución de presiones es

$$\nabla^2 P = 0 \quad (4.8)$$

Si se considera que la excitación es de tipo armónico  $a e^{i\omega t}$ , las presiones  $P$  también lo serán, por lo que se podrá escribir

$$P = \bar{P} e^{i\omega t} \quad (4.9)$$

lo cual sustituido en la ecuación de ondas (4.6), resuelta

$$\nabla^2 \bar{P} + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{P} = 0 \quad (4.10)$$

expresión que constituye la ecuación de Helmholtz.

## 4.4 CONDICIONES DE CONTORNO

Considérese la figura 4.1, en la cual se representa un recinto de fluido, con superficie libre y rodeado de contornos sólidos, que bien están fijos o bien le transmiten a dicho fluido una serie de aceleraciones

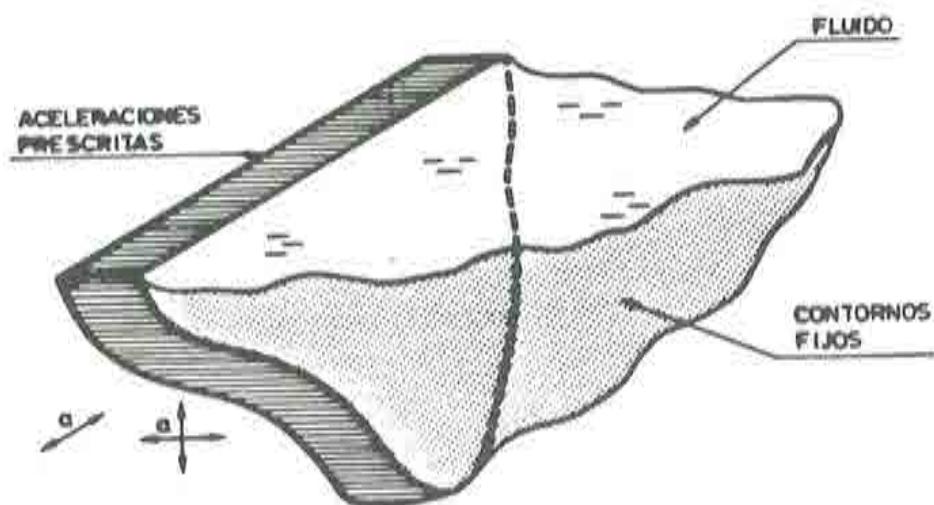


Fig. 4.1. Recinto fluido.

Las condiciones de contorno a imponer para la resolución de la ecuación (4.6) o (4.10) son:

#### 4.4.1 Condición de superficie libre

La condición de contorno a imponer en la superficie libre del fluido, dependerá de si se tiene o no en cuenta la posible formación de ondas de superficie.

Si se desprecia el efecto de las ondas superficiales, la presión será nula en la superficie, es decir

$$P_{sup} = 0 \quad (4.11)$$

$$\bar{P}_{sup} = 0 \quad (4.12)$$

Si por el contrario, se desea incluir en el análisis el efecto de dichas ondas superficiales se tendrá en la superficie libre:

$$P = \rho g u_z \quad (4.13)$$

siendo  $u_z$  la elevación de la superficie libre. Dado que

$$\ddot{u}_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (4.14)$$

la condición en este caso para la ecuación (4.6) será [24]

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (4.15)$$

o bien para la (4.10)

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \bar{P} \quad (4.16)$$

#### 4.4.2. Contornos con aceleraciones prescritas

Los contornos en movimiento vibratorio, transmiten al fluido unas ciertas aceleraciones normales  $\ddot{u}_n$ , siendo  $n$  la dirección normal al contorno. La condición de contorno viene impuesta en este caso al gradiente de la presión

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho \ddot{u}_n \quad (4.17)$$

o bien si el desarrollo se realiza en frecuencias

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial n} = -\rho \omega^2 \bar{u}_n \quad (4.18)$$

siendo  $\bar{u}_n$  la amplitud de la excitación armónica

#### 4.4.3. Contornos fijos

A partir de lo visto en (4.17) o (4.18), cuando el contorno es fijo, es decir, no transmite aceleraciones al fluido, la condición de contorno a imponer es

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0 \quad (4.19)$$

o bien

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial n} = 0 \quad (4.20)$$

donde  $n$  es, como anteriormente, la dirección normal al contorno. Bajo una excitación de tipo dinámico, las ondas de presión se reflejan

completamente en este tipo de contornos, sin que parte de ellas se refracte hacia el medio colindante.

#### 4.4.4 Contornos amortiguadores

Denominaremos así a aquellos contornos en los cuales una onda de presión incidente es sólo reflejada en parte, refractándose otra parte hacia el medio limitado por el contorno.

Esta condición de contorno la usaremos para evaluar de cierta forma la interacción entre el fluido y los medios colindantes. En especial, para el caso que más nos interesa, para tener en cuenta la interacción entre el agua almacenada en un determinado lugar y el terreno que la limita. Así, cuando no queramos tener en cuenta dicha interacción usaremos la condición de contorno (4.19) o (4.20), mientras que cuando la queramos considerar usaremos la siguiente [25].

$$\frac{\partial P}{\partial n} = q \frac{\partial P}{\partial t} \quad (4.21)$$

y también

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial n} = i\omega q \bar{P} \quad (4.22)$$

donde  $n$  es la normal al contorno y  $q$  es un parámetro que tiene en cuenta las características del terreno:

$$q = \frac{W}{W_r C_r} \quad (4.23)$$

siendo  $W$  el peso específico del fluido,  $W_r$  el peso específico del terreno y  $C_r$  la velocidad de las ondas de compresión en el terreno.

El adjetivo *amortiguador* aplicado a los contornos en que queramos tener en cuenta su interacción con el fluido de la forma expuesta hace referencia al efecto que produce sobre la distribución de presiones en el interior del fluido, que, como más tarde se estudiará, consiste en acotar las presiones en las cercanías de las autofrecuencias del fluido.

Una forma de cuantificar el efecto de la refracción permitida por un contorno [25] es a través del tanto por ciento de reflexión que devuelven al fluido a partir de una onda incidente. El parámetro que expresa dicho porcentaje es

$$\alpha_r = \frac{1 - qc}{1 + qc} \quad (4.24)$$

donde  $c$  es la velocidad de la onda de compresión en el fluido.

Así, cuando no queramos tener en cuenta la interacción fluido-medio colindante el valor de  $\alpha_r$  será uno (contornos totalmente reflectantes) y, en el resto de los casos  $\alpha_r$  será inferior a la unidad.

## CAPITULO 5

# MODELIZACION DEL FLUIDO MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

### 5.1. DEDUCCION DE LAS ECUACIONES GENERALES DISCRETIZADAS

Para obtener las ecuaciones matriciales que rigen el comportamiento del fluido, se parte de la ecuación de Helmholtz (4.10) que rige el comportamiento de las presiones en frecuencias. Si denominamos  $\Omega$  a todo el dominio fluido que se considera, se escribe una ecuación de residuos ponderados de la forma

$$\int_{\Omega} W_i (\nabla^2 \bar{P} + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{P}) d\Omega = 0 \quad (5.1)$$

siendo  $W_i$  la función de ponderación. Se prescinde de momento de las condiciones de contorno descritas en el capítulo anterior, las cuales serán introducidas en el apartado siguiente.

Se realiza la discretización por elementos finitos, expresando el valor de la presión  $\bar{P}$  de la forma

$$\bar{P} = \sum_{j=1}^n N_j P_j \quad (5.2)$$

siendo  $N_j(x, y, z)$  las funciones de forma del elemento finito elegido para discretizar el fluido, y  $P_j(\omega)$  el valor nodal de la presión, y que depende de la frecuencia de la excitación. El número total de nodos de la porción de fluido considerada es  $n$ . Tomando como funciones de peso las mismas funciones de interpolación (Galerkin),  $W_i = N_j$ , se tendrán  $n$  ecuaciones de la forma

$$\int_{\Omega} N_i \left[ \sum_{j=1}^n (\nabla^2 N_j) P_j + \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{j=1}^n N_j P_j \right] d\Omega = 0 \quad (5.3)$$

Utilizando el teorema de Gauss de integración por partes, la ecuación anterior se escribe

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial x} P_j + \frac{\partial N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial y} P_j + \frac{\partial N_i}{\partial z} \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial z} P_j \right] d\Omega \\ & + \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega} N_i \sum_{j=1}^n N_j P_j d\Omega + \int_S N_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial n} dS P_j = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

en donde  $S$  es el contorno del fluido considerado y  $n$  la normal a dicho contorno.

El contorno  $S$  puede ser un contorno físico, tal como es la superficie libre, o el contorno del líquido con un sólido, o bien puede ser un contorno que se crea artificialmente a los solos efectos de cálculo.

El último término de la ecuación (5.4) se puede escribir de la forma:

$$\int_S N_i \frac{\partial \bar{P}}{\partial n} dS \quad (5.5)$$

esta manera de escribir dicho término, es mucho más conveniente desde el punto de vista de la introducción de condiciones de contorno asociadas al gradiente de presión.

La expresión (5.4) representa un sistema de tantas ecuaciones como nodos se hayan introducido en la discretización del dominio. Expresando dicho sistema en forma matricial se tendrá

$$(-\omega^2 \mathbf{G} + \mathbf{H}) \mathbf{P} - \int_S \mathbf{N} \frac{\partial \bar{P}}{\partial n} dS = 0 \quad (5.6)$$

o también

$$(-\omega^2 \mathbf{G} + \mathbf{H}) \mathbf{P} - T.C. = 0 \quad (5.7)$$

en donde T.C. significa *términos de contorno* correspondientes a la expresión (5.5)

En la expresión (5.7) se tiene

$$\begin{aligned}
 G_{ij} &= \sum g_{ij} \\
 H_{ij} &= \sum h_{ij} \\
 T.C. &= \sum t.c.
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

en donde el símbolo  $\sum$  hace referencia en este caso al ensamblaje de todos los elementos. Asimismo las letras minúsculas indican la contribución de cada uno de los elementos a los términos de las integrales (5.4). Por consiguiente

$$\begin{aligned}
 h_{ij} &= \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] d\Omega^e \\
 g_{ij} &= \frac{1}{c^2} \int_{\Omega^e} N_i N_j d\Omega^e \\
 t.c. &= \int_{S^e} N_i \frac{\partial \bar{P}}{\partial n} dS^e
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

en donde  $\Omega^e$  y  $S^e$  denotan respectivamente el volumen y contorno elementales.

En la ecuación matricial (5.7), a la matriz  $G$  se le denomina matriz de masa del fluido, siendo  $H$  la matriz de rigidez. El vector  $\bar{P}$  es un vector que contiene todas las variables nodales (presiones) asociadas a la discretización.

## 5.2 CONDICIONES DE CONTORNO

### 5.2.1 Ondas superficiales

Si se considera la formación de ondas superficiales en la superficie libre del líquido, la condición de contorno a aplicar en dicha superficie es

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{1}{g} \ddot{P} \quad (5.10)$$

o bien

$$\frac{\partial \ddot{P}}{\partial n} = \frac{\omega^2}{g} \ddot{P} \quad (5.11)$$

por lo que en el contorno libre la expresión (5.5) se transforma en:

$$\int_{S_L} N_i \frac{\partial \ddot{P}}{\partial n} dS_L = \int_{S_L} N_i \frac{\omega^2}{g} \ddot{P} dS_L = \frac{\omega^2}{g} \int_{S_L} N_i \sum_{j=1}^n dS_L P_j \quad (5.12)$$

en donde  $S_L$  es la superficie libre del fluido.

La expresión (5.12) implica que la matriz de masa del fluido  $\mathbf{G}$  se incrementa en  $\mathbf{G}_0$ , siendo un término cualquiera de  $\mathbf{G}_0$

$$G_{0ij} = \sum g_{0ij} = \sum \frac{1}{g} \int_{S_L^e} N_i N_j dS_L^e \quad (5.13)$$

siendo  $S_L^e$  el área de un elemento del contorno

### 5.2.2. Contacto del fluido con contornos sólidos

De entre los contornos sólidos que pueden transmitir aceleraciones al fluido, uno de los casos que reviste mayor interés es el que se produce cuando una estructura, bien sea considerada flexible bien rígida, excita al fluido imponiéndole en la zona de contacto unas ciertas aceleraciones.

Para poder considerar dicho efecto, se formula un elemento de transición en el contacto fluido-estructura, el cual permite relacionar de forma numérica el gradiente de presiones en el fluido con las aceleraciones en el sólido. Dicho elemento es necesariamente un elemento de superficie, y en su formulación dará lugar a una matriz  $S$  denominada matriz de interacción.

De acuerdo con (4.17) la condición de contorno a aplicar es

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho \ddot{u}_n \quad (5.14)$$

en donde  $\ddot{u}_n$  es la proyección del vector aceleración de la estructura sobre la normal a la zona de contacto. Es importante observar que dicha aceleración puede ser conocida (lo cual sucederá cuando la estructura sea infinitamente rígida) o puede formar parte de las incógnitas del problema, en cuyo caso se estará en presencia de un problema de interacción fluido-estructura. Si se designa por  $\hat{n}$  el versor normal a la interfase fluido-estructura, y por  $\ddot{u}$  a la aceleración de la estructura en el contacto, se tendrá:

$$\ddot{u}_n = \hat{n}^T \ddot{u} \quad (5.15)$$

por lo que (5.14) puede escribirse

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho \hat{n}^T \ddot{u} \quad (5.16)$$

o también

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial n} = -\rho \hat{n}^T \bar{\ddot{u}} \quad (5.17)$$

de la discretización de la estructura se tiene que

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^m \mathbf{N}_j' \mathbf{a}_j^t \quad (5.18)$$

siendo  $\mathbf{N}_j'$  las funciones de forma para los elementos del sólido,  $\mathbf{a}_j^t$  los desplazamientos nodales, y  $m$  el número total de nodos

$$\ddot{\mathbf{u}} = \sum_{j=1}^m \mathbf{N}_j' \ddot{\mathbf{a}}_j^t \quad (5.19)$$

Sustituyendo (5.19) en (5.17)

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial n} = -\rho \hat{\mathbf{n}}^T \sum_{j=1}^m \mathbf{N}_j' \ddot{\mathbf{a}}_j^t \quad (5.20)$$

y sustituyendo a su vez la expresión anterior en (5.5) se obtiene

$$\int_{S_s} N_i \left[ -\rho \hat{\mathbf{n}}^T \sum_{j=1}^m \mathbf{N}_j' \ddot{\mathbf{a}}_j^t \right] dS_s \quad (5.21)$$

en donde  $S_s$  es la superficie del líquido en contacto con el sólido, superficie a través de la cual se transmiten las aceleraciones.

Desarrollando (5.21) se tendrá

$$\mathbf{B}_i = - \left[ \int_{S_i} N_i \rho \hat{\mathbf{n}}^T \sum_{j=1}^m N_j^t dS_j \right] \bar{\bar{\mathbf{a}}}^t_j \quad (5.22)$$

y llamando  $\mathbf{s}_{ij} = \sum \mathbf{s}_{ij}$  resulta

$$\mathbf{s}_{ij} = \int_{S_i^e} N_i \rho \hat{\mathbf{n}}^T N_j^t dS_j^e \quad (5.23)$$

en donde  $\mathbf{s}_{ij}$  es la matriz elemental del elemento de transición fluido-estructura.

Sustituyendo (5.23) en (5.21):

$$\mathbf{B}_i = - \sum \mathbf{s}_{ij} \bar{\bar{\mathbf{a}}}^t_j \quad (5.24)$$

o bien

$$\mathbf{B} = -S \bar{\bar{\mathbf{a}}}^t \quad (5.25)$$

En la expresión (5.25)  $\bar{\bar{\mathbf{a}}}^t$  es el vector que contiene las amplitudes de las aceleraciones de la zona de la estructura en contacto con el fluido. Estas se traducen, según se ha visto en una excitación dinámica sobre el fluido. Dicha aceleraciones, tal como se ha comentado anteriormente, pueden ser totalmente conocidas o conocidas sólo en parte. En éste último caso es cuando se plantea el problema de la interacción fluido estructura.

La matriz  $\mathbf{S}$  es la matriz de interacción fluido-estructura, a evaluar en los contornos del fluido en contacto con sólidos que le transmitan aceleraciones.

### 5.2.3 Matriz de amortiguamiento con el terreno

Para el caso que se considere la interacción fluido-terreno en la forma simplificada expuesta en el apartado 4.4.4, se desarrolla a continuación la formulación matricial de dicha interacción.

Tal como se expuso en dicho apartado, la condición de contorno a aplicar es la (4.22), es decir

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial n} = i\omega q \bar{P} \quad (5.26)$$

Sustituyendo en (5.5) se obtiene

$$\int_{S_T} N_i i\omega q \bar{P} dS_T = i\omega \int_{S_T} N_i \sum_{j=1}^{n'} N_j \bar{P}_j dS_T \quad (5.27)$$

en donde  $S_T$  es la superficie del fluido en contacto con el terreno y  $n'$  el número total de nodos en que se discretiza dicha superficie. La anterior expresión (5.27) da lugar a un nuevo término en la expresión matricial del comportamiento del fluido (5.7), de la forma

$$i\omega C_f P \quad (5.28)$$

siendo  $C_f$  matriz de interacción fluido-terreno. Dicha matriz tiene las características de un amortiguamiento y como tal será considerado. Hay que señalar, que por la propia formulación de  $C_f$  dicho amortiguamiento es no proporcional respecto a la matriz de masa y de rigidez.

Escribiendo

$$C_f = \sum c_{fij}$$

se tendrá

$$c_{fij} = \int_{S_T^e} q N_i N_j dS_T^e \quad (5.29)$$

### 5.3. ECUACION MATRICIAL DEL FLUIDO

Teniendo en cuenta todo lo expuesto hasta ahora, la ecuación matricial en frecuencias que rige el comportamiento de las presiones en el interior del fluido, es

$$(-\omega^2 G + i\omega C_f + H) \bar{P} = -S \bar{a}^t \quad (5.30)$$

en donde

$$G_{ij} = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \frac{1}{g} \int_{S_L} N_i N_j dS_L$$

$$H_{ij} = \int_{\Omega} (\nabla N_i)^T \nabla N_j d\Omega$$

$$C_{fij} = \int_{S_T} q N_i N_j dS_T$$

$$S_{ij} = \int_{S_s} N_i \rho \hat{n}^T N_j^t dS_s$$

Respecto a la ecuación matricial (5.30) se pueden hacer las siguientes consideraciones:

- Si no se considera la existencia de ondas superficiales, el segundo término de la matriz de masa desaparece. En este caso la correspondiente condición de contorno a imponer es la de presión dada (en general nula) en la superficie libre,
- Si se desprecia la compresibilidad del fluido ( $c = \infty$ ), desaparece el primer término de la matriz de masa. Si además se desprecia la formación de ondas en la superficie libre y se prescinde de toda interacción fluido-terreno, la ecuación (5.30) se transforma en

$$\mathbf{H}\mathbf{P} = -\mathbf{S}\ddot{\mathbf{a}}^t \quad (5.31)$$

e invirtiendo  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{P} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{S}\ddot{\mathbf{a}}^t \quad (5.32)$$

La presión es en este caso independiente de la frecuencia de excitación y tiene el significado de una masa añadida al sólido.

- Todas las matrices que aparecen en la expresión (5.30) son cuadradas y de dimensión  $n \times n$ , siendo  $n$  el número de nodos en que se discretiza el fluido, a excepción de la matriz  $\mathbf{S}$ . Dicha matriz es rectangular y de dimensiones  $m \times 3m$ , en donde  $m$  es el número total de nodos de la superficie de contacto entre el fluido y la estructura. En lo que sigue, se supondrá que las funciones de forma utilizadas en la discretización de la estructura, son las mismas que las utilizadas en el fluido. Es decir  $N_i = N_i^t$ .
- Si en ningún contorno se considera la interacción del fluido con el terreno en la forma vista anteriormente, el término correspondiente

al amortiguamiento es en principio nulo y por tanto las presiones en el fluido no estarán amortiguadas.

#### 5.4 ELEMENTOS USADOS EN LA DISCRETIZACION DEL FLUIDO

En el presente trabajo, el dominio fluido, ha sido discretizado con los mismos tipos de elementos que los utilizados para la presa. Es decir, elementos tridimensionales de 20 y 15 nodos (ver figura 2.6 y 2.7). Para la integración de las matrices se ha utilizado integración numérica selectiva, con  $3 \times 3 \times 3$  puntos de Gauss-Legendre para la matriz de masa y  $2 \times 2 \times 2$  puntos para la matriz de rigidez.

# *CAPITULO 6*

## **DOMINIOS INFINITOS**

### **6.1. INTRODUCCION**

Aunque realmente no existen dominios infinitos, se presentan en la ingeniería muchos casos reales concernientes a dominios de grandes dimensiones, y en los cuales interesa exclusivamente estudiar su comportamiento en una determinada zona, en general una cierta parte de su contorno. Este tipo de planteamiento se produce a menudo en problemas de interacción fluido-estructura, en donde aquel está formado por una gran masa de agua. Piénsese por ejemplo en una presa en contacto con el agua del embalse o en el caso de "estructuras offshore" inmersas en el mar (fig. 6.1). Otros ejemplos de tales tipos de dominios pueden ser el estudio del revestimiento de un túnel, o la cimentación de una estructura, etc.

Evidentemente en tales tipos de dominios, no puede pensarse en una discretización total de los mismos. En primer lugar porque el gran volumen del problema lo convertiría en económicamente impracticable y posiblemente técnicamente también. En segundo lugar porque no parece acertado estudiar y obtener la solución en todos los puntos cuando realmente únicamente interesan unos pocos

que además están muy localizados. Una primera aproximación al tratamiento numérico del problema, podría consistir en estudiar la malla hasta una cierta distancia de la zona de interés, es decir realizando un truncamiento artificial del dominio, e imponiendo en este contorno *condiciones adecuadas*. Evidentemente la extensión de dicho subdominio debe obtenerse mediante estudios paramétricos. Sin embargo, el problema realmente aparece al definir cuales son las *condiciones adecuadas* que hay que imponer a este contorno para obtener una solución aceptable. Veamos algunos casos:

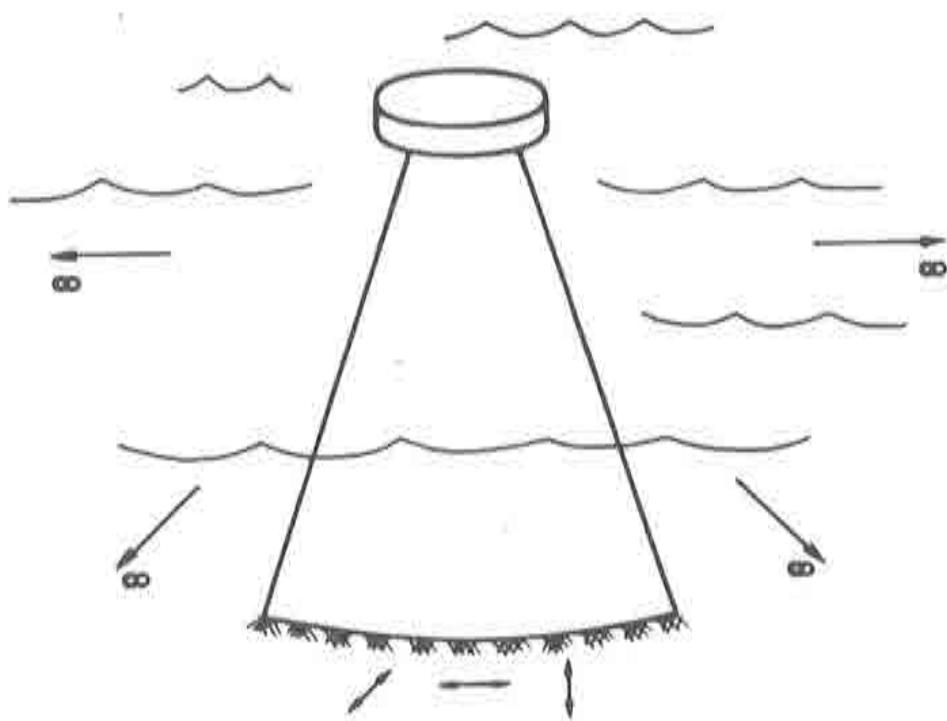


Fig. 6.1. Estructura inmersa en el mar.

Supóngase en primer lugar que se estudia una presa sometida a fuerzas de naturaleza estática. Como es bien sabido, existen diferencias importantes entre tener o no en cuenta la flexibilidad de la roca de cimentación (la cual constituye un dominio prácticamente infinito). Puede tenerse en cuenta dicha flexibilidad discretizando una parte del terreno e imponiendo en sus contornos condiciones de desplazamiento

nulo. Procediendo de esta manera se obtienen buenas soluciones, y en definitiva el modelo funciona de forma razonable.

El problema sin embargo cambia si se consideran acciones de tipo dinámico y se dota de masa tanto a la estructura como al terreno. En efecto, procediendo al igual que en el caso estático, los resultados obtenidos son erróneos, lo cual indica que la condición de contorno impuesta en la frontera ficticia es falsa, puesto que ondas que partiendo de la presa debieran disiparse en la masa de terreno, se reflejan en los contornos supuestos fijos falseando el resultado completamente.

En el caso del fluido, es evidente que puede considerarse también una frontera ficticia, siempre que en dicha frontera se impongan condiciones adecuadas. Imponer condiciones del tipo de que presión o alguna de sus derivadas son nulas no deja de ser una arbitrariedad, y efectivamente los resultados obtenidos con tales supuestos son falsos. La solución correcta, tendrá pues necesariamente que venir de estudiar el término de contorno dado por la expresión (5.5). Un ejemplo simple aclarará estos conceptos.

## 6.2. EJEMPLO INTRODUCTORIO

Supóngase una barra de longitud  $L$  (la longitud  $L$  puede tener un valor finito o un valor infinito) que solamente tiene esfuerzo axil (fig 6.2.) y que en el punto  $x = 0$  actúan unas tensiones normales de valor

$$\sigma = e^{i\omega t} \quad (6.1)$$

La ecuación diferencial que rige el comportamiento de los desplazamientos en frecuencias viene dada por [11]

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}u = 0 \quad (6.2)$$

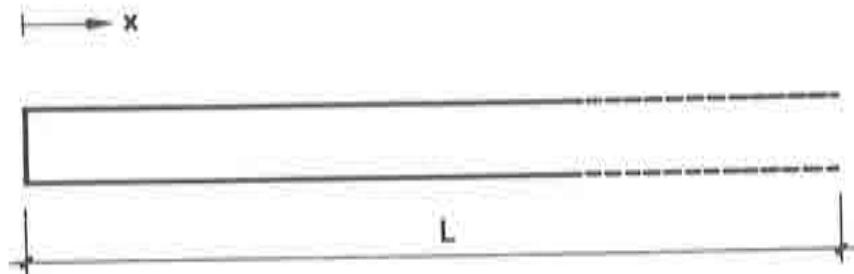


Fig. 6.2. Barra de longitud finita o infinita.

en donde

$u$ : amplitud de los desplazamientos en la dirección del eje de la barra

$\omega$ : frecuencia de excitación

$c$ : velocidad de la onda  $c = EA/\bar{m}$

$E$ : módulo de Elasticidad

$A$ : área de la sección recta

$\bar{m}$ : masa por unidad de longitud

### 6.2.1. Solución analítica

La solución de la ecuación (6.2) viene dada por

$$u = D \exp(ikx) + B \exp(-ikx) \quad (6.3)$$

siendo  $D$  y  $B$  dos constantes de integración a determinar dependiendo de las condiciones de contorno, y  $k = \omega/c$

a) Barra de longitud finita:

Si la longitud  $L$  de la barra es finita, y en el punto  $x = L$  los desplazamientos son nulos, las condiciones de contorno a aplicar son

$$\begin{array}{lll} \bar{\sigma} = 1 & \text{para} & x = 0 \\ u = 0 & \text{para} & x = L \end{array} \quad (6.4)$$

Por otra parte

$$\bar{\sigma} = E\bar{\epsilon} = E \frac{du}{dx} = ikED \exp(ikx) - ikEB \exp(-ikx)$$

Por tanto

$$\bar{\sigma}(x = 0) = ikE[D \exp(ikx) - B \exp(-ikx)]_{x=0} = ikE(D - B) = 1 \quad (6.5.a)$$

$$u(x = L) = D \exp(ikL) + B \exp(-ikL) = 0 \quad (6.5.b)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (6.5) se obtiene el valor de las constantes de integración  $D$  y  $B$

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{ikE[\exp(2ikL) + 1]} \\ B &= -\frac{\exp(2ikL)}{ikE[\exp(2ikL) + 1]} \end{aligned} \quad (6.6)$$

## DOMINIOS INFINITOS

Las frecuencias propias, se obtendrán anulando el denominador de (6.6)

$$\exp(2ikL) + 1 = 0$$

$$k_n L = \frac{2n-1}{2} \pi$$

o sea

$$\omega_n = \frac{2n-1}{2} \pi \sqrt{\frac{EA}{\bar{m}L^2}} \quad (6.7)$$

Y los desplazamientos se escribirán

$$u = \frac{2}{4kE \cos^2 kL} [\sin kx - \sin(-kx + 2kL)] \quad (6.8)$$

b) Barra de longitud infinita:

En este caso el valor de la constante  $D$  es cero, por lo que

$$u = B \exp(-ikx) \quad (6.9)$$

El resultado anterior puede obtenerse directamente, teniendo en cuenta que el término correspondiente a  $D$  corresponde a una onda que viaja en el sentido de las  $x$  decrecientes, es decir en este caso corresponde a una onda de reflexión por lo que debe ser nula. El mismo resultado se obtiene a partir de las expresiones (4.22) y (4.24),

## DOMINIOS INFINITOS

es decir imponiendo en todos los puntos que no exista onda reflejada. Por tanto en (4.24)  $\alpha_r = 0$  por lo que  $q = 1/c$

Es decir

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i\omega}{c}u = 0 \quad (6.10)$$

La expresión (6.10) debe verificarse en todos los puntos. Por tanto, a partir de la (6.3)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ik[D \exp(ikx) - B \exp(-ikx)]$$

y por tanto

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i\omega}{c}u = 2ikD \exp(ikx) = 0$$

es decir,  $D = 0$

Por otra parte, la amplitud de las tensiones valdrá

$$\bar{\sigma}(x = 0) = -ikEB = 1$$

es decir

$$B = -\frac{1}{ikE}$$

Con lo que la solución valdrá

$$u = -\frac{1}{ikE} \exp(-ikx) \quad (6.11)$$

De la comparación de (6.8) con (6.11) lo primero que salta a la vista es el carácter completamente distinto de la solución independientemente del valor de  $L$ . Más aún, para el caso de la barra infinita, el desplazamiento en un punto cualquiera se hace infinito solamente para la frecuencia de excitación nula ( $k = 0$ ), mientras que para la barra finita, dicho desplazamiento es infinito para cada uno de los infinitos modos de vibración.

Se desprende por tanto claramente de lo expuesto hasta ahora que no se puede cortar por un punto e imponerle una condición de contorno del mismo tipo que en un caso estático. El comportamiento de ambas soluciones es radicalmente distinto.

### 6.2.2. Solución numérica

Para resolver numéricamente el problema planteado, se considera una barra de longitud  $L$  que se divide en  $N - 1$  elementos finitos lineales, con un total de  $N$  nodos (fig 6.3) de igual longitud  $h$  cada uno de ellos

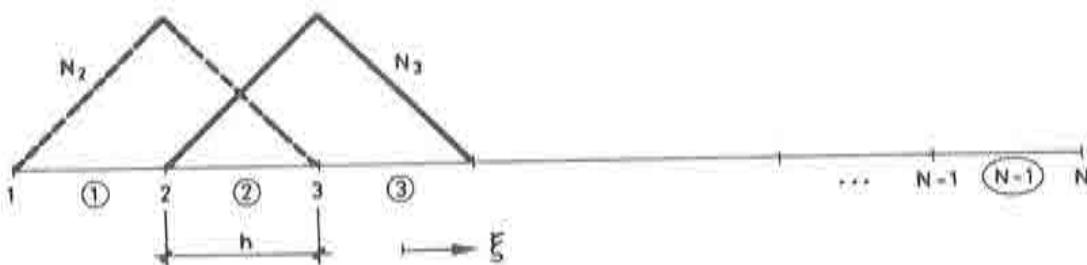


Fig. 6.3. Discretización en elementos finitos unidimensionales.

La barra será de longitud finita o infinita dependiendo de la condición de contorno que se imponga en el punto  $x = L$

a) Barra finita

$$u(x = L) = 0 \quad (6.12)$$

b) Barra infinita

$$\left( \frac{du}{dx} + \frac{i\omega}{c} u \right)_{x=L} = 0 \quad (6.13)$$

Se utiliza un método de residuos ponderados, realizando una aproximación de Galerkin

$$\int_0^b W_i \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} u \right) dx = 0 \quad (6.14)$$

$$u = \sum_{j=1}^N N_j u_j$$

Realizamos una integración por partes

$$-\int_0^L \left( \frac{dN_i}{dx} \frac{du}{dx} - N_i \frac{\omega^2}{c^2} u \right) dx + \left[ N_i \frac{du}{dx} \right]_0^L = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (6.15)$$

$$u = \sum_{j=1}^N N_j u_j$$

$$k_{ij} = \int_0^L \left( \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} - k^2 N_i N_j \right) dx \quad (6.16)$$

$$f_i = [N_i \frac{du}{dx}]_0^L \quad (6.17)$$

con lo que queda el sistema de ecuaciones

$$Ku = f \quad (6.18)$$

Siendo para cada uno de los elementos

$$k_{ij}^e = \int_0^h \left[ \frac{N_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} - k^2 N_i^e N_j^e \right] dx = -\frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{6}$$

$$k_{ii}^e = k_{jj}^e = \int_0^h \left[ \left( \frac{dN_i^e}{dx} \right)^2 + k^2 (N_i^e)^2 \right] dx = \frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{3}$$

Por lo que el sistema de ecuaciones desarrollados queda

$$\left( \begin{array}{cccccc} \frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{6} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{6} & 2\left(\frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{3}\right) & -\frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{3} & 2\left(\frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{3}\right) & -\frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{6} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{6} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{E} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

Si la barra es de longitud finita  $L = (N-1)h$ , la condición de contorno a imponer es  $u_n = 0$ , lo cual se consigue eliminando la última fila y la última columna de la matriz de la expresión (6.19).

Si la barra es de longitud infinita, se corta arbitrariamente en un punto  $x = L$ , con lo cual queda el mismo sistema de ecuaciones (6.19). La condición de contorno a imponer en este caso es la (6.13), es decir

$$\frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = -\frac{i\omega}{c} \Big|_{x=L} = iku_N \quad (6.20)$$

Sustituyendo (6.20) en (6.19) la ecuación matricial solución del problema será

$$\left( \begin{array}{cccccc} \frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{6} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{6} & 2\left(\frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{3}\right) & -\frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{3} & 2\left(\frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{3}\right) & -\frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{6} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} - k^2 \frac{h}{6} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{E} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

En la figura 6.4 puede verse en función de  $k$  la respuesta en  $x = 0$  de una barra de longitud 5 metros y  $E = 1$ . En la figura 6.5 puede verse la

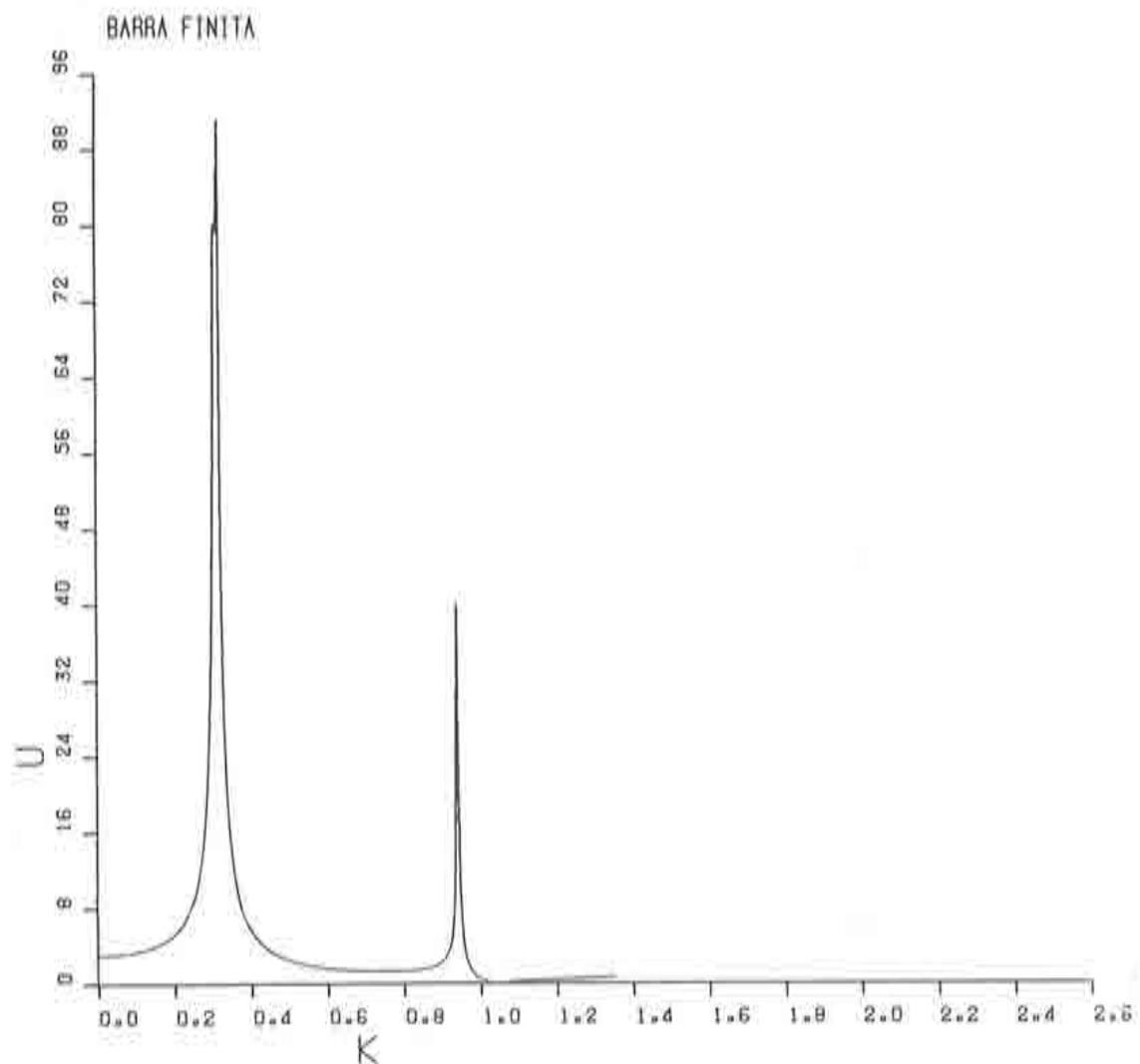


Fig. 6.4. Respuesta de una barra de longitud 5 metros.

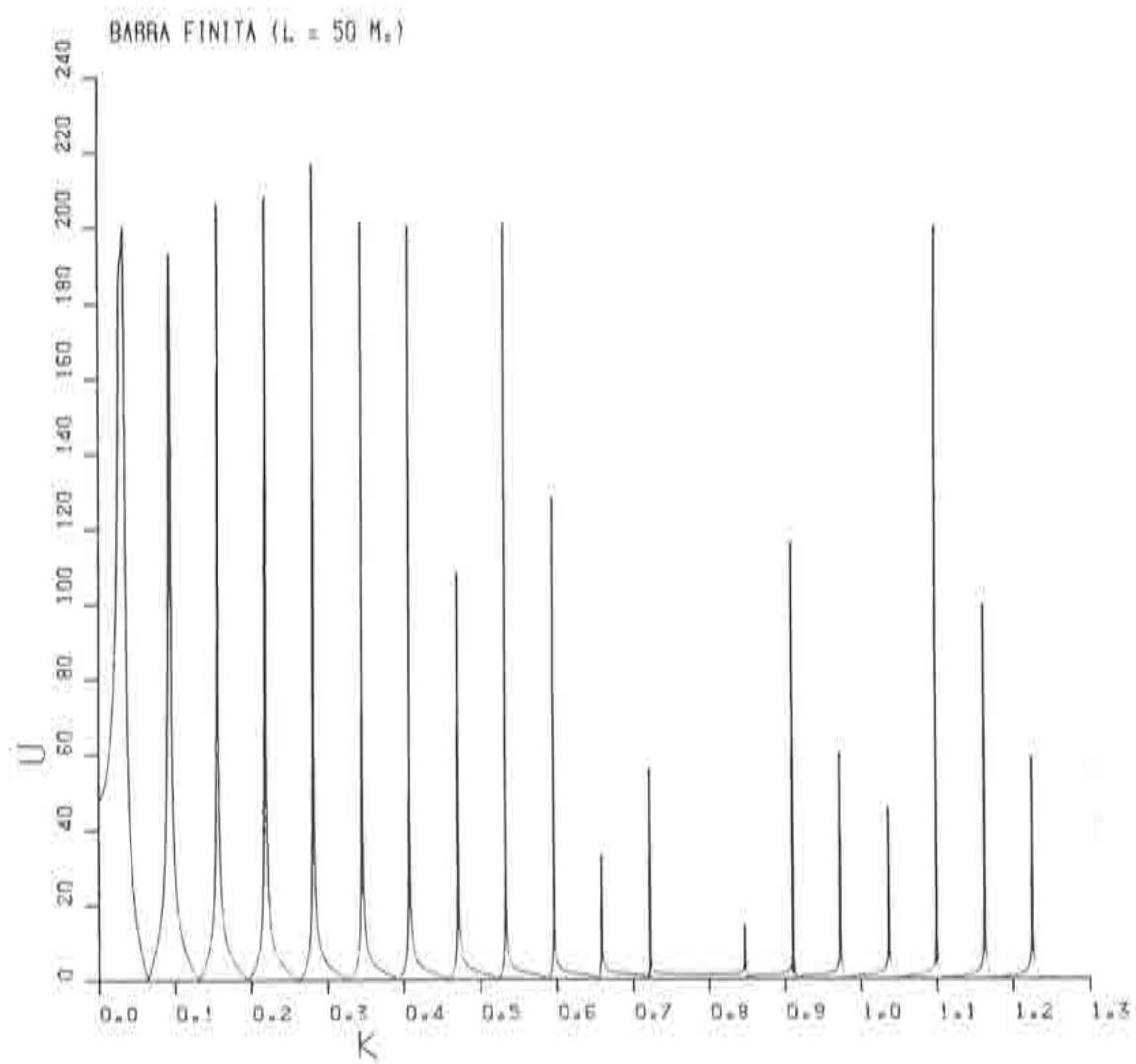


Fig. 6.5. Respuesta de una barra de longitud 50 metros.

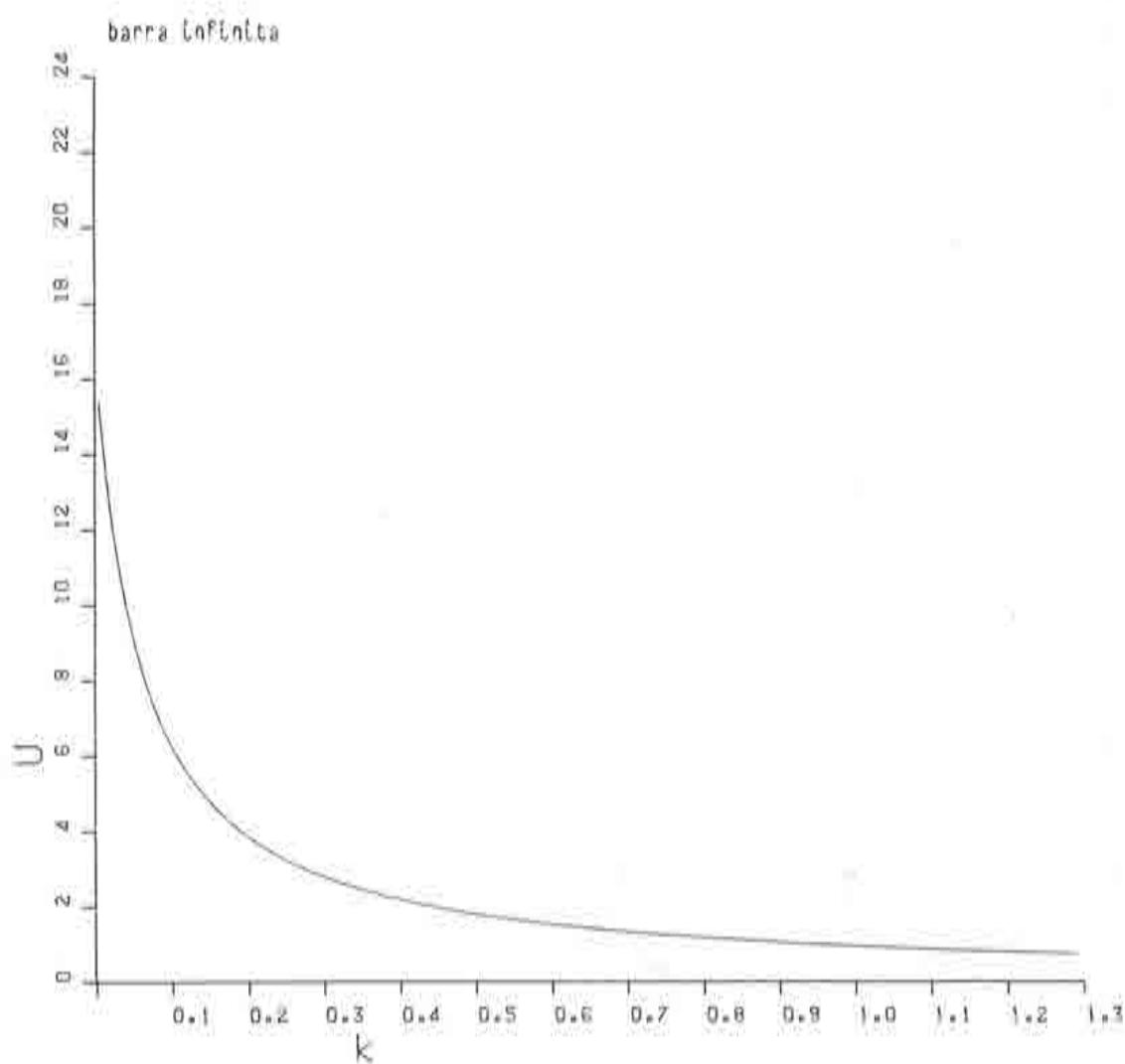


Fig. 6.6. Respuesta de una barra de longitud infinita.

solución en  $x = 0$  de una barra de longitud 50 metros y  $E = 1$ . Como puede observarse la solución es completamente distinta a la dada por la figura 6.6 correspondiente a una barra infinita.

Queda visto por tanto, que para el tratamiento de dominios infinitos, no puede truncarse simplemente dicho dominio sin tomar una serie de precauciones. En general existen tres formulaciones básicas para tratar dominios infinitos mediante el método de los elementos finitos: el uso de la condición de radiación, utilización de elementos infinitos, y mediante soluciones de tipo semianalítico. A continuación se describen cada una de ellas.

### 6.3. LA CONDICION DE RADIACION

#### 6.3.1 Planteamiento

La idea básica de la condición de radiación consiste en truncar en una cierta zona el dominio infinito, de esta manera queda un dominio de fluido finito, el cual se modela mediante la técnica habitual ya vista de elementos finitos. En la superficie de truncamiento, se impone la condición de radiación, consistente en que las ondas de presión que avanzan hacia ella sigan su recorrido hasta el infinito, impidiendo la reflexión de dichas ondas en este contorno.

Considérese la geometría del problema representado en la figura 6.7. Dicha figura tiene un cierto elemento estructural en contacto con una masa infinita de fluido. Dicho elemento estructural comunica al fluido una excitación de tipo dinámico.

En la figura 6.8 puede verse lo indicado anteriormente para hallar la respuesta del fluido cuando el sólido le transmite unas ciertas aceleraciones: Se realiza una discretización convencional por elementos finitos hasta el contorno  $\Gamma_E$ , en el cual se impone la condición de contorno de que las ondas incidentes no sean reflejadas.

## DOMINIOS INFINITOS

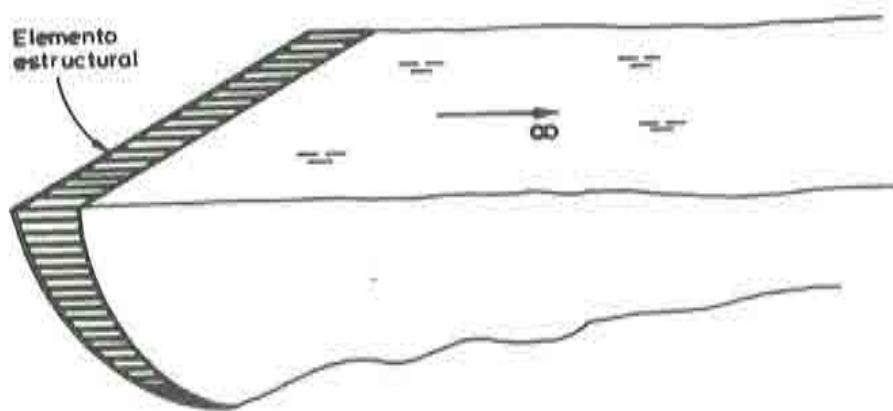


Fig. 6.7. Elemento estructural en contacto con masa infinita de fluido.

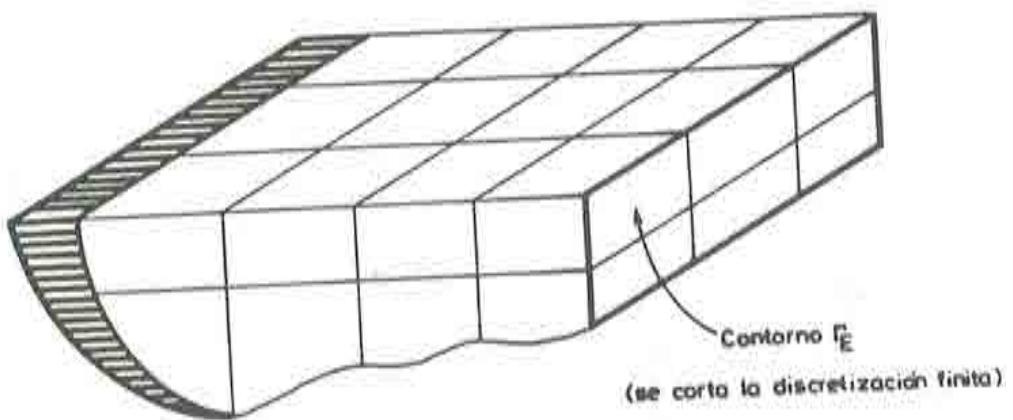


Fig. 6.8. Discretización de dominio fluido infinito.

Para expresar matemáticamente dicha condición de radiación, se parte de la ecuación de ondas (4.6) en una dimensión

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (6.22)$$

la cual como es sabido tiene la solución general debida a D'Alambert [39]

$$P = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (6.23)$$

La expresión (6.23) representa la superposición de dos ondas viajando en sentido contrario. La onda representada por  $f(x - ct)$  viaja en el sentido de las  $x$  crecientes, mientras que  $g(x + ct)$  lo hace en el sentido de las  $x$  decrecientes. Si se quiere asegurar que en una determinada superficie no viajen ondas en el sentido de las  $x$  decrecientes, es preciso que

$$g(x + ct) = 0 \quad (6.24)$$

o también

$$P = f(x - ct) \quad (6.25)$$

Derivando la expresión anterior respecto a  $x$  y a  $t$  [26] y llamando

$$u = x - ct \quad (6.26)$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}(-c) = -c \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\end{aligned}\tag{6.27}$$

y eliminando  $u$  de las expresiones anteriores se obtiene

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial t}\tag{6.28}$$

La expresión (6.28) se generaliza a dos o más dimensiones sustituyendo la variable  $x$  por la normal  $n$  a la superficie, es decir

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial t}\tag{6.29}$$

la cual constituye la expresión general de la condición de radiación [27].

Para el caso en que  $P = \bar{P} \exp(i\omega t)$  se puede escribir

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial n} = \frac{i\omega}{c} \bar{P}\tag{6.30}$$

En principio, esta condición solamente puede aplicarse tal como ha sido deducida para el caso de contornos en los cuales las ondas inciden normalmente a ellos. Esta limitación condiciona y limita las posibles superficies mediante las cuales se puede truncar el dominio infinito. Se ha estudiado [27] el problema de ondas incidiendo oblicuamente en este tipo de contornos, concluyéndose que es admisible una cierta desviación respecto de la normal al contorno para que la condición (6.29) o bien la (6.30) sigan siendo válidas.

Por otra parte, aún en el caso en que el contorno sea perpendicular a las ondas incidentes, la condición de radiación no puede imponerse excesivamente cerca del lugar en donde está localizada la excitación, pues en este caso los resultados obtenidos no son correctos tal como se verá en los capítulos posteriores.

Otra limitación suplementaria que aparece utilizando la condición de radiación, es que proporciona resultados acotados en el entorno de las autofrecuencias como se verá posteriormente. Ello es debido a que dicha condición tiene la estructura de un amortiguamiento que si bien se aplica solamente en unos determinados elementos, influye en toda la estructura.

Se puede decir por tanto resumiendo, que la clave para que la aplicación de la condición de radiación proporcione resultados correctos en dominios arbitrarios, radica en truncar la discretización del fluido mediante una superficie tal que las ondas que se dirijan hacia ella tengan la dirección de su normal, y por otro lado, en que dicha superficie no se encuentre excesivamente próxima a la superficie de excitación. Ambos condicionamientos están relacionados puesto que la dirección que sigan las ondas de presión en el fluido, dependerá del lugar en donde esté situada la excitación.

No existen criterios —en el caso general— globales para determinar la zona en donde debe cortarse la discretización por elementos finitos antes de imponer la condición de radiación, puesto que tal circunstancia dependerá de la geometría de cada problema particular, de la naturaleza y localización de la excitación, etc. En este sentido, la experiencia previa juega un importante papel. En caso contrario el camino a seguir será el correspondiente a prueba y error.

A fin de poder centrar ideas sobre este tema, considérese el dominio infinito representado en la figura 6.9. Dicho dominio, correspondiente al caso de una presa infinitamente rígida y un fluido infinito de sección constante, ha sido ampliamente estudiado en el presente trabajo, tal como puede verse en capítulos posteriores. Se llegó a la conclusión que la longitud de embalse

óptima para realizar el truncamiento e imponer la condición de radiación es del orden de dos a tres veces la altura de la presa.

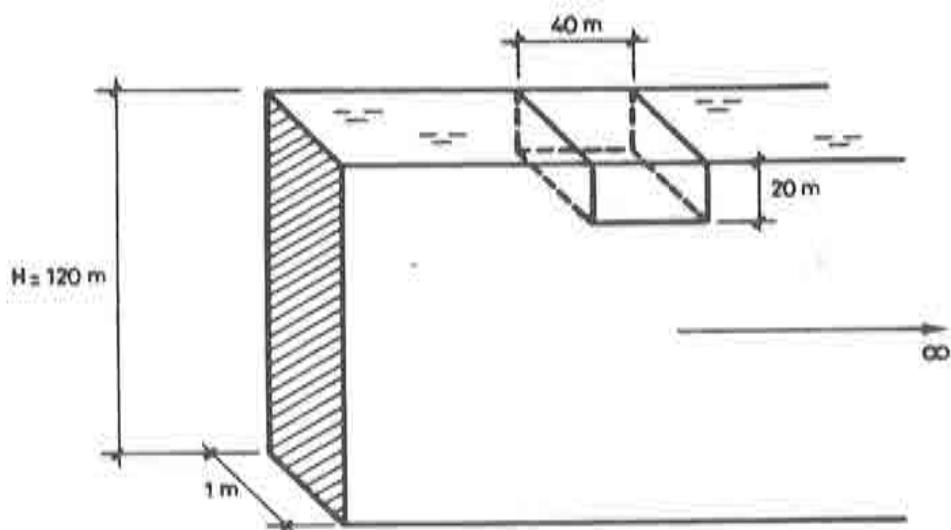


Fig. 6.9. Dominio de fluido infinito con pared rígida.

Humar y Roufaiel [28] proponen modificar la condición de radiación en el siguiente aspecto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial n} &= 0 & \text{para } \omega < \omega_1 \\ \frac{\partial P}{\partial n} &= -\frac{1}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2} \frac{\partial P}{\partial t} & \text{para } \omega > \omega_1 \end{aligned} \quad (6.30)$$

en donde  $\omega$ , es la frecuencia fundamental de vibración del fluido.

La expresión (6.30) es consistente con el hecho de que la radiación se produce únicamente bajo frecuencias de excitación superiores a la fundamental. Por tanto mediante la aplicación de dicha condición no

se producirán amortiguamientos artificiales por debajo de la primera frecuencia tal como se producen utilizando (6.28). Por otra parte, la inclusión de un término adicional para  $\omega > \omega_1$  tiene una justificación en el desarrollo teórico. Es de esperar por tanto que la ecuación (6.30) proporcione mejores resultados, tal como en realidad así sucede, como se podrá ver en el capítulo correspondiente.

Recientemente [29] se ha propuesto una nueva condición de contorno a aplicar en la superficie en donde se trunca la discretización finita del fluido. La expresión ha sido deducida a partir de la solución analítica de la ley de presiones para un dominio bidimensional infinito de fluido, de profundidad constante  $H$ .

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{\pi}{2H}P - \frac{1}{c}\dot{P} \quad (6.31)$$

Lo primero que se observa respecto a las dos condiciones precedentes, es la inclusión del término  $\frac{\pi}{2H}P$ . Dicho término puede interpretarse como una masa añadida al fluido localizada en los nodos pertenecientes a la superficie de truncamiento, la cual tiene en cuenta en cierta forma la masa del fluido que queda fuera de la discretización, hacia el fluido infinito pero considerando a éste último incompresible. Estas conclusiones vienen respaldadas por los resultados obtenidos comparando la condición de contorno (6.31) y evaluando la masa añadida mediante otro procedimiento tal como el de la doble aproximación asindótica, coincidiendo los resultados obtenidos mediante ambos procedimientos. De los resultados obtenidos aplicando la condición (6.31), en un análisis por frecuencias, puede concluirse diciendo que la aplicación de (6.31) es poco recomendable.

Las condiciones de radiación vistas anteriormente, pueden escribirse de manera unificada como

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial n} = <\alpha> \frac{i\omega}{c} \tilde{P} \quad (6.32)$$

## 6.3.2. Discretización de la condición de radiación

La imposición de cualquiera de las condiciones de radiación vistas anteriormente en un determinado contorno, dan lugar a nuevo término de contorno de la ecuación matricial del fluido. Dicho de otra forma, explica el término de contorno de la ecuación matricial (5.7) correspondiente a la superficie de truncamiento. Dicho término de contorno, de acuerdo con (5.5) viene dado por

$$\int_{S_R} N_i \frac{\partial \bar{P}}{\partial n} dS_R$$

por lo que sustituyendo (6.32) en la expresión anterior se obtiene

$$\int_{S_R} N_i \frac{\partial \bar{P}}{\partial n} dS_R = \int_{S_R} N_i \langle \alpha \rangle \frac{i\omega}{c} \bar{P} dS_R = \langle \alpha \rangle \frac{i\omega}{c} \int_{S_R} N_i \sum N_j P_j dS_R \quad (6.33)$$

La expresión anterior da lugar a un nuevo término en la ecuación matricial que gobierna el comportamiento en presiones del fluido de la forma

$$i\omega C_R P \quad (6.34)$$

viniendo dado cada elemento de  $C_R$  por la integral de superficie

$$C_{Rij} = \frac{\langle \alpha \rangle}{c} \int_{S_R} N_i N_j dS_R \quad (6.35)$$

## 6.4. ELEMENTOS INFINITOS

La base de las formulaciones de elementos infinitos para modelar dominios de esta misma naturaleza es seguir un paralelismo con la formulación usual de los elementos finitos. Varían fundamentalmente las funciones de forma tradicionales, poco adecuadas tanto para la descripción geométrica del mismo como para la variable.

La esencia del buen funcionamiento de un elemento finito radica en que sea capaz de contener la información necesaria sobre la solución del problema real cuando se tiende hacia el infinito. La formulación del elemento infinito se basa en el conocimiento *a priori* de la forma general de la solución del problema o sus características más relevantes, así como en adecuar su formulación a las propiedades de dicha solución.

En la resolución de problemas en dominios infinitos, el campo cercano, es decir el próximo a la excitación debe modelarse mediante elementos finitos. Ello debe hacerse así para afectar en la menor medida posible a los elementos infinitos por las condiciones de contorno.

En el campo de los problemas de naturaleza dinámica la formulación de elementos infinitos adecuados es más compleja que en el caso estático; por otro lado, la existencia de otros procedimientos para modelar dominios infinitos en este ámbito y otras cuestiones que más adelante comentaremos, hacen que el uso de elementos infinitos dinámicos no esté tan extendido como en el caso estático.

Exponemos a continuación el elemento infinito bidimensional desarrollado por Bette y Zienkiewicz [30],[31], como ejemplo de las principales características que reúnen los elementos infinitos de aplicación en problemas de tipo dinámico en fluidos infinitos.

Consideremos la figura 6.10 en la cual se muestra el elemento infinito en el espacio dado por las coordenadas  $\xi, \eta$ ; se pretende

modelar con él un dominio infinito en la dirección  $\xi > 0$ .

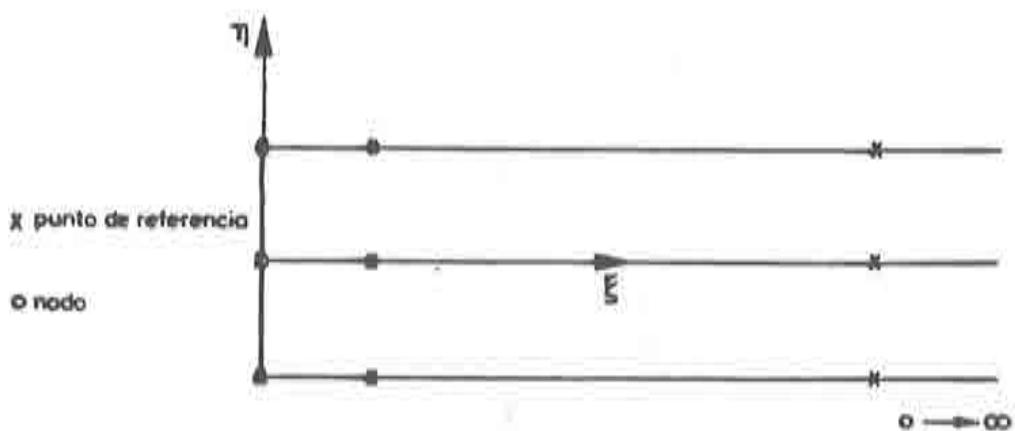


Fig. 6.10. Elemento infinito bidimensional.

El elemento tiene tres puntos de referencia en cada una de las dos direcciones, dando un total de nueve puntos de referencia, para los cuales se especifican las coordenadas  $x$  e  $y$ .

#### • Representación paramétrica

Se supone que el tercer punto de referencia en la dirección  $\xi$  está a una gran pero no infinita distancia. En dicha dirección se considera que los puntos de referencia están a  $\xi = 0$ ,  $\xi = 2$  y  $\xi = 30$  (esta selección es arbitraria). En la dirección  $\eta$  como es habitual,  $\eta \in [-1, +1]$ . En ambas direcciones se usa la interpolación clásica de Lagrange.

A continuación se considera una nueva coordenada en la dirección  $\xi$ : una coordenada  $s$  que es tal que las longitudes a lo largo de ella son las que en la realidad le corresponden en las coordenadas  $x, y$  del problema. Se define  $s$  pues, tal que

$$\frac{ds}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \quad (6.36)$$

La cantidad  $\frac{ds}{d\xi}$  se calcula en los tres puntos y se coge un valor medio, es decir

$$s = \xi \left( \frac{ds}{d\xi} \right)_{\text{medio}}$$

Los tres puntos de referencia en la dirección  $s$  son

$$0, \quad 2 \frac{ds}{d\xi}, \quad 30 \frac{ds}{d\xi}$$

#### - Descripción de la variable

Las funciones de forma usadas en la dirección  $\eta$  son los polinomios de Lagrange. Sin embargo, en la dirección  $s$  hay que usar una función de forma especial, de manera que al alejarnos hacia el infinito refleje el comportamiento real de la presión; éste es una combinación de comportamiento oscilatorio y de desvanecimiento, por lo que las funciones de forma usadas para  $s$  son del tipo

$$p(s) e^{-\frac{s}{L}} e^{i k s} \quad (6.37)$$

donde  $p(s)$  es un polinomio,  $L$  es una longitud de desvanecimiento y  $k$  es el número de onda, que está relacionado con la frecuencia de excitación por la expresión

$$k = \omega/c \quad (6.38)$$

La elección de una función de forma para  $s$  del tipo (6.37) es por lo siguiente: el último término representa la forma básica de la onda,

el segundo representa el desvanecimiento de la onda al aumentar  $s$  y el primero permite el cambio de forma para  $s$  pequeña. Una expresión de este tipo representa una onda viajando hacia el infinito que tiende a cero.

Obsérvese que, según (6.37) la formulación del elemento infinito depende de la frecuencia de excitación  $\omega$ , debiéndose modificar las funciones de forma para cada una de las frecuencias de excitación que intervengan en el problema.

Las funciones de forma (6.37) y los valores nodales asociados al elemento infinito son ahora complejos (es decir, la presión, como incógnita nodal, es compleja, con parte real e imaginaria), y son tales que tienen modulos 1 ó 0 dependiendo del nodo. Así, para el nodo  $r$ , la función de forma en la coordenada  $s$  es:

$$N_r = e^{\frac{(s_r - s)}{L}} e^{iks} \prod_{q=1}^{n-1} \left( \frac{s_q - s}{s_q - s_r} \right) \quad (6.39)$$

siendo el nodo  $n$  el que está en el infinito. Para el caso plano, las funciones de forma explícitas de este elemento pueden encontrarse en la referencia [30]

#### - Cuestiones de interés

##### a) Parámetro de desvanecimiento $L$ .

Los resultados que se obtengan vienen afectados por este parámetro  $L$  que controla el rigor con el que la solución tiende a cero al ir aumentando  $s$ . Una posibilidad [30] para estimar el valor de  $L$  en este caso consiste en hacer coincidir el desvanecimiento elegido  $\exp(-s/L)$  con el primer término de la solución general en forma de series,  $H_0(ks)$ , donde  $H_0$  es la función cero de Hankel de primer tipo. Existen otros criterios para tantear  $L$ , para casos particulares, en función de la geometría del problema [32].

A nuestro entender, una formulación de este tipo siempre va a tener la limitación de quedar indeterminado el valor de este parámetro, con los problemas que ello conlleva en un caso general de geometría y excitación arbitrarias donde no se tengan referencias de la solución real del problema.

b) Integración numérica

A la hora de realizar los cálculos matriciales se plantean integrales del tipo

$$\int_0^{\infty} p(s) e^{-\alpha s} e^{i\beta s} ds \quad (6.40)$$

El abordar dicho tipo de integrales mediante integración numérica Gauss-Laguerre implica usar un elevado número de puntos de integración, puesto que se debe aproximar  $\exp(i\beta s)$  mediante un polinomio. Bette y Zienkiewicz desarrollaron una fórmula para el cálculo de las integrales (6.40) del tipo

$$\int_0^{\infty} p(s) e^{-\alpha s} e^{i\beta s} ds = \sum_{i=1}^3 p(s_i) \gamma_i \quad (6.41)$$

siendo  $s_i$   $2n + 1/4$  múltiplos de la longitud de onda y  $\gamma_i$  pesos complejos deducidos para dicha expresión [30].

c) Ecuación matricial del elemento infinito.

El empleo de elementos infinitos dinámicos dependientes de la frecuencia de excitación da lugar a que la ecuación matricial del fluido se transforme, sin considerar interacción con el terreno y para una excitación armónica de frecuencia de excitación  $\omega$ , en

$$\bar{G}(\omega)\bar{P} + \bar{H}(\omega)P = -Sa(\omega) \quad (6.42)$$

donde ahora  $\bar{G}(\omega)$  y  $\bar{H}(\omega)$ , son matrices de masa y rigidez del fluido, que dependen de la frecuencia de excitación. Dichas matrices son complejas, conteniendo los términos complejos asociados al elemento infinito.

El empleo de estos elementos infinitos tiene pues el inconveniente, además de la incertidumbre en la determinación de  $L$  (parámetro de desvanecimiento), el tener que evaluar parte de la matriz de rigidez y de masa del fluido para cada frecuencia de excitación; ésto supone un mayor coste de cálculo que en el caso de que se emplee la condición de radiación, pues cuando se usa ésta sólo hay que evaluar una vez la matriz  $C_R$  (asociada a dicha condición) en el lugar donde se corta la discretización finita, al ser independiente de la frecuencia de excitación. Por otro lado, un planteamiento con elementos infinitos recoge también, al igual que lo visto para la condición de radiación, la necesidad de estudiar el lugar en donde se puede cortar la discretización finita y colocar los elementos infinitos.

### 6.5. FORMULACION SEMIANALITICA

Los dos métodos vistos hasta ahora, pueden en principio aplicarse a cualquier dominio de fluido infinito, sin hacer mención de la forma. Su campo de aplicación es por tanto muy extenso siempre que se tenga precaución en cuanto a que se cumplan las hipótesis bajo las cuales se han formulado.

Existe sin embargo un caso particular de dominios infinitos, en los cuales una parte de los mismos está generada por una superficie plana que se desplaza a lo largo de un eje (figura 6.11). Se forma de esta manera un volumen en el cual la sección según el eje generador permanece constante a lo largo de éste. Dicho caso particular presenta notable interés en los problemas de interacción presa-embalse, pues éste último puede modelarse mediante un volumen de dichas características.

## DOMINIOS INFINITOS

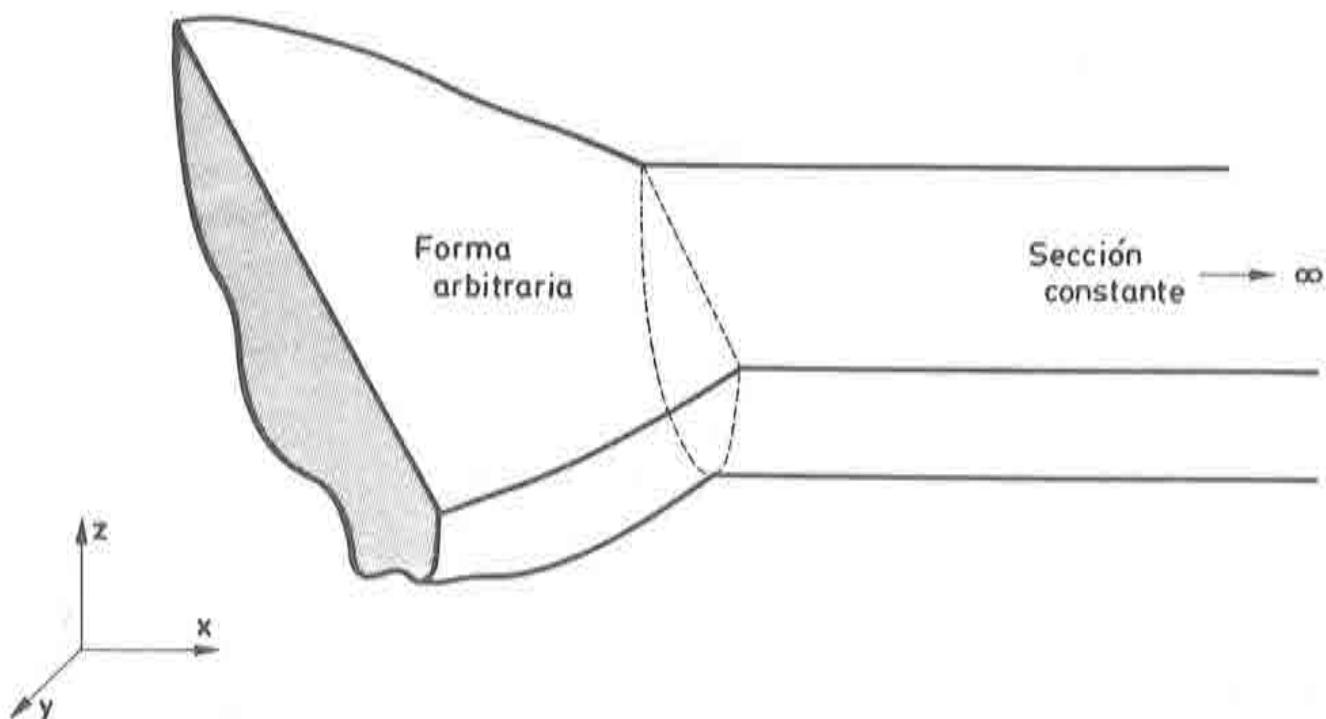


Fig. 6.11. Dominio de fluido infinito.

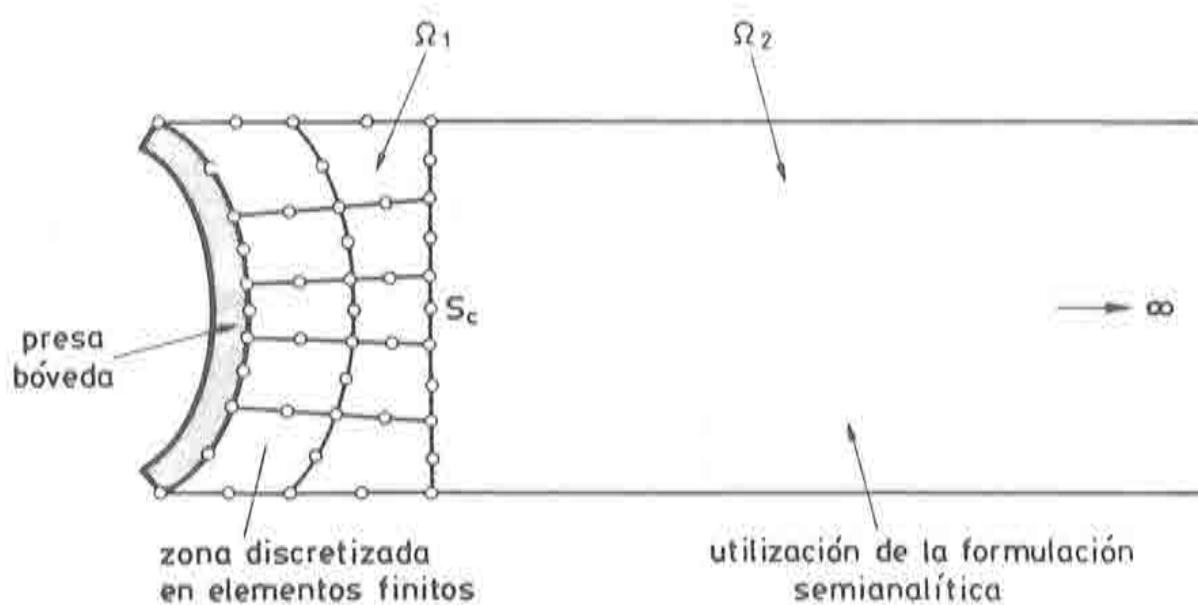


Fig. 6.12. Planta de la interacción presa - embalse.

Supóngase para fijar ideas que se trata de resolver un problema de

interacción presa bóveda-embalse. En la figura 6.12 puede verse representada la planta de tal problema. La idea del método es dividir el recinto  $\Omega$ , en suma de dos: Un subdominio  $\Omega_1$ , cercano a la presa el cual se discretiza mediante elementos finitos, y un dominio  $\Omega_2$  que se extiende hacia el infinito, y en el cual se busca una solución del tipo semianalítico.

Considérese por tanto el dominio  $\Omega_2$  y sea  $S_c$  la superficie plana mediante la cual se separan los dominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  (figura 6.13). La

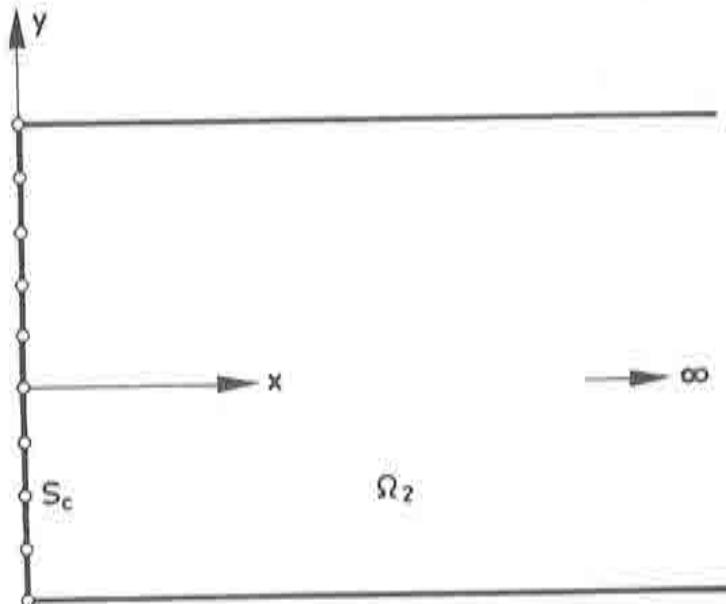


Fig. 6.13 Zona de fluido modelado mediante la formulación semianalítica.

solución de la ecuación (4.10) puede expresarse como

$$\bar{P}(x, y, z) = \bar{P}_2(y, z) \exp(-kx) \quad (6.43)$$

Sustituyendo (6.43) en (4.10) se obtiene

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{P}_2}{\partial z^2} + \lambda^2 \bar{P}_2 = 0 \quad (6.44)$$

siendo  $\lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + k^2$

La ecuación (6.44) representa un problema de autovalores en la sección transversal  $S_c$ . Por otra parte los autovalores  $\lambda_j$  que se obtendrán resolviendo la ecuación (6.44) serán las autofrecuencias del fluido infinito divididas por  $c$ .

Para resolver (6.44) se procede a discretizar  $S_c$  mediante elementos finitos. Dichos elementos en los que se divide  $S_c$  constituirán lógicamente una de las caras de los elementos de  $\Omega_1$ , en contacto con  $\Omega_2$ . Escribiendo por tanto

$$\bar{P}_2 = \sum_{j=1}^n N_j P_{2j} \quad (6.45)$$

y aplicando a (6.44) el método de Galerkin de residuos ponderados

$$\int_{S_c} N_i \left[ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_j}{\partial z^2} \right) P_{2j} + \lambda^2 \sum_{j=1}^n N_j P_{2j} \right] dS_c = 0 \quad (6.46)$$

e integrando por partes, y procediendo de forma análoga a lo expuesto en el apartado (5.1), la ecuación (6.46) queda

$$(\lambda^2 \mathbf{G}^s + \mathbf{H}^s) \mathbf{P}_2 - \int_{\Gamma} \mathbf{N} \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial n} d\Gamma = \mathbf{0} \quad (6.47)$$

en donde los términos  $G_{ij}^s$  y  $H_{ij}^s$  de las matrices  $\mathbf{G}^s$  y  $\mathbf{H}^s$  valen

$$G_{ij}^s = \int_{S_c} N_i N_j dS_c \quad (6.48)$$

$$H_{ij}^s = \int_{S_c} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right\} dS_c \quad (6.49)$$

y siendo  $\Gamma$  el contorno de la superficie  $S_c$  de contacto con el terreno.

Si se considera que solamente se producen aceleraciones en la dirección  $x$  del valle, los términos de contorno de la integral (6.47) se anularán. Si por el contrario, se consideran las aceleraciones que el terreno transmite directamente al fluido normalmente a dicha dirección  $x$  los valores de  $\frac{\partial p_2}{\partial n}$  son conocidos y por tanto la integral de contorno se evalúa fácilmente. En cualquiera de los dos casos, puede resolverse el problema de autovalores

$$(\lambda^2 \mathbf{G}^s + \mathbf{H}^s) \mathbf{P}_2 = \mathbf{0} \quad (6.50)$$

con lo que  $\mathbf{P}_2$  puede escribirse

$$\mathbf{P}_2 = \sum_{j=1}^t \varphi_j \gamma_j \quad (6.51)$$

siendo  $\varphi_j$  los modos propios de vibración del fluido infinito, y  $t$  el número de autovalores considerados en el análisis.

En la expresión (6.51) los valores  $\gamma_j$  son desconocidos y se determinan en función de la naturaleza del problema.

El valor del vector de presiones  $\mathbf{P}$  en las líneas paralelas al eje  $x$  y que pasan por los puntos nodales, se obtiene combinando la expresión (6.51) con la (6.43), es decir

$$\mathbf{P} = \sum_{j=1}^t \varphi_j \gamma_j \exp(-k_j x) \quad (6.52)$$

siendo

$$k_j = \sqrt{\lambda_j^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (6.53)$$

Como puede observarse, el valor de  $k_j$  es real siempre que las frecuencias de excitación  $\omega$  sean inferiores al valor propio correspondiente a  $\lambda_j$ . En caso contrario serán imaginarias.

Considérese nuevamente el dominio  $\Omega_1$ . La ecuación matricial que rige el comportamiento de las presiones en su interior, es

$$(-\omega^2 \mathbf{G} + \mathbf{H}) \mathbf{P} + \int_{S_c} \mathbf{N} \frac{\partial P}{\partial n} dS_c = -S \tilde{\mathbf{a}}^t \quad (6.54)$$

siendo  $\tilde{\mathbf{a}}^t$  el vector que contiene las amplitudes de las aceleraciones que la presa transmite al fluido. La matriz  $\mathbf{G}$  es la matriz de masa de  $\Omega_1$  y  $\mathbf{H}$  su matriz de rigidez.

Para la resolución de la ecuación (6.54) es preciso evaluar previamente el valor de los términos de contorno, es decir

$$\int_{S_c} \mathbf{N} \frac{\partial P}{\partial n} dS_c \quad (6.55)$$

La expresión anterior, es una expresión vectorial, cada uno de cuyos términos vale

$$\int_{S_c} N_i \frac{\partial P}{\partial n} dS_c = \int_{S_c} N_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial x} P_j dS_c \quad (6.56)$$

en donde  $P_j$  es el valor de  $P$  dado por la expresión (6.52) en el punto  $x = 0$ , por lo que (6.56) se escribe

$$\int_{S_c} N_i \sum_{j=1}^n N_j \frac{\partial P_j}{\partial x} dS_c = \sum_{j=1}^n \left[ \int_{S_c} N_i N_j dS_c \right] \frac{\partial P_j}{\partial x} = G^s \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (6.57)$$

El término  $\frac{\partial P_j}{\partial x}$  de la ecuación (6.57) se obtendrá a partir de (6.52) derivando respecto a  $x$  y particularizando para  $x = 0$ , es decir

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sum_{j=1}^t (-k_j) \varphi_j \gamma_j = -\Psi K \gamma \quad (6.58)$$

siendo  $\Psi = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots]$  la matriz (no necesariamente cuadrada) que contiene los modos del fluido infinito,  $K$  es una matriz cuadrada diagonal que contiene los distintos valores  $k_j$ , y  $\gamma$  es un vector que contiene los factores de participación  $\gamma_j$ .

Sustituyendo (6.58) en (6.57) se obtiene finalmente

$$\int_{S_c} N \frac{\partial P}{\partial n} dS_c = -G^s \Psi K \gamma = -\vartheta \gamma \quad (6.58)$$

siendo la matriz  $\vartheta$

$$\vartheta = G^* \Psi K$$

Por otra parte, la ecuación (6.54) se puede escribir

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 G_{11} + H_{11} & -\omega^2 G_{12} + H_{12} \\ -\omega^2 G_{21} + H_{21} & -\omega^2 G_{22} + H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \int_{S_c} N \frac{\partial p}{\partial n} dS_c \end{bmatrix} = -S \ddot{\mathbf{a}}^t \quad (6.59)$$

siendo  $P_2$  el valor de la presión en los nodos de  $\Omega_1$  pertenecientes también a  $S_c$  (y por tanto también a  $\Omega_2$ ) y  $P_1$  el valor de la presión en los nodos restantes.

Sustituyendo en (6.59) el valor de  $\int_{S_c} N \frac{\partial p}{\partial n} dS_c$  dado por (6.58) y el valor de  $P_2$  por el dado en (6.52) particularizado para  $x = 0$  (expresión (6.51)) se obtiene

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 G_{11} + H_{11} & (-\omega^2 G_{12} + H_{12})\Psi \\ -\omega^2 G_{21} + H_{21} & (-\omega^2 G_{22} + H_{22})\Psi + \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ \gamma \end{bmatrix} = S \ddot{\mathbf{a}}^t \quad (6.60)$$

Premultiplicando la segunda fila de (6.60) por  $\Psi^t$  y teniendo en cuenta que el término independiente correspondiente a dicha fila es un vector nulo por no estar los nodos 2 en contacto con la estructura, la expresión (6.60) queda

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 G_{11} + H_{11} & (-\omega^2 G_{12} + H_{12})\Psi \\ \Psi^t(-\omega^2 G_{21} + H_{21}) & \Psi^t(-\omega^2 G_{22} + H_{22})\Psi + \Psi^t \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ \gamma \end{bmatrix} = -S \ddot{\mathbf{a}}^t \quad (6.61)$$

en donde  $\Psi^t(-\omega^2 G_{22} + H_{22})\Psi + \Psi^t \vartheta$  es una matriz diagonal.

## DOMINIOS INFINITOS

Si se conoce la excitación  $\ddot{a}^t$  que la estructura transmite al fluido resolviendo el sistema de ecuaciones (6.61) se obtienen las presiones en cualquier punto. Si la estructura es infinitamente rígida, los valores de  $\ddot{a}^t$  son conocidos. Sin embargo si la presa es flexible, el valor de dichas aceleraciones se desconoce y constituye de hecho uno de los resultados del problema, tal como se verá en la tercera parte del presente trabajo.

## CAPITULO 7

### DOMINIO FLUIDO FINITO: ESTUDIO PARAMETRICO

#### 7.1. INTRODUCCION

El objeto del presente capítulo es desarrollar un estudio paramétrico de los distintos aspectos vistos con anterioridad para el caso de fluido finito. Algunas de las conclusiones obtenidas serán también aplicables al caso de dominios de fluido infinitos. Se estudia la importancia de las ondas superficiales en la ley de presiones y en el coeficiente de amplificación dinámica, el efecto del amortiguamiento del fluido con el terreno, asociado a la absorción de parte de las ondas de presión por éste último, el efecto de la compresibilidad del fluido, así como la problemática asociada a los autovalores.

Se exponen en primer lugar los métodos de resolución de las ecuaciones dinámicas del fluido, y a continuación los desarrollos paramétricos.

#### 7.2. RESOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

El problema planteado, consiste en el estudio de las presiones que se producen en un dominio fluido finito, cuando una pared rígida en

contacto con éste, lo excita mediante una aceleración de tipo armónico. La ecuación matricial a resolver será por tanto

$$[-\omega^2 (G + G_0) + i\omega C_f + H] P = -S \ddot{a}^t \quad (7.1)$$

en donde como se recordará  $G$  es la matriz de masa del fluido,  $G_0$  la matriz que representa la inclusión de ondas superficiales,  $C_f$  la matriz de amortiguamiento fluido-terreno y  $H$  es la rigidez. El vector  $P$  es el vector de incógnitas nodales (presiones),  $S$  es la matriz de interacción,  $\ddot{a}^t$  la amplitud de las aceleraciones de excitación y  $\omega$  la frecuencia de dicha excitación.

Si se desprecia el efecto de las ondas superficiales,  $G_0$  será cero, así como también se anulará  $C_f$  si no se tiene en cuenta la interacción fluido-terreno.

Existe un caso particular muy interesante, en el cual se desprecian las ondas de superficie y la compresibilidad del fluido. En este caso, la amplitud de la presión es real e independiente de la frecuencia de excitación

$$H P = -S \ddot{a}^t \quad (7.2)$$

Despejando  $P$

$$P = -H^{-1} S \ddot{a}^t \quad (7.3)$$

Por lo que en este caso la presión puede obtenerse de forma explícita aplicando la expresión (7.3). Dicha expresión presenta como principal (y casi única) ventaja la sencillez y facilidad de obtención de las presiones. Incluso cuando se plantea el problema de la interacción, éste se simplifica

considerablemente. Sin embargo, tal como se verá más adelante, los resultados que se obtienen son francamente insatisfactorios.

Para el caso en que  $G_0 = C_f = \mathbf{0}$  la ecuación (7.1) se transforma en

$$(-\omega^2 G + H) P = -S \ddot{\mathbf{a}}^t \quad (7.4)$$

En este caso, la presión  $P$  depende de la frecuencia, siendo su distribución función de dicha frecuencia de excitación. Además, si el término  $\ddot{\mathbf{a}}^t$  es real también lo será  $P$ , es decir que la presión y la excitación estarán en fase.

La ecuación (7.4) puede resolverse directamente para cada valor de  $\omega$  realizando la inversión matricial

$$P = -(-\omega^2 G + H)^{-1} S \ddot{\mathbf{a}}^t \quad (7.5)$$

Dicha inversión tiene el inconveniente de que es preciso realizarla para cada uno de los valores  $\omega$  de excitación.

Otra forma de solucionar (7.4) es realizando la descomposición modal para el fluido.

$$(-\omega_j^2 G + H) \varphi_j = \mathbf{0} \quad (7.6)$$

en donde  $\varphi_j$  son los modos propios de vibración y  $\omega_j$  las autofrecuencias. Como es sabido, los pares de autovalores verifican las condiciones de ortogonalidad

$$\begin{aligned}\varphi_i^t G \varphi_j &= \delta_{ij} \\ \varphi_i^t H \varphi_j &= \delta_{ij} \omega_j^2\end{aligned}\tag{7.7}$$

Si se consideran  $k$  pares de autovalores, la presión  $P$  puede escribirse como

$$P = \sum_{j=1}^k \varphi_j \gamma_j \tag{7.8}$$

en donde las funciones  $\gamma_j$  dependen de la frecuencia de excitación.

Realizando la descomposición modal en (7.4) utilizando (7.7) y (7.8) se obtiene

$$\gamma_j = \frac{-\varphi_j^t S \ddot{a}^t}{-\omega^2 + \omega_j^2} \quad (j = 1, \dots, k) \tag{7.9}$$

Utilizando este método es preciso calcular los vectores propios (en general no todos) del dominio fluido. Dichos vectores propios al no ser dependientes de la frecuencia, es suficiente con calcularlos una sola vez para todo el problema.

Nótese que de acuerdo con (7.9) al acercarse la frecuencia de excitación a una de las frecuencias propias, la presión tiende hacia infinito, cosa lógica al no existir término amortiguador.

Cuando se introduce en (7.4) el término  $G_0$  correspondiente a las ondas superficiales el esquema de resolución es el mismo que el comentado hasta ahora. Sin embargo desde el punto de vista numérico pueden

presentarse dificultades. Recuerdese que un término cualquiera de la nueva matriz de masa valdrá

$$G_{ij} = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \frac{1}{g} \int_{SL} N_i N_j dS_L \quad (7.10)$$

Como orden de magnitud, en los grados de libertad asociados a la superficie libre del fluido, su valor es del orden de  $10^4$  a  $10^5$  veces el valor asociado a los grados de libertad interiores (para el caso del agua  $c = 1438.6 \text{ m/s}$ ). Ello mal condiciona la matriz de masa pudiendo dar lugar a dificultades de tipo numérico. Concretamente en el presente estudio, dichas dificultades se han presentado al hallar las autofrecuencias y modos propios, pero no al resolver directamente el sistema de ecuaciones (7.5).

Cuando se tiene en cuenta la interacción del fluido con el terreno, el sistema matricial a resolver es el (7.1). Obsérvese no obstante que la matriz  $C_f$  no es proporcional, por lo que su resolución mediante técnicas de descomposición modal estándar, no puede llevarse a cabo. Habrá que ir por tanto a la resolución directa del sistema de ecuaciones. Por otra parte, el vector  $P$  será complejo aún en el caso de que la amplitud de la excitación sea real, al existir el término amortiguador. La respuesta y la excitación no estarán por tanto en fase.

### 7.3. RECINTO FINITO DE FLUIDO

Considérese la figura 7.1 correspondiente al dominio fluido finito analizado. El plano  $a - b$  de anchura unidad corresponde a la pared en contacto con una estructura infinitamente rígida, que transmite al fluido una excitación armónica. El plano  $b - c$  corresponde al terreno, el cual se supondrá bien completamente reflectante, bien parcialmente absorbente. El fluido corresponde al agua, con una densidad de  $1000 \text{ Kg/m}^3$  y una velocidad de transmisión de onda de valor  $c = 1438.6 \text{ m/s}$ .

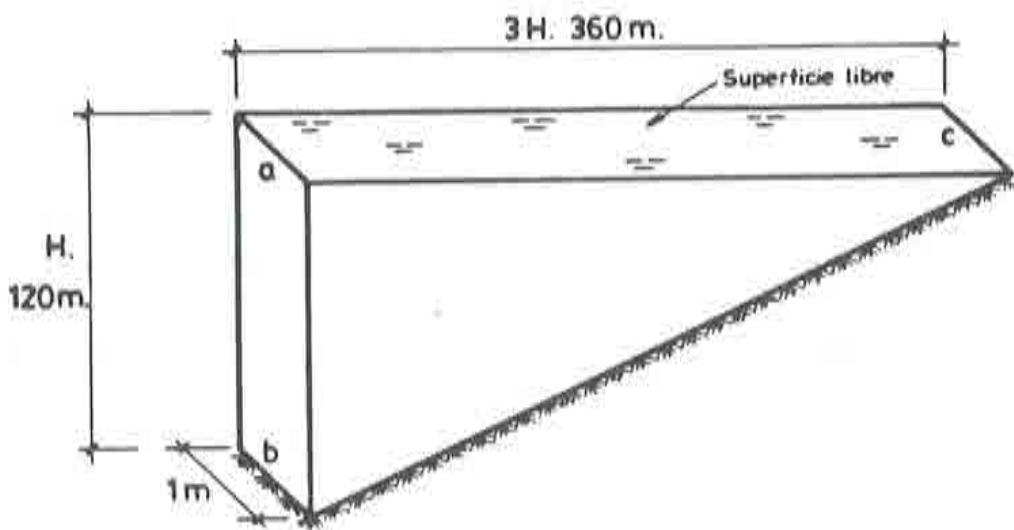


Fig. 7.1. Dominio de fluido finito analizado.

La discretización realizada del anterior recinto, puede observarse en la figura 7.2. Los parámetros de la discretización son los siguientes:

- Número de nodos= 387
- Número de elementos= 42
- Número de nodos en la superficie libre= 63
- Número de elementos en la superficie libre= 12

Los resultados que se presentan a continuación son de dos tipos: Por una parte las leyes de presiones que actúan sobre la estructura rígida  $a-b$  y por otra parte el coeficiente amplificador.

Por lo que respecta a las leyes de presiones, éstas en general serán complejas por lo que podrá representarse la parte real, la parte imaginaria

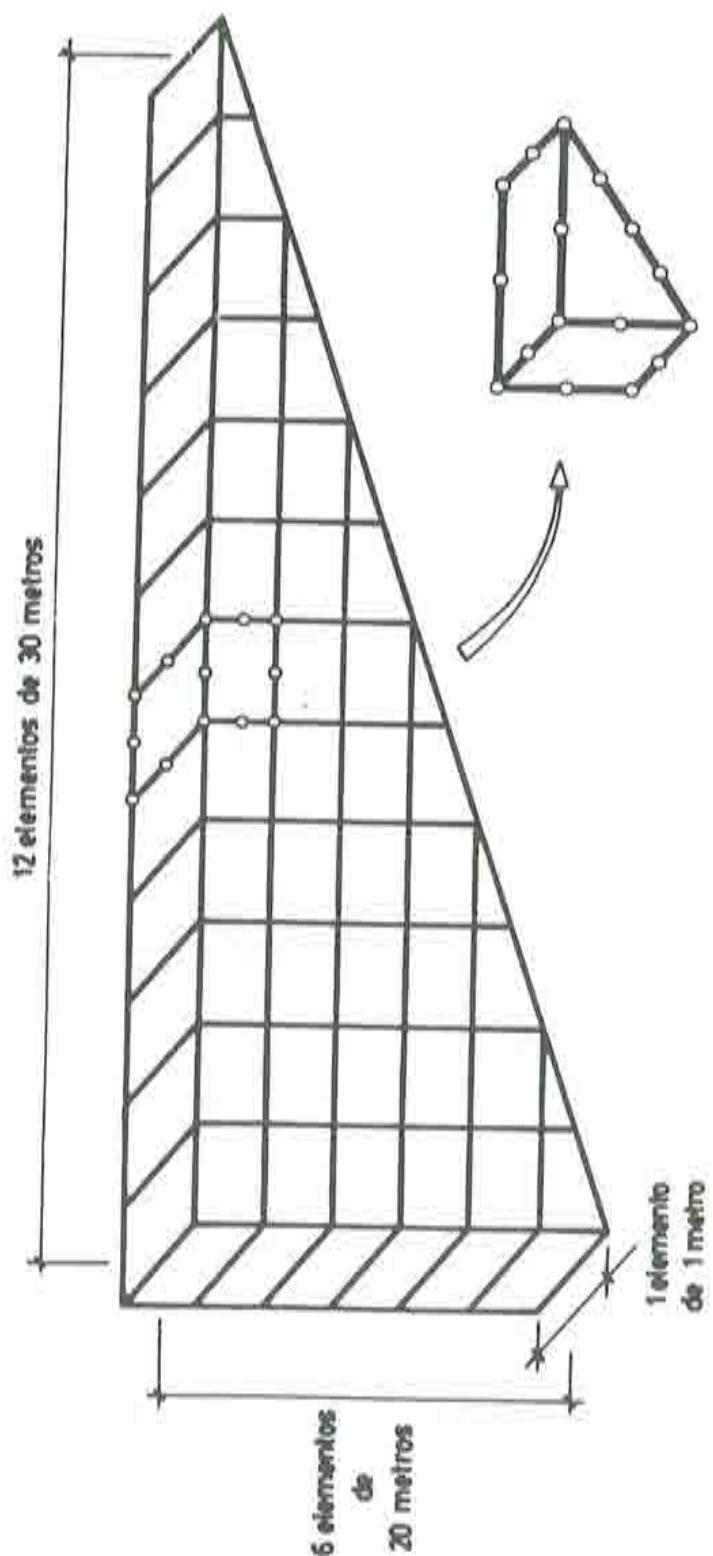


Fig. 7.2. Discretización del dominio finito de fluido.

así como el módulo. Todo ello para determinados valores de la frecuencia de excitación.

En cuanto al coeficiente amplificador, éste se define como la fuerza resultante sobre la pared  $a - b$  dividida por la fuerza debida a la presión hidrostática. Para ello, y dado que en general las presiones dinámicas serán complejas, se integra la parte real de las presiones a lo largo de  $a - b$ , así como la parte imaginaria. Se dividen ambas resultantes por la fuerza hidrostática, obteniéndose dos coeficientes amplificadores: uno correspondiente a la parte real y otro a la imaginaria. El coeficiente de amplificación total se obtendrá realizando la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los coeficientes amplificadores real e imaginario. En las gráficas correspondientes a dicho coeficiente de amplificación total, éste se representa en ordenadas, mientras que en abcisas se colocan las distintas frecuencias  $\omega$  de excitación.

### 7.3.1. Resolución directa del sistema de ecuaciones

En todo el desarrollo que sigue se ha considerado una amplitud de la excitación igual a la unidad, barriendo un amplio espectro de frecuencias.

En la figura 7.3 puede verse una gráfica que representa en módulo el coeficiente de amplificación en función de la frecuencia para el caso de reflexión total con el terreno. Por este motivo se tiene únicamente parte real. Como puede observarse para unas determinadas frecuencias (frecuencias propias del dominio fluido), los valores de las ordenadas tienden hacia infinito como era de esperar. En la figura 7.4 puede observarse el mismo resultado, pero representado ahora con su verdadero signo. Por otra parte, en las figuras 7.5, 7.6 y 7.7 puede verse la distribución de presiones sobre la pared rígida para frecuencias de excitación de 10  $rdn/s$ , 30  $rdn/s$  y 45  $rdn/s$  respectivamente.

Para el caso en que sí se considere la interacción con el terreno, en la figura 7.8 puede observarse el coeficiente de amplificación para el 65% de reflexión de la onda. Como puede observarse ahora sí aparece parte imaginaria. Además, dicho coeficiente permanece acotado en el

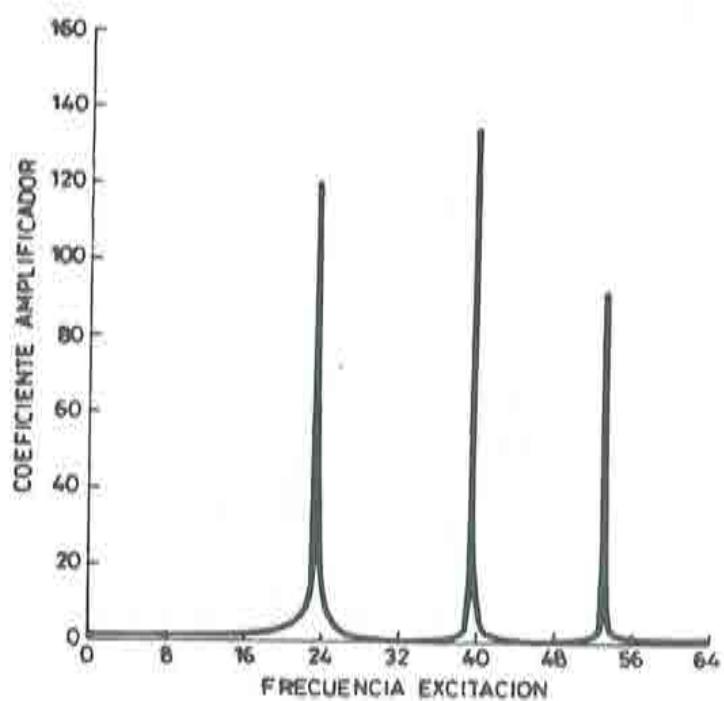


Fig. 7.3. Módulo del coeficiente de amplificación. Reflexión total.

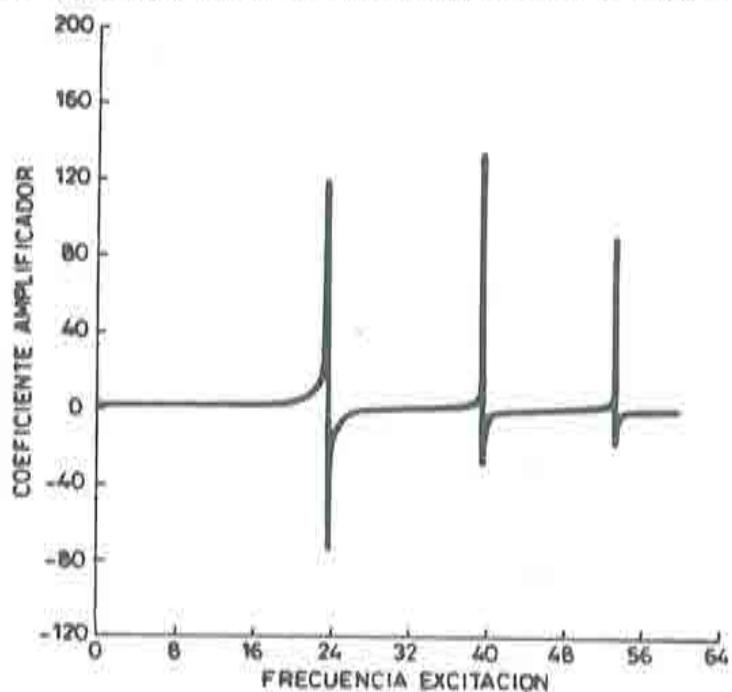


Fig. 7.4. Coeficiente de amplificación. Reflexión total.

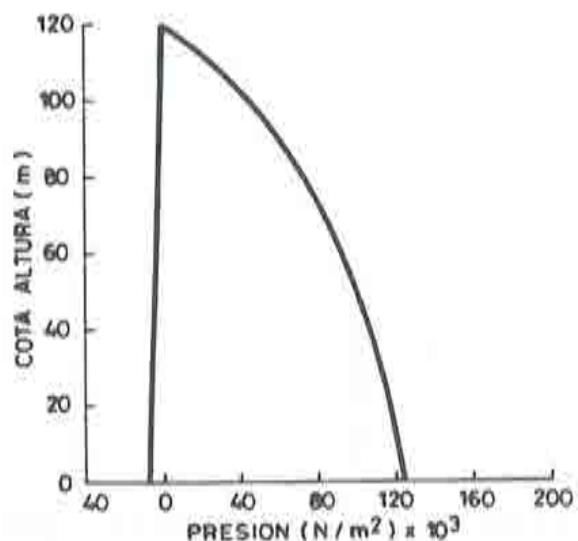


Fig. 7.5. Distribución de presiones para una frecuencia de excitación de 10 rad/s.

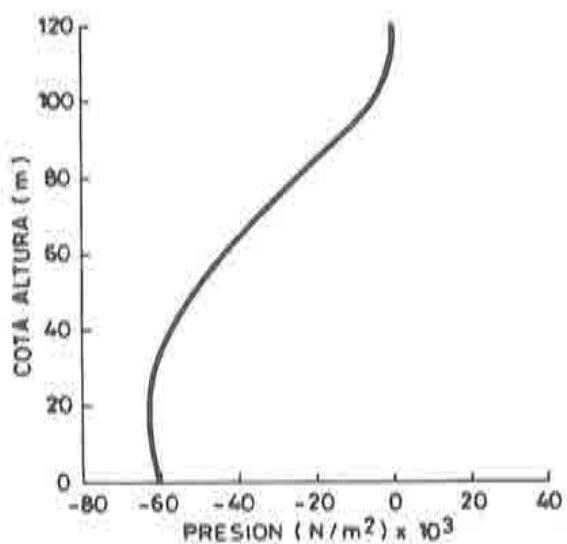


Fig. 7.6. Distribución de presiones para una frecuencia de excitación de 30 rad/s.

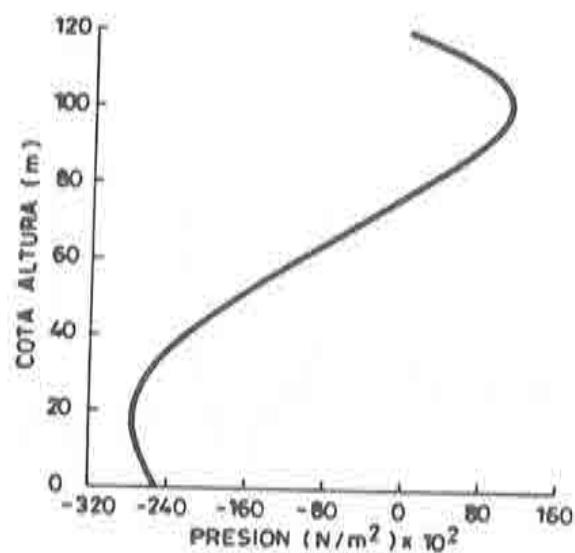


Fig. 7.7. Distribución de presiones para una frecuencia de excitación de 45 rad/s.

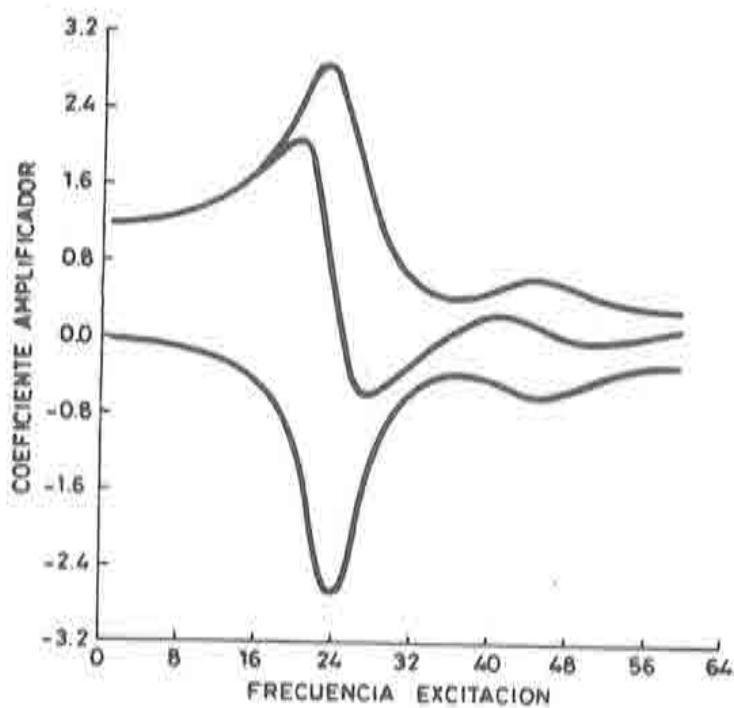


Fig. 7.8. Coeficiente de amplificación para un 65% de reflexión de onda.

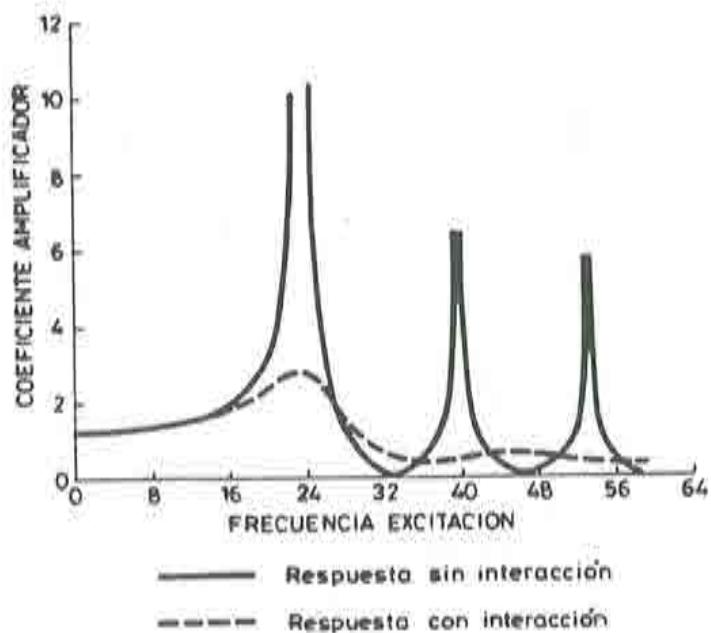


Fig. 7.9. Comparación entre reflexión total y el 65% de reflexión de onda.

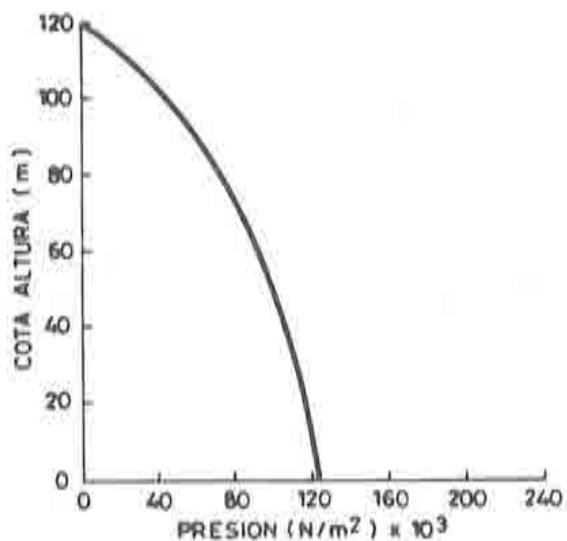


Fig. 7.10. Distribución de presiones para una frecuencia de excitación de 10 rad/s. (65% de reflexión).

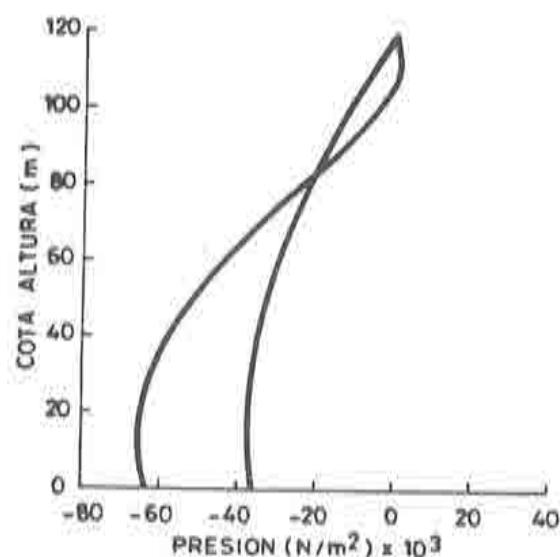


Fig. 7.11. Distribución de presiones para una frecuencia de excitación de 30 rad/s. (65% de reflexión).

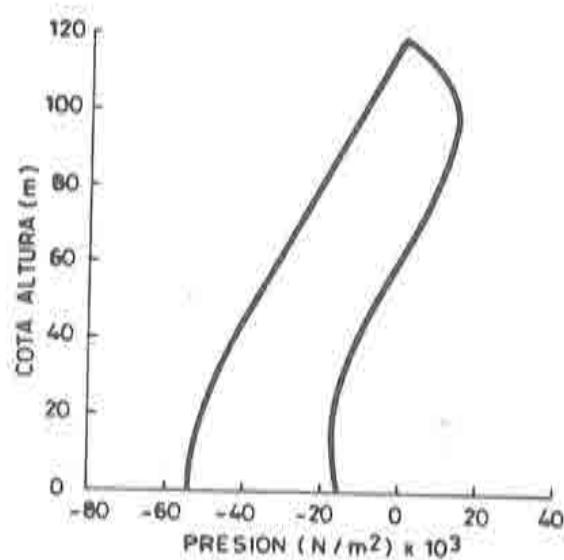


Fig. 7.12. Distribución de presiones para una frecuencia de excitación de 45 rad/s. (65% de reflexión).

entorno de las autofrecuencias, como consecuencia del amortiguamiento introducido. La figura 7.9, corrobora los resultados anteriores. En ella, se comparan los resultados obtenidos con reflexión total y con un 65% de reflexión de la onda de presión incidente en el terreno. Por otra parte, en las figuras 7.10, 7.11 y 7.12 puede verse la distribución de presiones sobre la pared rígida para las frecuencias de excitación de 10  $rdn/s$ , 30  $rdn/s$  y 45  $rdn/s$  respectivamente, considerando este mismo porcentaje de reflexión con el terreno.

### 7.3.2. Resolución mediante descomposición modal

El mismo problema, ha sido resuelto utilizando la técnica de la descomposición modal. Las frecuencias propias obtenidas, pueden verse en la tabla 7.1, comparadas con las proporcionadas en la referencia [25].

Tabla 7.1

Autofrecuencias del fluido finito		
Modo	Frecuencia obtenida	Frecuencia referencia [25]
1	23.57 $rdn/s$	23.30 $rdn/s$
2	39.67 $rdn/s$	39.50 $rdn/s$
3	53.22 $rdn/s$	52.70 $rdn/s$
4	63.89 $rdn/s$	64.00 $rdn/s$

Asimismo en las figuras 7.13, 7.14 y 7.15 puede verse el coeficiente de amplificación en función de la frecuencia para 5, 10 y 15 autovalores respectivamente del recinto finito de fluido.

### 7.3.3. Fluido incompresible

Para el caso en que el fluido se considera incompresible, la respuesta no es función de la frecuencia de excitación, por lo que debe presentar un valor constante. Ello ya proporciona por sí solo una idea del error cometido, vista la gran variación del coeficiente de amplificación y de la distribución de las presiones, con la frecuencia. En la figura 7.16, puede verse el resultado obtenido.

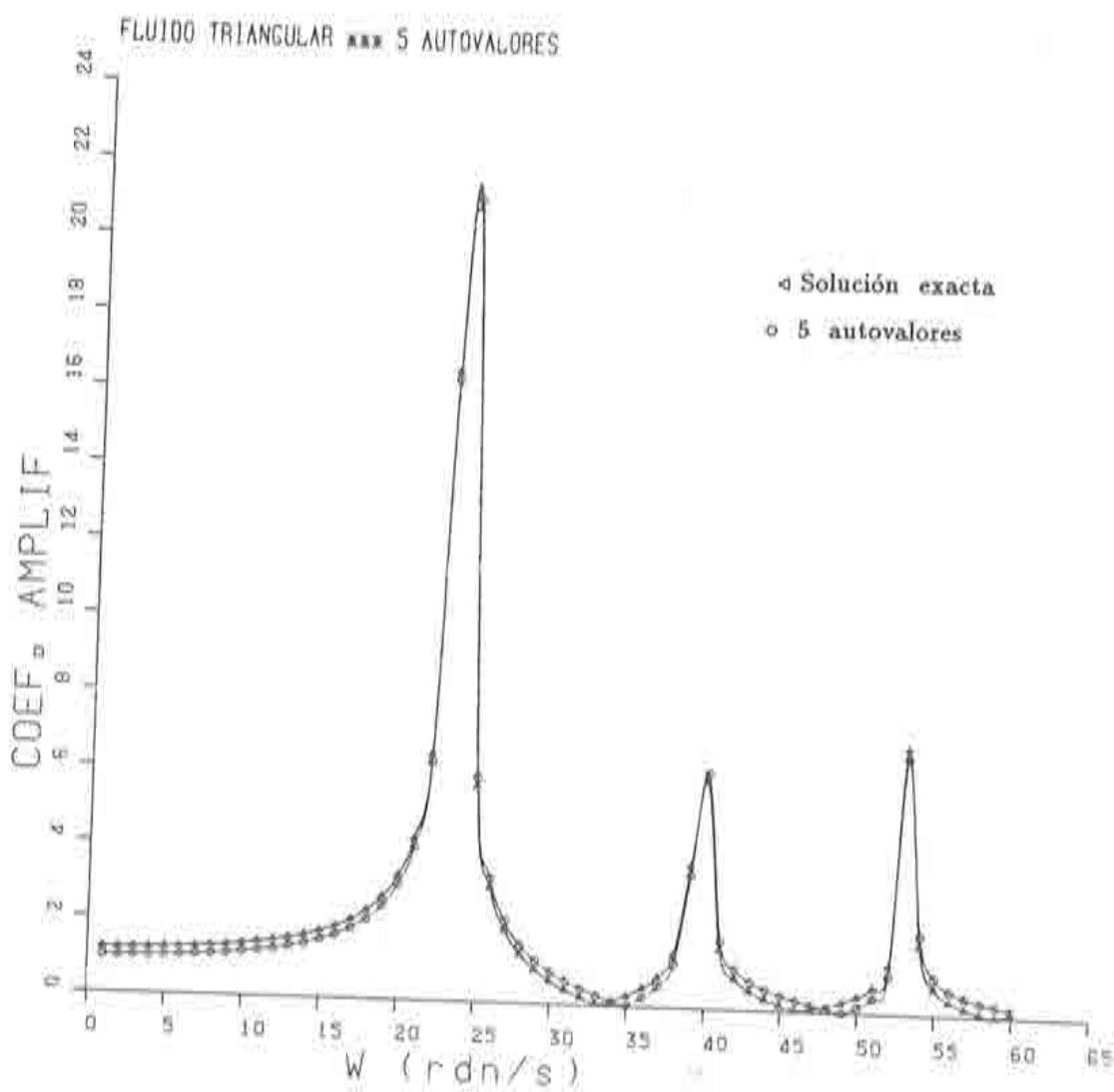


Fig. 7.13. Coeficiente de amplificación con 5 autovalores.

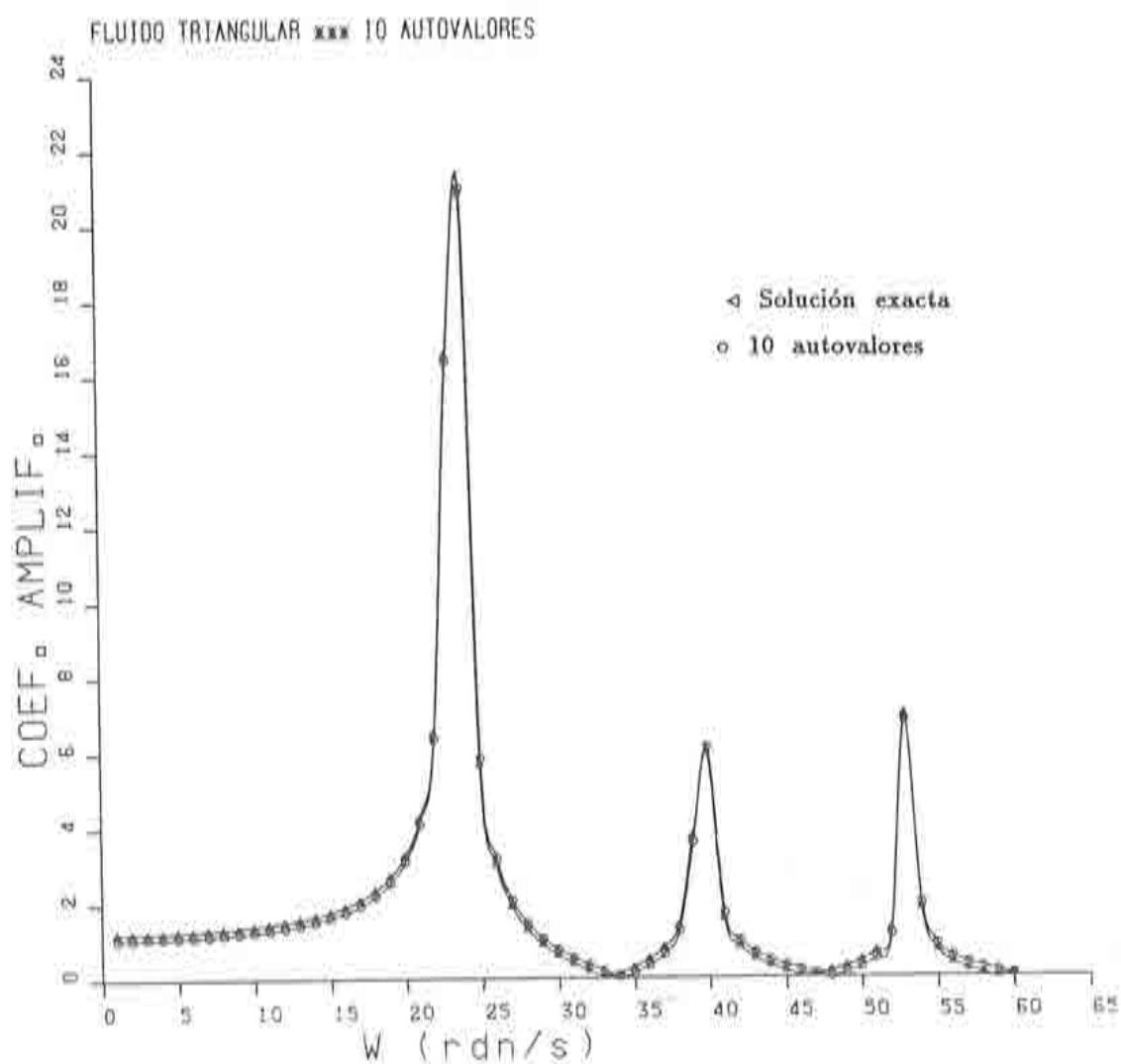


Fig. 7.14. Coeficiente de amplificación con 10 autovalores.

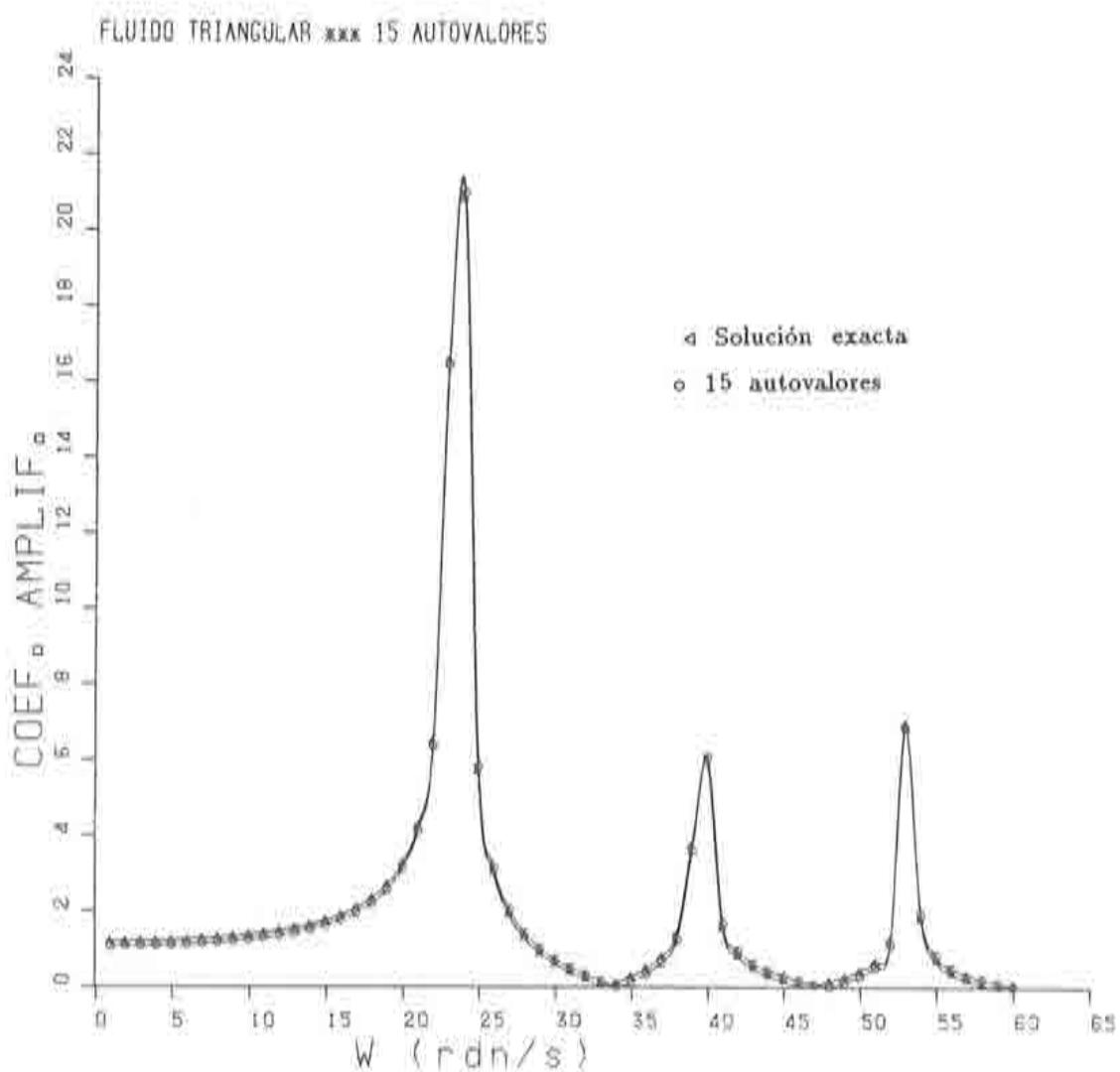


Fig. 7.15. Coeficiente de amplificación con 15 autovalores.

En el caso en que se considere la interacción con el terreno, la respuesta obtenida tampoco tiene ningún parecido con la obtenida para el caso compresible, como puede verse en la figura 7.17. Los coeficientes de amplificación, muestran ahora una cierta, aunque ligera, dependencia de la frecuencia de excitación, pero son diferentes a los obtenidos considerando el fluido compresible.

#### 7.3.4. Efecto de las ondas superficiales

El efecto de las ondas superficiales en el análisis, puede verse en la figura 7.18 y 7.19. Esta segunda figura realmente constituye una ampliación de la anterior para la zona de bajas frecuencias. Del análisis de ambas figuras se desprende que el efecto de las ondas superficiales es prácticamente nulo para frecuencias superiores a  $2 - 3 \text{ rdn/s}$ . Para la zona de bajas frecuencias su importancia es creciente hasta valores del orden de un 20% sobre el caso en que no se consideran. En general para presas, dichas frecuencias bajas quedan fuera de la zona de interés. Por otra parte, la inclusión de ondas superficiales en el análisis lleva consigo un notable incremento en el tiempo de cálculo, así como la posibilidad de mal condicionamiento de las matrices. Para el dominio analizado, juntamente con la discretización empleada, el tiempo de CPU necesario para la obtención de las gráficas anteriores fue el siguiente en un ordenador VAX 8600

- Sin considerar ondas superficiales: 17' 16.98".
- Considerando las ondas superficiales: 27' 12.15".

Por otra parte, en la figura 7.20 puede verse la distribución de presiones sobre la pared rígida teniendo en cuenta y prescindiendo de las ondas superficiales para una frecuencia de  $1 \text{ rdn/s}$ . Las diferencias entre una y otra curva no son grandes, aún estando en una zona de bajas frecuencias. Las máximas diferencias que aparecen son del orden del 15%. En la figura 7.21 puede observarse la misma distribución de presiones para una frecuencia de  $5 \text{ rdn/s}$ . Las diferencias prácticamente han desaparecido.

DOMINIO FLUIDO FINITO: ESTUDIO PARAMETRICO

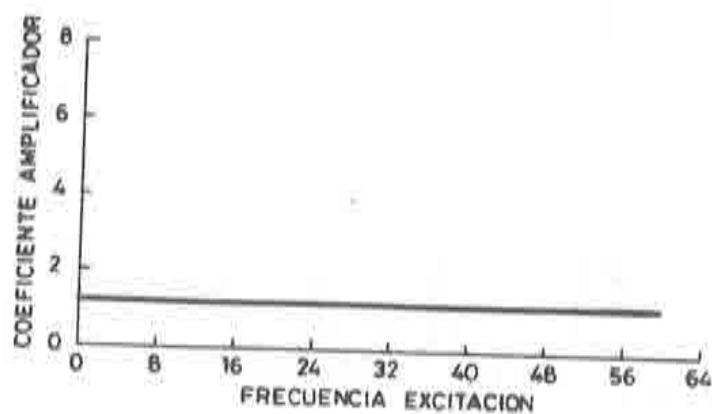


Fig. 7.16. *Fluido incompresible.*

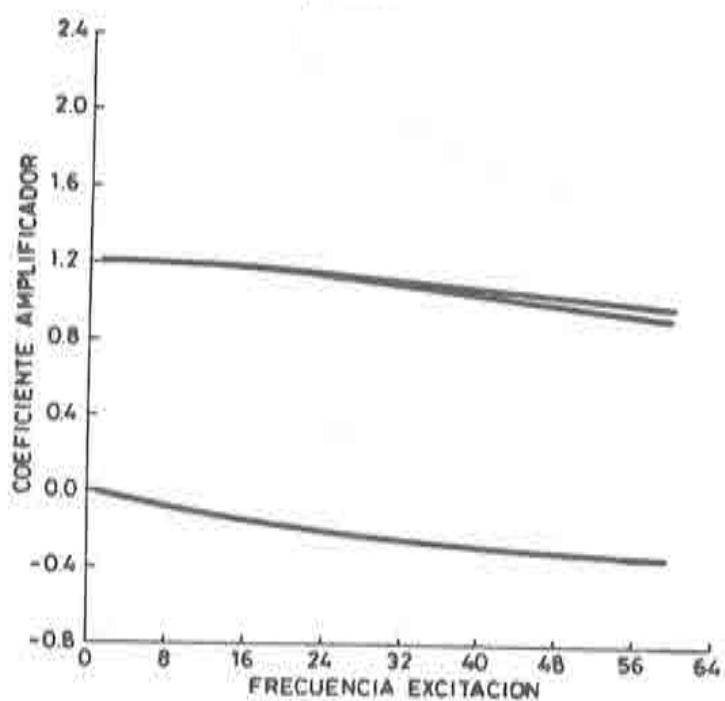


Fig. 7.17. *Fluido incompresible con interacción con el terreno.*

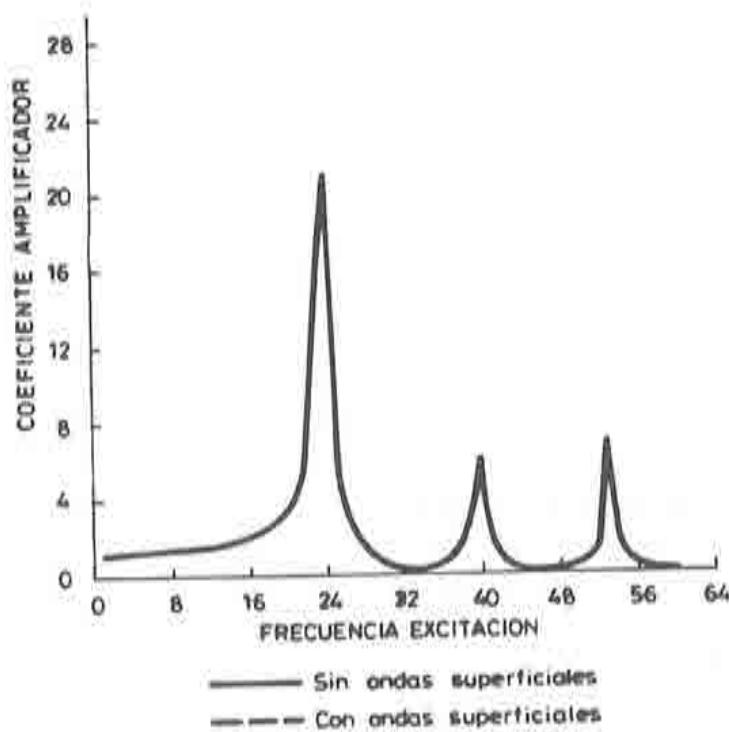


Fig. 7.18. Efecto de las ondas superficiales.

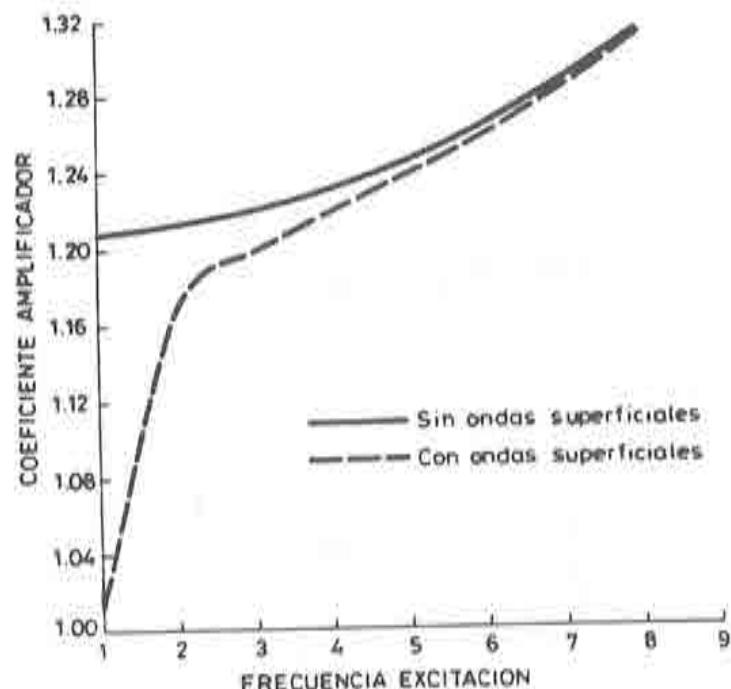


Fig. 7.19. Efecto de las ondas superficiales (bajas frecuencias).

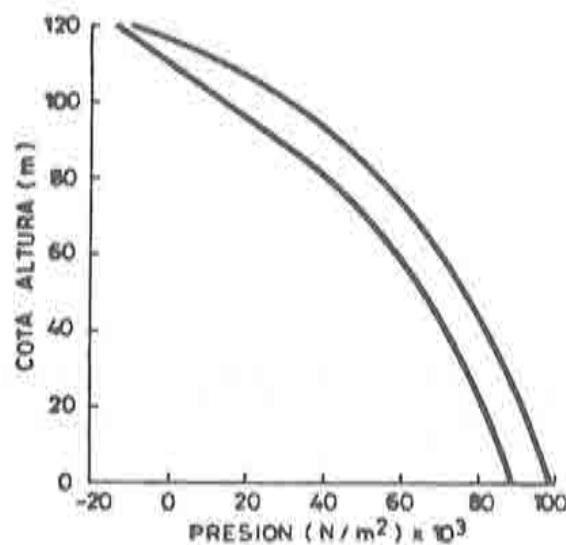


Fig. 7.20. Distribución de presiones con y sin ondas superficiales (1 rad/s).

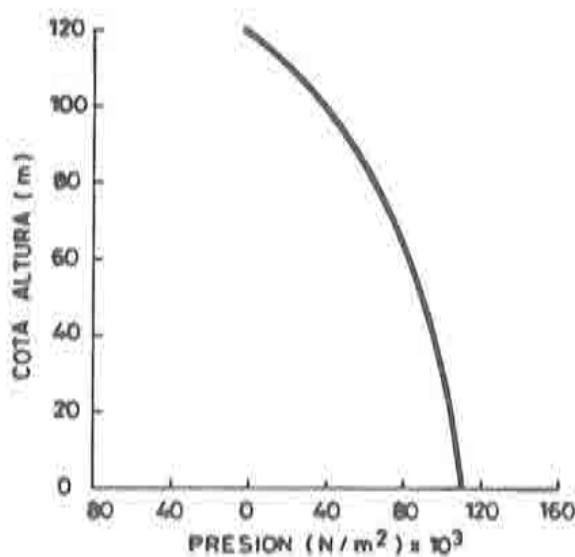


Fig. 7.21. Distribución de presiones con y sin ondas superficiales (5 rad/s).

## CAPITULO 8

### DOMINIO FLUIDO INFINITO: ESTUDIO PARAMETRICO

#### 8.1. INTRODUCCION

En este capítulo, se va a estudiar un dominio fluido infinito, analizándolo bien utilizando la condición de radiación en sus tres versiones expuestas en el capítulo 6, bien mediante la formulación semianalítica. Se compararán ambos procedimientos para el mismo dominio de fluido. Se estudia asimismo la importancia de la absorción de las ondas de presión por el terreno, así como la longitud necesaria a modelar mediante elementos finitos para la correcta aplicación de la condición de radiación.

#### 8.2. DOMINIO DE FLUIDO INFINITO

El recinto de fluido analizado, puede verse representado gráficamente en la figura 8.1. El plano vertical  $a-b$  representa una pared infinitamente rígida a través de la cual se excita al fluido. El plano  $b-d$  es el terreno de cimentación, el cual puede o no absorber parte de las ondas de presión generadas en el fluido. De acuerdo con las conclusiones alcanzadas en el capítulo anterior, se ha despreciado el efecto de las ondas superficiales,

y en el plano  $a - c$  o superficie libre, se ha supuesto presión nula.

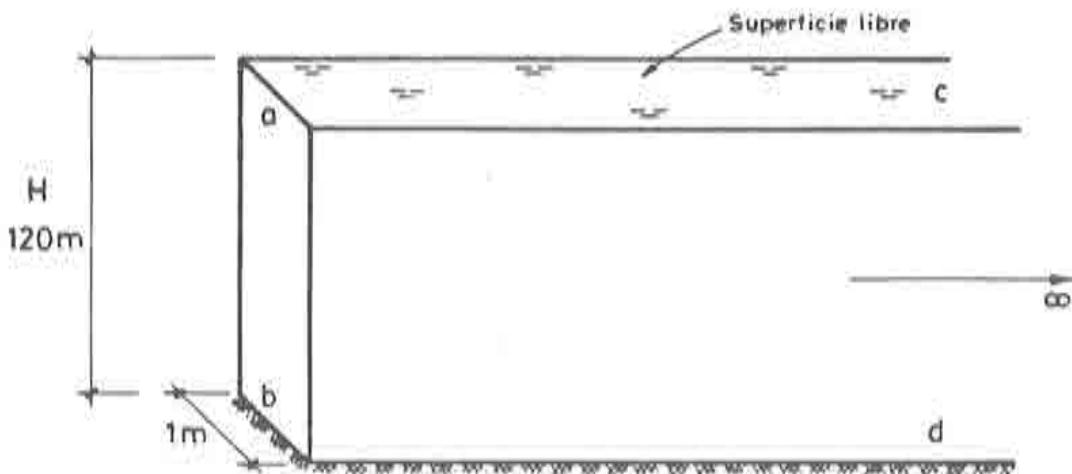


Fig. 8.1. Recinto de fluido infinito analizado

Las excitaciones transmitidas al fluido por el plano  $a - b$  son del tipo  $\ddot{a} = \exp(i\omega t)$  es decir, que la amplitud de la excitación es la unidad. Se está por tanto realizando un estudio del dominio fluido en el campo de la frecuencia.

Las autofrecuencias del fluido (figura 8.1) son [11]

$$\omega_n = \frac{2n - 1}{2} \frac{\pi c}{H} \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (8.1)$$

siendo  $c$  la velocidad de transmisión de la onda de presión en el agua ( $c = 1438.6 \text{ m/s}$ ), y  $H$  la altura de la pared rígida. Concretamente para  $H = 120 \text{ m}$

$$\omega_1 = 18.83 \text{ rdn/s}$$

$$\omega_2 = 56.49 \text{ rdn/s}$$

$$\omega_3 = 94.15 \text{ rdn/s}$$

### 8.2.1. Condición de radiación

Se van a estudiar en este apartado los distintos aspectos relacionados con la condición de radiación, desde el triple punto de vista expuesto en el capítulo 6. Para ello, lo primero a realizar es convertir el dominio infinito en un dominio finito cortándolo por un determinado plano, que en este caso es lógico que sea paralelo al de la excitación (figura 8.2).

La zona en contacto con la estructura (la cual tiene una altura de 120m), ha sido dividida en seis partes de 20 m de altura cada una de ellas.

En cuanto a la longitud  $L$  se han considerado divisiones de 40 m, formándose de esta manera elementos de dimensiones  $20 \times 40 \times 1 \text{ m}^3$ . En el plano  $c - d$  se impone la condición de radiación en su triple vertiente

$$a) \quad \frac{\partial \bar{P}}{\partial n} = \frac{i\omega}{c} \bar{P} \quad (8.2)$$

$$b) \quad \frac{\partial \bar{P}}{\partial n} = 0 \quad \text{para} \quad \omega < \omega_1 \quad (8.3)$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial n} = \frac{i\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2} \bar{P} \quad \text{para} \quad \omega > \omega_1$$

$$c) \quad \frac{\partial \bar{P}}{\partial n} = -\frac{\pi}{2H} \bar{P} + \frac{i\omega}{c} \bar{P} \quad (8.4)$$

La longitud del embalse  $L$  a discretizar mediante elementos finitos, se ha considerado como parámetro a estudiar. Se han analizado resultados

DOMINIO FLUIDO INFINITO: ESTUDIO PARAMETRICO

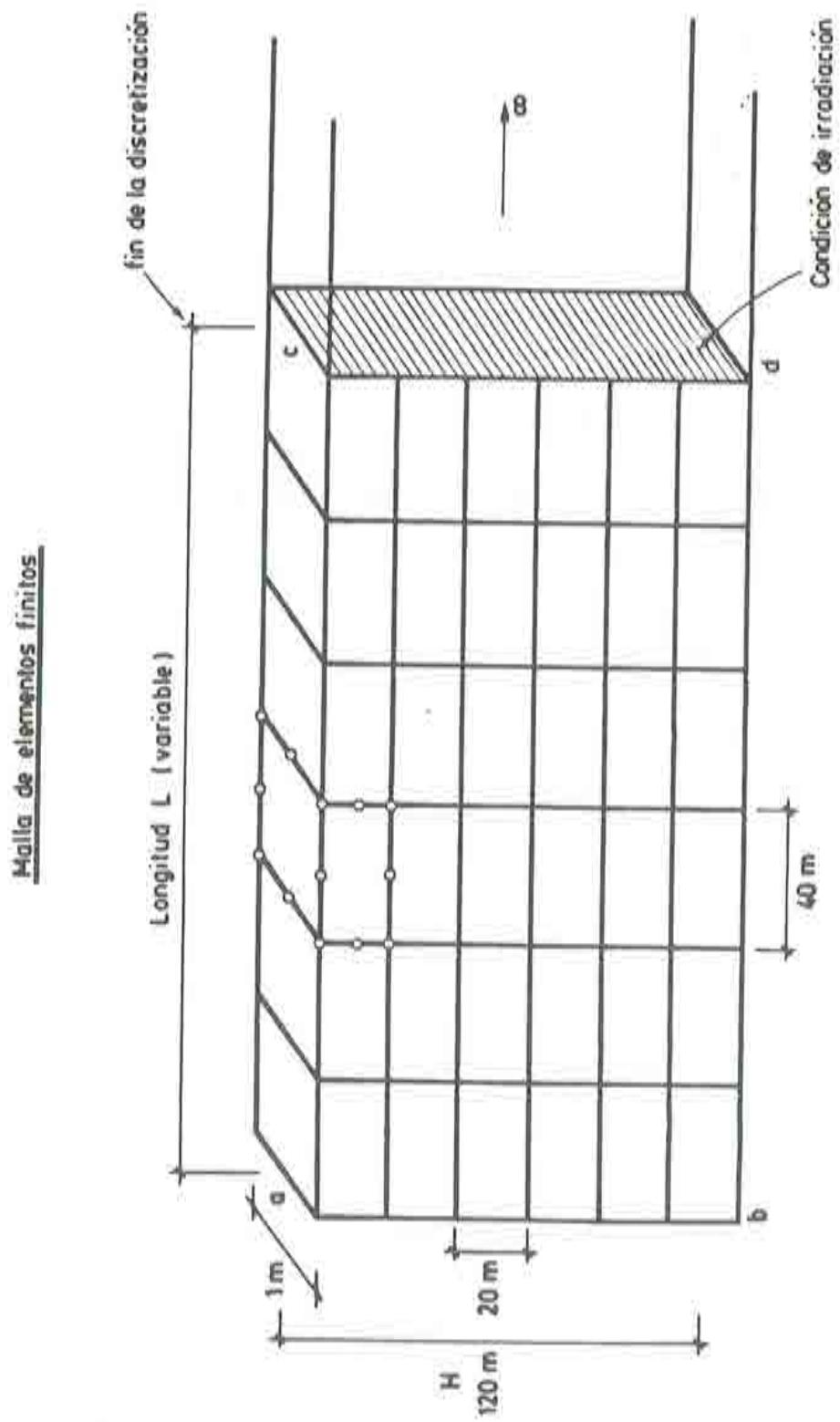


Fig. 8.2 Discretización del dominio infinito.

para  $L = 2H$ ,  $L = 3H$ ,  $L = 5H$  y  $L = 7H$ . En la tabla 8.1 pueden verse las características de cada una de las cuatro mallas utilizadas.

**Tabla 8.1**  
**MALLAS DE ELEMENTOS FINITOS USADAS**

a) $L = 2H$ (240 metros discretizados con elementos finitos)	
Número de nodos .....	315
Número de elementos .....	36
Número de nodos en la superficie libre.....	33
Número de elementos en la superficie libre.....	6
b) $L = 3H$ (360 metros discretizados con elementos finitos)	
Número de nodos .....	456
Número de elementos .....	54
Número de nodos en la superficie libre.....	48
Número de elementos en la superficie libre.....	9
c) $L = 5H$ (600 metros discretizados con elementos finitos)	
Número de nodos .....	738
Número de elementos .....	90
Número de nodos en la superficie libre.....	78
Número de elementos en la superficie libre.....	15
d) $L = 7H$ (840 metros discretizados con elementos finitos)	
Número de nodos .....	1020
Número de elementos .....	126
Número de nodos en la superficie libre .....	108
Número de elementos en la superficie libre.....	21

### 8.2.1.1 Comparación entre las tres condiciones de radiación

En las figuras 8.3, 8.4, 8.5 y 8.6 puede verse el valor del coeficiente de amplificación para 60 frecuencias, utilizando la condición de radiación (8.2) para las longitudes de embalse  $L = 2H$ ,  $L = 3H$ ,  $L = 5H$ ,  $L = 7H$  respectivamente, cuando no se considera el amortiguamiento con el terreno. Varios aspectos merecen ser destacados: En todos los casos se capta con nitidez la primera frecuencia de vibración, si bien para longitudes de embalse  $L$  iguales a  $2H$  o a  $3H$ , dicha primera frecuencia aparece con un valor mayor que el exacto. La segunda frecuencia también en general se capta aunque no de forma tan clara como la primera. En segundo lugar, puede observarse que en el entorno de la primera autofrecuencia para  $L = 2H$  y  $L = 3H$  es donde mayor distorsión se produce, con resultados con un cierto grado de error. Por el contrario, para longitudes mayores, aparecen oscilaciones espúreas en el entorno superior del primer valor propio, con resultados claramente distorsionados. Los mayores valores se producen por tanto en los entornos de las autofrecuencias. Puede concluirse por tanto que ninguno de los resultados proporcionados proporciona respuestas satisfactorias.

Por lo que respecta al uso de la condición de radiación (8.3), en las figuras 8.7 a 8.10 pueden verse los resultados obtenidos. A excepción de ligeras oscilaciones para  $L = 5H$ , los resultados son prácticamente idénticos a los exactos, sin aparecer los errores a que daba lugar el empleo de la condición (8.2).

Por lo que respecta a la condición de radiación (8.4), en la figura 8.11 pueden verse los resultados obtenidos para  $L = 3H$ , comparándolos con los proporcionados por (8.2). Como puede verse, los resultados son incluso peores, por lo que dicha condición se ha descartado de forma definitiva.

De todo lo apuntado hasta ahora, se desprende claramente la mayor exactitud de la expresión (8.3), que es la que se utilizará a partir de ahora. Por otra parte, la longitud del embalse a discretizar es del orden

DOMINIO FLUIDO INFINITO: ESTUDIO PARAMETRICO

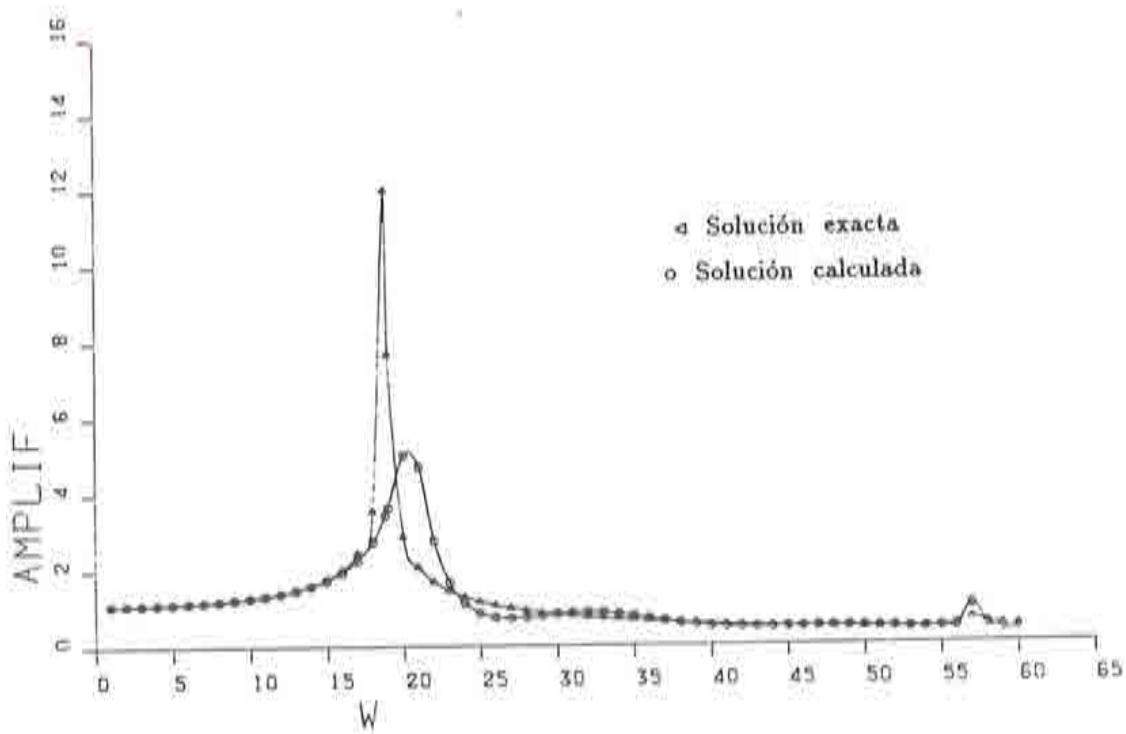


Fig. 8.3. Condición de radiación (8.2). Coeficiente de amplificación.  $L = 2H$ .

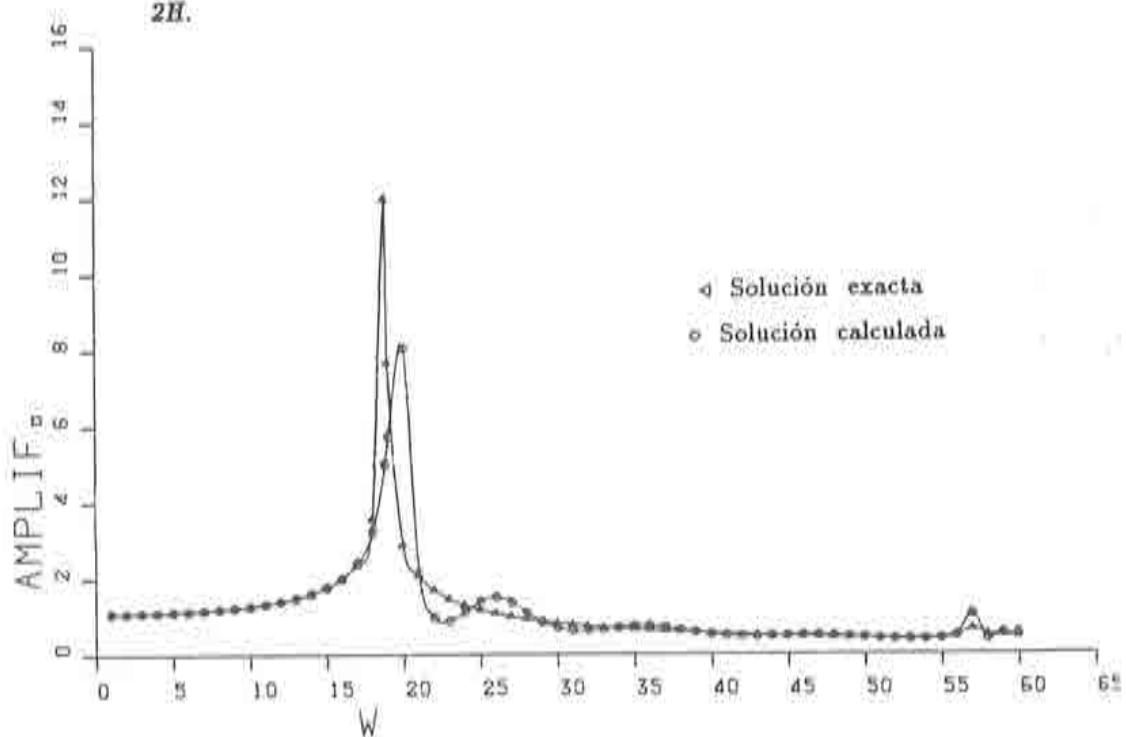


Fig. 8.4. Condición de radiación (8.2). Coeficiente de amplificación.  $L = 3H$ .

DOMINIO FLUIDO INFINITO: ESTUDIO PARAMETRICO

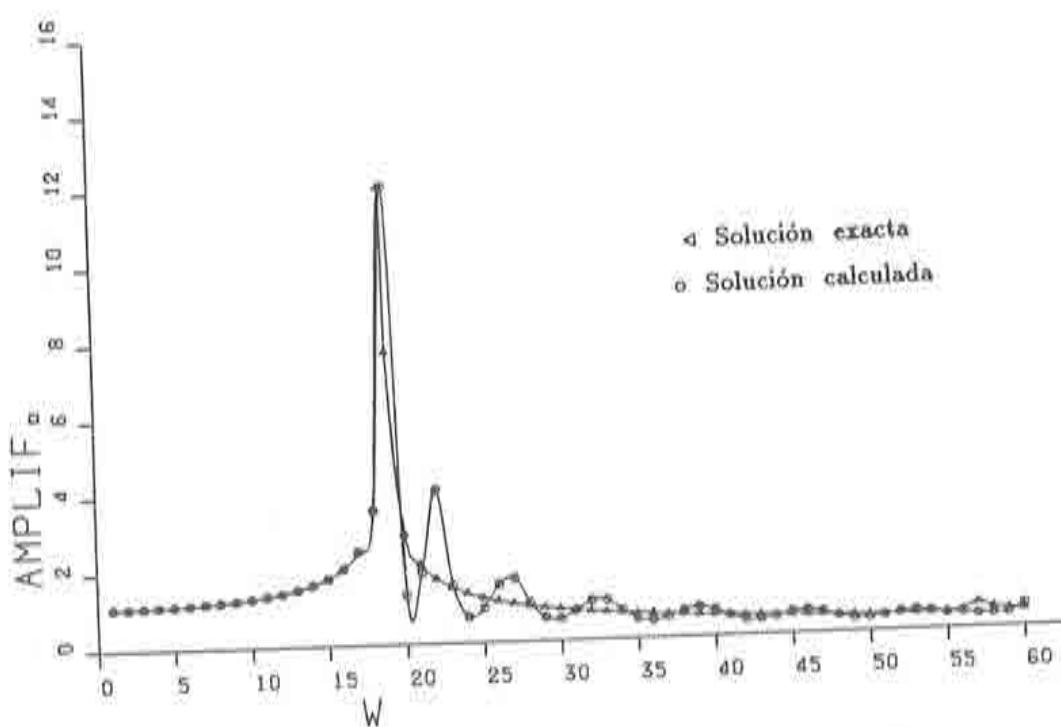


Fig. 8.5. Condición de radiación (8.2). Coeficiente de amplificación.  $L = 5H$ .

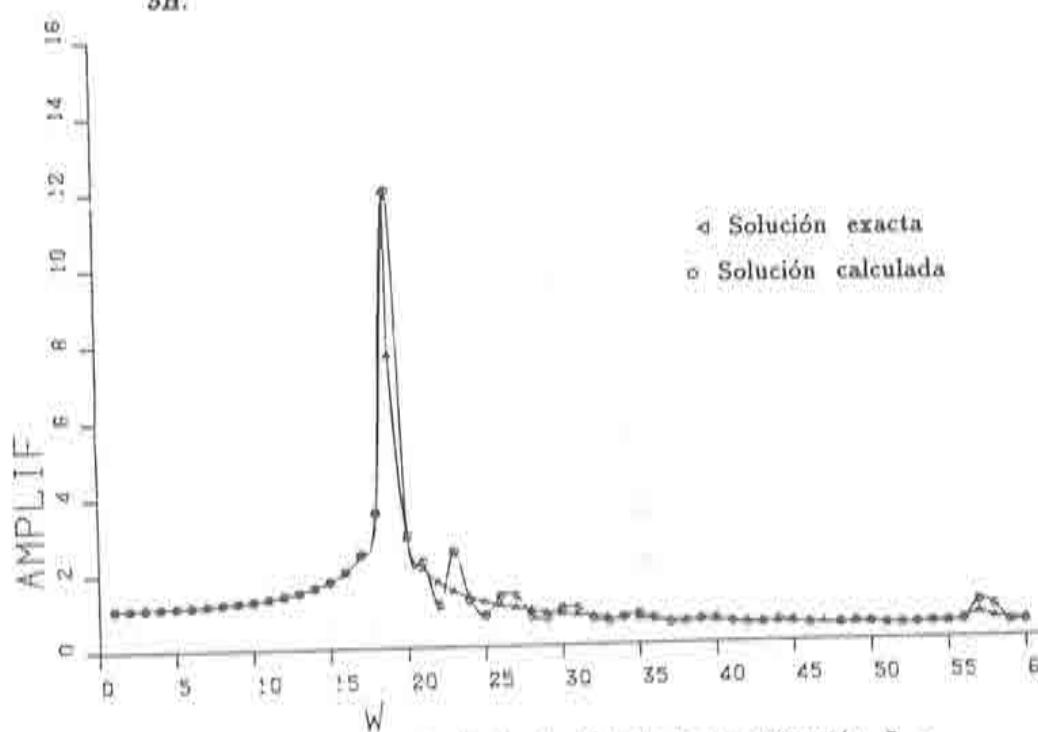


Fig. 8.6. Condición de radiación (8.2). Coeficiente de amplificación.  $L = 7H$ .

DOMINIO FLUIDO INFINITO: ESTUDIO PARAMETRICO

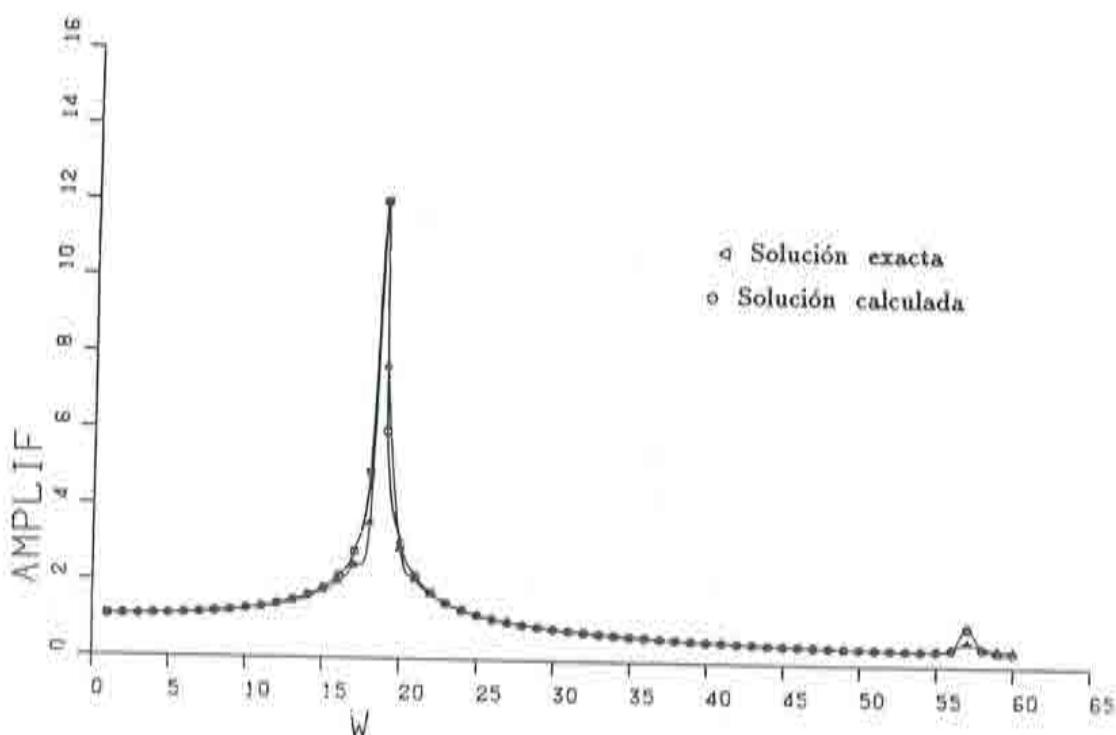


Fig. 8.7. Condición de radiación (8.3). Coeficiente de amplificación.  $L = 2H$ .

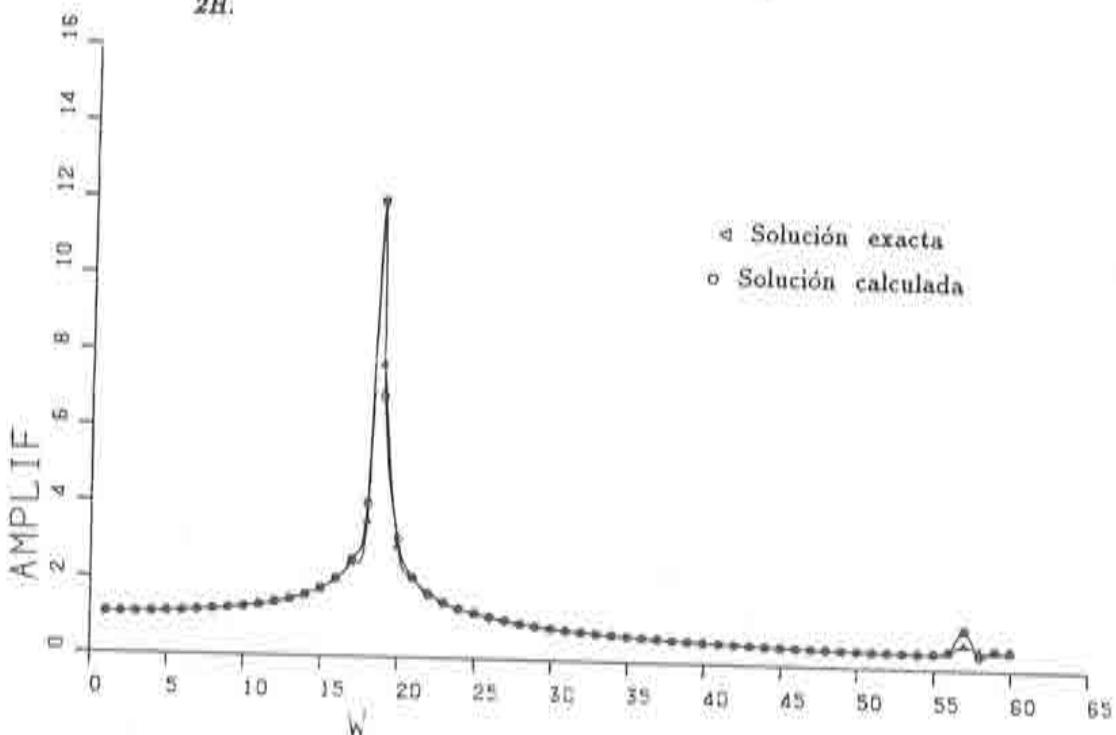


Fig. 8.8. Condición de radiación (8.3). Coeficiente de amplificación.  $L = 3H$ .

DOMINIO FLUIDO INFINITO: ESTUDIO PARAMETRICO

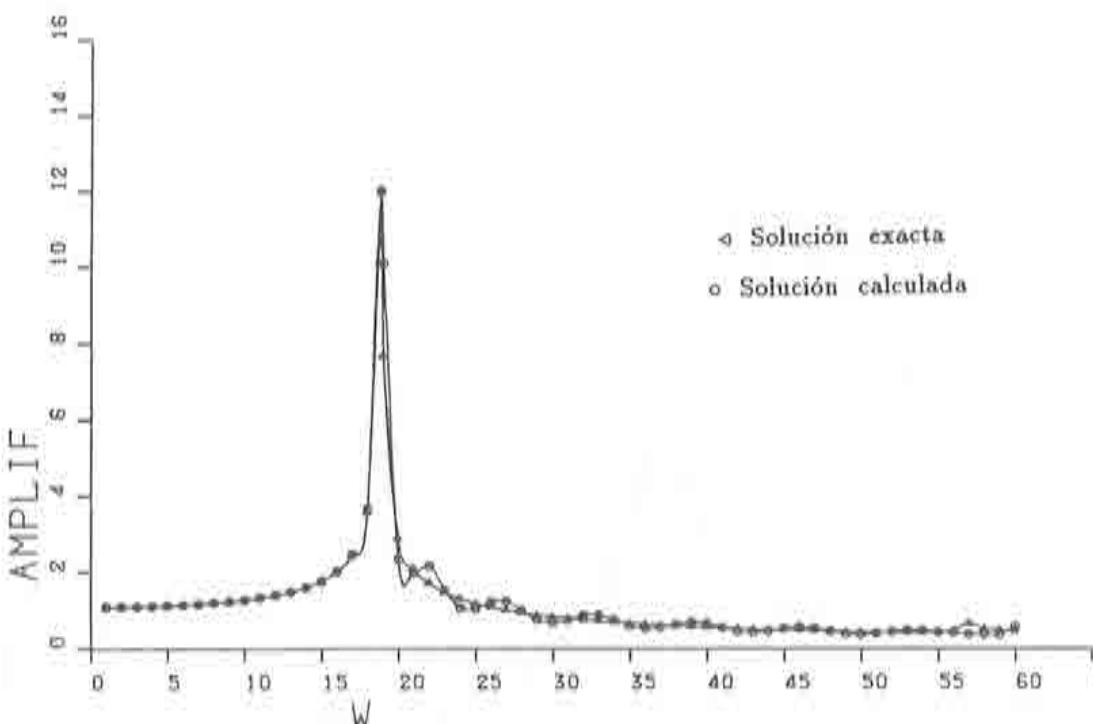


Fig. 8.9. Condición de radiación (8.3). Coeficiente de amplificación.  $L = 5H$ .

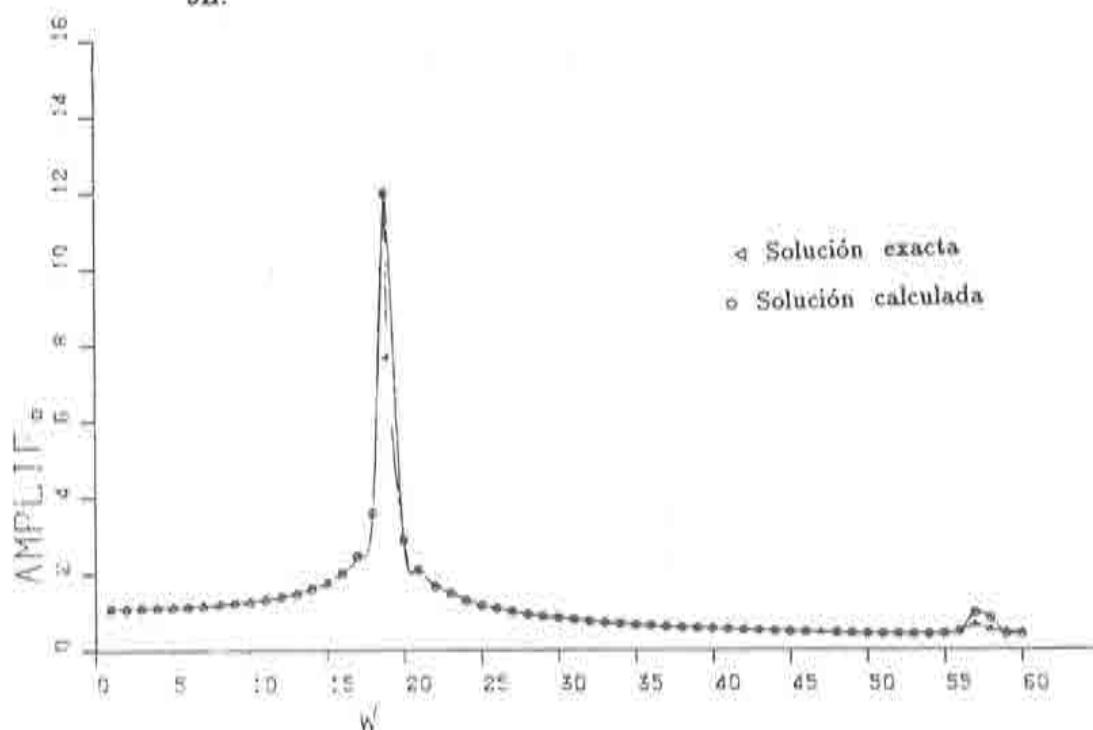


Fig. 8.10. Condición de radiación (8.3). Coeficiente de amplificación.  $L = 7H$ .

de  $L=2H$ .

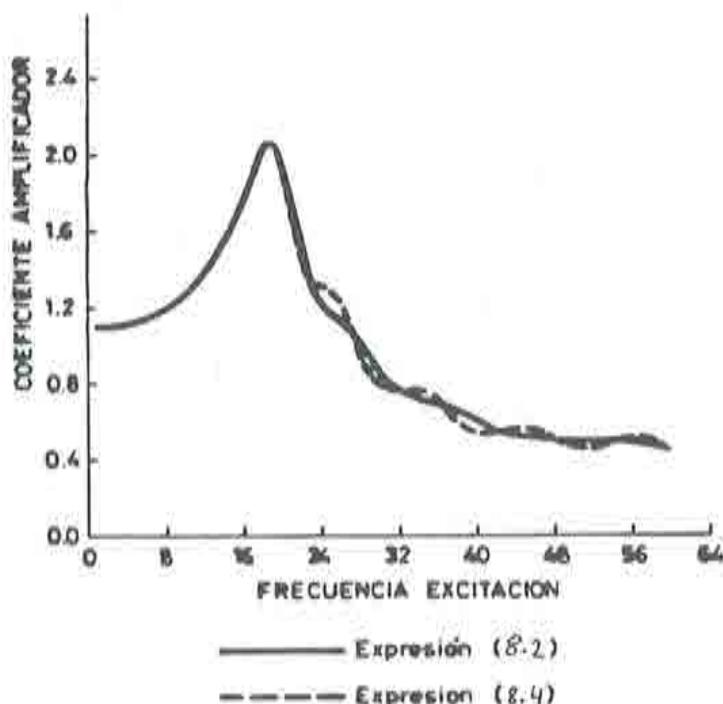


Fig. 8.11. Comparación entre distintas condiciones de radiación.

### 8.2.1.2 Amortiguamiento con el terreno

Partiendo de la expresión de la condición de radiación dada por (8.3), se ha estudiado el efecto de la absorción de las ondas de presión por el terreno. En la figura 8.12 pueden verse los resultados obtenidos para un 100% de reflexión, 75% y 50%. Como puede observarse, se produce un amortiguamiento del coeficiente de amplificación, tanto mayor a medida que aumenta la absorción de ondas. Dicho amortiguamiento se produce fundamentalmente en los entornos de las autofrecuencias.

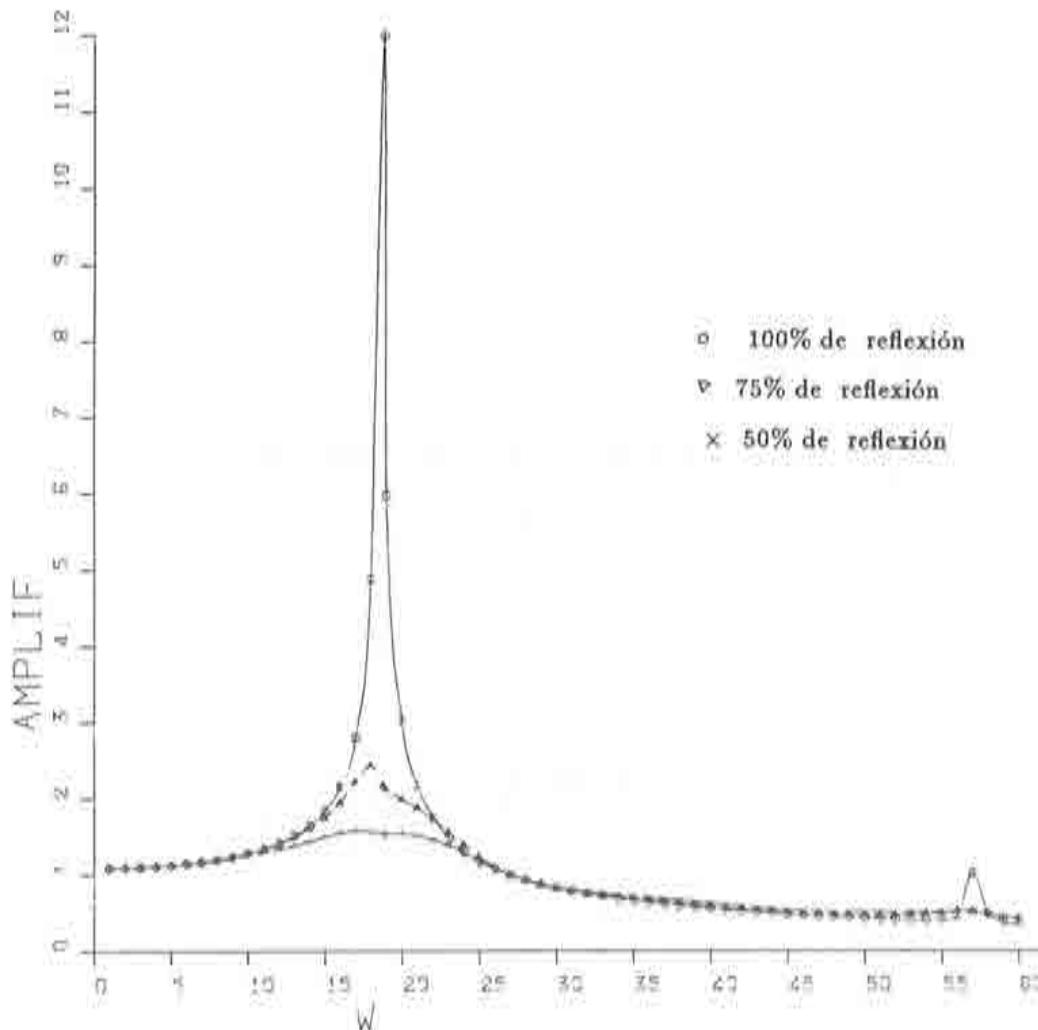


Fig. 8.12. Comparación entre distintas reflexiones de onda por el terreno.

### 8.2.1.3 Influencia de la compresibilidad del fluido

Al igual que en el caso de fluido finito, se ha analizado también aquí la influencia de la compresibilidad del fluido. La figura 8.13, muestra la respuesta obtenida para el caso de fluido incompresible y sin interacción con el terreno. Al ser  $c = \infty$ , la respuesta es independiente de la frecuencia, y es totalmente diferente a la obtenida con anterioridad.

DOMINIO FLUIDO INFINITO: ESTUDIO PARAMETRICO

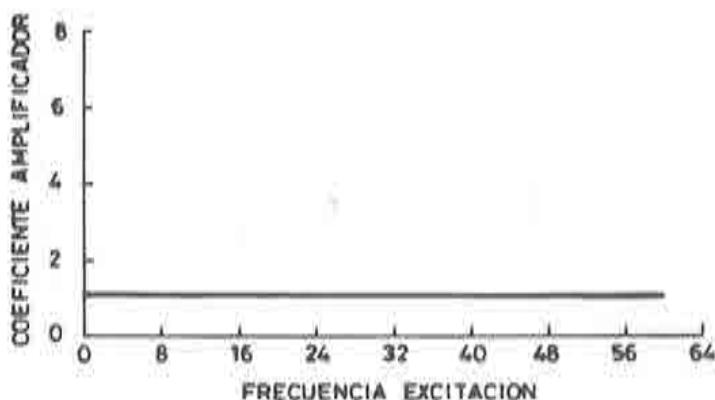


Fig. 8.13. *Fluido incompresible sin interacción con el terreno.*

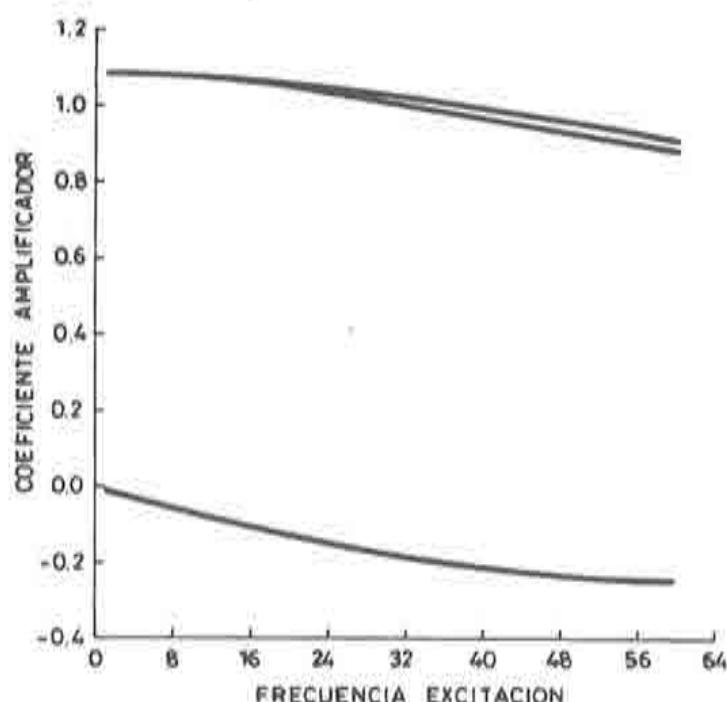


Fig. 8.14. *Fluido incompresible. 65% de reflexión de onda.*

## DOMINIO FLUIDO INFINITO: ESTUDIO PARAMETRICO

De la misma forma, en la figura 8.14 se representa dicha respuesta para el caso de que el terreno solamente refleje el 65% de la onda incidente.

### 8.2.1.4 Leyes de presiones

En las figuras 8.15 a 8.25 pueden verse las distribuciones de presiones sobre la pared rígida, aplicando la condición de radiación (8.3) para distintas frecuencias de excitación. Como puede observarse, los resultados obtenidos concuerdan muy bien con la solución exacta. Solamente en las figura 8.16 se presentan diferencias notorias. Estas diferencias, afectan a la parte real de la presión para una frecuencia de excitación de  $20 \text{ rdn/s}$ . Sin embargo, estas diferencias aún existiendo no son importantes, por cuanto para esta frecuencia la parte real de la presión es poco importante frente a la imaginaria (figura 8.17). Esta afirmación se demuestra asimismo en la figura 8.18, en donde puede observarse que la presión total obtenida y la exacta son prácticamente idénticas.

En la figura 8.26 se representan los resultados obtenidos aplicando la formulación semianalítica. La longitud finita de embalse ha sido la correspondiente a un elemento. Como puede observarse, la solución obtenida es prácticamente la misma que la correspondiente a la solución exacta.

DOMINIO FLUIDO INFINITO: ESTUDIO PARAMETRICO

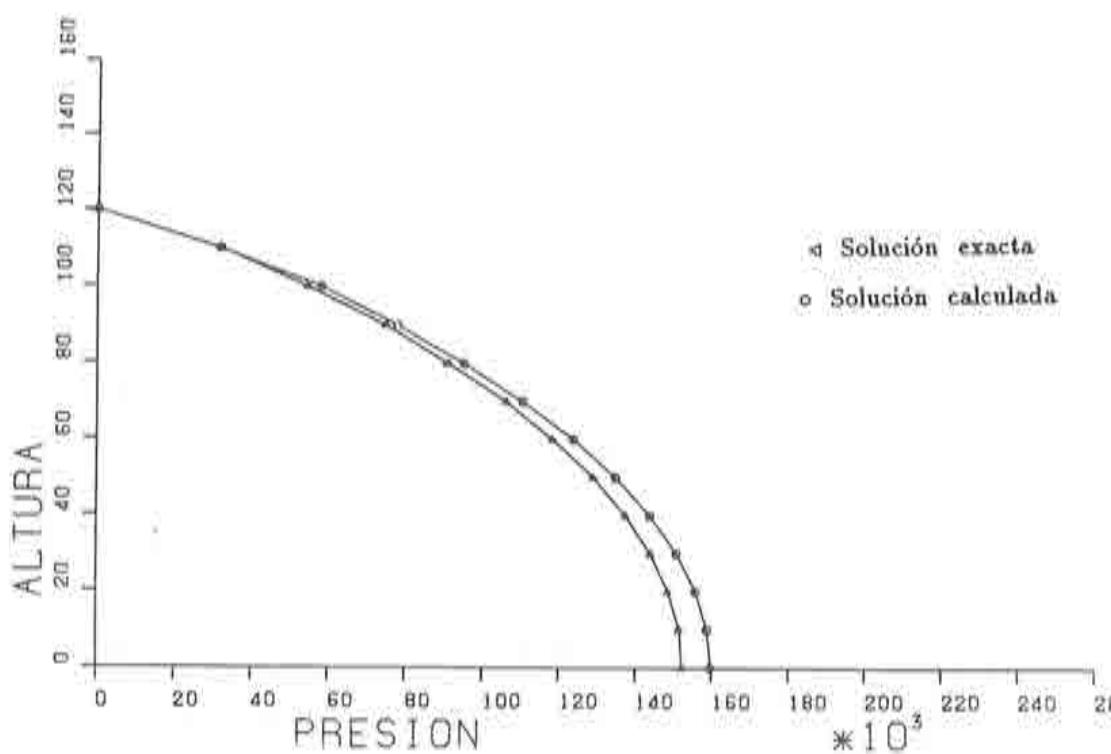


Fig. 8.15. Condición de radiación (8.3). Distribución de presiones. Parte real (15 rdn/s).

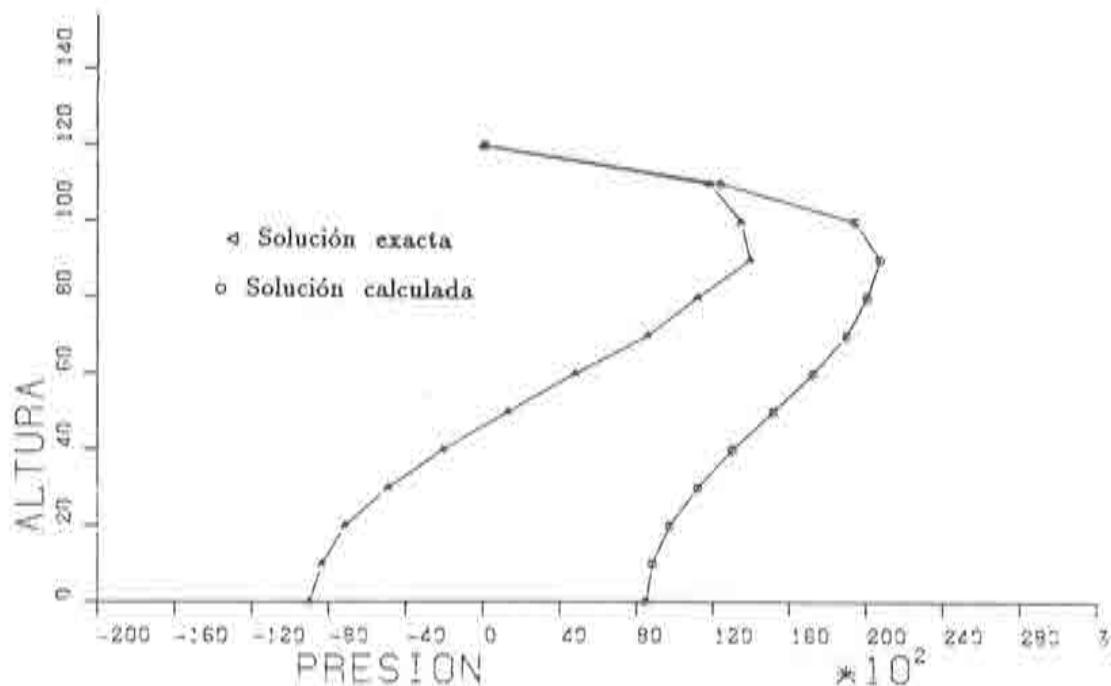


Fig. 8.16. Condición de radiación (8.3). Distribución de presiones. Parte real (20 rdn/s).

DOMINIO FLUIDO INFINITO: ESTUDIO PARAMETRICO

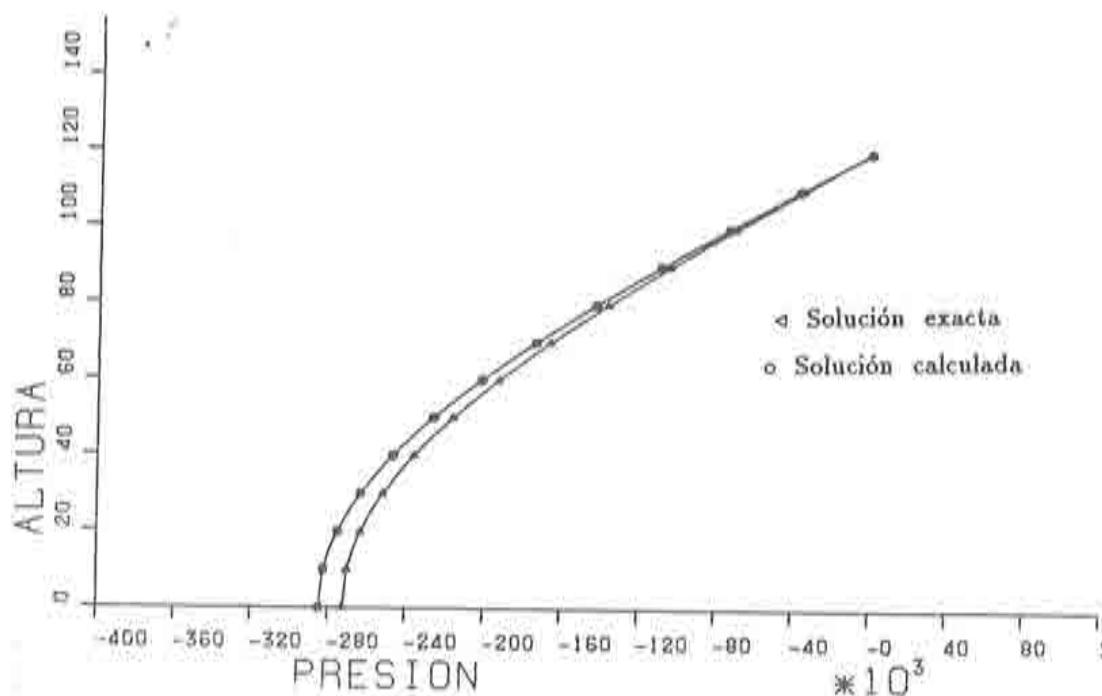


Fig. 8.17. Condición de radiación (8.3). Distribución de presiones. Parte imaginaria (20 rdn/s).

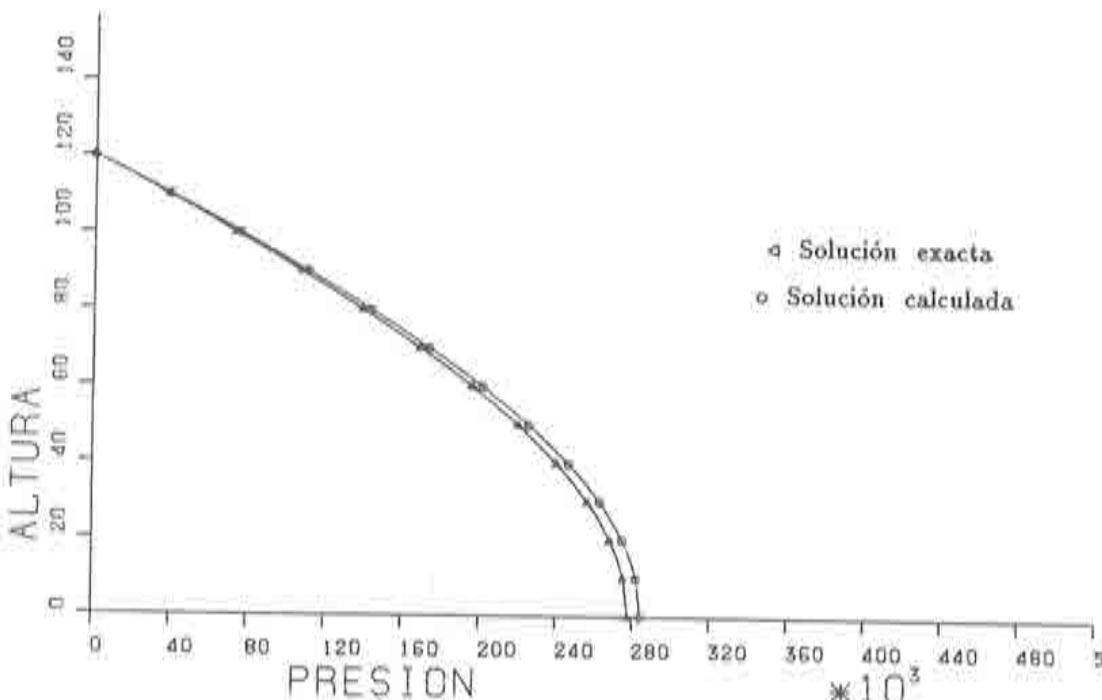


Fig. 8.18. Condición de radiación (8.3). Distribución de presiones. Presión total (20 rdn/s).

DOMINIO FLUIDO INFINITO: ESTUDIO PARAMETRICO

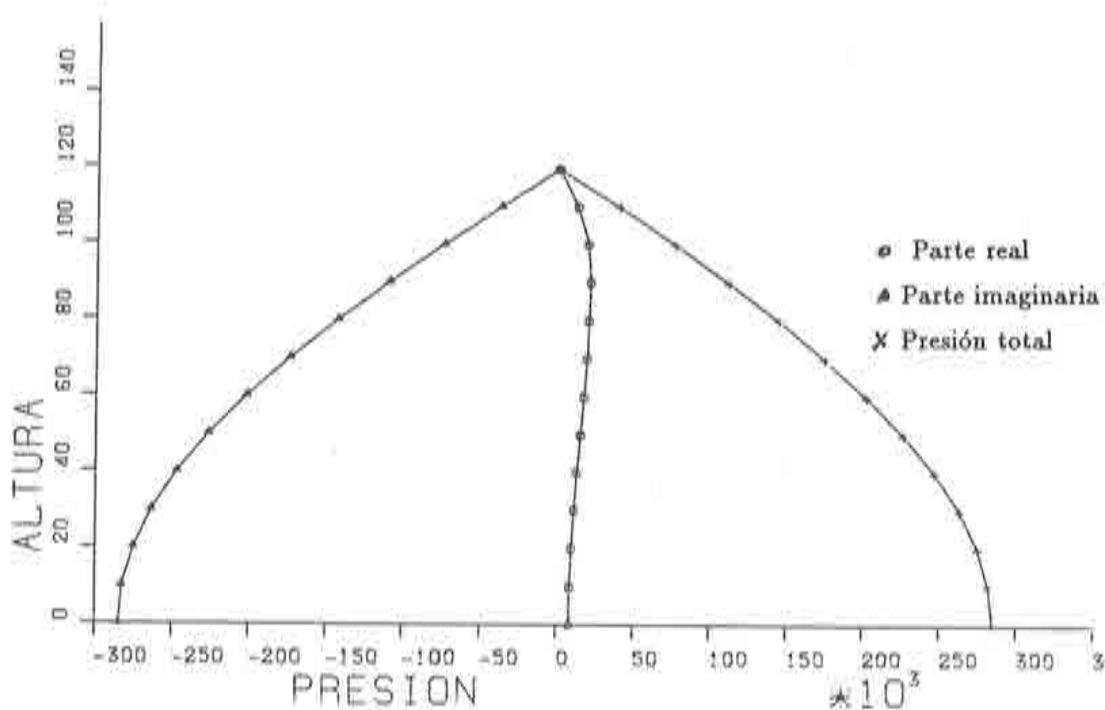


Fig. 8.19. Condición de radiación (8.3). Distribución de presiones. Parte real, imaginaria y total (20 rdn/s).

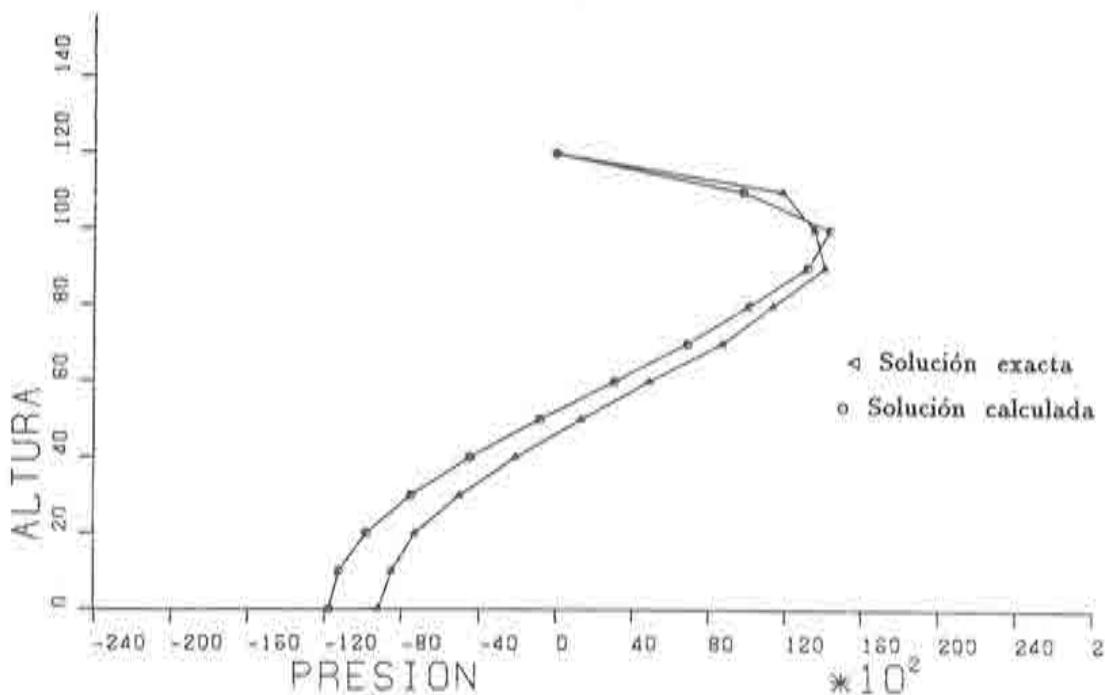


Fig. 8.20. Condición de radiación (8.3). Distribución de presiones. Parte real (22 rdn/s).

DOMINIO FLUIDO INFINITO: ESTUDIO PARAMETRICO

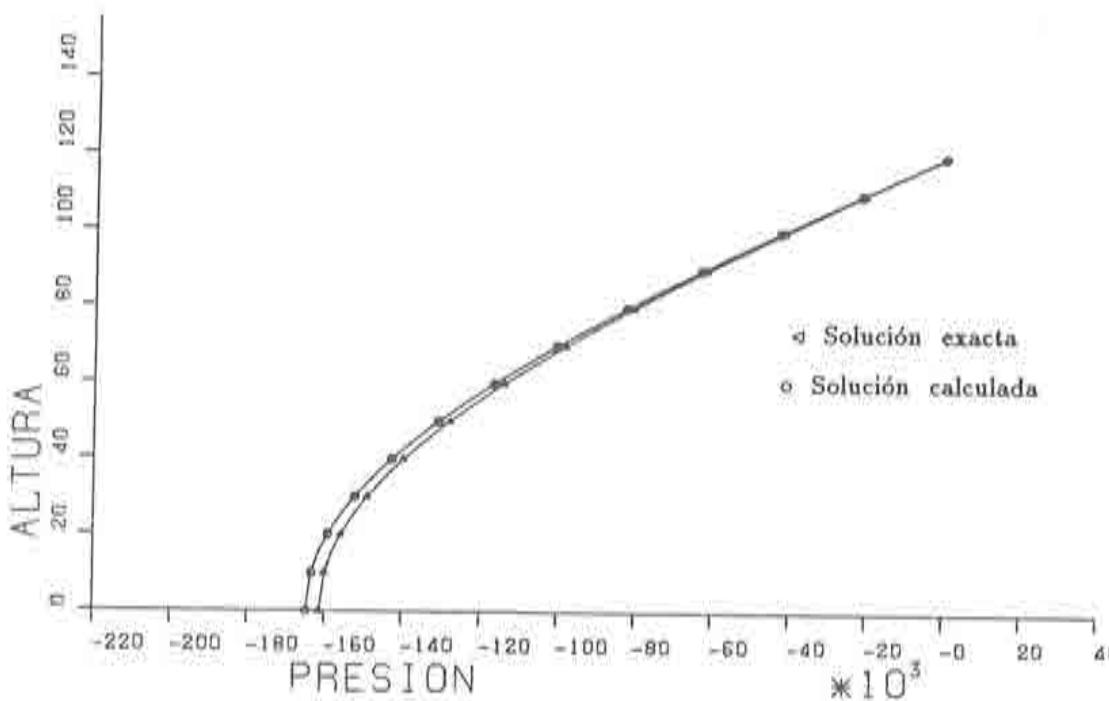


Fig. 8.21. Condición de radiación (8.3). Distribución de presiones. Parte imaginaria (22 rdn/s).

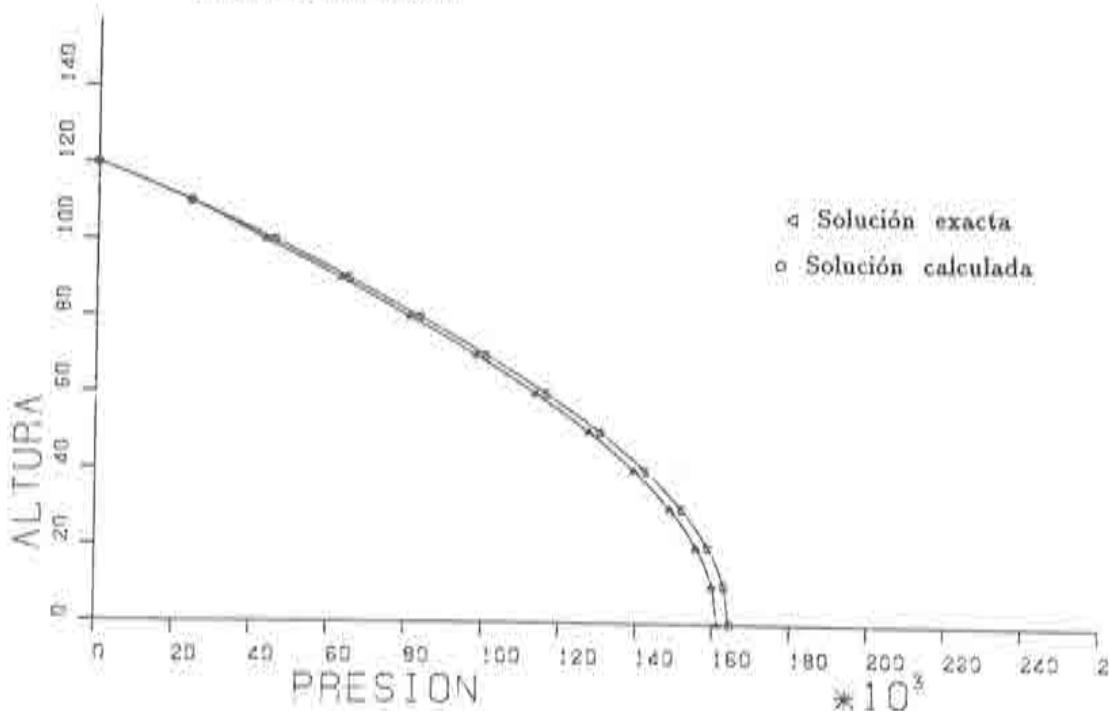


Fig. 8.22. Condición de radiación (8.3). Distribución de presiones. Presión total (22 rdn/s).

DOMINIO FLUIDO INFINITO: ESTUDIO PARAMETRICO

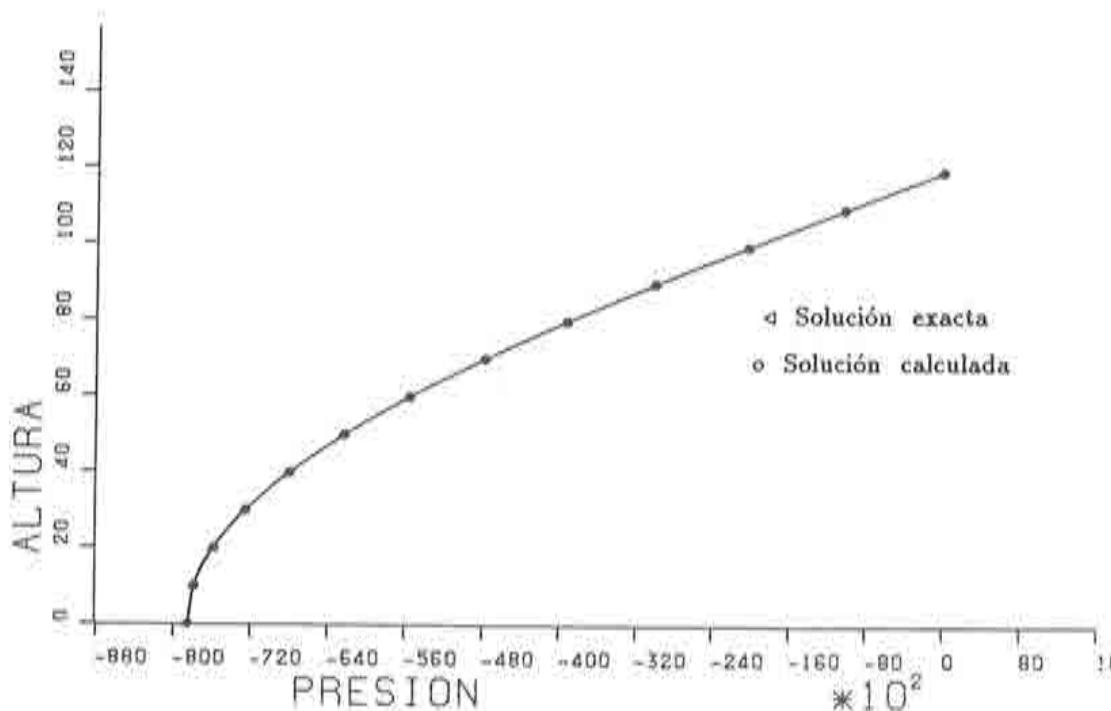


Fig. 8.23. Condición de radiación (8.3). Distribución de presiones. Parte imaginaria (30 rdn/s).

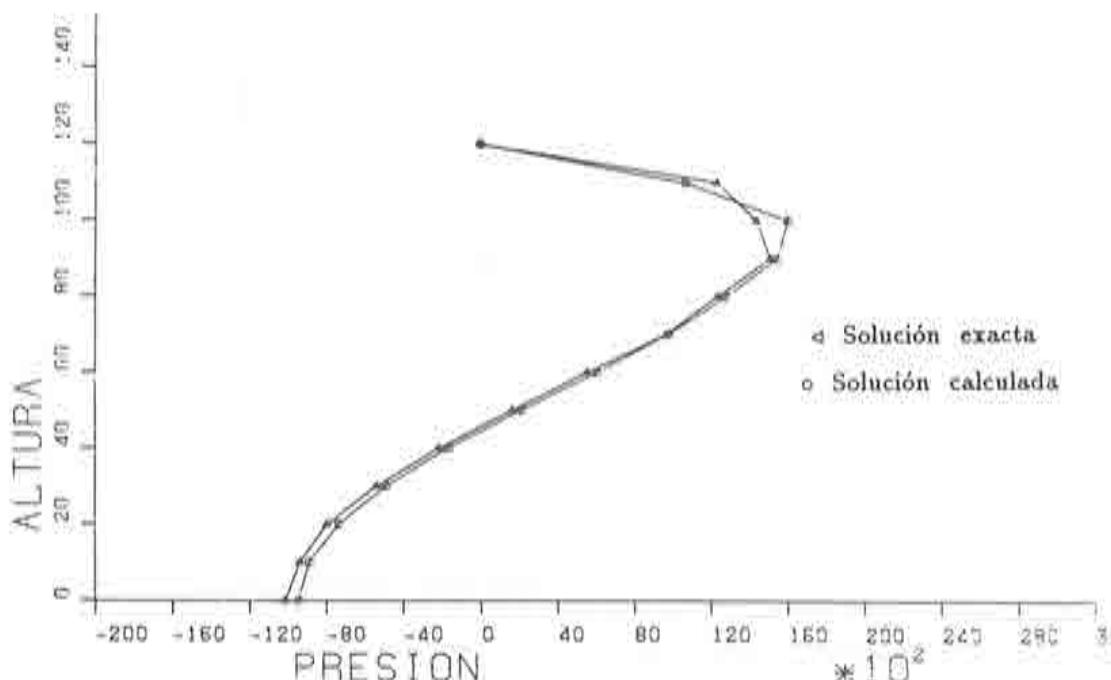


Fig. 8.24. Condición de radiación (8.3). Distribución de presiones. Parte real (30 rdn/s).

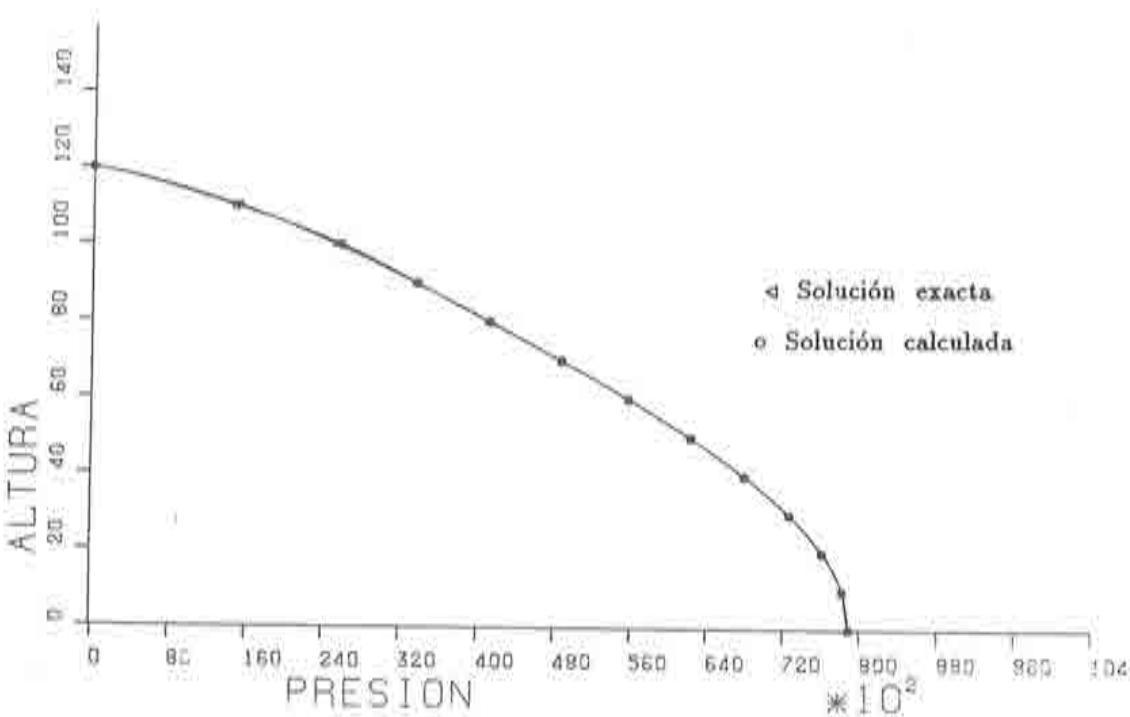


Fig. 8.25. Condición de radiación (8.3). Distribución de presiones. Presión total (30 rdn/s).

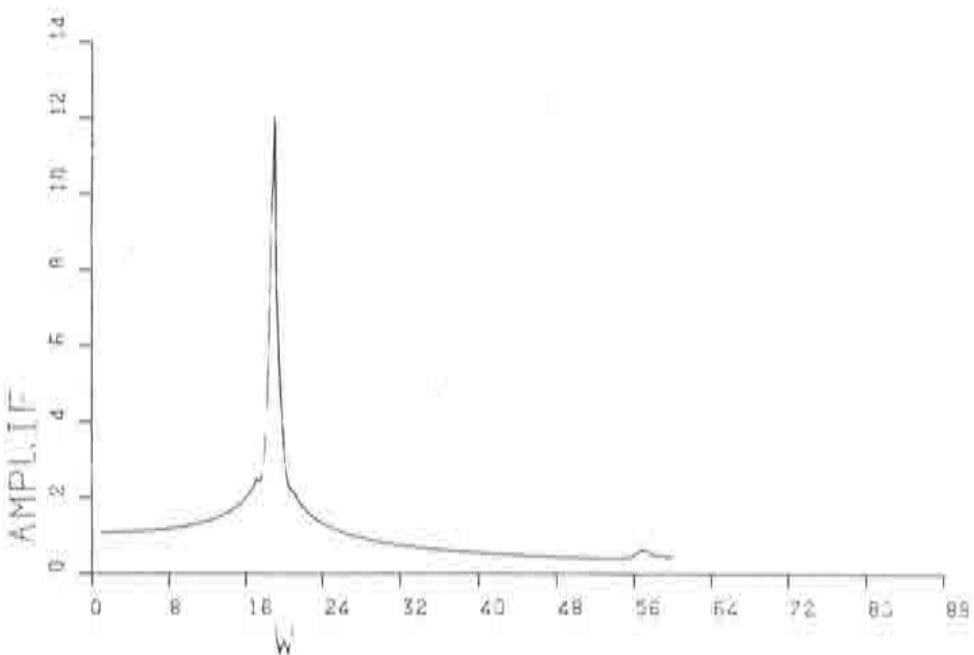


Fig. 8.26. Coeficiente de amplificación utilizando la formulación semianalítica.



## PARTE III



## CAPITULO 9

### INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

#### 9.1. INTRODUCCION

En los capítulos anteriores, se ha estudiado por una parte el comportamiento dinámico de la presa bóveda a embalse vacío, y por otra el agua del embalse cuando a ésta se la excita dinámicamente mediante una carga armónica aplicada a través de una pared rígida.

En el presente capítulo se van a desarrollar las ecuaciones que rigen en la interacción presa-embalse, como acoplamiento de la ecuación del sólido y de la del fluido. Es decir, en el primer caso la presión dinámica del fluido deja de ser un dato para convertirse en una de las incógnitas del problema. De la misma manera, la pared que excita al fluido deja de ser rígida (y por tanto con aceleraciones conocidas), para transformarse en un sólido elástico que transmite al embalse unas aceleraciones también incógnita.

Las ecuaciones de la interacción también se plantean bien mediante la utilización de la condición de radiación, bien mediante el método semianalítico como modelización del resto del agua embalsada no incluida

## INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

directamente en el análisis. Asimismo los algoritmos planteados se comprueban bien en el plano (presa de gravedad) bien en el espacio con la presa de Morrow Point.

### 9.2. ECUACIONES DE INTERACCION

La ecuación que gobierna el comportamiento dinámico de la presa aislada sometida a acción sísmica, viene dada por la ecuación (2.28)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = -\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{a}_g$$

Ecuación que en frecuencias se escribe

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})\ddot{\mathbf{a}} = -\omega^2 \mathbf{M}\mathbf{J}\ddot{\mathbf{a}}_g \quad (9.1)$$

La ecuación anterior se desacopla aplicando la descomposición modal, quedando  $q$  expresiones de la forma

$$(-\omega^2 + i\omega C_i + \omega_i^2)y_i = -\phi_i^T \mathbf{M}\mathbf{J}\ddot{\mathbf{a}}_g \quad (9.2)$$

Si además de excitación sísmica, la presa está sometida a unas presiones  $\mathbf{P}$  producidas por el embalse, la expresión (9.1) se completa:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})\ddot{\mathbf{a}} = -\mathbf{M}\mathbf{J}\ddot{\mathbf{a}}_g + \frac{1}{\rho} \mathbf{S}^T \mathbf{P} \quad (9.3)$$

siendo  $\rho$  la densidad del fluido y  $\mathbf{S}$  la matriz de interacción definida en el Capítulo 5.

Por lo que respecta al fluido, en los capítulos 5 y 6 se han planteado y resuelto las ecuaciones que rigen su comportamiento dinámico bajo las hipótesis allí expresadas. Tanto el carácter de las ecuaciones como su resolución siguen caminos distintos según pueda considerarse el embalse finito o no. En el primer caso su resolución se simplifica considerablemente al ser sólo necesario realizar una descomposición modal, mientras que en el segundo, aparece un término de contorno asociado a la frontera artificialmente creada por necesidades de discretización. Ello conduce en el caso en que se aplique la condición de radiación a matrices de amortiguamiento no proporcionales que impiden realizar la descomposición modal, por lo que hay que resolver directamente el sistema de ecuaciones para cada frecuencia de excitación.

En cuanto al amortiguamiento producido por el terreno, da lugar también a matrices de amortiguamiento no proporcional. Los efectos de dicho amortiguamiento se han estudiado en los capítulos 7 y 8.

Para dominios de fluido infinitos en los cuales se aplica la condición de radiación, la ecuación que rige el comportamiento dinámico en frecuencias de dicho fluido, viene dada por

$$(-\omega^2 G + i\omega C_F + H)P = -S\ddot{a}^t \quad (9.4)$$

En donde  $G$  y  $H$  son las matrices de masa y rigidez respectivamente, vieniendo sus expresiones dadas por (5.30). La matriz  $C_F$  es la matriz de amortiguamiento, la cual en general será la suma de la matriz de amortiguamiento con el terreno (5.29), y de los términos de contorno a los que se les aplica la condición de radiación (6.35).  $S$  es la matriz de interacción (5.23) y  $\ddot{a}^t$  la componente armónica de la aceleración total, cuyo valor es

$$\ddot{a}^t = -\omega^2 \ddot{a} + J \ddot{a}_g \quad (9.5)$$

## INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

Expresando las ecuaciones (9.3) y (9.4) en forma matricial y reordenando términos se obtiene

$$\begin{bmatrix}
 -\omega^2 + i\omega C_1 + \omega_1^2 & & & & -\phi_1^T M J \\
 & \ddots & & & \vdots \\
 & & -\frac{1}{\rho} \phi^T S^T & & \vdots \\
 0 & & & y_1 & -\phi_1^T M J \\
 & & & \vdots & \vdots \\
 & & -\omega^2 + i\omega C_q + \omega_q^2 & y_q & -\phi_q^T M J \\
 & & & & a_q \\
 & & -\omega^2 S \phi & & -S J
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 y_1 \\
 \vdots \\
 y_q \\
 P
 \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

en donde  $\phi$  es una submatriz de la matriz modal

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q]$$

la cual contiene los  $q$  primeros modos tenidos en cuenta en el análisis de la presa.

La expresión (9.6) constituye la ecuación que gobierna la interacción dinámica entre presa y embalse, aplicando la condición de radiación.

Multiplicando el primer grupo de ecuaciones por  $\omega^2 P$  se obtiene un sistema de ecuaciones simétrico, la solución del cual proporciona la respuesta en desplazamientos de la presa y las presiones en el fluido.

La dimensión del sistema obtenido es el número de autovalores escogidos en la presa más el número de grados de libertad resultantes de la discretización del fluido, el cual coincide con el número de nodos de dicha discretización.

En el supuesto en que el fluido sea finito, la misma ecuación (9.6) sigue siendo válida, sin más que eliminar la matriz  $C_R$  de la matriz de

## INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

amortiguamiento con el fluido  $C_F$ . En este caso, si tampoco se considera la interacción del fluido con el terreno, la matriz de amortiguamiento  $C_f$  es nula, por lo que el cálculo se simplifica notablemente.

Sean  $Z_j$  los vectores propios del fluido finito

$$(-\omega^2 G + H)Z_j = 0 \quad (9.7)$$

se puede entonces escribir

$$P = \sum_{j=1}^s Z_j \alpha_j \quad (9.8)$$

por lo que sustituyendo en (9.4) se llega al sistema de ecuaciones desacoplado

$$Z_j^t (-\omega^2 G + H) Z_j \alpha_j = -Z_j^t S (-\omega^2 \bar{a} + J \bar{a}_g) \quad (9.9)$$

y expresando

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^q \phi_i y_i \quad (9.10)$$

la ecuación (9.9) se expresa

$$Z_j^t (-\omega^2 G + H) Z_j \alpha_j = -Z_j^t S \left( -\sum_{i=1}^q \phi_i y_i + J \bar{a}_g \right) \quad (9.11)$$

## INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

Al mismo tiempo la expresión (9.3) puede escribirse

$$(-\omega^2 + i\omega C_i + \omega_i^2)y_i = -\phi_i^t M J \bar{a}_g + \frac{1}{\rho} \phi_i^t S^t \sum_{j=1}^s Z_j \alpha_j \quad (9.12)$$

Las expresiones (9.11) y (9.12) pueden escribirse de forma matricial

$$\begin{bmatrix}
 A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} & (-\omega^2 G_1 + H_1) \\
 A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} & (-\omega^2 G_2 + H_2) \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{sq} & (-\omega^2 G_s + H_s) \\
 (-\omega^2 + i\omega C_1 + \omega_1^2) & 0 & & & \frac{1}{\rho} A_{11} & \frac{1}{\rho} A_{21} & \dots & \frac{1}{\rho} A_{s1} & \alpha_1 & -\phi_1^t M J \\
 & 0 & & & \frac{1}{\rho} A_{1q} & \frac{1}{\rho} A_{2q} & \dots & \frac{1}{\rho} A_{sq} & \alpha_q & -\phi_q^t M J
 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Z_1 S J \\ \vdots \\ -Z_q S J \\ \vdots \\ -Z_q S J \end{bmatrix} \bar{a}_g \quad (9.13)$$

En donde

$$A_{ij} = -Z_i^t S \phi_j$$

El anterior sistema de ecuaciones (9.13) constituye la solución del problema de interacción presa-embalse en el caso de considerar este último de tamaño finito. Su dimensión es la de la suma del número de modos de la presa y del fluido considerados en el análisis.

## INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

Si el fluido se considera incompresible, la resolución del problema se simplifica de forma notable. En este caso, al ser  $c = \infty$ , la matriz  $\mathbf{G}$  se anula, por lo que el sistema de ecuaciones (9.4) se escribe

$$\mathbf{H}\mathbf{P} = -\mathbf{S}(-\omega^2 \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{J}\bar{\mathbf{a}}_g) \quad (9.14)$$

y despejando  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{S}(-\omega^2 \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{J}\bar{\mathbf{a}}_g) \quad (9.15)$$

expresión que sustituida en (9.3)

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})\bar{\mathbf{a}} = -\mathbf{M}\mathbf{J}\bar{\mathbf{a}}_g - \frac{1}{\rho} \mathbf{S}^t \mathbf{H}^{-1} \mathbf{S}(-\omega^2 \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{J}\bar{\mathbf{a}}_g) \quad (9.16)$$

y reordenando términos

$$(-\omega^2 \mathbf{M}' + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})\bar{\mathbf{a}} = -\mathbf{M}'\mathbf{J}\bar{\mathbf{a}}_g \quad (9.17)$$

en donde

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \frac{1}{\rho} \mathbf{S}^t \mathbf{H}^{-1} \mathbf{S}$$

Como puede verse, la ecuación (9.17) proporciona la solución del problema de la interacción presa-embalse, a través de añadir una masa  $\frac{1}{\rho} \mathbf{S}^t \mathbf{H}^{-1} \mathbf{S}$  a los nodos de la presa en contacto con el agua.

## INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

Si en vez de aplicar la condición de radiación al fluido infinito, se utiliza una formulación semianalítica, las ecuaciones discretizadas que gobiernan el comportamiento del fluido infinito, vienen dadas por (6.61), y se escriben de nuevo a continuación:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 G_{11} + H_{11} & (-\omega^2 G_{12} + H_{12})\Psi \\ \Psi^t(-\omega^2 G_{21} + H_{21}) & \Psi^t(-\omega^2 G_{22} + H_{22})\Psi + \Psi^t\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ \gamma \end{bmatrix} = -S\ddot{\mathbf{a}}^t$$

Escribiendo matricialmente las ecuaciones (6.61) juntamente con (9.3), se obtendrá la solución del problema de interacción

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 G_{11} + H_{11} & (-\omega^2 G_{12} + H_{12})\Psi & -\omega^2 S\Psi \\ \Psi^t(-\omega^2 G_{21} + H_{21}) & \Psi^t(-\omega^2 G_{22} + H_{22})\Psi + \Psi^t\vartheta & 0 \\ \frac{1}{\rho}\Psi^t S^t & 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ \gamma \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -SJ\ddot{\mathbf{a}}_g \\ 0 \\ -\Psi MJ\ddot{\mathbf{a}}_g \end{bmatrix} \quad (9.18)$$

en donde los elementos  $T_{ij}$  de la matriz  $\mathbf{T}$  valen

$$T_{ij} = -\omega^2 + i\omega C_i + \omega_i^2 \quad si \quad i = j$$

$$T_{ij} = 0 \quad si \quad i \neq j$$

Este sistema de ecuaciones puede fácilmente simetrizarse sin más que multiplicar el tercer grupo de ecuaciones por  $\omega^2 \rho$ .

El orden del sistema obtenido, es en este caso la suma de

- El número de nodos de la discretización del dominio  $\Omega_1$ , (figura 6.12), menos los nodos pertenecientes a la superficie  $S_c$

## INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

- El número de autovectores utilizados en la sección  $S_c$
- El número de autovectores utilizados en el cálculo de la presa.

### 9.3. PRESA DE GRAVEDAD

Con el fin de comprobar la efectividad de las formulaciones anteriores, así como obtener unas primeras conclusiones de carácter general, se ha procesado la presa de gravedad cuya discretización puede observarse en la figura 9.1. La presa es de sección triangular con una altura de 120 metros y una base de 96 metros. Los valores adoptados para el cuerpo de la presa son:

- Módulo de Elasticidad  $E = 3.445 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
- Densidad  $\rho = 2482.9 \text{ Kg/m}^3$
- Módulo de Poisson  $\nu = 0.17$

La fracción del amortiguamiento crítico  $\xi$  se ha tomado constante para todos los modos e igual al 5%.

La discretización realizada consta de 21 elementos prismáticos rectangulares de 20 nodos, siendo sus dimensiones de 16 metros de base por 20 metros de altura y uno de anchura. Dicha discretización puede verse en la figura 9.1. Para el cálculo se ha considerado la contribución de los seis primeros modos de vibración, ya que este es el número de modos utilizados en la referencia [35] para estudiar este mismo caso, lo cual permite contrastar los resultados.

Del análisis de autovalores de la presa, se han obtenido las seis frecuencias propias de vibración indicadas en la tabla 9.1, en donde se establece la comparación con los valores dados en la referencia [35].

INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

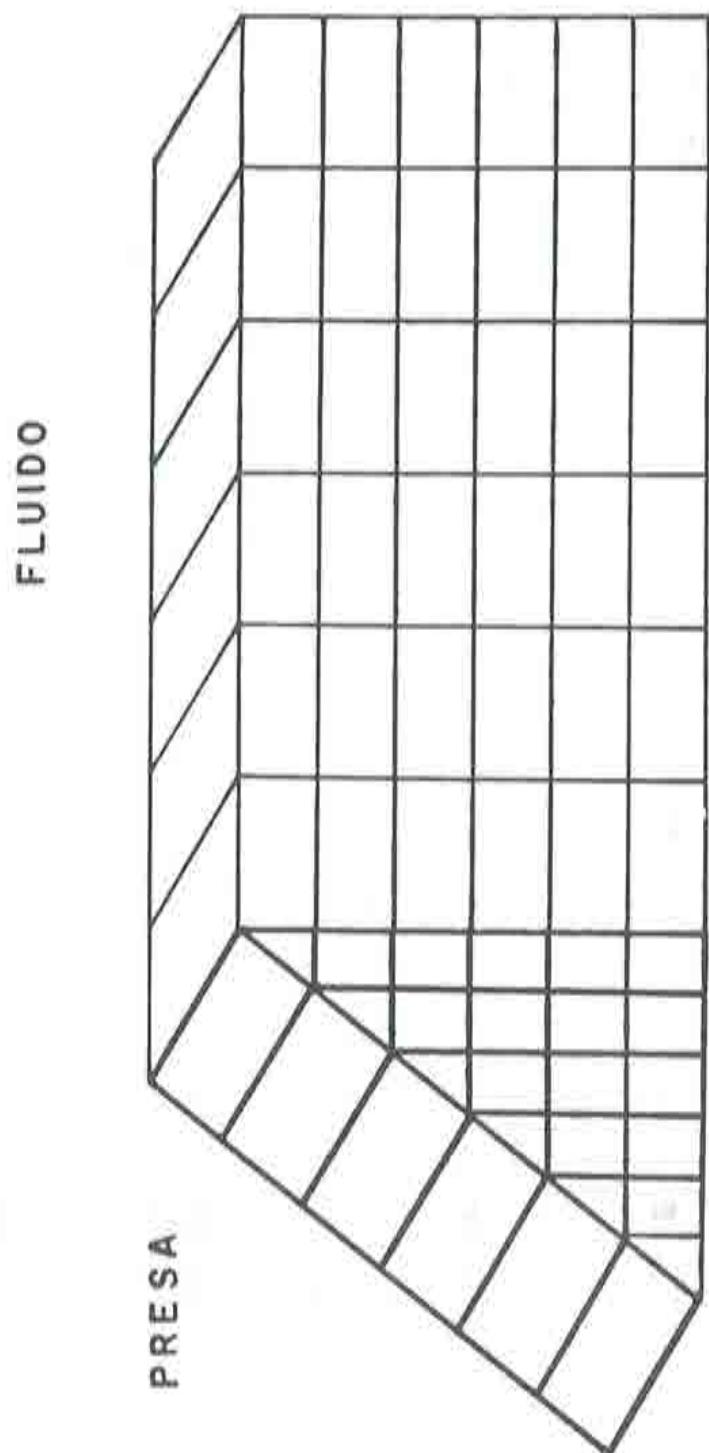


Fig. 9.1. Discretización de presa de gravedad y embalse.

## INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

Tabla 9.1

MODO	Frecuencias propias de la presa de gravedad	
	Presente estudio	Referencia [35]
1	26.574	26.571
2	60.788	60.841
3	69.796	69.843
4	103.969	104.298
5	152.204	153.375
6	152.799	153.902

## 9.3.1. Resolución mediante el método directo

En este apartado se va a estudiar el problema planteado a través de la resolución del sistema de ecuaciones.

El primer problema que se presenta para ello es la distancia a la que hay que cortar la discretización del fluido e imponer la condición de radiación.

Así se han estudiado longitudes de  $1H$ ,  $2H$ ,  $3H$ ,  $5H$  y  $7H$ , siendo  $H$  la altura de la presa. Las características de estas discretizaciones se presentan en la tabla 9.2.

 Tabla 9.2  
 Discretización del dominio fluido

	No. de elementos	No. de nodos	No. de nodos superficie libre
$L = 1H$	18	84	18
$L = 2H$	36	315	33
$L = 3H$	54	456	48
$L = 5H$	90	738	78
$L = 7H$	126	1020	108

## INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

Las figuras 9.2 a 9.7 muestran los resultados obtenidos resolviendo el sistema de ecuaciones para las distintas longitudes, habiéndose representado la variación de la aceleración en la coronación de la presa frente a la frecuencia de excitación. En ellas se observa que la primera frecuencia de excitación es coincidente para todas las longitudes, a excepción de la longitud  $L = 1H$  que es ligeramente inferior. Además, para el caso  $L = 1H$ , se observan unas pequeñas perturbaciones alrededor de la primera frecuencia, que no aparecen en los demás casos.

Por lo que respecta a las demás frecuencias propias del conjunto presa-fluido, destaca el hecho de que para las longitudes  $L = 1H$  y  $L = 2H$  los valores máximos de la aceleración se detectan claramente, mientras que en los restantes casos aparecen una serie de perturbaciones que no responden a ninguna frecuencia propia del conjunto. Este hecho se pone de manifiesto a partir de la tercera frecuencia del conjunto.

Estudiando además el tiempo de cálculo invertido en cada discretización (que se presenta en la tabla 9.3) vemos que para la longitud  $L = 7H$  el tiempo empleado es tres veces mayor que para  $L = 2H$ .

Tabla 9.3  
Tiempo de C.P.U. empleado

$L = 1H$	8'38"
$L = 2H$	17'55"
$L = 3H$	25'40"
$L = 5H$	42'30"
$L = 7H$	59'15"

De todo ello podemos concluir que la longitud óptima de la discretización a realizar estará alrededor de  $L = 2H$ , ya que ello proporciona buenos resultados y un menor consumo de tiempo de ordenador.

## INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

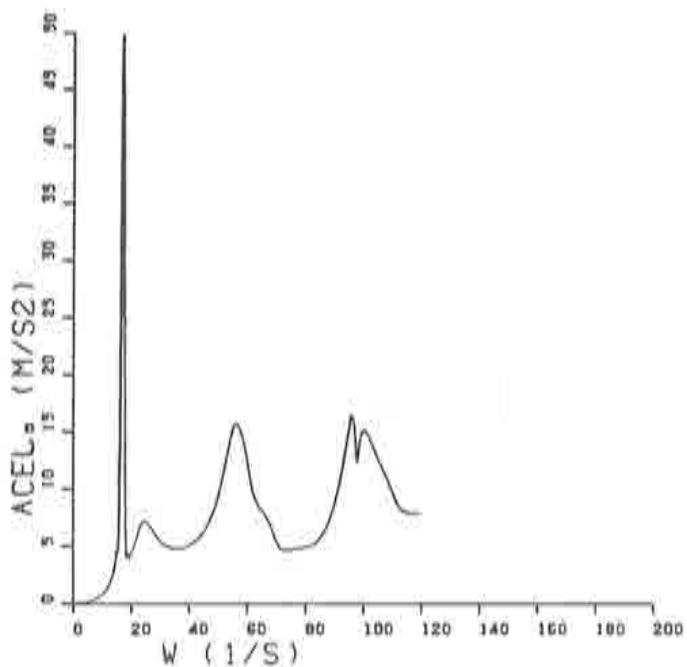


Fig. 9.2. Presa de gravedad. Aceleración en coronación.  $L=1H$ .

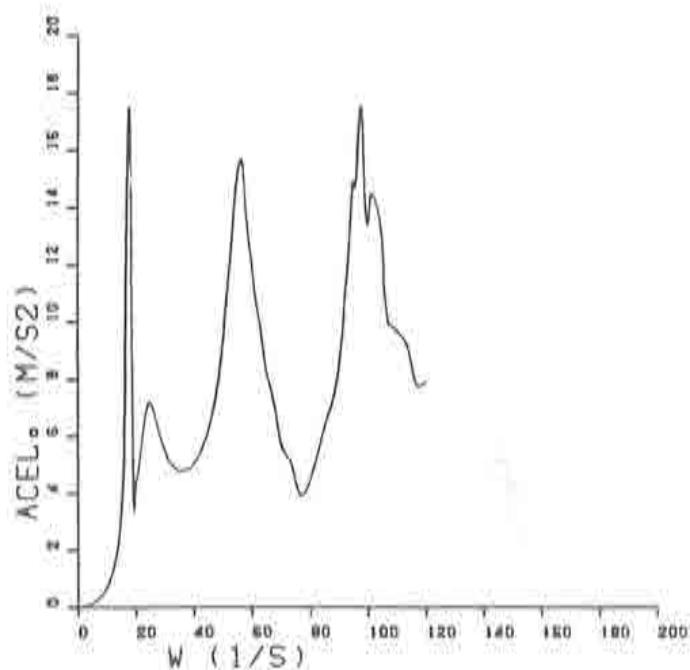


Fig. 9.3. Presa de gravedad. Aceleración en coronación.  $L=2H$ .

INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

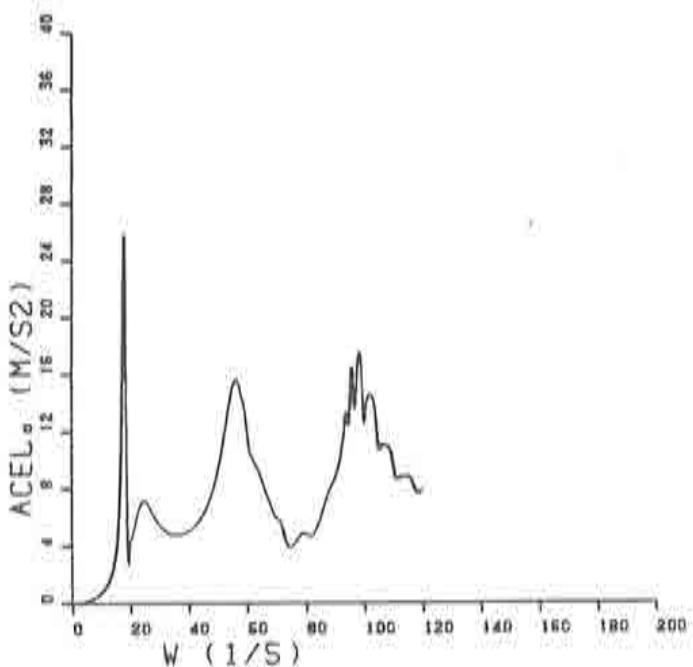


Fig. 9.4. Presa de gravedad. Aceleración en coronación.  $L=3H$ .

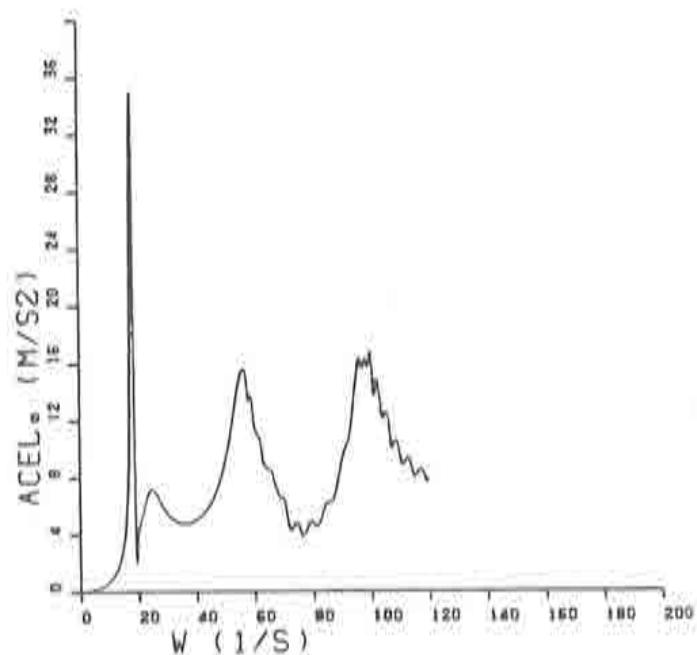


Fig. 9.5. Presa de gravedad. Aceleración en coronación.  $L=5H$ .

## INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

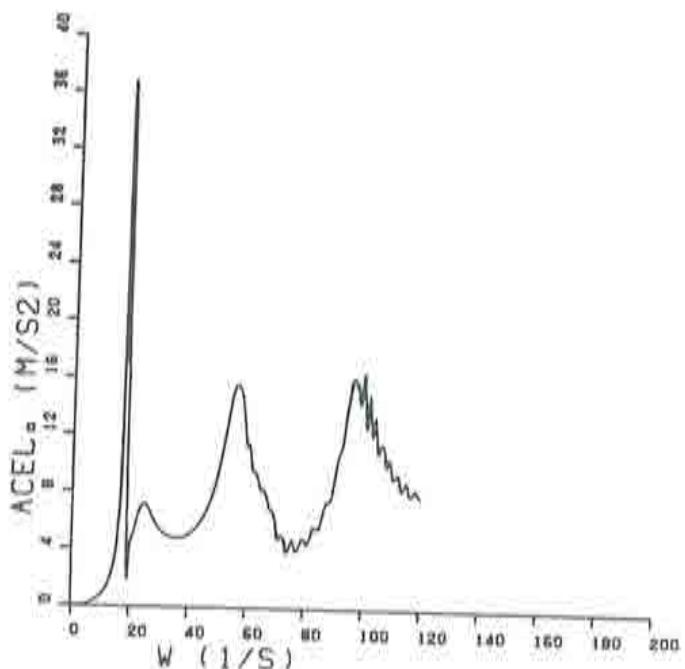


Fig. 9.6. Presa de gravedad. Aceleración en coronación.  $L = 7H$ .

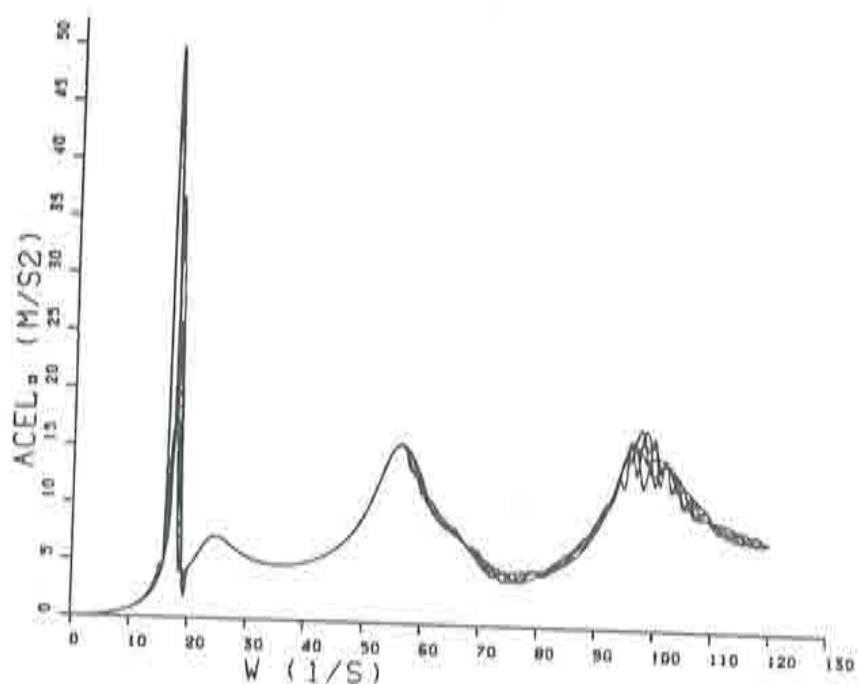


Fig. 9.7. Presa de gravedad. Aceleración en coronación. Distintas longitudes de discretización.

### 9.3.2. Frecuencias propias del problema de interacción

Aceptando como válidos los resultados obtenidos con una longitud de discretización de  $L = 2H$ , las frecuencias propias que se obtienen del análisis conjunto presa fluído son:

Modo 1	17.81 rad/s
Modo 2	24.90 rad/s
Modo 3	56.00 rad/s
Modo 4	97.90 rad/s

El primer hecho que se constata es la no coincidencia, ni en número ni en valor, de las frecuencias obtenidas con las frecuencias de la presa y del fluido, tal como se desprende de la figura 9.8.

No obstante analizando dicha gráfica con mayor detenimiento, se observa que las frecuencias propias obtenidas se producen para valores ligeramente inferiores a las del fluido y de la presa. Así, la primera frecuencia vale 17.8  $rdn/s$ , valor ligeramente inferior a la primera frecuencia del fluido. La segunda frecuencia corresponde a 24.90  $rdn/s$ , que es un 6% menor que la primera frecuencia de la presa. Con la tercera frecuencia se repite el mismo efecto, obteniéndose 56.0  $rdn/s$  frente a los 56.96 de la segunda frecuencia del fluido y los 60.84 y 69.84 correspondientes al segundo y tercer modos de la presa.

Los resultados obtenidos se han contrastado con los resultados dados en la referencia [35] y que se muestran en la figura 9.9. Las diferencias que resultan de dicha comparación son inferiores a un 1%, por lo que se refiere a las frecuencias propias, y a un 8% por lo que respecta a la amplitud de la respuesta, a excepción de un entorno de la cuarta frecuencia en que aparecen unas pequeñas perturbaciones.

### 9.3.3 Resolución con la formulación semianalítica

El mismo ejemplo estudiado hasta el momento se ha abordado con la formulación semianalítica con el fin de valorar la eficacia de cada una de las metodologías de resolución. La zona discretizada en este caso ha

INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

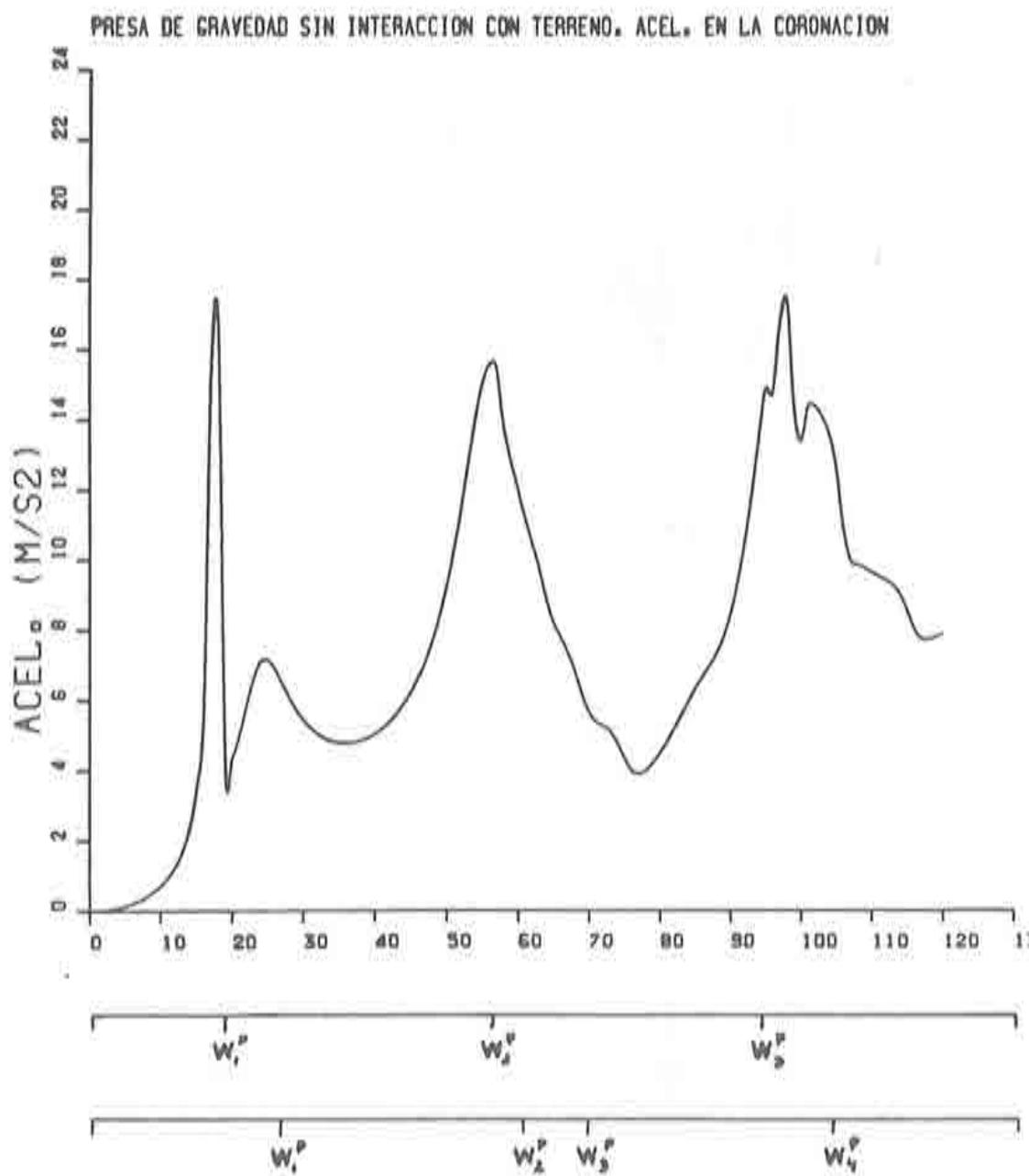


Fig. 9.8. Presa de gravedad. Aceleración en coronación.

### INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

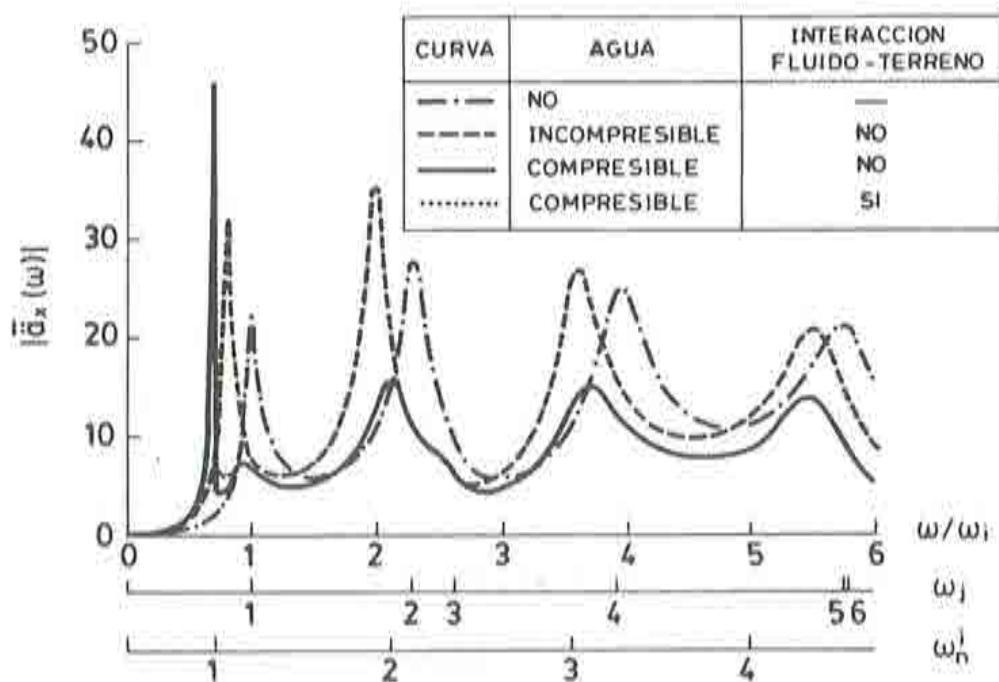


Fig. 9.9. Presa de gravedad. Resultados de la referencia [35].

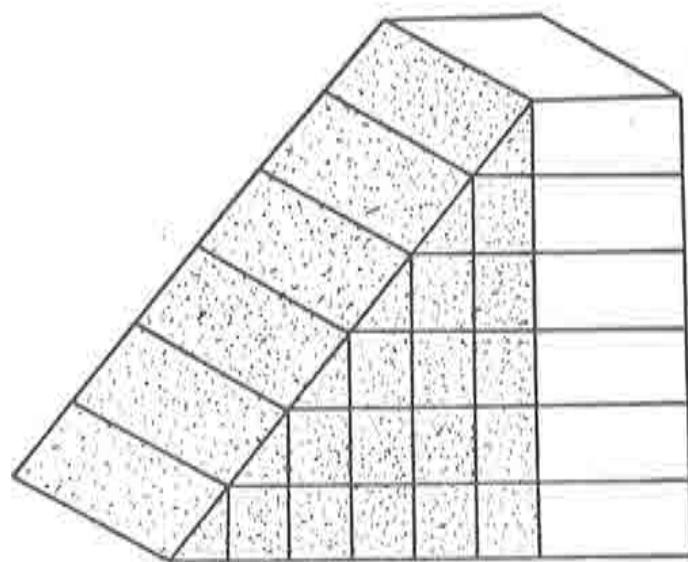


Fig. 9.10. Discretización presa de gravedad y embalse.

## INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

sido de 40 m con una sola fila de elementos, lo que equivale a 80 nodos y 6 elementos, tal y como se indica en la figura 9.10.

Para este análisis se han utilizado 6 autovalores del fluido obtenidos a través del análisis bidimensional de la sección constante del fluido.

De dicho análisis se desprenden los resultados de la figura 9.11 que son coincidentes con los dados en la referencia [22].

Si a esto añadimos que el tiempo de C.P.U. empleado es del orden de nueve veces menor que el utilizado resolviendo el sistema de ecuaciones, podemos decir que la formulación semianalítica se presenta como una herramienta válida para el estudio de dominios infinitos que puedan ser modelizados como de sección constante.

El número de autovectores necesarios es otra variable que también se ha estudiado. resolviendo el problema para 4, 6 y 10 autovalores del dominio fluido, se han obtenido diferencias inferiores al 1% en el rango de frecuencias estudiado (ésto es, de 0 a 120  $rdn/s$ ), por lo que en este caso, puede modelarse la respuesta con cuatro modos. No obstante, cabe señalar que esta conclusión no es extrapolable a otros casos en que, según sea la figura y dimensiones del fluido, se necesitarán más o menos modos, por lo que, en cualquier caso, esta variable será siempre de obligado estudio.

### 9.3.4. Efecto de la interacción con el terreno

La introducción de la interacción con el terreno tiene un efecto de amortiguamiento, disminuyendo los picos asociados a las autofrecuencias, tal como se refleja en la figura 9.12, en la que se expone el caso  $L = 2H$  con terreno que refleja el 85%.

Los efectos de la interacción con el terreno se hacen notar especialmente en los alrededores de las autofrecuencias, acotando los valores de la aceleración que tendían a infinito cuando no se consideraba.

## INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

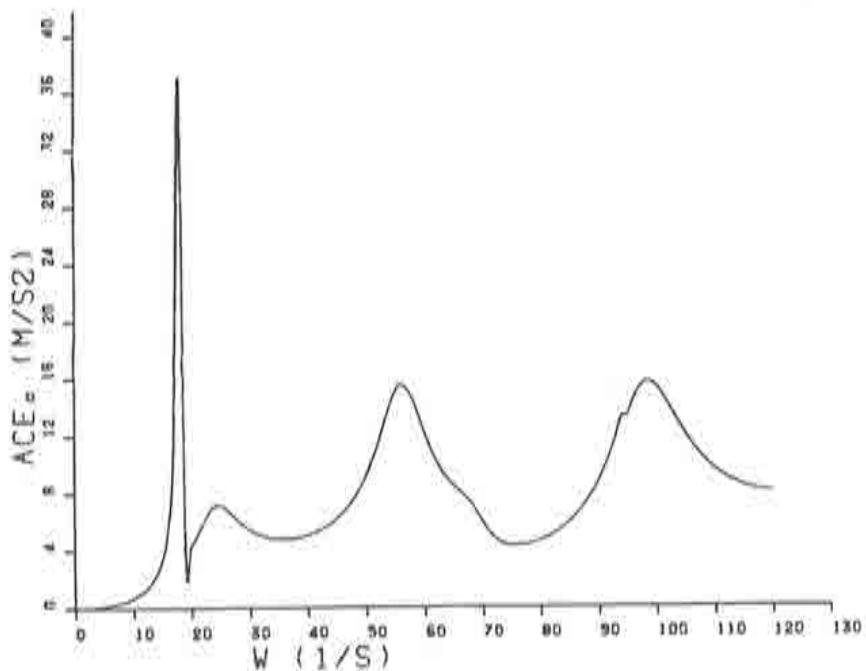


Fig. 9.11. Presa de gravedad. Aceleración en la coronación.

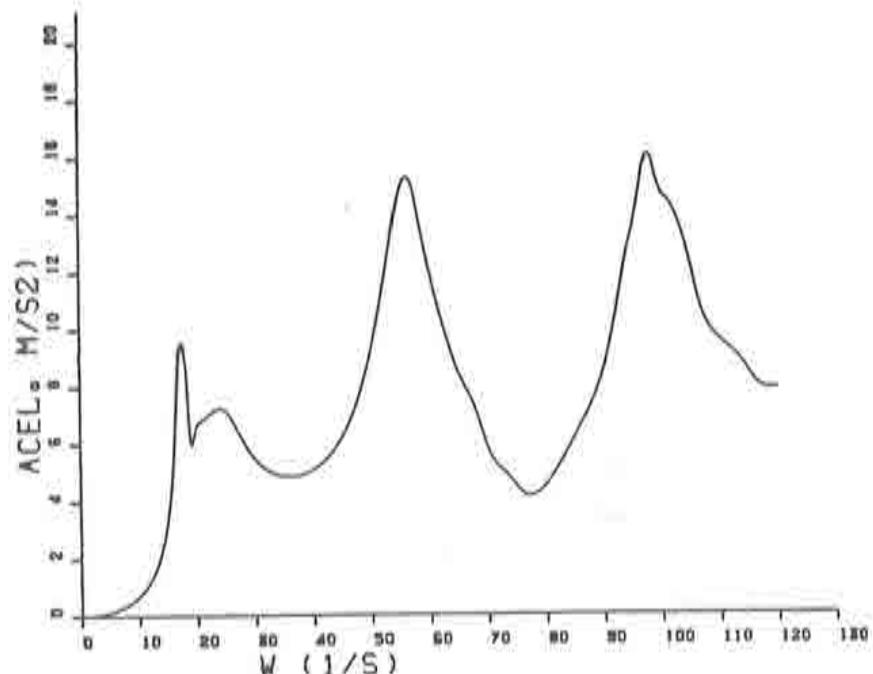


Fig. 9.12. Presa de gravedad con interacción con el terreno. Aceleración en la coronación.

## INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

Sin embargo, su efecto se hace notar poco en el resto del dominio de frecuencias de excitación, dejando prácticamente invariable la respuesta.

En la figura 9.13 se presentan los resultados obtenidos para una reflexión del 100, 85, 75, y 50% respectivamente.

El primer aspecto a señalar y que se desprende del análisis de dichos gráficos, es que las perturbaciones que se aprecian alrededor de la cuarta frecuencia, en el caso de no considerar la interacción, se han suavizado considerando una reflexión del 85% y desaparecido totalmente para valores de la reflexión menores.

Por lo que a la primera y segunda frecuencias se refiere, se observa que al disminuir la reflexión del terreno éstas tienden a acercarse, hasta el punto de fundirse en una sola en la frecuencia de 21  $rdn/s$ , para una reflexión del 50%.

Además se observa que, si bien las amplitudes de ambas frecuencias decrecen al ir disminuyendo la reflexión, la amplitud aumenta hasta un 20% con respecto a la segunda frecuencia obtenida sin terreno, al superponerse los efectos del primer modo con los del segundo.

Respecto a la tercera y cuarta frecuencia cabe decir que el valor de ambas permanece invariable, si bien las amplitudes disminuyen en un 5%.

### 9.3.5. Condición de radiación de Humar y de Zienkiewicz en el problema de interacción

Se estudia en este apartado la influencia de utilizar la condición de radiación de Humar o la de Zienkiewicz, tanto para el caso de considerar la interacción con el terreno como en caso contrario (figuras 9.14 y 9.15 respectivamente).

En ambos casos se observa que los resultados obtenidos son totalmente coincidentes para valores de la frecuencia superiores a la segunda frecuencia propia de vibración.

INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

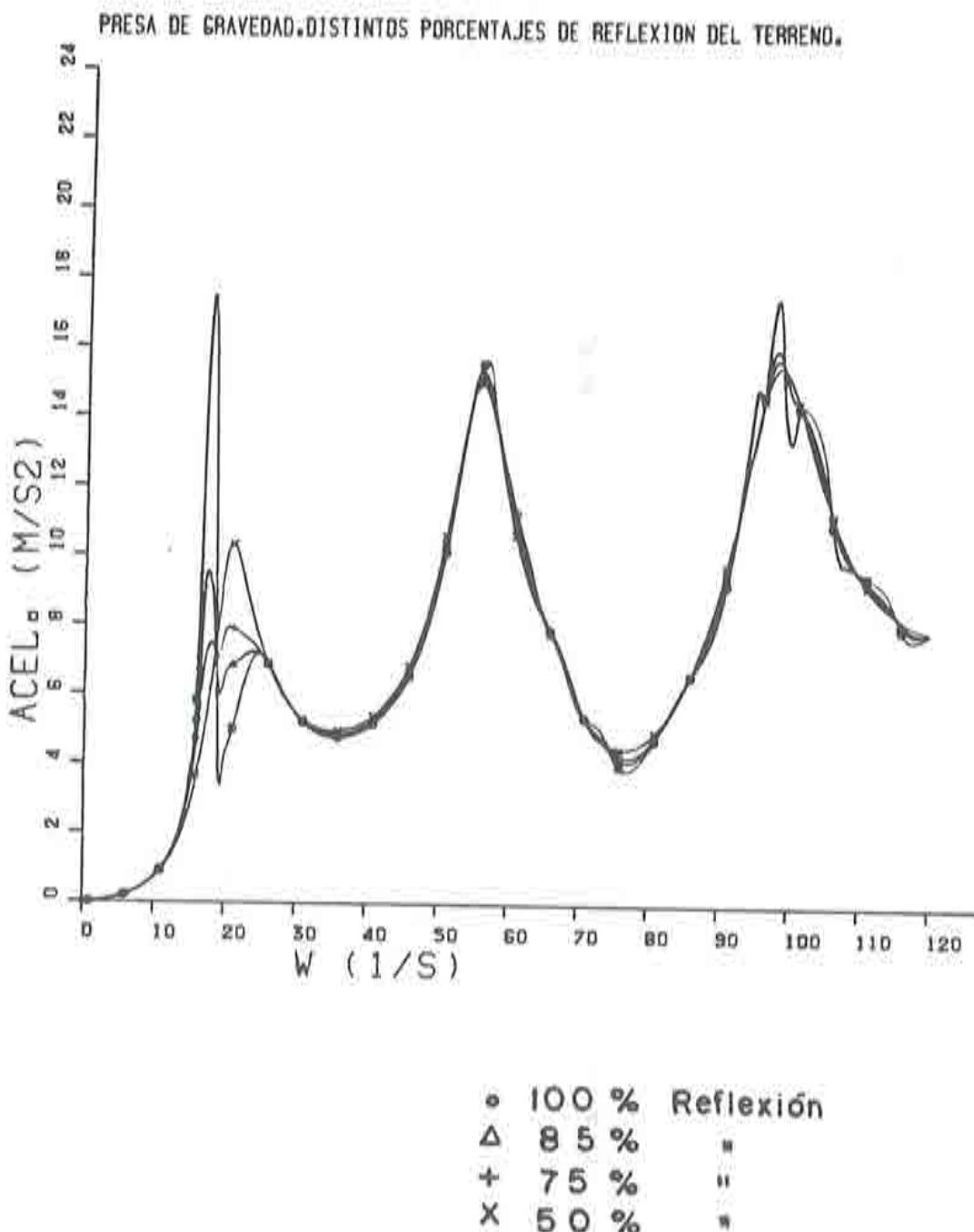
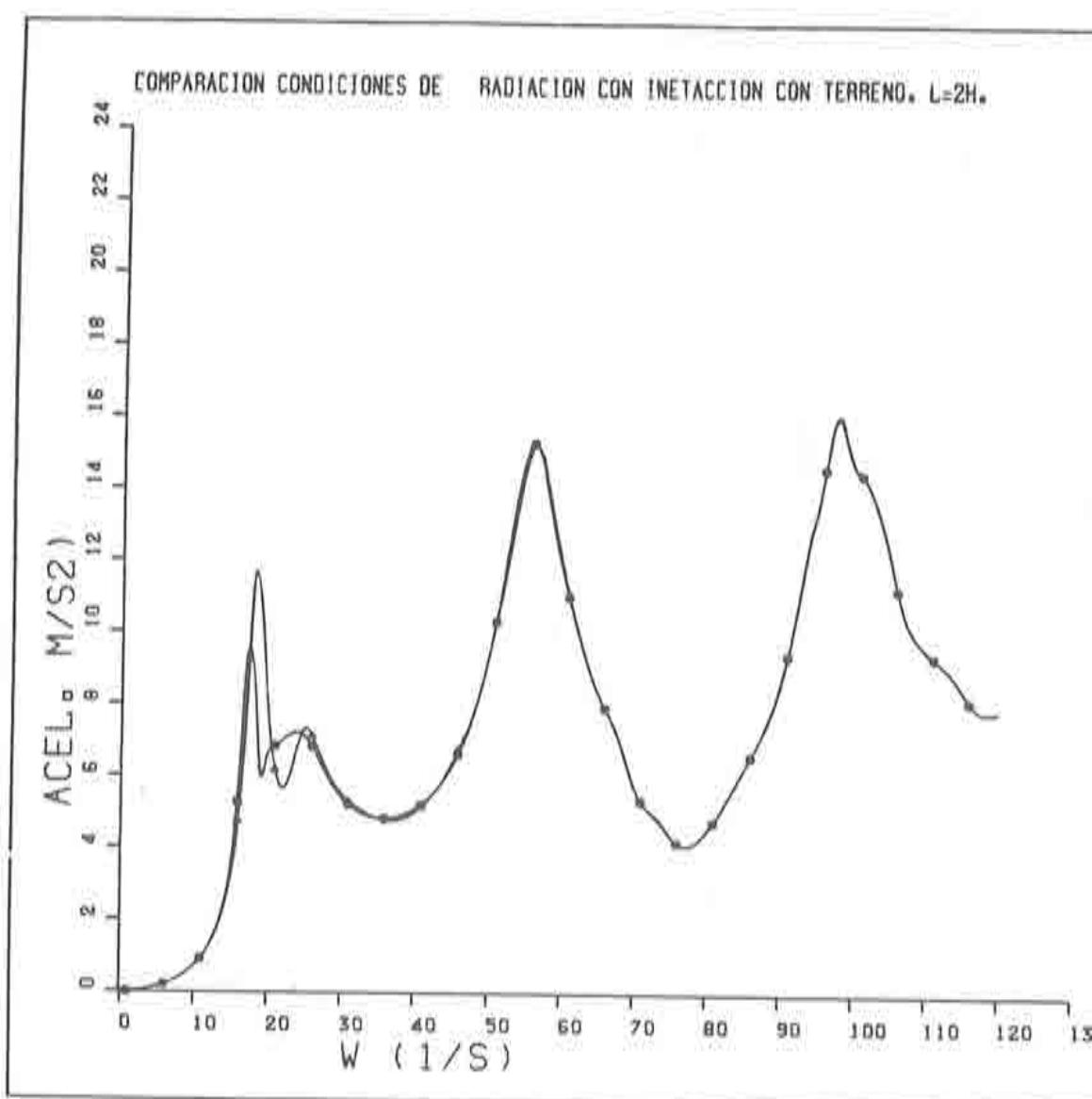


Fig. 9.13. Presa de gravedad. Distintos porcentajes de reflexión de onda en el terreno.

INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE



• HUMAR

△ SOMMERFELD

Fig. 9.14. Presa de gravedad. Comparación entre distintas condiciones de radiación. Con interacción con el terreno.  $L = 2H$ .

INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

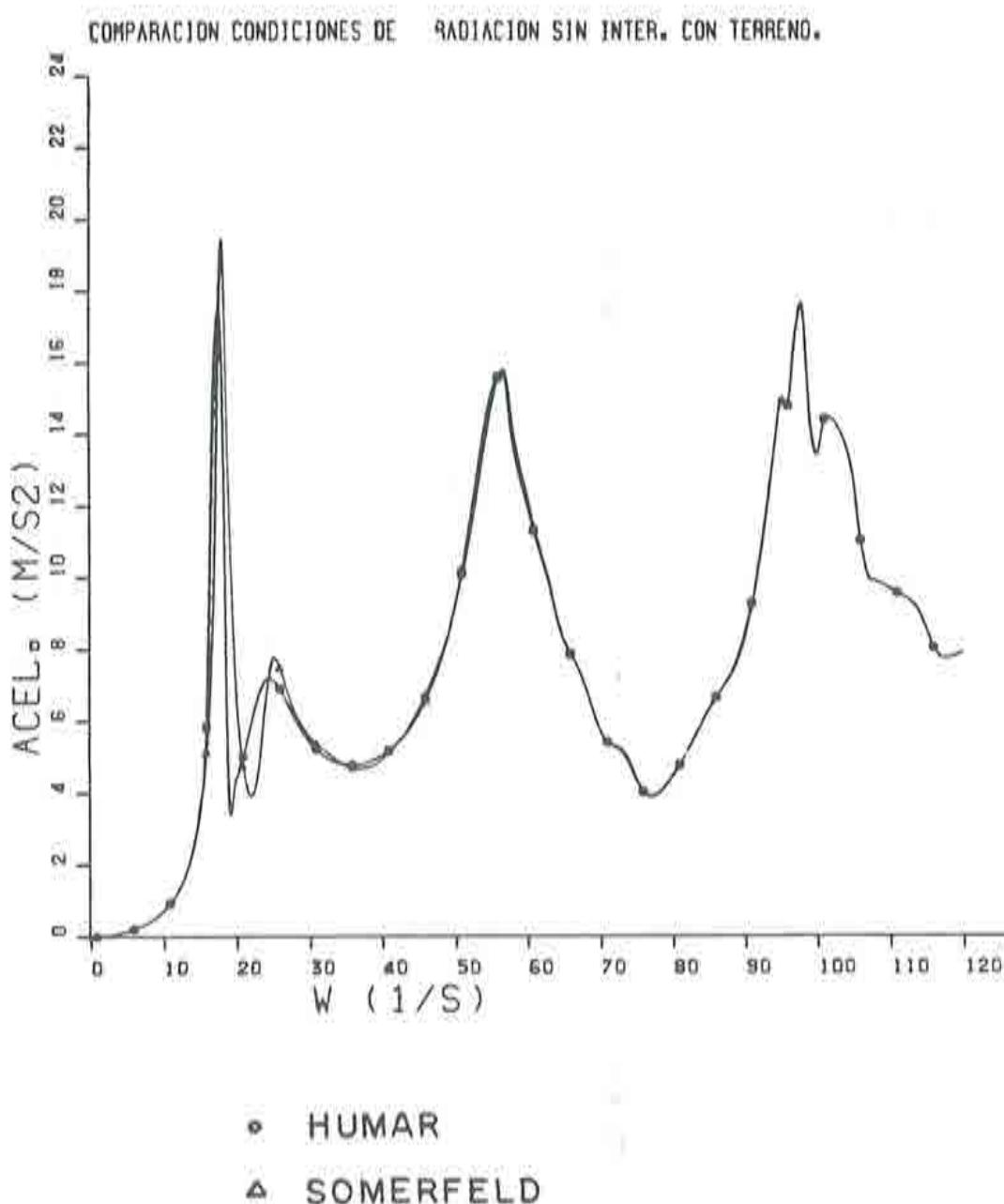


Fig. 9.15. Presa de gravedad. Comparación entre distintas condiciones de radiación. Sin interacción con el terreno,  $L = 2H$ .

## INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

Sin embargo para valores inferiores se observan diferencias de hasta un 10%, por lo que se refiere a amplitudes, y a un 2% por lo que respecta al valor de las frecuencias propias.

No obstante hay que señalar que las diferencias constatadas entre las dos condiciones de irradiación son menores que las que se obtenían en el estudio del fluido aislado, excitado por una pared rígida, y que se han estudiado en el capítulo 8.

### 9.3.6. Compresibilidad del fluido

En la figura 9.16 se presenta la respuesta obtenida, suponiendo el fluido incompresible. En ella se ha representado un segundo eje de abcisas en el que se han señalado las frecuencias propias de la presa aislada.

Analizando el resultado obtenido se observa que las frecuencias propias que resultan son ligeramente inferiores (alrededor de un 20%) a las de la presa, no apareciendo el pico asociado a la primera frecuencia propia del fluido, considerado compresible.

Ello significa que el hecho de considerar el fluido incompresible equivale a añadir una masa y unas cargas a la presa, independientemente de la frecuencia de excitación y, en general, poco dependientes de la forma del dominio fluido.

## 9.4. FLUIDO FINITO

Se expone a continuación el análisis realizado sobre un dominio de fluido finito en contacto con la misma presa de gravedad del apartado 9.3.

El dominio fluido analizado puede verse en la figura 9.17.

Los resultados obtenidos pueden verse dibujados gráficamente en la figura 9.18.

INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

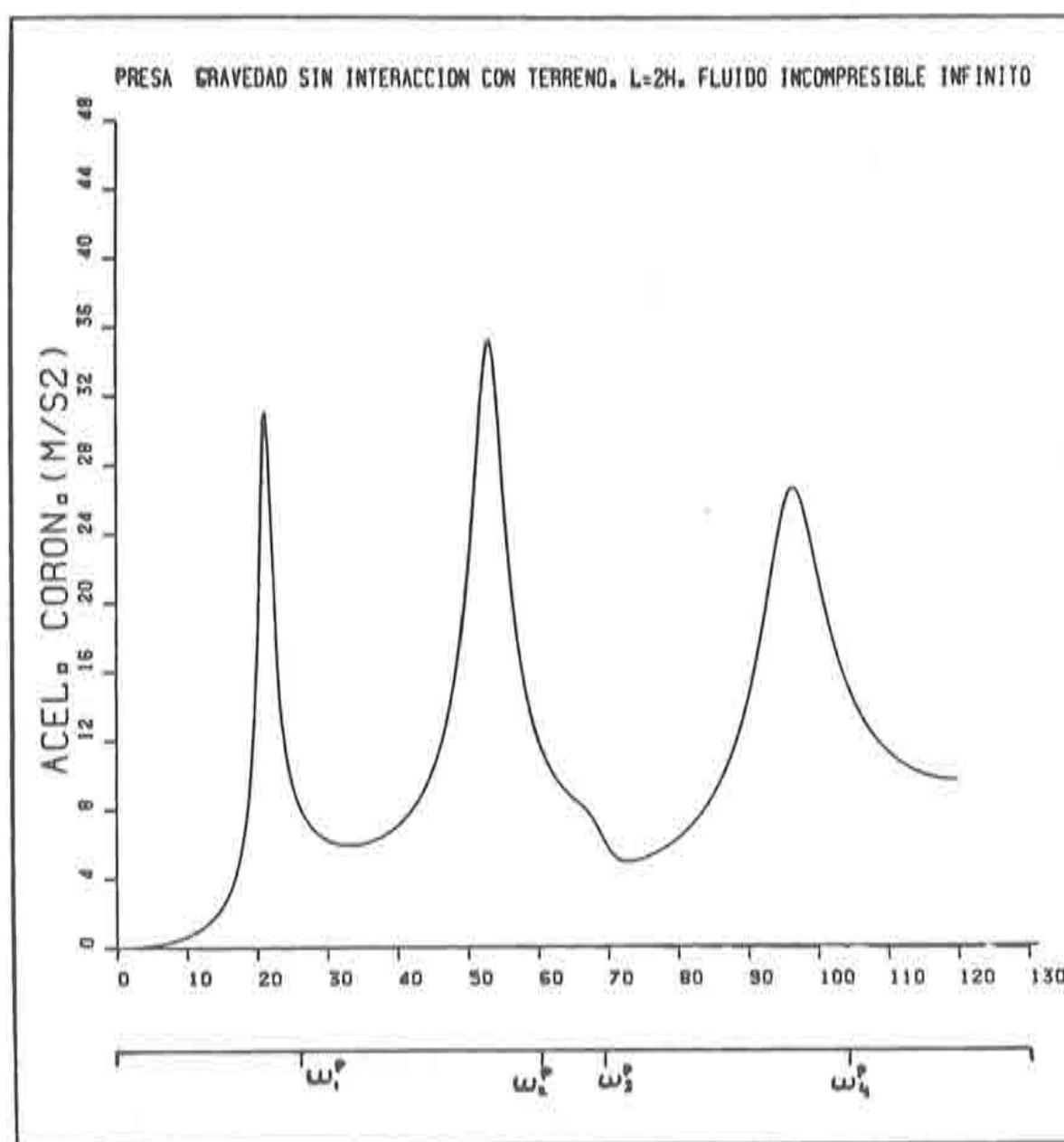


Fig. 9.16. Presa de gravedad. Fluido incompresible.

INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

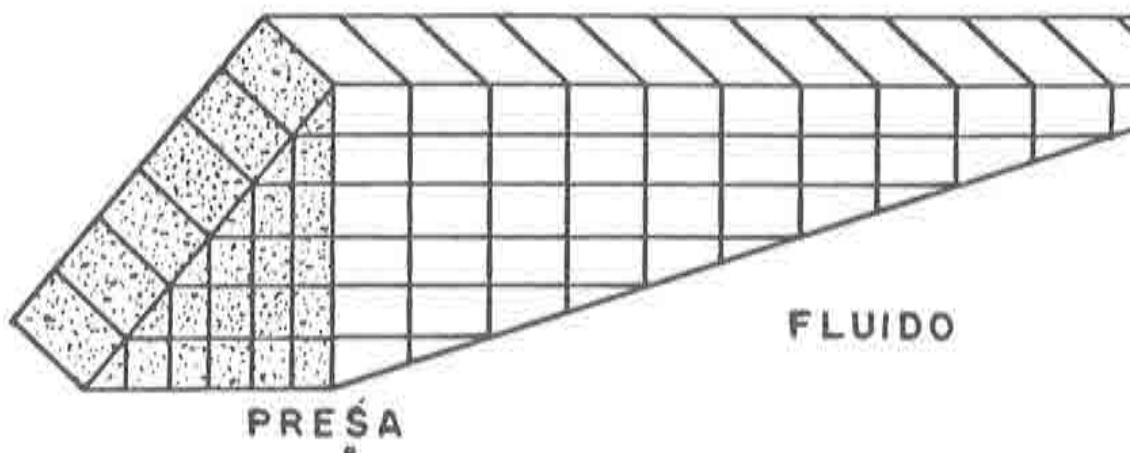


Fig. 9.17. Presa y fluido finito.

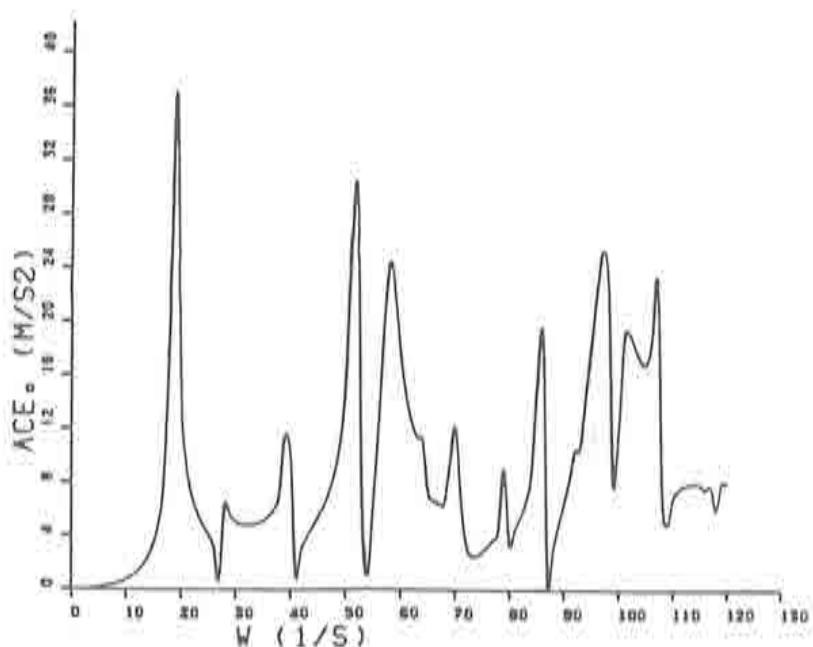


Fig. 9.18. Presa de gravedad y fluido finito: Aceleración en coronación.

INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

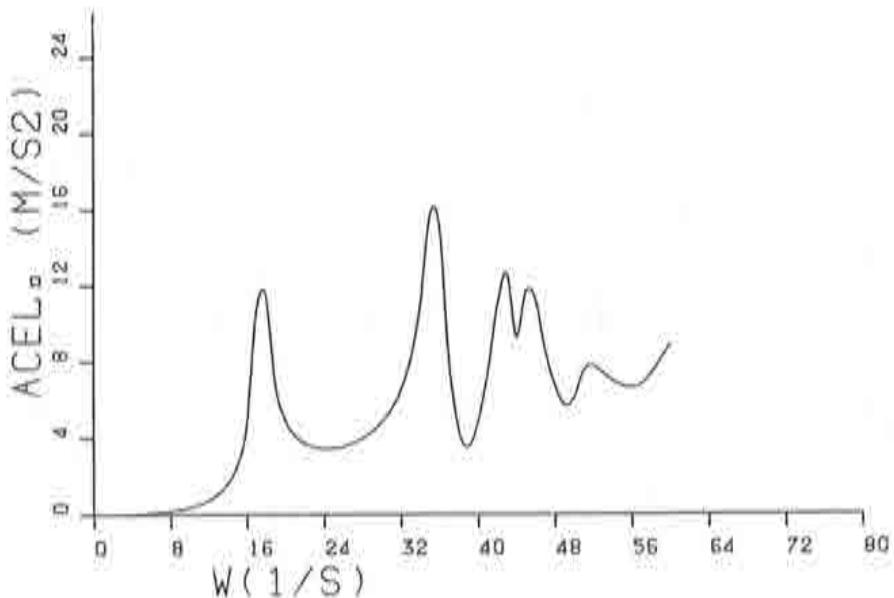


Fig. 9.19. Presa de Morrow Point. Aceleración en el punto 48.

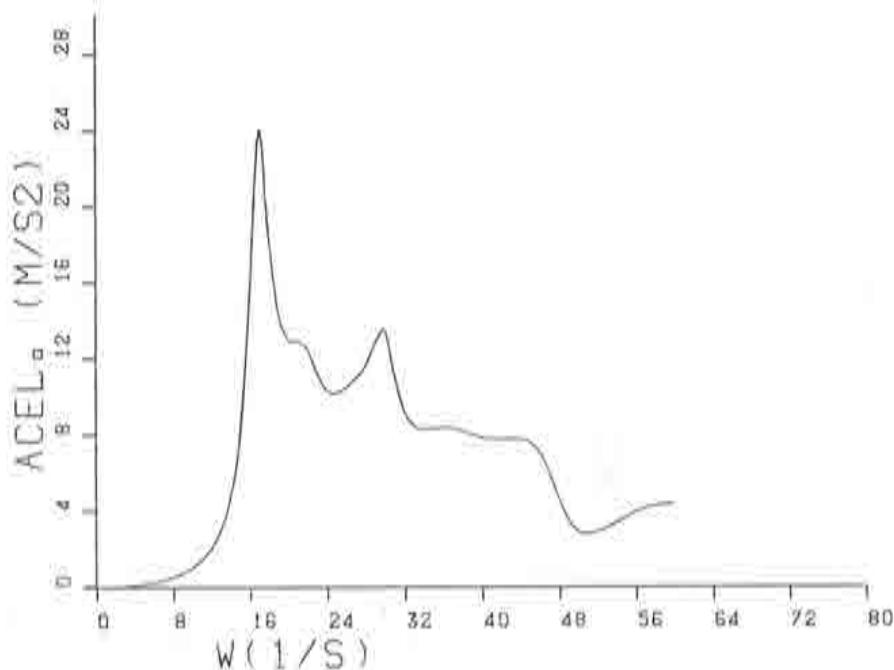


Fig. 9.20. Presa de Morrow Point. Aceleración en el punto 93.

INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

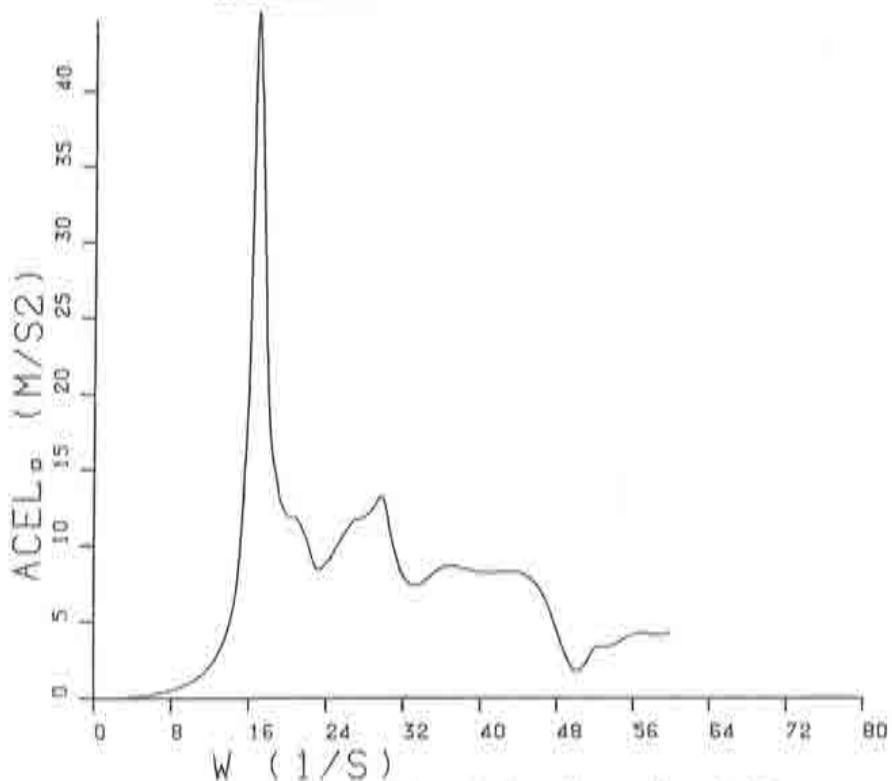


Fig. 9.21. Presa de Morrow Point. Aceleración en el punto 93.

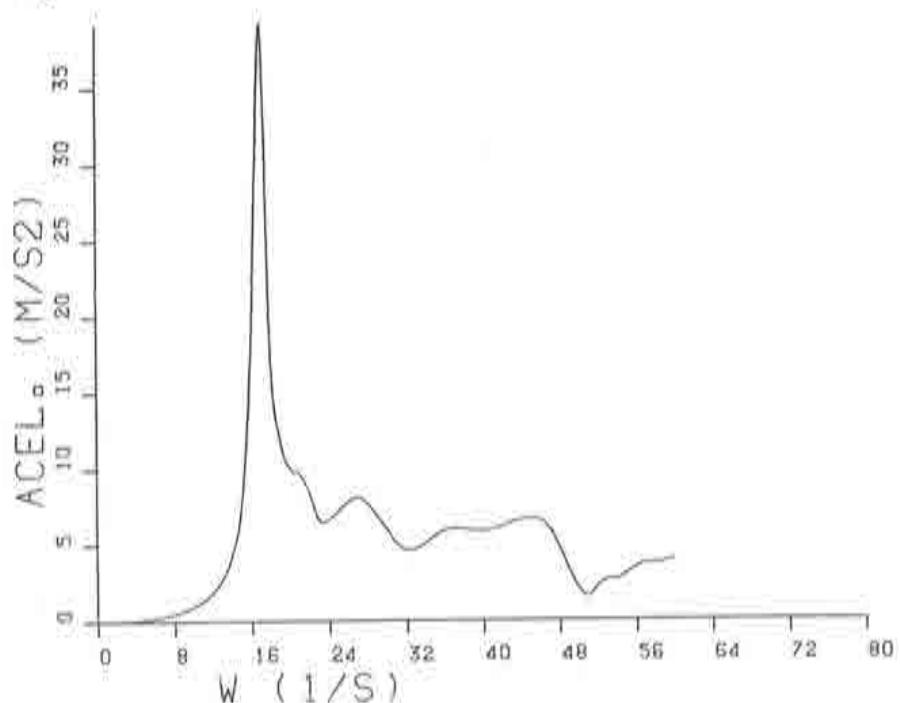


Fig. 9.22. Presa de Morrow Point. Aceleración en el punto 48.

## INTERACCION DINAMICA PRESA-EMBALSE

En dicha figura puede observarse la aparición de un mayor número de picos que los que aparecen al estudiar el dominio de fluido infinito. Las amplitudes son también mayores en este caso, hecho que puede atribuirse a la ausencia de radiación.

### 9.5. PRESA BOVEDA

Se estudia en este apartado la interacción dinámica de la presa de Morrow Point. Dicha presa se ha estudiado ya de forma aislada en el capítulo 3, y cuyos resultados han sido comparados con los proporcionados en la referencia [17]. Por lo que respecta a los ejes coordenados, el eje  $x$  coincide con la dirección del embalse, mientras que los ejes  $y$  y  $z$  son perpendiculares al  $x$ , siendo el eje  $y$  horizontal y el eje  $z$  vertical.

En las figuras 9.19 a 9.22 puede verse la aceleración en distintos puntos de la coronación de la presa. Los resultados, se ha podido comprobar que presentan una excelente concordancia con los datos en la referencia [35].

## CAPITULO 10

### ANALISIS EXPERIMENTAL

#### 10.1. INTRODUCCION

Se analiza en este capítulo, el comportamiento dinámico frente a sismo de la presa bóveda de Llauset. Se dispone de resultados experimentales que permiten evaluar la eficacia del modelo presentado.

La presa bóveda de Llauset está situada en el Pirineo Oriental y pertenece al complejo hidroeléctrico de Moralets propiedad de ENHER. Tiene 84 metros de altura y es una presa de tres centros no simétrica. En la tabla 10.1 se dan las características geométricas de la presa y en la figura 10.13 puede observarse una panorámica general de la presa y el embalse.

Las propiedades elásticas de la presa y el terreno son:

Para la presa:

- Módulo de elasticidad  $E = 295.000 \text{ kg/cm}^2$

- Coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$

## ANALISIS EXPERIMENTAL

Tabla 10.1

ECUACIONES RADIOS ARCOS CENTRALES.

Para  $z \leq 64,50$

$$R_{m1} = 3,8680876 \cdot 10^{-8} \cdot z^6 + 0,0005683783117 \cdot z^5 - 0,0554070005 \cdot z^4 - 0,19612763 \cdot z + 87,0613$$

Para  $64,50 \leq z \leq 66,50$

$$R_m = -0,627563 \cdot z + 71,582$$

$$R_{ca} = R_m + E/2$$

$$R_{cb} = R_m - E/2$$

Para  $z \leq 65,959$

$$z = 0,1 \cdot z + 6,80$$

Para  $65,959 \leq z \leq 66,50$

$$(z - 66,50)^2 + (z - 66,5150)^2 = 115^2$$

Para  $66,50 \leq z \leq 70,50$

$$E = 0,970815 \cdot z - 6,910$$

Para  $70,50 \leq z \leq 75,50$

$$E = E_{2110} + (z - 70,50) \cdot 0,374487$$

Para  $z \geq 75,50$

$$E = E_{2110} + (z - 75,50) \cdot 0,59 \quad ; \quad E = \text{Espesor, en m\'etula central.}$$

ECUACIONES RADIOS ARCOS EXTREMOS.

$$R_{ca} = 3,99281 \cdot 10^{-7} \cdot z^4 - 9,997967 \cdot 10^{-8} \cdot z^5 + 3,630367 \cdot 10^{-9} \cdot z^6 - 0,07438918 \cdot z + 157,2828317$$

$$R_{cb} = 0,3157095 \cdot 10^{-6} \cdot z^4 - 3,2909664 \cdot 10^{-7} \cdot z^5 + 0,021930502 \cdot z^6 - 1,77658865 \cdot z + 180,1198962$$

ECUACIONES PESAMENTO A.A. M\'ETULA CENTRAL.

Para  $z \leq 64,50$

$$(A - 100)^2 + (z - 64,5)^2 = 115,70^2$$

Para  $64,50 \leq z \leq 75,50$

$$A = 0,179503 \cdot z - 25,276$$

Para  $z \geq 75,50$

Traje hacia A:  $a/0,05$ ; B:  $E + A$

ANGULO CENTRAL.

Para  $z \leq 64,50$

$$\alpha = (3,9560817 \cdot 10^{-8} \cdot z^6 - 0,00554518904 \cdot z^5 + 0,036422410 \cdot z + 31,84166315) / z$$

Para  $z \geq 64,50$

$$\alpha = (0,573192 \cdot z - 0,937) / z$$

COORDENADAS DE LOS CENTROS.

$$X_{ca} = 0$$

$$X_{cb} = 0$$

$$Y_{ca} = R_{ca} \cdot A$$

$$Y_{cb} = R_{cb} \cdot B$$

$$Y_{ca} = (R_{ca} - R_{ca}) \cdot \operatorname{Sen} \alpha$$

$$R_{ca} = (R_{ca} - R_{ca}) \cdot \operatorname{Cos} \alpha + Y_{ca}$$

$$X_{cb} = (R_{cb} - R_{cb}) \cdot \operatorname{Sen} \alpha$$

$$Y_{cb} = (R_{cb} - R_{cb}) \cdot \operatorname{Cos} \alpha + Y_{cb}$$

## ANALISIS EXPERIMENTAL

- Peso específico  $\gamma = 2.4 \text{ Ton}/m^3$

Para el terreno:

- Módulo de elasticidad  $E = 164.000 \text{ kg}/cm^2$

- Coeficiente de Poisson  $\nu = 0.25$

- Peso específico  $\gamma = 2 \text{ Ton}/m^3$

La presa bóveda de Llauset, fue ensayada dinámicamente en modelo reducido en el laboratorio del ISMES (Bergamo-Italia) en Mayo de 1980 [40]. El objetivo era el estudio de dicha presa bajo el espectro de respuesta de proyecto, el cual corresponde al marcado por la Instrucción Española (Norma Sismoresistente).

Asimismo, en Noviembre de 1987 se realizó una campaña experimental a escala real, mediante una serie de explosiones. Dicha campaña fue realizada por la Sociedad de Reconocimientos Geofísicos S.A., en coordinación con los autores del presente estudio. El objetivo es comparar los resultados del ensayo en modelo con los experimentales a escala real y con los obtenidos del análisis numérico, a fin de obtener conclusiones válidas acerca del método numérico y proceder a su validación.

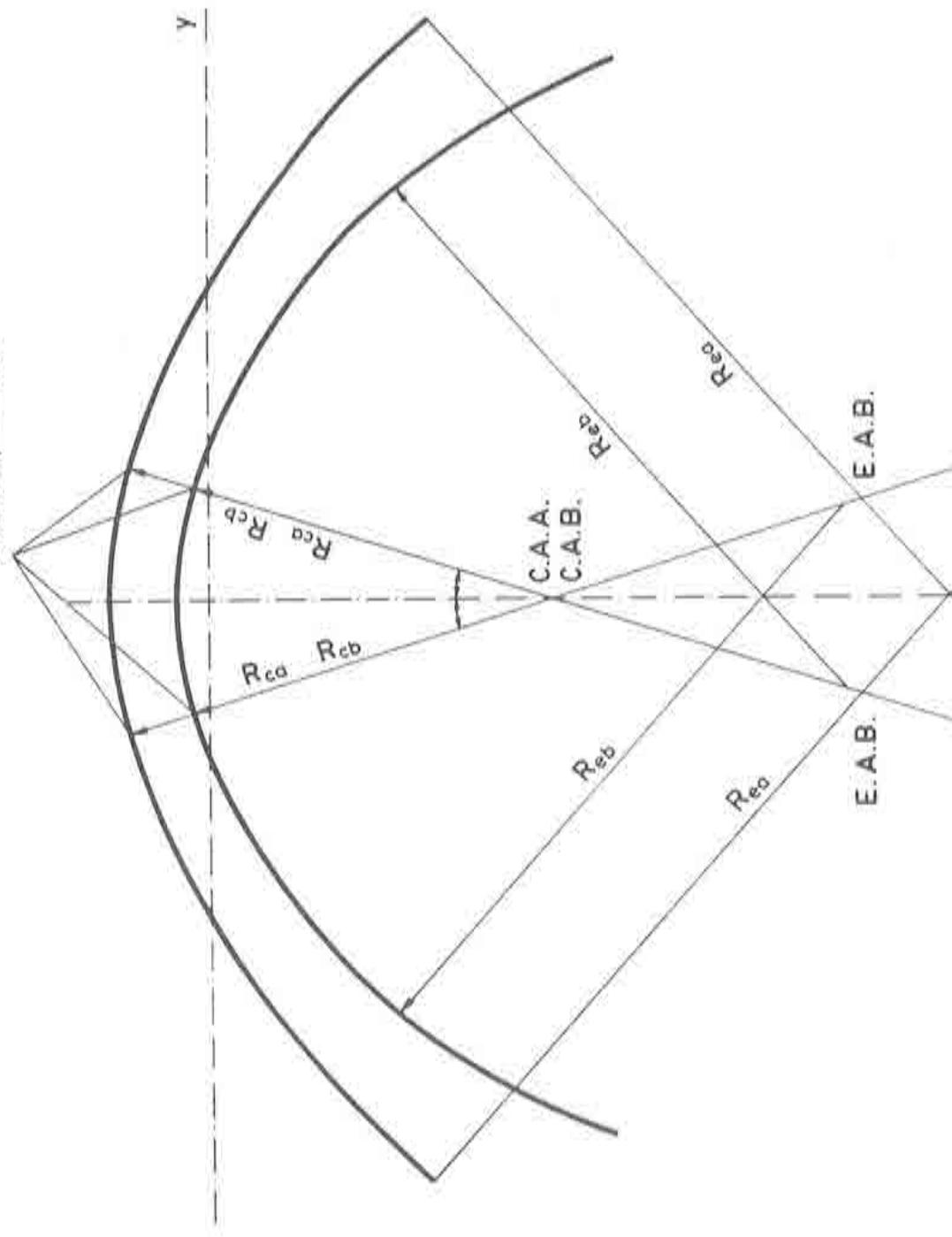
El objetivo del presente capítulo, es por tanto describir ambos ensayos, y proceder al estudio y comparación de los resultados obtenidos.

### 10.2. MODELO REDUCIDO

#### 10.2.1 Criterios de semejanza

El proyecto del modelo de acuerdo con las leyes de semejanza, exige como primer paso la individualización de las magnitudes que juegan un papel fundamental en el problema.

Puntos de tangencia arcos  
centrales y extremos



## ANALISIS EXPERIMENTAL

Desde un punto de vista general, el sistema puede considerarse formado por tres subsistemas, los cuales tienen características diferenciadas: la presa, el terreno de cimentación y el embalse, aunque como es sabido, los intercambios de energía que tienen lugar durante el terremoto, exigen un tratamiento conjunto si bien dada la complejidad y dificultad experimental es preciso realizar algunas hipótesis simplificativas. En el caso del ensayo en modelo de la presa de Llauset, se realizaron las siguientes:

- a) Cuerpo de la presa: La presa, se considera como un todo homogéneo, vinculada al entorno de excitación de modo directo a través del terreno, y de modo indirecto a través del embalse. Se obvia la presencia de juntas de dilatación y se supone comportamiento elástico. El comportamiento dinámico de la presa se modela a través de los modos propios de vibración.
- b) Terreno de cimentación: El terreno de cimentación contribuye en modo apreciable en la determinación de las frecuencias y modos propios de vibración. Se supone homogéneo y con ley de comportamiento elástico y lineal.
- c) Embalse:
  - Se desprecia el efecto de las ondas superficiales, las cuales se supone contribuyen en poco a las presiones hidrodinámicas. Este efecto además de pequeño está concentrado en las bajas frecuencias.
  - Las dimensiones del embalse tienen solamente interés para relaciones  $L/H < 3$  (siendo  $L$  la dimensión del embalse y  $H$  la altura de la presa). Para la simulación de la interacción presa-fluido, el embalse se modelará con  $L/H \geq 3$ .
  - La viscosidad del agua, dada la limitada velocidad de las partículas tiene escasa influencia. Si además se tiene en cuenta que el número de Reynolds es bajo se puede despreciar también la turbulencia.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

Por tanto, viscosidad y turbulencia no son tenidas en cuenta en las relaciones de semejanza.

- La compresibilidad del agua, es un parámetro fundamental. Suponer el agua del embalse incompresible conduce a errores de importancia.

d) Mecanismo de excitación: Se realiza la hipótesis de que se puede aislar una porción del terreno de cimentación, y que sobre su contorno se aplica una determinada excitación función del tiempo. Con tal hipótesis una vez determinados los modos propios de vibración del conjunto presa-terreno-embalse, es posible mediante descomposición modal determinar la respuesta bajo una excitación cualquiera.

Sobre la base de las hipótesis establecidas previamente, es posible escribir las ecuaciones que un modelo *correcto* debe respetar. El camino a seguir consiste en individualizar las magnitudes que intervienen en el fenómeno, y de acuerdo con el teorema II de Buckingham construir una serie de parámetros adimensionales, entre los cuales figurarán las relaciones propias de los resultados buscados [41].

Las diversas magnitudes se han agrupado de la siguiente forma:

a) Magnitudes fundamentales: Como en cualquier sistema mecánico son tres, viiniendo en general dadas por

- Longitud  $l$

- Fuerza  $f$

- Tiempo  $t$

b) Magnitudes relativas a los diversos subsistemas

b1) Cuerpo de la presa

## ANALISIS EXPERIMENTAL

Para el material, recordando que se trabaja en régimen elástico lineal, son:

- Modulo de elasticidad  $E$

- Coeficiente de Poisson  $\nu$

- Peso específico  $\gamma$

### b2) Terreno de cimentación:

Para el material de cimentación, son obviamente válidas las consideraciones realizadas para el cuerpo de la presa. En cuanto al fenómeno de disipación de energía por radiación solamente se tiene en cuenta mediante una reproducción muy extensa de dicha cimentación.

### b3) Embalse

Para la reproducción de las presiones dinámicas, los parámetros de base son

- Peso específico  $\gamma$

- Velocidad de propagación de las ondas elásticas de presión  $c$

No se ha tomado en consideración tal como se ha señalado anteriormente, ni la aceleración de la gravedad  $g$  ni la viscosidad.

### b4) Magnitudes incógnita

Son las magnitudes cuya determinación constituye el objeto del modelo.

- Magnitudes cinemáticas: Desplazamiento, velocidad y aceleración

- Deformaciones unitarias

## ANALISIS EXPERIMENTAL

### - Tensiones

Sin entrar en detalle acerca de la obtención de los distintos parámetros  $\Pi_i$  se pueden escribir las relaciones de similitud para las distintas magnitudes, expresadas en función de las razones de similitud de las tres magnitudes fundamentales

$$S_l = \frac{l_r}{l_m}$$

$$S_f = \frac{f_r}{f_m} \quad (10.1)$$

$$S_t = \frac{t_r}{t_m}$$

#### a) Escala para las fuerzas

- Fuerzas de superficie  $p$ :  $S_p = S_f \cdot S_l^{-2}$

- Fuerzas de masa  $q$ :  $S_q = S_f \cdot S_l^{-3}$

#### b) Escala para las características fisicomecánicas del material

- Módulo de elasticidad  $E$ :  $S_E = S_p$

- Coeficiente de Poisson  $\nu$ :  $S_\nu = 1$

- Peso específico  $\gamma$ :  $S_\gamma = 1$

#### c) Escala para el fluido

- Velocidad de propagación  $c$ :  $S_c = S_v = 1$

- Peso específico  $\gamma$ :  $S_\gamma = 1$

## ANALISIS EXPERIMENTAL

d) Escala para las magnitudes incógnita

- Desplazamiento  $d: S_d = S_l$

- Velocidad  $v: S_v = S_l S_t^{-1}$

- Aceleración  $a: S_a = S_l S_t^{-2}$

- Tensiones  $\sigma: S_\sigma = S_p$

De acuerdo con las ecuaciones de equilibrio dinámico

$$S_t = S_l \left( S_\gamma / S_E \right)^{1/2} \quad (10.2)$$

Asimismo se verifica

$$S_\gamma \cdot S_l = S_E \quad (10.3)$$

ecuación que preside la reproducción del peso.

### 10.2.2 Materiales del modelo

El valor del módulo de elasticidad  $E$  y del peso específico del modelo, son en general fijados por la técnica experimental (tipo de instrumentación, de excitación y de medida) y por la disponibilidad en el mercado de los constituyentes fundamentales de los distintos materiales que constituyen el modelo.

En particular, en el caso de Llauset, se creyó oportuno que el material a utilizar para la modelización de la presa, presentara las siguientes características:

## ANALISIS EXPERIMENTAL

- a) Módulo de elasticidad próximo al del hormigón de la presa, con el objeto de respetar en la medida de lo posible, las condiciones de similitud impuestas por la presencia del agua del embalse.
- b) Coeficiente de Poisson igual o muy parecido al del hormigón.
- c) Peso específico idéntico al del hormigón, al objeto de utilizar en el modelo el agua como fluido para el embalse.

Para el material que constituye la roca de cimentación, es preciso respetar las relaciones adimensionales entre los módulos de elasticidad y el peso específico de los materiales de la presa, así como que el coeficiente de Poisson sea el mismo en el prototipo que en el modelo.

Se examinan distintos tipos de materiales, eligiéndose los siguientes:

- Para la presa, se utilizan arena y granalla de hierro como áridos y resina epoxi como material ligante.
- Para la reproducción de la roca de cimentación situada en las proximidades de la presa, se utiliza un hormigón compuesto por pizarra y barita. La elección de estos dos tipos de árido, vino determinada por la necesidad de obtener un peso específico de  $2.7 \text{ T/m}^3$ .
- Para la reproducción de la roca de cimentación más alejada de la presa (en donde no se requiere un riguroso respeto a las condiciones de similitud), se utilizó un hormigón de pizarra.

Las características de los materiales del modelo son

	Peso específico ( $T/m^3$ )	Módulo de Elasticidad ( $Kg/cm^2$ )	Coeficiente de Poisson
Presa	2.46	265.000	0.25
Hormigón de barita	2.72	138.000	0.20
Hormigón de Pizarra	1.93	144.000	0.20

## ANALISIS EXPERIMENTAL

### 10.2.3. Relaciones de semejanza

La escala geométrica del modelo, se fijó teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

- Las dimensiones de la mesa de ensayo disponible eran de  $6 \times 8 \text{ m}^2$  en planta y 3 m en profundidad.
- Necesidad de reproducir una extensión considerable de roca y del agua del embalse.
- Por las características de los instrumentos de excitación y medida disponibles.

Por todo ello, se eligió como escala geométrica  $S_l = 1 : 100$

La elección del material del modelo, fija automáticamente las otras dos relaciones de escala.

$S_E = \frac{E_r}{E_m}$  = relación entre las fuerzas de superficie y en particular entre los módulos de Young

$S_\gamma = \frac{\gamma_r}{\gamma_m}$  = relación entre los pesos específicos

Se obtienen por tanto, las siguientes relaciones de similitud

a) Magnitudes fundamentales:

- Longitud  $S_l = L_r / L_m = 100$
- Fuerza  $S_f = F_r / F_m = S_E S_l^2 = 11.32 \times 10^3$
- Tiempo  $S_t = S_l S_\gamma^{1/2} S_E^{-1/2} = 92.83$

b) Características fisicomecánicas de los materiales

## ANALISIS EXPERIMENTAL

- Módulo de elasticidad  $S_E = E_r/E_m = 1.132$

- Coeficiente de Poisson  $S_\nu = \nu_r/\nu_m = 1.25$

- Peso específico  $S_\gamma = \gamma_r/\gamma_m = 0.975$

### c) Características del líquido

Velocidad de propagación de las ondas elásticas  $S_c = 1$

### d) Magnitudes incógnita

- Desplazamientos  $S_l = 100$

- Velocidad  $S_v = S_l S_t^{-1} = 1.077$

- Acceleración  $S_a = S_l S_t^{-2} = 0.0116$

- Tensiones  $S_\sigma = S_E$

En la figura 10.1 puede verse un esquema en planta y sección del modelo.

#### 10.2.4 Observaciones sobre la validez del modelo

Para tener una correcta información acerca de los límites en que se han cumplido las leyes de semejanza, hay que tener presente que:

- El empleo como material de construcción para el cuerpo de la presa de una pasta a base de resina epoxi, ha sido con el objeto de obtener un módulo de elasticidad satisfactorio desde el punto de vista experimental. Sin embargo, ello trae consigo un error del 25% en el valor del módulo de Poisson.
- El estudio de la interacción dinámica fluido-embalse, se ha realizado introduciendo agua para modelar el fluido. Por tal motivo no se cumplen estrictamente las condiciones de semejanza, por cuanto la

ANALISIS EXPERIMENTAL

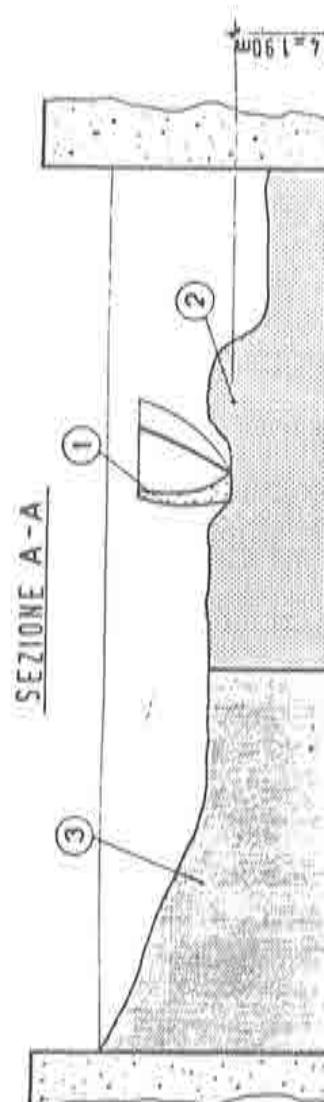
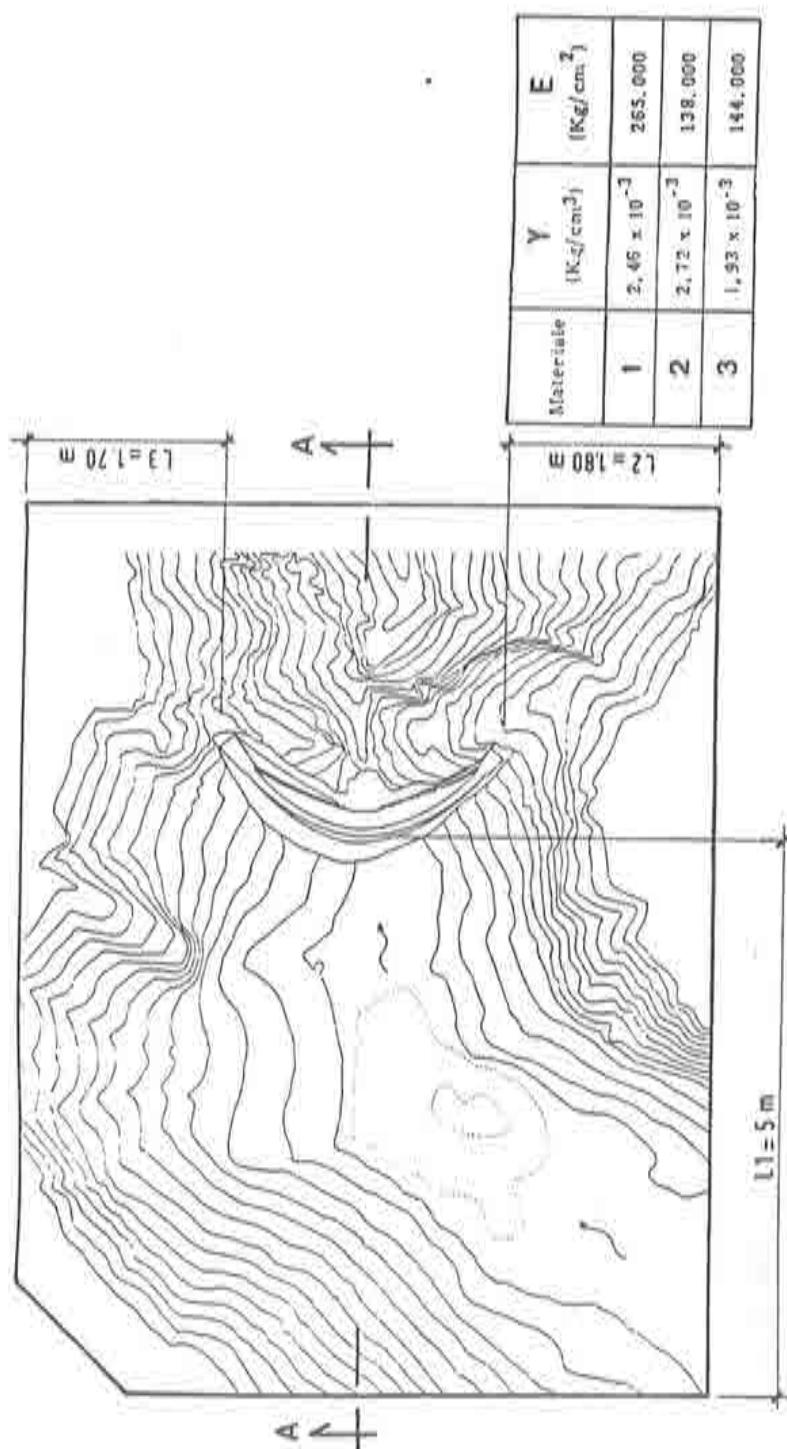


Fig. 10.1. Planta y sección del modelo.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

velocidad de transmisión de onda de presión de la presa real con respecto al modelo debiera ser de  $S_v = 1.077$ , mientras que se ha tomado igual a uno.

- Por lo que respecta a las condiciones de contorno, la parte objeto de modelaje se reprodujo de forma correcta, si bien no se tomaron precauciones especiales para absorber las ondas de radiación en los contornos artificiales.

### 10.2.5. TECNICA EXPERIMENTAL

La esquematización adoptada por el ensayo del conjunto es la correspondiente como queda dicho a un sistema elástico lineal con amortiguamiento viscoso. Bajo tales hipótesis, las ecuaciones del sistema se escriben

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t) \quad (10.3)$$

Puesto que desde el punto de vista experimental resulta imposible la determinación de estas matrices, habida cuenta del elevado número de grados de libertad que comporta la estructura discretizada, se calcula la respuesta del sistema elástico como contribución de un número limitado de modos de vibración. Por ello, el ensayo se realizó introduciendo el sistema de fuerzas  $f(t)$  más conveniente para determinar los primeros modos. Para ello, se realiza una transformación del sistema (10.3) de tal forma que queden explícitas las frecuencias propias y los modos.

Aplicando al sistema (10.3) la transformada de Laplace

$$B(s)U(s) = F(s) \quad (10.4)$$

en donde

## ANALISIS EXPERIMENTAL

$$\mathbf{B}(s) = s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (10.5)$$

es una matriz de orden  $n \times n$

La matriz de transferencia se define

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{B}(s)^{-1} \quad (10.6)$$

Esta matriz de transferencia juega un papel de especial importancia en la determinación experimental de la respuesta dinámica.

Resolviendo el sistema (10.4) se obtiene

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{H}(s) \mathbf{F}(s) \quad (10.7)$$

Las ecuaciones anteriores, de hecho, permiten calcular la respuesta de la estructura  $\mathbf{U}(s)$  sometida a un sistema de cargas  $\mathbf{F}(s)$ , siempre que se conozca el valor de la matriz de transferencia  $\mathbf{H}(s)$

Un elemento cualquiera de la matriz  $\mathbf{H}(s)$  se puede escribir

$$h_{ij}(s) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_{2n-2} s^{2n-2}}{\det[\mathbf{B}(s)]} \quad (10.8)$$

Y si se denomina  $p_k$  al  $k^{\text{esimo}}$  polo coincidente con la  $k^{\text{esima}}$  raíz de la ecuación algebraica

$$\det[\mathbf{B}(s)] = 0 \quad (10.9)$$

## ANALISIS EXPERIMENTAL

la matriz  $H(s)$  se puede escribir

$$H(s) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{a_k}{s - p_k} \quad (10.10)$$

Las raíces de la ecuación (10.9) están constituidas por  $n$  pares de soluciones, siendo los valores de cada par conjugados complejos uno respecto al otro.

Por ello la ecuación (10.10) se puede escribir

$$H(s) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{a_k}{s - p_k} + \frac{a_k^*}{s - p_k^*} \right] \quad (10.11)$$

La precedente expresión (10.11) es particularmente interesante por cuanto puede demostrarse que el polo  $p_k$  y la matriz  $a_k$  están relacionados de manera simple con las características del modo  $k^{\text{esimo}}$ .

Concretamente se tiene que

$$\begin{aligned} p_k &= -c_k + i\omega_k \\ p_k^* &= -c_k - i\omega_k \end{aligned} \quad (10.12)$$

siendo

$\omega_k$  =  $k^{\text{esima}}$  frecuencia de vibración no amortiguada de la estructura.

$c_k$  = Amortiguamiento en  $rdn/s$  del sistema.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

$\beta_k = c_k / \sqrt{c_k^2 + \omega_k^2}$  = Tanto por uno de amortiguamiento respecto al crítico.

$a_k$  está relacionada con la forma compleja  $k^{\text{esima}}$  del correspondiente modo de vibración

$$a_k = A_k \phi_k \phi_k^T \quad (10.13)$$

en donde  $A_k$  es una constante compleja que puede tomarse  $A_k = 1$  con un adecuado criterio de normalización

Introduciendo las relaciones anteriores en (10.11)

$$H(s) = \sum_{k=1}^n \frac{\phi_k \phi_k^T}{s - (-c_k + i\omega_k)} + \frac{\phi_k^* \phi_k^{*T}}{s - (-c_k - i\omega_k)} \quad (10.14)$$

Puesto que se supone matriz de amortiguamiento proporcional, los modos  $\phi_k$  son todos ellos reales.

Las columnas de la matriz  $H(s)$  contienen toda la información relativa a los modos de vibración. El criterio general de ensayo es por tanto excitar la estructura, midiendo simultáneamente la respuesta de forma que se pueda determinar una columna o una fila de  $H(s)$ .

Para ello, puede operarse aplicando una fuerza concentrada  $f_q(t)$  en un punto  $q$  de la estructura y midiendo la respuesta  $r_i(t)$  en los demás puntos.

Operando con transformadas de Laplace

$$\begin{bmatrix} R_1(s) \\ \vdots \\ R_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & \dots & h_{1n}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1}(s) & \dots & h_{nn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = F_q(s) \begin{bmatrix} h_{1q}(s) \\ \vdots \\ h_{nq}(s) \end{bmatrix} \quad (10.15)$$

de donde

$$\begin{bmatrix} h_{1q}(s) \\ \vdots \\ h_{nq}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{F_q(s)} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ \vdots \\ R_n(s) \end{bmatrix} \quad (10.16)$$

El punto de aplicación de la carga, debe elegirse de forma que no coincida con ninguno de los nodos de los modos de vibración cuyas características se quieren determinar. Para evitar este inconveniente se puede proceder a determinar las funciones de transferencia relativas a más posiciones de excitación.

Otra forma alternativa, más ventajosa que la anterior consiste en excitar simultáneamente varios puntos. Para ello, si se cargan simultáneamente  $m$  puntos mediante una serie de fuerzas  $F_q(\bar{\omega})$ , la correspondiente respuesta en un punto cualquiera  $j$  viene dada por

$$\begin{aligned} R_j(\bar{\omega}) &= \sum_{q=1}^m F_q h_{jq}(\bar{\omega}) = \sum_{q=1}^m F_q \sum_{k=1}^n \frac{\phi_j^k \phi_q^k}{i\bar{\omega} - p_k} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{q=1}^m F_q(\bar{\omega}) \phi_q^{(k)} \right) \frac{\phi_j^k}{i\bar{\omega} - p_k} \end{aligned} \quad (10.17)$$

Bastará por tanto anular o reducir el término

## ANALISIS EXPERIMENTAL

$$\sum_{q=1}^m F_q(\omega) \phi_q^k \quad (10.18)$$

para anular o reducir la contribución del modo  $k^{\text{esimo}}$  en la curva  $R_j(\bar{\omega})$ .

En la figura 10.2 puede verse el esquema de montaje de los excitadores y de los acelerómetros. Asimismo en la figura 10.3 pueden verse detalladas las posiciones de los acelerómetros así como de los excitadores. La figura 10.4 muestra la posición de las rosetas extensométricas para medir las tensiones. Para la medida de las presiones hidrodinámicas se utilizaron células de presión dispuestas en el paramento aguas arriba, tal como indica la figura 10.5.

Por otra parte, en las figuras 10.6 a 10.9 pueden verse cuatro funciones de transferencia obtenidas. En la 10.10 puede observarse una combinación que pone en evidencia el primer modo. Una combinación desacopla el segundo modo respecto del primero y tercero se representa en la figura 10.11, mientras que en la figura 10.12 se observa una combinación que desacopla el cuarto modo, respecto de los dos primeros y del tercero.

### 10.2.6. PRESIONES HIDRODINAMICAS Y MATRIZ DE MASA EQUIVALENTE

En las condiciones de embalse lleno, el efecto de las presiones hidrodinámicas sobre la respuesta de la presa, se realizó recurriendo al concepto de *masa equivalente*, la cual se determina a partir de las sobrepresiones medidas.

Se realizó la hipótesis de que la sobrepresión medida en el paramento aguas arriba de la presa, es proporcional a la componente radial horizontal de la aceleración en cada punto.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

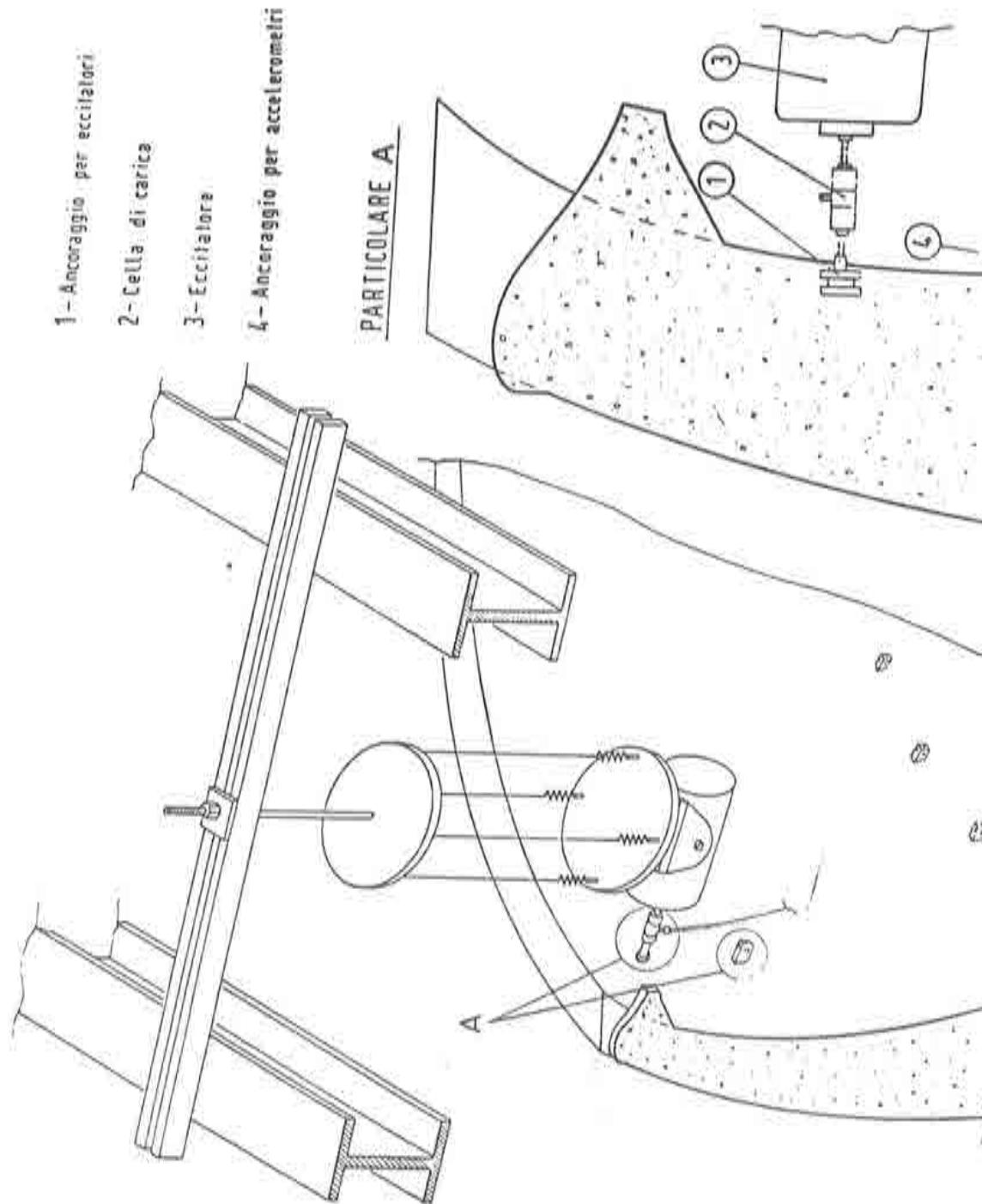


Fig. 10.2. Esquema de excitadores y acelerómetros.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

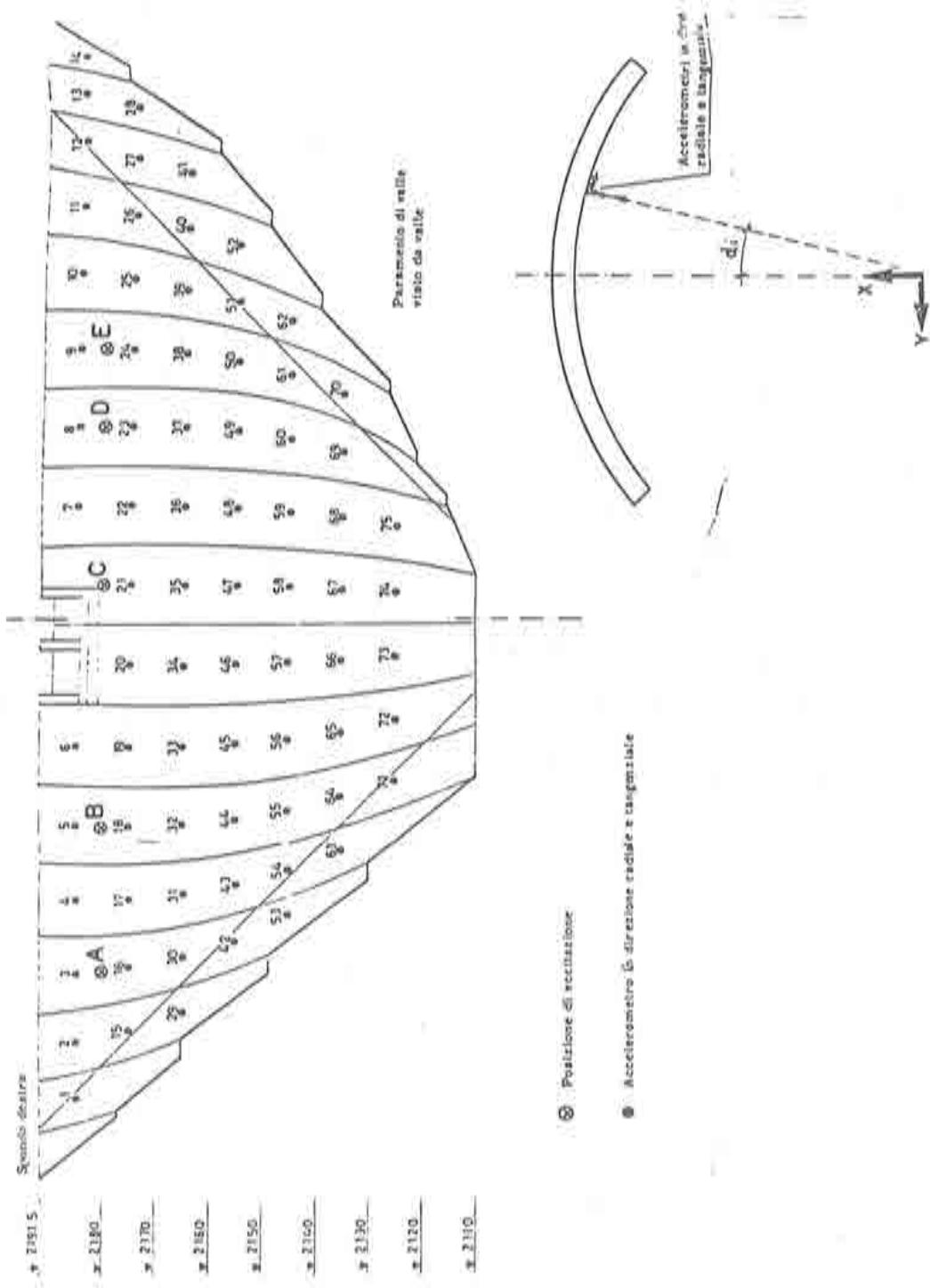


Fig. 10.3. *Ensayo en modelo: Posiciones detalladas de acelerómetros y excitadores.*

## ANALISIS EXPERIMENTAL

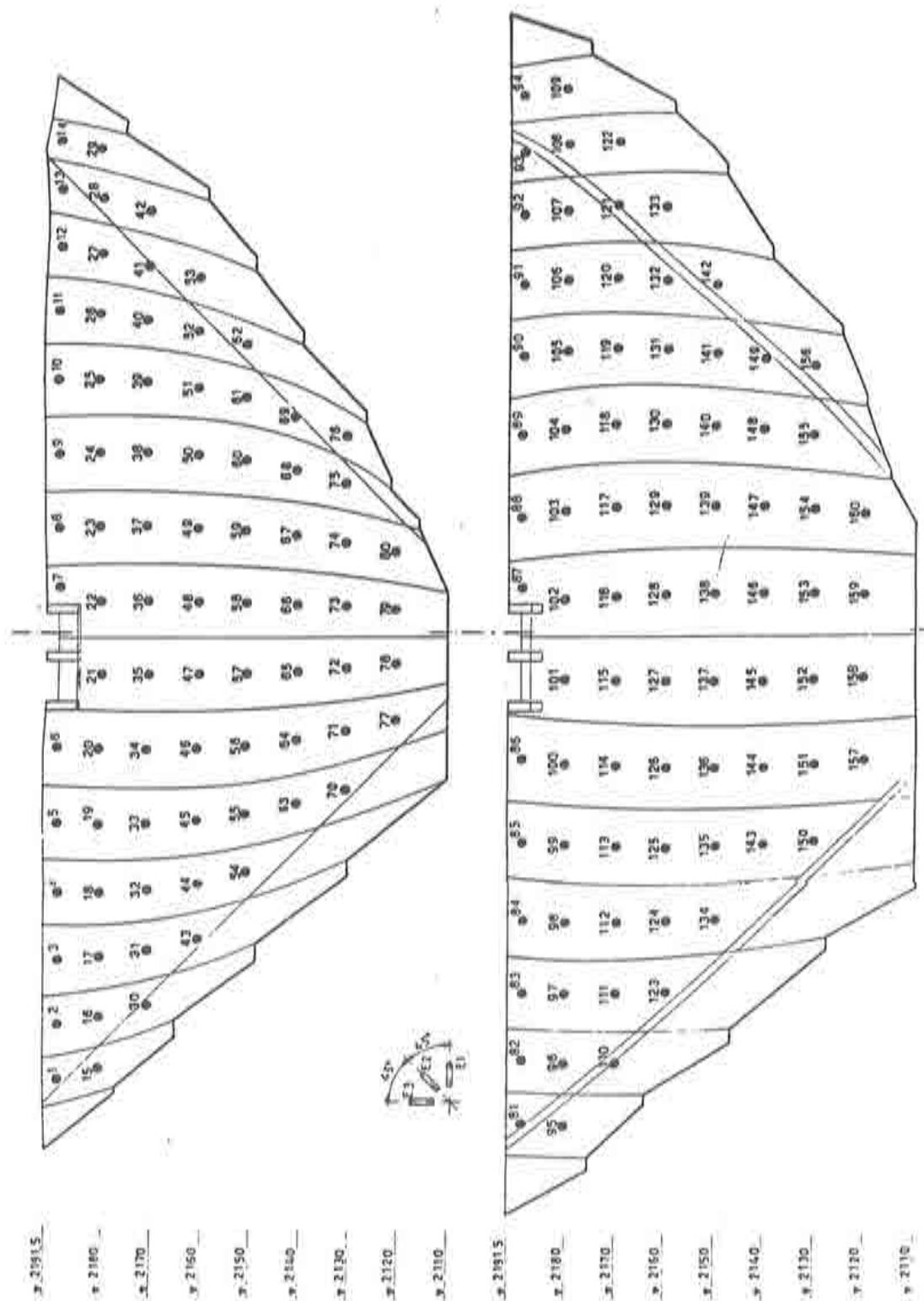


Fig. 10.4. *Ensayo en modelo: Posición de las rosetas extensométricas.*

## ANALISIS EXPERIMENTAL

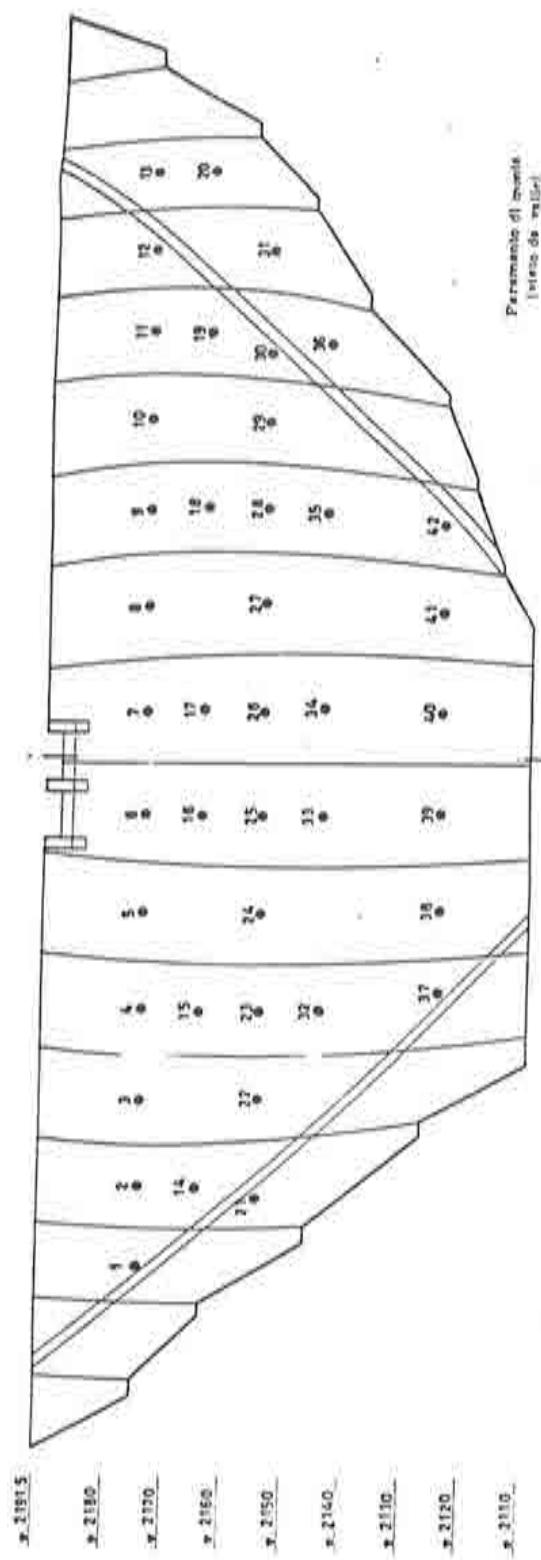


Fig. 10.5. *Ensayo en modelo: Células de presión.*

## ANALISIS EXPERIMENTAL

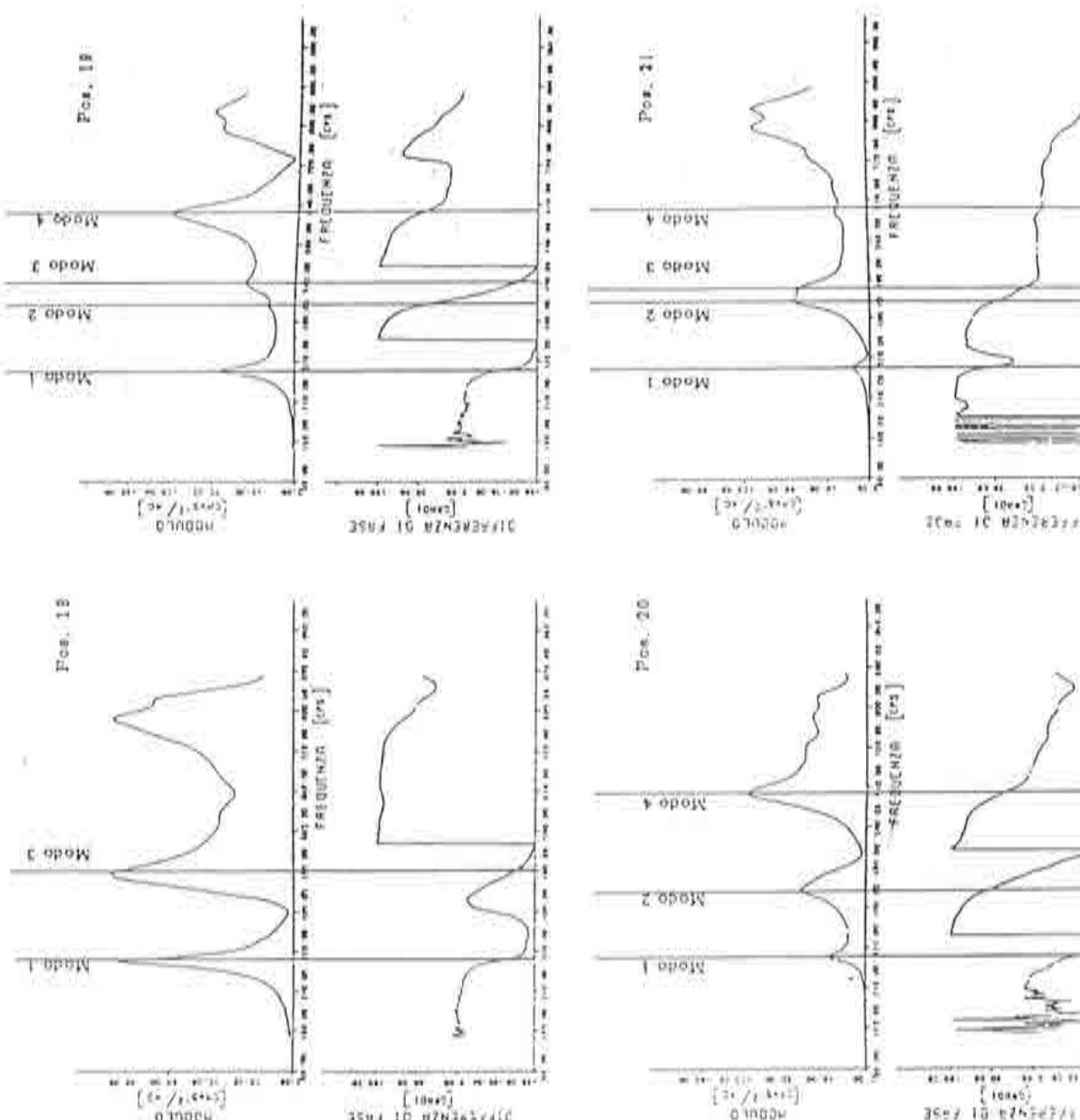


Fig. 10.6 Ensayo en modelo: Funciones de transferencia.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

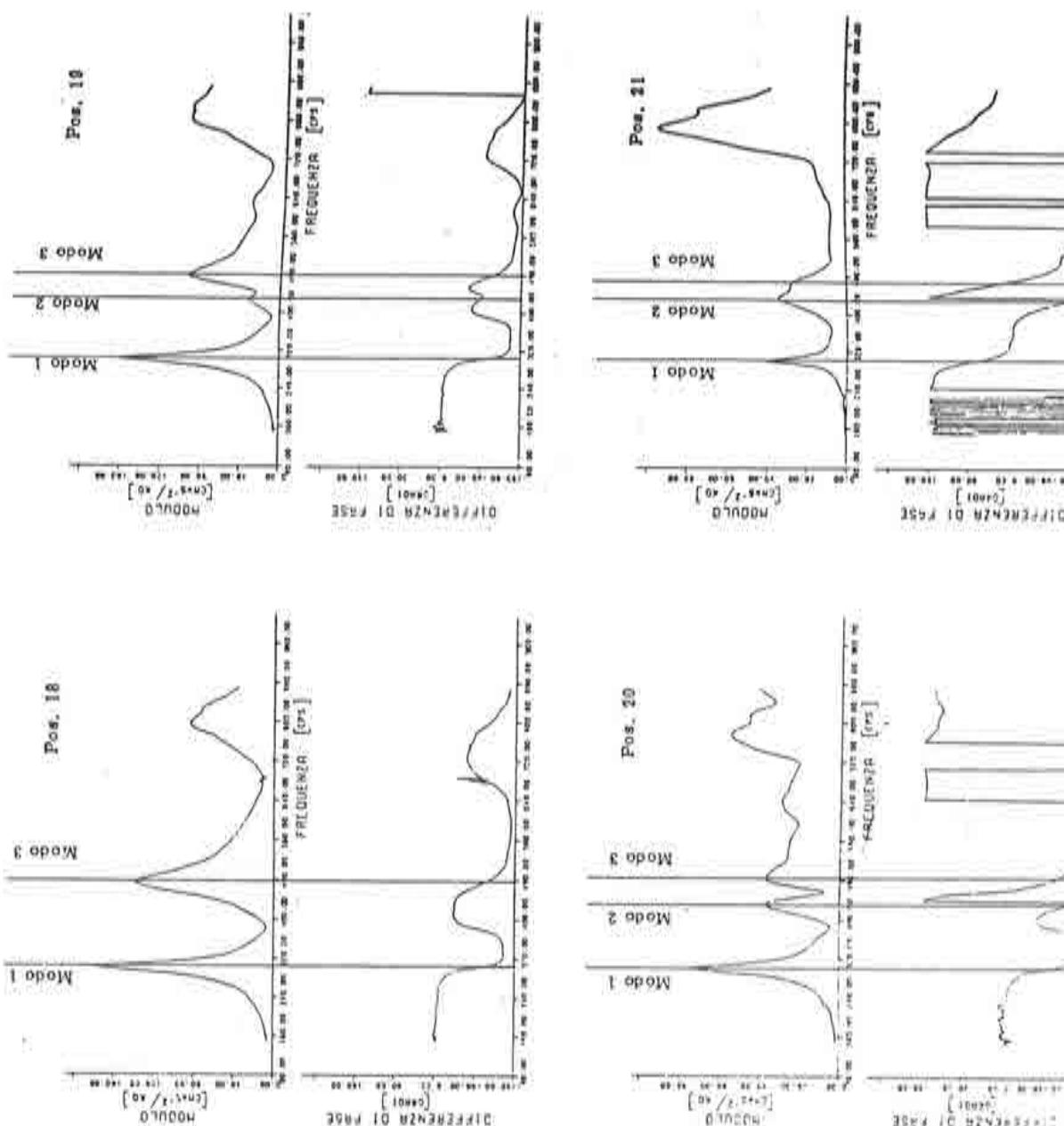


Fig. 10.7. Ensayo en modelo: Funciones de transferencia.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

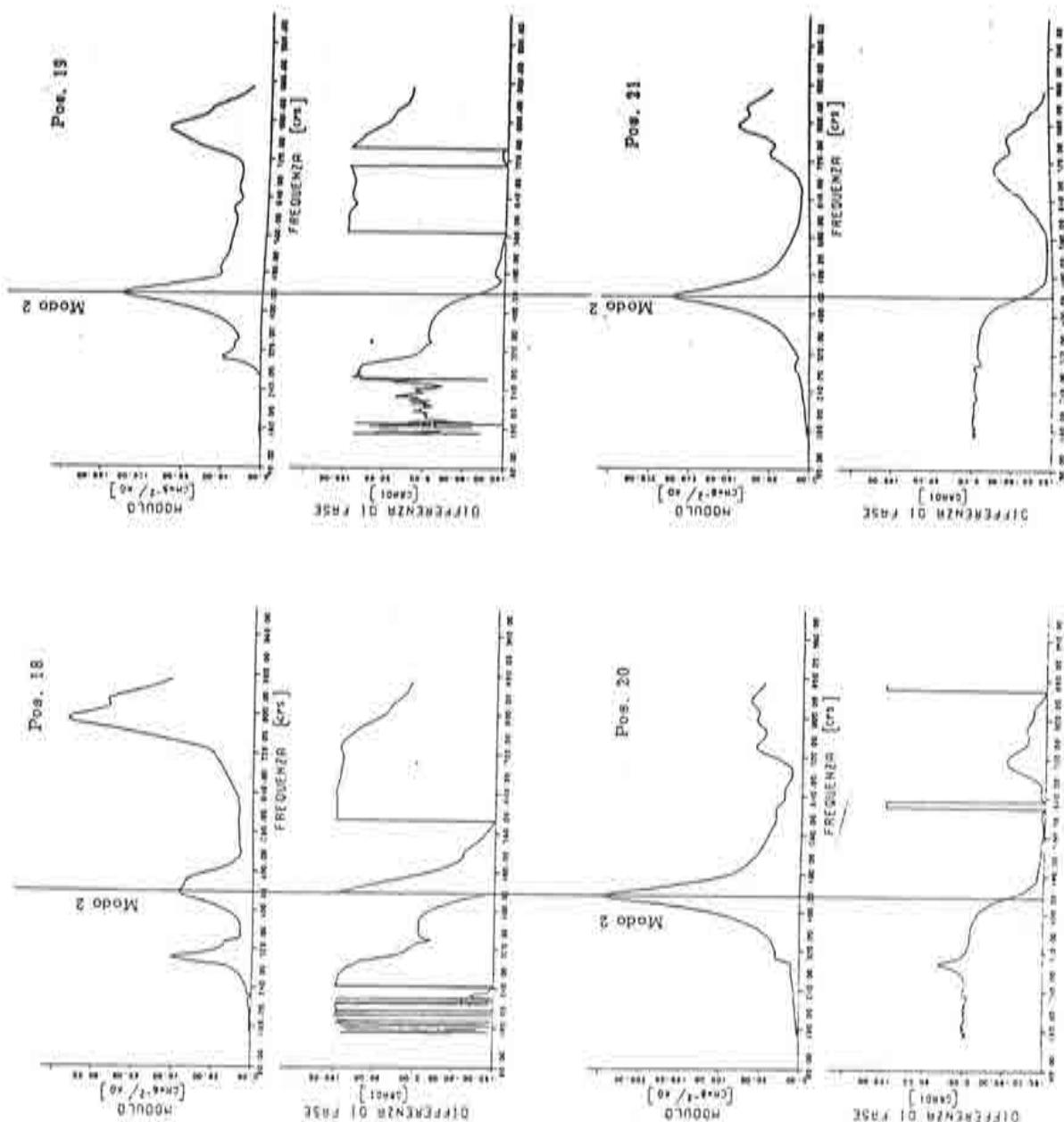


Fig. 10.8. Ensayo en modelo: Funciones de transferencia.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

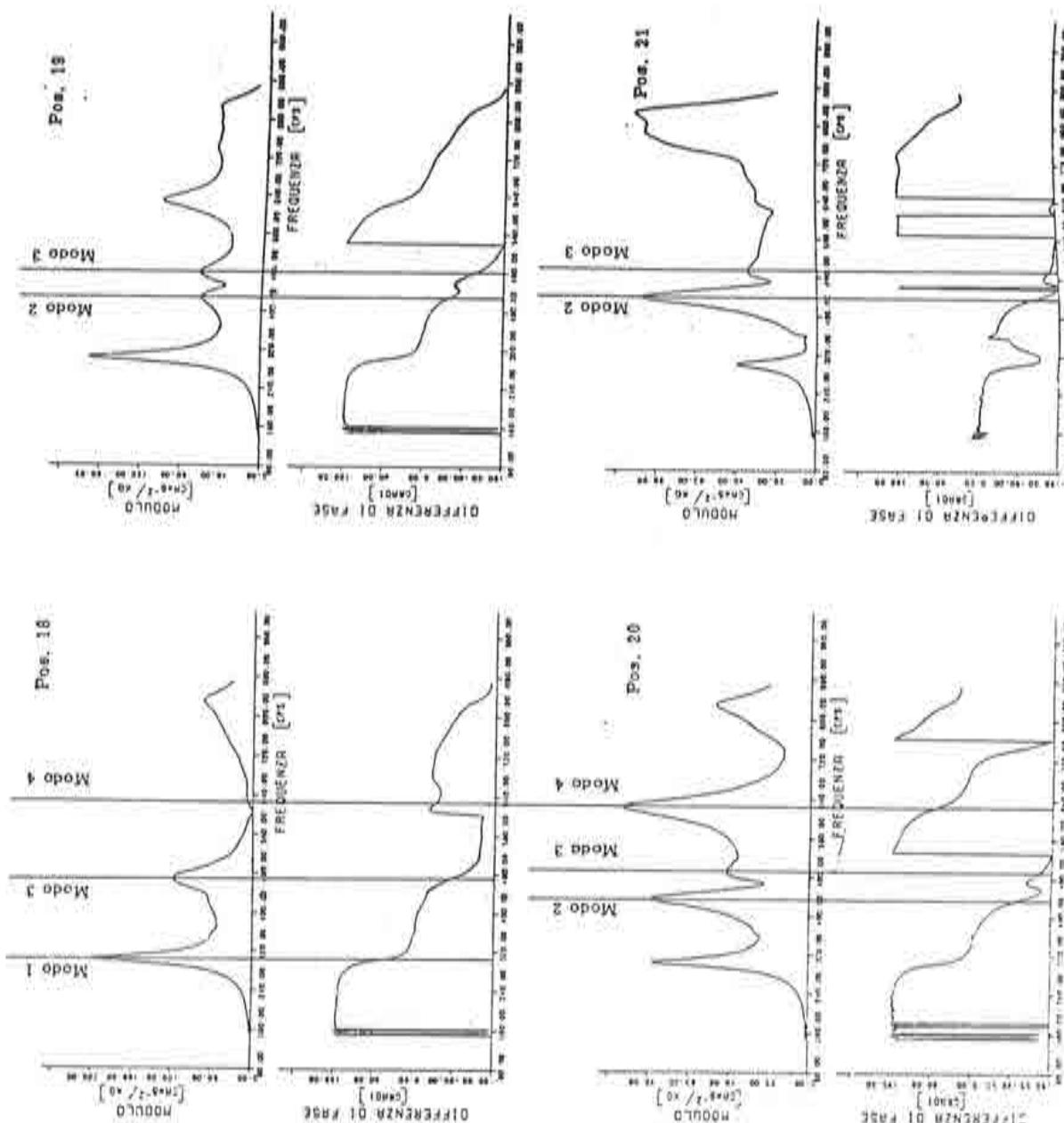


Fig. 10.9. Ensayo en modelo: Funciones de transferencia.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

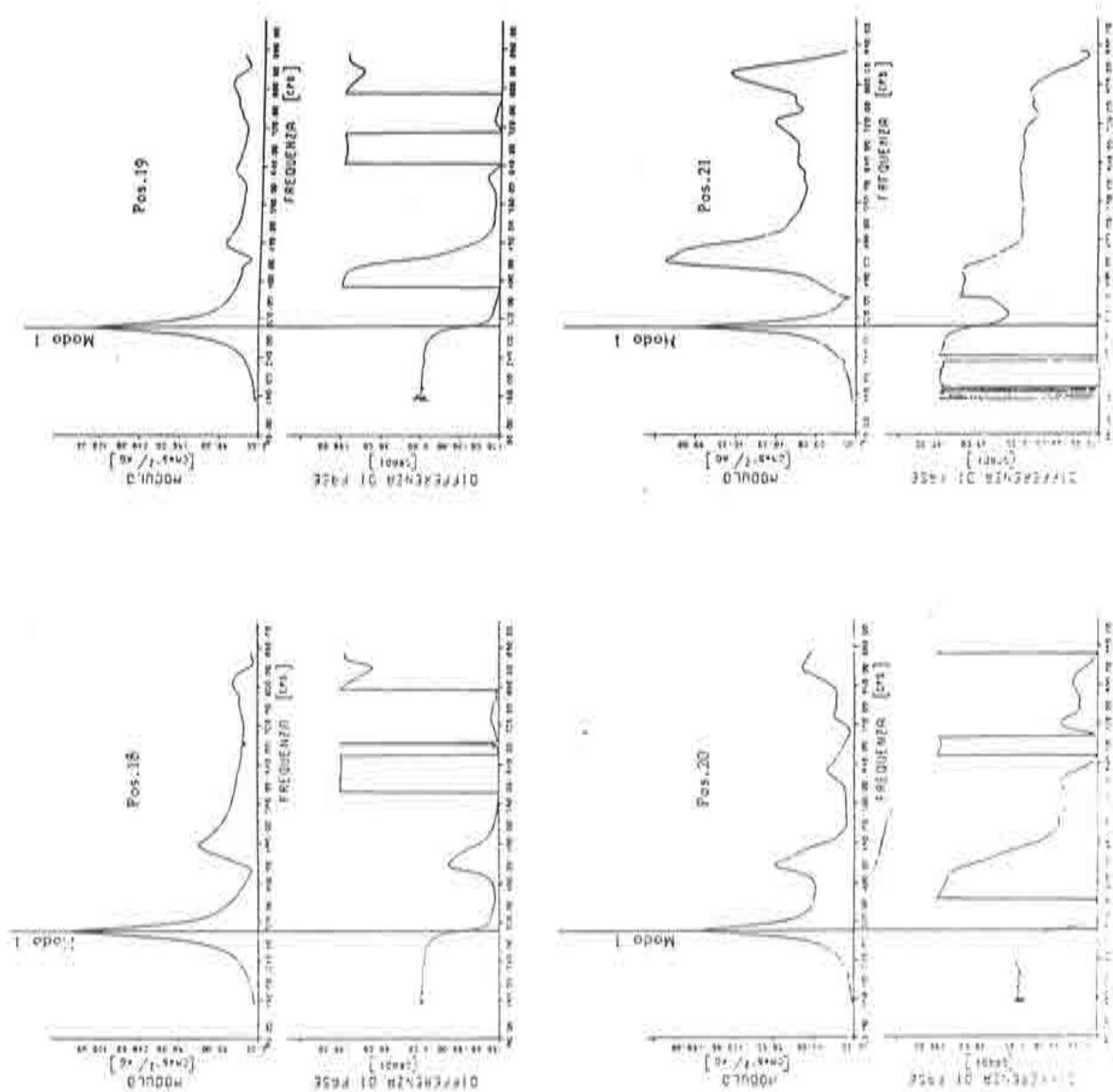


Fig. 10.10. *Ensayo en modelo. Combinaciones de funciones para el primer modo.*

## ANALISIS EXPERIMENTAL

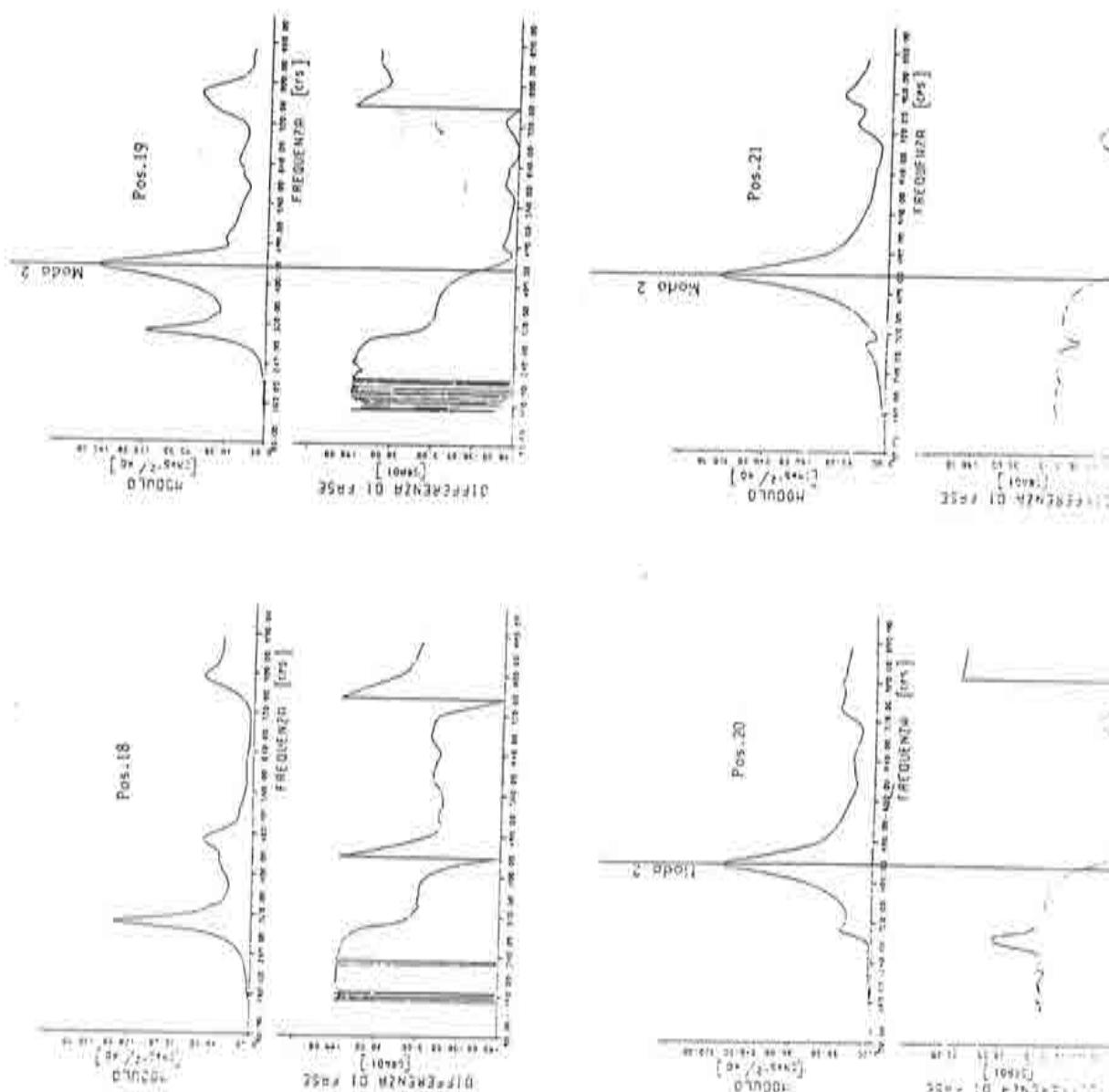


Fig. 10.11. Ensayo en modelo: Desacoplamiento del segundo modo respecto del primero y tercero.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

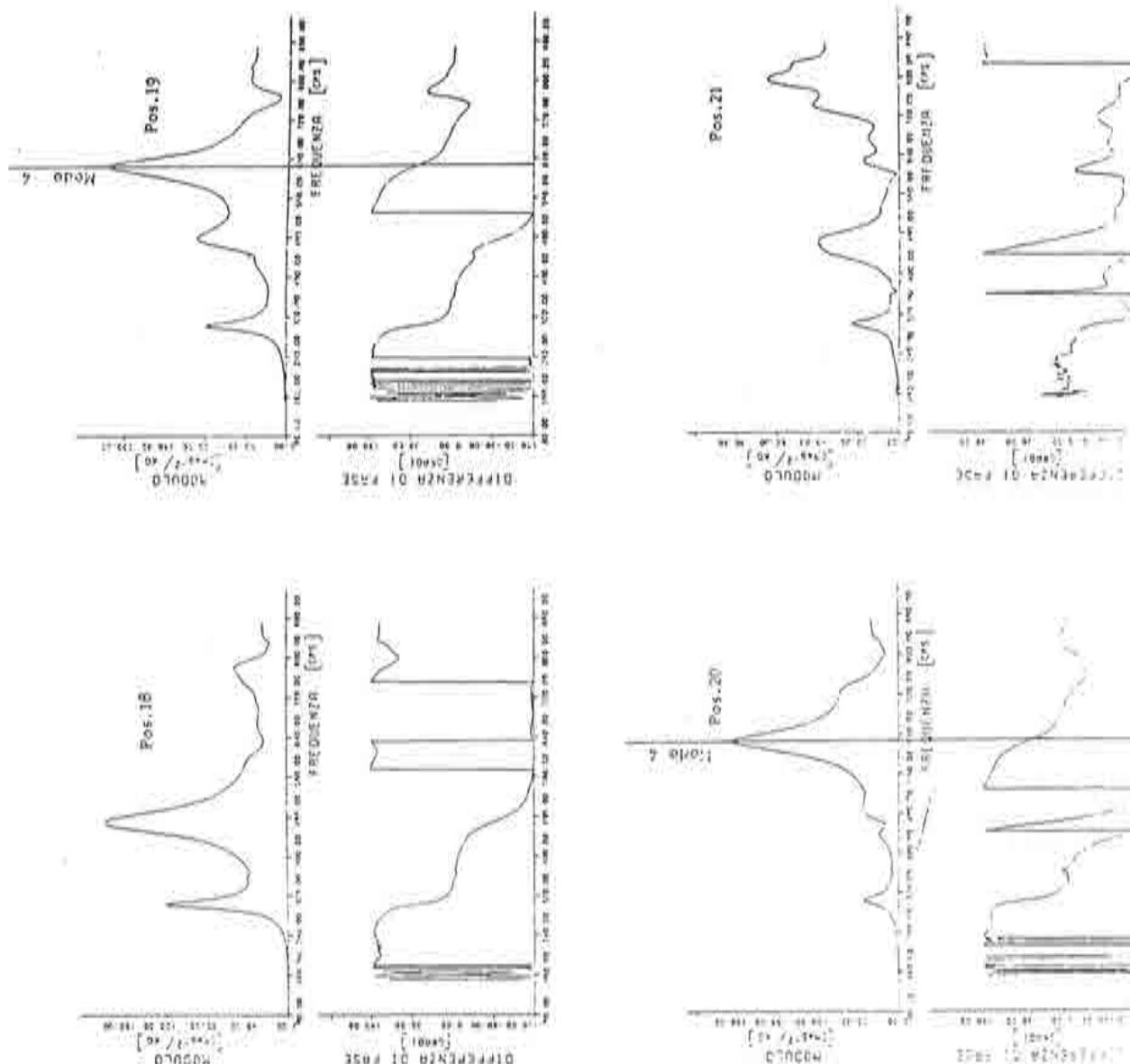


Fig. 10.12. *Ensayo en modelo: Combinaciones de funciones para el cuarto modo.*

## ANALISIS EXPERIMENTAL

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{S}\mathbf{P}(t) = \mathbf{M}_{eq}\mathbf{a}_r(t) \quad (10.19)$$

en donde

$\mathbf{F}(t)$  es el vector que contiene el valor de las fuerzas hidrodinámicas en cada punto

$\mathbf{S}$  es una matriz diagonal, la cual contiene el valor de la superficie del parámetro aguas arriba de la presa asociada a la correspondiente posición

$\mathbf{p}(t)$  es el vector que contiene las presiones hidrodinámicas

$\mathbf{M}_{eq}$  es la matriz de masa equivalente

$\mathbf{a}_r$  es el vector de aceleraciones

Tomando transformadas de Fourier de (10.19)

$$\mathbf{F}(\omega) = \mathbf{M}_{eq}\mathbf{A}_r(\omega) \quad (10.20)$$

Las relación entre las funciones de transferencia relativas a las aceleraciones y las relativas a presiones, muestra que dicha masa equivalente es función del modo, definiéndose por tanto en función de cada uno de los modos.

La matriz de masa equivalente para cada modo, se ha tomado pues, proporcional a la relación entre la distribución de presiones y la forma modal relativa a un modo determinado.

A partir de todos los datos obtenidos anteriormente, es posible calcular la respuesta dinámica de la presa (tanto a embalse vacío como a embalse lleno), cuando está sometida a una excitación sísmica. Dicha

## ANALISIS EXPERIMENTAL

excitación puede venir definida como una función aceleraciones-tiempo, o bien mediante el espectro de respuesta.

Es decir, mediante el ensayo en modelo, se determinan una serie de parámetros de la estructura, frecuencias propias, modos de vibración, masas añadidas, etc..., los cuales una vez conocidos posteriormente son tratados en la forma habitual para obtener desplazamientos, tensiones, aceleraciones, etc..., cuando a la estructura se la somete a una excitación de tipo sísmico.

En los apartados siguientes, se comentarán los resultados obtenidos, comparándolos con los correspondientes al estudio numérico de la presa de Llauset.

### 10.3. ENSAYO A ESCALA REAL

El ensayo a escala real se realizó a embalse lleno y mediante un doble ensayo:

- Por una parte mediante la utilización de explosivos en los cuatro puntos del embalse señalados en la figura 10.13. Para cada explosión se utilizaron 15 kg de dinamita goma 2, y en cada uno de los puntos se realizaron seis explosiones, mediante un registrador de ocho canales SRGD22 fabricado por la Sociedad de Reconocimientos Geofísicos S.A.
- Por otro lado se realizaron en el cuerpo de la presa diversos ensayos de vibraciones forzadas mediante un motor serie de corriente continua y un vibrador de masa excéntricas. Las señales se recogieron en los mismos puntos que en el ensayo anterior y con los mismos aparatos de medida.

El total de registros obtenidos fue de 240. En las figuras 10.14 a 10.16 pueden verse algunos de los registros de velocidades debidos a las explosiones, mientras que en las figuras 10.17 y 10.18 se observan dos de las respuestas registradas en el ensayo de masas excéntricas. Todas

## ANALISIS EXPERIMENTAL

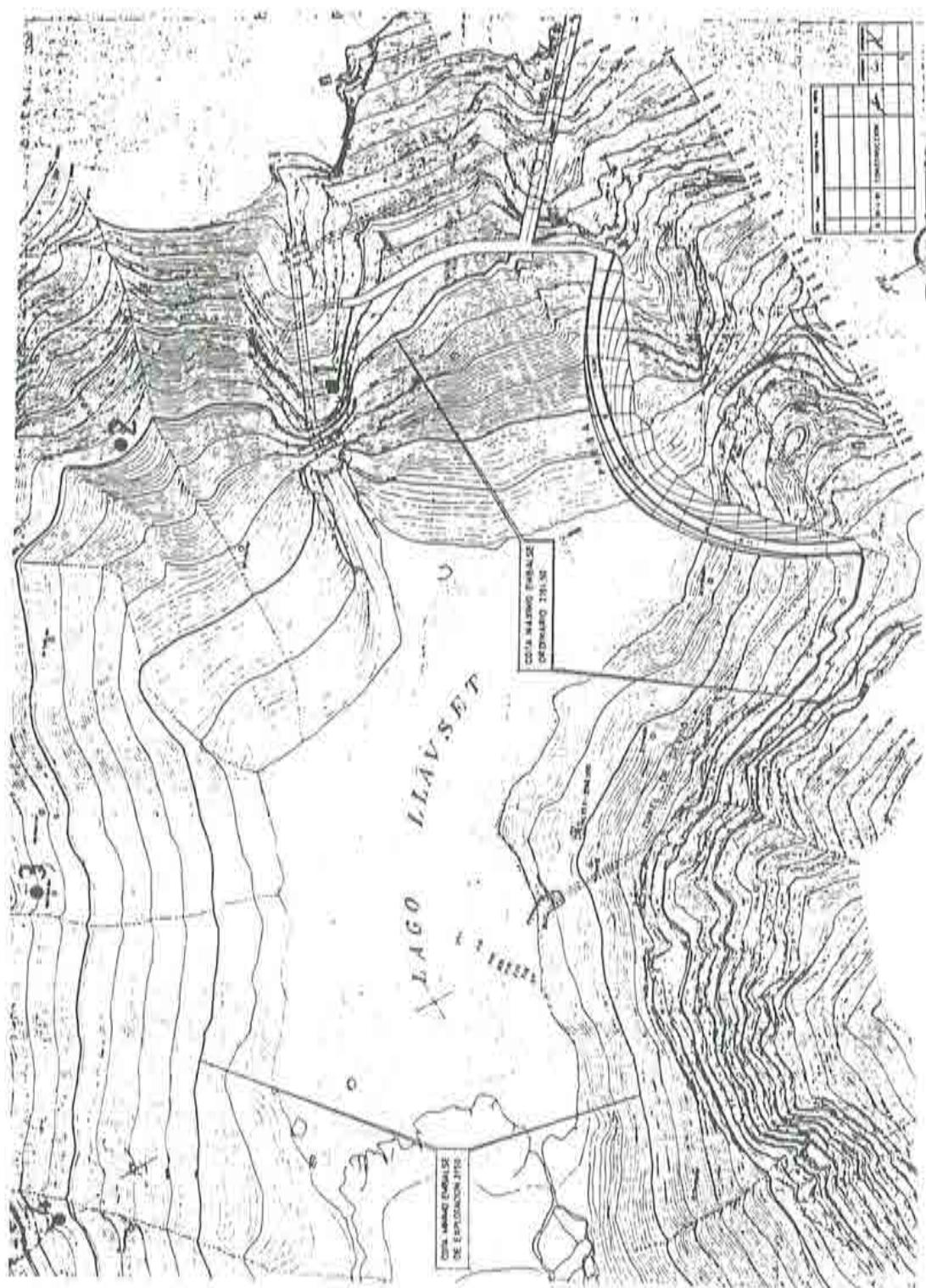


Fig. 10.13. Ensayo a escala real: Colocación de explosivos.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

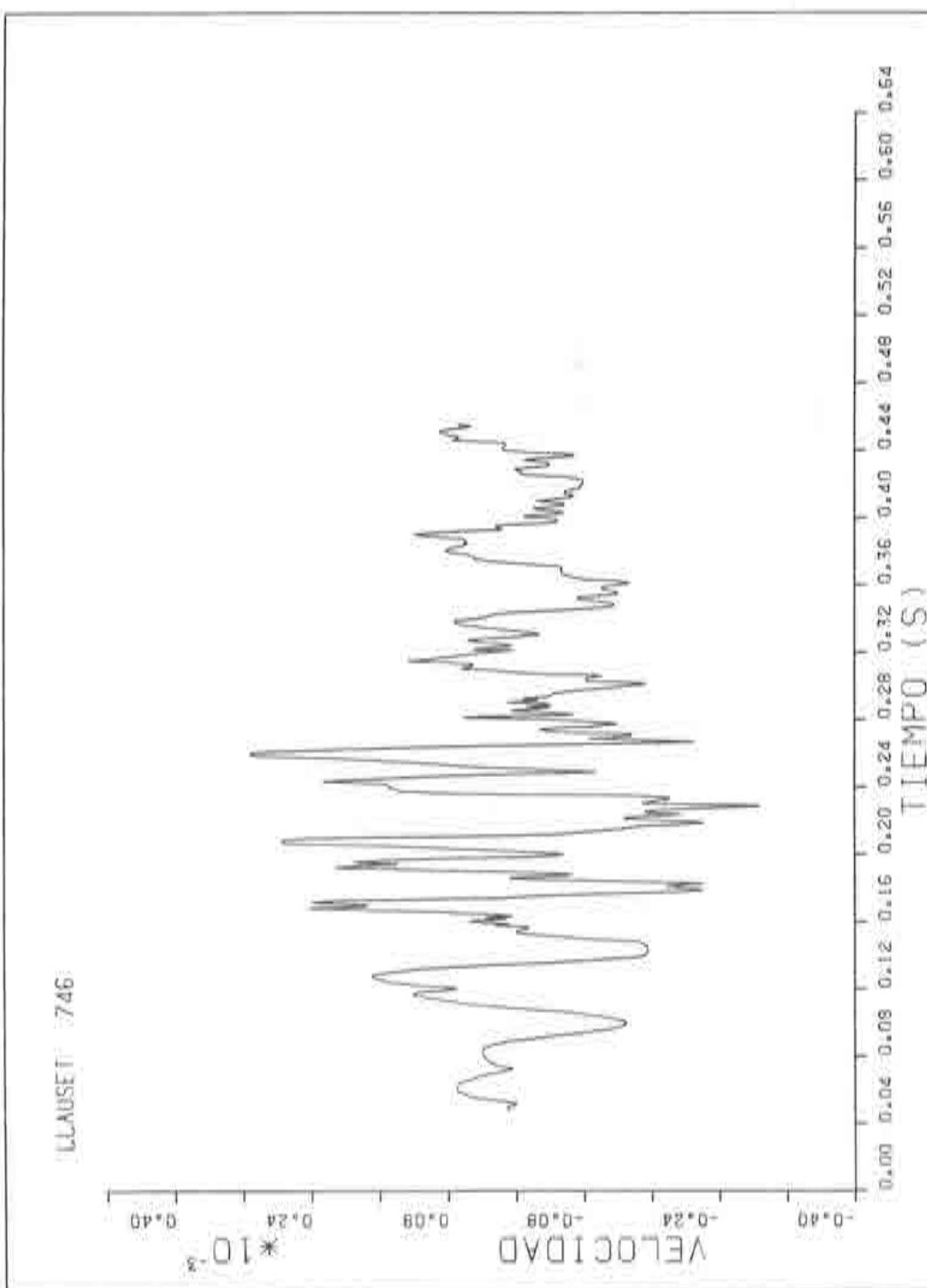


Fig. 10.14. *Ensayo a escala real: Registro de velocidades debido a las explosiones*

## ANALISIS EXPERIMENTAL

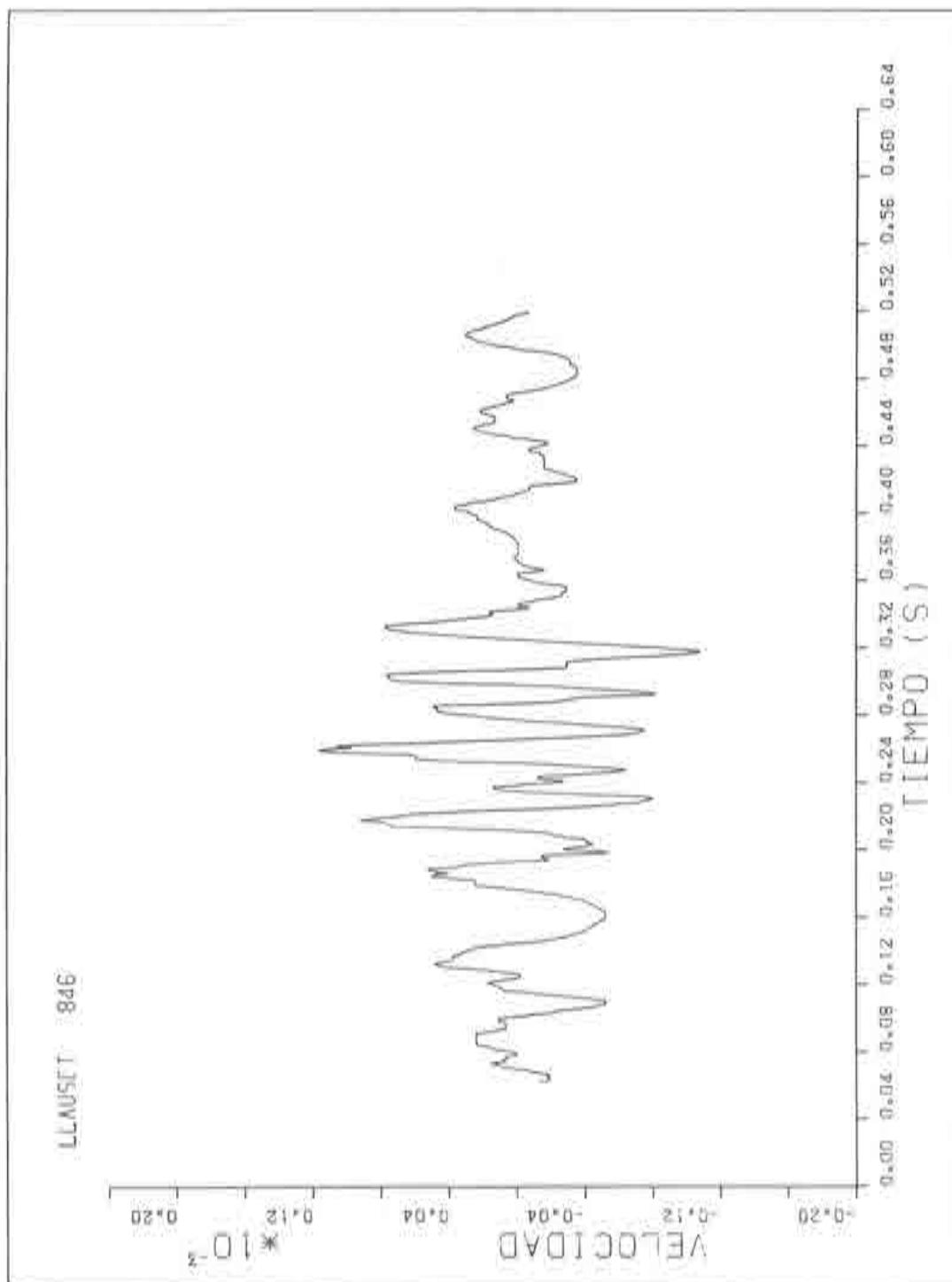


Fig. 10.15. Ensayo a escala real: Registro de velocidades debido a las explosiones.

ANALISIS EXPERIMENTAL

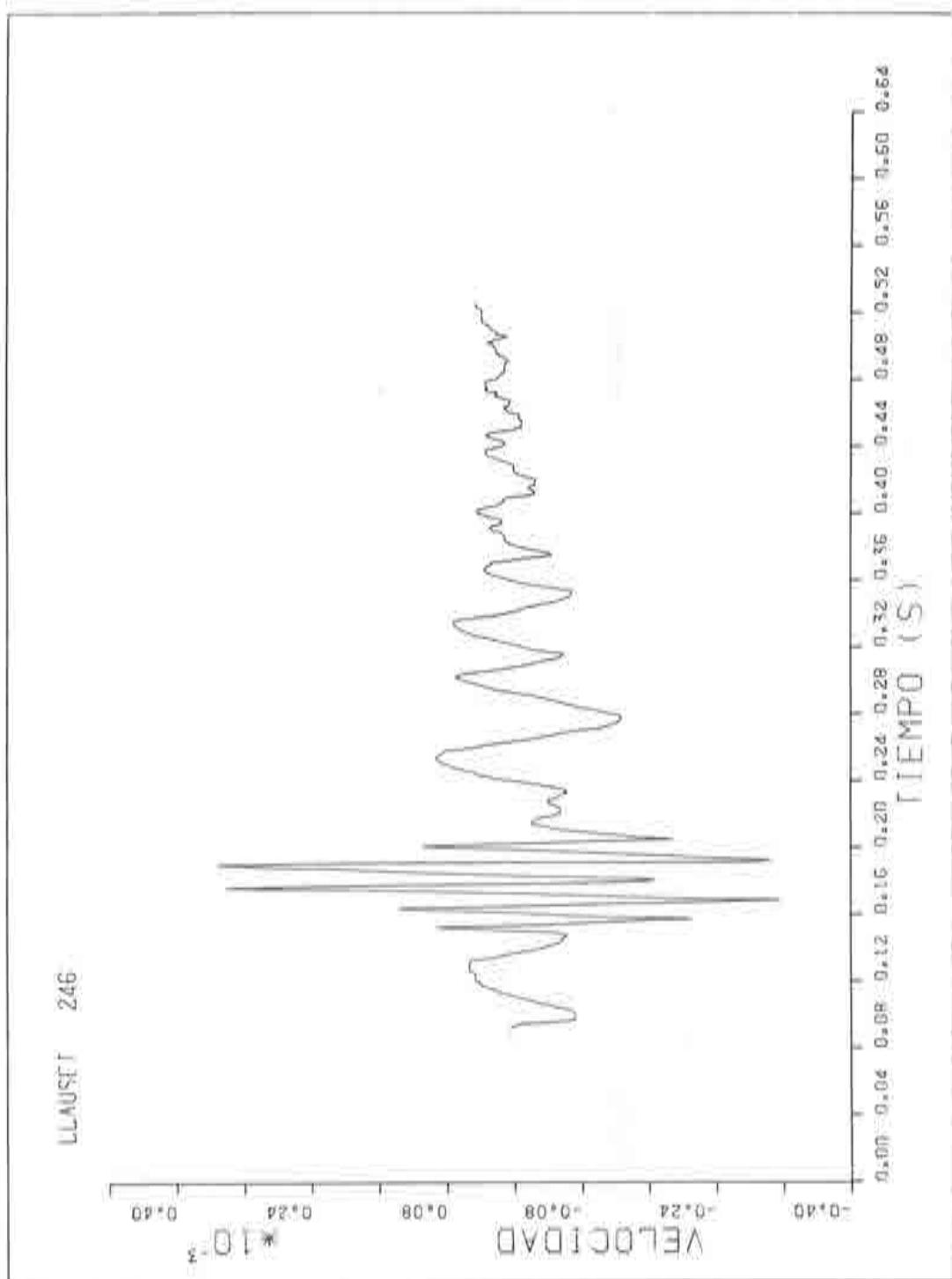


Fig. 10.16. Ensayo a escala real: Registro de velocidades debido a las explosiones.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

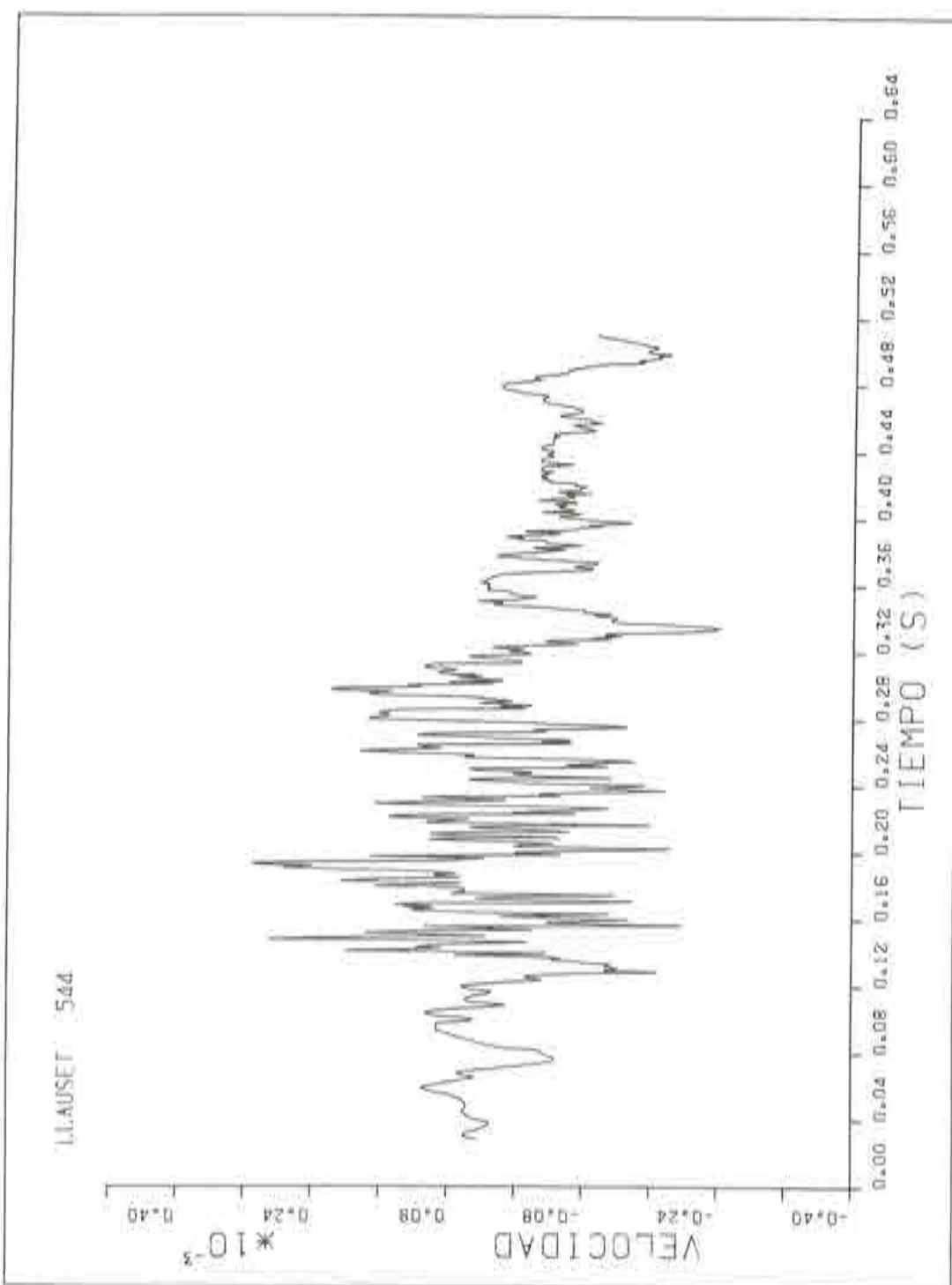


Fig. 10.17. Ensayo a escala real: Registro de velocidades debido a masas excéntricas.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

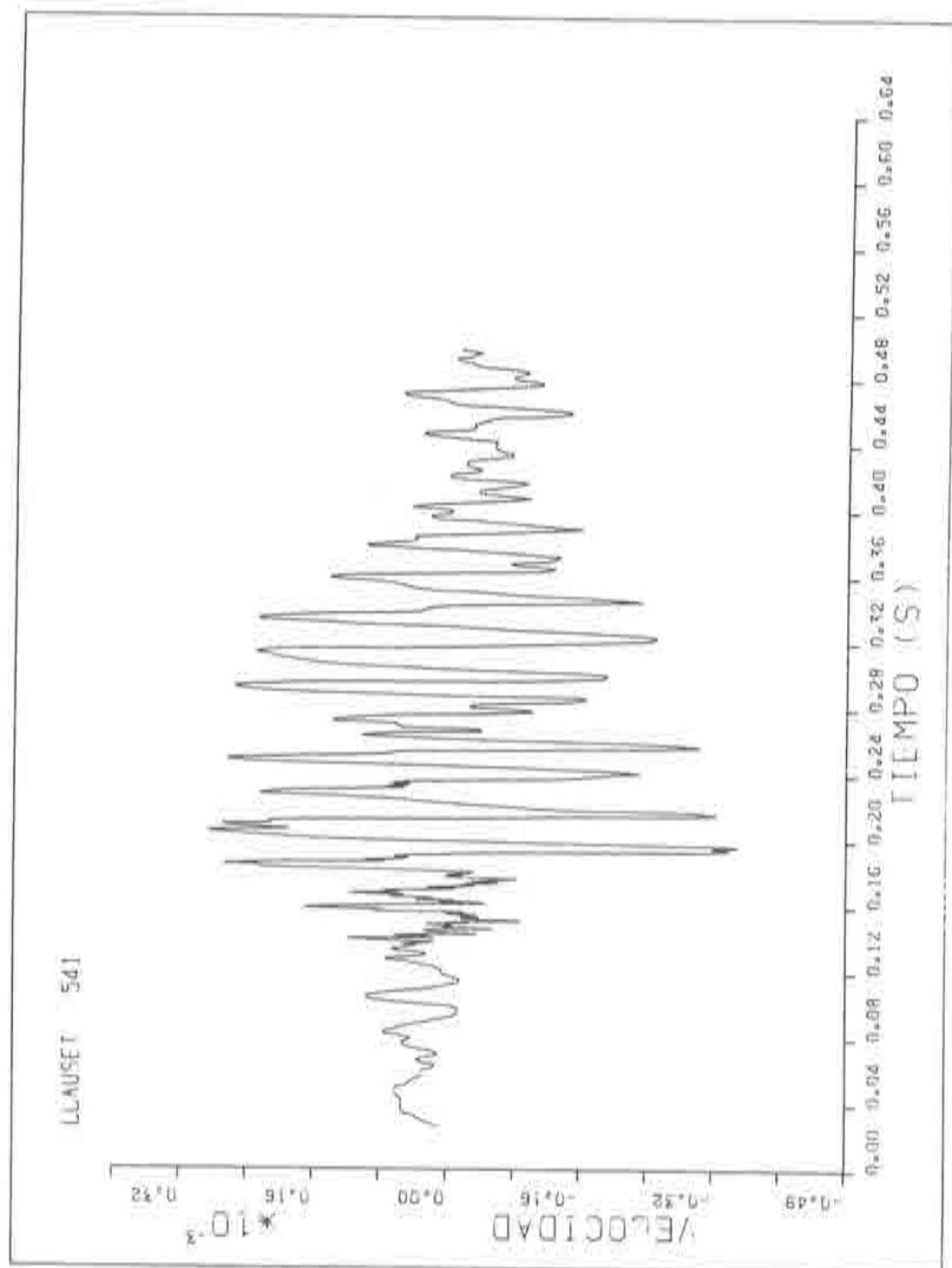


Fig. 10.18. *Ensayo a escala real: Registro de velocidades debido a masas excéntricas.*

estas señales, a fin de determinar su contenido en frecuencias han sido procesadas hallando su transformada de Fourier, mediante el algoritmo FFT (Fast Fourier Transform) [42]. En las figuras 10.19 a 10.22 pueden observarse dichas transformadas de Fourier de algunas de las señales. En general puede señalarse que los resultados debidos a las explosiones y los proporcionados por las vibraciones forzadas de las masas excéntricas han proporcionado resultados sensiblemente iguales.

#### 10.4. ANALISIS NUMERICO: EMBALSE VACIO

##### 10.4.1. Discretización de la presa

Para el correcto estudio de la presa bóveda de Llauset frente a excitación sísmica, se han considerado cuatro tipos de malla, diferenciándose la una de la otra en la mayor o menor porción de terreno incluída en el análisis. Para todas ellas el número de elementos y de nodos en la zona de la presa ha sido el mismo.

Asimismo, al igual que en la presa de Morrow Point se ha considerado exclusivamente la flexibilidad de la roca de cimentación.

Primeramente se ha considerado la presa aislada (figura 10.23), es decir supuesto perfectamente rígido el terreno. En tal caso el número total de elementos ha sido de 36, con 295 nodos y 732 grados de libertad activos.

En la figura 10.24 puede verse la presa discretizada con una porción de terreno de espesor igual a una vez la altura de la presa. El conjunto tiene 132 elementos con 855 nodos totalizando un número de grados de libertad igual a 2004.

Por lo que respecta a la tercera malla utilizada, ésta puede observarse en la figura 10.25. Incluye una porción de terreno cuyo radio en planta es de dos veces la altura de la presa, es decir de 168 metros. El número total de elementos en la discretización es de 192, siendo el número de nodos igual a 1148, y 2883 el número de grados de libertad.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

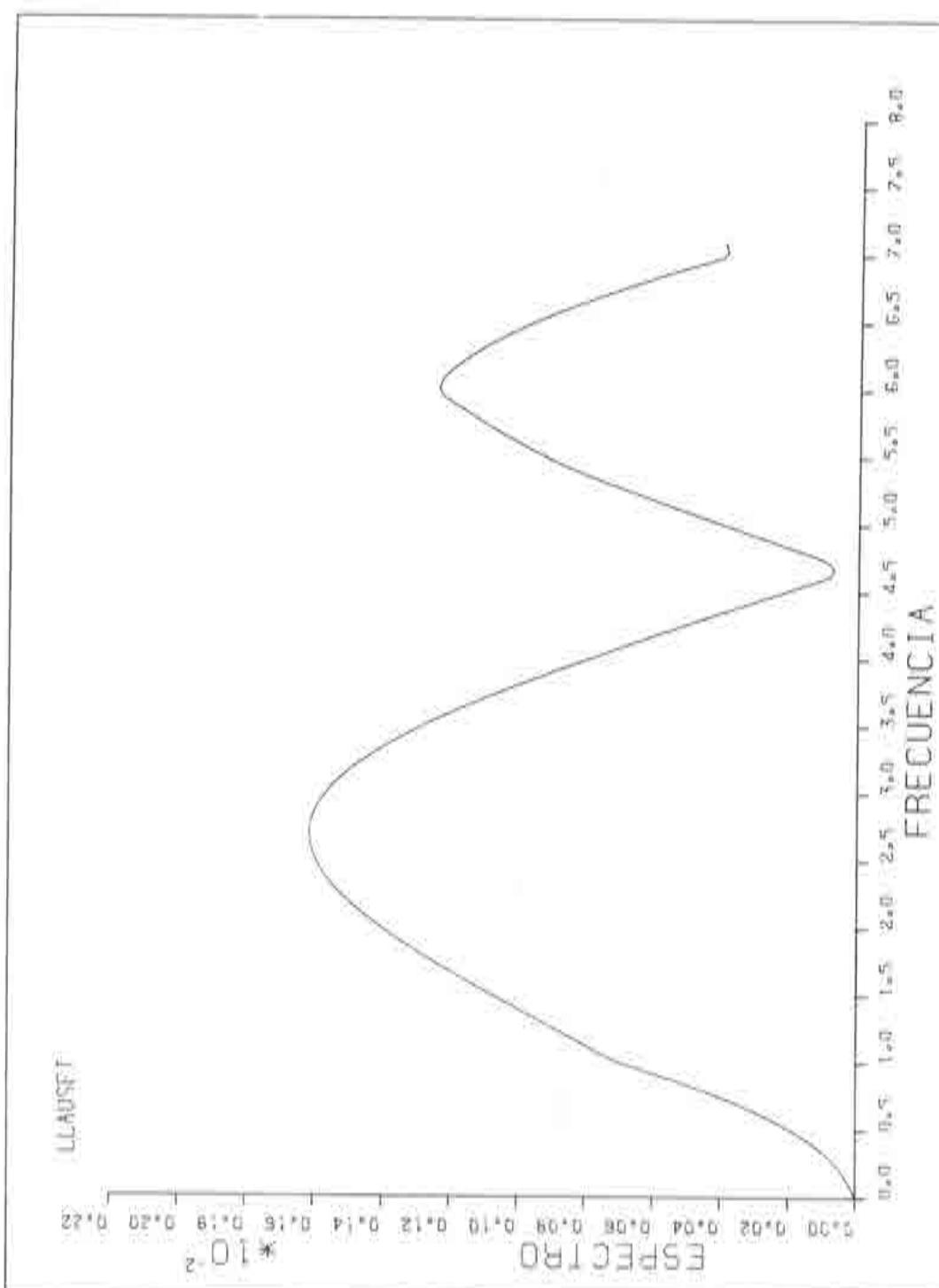


Fig. 10.19. *Ensayo a escala real: Transformada de Fourier de los registros.*

## ANALISIS EXPERIMENTAL

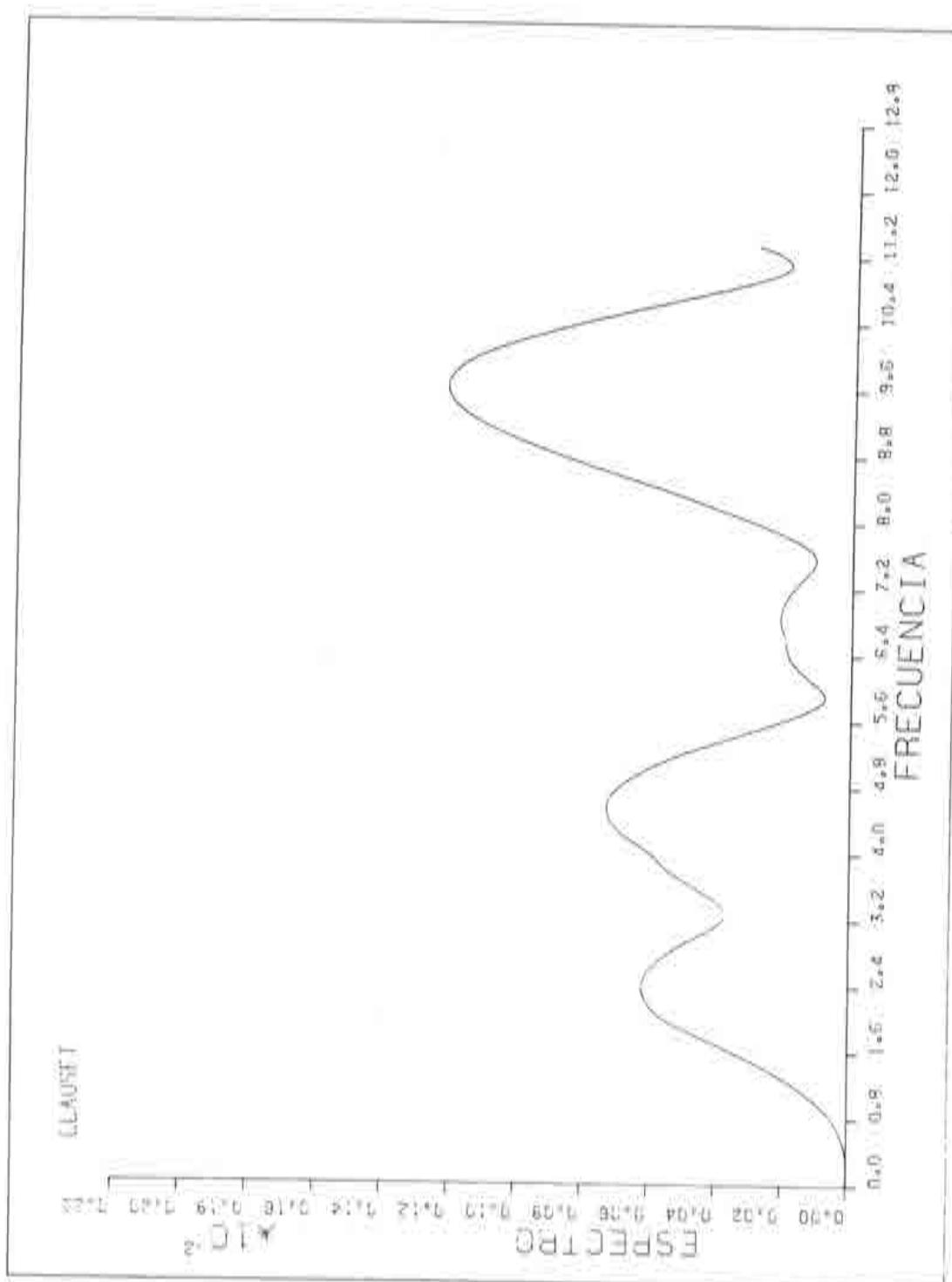


Fig. 10.20. *Ensayo a escala real: Transformada de Fourier de los registros.*

## ANALISIS EXPERIMENTAL

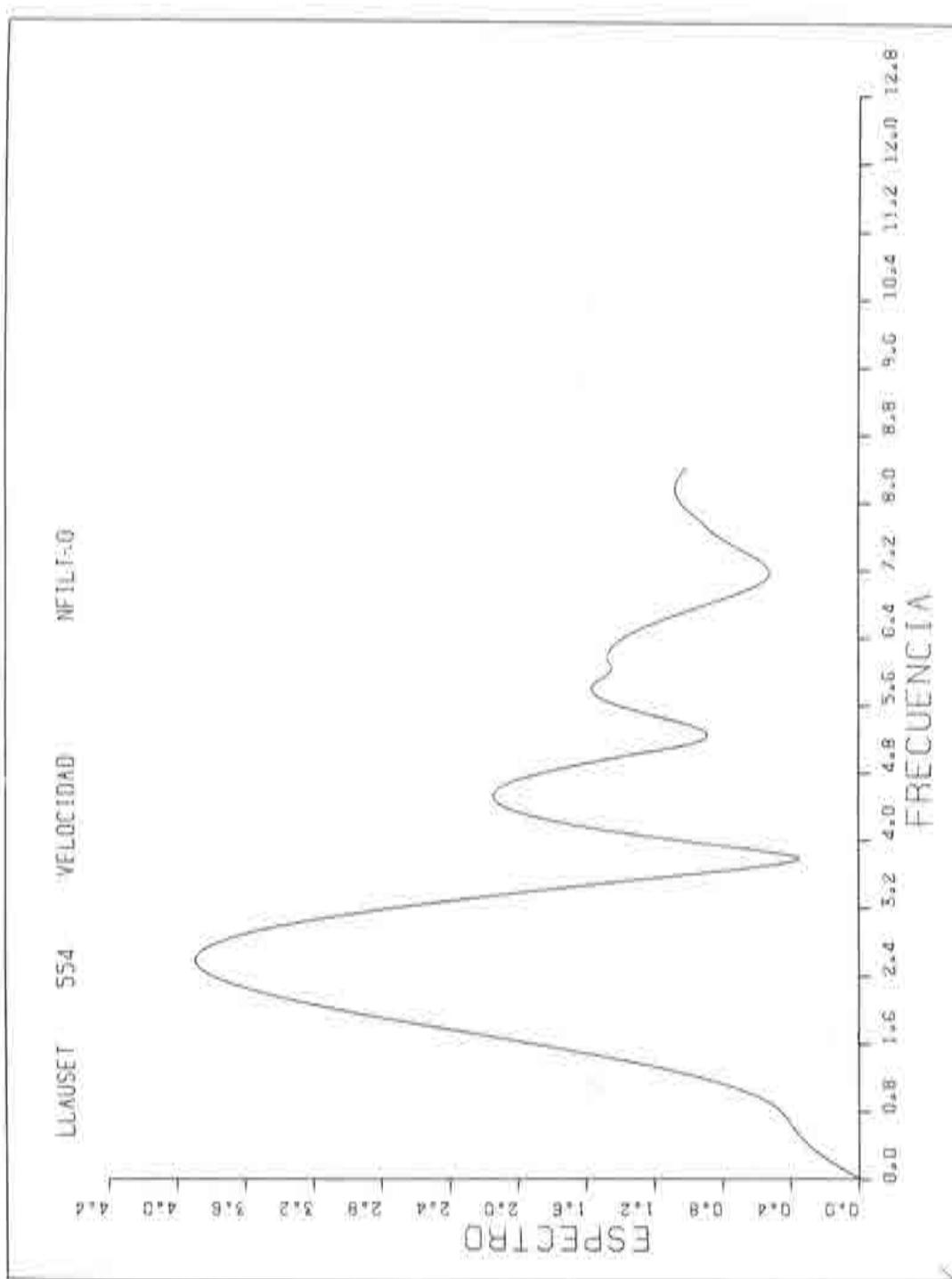


Fig. 10.21. *Ensayo a escala real: Transformada de Fourier de los registros.*

## ANALISIS EXPERIMENTAL

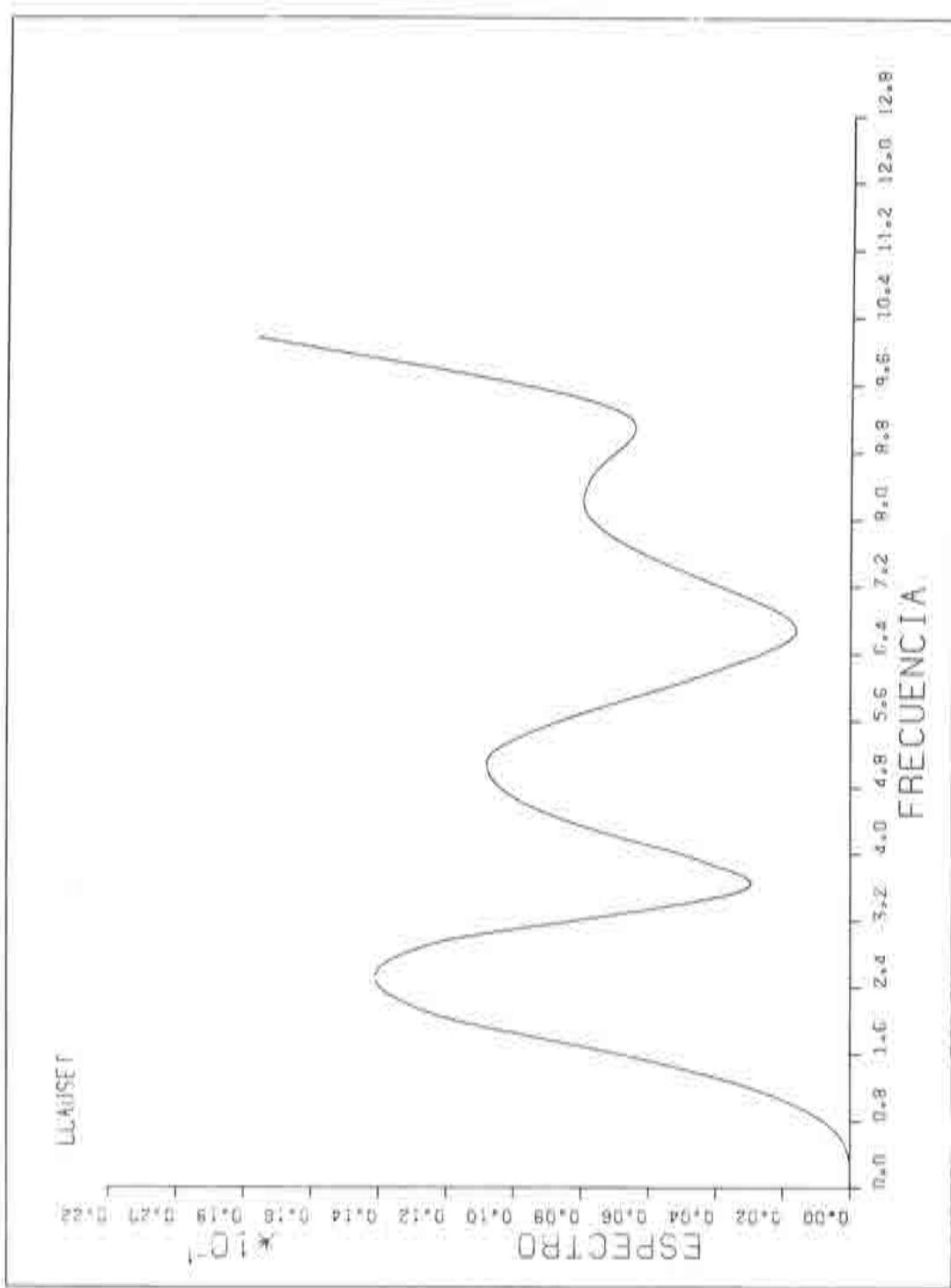


Fig. 10.22. *Ensayo a escala real: Transformada de Fourier de los registros.*

## ANALISIS EXPERIMENTAL

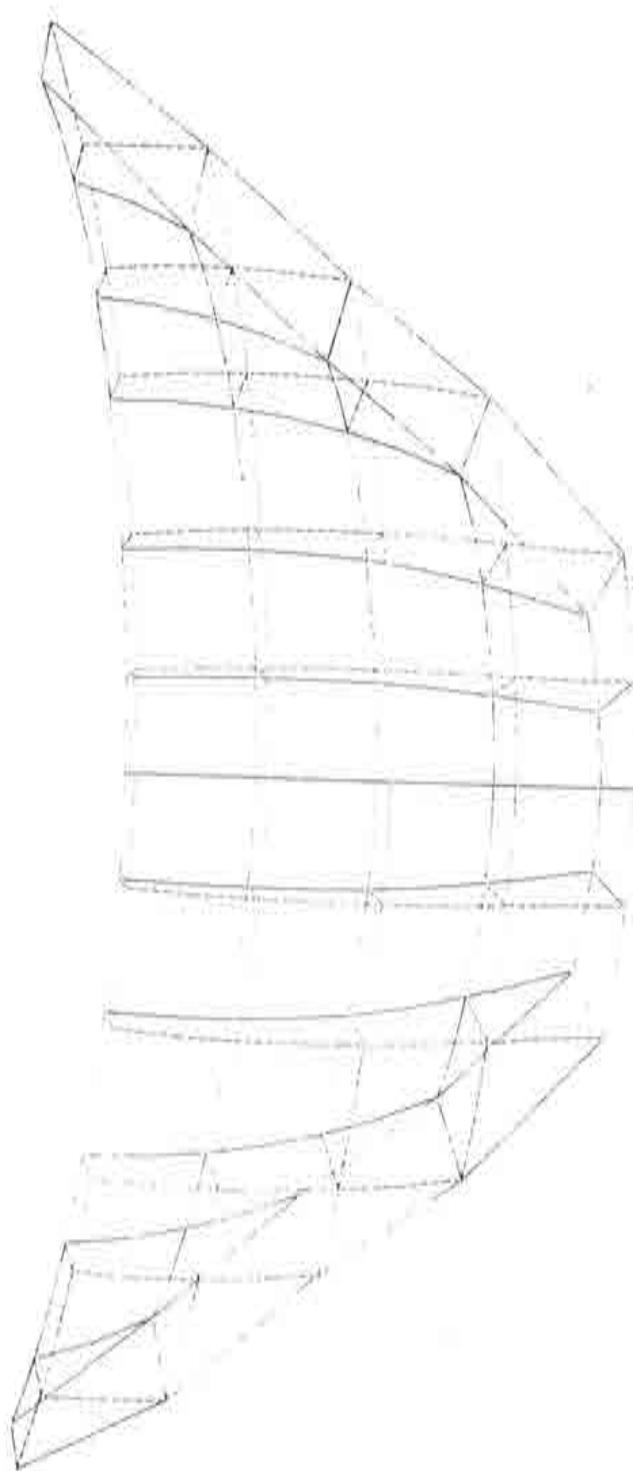


Fig. 10.23. Discretización de la presa bóveda de Llauset. Presa aislada.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

La cuarta discretización realizada en el presente trabajo puede verse en la figura 10.26. La zona de roca de cimentación que se incluye tiene una potencia de tres veces la altura de la presa, es decir 252 metros. El número de grados de libertad es de 4641, siendo 312 el número de elementos, y 1734 el número de nodos. Debido a su gran tamaño, ésta ha sido la discretización que más problemas ha planteado en el cálculo.

En la tabla 10.2 pueden verse sumarizados los anteriores datos

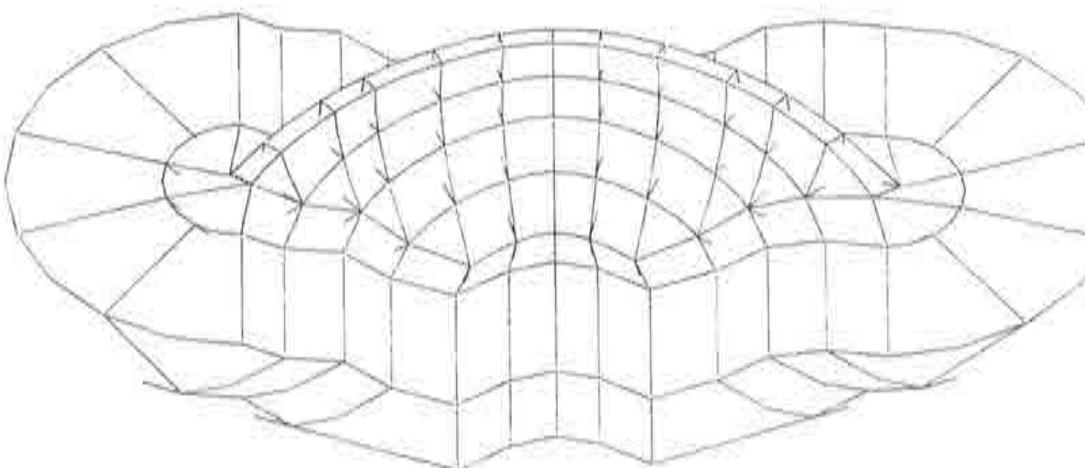


Fig. 10.24. Discretización de la Presa de Llauset. Profundidad del terreno igual a su altura.

Tabla 10.2

Profundidad de la zona de terreno incluida en el análisis	Número de elementos	Número de nodos	Número total de grados de libertad
Presa aislada	36	295	732
$R = H$	132	855	2004
$R = 2H$	192	1148	2883
$R = 3H$	312	1734	4641

## ANALISIS EXPERIMENTAL

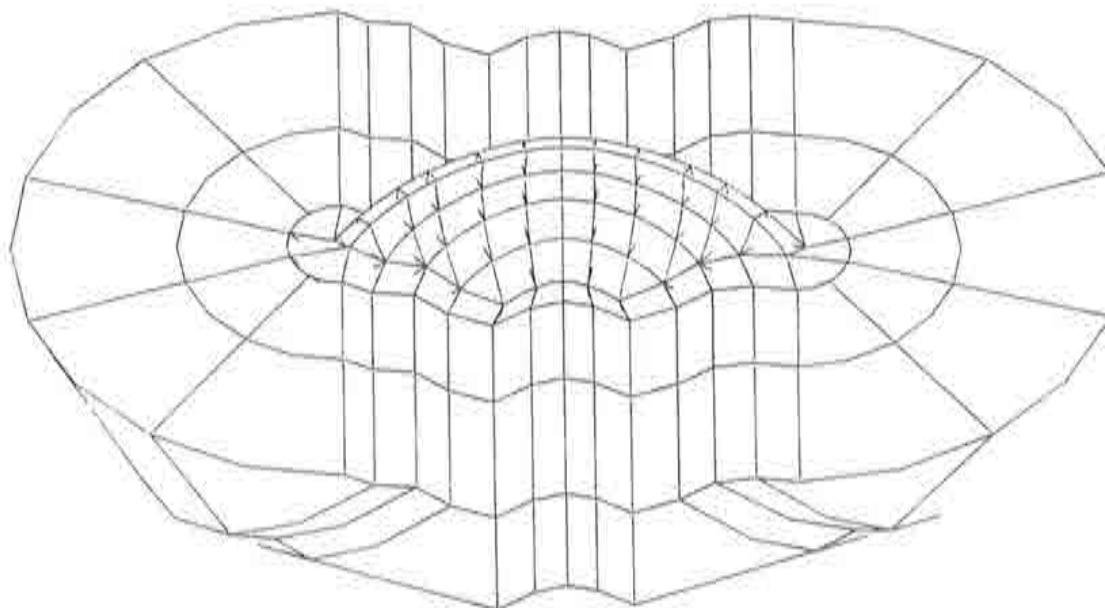


Fig. 10.25. Discretización de la presa de Llauset. Profundidad del terreno igual a dos veces su altura.

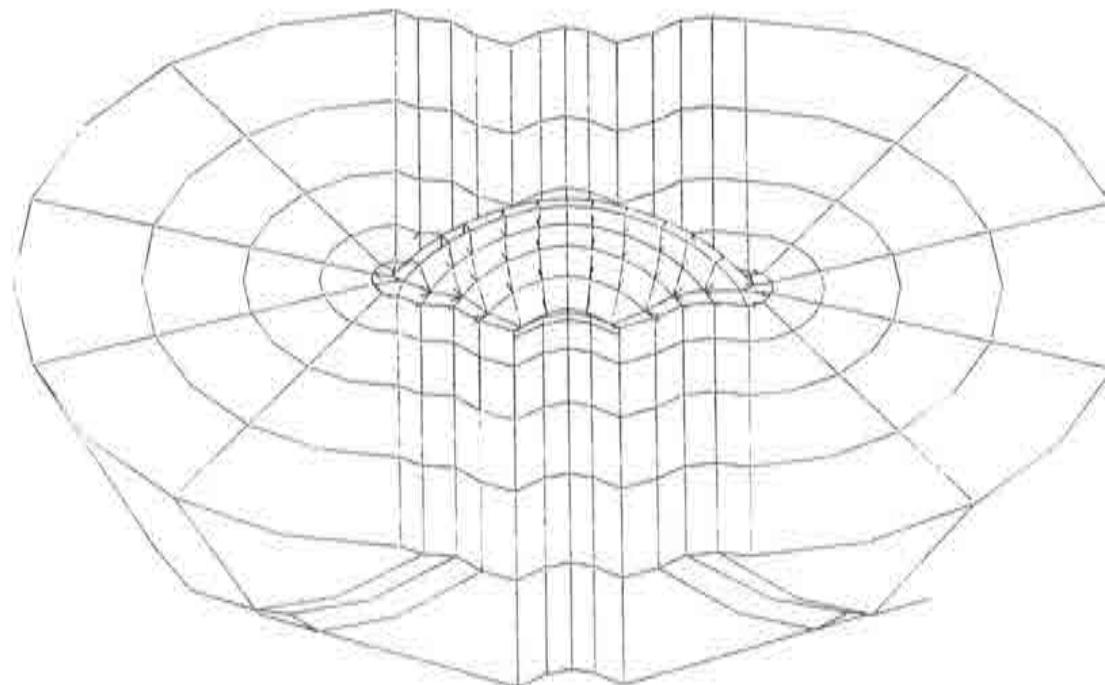


Fig. 10.26. Discretización de la presa de Llauset. Profundidad del terreno igual a tres veces su altura.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

### 10.4.2. Frecuencias y modos propios de vibración

#### 10.4.2.1. Estudio de los modos propios con las distintas mallas

Se han estudiado los cuatro primeros modos de vibración de cada una de las cuatro mallas descritas anteriormente.

Se ha estudiado asimismo la variación, que en cada uno de los modos y para cada altura de terreno considerada, introduce el módulo de Elasticidad de la roca de base. Para ello se han estudiado tres cocientes

$$\frac{\text{Módulo de Elasticidad del terreno}}{\text{Módulo de Elasticidad de la presa}} = \frac{E_t}{E_p}$$

En la tabla 10.3, se sumarizan los resultados obtenidos

Tabla 10.3

Variación de las frecuencias con el espesor de terreno				
MODO	Terreno	$E_t/E_p = 1/1$	$E_t/E_p = 1/2$	$E_t/E_p = 1/4$
1	cero	26.334	26.334	26.334
	1H	24.501	23.086	21.024
	2H	24.396	22.897	20.729
	3H	24.341	22.806	20.514
2	cero	31.076	31.076	31.076
	1H	29.414	27.977	25.664
	2H	29.196	27.569	24.940
	3H	29.084	27.513	24.642
3	cero	38.809	38.809	38.809
	1H	35.898	33.667	30.470
	2H	35.742	33.367	29.999
	3H	35.716	33.219	29.714
4	cero	52.030	52.030	52.030
	1H	48.008	44.999	40.945
	2H	47.798	44.582	40.153
	3H	47.672	44.513	40.009

En las figuras 10.27, 10.28 y 10.29 puede verse de forma gráfica

## ANALISIS EXPERIMENTAL

la variación de cada uno de los cuatro modos analizados con la profundidad del terreno. Todo ello para  $E_t/E_p = 1$ ,  $1/2$  y  $1/4$  respectivamente. Se concluye que cualquiera que sea la relación entre módulos de elasticidad, así como para cualquier modo que se considere, a partir de una profundidad de terreno de una vez la altura de la presa, el valor de los modos permanece prácticamente constante.

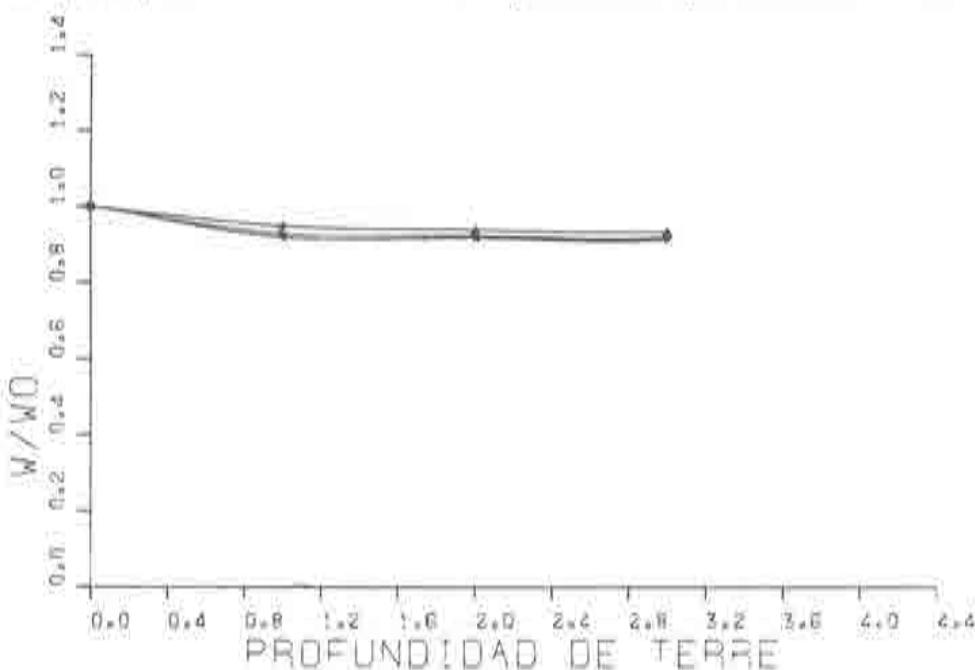


Fig. 10.27 Variación de los modos propios con la profundidad del terreno.

$$E_t/E_p = 1$$

En las figuras 10.30, 10.31, 10.32 y 10.33 pueden verse los cuatro primeros modos de vibración de la presa de Llauset considerada aislada.

Asimismo, en las figuras 10.34, 10.35, 10.36 y 10.37 pueden observarse estas mismas cuatro frecuencias primeras de vibración para una altura de terreno igual a la altura de la presa.

A la vista de los resultados proporcionados por las figuras 10.27, 10.28 y 10.29 se concluye que las verdaderas frecuencias de la presa son proporcionadas considerando una zona de roca igual a la altura de la presa. En el apartado siguiente se verá la comprobación experimental de este resultado.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

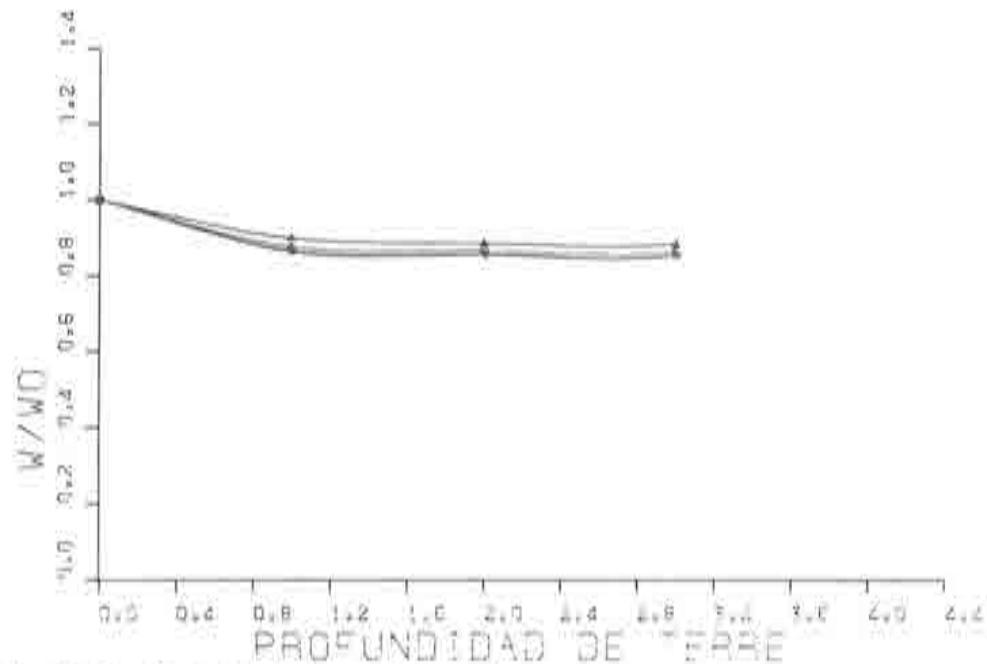


Fig. 10.28. Variación de los modos propios con la profundidad del terreno.  
 $E_t/E_p = 1/2$ .

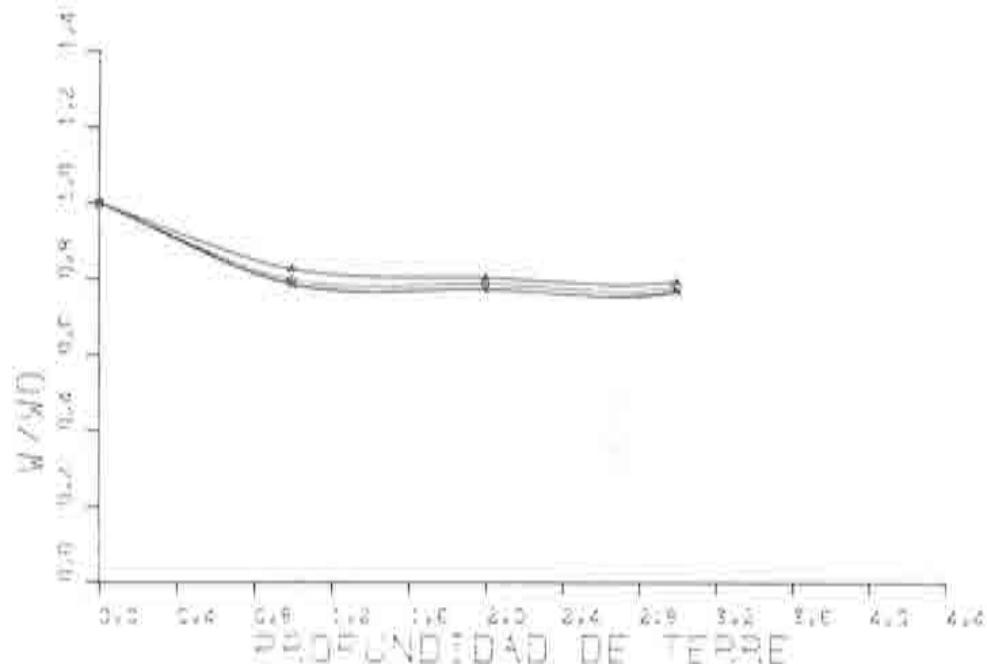


Fig. 10.29. Variación de los modos propios con la profundidad de terreno.  
 $E_t/E_p = 1/4$ .

## ANALISIS EXPERIMENTAL

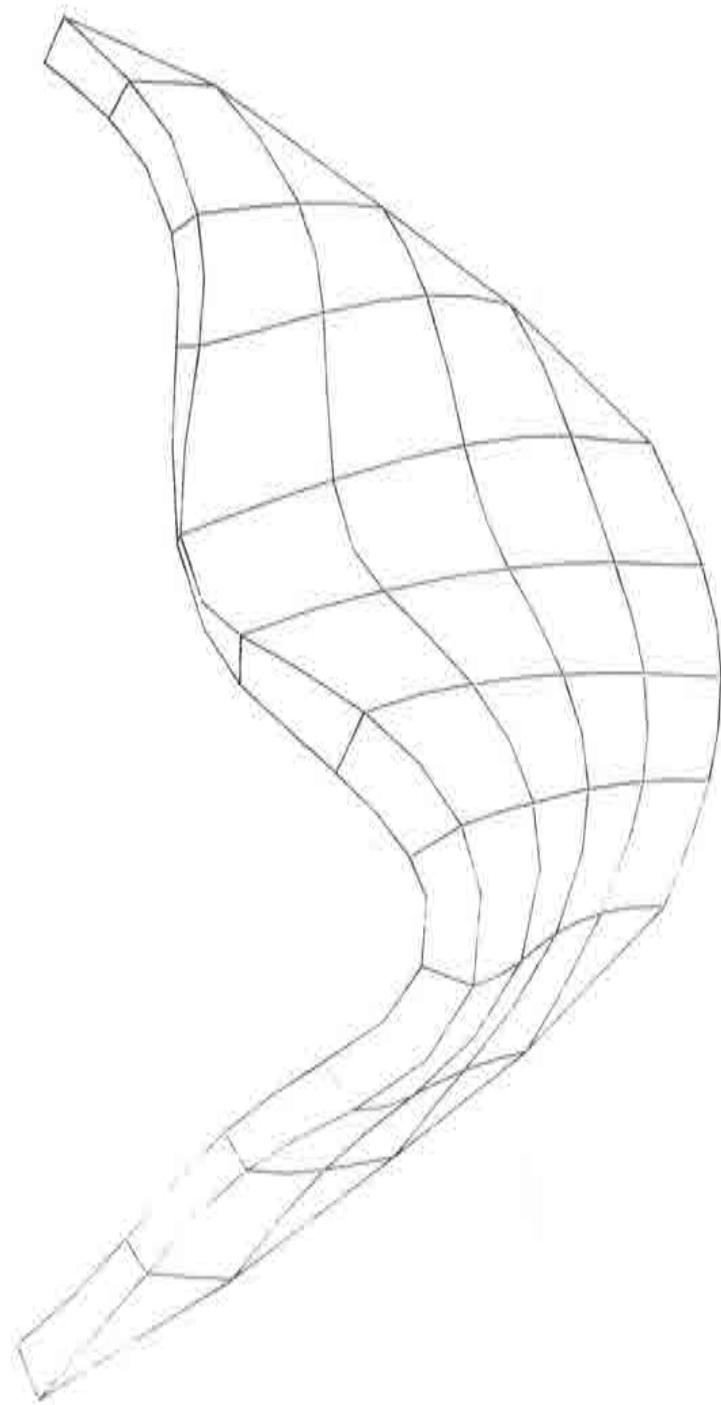


Fig. 10.30. Presa de Llauset (presa aislada). Primer modo de vibración.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

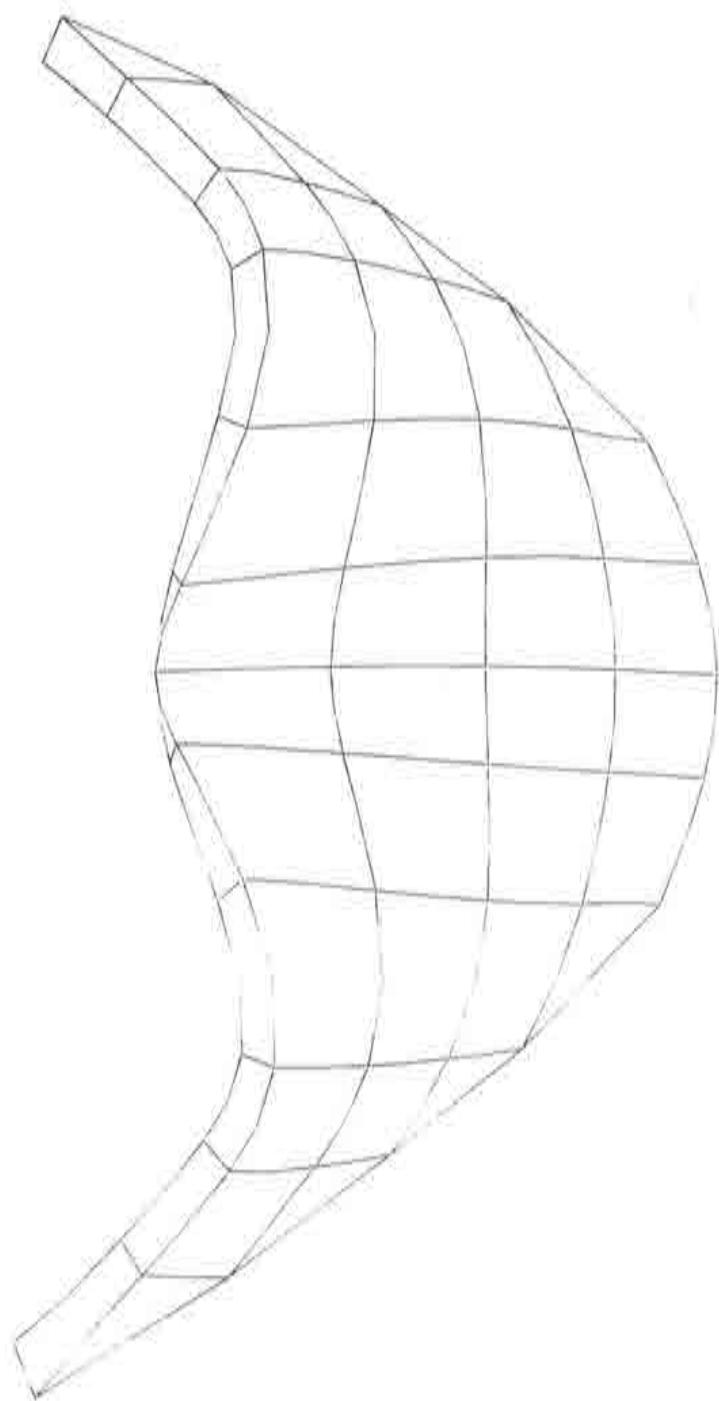


Fig. 10.31. Presa de Llauset (presa aislada). Segundo modo de vibración.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

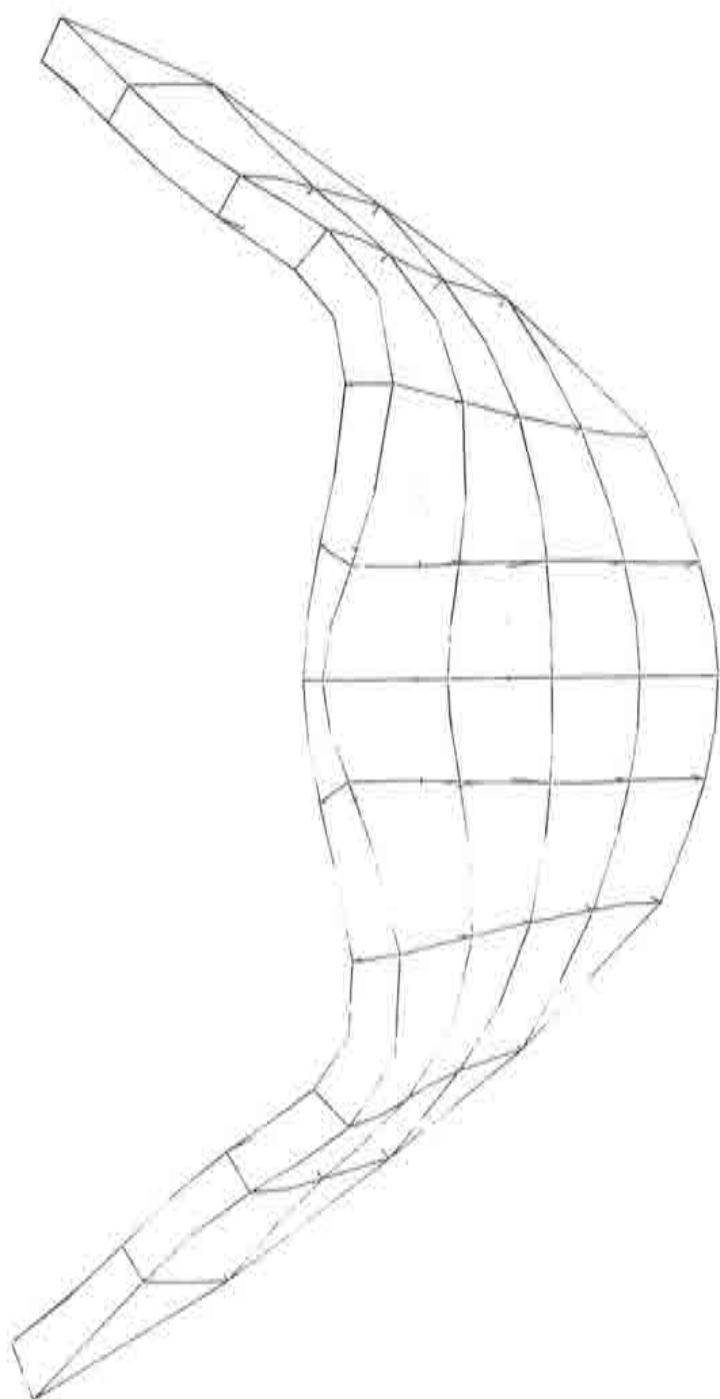


Fig. 10.32. Presa de Llauset (presa aislada). Tercer modo de vibración.

ANALISIS EXPERIMENTAL

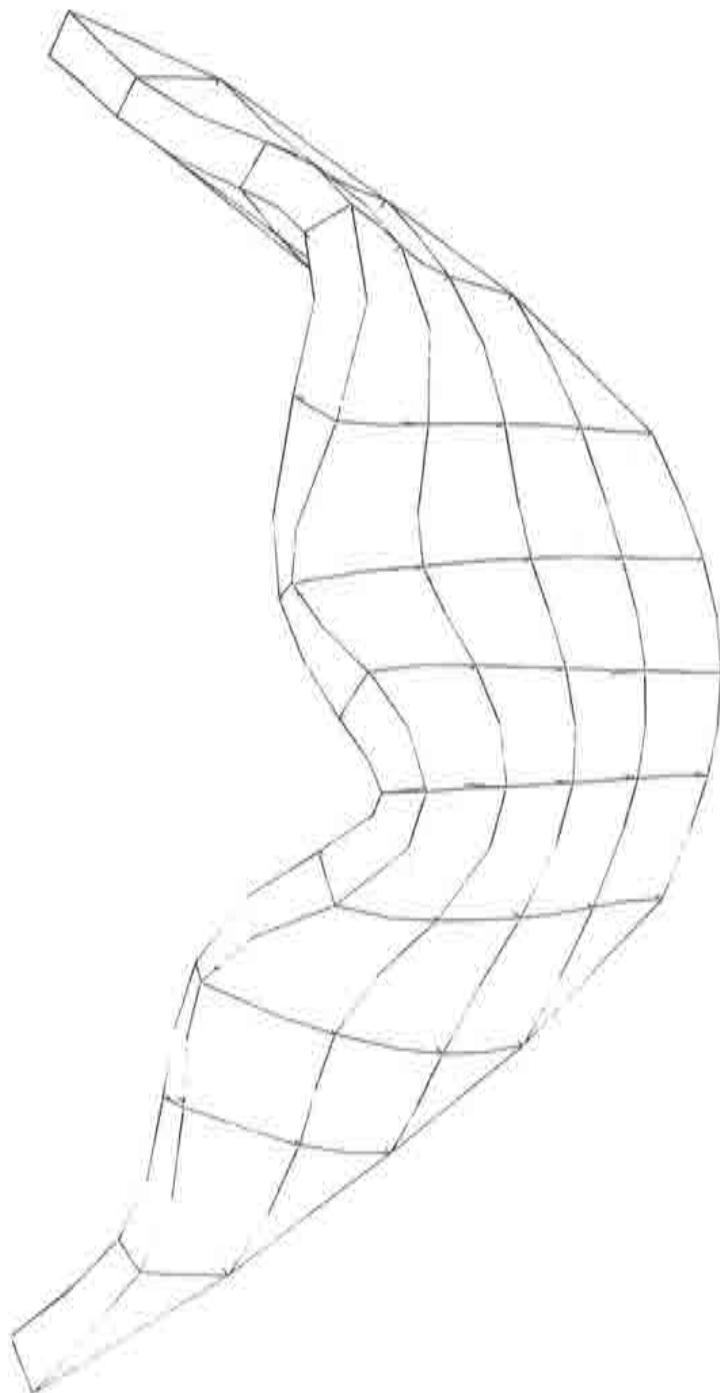


Fig. 10.33. Presa de Llauset (presa aislada). Cuarto modo de vibración.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

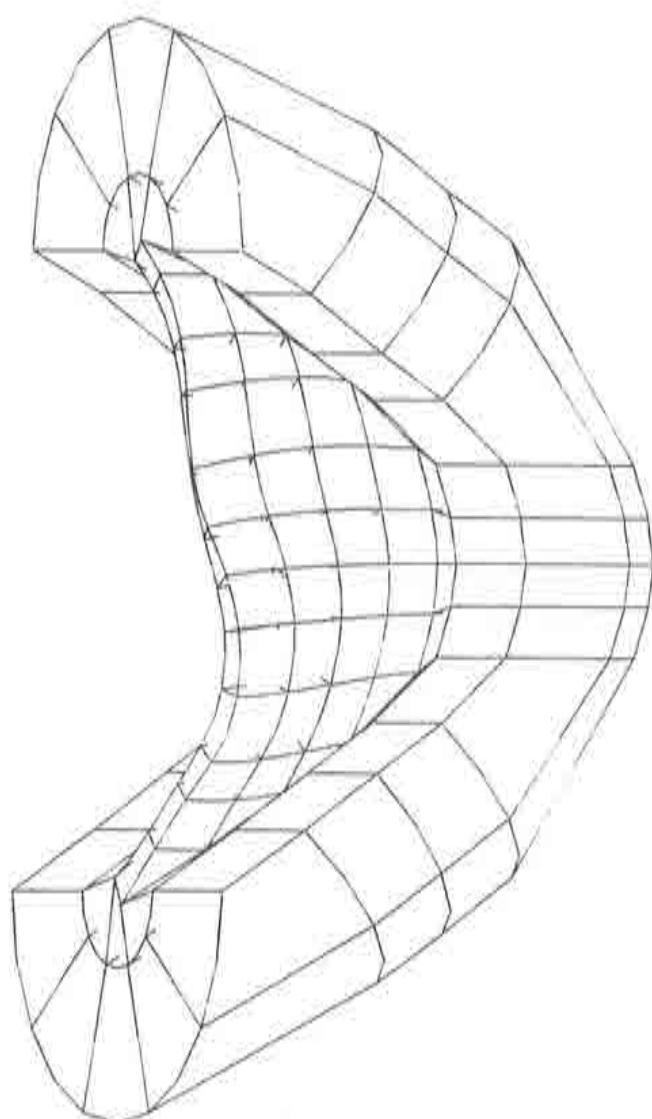


Fig. 10.34. Presa de Llauset (presa con terreno 1H). Primer modo de vibración.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

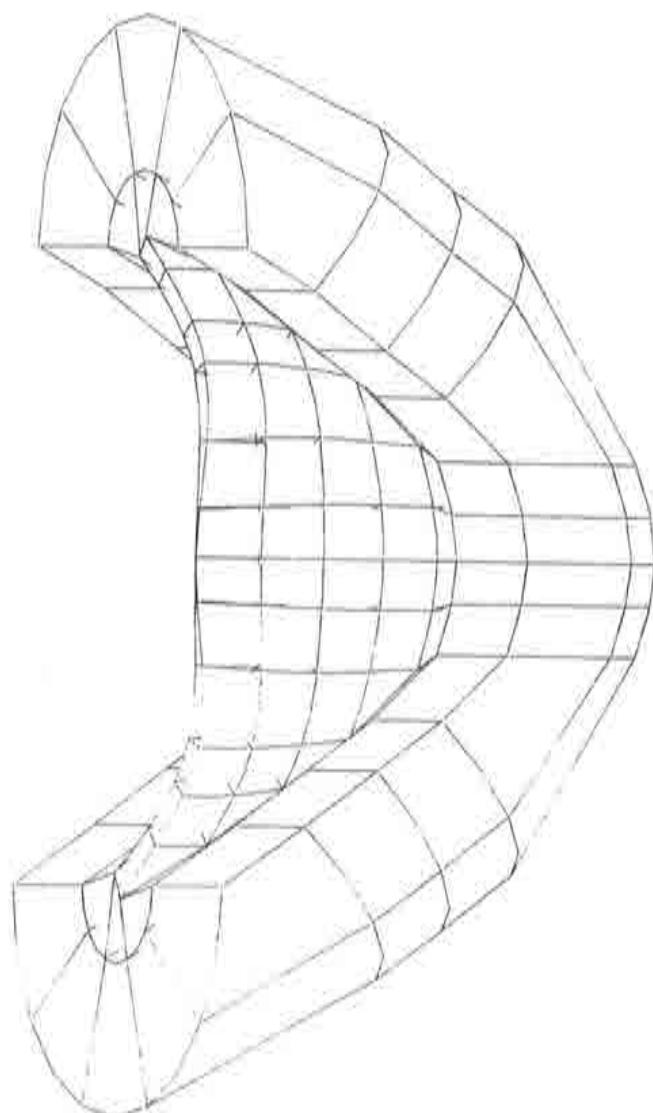


Fig. 10.35. Presa de Llauset (presa con terreno 1H). Segundo modo de vibración.

ANALISIS EXPERIMENTAL

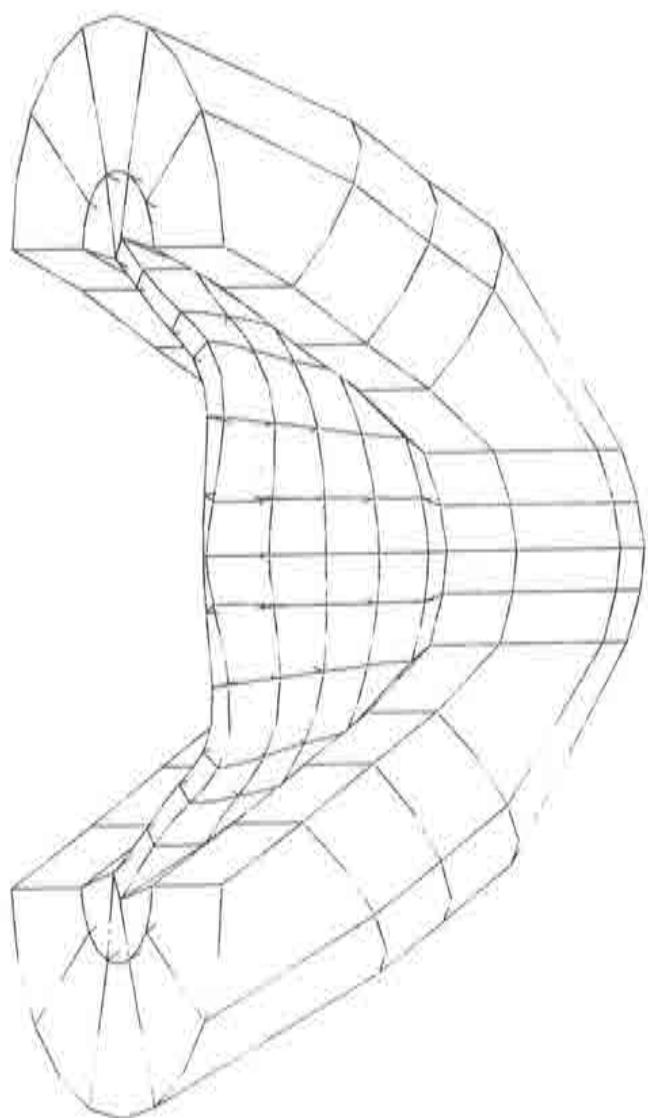


Fig. 10.36. Presa de Llauset (presa con terreno 1H). Tercer modo de vibración.

ANALISIS EXPERIMENTAL

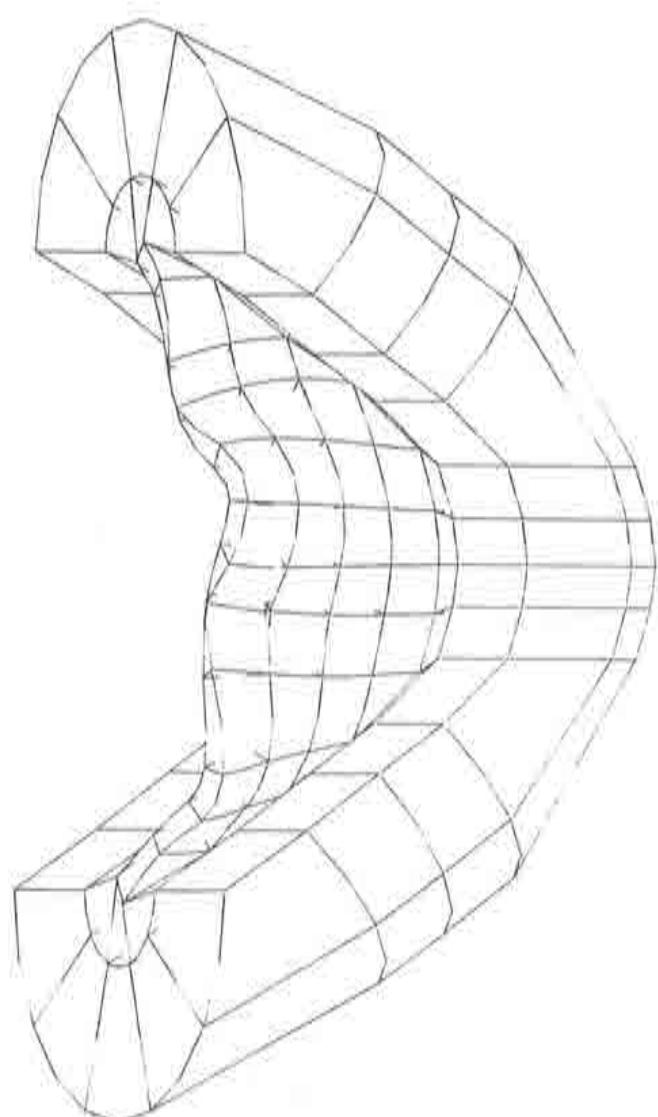


Fig. 10.37. Presa de Llauset (presa con terreno 1H). Cuarto modo de vibración.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

En la tabla 10.4 puede verse la variación de cada uno de los valores propios de la presa en función del cociente entre módulos de Elasticidad. En las figuras 10.38, 10.39, 10.40 y 10.41 se expresan gráficamente estos mismos resultados.

Tabla 10.4

VARIACION DE LOS VALORES PROPIOS CON $E_t/E_p$			
	1/1	1/2	1/4
1 <sup>er</sup> Valor Propio	24.501	23.086	21.024
2 <sup>do</sup> Valor Propio	29.414	27.977	25.664
3 <sup>er</sup> Valor Propio	35.898	33.667	30.470
4 <sup>to</sup> Valor Propio	48.008	44.999	40.945

Las conclusiones obtenidas son del mismo tipo que para la presa de Morrow Point:

Las frecuencias disminuyen como consecuencia de tomar en consideración la flexibilidad del terreno. Asimismo las frecuencias bajan al hacerlo el módulo de elasticidad de la roca de base.

Los resultados anteriores han sido comparados con los proporcionados con el ensayo experimental en modelo. En la tabla 10.5 se comparan ambos tipos de resultados. Como puede verse ambos resultados presentan una muy buena concordancia, con variaciones del 13% en el primer modo, del 4.1% en el segundo, del 6.3% en el tercero y del 7.1% en el cuarto, es decir una variación promedia del 7.6%.

Tabla 10.5

Comparación entre los resultados numéricos y los experimentales.		
Frecuencias propias de la presa en $rdn/s$		
Modo	Ánalisis experimental	Ánalisis numérico
1	20.357	23.091
2	29.217	28.003
3	31.793	33.724
4	42.097	45.011

## ANALISIS EXPERIMENTAL

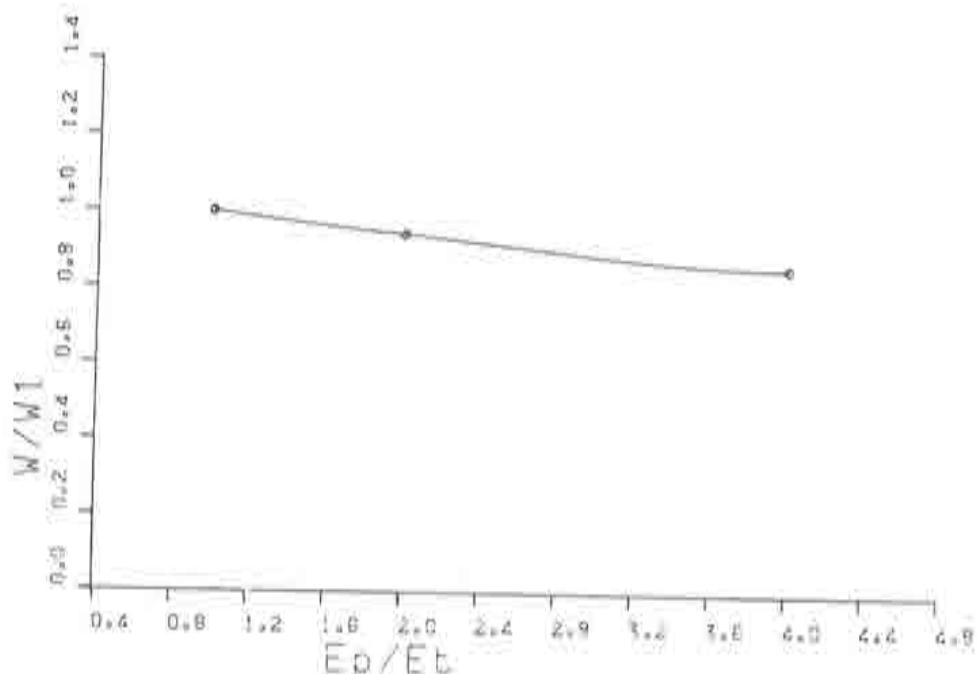


Fig. 10.38. Presa de Llauset: Variación de la primera frecuencia con el módulo de elasticidad.

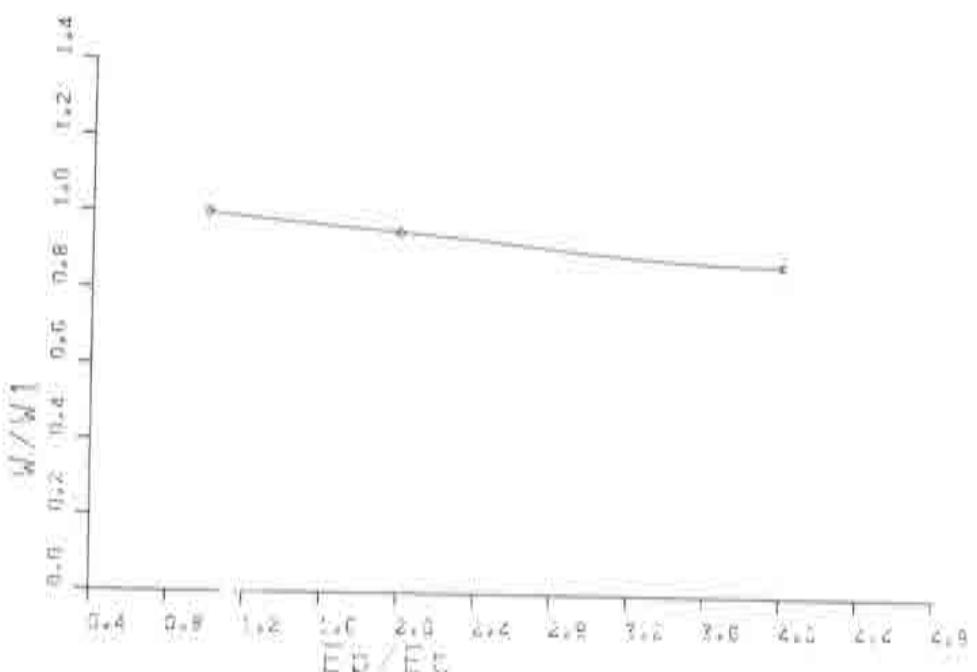


Fig. 10.39. Presa de Llauset: Variación de la segunda frecuencia con el módulo de elasticidad.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

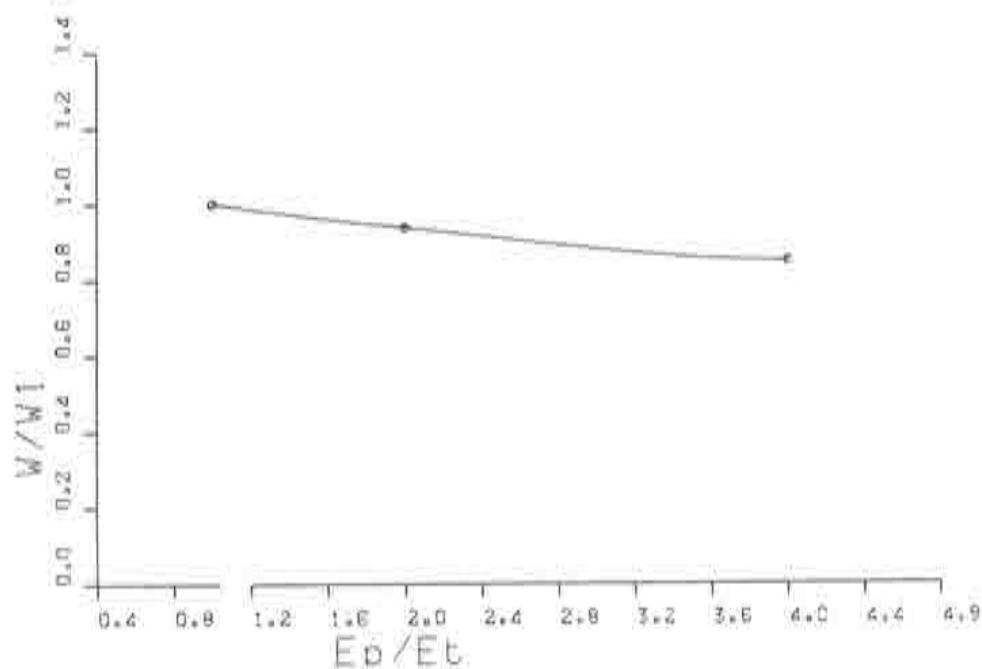


Fig. 10.40. Presa de Llauset: Variación de la tercera frecuencia con el módulo de elasticidad.

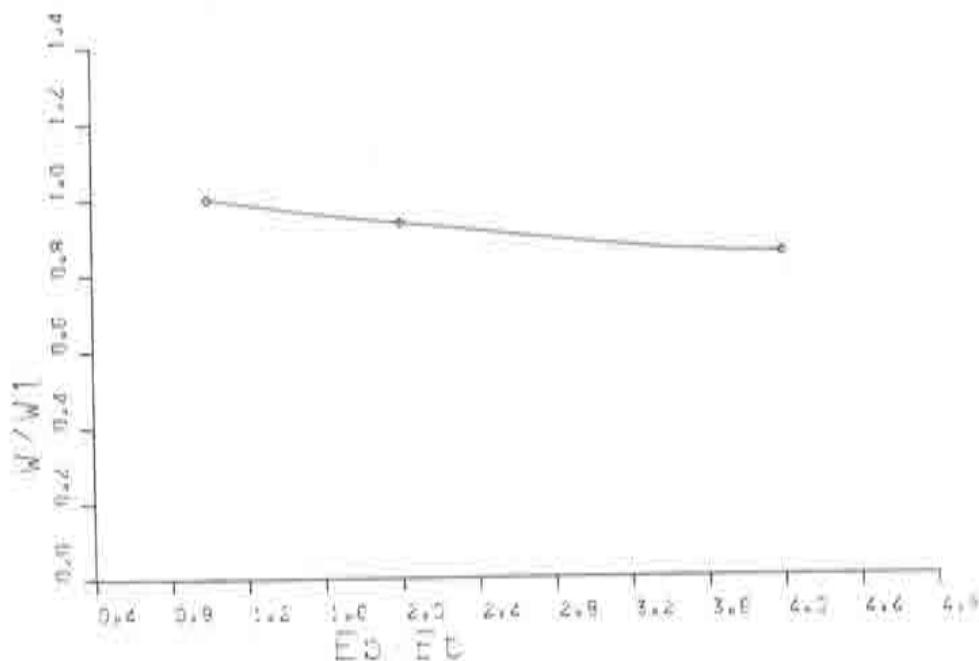


Fig. 10.41. Presa de Llauset: Variación de la cuarta frecuencia con el módulo de elasticidad.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

## 10.4.2.2. Cálculo de la respuesta mediante espectros

Se ha estudiado también el comportamiento dinámico de la presa de Llauset frente a la acción sísmica definida en la Norma Sismoresistente Española. Se toma un coeficiente de intensidad Sísmica  $C$  de  $0.15g$ . Multiplicando el coeficiente  $C$  por el coeficiente de respuesta  $R = 0.5$  se obtiene el valor de la ordenada máxima del espectro

$$S_a = C.R = 0.075g$$

En la figura 10.42 puede verse la deformada que proporciona el espectro de respuesta anterior, según la dirección del valle. La figura 10.43 representa la deformada máxima de la presa sometida al espectro de proyecto según la dirección transversal al valle. Ambas figuras corresponden al caso de presa empotrada.

En la tabla 10.6 se comparan los resultados obtenidos con los dados por el ensayo experimental. El espectro actúa en la dirección del valle

Tabla 10.6

DESPLAZAMIENTOS			
COMPARACION DE LOS RESULTADOS NUMERICOS CON LOS EXPERIMENTALES			
(espectro en la dirección perpendicular al valle)			
	Resultados experimentales	presa con apoyos rígidos	presa con una porción de terreno igual a su altura
Movimiento según la dirección del valle	0.126 cm	0.175 cm	0.115 cm
Movimiento en dirección perpendicular al valle	0.089 cm	0.035 cm	0.077 cm

Asimismo en la tabla 10.7 puede verse la misma comparación pero con el espectro actuando en dirección perpendicular al valle

ANALISIS EXPERIMENTAL.

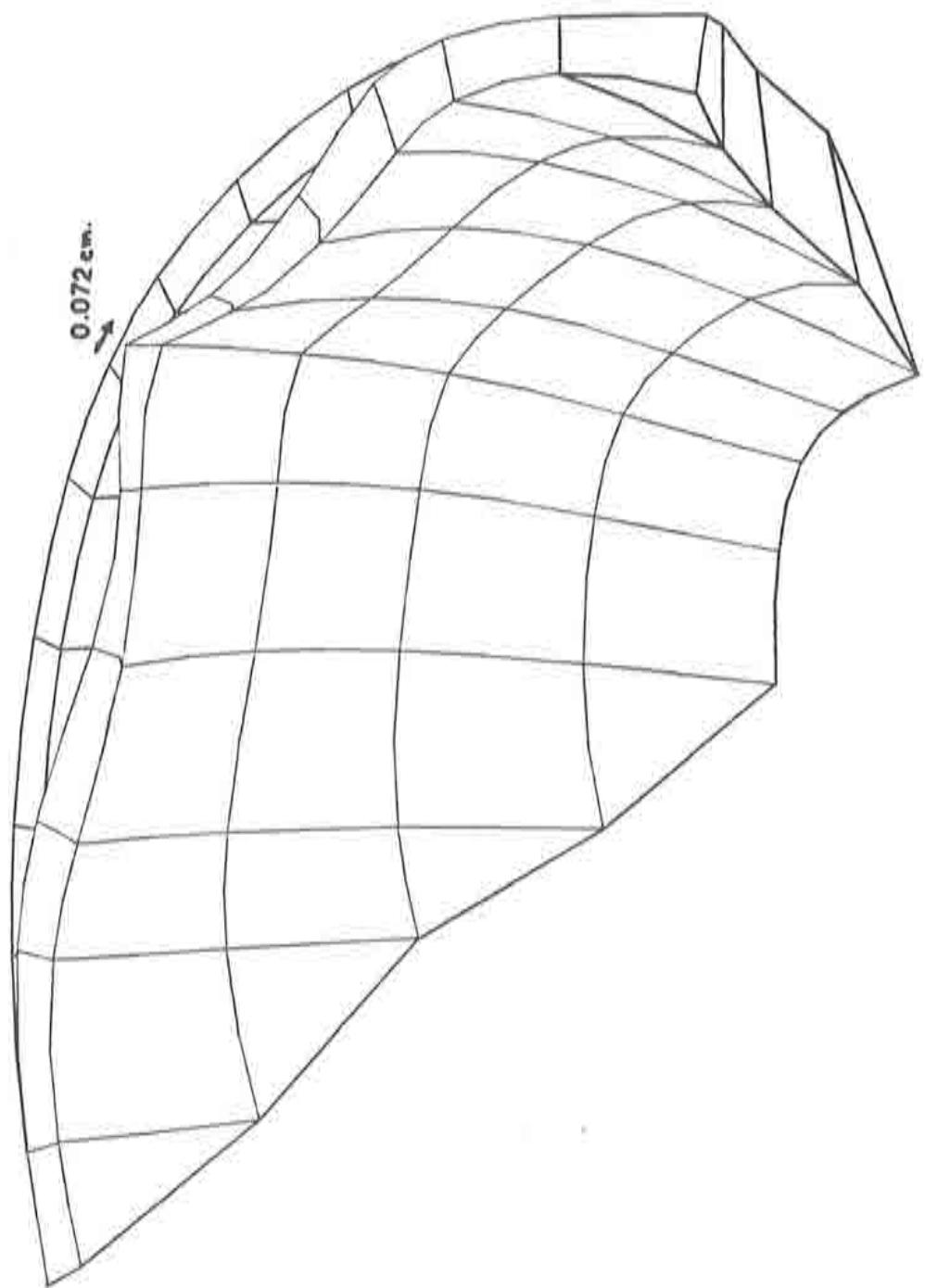


Fig. 10.43. Presa de Llauset: Deformada con el espectro en la dirección transversal al valle.

ANALISIS EXPERIMENTAL

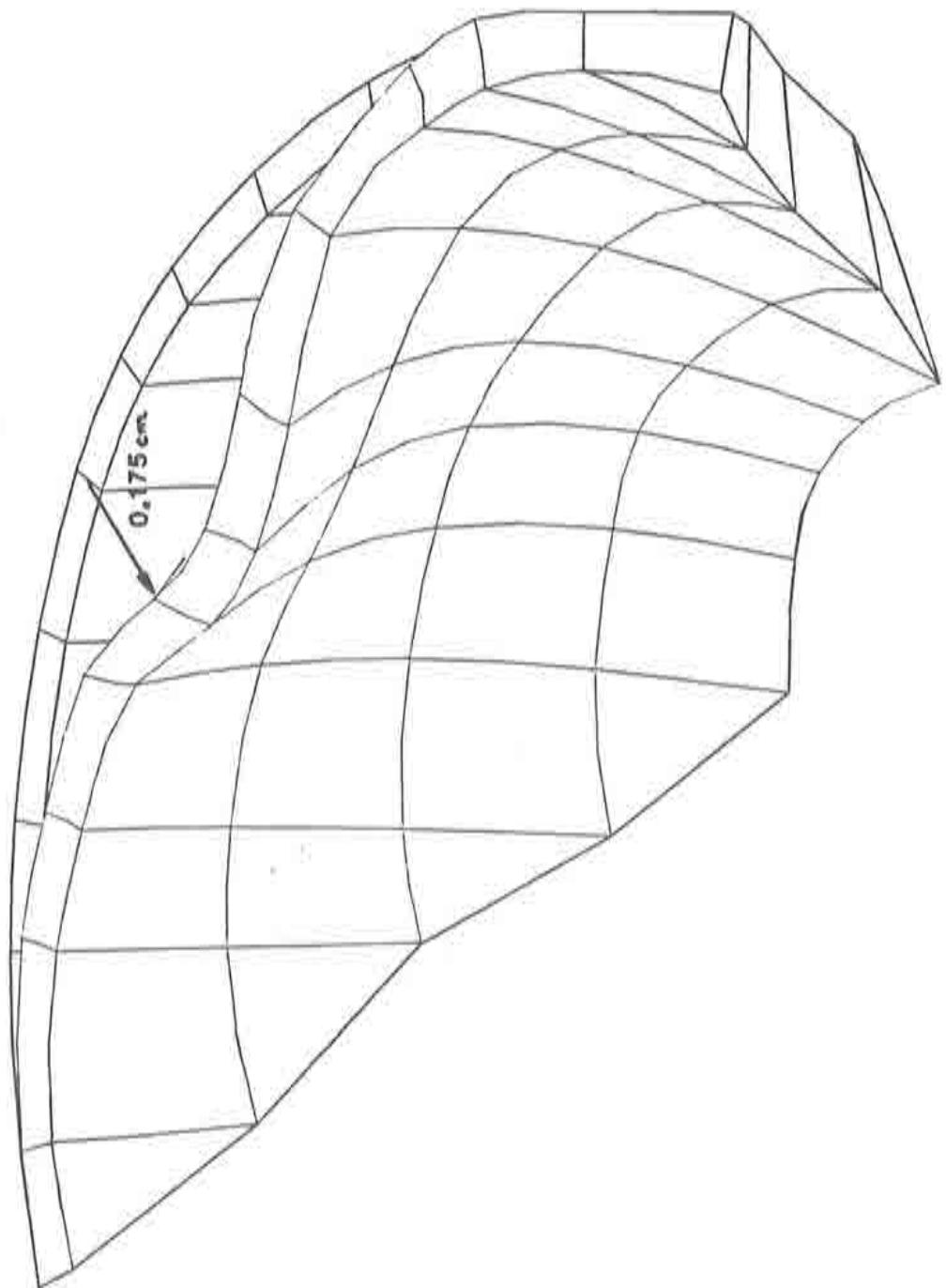


Fig. 10.42. Presa de Llauset: Deformada con el espectro en la dirección del valle.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

Tabla 10.7

DESPLAZAMIENTOS			
COMPARACION DE LOS RESULTADOS NUMERICOS CON LOS EXPERIMENTALES			
(espectro en la dirección perpendicular al valle)			
	Resultados experimentales	presas con apoyos rígidos	presas con una porción de terreno igual a su altura
Movimiento según la dirección del valle	0.216 cm	0.113 cm	0.180 cm
Movimiento en dirección perpendicular al valle	0.132 cm	0.072 cm	0.105 cm

Por último en las tablas 10.8 y 10.9 se comparan los resultados en tensiones para el espectro en la dirección del valle y en dirección perpendicular respectivamente.

Tabla 10.8

TENSIONES			
COMPARACION DE LOS RESULTADOS NUMERICOS CON LOS EXPERIMENTALES			
(espectro en la dirección del valle)			
	Resultados experimentales	presas con apoyos rígidos	presas con una porción de terreno igual a su altura
Tensión vertical máxima	1.51 Kg/cm <sup>2</sup>	1.81 Kg/cm <sup>2</sup>	1.64 Kg/cm <sup>2</sup>
Tensión horizontal máxima	1.70 Kg/cm <sup>2</sup>	1.96 Kg/cm <sup>2</sup>	1.85 Kg/cm <sup>2</sup>

Tabla 10.9

TENSIONES			
COMPARACION DE LOS RESULTADOS NUMERICOS CON LOS EXPERIMENTALES			
(espectro en la dirección perpendicular al valle)			
	Resultados experimentales	presas con apoyos rígidos	presas con una porción de terreno igual a su altura
Tensión vertical máxima	1.53 Kg/cm <sup>2</sup>	1.91 Kg/cm <sup>2</sup>	1.74 Kg/cm <sup>2</sup>
Tensión horizontal máxima	2.35 Kg/cm <sup>2</sup>	2.84 Kg/cm <sup>2</sup>	2.55 Kg/cm <sup>2</sup>

## ANALISIS EXPERIMENTAL

De la comparación de los resultados dados en las tablas 10.6 a 10.9 se desprende que existe una muy buena concordancia entre los resultados numéricos y los obtenidos experimentalmente, oscilando las diferencias en torno a una media del 10%. Se confirma asimismo la necesidad de considerar una porción de terreno en el análisis, al mejorar sustancialmente los resultados obtenidos, frente a los proporcionados por la presa aislada.

### 10.5 ANALISIS NUMERICO: EMBALSE LLENO

#### 10.5.1. Modos y frecuencias propias a embalse lleno

En el estudio del problema de interacción (embalse lleno) el primer aspecto a estudiar que se nos presenta es el dominio de fluido a considerar en el análisis, y si se modela como finito o como infinito. Dicho problema se agrava en el caso de la presa de Llauset debido a la geometría irregular del vaso del embalse, que presenta planta curva. Evidentemente la discretización óptima del dominio fluido sería aquella que se ajuste a la topografía del vaso. No obstante, ello comportaría un elevadísimo número de elementos y nodos (y por tanto de grados de libertad) que sobrepasarián la capacidad del ordenador.

Por este motivo se han estudiado diversas modelizaciones del dominio fluido con el fin de ver cual de ellas proporciona los resultados óptimos. Así se ha estudiado tanto una modelización de dominio de fluido infinito como de dominio finito, con distintas longitudes de discretización.

En todas las hipótesis estudiadas se ha obtenido la respuesta frente a excitaciones en la dirección del embalse (eje  $x$ ), en la dirección perpendicular a él (eje  $y$ ) y en la dirección vertical (eje  $z$ ) dado que, al ser la presa casi simétrica, ello permite poner de manifiesto tanto las frecuencias propias correspondientes a modos de vibración simétricas (excitación paralela al embalse) como a las antisimétricas (excitación transversal al embalse).

## ANALISIS EXPERIMENTAL

Para la determinación de las frecuencias propias se han obtenido en cada caso las curvas "frecuencia de excitación-aceleración en la presa", observándose para qué valores de la frecuencia se disparan las aceleraciones. No obstante, el valor de la frecuencia propia obtenida de este modo depende ligeramente del punto de la presa que se considera, con oscilaciones de  $\pm 1 \text{ rad/s}$ . Por ello, para cada caso estudiado se ha obtenido la respuesta en distintos nodos de la presa, a partir de los cuales se ha elaborado un histograma en el que se representa el número  $N$  de máximos obtenidos (entre todos los puntos estudiados) en cada intervalo unitario de las frecuencias. Ello nos permite, pues, obtener un valor representativo de la frecuencia propia de toda la presa y no de un punto de ella en particular.

Se han utilizado 6 autovalores para la modelización de la respuesta de la presa.

### 10.5.1.1. Modelización del dominio fluido como infinito

El dominio de fluido considerado es el representado en la figura 10.44, generado a partir de la proyección de la presa en la dirección paralela al embalse (dirección  $x$ ).

Para la discretización se han utilizado elementos prisma rectangular de 20 nodos y elementos prisma triangular de 15 nodos. A continuación se presentan los resultados obtenidos mediante el método directo y la formulación semianalítica.

#### a) *Método directo*

Se ha estudiado una longitud de discretización  $L$  de  $1H$  y de  $2H$  (siendo  $H$  la altura de la presa). Las características de dichas discretizaciones se resumen en la tabla siguiente:

ANALISIS EXPERIMENTAL

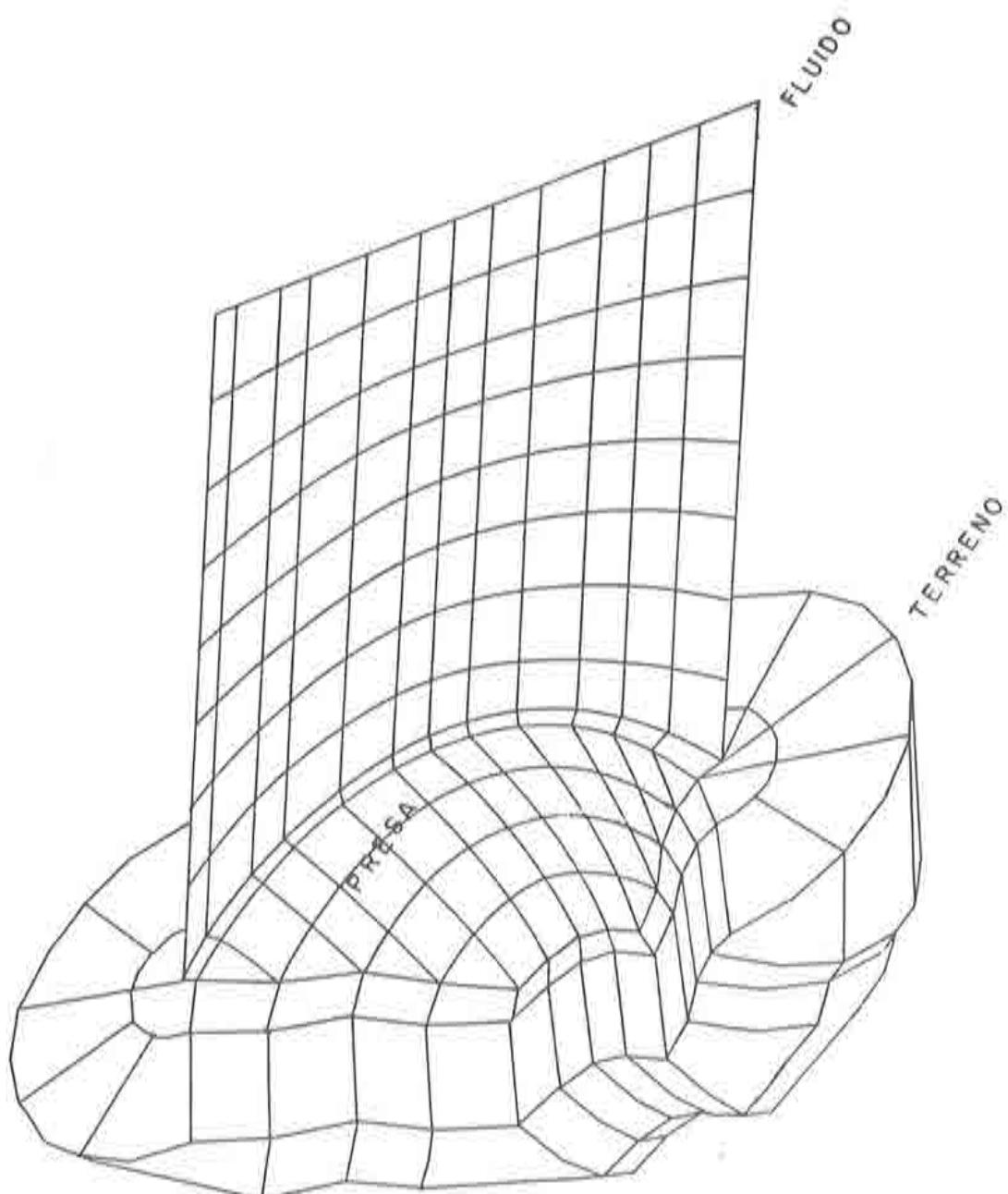


Fig. 10.44. Presa de Llauset: Interacción presa - embalse, Dominios considerados.

### ANALISIS EXPERIMENTAL

	$L = 1H$	$L = 2H$
No. de elementos	144	288
No. de nodos	805	1485
No. de nodos en la superficie	177	329

Los resultados obtenidos son los representados en las figuras 10.45, 10.46, 10.47, 10.48 y 10.49 (en las que se presentan los histogramas obtenidos y la gráfica aceleración-frecuencia en el punto más representativo), y que se han resumido en la tabla 10.10 (en la que sólo se presentan los resultados hasta  $w = 40 \text{ rad/s}$ , ya que en la referencia [40] se han obtenido únicamente los primeros cuatro modos de vibración).

Por otra parte, de los resultados experimentales a escala real, sólo se alcanza a definir con nitidez el primer modo, oscilando su valor entre 15 y 16.5  $rdn/s$ , dependiendo del registro analizado. Comparando estos resultados con los dados por la tabla 10.10 puede observarse la coincidencia de los resultados, con una diferencia media en la primera frecuencia del orden del 11%.

Del análisis de estos resultados destaca:

- Para la longitud de discretización  $L = 2H$  se obtiene un máximo en  $w = 34 \text{ rdn/s}$  (aunque su amplitud es menor que las amplitudes correspondientes a los restantes máximos) y que, por el contrario, no aparece en el análisis en modelo.
- Las frecuencias obtenidas para  $L = 1H$  y  $L = 2H$  se mueven dentro del mismo intervalo, a excepción de la frecuencia asociada al primer modo en que se presentan unas diferencias del 5%.
- Comparando los resultados expuestos con los proporcionados con el modelo reducido (Tabla 10.10) se desprende que las diferencias que se obtienen son inferiores a un 10% en los cuatro modos, lo cual equivale a diferencias inferiores a  $2.2 \text{ rad/s}$ .

### ANALISIS EXPERIMENTAL

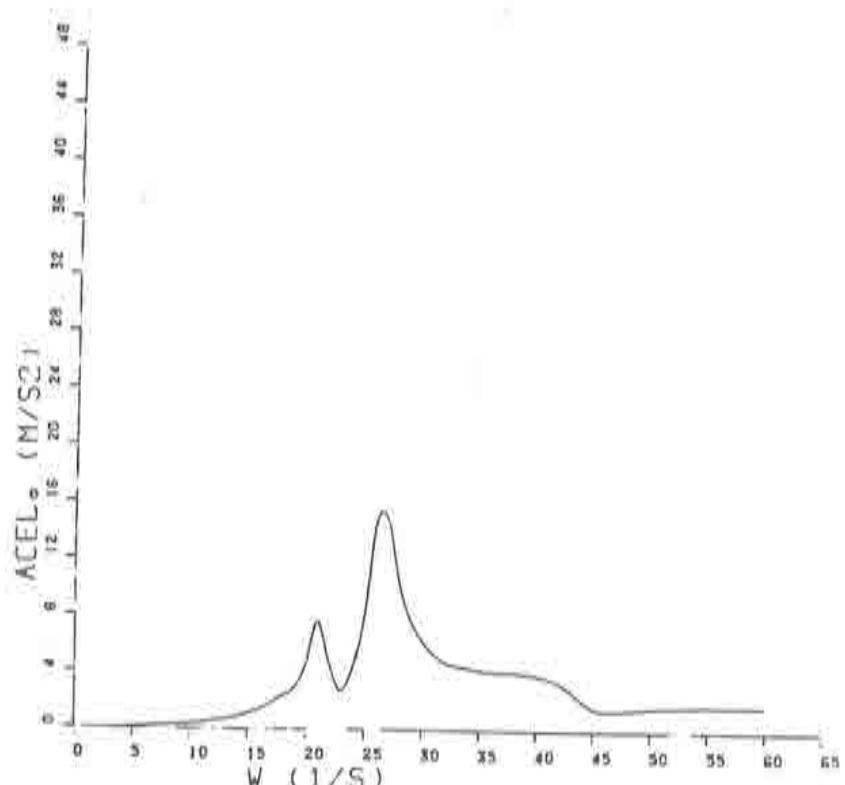
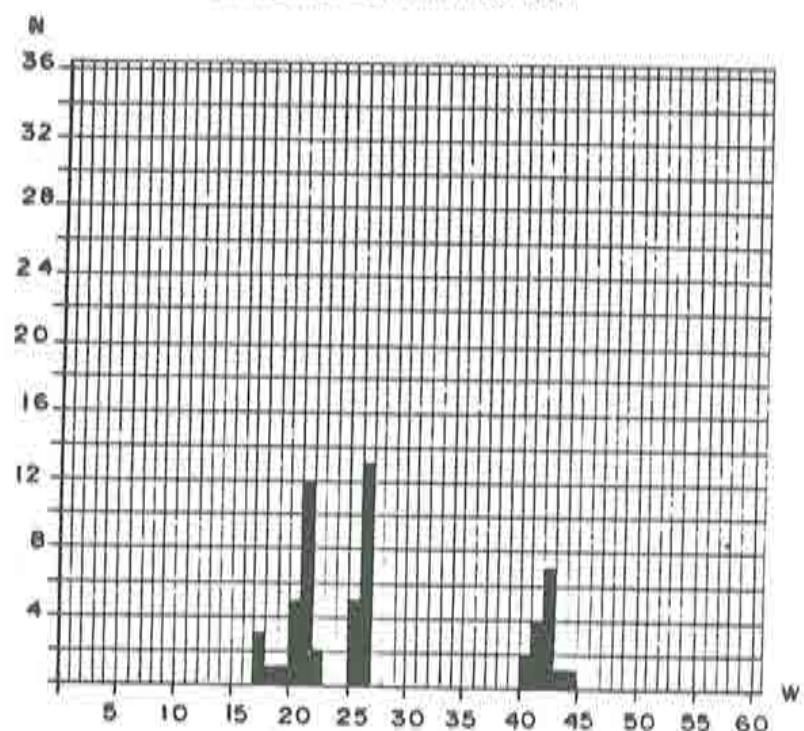


Fig. 10.45. Presa de Llauset: Interacción presa – embalse. Aceleración en el punto 69.

### ANALISIS EXPERIMENTAL

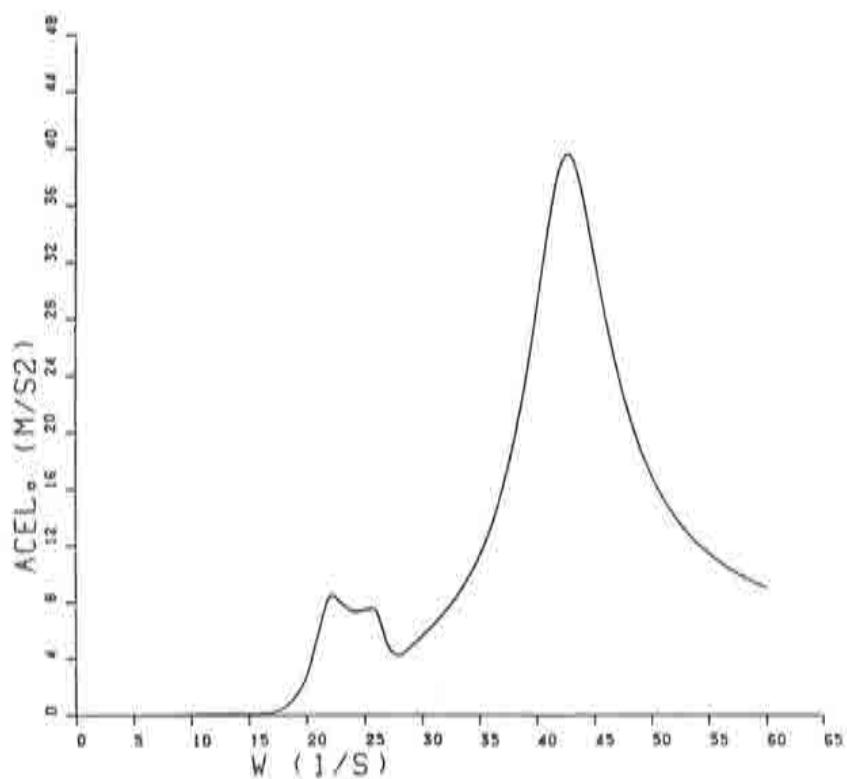
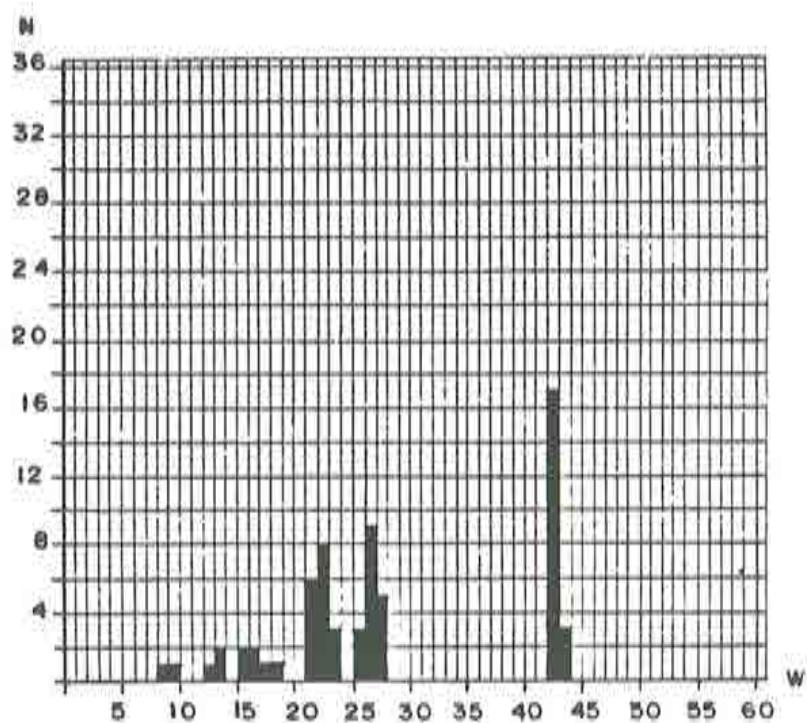


Fig. 10.46. Presa de Llauset: Interacción presa – embalse. Acceleración en el punto 396.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

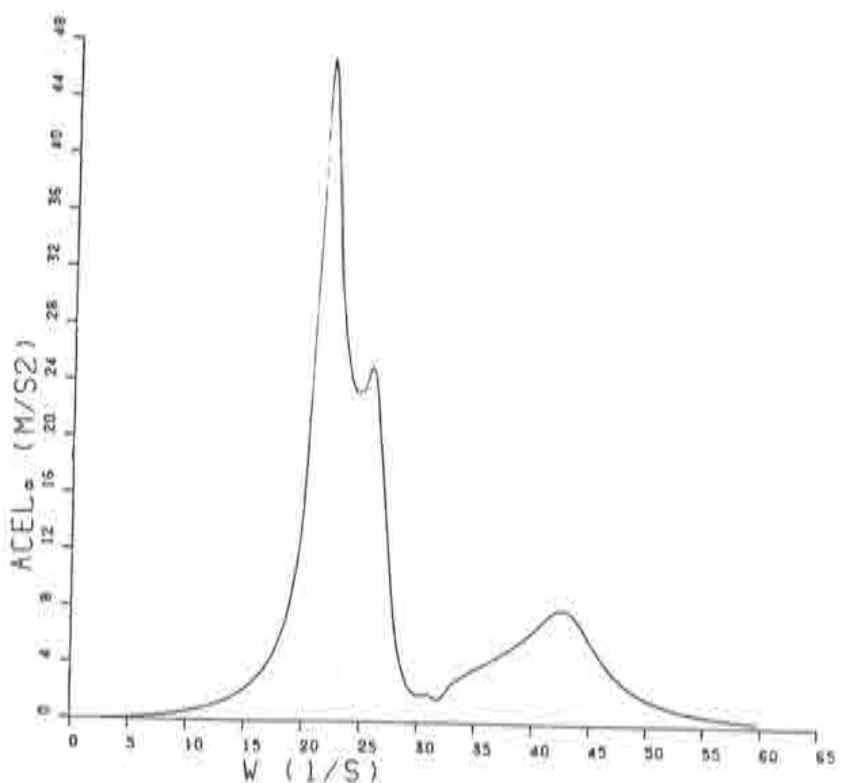
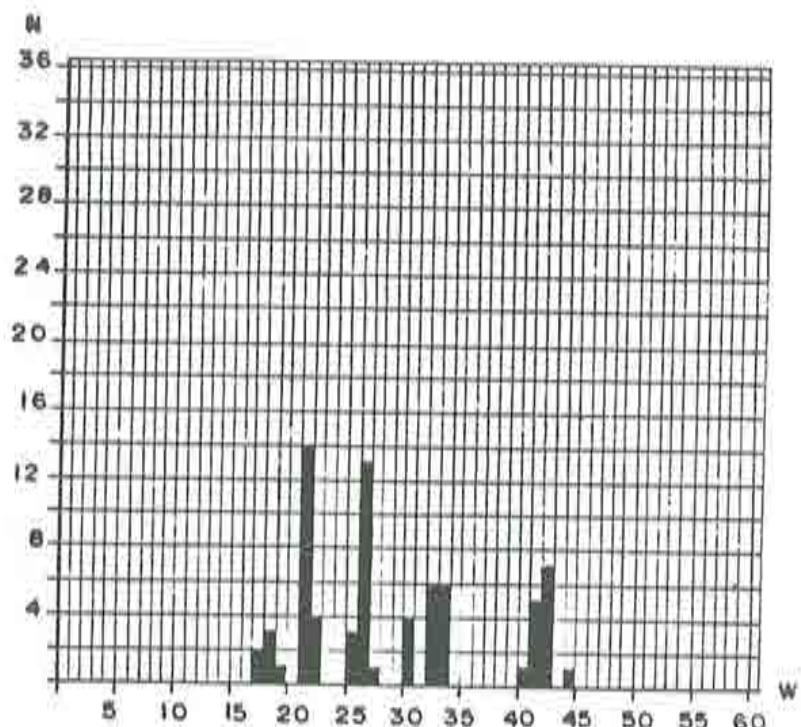


Fig. 10.47. Presa de Llauset: Interacción presa - embalse. Aceleración en el punto 472.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

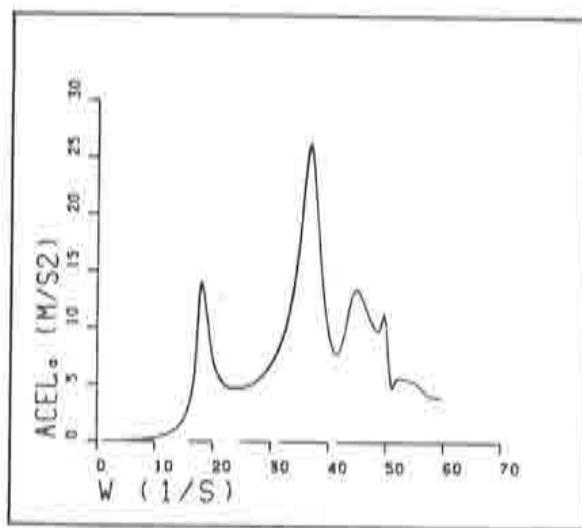
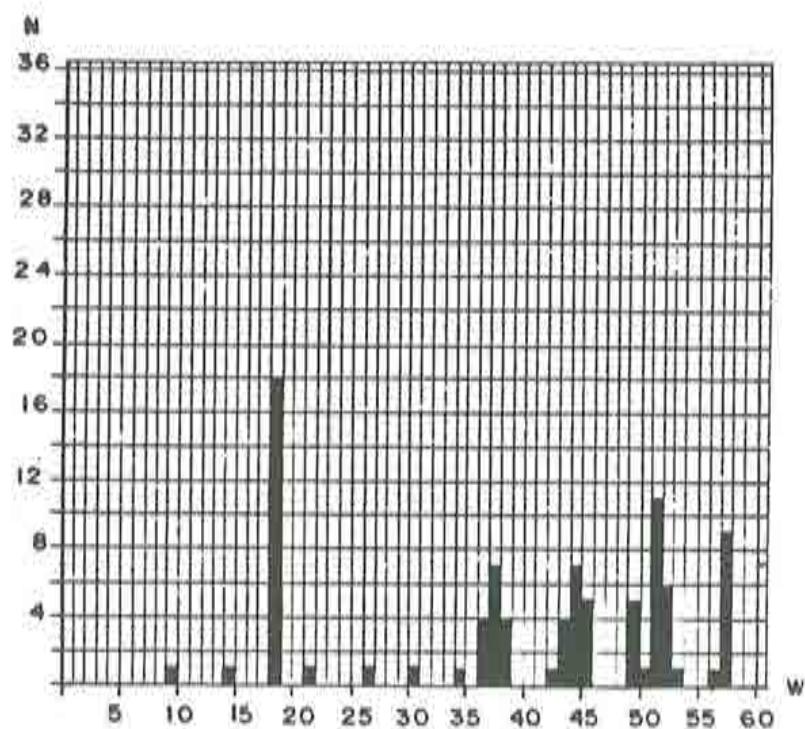


Fig. 10.48. Presa de Llauset: Interacción presa – embalse. Aceleración en el punto 550.

### ANALISIS EXPERIMENTAL

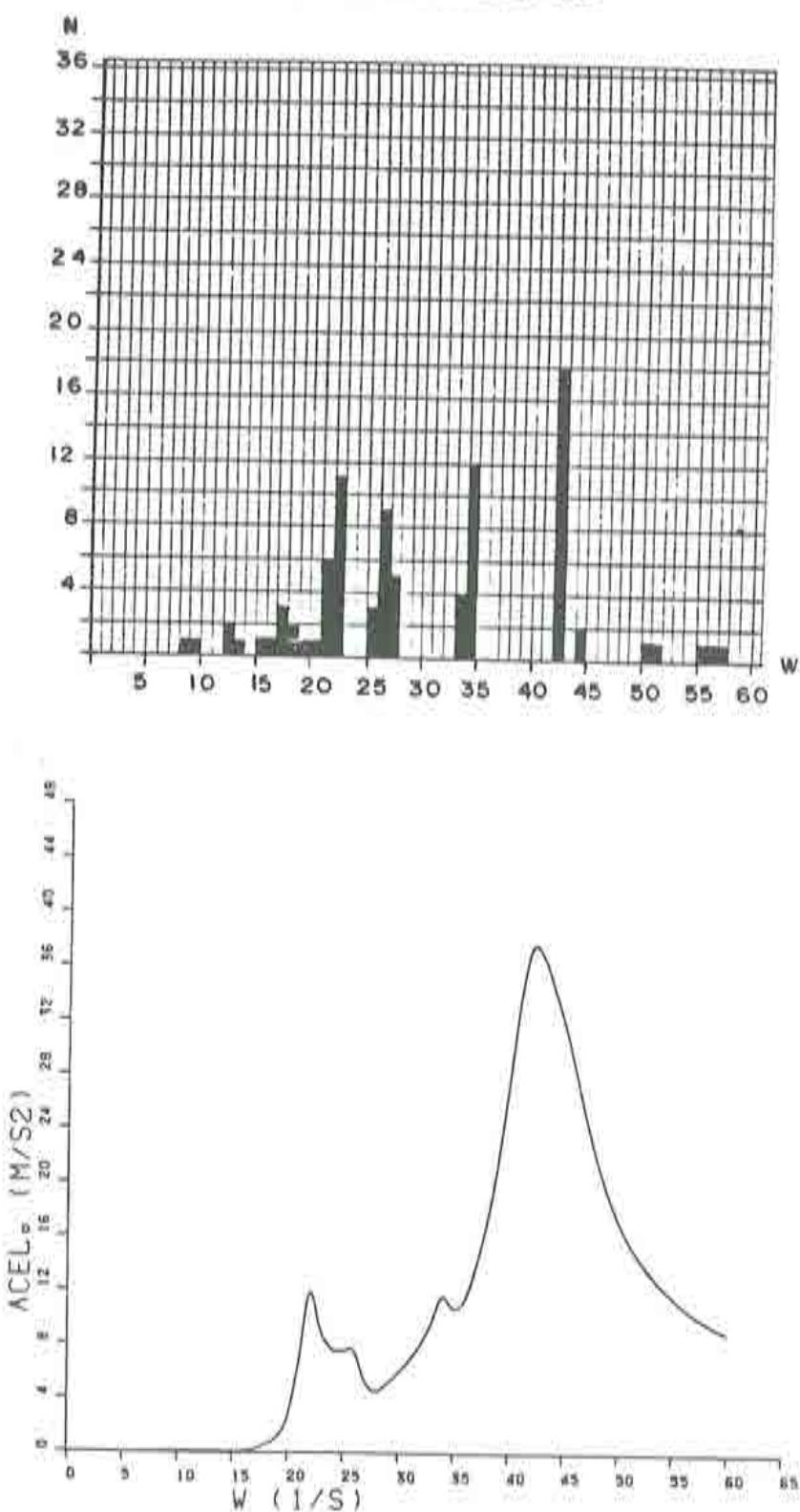


Fig. 10.49. Presa de Llauset: Interacción presa - embalse. Aceleración en el punto 550.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

Si introducimos ahora la interacción con el terreno, adoptando un 85% de reflexión, se obtienen los resultados dados en las figuras 10.50, 10.51 y 10.52, de los que desprenden las siguientes consideraciones:

- La introducción del terreno tiene un efecto amortiguador, disminuyendo el valor de las amplitudes en los entornos de las autofrecuencias y suavizando la curva obtenida en todo el rango de las frecuencias.
- El máximo que se obtenía en  $w = 34 \text{ rad/s}$  ha desaparecido totalmente al considerar la interacción con el terreno, por lo que no puede considerarse como frecuencia propia, sino que debe atribuirse a perturbaciones del propio método.
- El valor de las frecuencias propias no varía con respecto a las obtenidas sin la consideración del terreno.

### b) *Formulación semianalítica.*

En las figuras 10.53, 10.54 y 10.55 se exponen los histogramas obtenidos frente a excitaciones en dirección  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente, mediante la formulación semianalítica.

La longitud discretizada ha sido de  $L = 1H$ . Las frecuencias propias que se desprenden de dichas figuras se han resumido en la tabla 10.10 y que, como puede observarse, son prácticamente coincidentes con las proporcionadas con el método directo, con la salvedad de que no aparece el máximo para  $w = 34 \text{ rad/s}$  y que la primera frecuencia de vibración presenta únicamente una diferencia del 5% con respecto al valor proporcionado por el análisis en modelo (Ver tabla 10.10).

El tiempo de C.P.U empleado con la formulación semianalítica ha sido de 1 hora y 38 minutos, frente a las 4 horas y 40 minutos empleadas en el método directo.

### ANALISIS EXPERIMENTAL

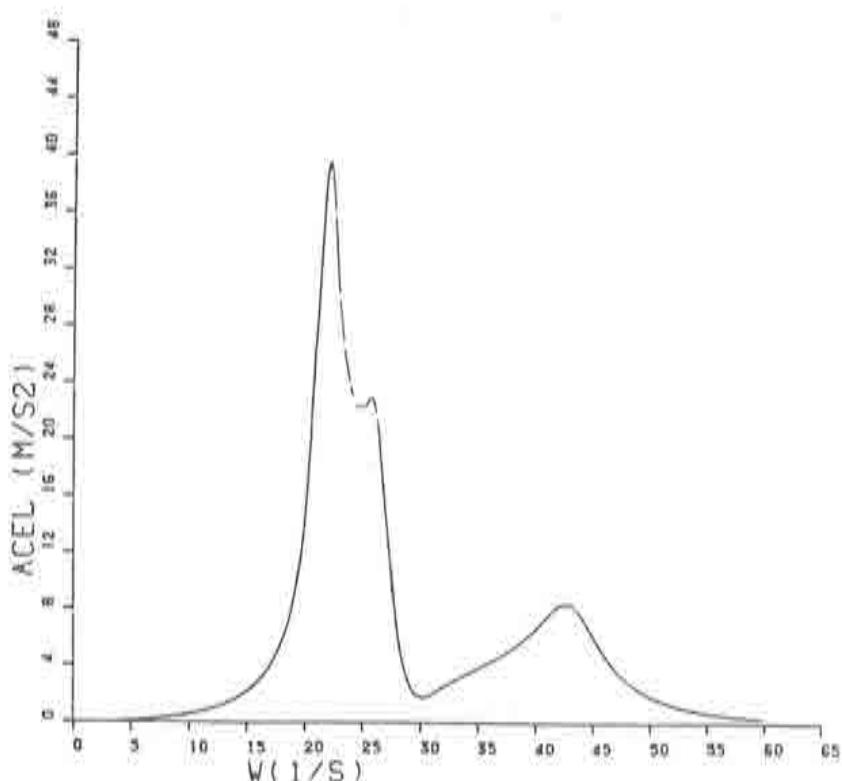
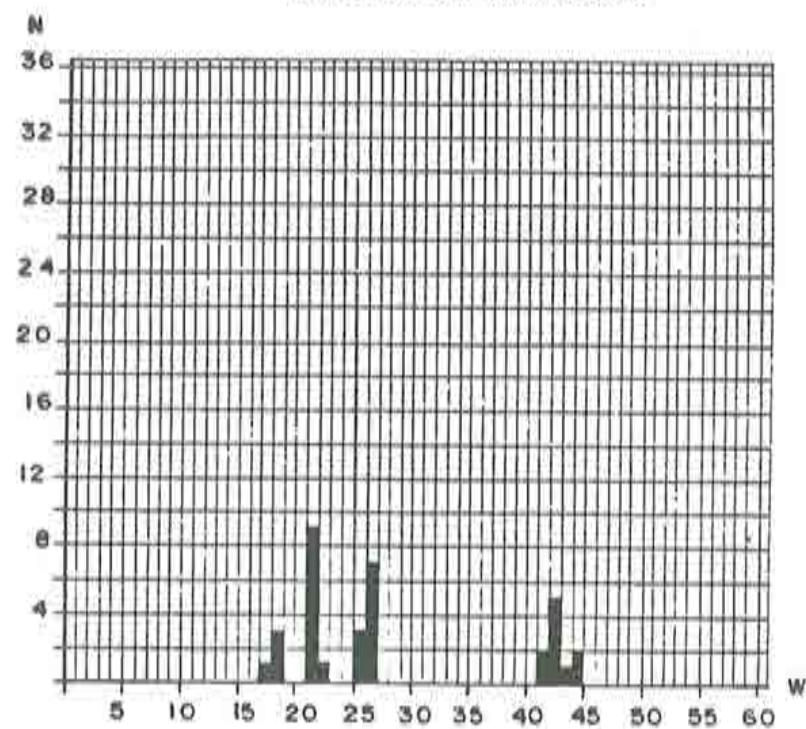


Fig. 10.50. Presa de Llauset; Interacción presa - embalse. Aceleración en el punto 472. (85% de reflexión)

## ANALISIS EXPERIMENTAL

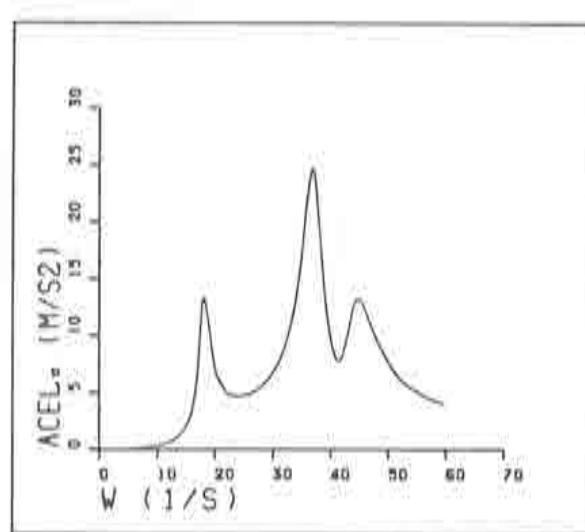
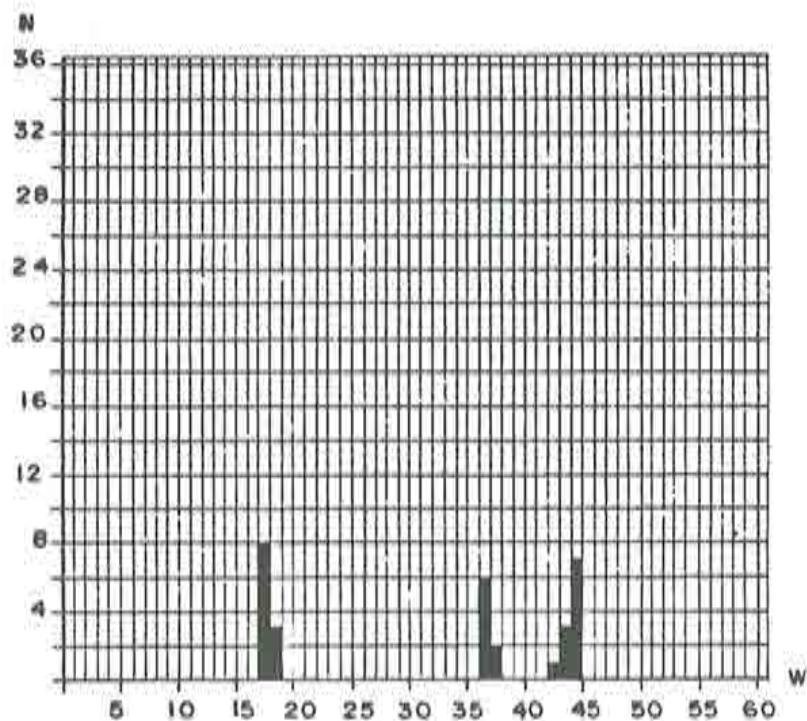


Fig. 10.51. Presa de Llauset: Interacción presa - embalse. Acceleración en el punto 550. (85% de reflexión)

## ANALISIS EXPERIMENTAL

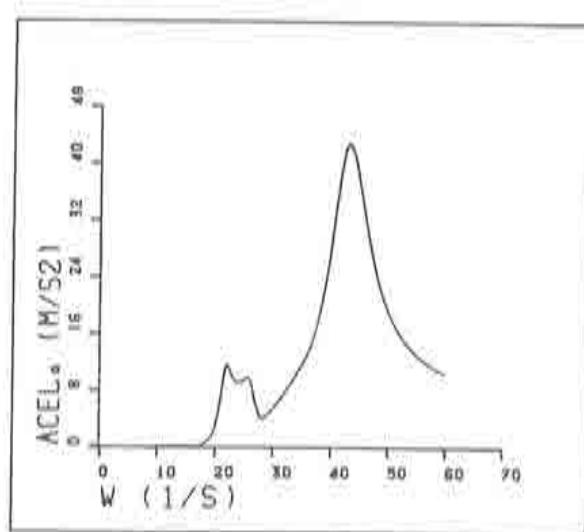
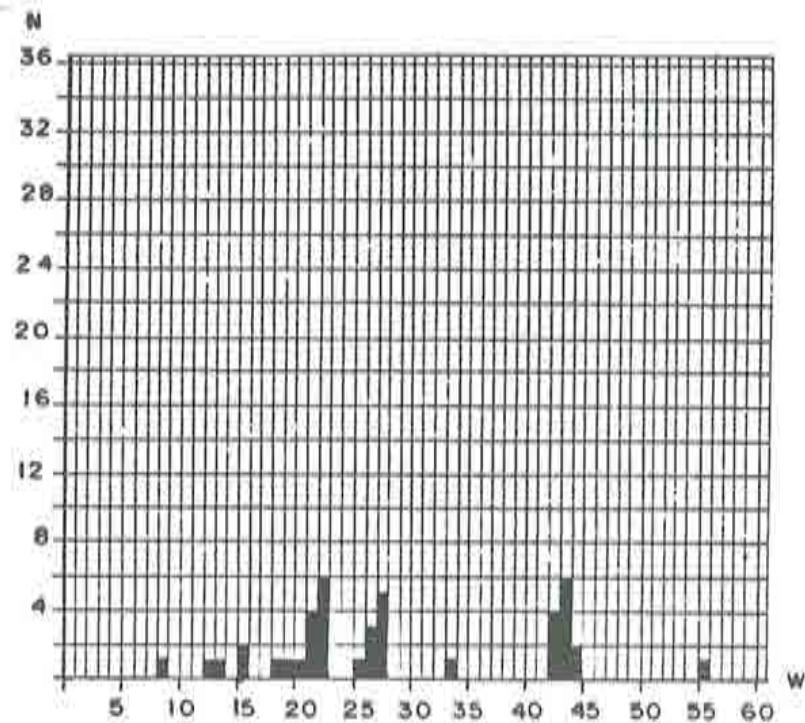


Fig. 10.52. Presa de Llauset: Interacción presa - embalse. Acceleración en el punto 470. (85% de reflexión)

### ANALISIS EXPERIMENTAL

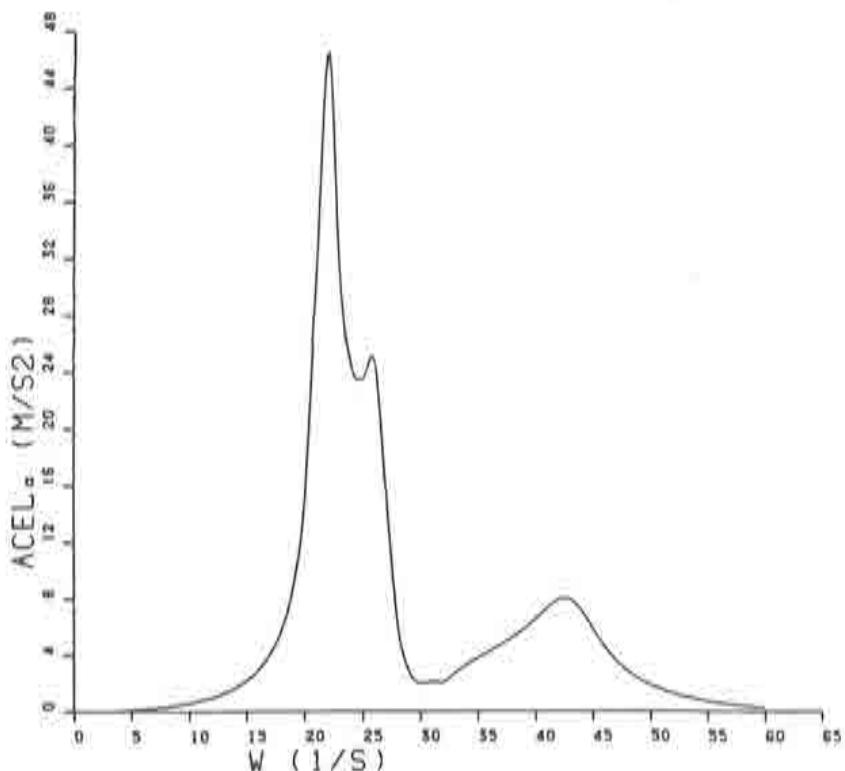
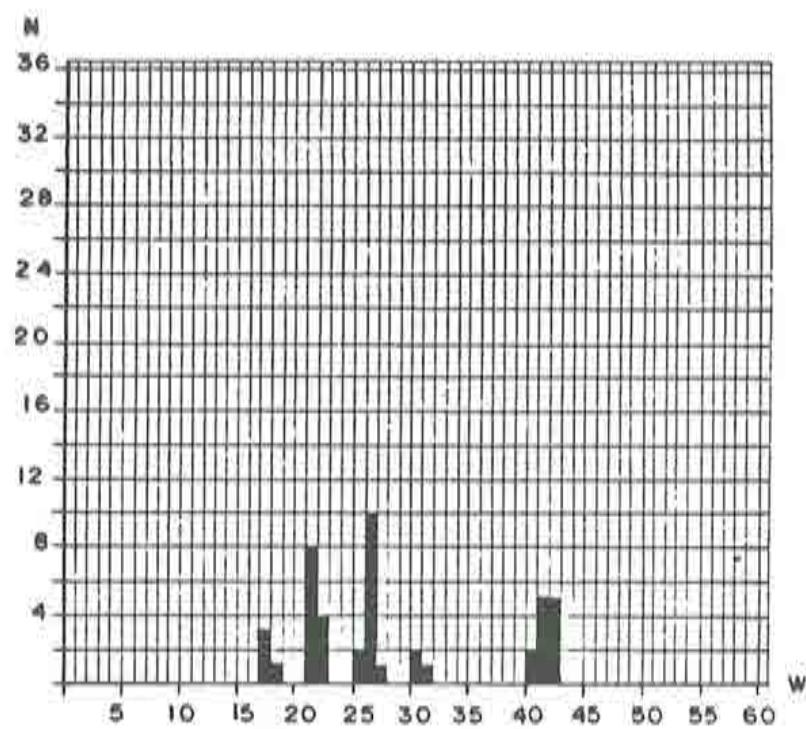


Fig. 10.53. Presa de Llauset: Interacción presa – embalse. Aceleración en el punto 472. Formulación semianalítica.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

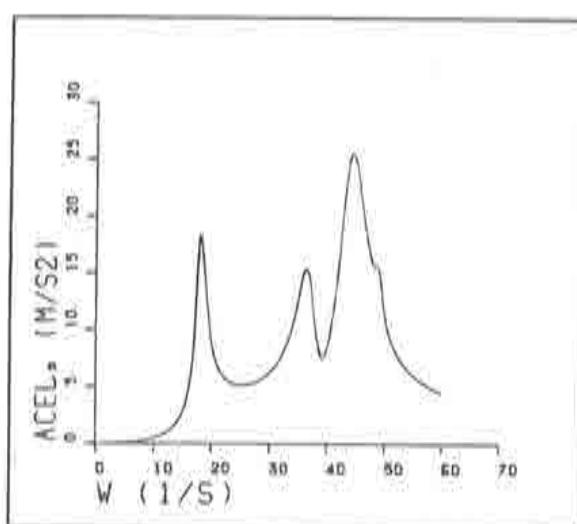
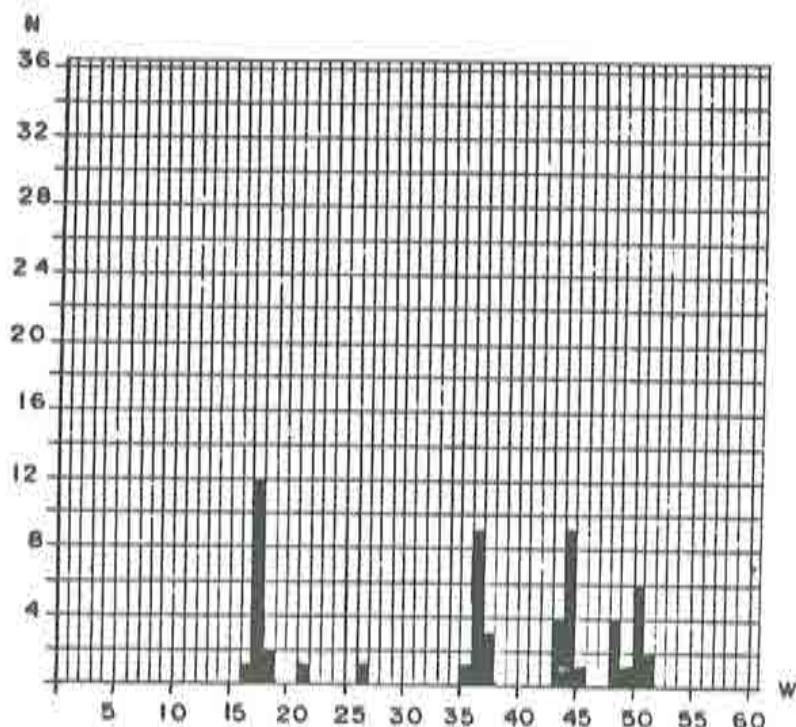


Fig. 10.54. Presa de Llauset: Interacción presa - embalse. Aceleración en el punto 316. Formulación semianalítica.

### ANALISIS EXPERIMENTAL

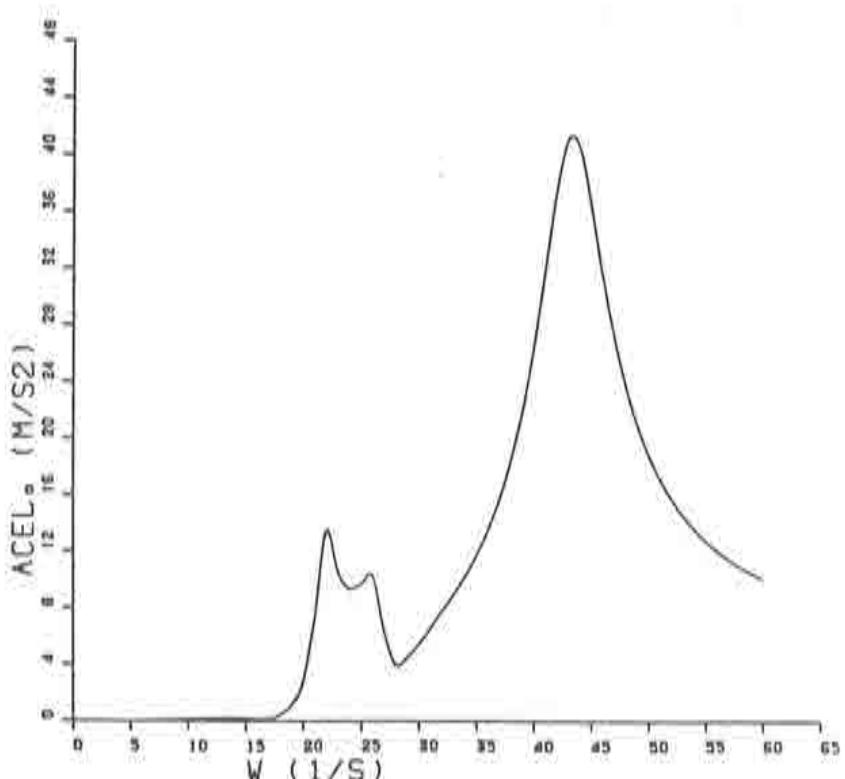
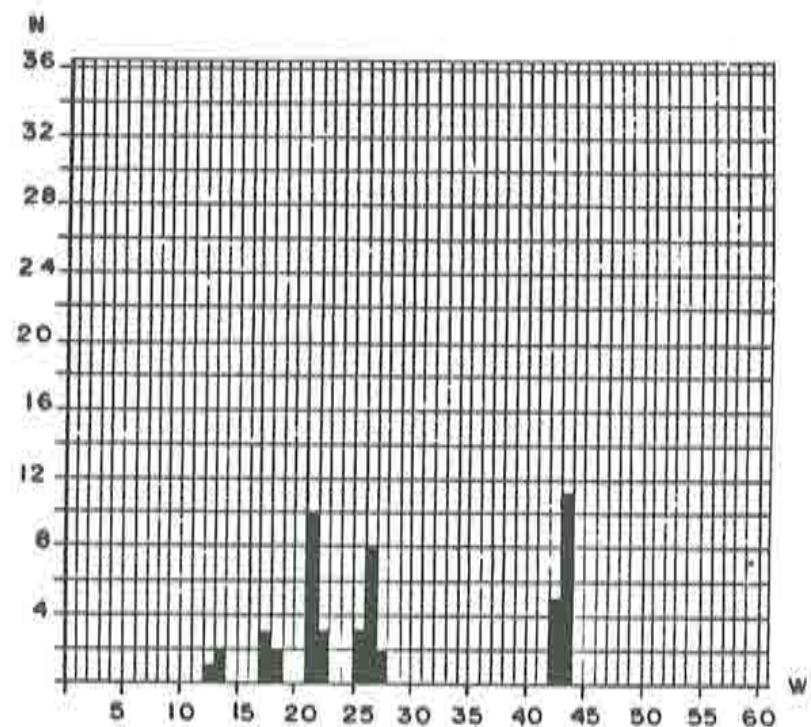


Fig. 10.55. Presa de Llauset: Interacción presa - embalse. Acceleración en el punto 470. Formulación semianalítica.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

Tabla 10.10

Método directo		Método	Análisis
L=1 H	L=2 H	semianalítico	experimental
17.5 ± 0.5	18.5 ± 0.5	17.5 ± 0.5	16.776
21.5 "	21.5 "	21.5 "	23.620
26.5 "	26.5 "	26.5 "	25.698
—	34.5 "	—	—
—	36.5 "	36.5 "	37.133

## ANALISIS EXPERIMENTAL

Todo ello corrobora, pues, la afirmación realizada en capítulos anteriores en el sentido de que la formulación semianalítica es un método eficaz para modelar dominios de fluidos infinitos, presentando un ahorro de tiempo y memoria utilizados por el ordenador.

Si comparamos ahora las respuestas obtenidas frente a una excitación horizontal en la dirección del embalse (eje  $x$ ) y una excitación transversal (eje  $y$ ) observamos que, en el primer caso, se ponen de manifiesto únicamente las frecuencias asociadas al segundo y tercer modos de vibración, mientras que en el segundo caso se ponen de manifiesto el primer y cuarto modos de vibración. De ello podemos concluir que el segundo y el tercer modos corresponden a modos simétricos, mientras que el primero y el cuarto son antisimétricos, ya que responden a solicitudes simétricas y antisimétricas respectivamente.

### 10.5.1.2. Modelización del dominio fluido como finito

Considerando un dominio fluido finito de longitud  $2H$  (siendo  $H$  la altura de la presa) se han obtenido los resultados presentados en las figuras 10.56, 10.57 y 10.58.

Al igual que en el caso infinito, se obtiene un máximo entre la tercera y cuarta frecuencia, que también desaparece al considerar la interacción con el terreno con una reflexión del 85%, tal y como se desprende del análisis de las figuras 10.59 y 10.60.

La consideración de la interacción con el terreno produce los mismos efectos que en el caso infinito.

### 10.5.2. Incompresibilidad del fluido

Si se considera el agua como incompresible, se observa una disminución de las frecuencias asociadas a los modos de vibración de la estructura y una alteración en las amplitudes obtenidas. Además, a diferencia de cuando se considera el fluido compresible, las frecuencias

### ANALISIS EXPERIMENTAL

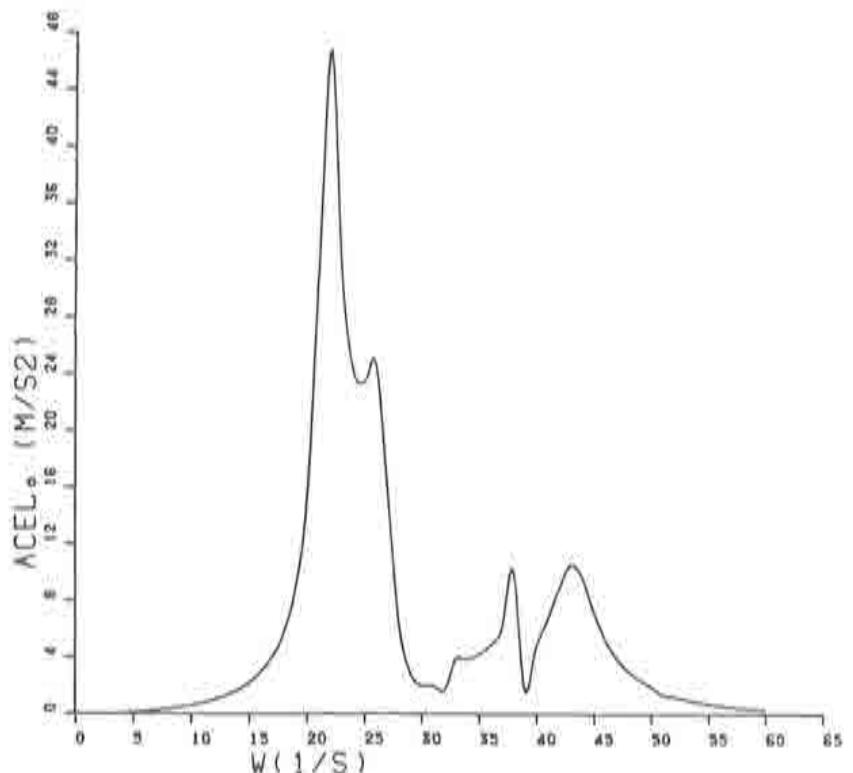
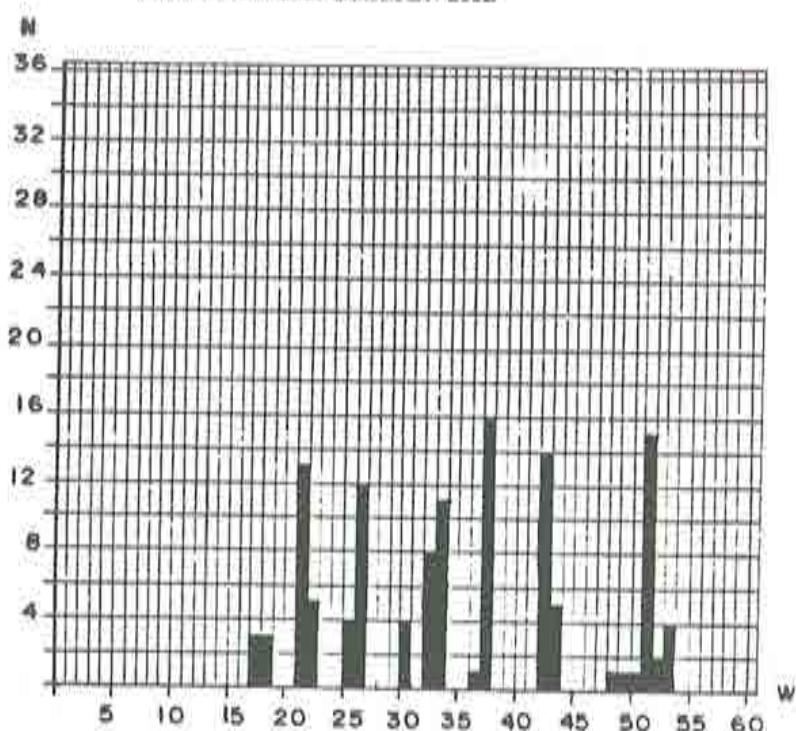


Fig. 10.56. Presa de Llauset: Interacción presa - embalse. Aceleración en el punto 472. Fluido finito.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

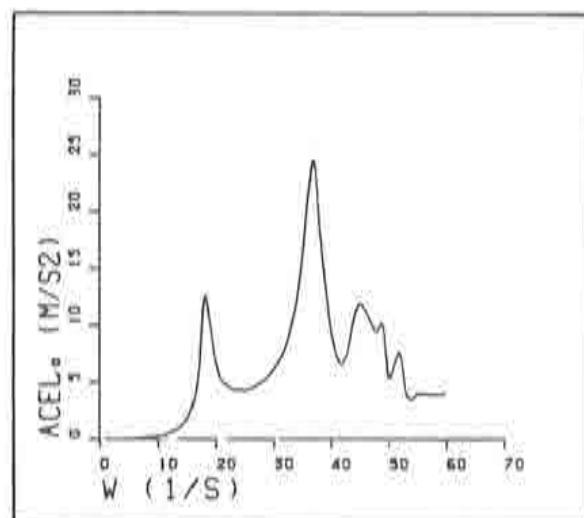
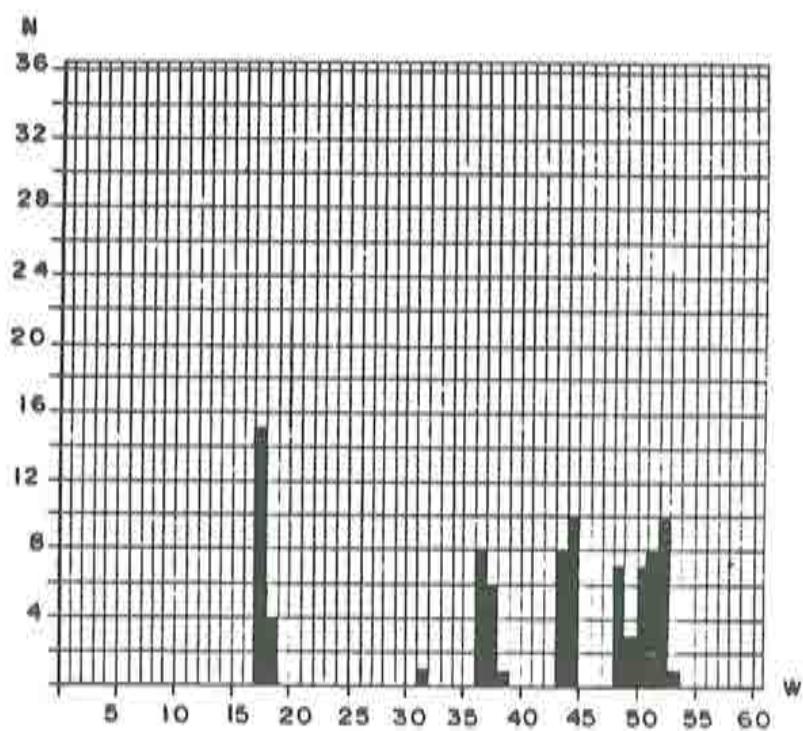


Fig. 10.57. Presa de Llauset: Interacción presa - embalse. Aceleración en el punto 396. Fluido finito.

ANALISIS EXPERIMENTAL

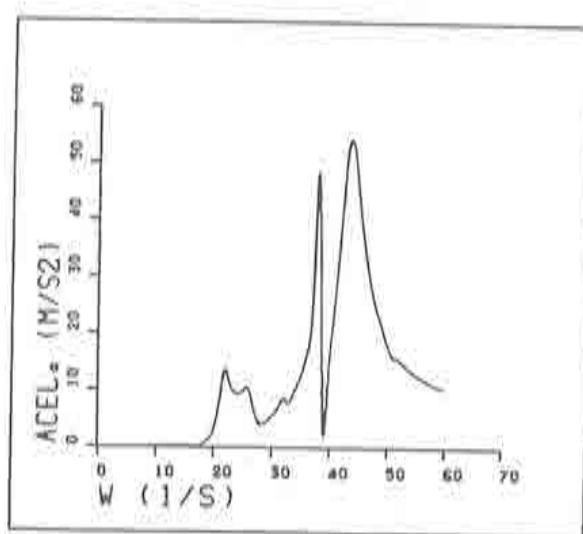
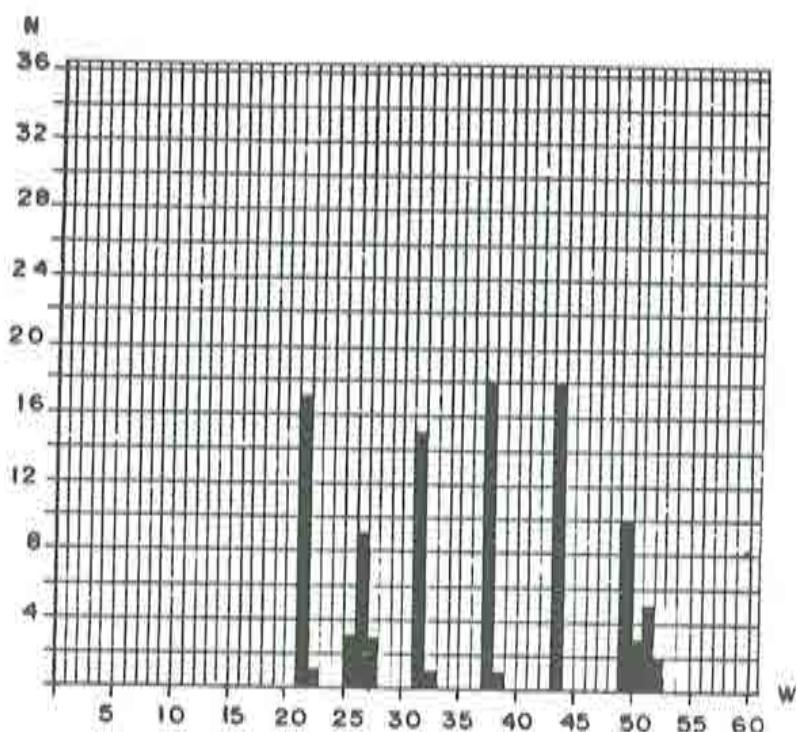


Fig. 10.58. Presa de Llauset: Interacción presa - embalse. Aceleración en el punto 470. Fluido finito.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

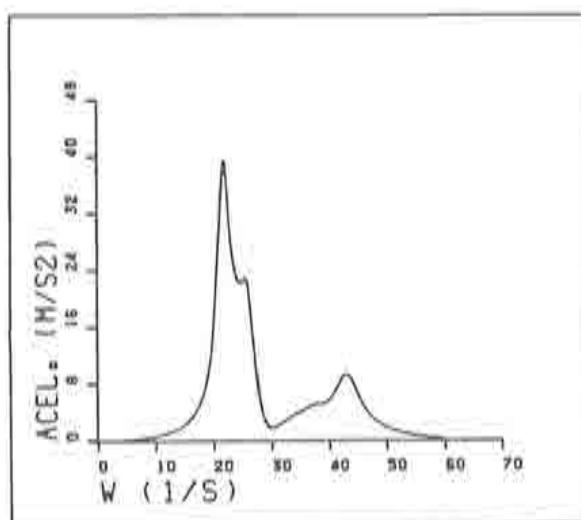
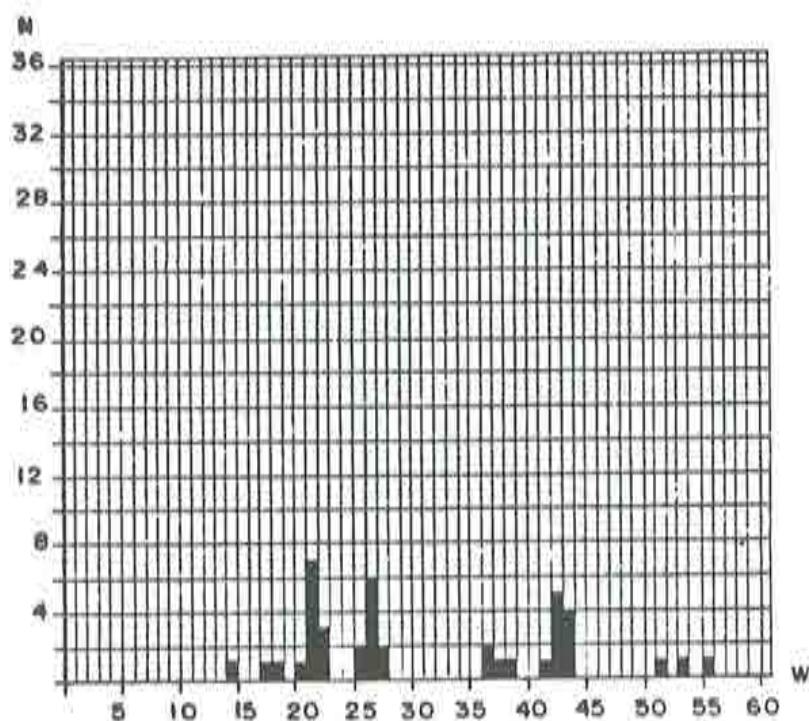


Fig. 10.59. Presa de Llauset: Interacción presa - embalse. Aceleración en el punto 472. Fluido finito. Con interacción con terreno.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

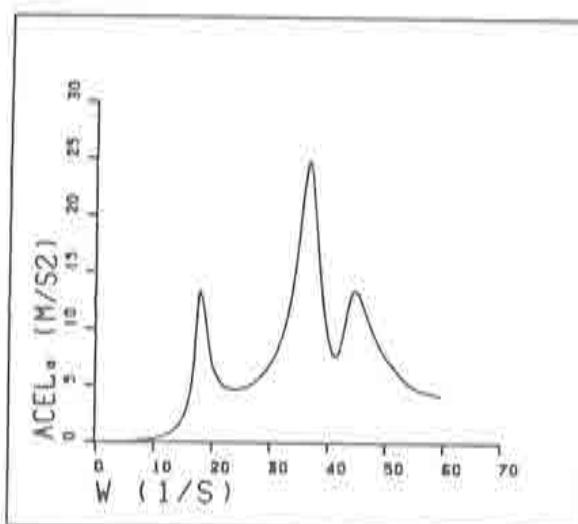
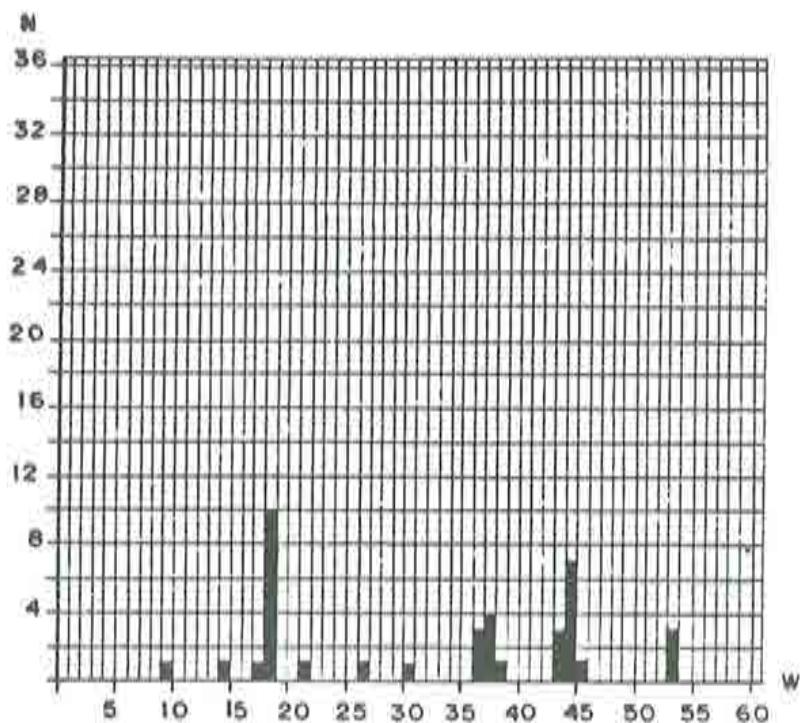


Fig. 10.60. Presa de Llauset: Interacción presa – embalse. Aceleración en el punto 550. Fluido finito. Con interacción con terreno.

### ANALISIS EXPERIMENTAL

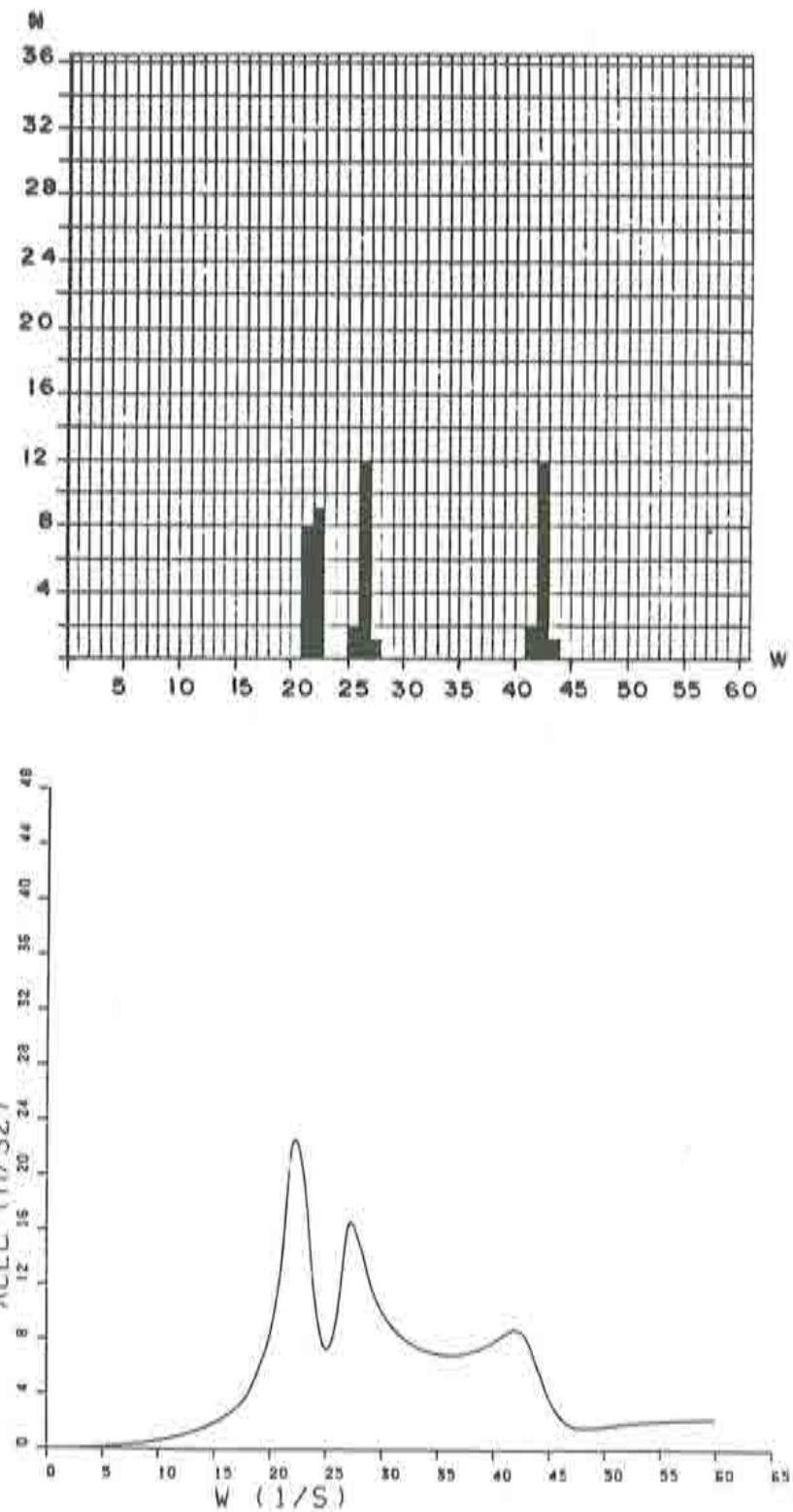


Fig. 10.61. Presa de Llauset; Interacción presa - embalse. Acceleración en el punto 316. Fluido incompresible.

ANALISIS EXPERIMENTAL

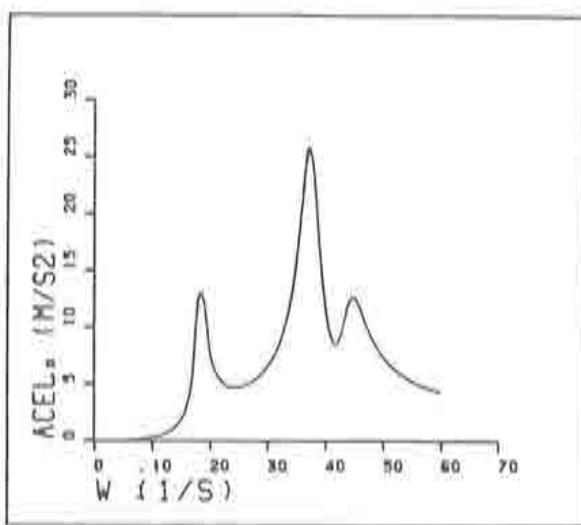
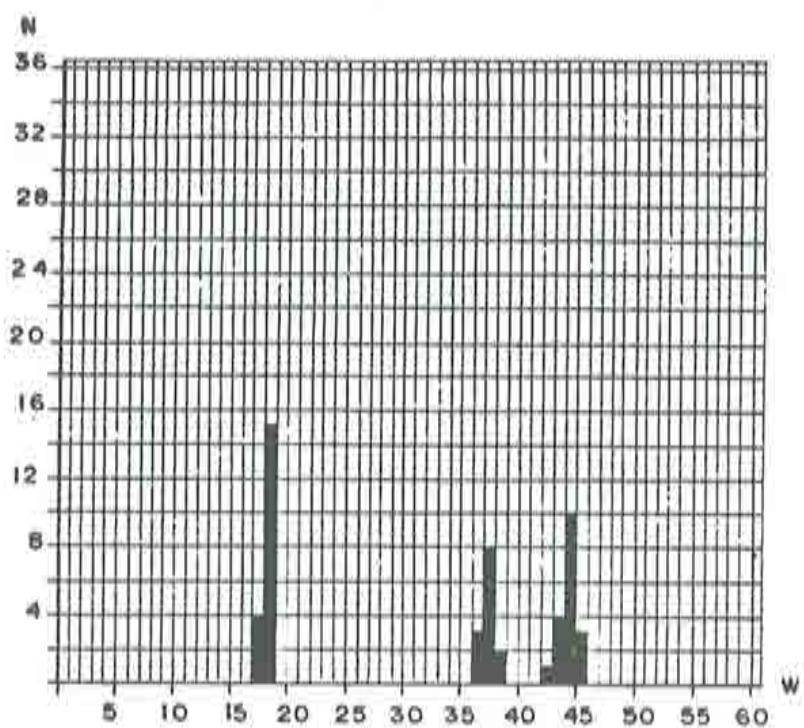


Fig. 10.62. Presa de Llauset: Interacción presa - embalse. Aceleración en el punto 550. Fluido incompresible.

## ANALISIS EXPERIMENTAL

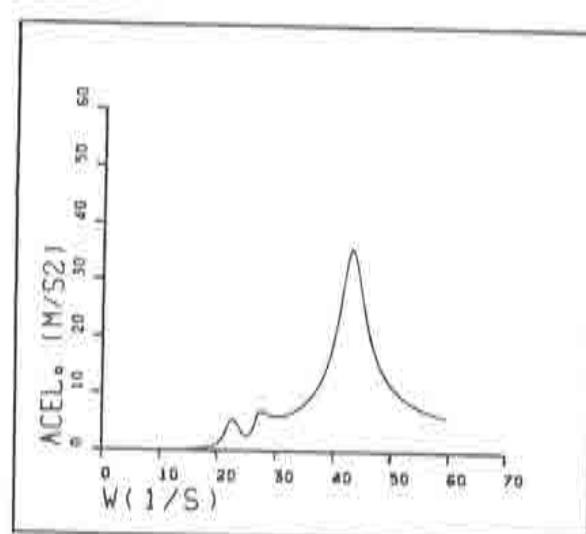
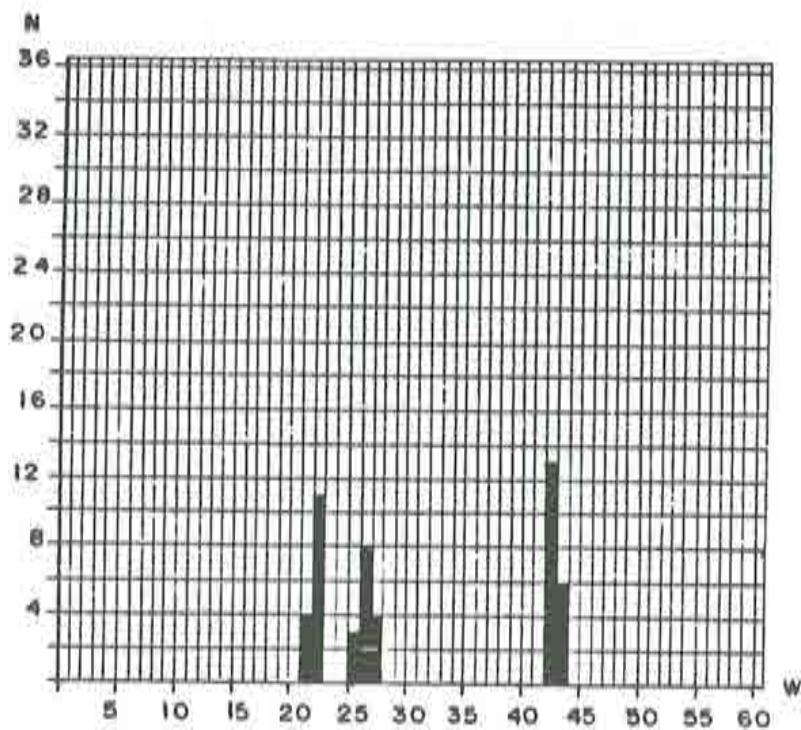


Fig. 10.63. Presa de Llauset: Interacción presa - embalse. Acceleración en el punto 625. Fluido incompresible.

#### ANALISIS EXPERIMENTAL

obtenidas se aprecian muy claramente y no aparecen las perturbaciones que se han comentado en apartados anteriores.

Las figuras 10.61, 10.62 y 10.63 corresponden a los resultados obtenidos con fluido incompresible.

## CAPITULO 11

### ANALISIS MODAL. MODELO PROPUESTO

#### 11.1. INTRODUCCION

En los capítulos anteriores se ha analizado el análisis dinámico de la estructura con embalse vacío, el análisis dinámico del fluido, así como el estudio de la interacción.

El objeto del presente capítulo es desarrollar numéricamente un modelo de cálculo de análisis dinámico de presas considerando la interacción que refleje la formulación teórica utilizada como base en el análisis experimental de presas bóveda. Para evaluar la eficacia del modelo planteado se dispone de unos resultados de análisis experimental que se comparan con los resultados obtenidos con el modelo propuesto.

Todas las pruebas numéricas realizadas así como los resultados experimentales de los que se disponen, corresponden a la presa bóveda de Llauset.

## 11.2. MODELO NUMERICO PROPUESTO

### 11.2.1 Presiones hidrodinámicas y Matriz de masa equivalente

El punto de partida de todo el desarrollo teórico realizado es que en las condiciones de embalse lleno, el efecto de las presiones hidrodinámicas sobre la respuesta de la presa se considera recurriendo al concepto de **Masa Equivalente**, la cual se determina a partir de las sobrepresiones medidas.

Se ha realizado la hipótesis de que la sobrepresión medida en el paramento aguas arriba de la presa es proporcional a la componente radial horizontal de la aceleración en cada punto, siendo la relación de proporcionalidad las diferentes componentes de la matriz de masa equivalente.

Escrito en forma matricial.

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{SP}(t) = \mathbf{M}_{eq} \mathbf{a}_r(t) \quad (11.1)$$

donde

$\mathbf{F}(t)$  es el vector que contiene el valor de las fuerzas hidrodinámicas en cada punto.

$\mathbf{S}$  es una matriz diagonal, la cual contiene el valor de la superficie del paramento aguas arriba de la presa asociada a la correspondiente posición.

$\mathbf{P}(t)$  es el vector que contiene las presiones hidrodinámicas.

$\mathbf{M}_{eq}$  es la matriz de masa equivalente.

$\mathbf{a}_r$  es el vector de aceleraciones radiales.

Tomando transformadas de Fourier de la expresión anterior

$$\mathbf{F}(\omega) = \mathbf{M}_{eq} \mathbf{A}_r(\omega) \quad (11.2)$$

De esta expresión se deduce que al ser la matriz de masa equivalente función de la frecuencia de excitación, existirá una matriz asociada a cada frecuencia propia, es decir una para cada modo de vibración del conjunto presa-fluido.

La matriz de masa equivalente para cada modo, se ha tomado pues, proporcional a la relación entre la distribución de sobrepresiones hidrodinámicas y la forma modal relativa a un modo determinado.

A efectos prácticos de desarrollo de un modelo de cálculo, la ecuación (11.1) se transforma en la expresión

$$\mathbf{M}_{eq} \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \mathbf{S}^T \mathbf{P} \quad (11.3)$$

siendo

$\mathbf{M}_{eq}$  = Matriz de masa equivalente.

$\mathbf{a}$  = Vector de módulos de aceleración horizontal asociada a cada grado de libertad.

$\mathbf{S}$  = Matriz de interacción, que transforma las sobrepresiones de la interfase en fuerzas equivalentes aplicadas en los nodos de la estructura.

$\rho$  = Densidad del agua.

Resolviendo de la ecuación precedente (11.3)

$$(M_{eq})_i = \frac{1}{a_i} \frac{1}{\rho} S_{ij}^T P_j \quad (11.4)$$

Con ello se puede obtener para cada modo propio de vibración del conjunto una expresión de la matriz de masa equivalente cuya función es la de reflejar la influencia del fluido en el análisis dinámico de la interacción.

### 11.2.2 Aplicación del concepto de Matriz de Masa Equivalente

Como se ha señalado en el apartado anterior, la función de la matriz de masa equivalente es la de reflejar la influencia del fluido sobre la presa en el análisis dinámico del problema de la interacción. Veamos cual es la aplicación práctica de esto.

Partimos de la ecuación dinámica de la estructura

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = -\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{a}_q \quad (11.5)$$

al considerar ésta como un sistema elástico lineal con amortiguamiento viscoso.

En el problema de interacción tenemos que la ecuación que rige el análisis es

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = -\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{a}_q + \frac{1}{\rho} \mathbf{S}^T \mathbf{P} \quad (11.6)$$

Considerando la expresión de la matriz de masa equivalente deducida en (11.3) y entrando con ella en (11.6)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = -\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{a}_q + \mathbf{M}_{eq}\ddot{\mathbf{a}} \quad (11.7)$$

Y suponiendo despreciable la interacción con el terreno

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_{eq})\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = -\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{a}_q \quad (11.8)$$

siendo ésta una única ecuación la que refleja el comportamiento dinámico de la estructura a embalse lleno, es decir teniendo en cuenta la interacción presa-fluido.

**11.2.3 Análisis modal del sistema fluido - estructura.**

Hemos llegado a la expresión

$$\mathbf{M}'\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}(t) \quad (11.8)$$

donde

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{M}_{eq}(\omega)$$

$$\mathbf{f}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{a}_{eq}$$

Esta ecuación la trataremos como si fuera la ecuación dinámica de una estructura cualquiera, independientemente de que sus componentes reflejan la interacción de dos cuerpos.

Para la resolución de esta ecuación optamos por la alternativa de la integración utilizando el espectro de respuesta. Esto implica la necesidad previa de realizar un análisis modal del sistema siendo ésta una opción mucho menos costosa que la integración directa de la ecuación.

Como es sabido, un análisis modal completo de una estructura o sistema implica el conocimiento de sus valores propios y vectores propios, es decir, para una estructura sometida a acciones dinámicas implica conocer las frecuencias propias de vibración y los vectores de deformación modal.

Dadas las particularidades de este sistema dinámico realizaremos el análisis modal de manera algo especial.

**11.2.4 Determinación los vectores propios del sistema**

Deduciremos las frecuencias propias del sistema siguiendo un procedimiento gráfico. Para ello representamos en unas curvas el valor de las *aportaciones modales* del problema de interacción en función de la frecuencia de excitación.

Por *aportaciones modales* entendemos el valor de los coeficientes que multiplican a cada uno de los vectores propios de la presa, para una vez sumados dar la respuesta completa de ésta teniendo en cuenta la influencia del fluido.

Dichas gráficas (ver fig. 11.1 a 11.6) reflejan unas puntas en los entornos de las frecuencias propias del conjunto, por lo que podemos deducir el valor de estas.

#### 11.2.5 Cálculo de los vectores propios del sistema

Para el cálculo de los vectores propios del sistema, y habiendo calculado previamente los valores propios del mismo, utilizaremos un método vectorial iterativo inverso [18].

El punto de partida de este análisis iterativo inverso serán los vectores propios de la presa a embalse vacío y las frecuencias propias del sistema halladas previamente.

Es importante destacar de nuevo que, dado que la matriz de masa equivalente es función de la matriz de excitación, tenemos una matriz de masa distinta para cada modo de la interacción, con lo que para el cálculo de los autovectores hemos de resolver tantos problemas como modos de deformación queramos calcular.

Este proceso iterativo, que ha continuación desarrollamos, viene corregido por el concepto de *Shifting* con el fin de mejorar la velocidad de convergencia del proceso.

##### a) *Método vectorial iterativo inverso*

Partimos de la ecuación

$$\mathbf{M}'\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}(t) \quad (11.8)$$

que rige el análisis dinámico del sistema.

Luego para el análisis modal utilizamos el sistema indeterminado

$$\mathbf{M}'\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = 0 \quad (11.9)$$

Sean  $\mathbf{x}_i$  los vectores propios del sistema, entonces

$$(-\lambda \mathbf{M}' + \mathbf{K})\mathbf{x}_i = 0 \quad (11.10)$$

Consideremos el proceso iterativo siguiente

$$\mathbf{x}'_{k+1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}' \mathbf{x}'_k \quad (11.11)$$

y para normalizar las sucesivas iteracciones respecto la matriz de masa

$$\mathbf{x}'_{K+1} = \frac{\mathbf{x}'_{K+1}}{(\mathbf{x}'_{K+1}^T \mathbf{M} \mathbf{x}'_{K+1})} \quad (11.12)$$

Con este proceso se obtiene

$$\mathbf{x}'_{K+1} \rightarrow \mathbf{u}_1$$

$$\rho(\mathbf{x}'_{K+1}) \rightarrow \lambda_1$$

$$\text{para } k \rightarrow \infty$$

siendo  $\lambda_1$  el menor autovalor del sistema y  $\mathbf{u}_1$  el autovector asociado a este autovalor.

*b) Aplicación del "Shifting"*

Se puede demostrar [18] que la velocidad de convergencia para el cálculo del primer autovector del proceso iterativo descrito es del orden

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (11.13)$$

siendo  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  el primer y segundo autovalor del sistema respectivamente.

El objetivo de la aplicación del *Shifting* es mejorar ostensiblemente esta velocidad de convergencia.

Así partiendo del problema base

$$K\mathbf{a} = \lambda M\ddot{\mathbf{a}} \quad (11.14)$$

realizamos una *traslación* del problema al considerar la nueva matriz de rigidez

$$K^* = K - \mu M \quad (11.15)$$

con lo que el problema *trasladado* se escribe

$$K^* \mathbf{a}^* = \gamma M \ddot{\mathbf{a}}^* \quad (11.16)$$

siendo

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{a}$$

$$\gamma_i = \lambda_i - \mu$$

Aplicando el método vectorial iterativo inverso de resolución y haciendo el mismo estudio de convergencia anterior, se deduce que para el problema trasladado el grado de convergencia del proceso es

$$r = \max_{p \neq j} \left| \frac{\lambda_j - \mu}{\lambda_p - \mu} \right| \quad (11.17)$$

Con  $(\lambda_j - \mu)$  la menor diferencia. Entonces el proceso tiende al vector propio  $j$ .

Para el caso particular en que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

siendo  $\mu$  cercano a  $\lambda_1$ , tenemos que el radio de convergencia del proceso iterativo se escribe

$$r = \left| \frac{\lambda_1 - \mu}{\lambda_2 - \mu} \right| \quad (11.18)$$

Con lo que se deduce que para  $\mu$  cercana al primer autovalor del problema original planteado se mejora de manera considerable la velocidad de convergencia del mismo.

#### 11.2.6 Obtención de la respuesta mediante espectros de respuesta.

La obtención de la respuesta mediante espectros, utiliza un método de descomposición modal en el cual se evita el esfuerzo de cálculo necesario para conocer la historia en el tiempo del comportamiento de la estructura frente a una acción dinámica. Se obtiene de esta forma una estimación de la respuesta máxima del sistema.

Siendo la ecuación que rige el sistema dinámico

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_{eq})\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = -\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{a}_q \quad (11.8)$$

El valor máximo del desplazamiento espectral correspondiente valdrá

$$y_{i,max} = \frac{-\phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{J}}{\omega_i} S_a(\omega_i^2, \xi_i) \quad (11.19)$$

en donde  $S_a(\omega_i, \xi_i)$  es el valor de las aceleraciones espectrales de proyecto especificadas por la Norma Sismorresistente Española.

Los valores máximos de los desplazamientos de la estructura, teniendo en cuenta la interacción con el fluido correspondientes al modo  $i$  vienen dados por

$$a_{i,max} = \phi_i y_{i,max} \quad (11.20)$$

siendo  $\phi_i$  los autovectores del sistema obtenidos por el método iterativo.

Para obtener los valores máximos absolutos de la estructura realizamos la media cuadrática de las sucesivas aportaciones modales.

Análogamente para las tensiones, obtenemos las tensiones máximas nodales como si de un análisis estático se tratara a partir de las deformadas modales. Posteriormente se combinan de la misma forma que los desplazamientos.

## 11.3 RESULTADOS OBTENIDOS

### 11.3.1 Introducción

Como ya se comentó anteriormente, el objeto del método de análisis modal es hallar una matriz asociada a la estructura que sea equivalente o represente la influencia del fluido sobre el comportamiento dinámico de la presa.

Así, una vez hallada esta matriz (matriz de Masa Equivalente), y adicionada a la matriz estática de la presa, el problema dinámico de interacción podría analizarse como un problema dinámico cualquiera que responda a la ecuación siguiente:

$$\mathbf{M}'\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = -\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{a}_q$$

Con  $\mathbf{M}' = \mathbf{M}_{est} + \mathbf{M}_{eq}(w)$

El proceso de análisis seguido, y en consecuencia, la sucesión de resultados obtenidos, siguen el siguiente orden:

- 1.- Obtención de las frecuencias propias de la estructura a embalse lleno.
- 2.- Cálculo de las Matrices de Masa Equivalentes para cada una de las frecuencias propias.
- 3.- Proceso iterativo de cálculo de los vectores propios de la presa considerando la influencia del fluido.
- 4.- Cálculo de las respuestas máximas de la estructura a embalse lleno siguiendo el método de los espectros de respuesta.

### 11.3.2 Frecuencias propias de vibración de la estructura a embalse lleno

Para la obtención de las frecuencias propias de la presa considerando el embalse lleno se han determinado, en cada caso, las curvas frecuencia-coeficientes de aportación modal obtenidas del análisis dinámico de la interacción mediante el método de resolución semianalítico, observándose gráficamente para que valores de la frecuencia se disparen estos coeficientes.

Por coeficientes de aportación modal entendemos aquellos coeficientes que multiplican a los diversos vectores propios considerados para que la combinación de ellos proporcione la deformada final de la estructura.

En las figuras 11.1 a 11.6 se representan las gráficas obtenidas para los primeros 6 modos de vibración.

De estas gráficas se deducen los valores propios que se representan en la tabla 11.1.

Tabla 11.1

FRECUENCIAS PROPIAS DEL CONJUNTO PRESA-EMBALSE	
Modo	Frecuencia propia
1	17,5
2	22,5
3	26,0
4	35,5
5	43,5
6	44,5

Estos resultados se comparan con los de la tabla 11.2, destacando la corrección de los valores obtenidos por este procedimiento.

### 11.3.3 Matrices de Masa Equivalente

Para cada una de las frecuencias propias del sistema estructura-embalse se ha calculado la Matriz de Masa Equivalente como la relación, a nivel nodal, entre la sobrepresión hidrodinámica sufrida y la aceleración resultante.

De esta manera estamos relacionando las variables propias de los nodos de la interfase, como pertenecientes al fluido (presión hidrodinámica) y como pertenecientes a la presa (aceleración) con la mediación de la Matriz de Interacción  $S$  que compatibiliza ambas variables.

ANALISIS MODAL

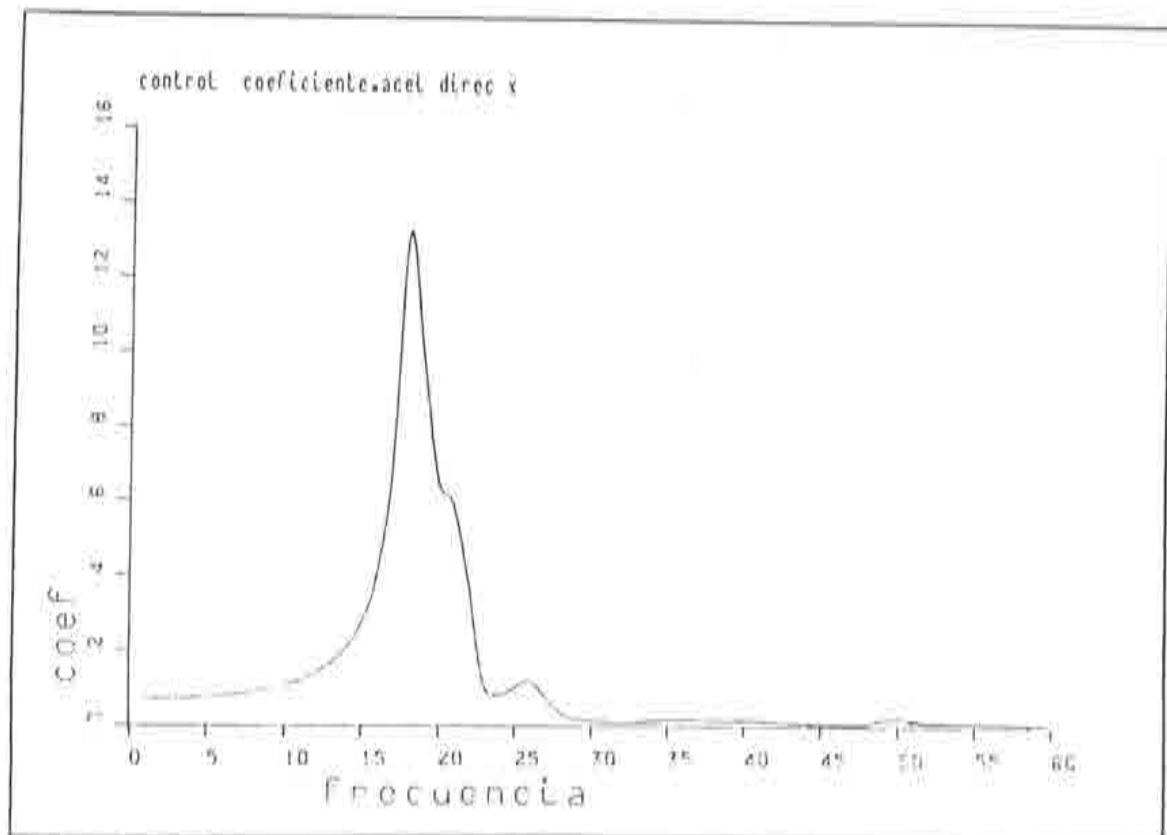


Fig. 11.1 Modo 1

## ANALISIS MODAL

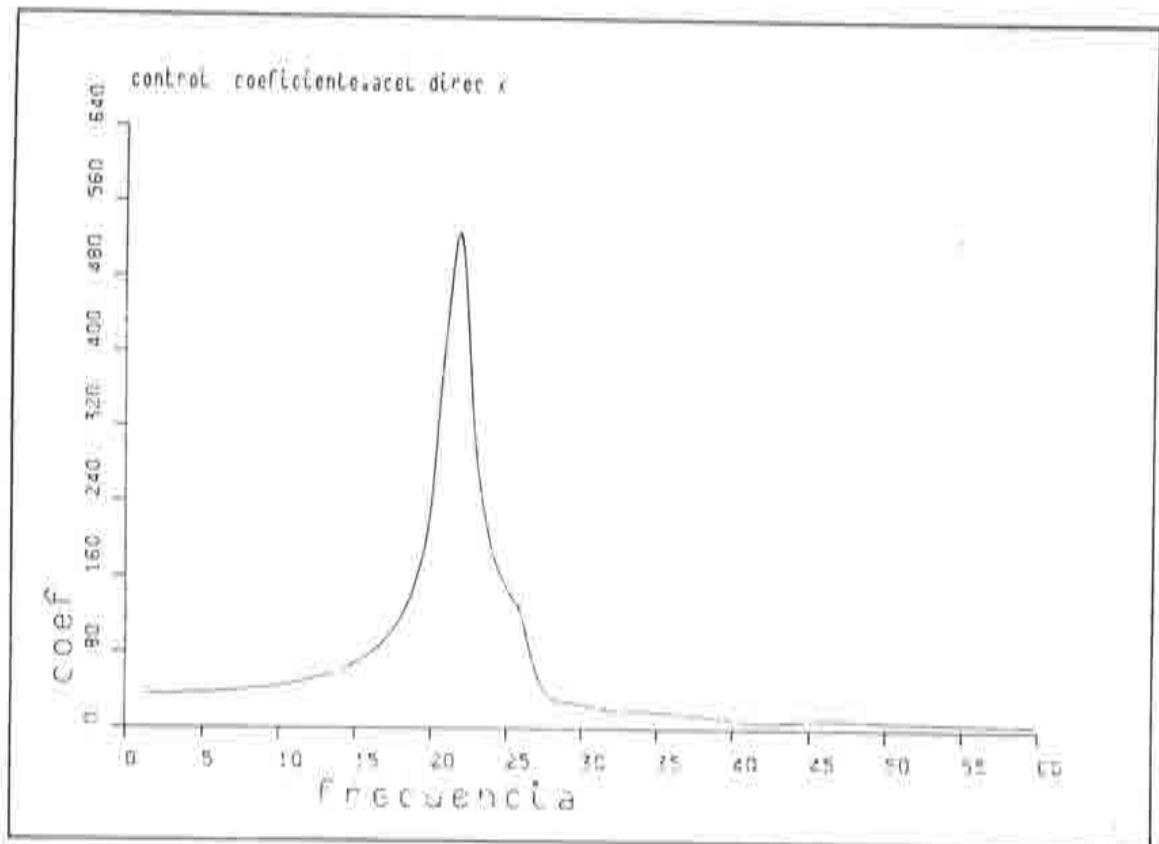


Fig. 11.2 Modo 2

## ANALISIS MODAL

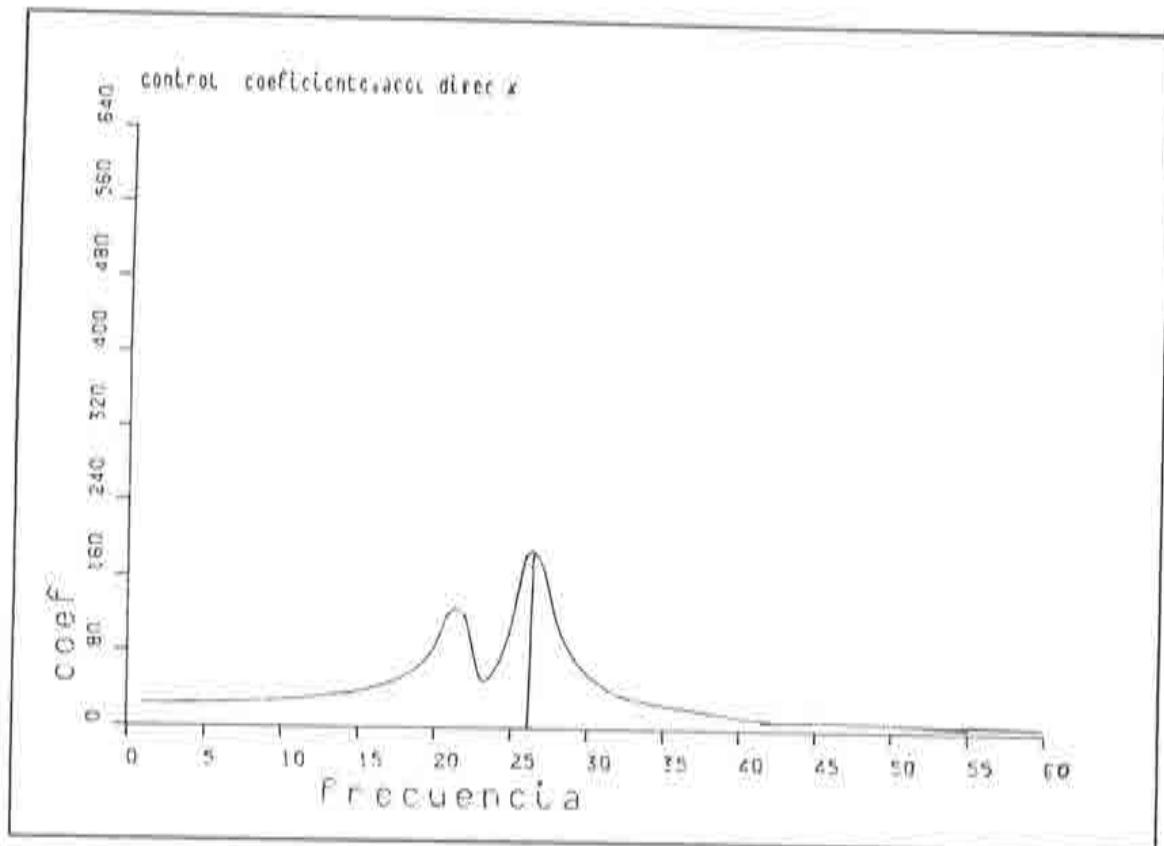


Fig. 11.3 Modo 3

## ANALISIS MODAL

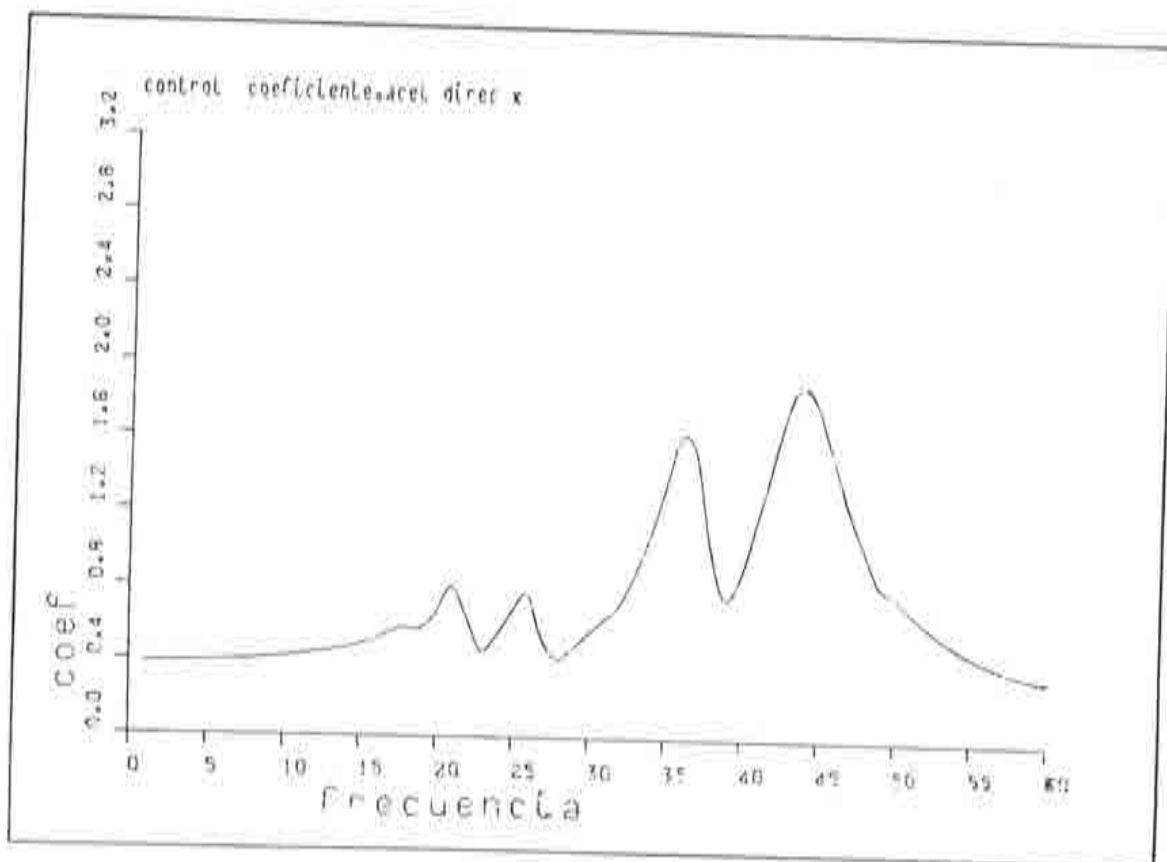


Fig. 11.4 Modo 4

## ANALISIS MODAL

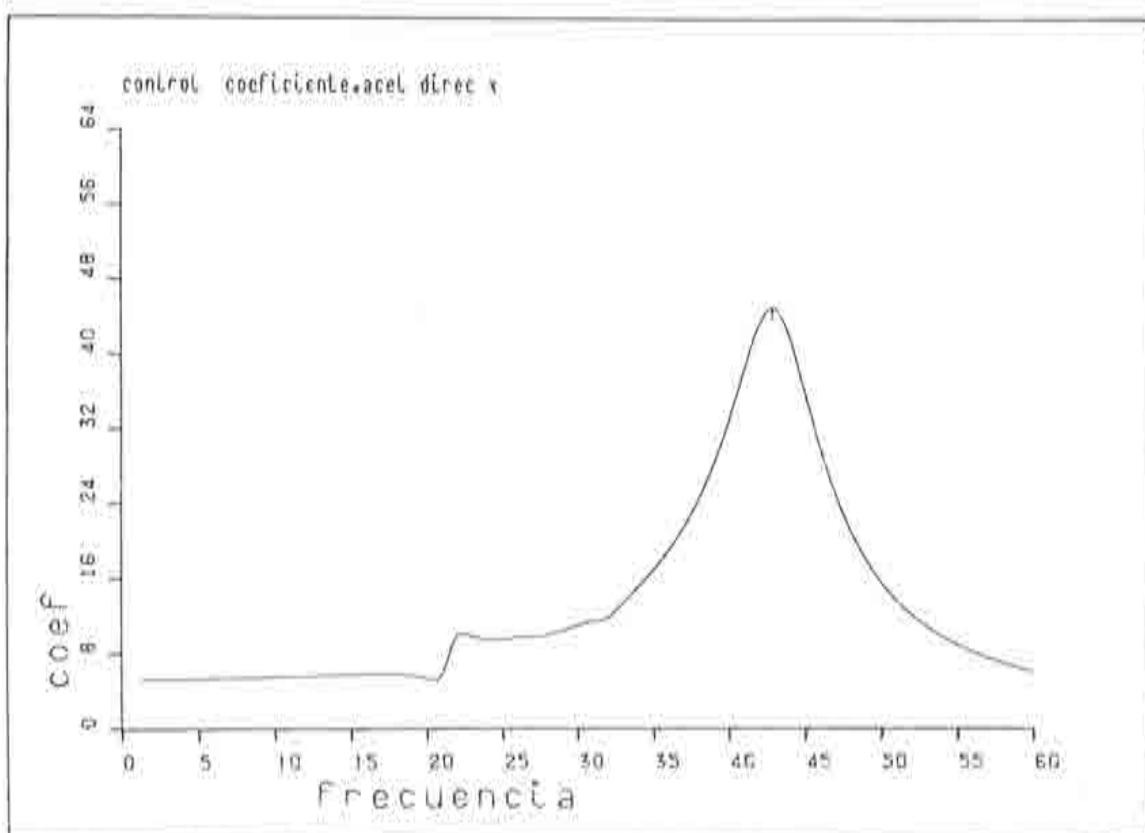


Fig. 11.5 Modo 5

## ANALISIS MODAL

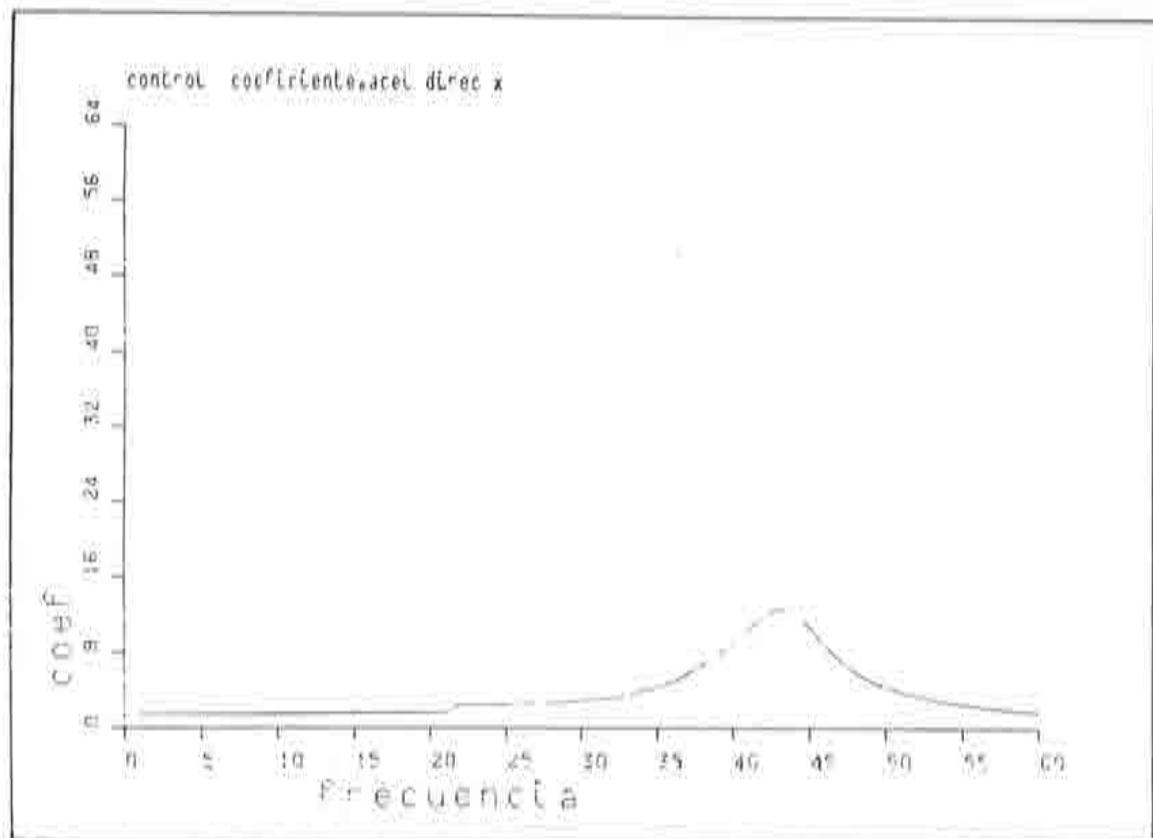


Fig. 11.6 Modo 6

ANALISIS MODAL

Método directo		Método semianalítico	Método experimental
L=1H	L= 2H		
17.5 ± 0.5	18.5 ± 0.5	17.5 ± 0.5	16,776
21.5 "	21.5 "	21.5 "	23.620
26.5 "	26.5 "	26.5 "	25.689
.....	34.5 "	.....	.....
.....	36.5 "	36.5 "	37,133

Tabla 11,2

Como consecuencia de ello, resulta que de las 2004 componentes que tiene la Matriz de Masa Estática Concentrada de la estructura, solo 375 se verán modificadas por la adición de la componente correspondiente de la Matriz de Masa Equivalente ya que son 375 los grados de libertad pertenecientes a la interfase estructura-fluido.

Para el seguimiento de la posible validez de los resultados que se van obteniendo, se comparó el valor de la matriz de masa equivalente en aquellos nodos situados simétricamente respecto al eje de la presa para así comprobar que las aportaciones o influencia del fluido en nodos simétricos seguían aproximadamente esta simetría.

Esta hipótesis se confirma, en cierto modo, en los resultados obtenidos en el análisis en modelo reducido realizado por el ISMES y que transcribimos en la tabla 11.3.

En la tabla 11.4 representamos, comparados, los valores obtenidos para la matriz de masa equivalente en los nodos simétricos que se destacan en la Figura 11.7.

Detalles importantes a destacar a la vista de las tablas son:

- El mantenimiento de cierta simetría en los valores de la componente de la Matriz de Masa Equivalente en los nodos considerados.
- La inferior importancia relativa de la aportación de masa en el tercer modo al igual que se refleja en la tabla del ISMES (Tabla 11.3).

Para hacernos una idea más aproximada de la importancia relativa de la aportación del fluido en forma de componente de la matriz de masa equivalente, representamos en la tabla 11.5 los valores de las componentes de la matriz de masa estática junto con los de los de la matriz de masa equivalente para los tres primeros modos.

## ANALISIS MODAL

POS.	MODO 1	MODO 2	MODO 3	POS.	MODO 1	MODO 2	MODO 3	POS.	MODO 1	MODO 2	MODO 3
1	0	313	48	31	850	683	247	61	1100	2061	911
2	109	403	47	32	297	943	227	62	1762	3192	1418
3	84	194	43	33	265	311	200	63	1640	2029	1152
4	57	19	32	34	242	325	150	64	1546	2643	1152
5	49	63	30	35	260	303	142	65	1057	1405	1019
6	45	47	43	36	205	349	220	66	705	1078	171
7	50	48	17	37	322	443	453	67	1143	1123	295
8	50	53	58	38	396	582	277	68	1072	1442	284
9	59	71	49	39	525	1145	382	69	1634	2702	804
10	68	132	39	40	829	2051	501	70	1732	2867	1229
11	104	323	51	41	1141	2393	922	71	4232	14785	5965
12	131	225	73	42	1246	1983	901	72	3071	6489	4274
13	135	116	76	43	627	1273	540	73	2042	3974	2467
14	0	116	76	44	464	737	393	74	3599	4219	870
15	453	182	343	45	388	481	398	75	4027	9436	1509
16	340	822	270	46	340	462	159				
17	232	371	190	47	376	455	180				
18	179	279	197	48	408	494	118				
19	164	209	31	49	499	734	207				
20	220	144	98	50	690	1045	514				
21	252	151	92	51	1094	2402	811				
22	103	215	102	52	1290	3220	1032				
23	106	232	222	53	1422	1412	700				
24	234	328	220	54	1158	1364	700				
25	278	605	229	55	851	1294	661				
26	443	1485	321	56	634	124	403				
27	503	1027	401	57	162	170	170				
28	546	720	401	58	541	70	2111				
29	701	1404	415	59	661	911	511				
30	621	1446	406	60	891	1211	911				

Le masse sono esprese in ( $\text{t} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sec}^2$ )

Tabla 11.3 Estudio ISMES. Matriz de Masa Equivalente

ANALISIS MODAL

MODO 1

nodo	m. equiv.	m.equiv.	nodo
766	0,5691e+07	0,5842e+07	59
763	0,8872e+07	0,9560e+07	62
750	0,5987e+07	0,3159e+08	166
700	0,6290e+07	0,9102e+07	173

MODO 2

nodo	m. equiv.	m.equiv.	nodo
766	0,2346e+07	0,2361e+07	59
763	0,1597e+08	0,1487e+08	62
758	0,3420e+07	0,3569e+08	166
700	0,3532e+07	0,1106e+08	173

MODO 3

nodo	m. equiv.	m.equiv.	nodo
766	0,1269e+07	0,1062e+07	59
763	0,8982e+07	0,9909e+07	62
758	0,7476e+07	0,9282e+08	166
700	0,1074e+07	0,1279e+07	173

Tabla 11.4

ANALISIS MODAL

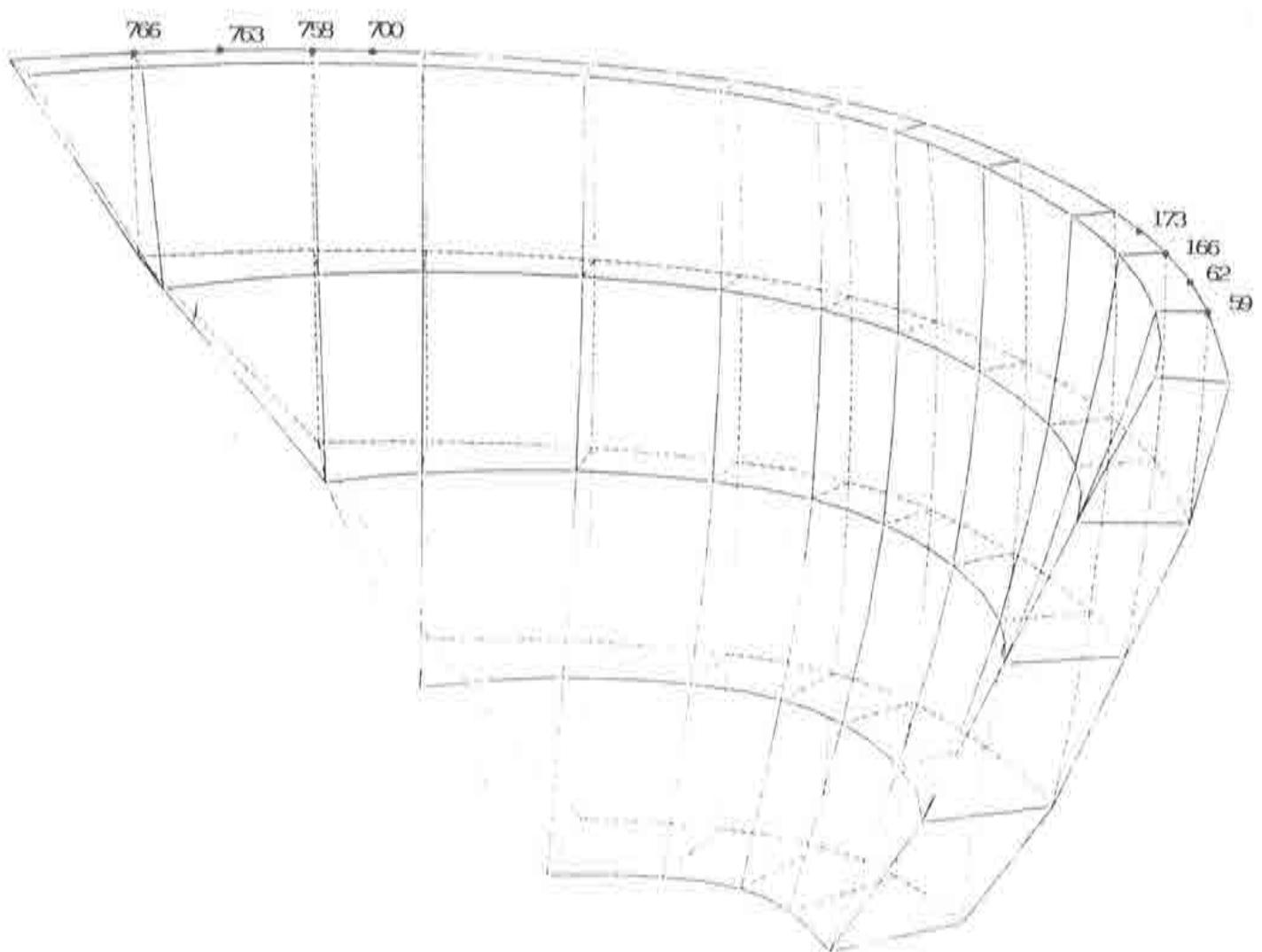


Fig. 11.7 Nodos Simétricos chequeados

## ANALISIS MODAL

nodo		nodo			
766	m.est	0,2571e+07	-0,2970e+07	m.est	
	1 modo	0,5691e+07	0,5842e+07	1 modo	
	2 modo	0,2346e+07	0,2361e+07	2 modo	59
	3 modo	0,1269e+07	0,1062e+07	3 modo	
763	m.est	0,2415e+07	0,2364e+07	m.est	
	1 modo	0,8872e+07	0,9560e+07	1 modo	
	2 modo	0,1597e+07	0,1487e+08	2 modo	62
	3 modo	0,8982e+07	0,9909e+06	3 modo	
758	m.est	0,3048e+07	0,3179e+07	m.est	
	1 modo	0,5987e+07	0,3159e+08	1 modo	
	2 modo	0,3420e+07	0,3569e+07	2 modo	166
	3 modo	0,7476e+06	0,9282e+06	3 modo	
700	m.est	0,1427e+07	0,1640e+07	m.est	
	1 modo	0,6290e+07	0,9102e+07	1 modo	
	2 modo	0,3532e+07	0,1106e+08	2 modo	173
	3 modo	0,1074e+07	0,1279e+07	3 modo	

Tabla 11.5

### 11.3.4 Proceso iterativo de cálculo de los vectores de la estructura considerando la interacción co el fluido

El tercer paso en el análisis consiste en el cálculo de los vectores propios de la presa a embalse lleno mediante un proceso vectorial iterativo inverso comentado en el apartado 11.2.5.

Se han considerado únicamente los cuatro primeros modos de vibración al considerarse representativos del comportamiento global del conjunto.

Al proceso iterativo, como ya se comentó, se le ha aplicado la variante *Shifting* para mejorar la velocidad de convergencia del proceso. Una ventaja adicional del *Shifting* consiste en que el problema transformado converge a valores propios nulos, con lo que es mucho más fácil el comprobar la convergencia del proceso cuando sabemos que este ha de tender a cero.

los puntos de partida de este proceso iterativo serán:

- Los vectores propios de la presa a embalse vacío.
- Las frecuencias propias de la presa a embalse lleno obtenidas en el apartado 11.2.5 de este capítulo.

Reproducimos a continuación los resultados obtenidos en el proceso iterativo, en lo que concierne al valor de la frecuencia propia de las sucesivas iteraciones tanto en el problema real como en el trasladado.

#### 1<sup>er</sup> Modo

frecuencia de partida= 17,5

#### 1<sup>a</sup> iteración

valor propio antes de traslación = -6,8387

## ANALISIS MODAL

frec. propia problema real = 17,3035

*2<sup>a</sup> iteración*

valor propio antes de traslación = 5,1343

frec. propia problema real = 17,1540

*3<sup>a</sup> iteración*

valor propio antes de traslación = 0,37307

frec. propia problema real = 17,1653

## 2<sup>o</sup> Modo

frecuencia de partida = 21,5

*1<sup>a</sup> iteración*

valor propio antes de traslación = -13,1523

frec. propia problema real = 20,8400

*2<sup>a</sup> iteración*

valor propio antes de traslación = 2,0874

frec. propia problema real = 20,8900

*3<sup>a</sup> iteración*

valor propio antes de traslación = 5,2330

frec. propia problema real = 21,0149

*4<sup>a</sup> iteración*

## ANALISIS MODAL

valor propio antes de traslación = 0,6827

frec. propia problema real = 21,0311

### 3<sup>er</sup> Modo

frecuencia de partida = 26,5

#### 1<sup>a</sup> iteración

valor propio antes de traslación = -272,8267

frec. propia problema real = 26,8220

#### 2<sup>a</sup> iteración

valor propio antes de traslación = -1,1765

frec. propia problema real = 26,8001

#### 3<sup>a</sup> iteración

valor propio antes de traslación = 0,0806

frec. propia problema real = 26,8018

#### 4<sup>a</sup> iteración

valor propio antes de traslación = 0,0016

frec. propia problema real = 26,8018

### 4<sup>o</sup> Modo

frecuencia de partida = 36,5

*1<sup>a</sup> iteración*

valor propio antes de traslación = -1,2514

frec. propia problema real = 36,4828

*2<sup>a</sup> iteración*

valor propio antes de traslación = 9,1751

frec. propia problema real = 36,6083

*3<sup>a</sup> iteración*

valor propio antes de traslación = 2,1069

frec. propia problema real = 36,6371

*4<sup>a</sup> iteración*

valor propio antes de traslación = 0,1419

frec. propia problema real = 36,6391

A la vista de estos resultados, se puede concluir que el proceso iterativo converge hacia soluciones correctas, en lo que respecta a las frecuencias propias de la interacción.

Como muestra de los resultados obtenidos incluimos a continuación (Tabla 11.6) las componentes de los vectores propios asociados al segundo (simétrico) y cuarto (antisimétrico) modos de vibración, correspondientes a los pares de nodos:

59 - 766 y 62 - 763 de situación simétrica.

Los ejes de referencia se orientan con el vector *i* en la dirección del valle, el vector *j* horizontal y perpendicular al anterior y el *k* vertical.

## ANALISIS MODAL

## 2º modo

nodo	x	y	z
59	-.1482E-05	-.3053E-05	0.2161E-07
766	-.1295E-05	0.3023E-05	0.1184E-06
62	-.1384E-05	-.4756E-05	0.1843E-08
763	-.6417E-06	0.5527E-05	0.4180E-06

## 4º modo

nodo	x	y	z
59	-.1141E-05	0.1221E-04	0.1095E-05
766	0.3204E-05	0.7512E-05	0.1420E-05
62	-.6070E-05	0.1779E-04	0.1747E-05
763	0.8157E-05	0.1234E-04	0.2325E-05

Tabla 11.6

### 11.3.5 Espectros de Respuesta

El último paso del análisis consiste en calcular, mediante el método de los espectros de respuesta, las respuestas máximas de la estructura en tensiones y deformaciones y com parar los resultados obtenidos con los que se disponen del análisis en modelo reducido.

La aplicación de la opción de los espectros de respuesta al sistema presa- fluido se realiza como si de cualquier estructura sometida a efectos dinámicos se tratara ya que conocemos, por los análisis anteriores, las características dinámicas del conjunto (frecuencias y vectores propios).

La deformada y el estado de tensiones final se considera<sup>n</sup> como la media cuadrática de las aportaciones de cada modo.

El espectro de respuesta aplicado es el indicado por la Normativa Española.

En la tabla 11.7 se representan los resultados obtenidos frente a una excitación en la dirección del valle y se comparan con obtenidos por el análisis en modelo reducido.

## ANALISIS MODAL

Tabla 11.7

DESPLAZAMIENTOS Y TENSIONES		
COMPARACION DE LOS RESULTADOS NUMERICOS		
CON LOS EXPERIMENTALES		
(Espectro en la dirección del valle)		
	Resultados experimentales	Resultados obtenidos
Movimiento según la dirección del valle ( $u_x$ )	0.329 cm	0.2898 cm
Movimiento en la dirección perpendicular al valle ( $u_y$ )	0.067 cm	0.0651 cm
Tensiones máximas horizontales ( $\sigma_x$ )	5.8 Kg/cm <sup>2</sup>	4.494 Kg/cm <sup>2</sup>
Tensiones máximas verticales ( $\sigma_y$ )	3.02 Kg/cm <sup>2</sup>	3.199 Kg/cm <sup>2</sup>

La coincidencia de los resultados afirman la validez del modelo de análisis propuesto.

Estos máximos se localizan de la siguiente manera:

Análisis experimental

$u_x$  máximo      Nodo 400, Elemento 7

$u_y$  máximo      Nodo 695, Elemento 3

Análisis numérico

$u_x$  máximo      Elemento 7

$u_y$  máximo      Elemento 5

En la figura 11.8 indicamos los puntos (nodos) donde se producen estos máximos para los dos modelos de análisis, destacando, una vez más, la coincidencia en los resultados obtenidos.

Es interesante ver cual es la aportación de cada uno de los modos de vibración a la deformada y tensión finales del sistema, y para conocerla representamos en la tabla 11.8 los máximos alcanzados en cada una de las aportaciones.

De los datos de la tabla 11.8 es importante destacar el alto grado de participación del segundo modo en la deformada final, cosa totalmente comprensible al tratarse de un modo de deformación simétrico y ser la excitación en la dirección del valle.

Asimismo en la tabla 11.9 pueden verse los desplazamientos proporcionados por el análisis experimental, así como en la 11.10 las tensiones.

En la figura 11.8 se representan los nodos más cargados, tanto en el estudio experimental como en el numérico.

Por último en la figura 11.9 puede verse la deformada de la presa cuando la excitación actúa en la dirección del valle.

## ANALISIS MODAL

### Aportación de cada modo

Espectro de la Dirección del Valle	
Modo 1	
Desplazamientos (cm)	$u_x=0,019357$ $u_y=0,010747$
Tensiones ( $kg/cm^2$ )	$\sigma_x=1,925$ $\sigma_y=1,496$ $\sigma_z=0,6673$
Modo 2	
Desplazamientos (cm)	$u_x=0,28988$ $u_y=0,06461$
Tensiones ( $kg/cm^2$ )	$\sigma_x=1,436$ $\sigma_y=4,492$ $\sigma_z=2,606$
Modo 3	
Desplazamientos (cm)	$u_x=0,006800$ $u_y=0,0005525$
Tensiones ( $kg/cm^2$ )	$\sigma_x=1,510$ $\sigma_y=1,950$ $\sigma_z=2,131$
Modo 4	
Desplazamientos (cm)	$u_x=0,03858$ $u_y=0,018530$
Tensiones ( $kg/cm^2$ )	$\sigma_x=0,385$ $\sigma_y=0,200$ $\sigma_z=0,340$

Tabla 11.8

ANALISIS MODAL

POS.	COMPONENTE		COMPONENTE		COMPONENTE	
	ASSE X	ASSE Y	ASSE X	ASSE Y	ASSE X	ASSE Y
	(CM)	(CM)	(CM)	(CM)	(CM)	(CM)
1	017	012	26	040	036	51
2	040	028	27	029	020	52
3	088	042	28	018	010	53
4	163	059	29	032	016	54
5	246	067	30	061	024	55
6	319	064	31	105	032	56
7	329	045	32	155	039	57
8	269	054	33	205	050	58
9	186	060	34	228	034	59
10	105	062	35	241	025	60
11	058	044	36	210	037	61
12	029	021	37	169	033	62
13	018	011	38	120	037	63
14	012	006	39	021	035	64
15	033	021	40	042	026	65
16	072	034	41	024	015	66
17	132	045	42	046	015	67
18	200	050	43	082	021	68
19	259	055	44	119	031	69
20	302	045	45	158	032	70
21	293	031	46	160	026	71
22	265	034	47	172	023	72
23	200	043	48	163	077	73
24	140	051	49	120	073	74
25	029	051	50	049	057	75

Tabla 11.9 Estudio ISMES. Desplazamientos experimentales

## ANALISIS MODAL

Tabla 11.10 Estudio ISMES. Tensiones experimentales

## ANALISIS MODAL

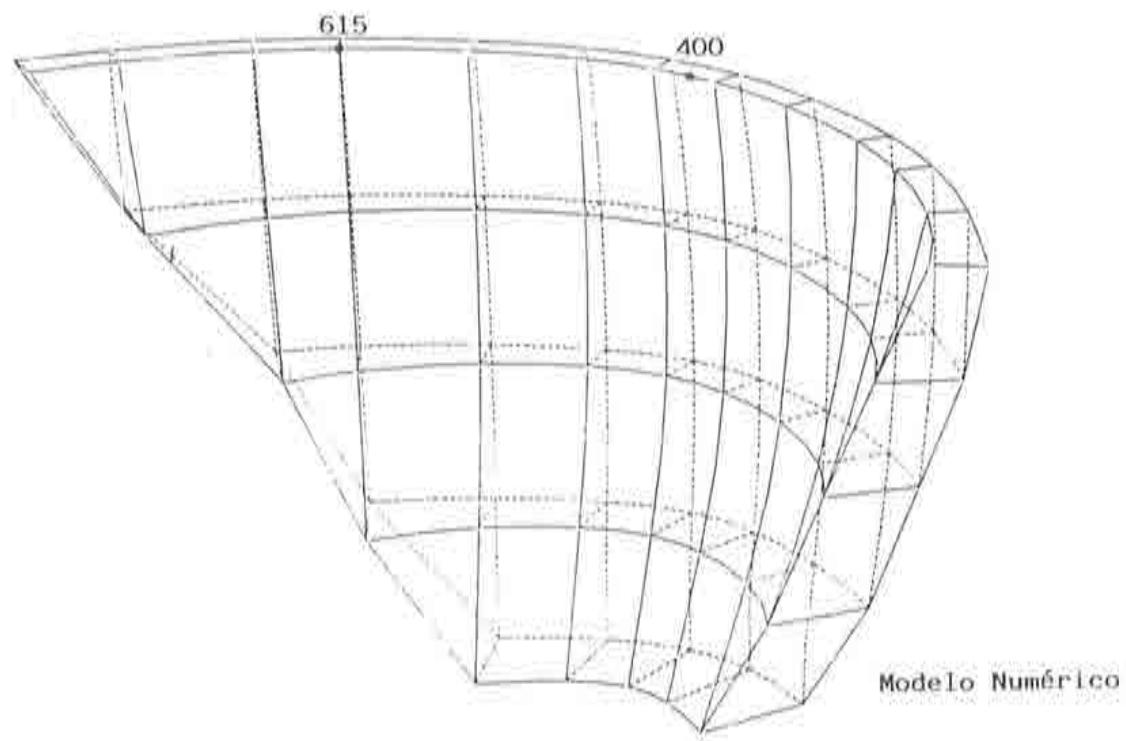
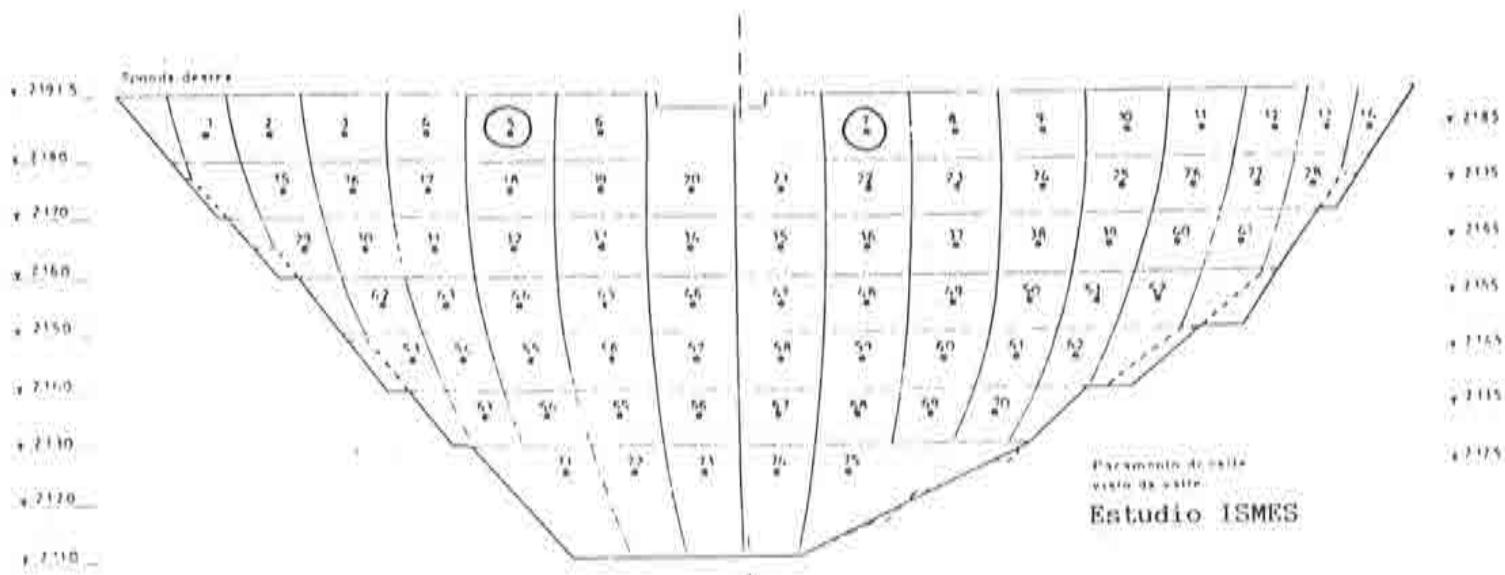


Fig. 11.8 Nodos de máximos

ANALISIS MODAL

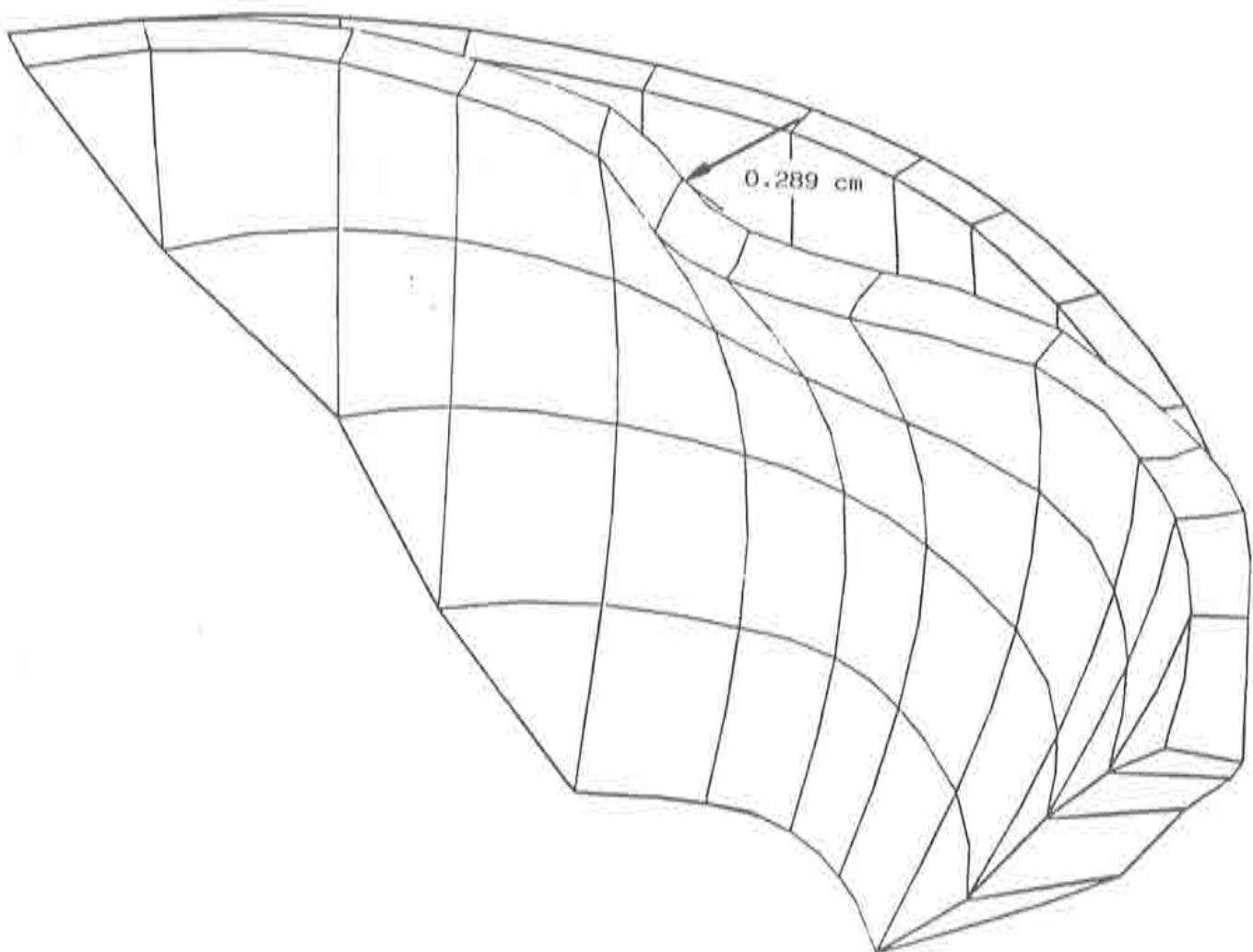


Fig. 11.9 Deformada máxima mediante el espectro de proyecto según la dirección del valle

## CONCLUSIONES

Se ha estudiado en este trabajo el comportamiento de presas bóvedas, bien a embalse vacío, bien a embalse lleno. En éste último caso, se han considerado los efectos de la interacción entre la presa y el agua del embalse. Todo ello para acciones dinámicas de tipo sísmico.

Los estudios realizados han sido por una parte de tipo numérico, utilizando la técnica de los elementos finitos, y por otra parte de carácter experimental, realizando un ensayo a escala real mediante explosiones, así como aprovechando un ensayo en modelo previamente existente.

El cuerpo de la presa se ha modelado mediante elementos finitos tridimensionales discretizando directamente las ecuaciones de la elasticidad lineal. Por lo que respecta al fluido, el estudio se ha realizado discretizando la ecuación de ondas escrita en presiones, y en el campo complejo de la frecuencia.

Se ha comprobado la importancia de disponer de un buen preprocesador capaz de generar la malla, como se ha puesto de manifiesto en el capítulo 2. En este sentido, el programa de generación realizado —el cual necesita como entrada de datos únicamente los parámetros de proyecto— ha sido sumamente eficaz. Asimismo se ha desarrollado un postprocesador para la salida de resultados, el cual permite visualizar

## CONCLUSIONES

bien en plotter bien en pantalla gráfica los modos de vibración de la estructura.

El efecto de la interacción de la presa con el terreno, quedaba al margen de este estudio. Sin embargo, los resultados que se obtienen suponiendo la presa rígidamente empotrada en la cimentación, no son fiables, debiéndose considerar por tanto los efectos de la flexibilidad de la cimentación. A este respecto, se ha adoptado una solución consistente en estudiar la presa con terreno, dotándose a este último de flexibilidad pero no de masa. Como consecuencia de ello, se obtienen unos resultados superiores, como término medio, en un 10% a los experimentales. Ello permite concluir que la aproximación realizada es correcta, visto el pequeño porcentaje de error.

Por lo que respecta a la profundidad de terreno a incluir en el análisis, se obtienen excelentes resultados considerando una profundidad igual a la propia altura de la presa. En las dos presas analizadas se han obtenido los mismos resultados, independientemente de la relación entre los módulos de elasticidad de la presa y del terreno.

Tal como era de esperar, la importancia de las ondas superficiales es prácticamente nula en el rango de frecuencias de excitación de interés. Por el contrario, únicamente produce dificultades de tipo numérico. Asimismo se han comprobado las hipótesis de partida en cuanto a la modelización del fluido. La importancia de la inclusión de la compresibilidad del fluido en la formulación es de fundamental importancia. Los resultados obtenidos sin este requisito son poco acordes con la realidad.

En cuanto al número de modos suficientes para realizar el análisis tanto a embalse lleno como a embalse vacío, con cuatro es suficiente tanto para la presa como para el fluido. Es decir, basta con un número relativamente bajo de autovalores y autovectores. Es de destacar sin embargo, que al igual que sucede en otros tipos de problemas dinámicos, la mayor parte del tiempo necesario para el cálculo se invierte en la búsqueda de autovalores, por lo que es necesario utilizar un algoritmo

## CONCLUSIONES

eficiente al respecto. Asimismo dicho algoritmo debe ser capaz de proporcionar solo los valores propios pedidos, y no la totalidad de ellos (como ocurre por ejemplo si se utiliza el método de Jacobi). Aquí se ha utilizado el método de la iteración en el subespacio.

Debido a las grandes dimensiones que en general tiene el embalse, no puede ser modelado por entero. Sin embargo, es muy importante la adopción de condiciones de contorno adecuadas en la frontera artificialmente creada como consecuencia de incluir solamente una parte del mismo en el estudio. En este sentido se han estudiado diversas condiciones de radiación, proporcionando los mejores resultados la debida a Humar. Por otra parte, se ha visto que la longitud de embalse a discretizar es del orden de dos veces la altura de la presa. De esta forma se obtienen unos buenos resultados sin que el tamaño del problema crezca de forma exagerada.

La formulación semianalítica realizada, ha sido la que mejores resultados ha proporcionado: Por una parte el tamaño del problema es menor que utilizando condiciones de radiación. Por otra, el tiempo de ordenador necesario, es sensiblemente inferior (del orden de tres veces), al mismo tiempo que proporciona resultados más exactos y acordes con las formulaciones analíticas.

Por lo que respecta a la absorción de ondas por parte de los contornos sólidos del embalse, dicha reflexión es de cuantificación difícil. Su importancia queda centrada en el entorno de las primeras frecuencias propias, y de forma en general localizada. Por otra parte, su inclusión en el cálculo da lugar a matrices de amortiguamiento no proporcionales que dificultan el cálculo. Por ello (salvo si el porcentaje de reflexión fuera muy bajo), no es de fundamental importancia la inclusión de las mismas en los cálculos de la interacción dinámica.

En cuanto a la forma del embalse, no reviste especial interés, siendo pequeña su contribución a la respuesta. Es de mucha mayor importancia la correcta modelización del agua almacenada en cuanto a sus características de absorción de ondas por radiación.

## CONCLUSIONES

Tal como se ha apuntado más arriba, los resultados obtenidos con las premisas anteriores, proporcionan unos resultados muy acordes con los ensayos, bien sean éstos a escala reducida o a escala real. Las diferencias son el orden del 10%, siendo en algunos de los casos inferiores incluso al 2%, pudiéndose concluir por tanto que existe una muy buena concordancia entre ellos.

## REFERENCIAS

### REFERENCIAS

1. F. Navarrina, *Una metodología general para optimización estructural en diseño asistido por ordenador*. Tesis Doctoral. E.T.S. de Ing. Caminos, Barcelona, Marzo, 1987.
2. G. Rouse, W. Lochman, *Structural Model Tests of Arch Dams. Glen Canyon and Morrow Point Dams*. United States Goverment Printing Office, Washington, 1969
3. E. Oñate, E. Alonso y M. Casteleiro, *Aplicaciones del método de los elementos finitos en Ingeniería*. E.T.S.I.C.C.P., Barcelona, 1982.
4. S. Porter, S. Craig, K. Chopra, *Hidrodynamic Effects in Dynamic Response of Simple Arch Dams*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 10, pag. 417-431, 1982.
5. E. Reissner, *The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates*. J. Appl. Mech., Vol. 12, pag. 69-77, 1945.
6. E. Hinton, D.R.J. Owen, *An Introduction to Finite Element Computations*. Pineridge Press Ltd., 1979.

## REFERENCIAS

7. R.W. Clough, J.M. Raphael, S. Mojtabahi, *APAP A Computer Program for Static and Dynamic Analysis of Arch Dams*. Report EERC 73-14, Berkeley, California, 1973.
8. S. Ahmad, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz, *Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements*. Int. J. Num. Meth. Engng. 2, pag. 419-451, 1970.
9. O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*. 3rd ed., McGraw-Hill, 1977.
10. J.A. Canas, J.J. Egozcue, A.H. Barbat, J. Miquel Canet y E. Banda, *Peligrosidad Sísmica en Cataluña*. E.T.S. Ing. Caminos, 1988.
11. R.W. Clough y J. Penzien, *Dynamic of Structures*. McGraw-Hill, 1975
12. R.W. Clough, *Nonlinear Mechanisms in the Seismic Response of Arch Dams*. International Conference on Earthquake Engineering. Skopje, Yugoslavia, 1980.
13. Y.C. Fung, *Foundations Solid Mechanics*. Prentice-Hall Inc., 1965.
14. J. Miquel Canet y A.H. Barbat, *Estructuras Sometidas a Acciones sísmicas*. CIMNE, Barcelona, 1988.
15. M. Cervera, *Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Structures using Three Dimensional and Shell Finite Element Models*. Tesis Doctoral, University of Wales, Swansea, 1986.
16. M. Casteleiro, *Pre y postproceso para el Análisis mediante el M.E.F. de sólidos tridimensionales y su aplicación al C.A.D.. En Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería*. (Eds. E. Oñate et al.), Barcelona, 1982.

REFERENCIAS

17. K.L. Fox y A.K. Chopra, *Earthquake Analysis of Arch Dams Including Dam-Water Interaction, Reservoir Boundary Absorption and Foundation Flexibility*. University of California, Barkeley, 1985.
18. K.J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall Inc., 1982.
19. R.W. Clough, *Earthquake Analysis by Response Spectrum Superposition*. Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 52, July 1962.
20. N.M. Newmark y E. Rosenblueth, *Fundamentos de Ingeniería Sísmica*. Ed. Diana, México, 1976.
21. H.M. Westergaard, *Water pressures on dams during earthquakes*. Trans. ASCE, 98, pag. 418-433, 1933
22. H. Lamb, *Hydrodynamics*. Dover, New York, 1945
23. O.C. Zienkiewicz y B. Nath, *Earthquake hydrodynamic pressures on arch dams - an electric analogue solution*. Proc. Inst. Civil Engn, 25, pag. 165-176, 1963
24. O.C. Zienkiewicz, R.W. Lewis y K.G. Stagg (Eds.), *Numerical Methods in Offshore Engineering*. John Wiley and Sons, 1978.
25. J.F. Hall y A.K. Chopra, *Hydrodynamic Effects in the Dynamic Response of Concrete Gravity Dams*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 10, pag. 333-345, 1982.
26. O.C. Zienkiewicz y R.E. Newton, *Coupled Vibrations of a Structure Submerged in a Compressible Fluid*. Proceedings of the Symposium of Finite Element Techniques. Institut fur Statik und Dynamik der Luft-und Raumfahrtkonstruktionen, University of Stuttgart, Germany, June 10-12, 1969.

## REFERENCIAS

27. P. Bettess, D.W. Kelly y O.C. Zienkiewicz, *The Sommerfield (radiation) Condition on Infinite Domains and its Modelling in Numerical Procedures.* Lecture Notes y Mathematics. Third International Symposium, pag. 169-201, 1977
28. J. Humar y M. Roufael, *Finite Element Analysis of Reservoir Vibration.* ASCE, Journal Of Engineering Mechanics, Vol. 109, No. 1, February 1983.
29. S. K. Sharan, *Time-domain Analysis of Infinite Fluid Vibrations.* Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 24, pag. 945-958, 1987.
30. P. Bettess y O.C. Zienkiewicz, *Diffraction and Refraction of Surface Waves Using Finite and Infinite Elements.* Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 11, pag. 1271-1290, 1977.
31. S. Saini P. Bettess y O.C. Zienkiewicz, *Coupled Hydrodynamic Response of Concrete Gravity Dams Using Finite and Infinite Elements.* Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 6, pag. 1-16, 1978.
32. E. Hinton, P. Bettess y R.W. Lewis, (Eds.), *Numerical Methods for Coupled Problems,* Proceedings of the International Conference held at the University College, Swansea, 1981.
33. C.N. Zang y R.J. Haefeli, *Electric analog indicates effect of horizontal earthquake shock on dams.* Civil Engn. pag. 54-55, April 1952
34. A.K. Chopra, *Earthquake behavior of reservoir-dam systems.* J. Engn. Mech. Div., ASCE, Vol. 94, pag. 1475-1499, 1968
35. J.F. Hall y A.K. Chopra, *Dynamic Response of Embankment Concrete-Gravity and Arch Dams Including Hydrodynamic Interaction.* Report No. UBC/EERC-80/39, (October, 1980), University of California, Berkeley.

## REFERENCIAS

36. R.W. Clough, R.M. Stephen y J.S.H. Kuo, *Dynamic response analysis of Techi dam.* report EERC 82/9, Berkeley, California, 1982.
37. J.F. Hall, *Study of the earthquake response of Pine Flat dam.* Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 14, 281-295, 1986
38. H. Shiojiri y S. Aoyagi, *Earthquake response of concrete gravity dams and arch dams.* Proc. Eighth World Conf. on Earthquake Engineering. San Francisco, California, Vol. V, pag. 87-94, 1984
39. I.G. Currie, *Fundamental Mechanics of the fluids.* McGraw-Hill, 1974.
40. *Prove dinamiche sul modello della diga di Llauset.* ISMES (Bérgamo), Maggio 1980.
41. H. Hossdorf, *Model Analysis of Structures.* Van Nostrand Reinhold, 1974.
42. J.W. Cooley y J.W. Tukey, *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series.* Mathematics of Computation, 19, pag. 297-301, 1965.