

ОПТИМИЗАЦИЈА ПРЕЧНИКА ЦЕВИ У ПРСТЕНАСТОЈ ЦЕВОВОДНОЈ МРЕЖИ МОДИФИКОВАНОМ МЕТОДОМ ПЕТЉИ

OPTIMISATION OF PIPE DIAMETERS IN LOOPED PIPELINE NETWORK AFTER THE MODIFIED LOOP METHOD

ТОМА ТАНАСКОВИЋ

Рударско-геолошки факултет, Бушина 7, Београд, tanaskovic@rgf.bg.ac.rs, тел. 011/3219-110

ДЕЈАН БРКИЋ

Министарство за науку и технолошки развој, Београд, dejanrgf@tesla.rcub.bg.ac.rs

Резиме: Након завршетка прорачуна дистрибуције протока флуида кроз цеви прстенасте дистрибутивне мреже често су брзине протока по појединим гранама или сувише мале или сувише велике. Због тога је потребно извршити оптимизацију пречника у складу са препорученим брзинама. Препоручена брзина кретања воде кроз водоводне цеви је од 0,75-1,5 m/s, док је у случају гасовода препоручена брзина којом гас сме да се креће знатно виша и може ићи и до 20 m/s. Пошто је гас стишљив флуид питање брзине протока гаса је сложеније него кад се разматра проток воде. У раду се приказује поступак оптимизације пречника модификованом Харди Крос методом. За разлику од класичног проблема прорачуна расподеле протока кроз цеви где су протоци променљиве, у овде приказаном оптимизационом проблему, протоци су константе док се пречници узимају као променљиве.

Кључне рећи: Природни гас, дистрибутивна мрежа, водовод, цевовод, нумерички метод, оптимизација.

Abstract: After the calculation of flows in a looped pipeline distribution network is done, very often velocity of fluid in some of the pipeline branches are undersized while in other are oversized. Hence, it is necessary to perform optimization of the pipes' diameter to fit in range of suggested values. Suggested velocities for water flow in waterworks systems are 0.75-1.5 m/s, while in the case of natural gas flow in gas-pipelines this velocity limit is increased up to 20 m/s. Problem of velocity in a gas pipeline is more complex in comparison to water velocity. This issue is caused by compressibility of gas. In this paper is shown procedure of diameters' optimization after the modified Hardy Cross method. Difference in comparison to classical problem in which flow distribution is unknown is that on the contrary, in optimization problem flows are now constants while the diameters are treated as variables.

Keywords: Natural Gas, Distribution Network, Waterworks, Pipeline, Numerical Method, Optimization Problem.

1. УВОД

Оптимизација пречника цеви које сачињавају водоводну, односно гасоводну прстенасту мрежу ће се спровести на основу принципа на којима је заснована метода Харди Кроса [1]. Касније су Ерр и Fowler унапредили овај метод 1970. године [2]. У унапређеном методу се обавезно користи матрични рачун [2]. Оригинални Харди Крос метод [1] може бити изражен матрично, али и не мора што га чини погоднијим за тзв. ручне прорачуне мреже само помоћу калкулатора. Разлика између оригиналног и унапређеног метода је само у броју итерација после којих се долази до задовољавајућег решења. Оба метода су прилагођена и за прорачун гасоводних мрежа [3, 4], а такође се користе врло успешно и у случају прорачуна како водоводних мрежа [5], тако и вентилационих система у зградама [6] или рудницама [7]. Када се у данашње време каже да је нека мрежа

решена Харди Крос методом, уобичајено се у ствари мисли на њену модификовану верзију. У данашње време су широко доступни рачунарски програми који служе за прорачун цевоводних мрежа прстенастог типа [8]. Међутим у данашње време је могуће и побољшани Харди Крос метод користити чак и у случају тзв. ручне калкулације, с тим да се уместо калкулатура користи стандардни рачунарски програм MS Excel 2007, помоћу кога се врло лако оперише са матрицама.

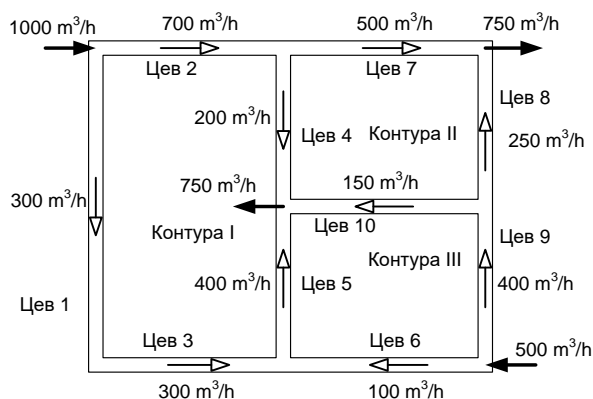
2. ОПТИМИЗАЦИОНИ ПРОБЛЕМ

Код тзв. класичног проблема мрежа се посматра као већ дата, тј. са унапред одређеним пречницима, дужинама и храпавостима цеви, као и са унапред одређеним максималним потрошњама флуида по чворовима мреже (улази флуида у мрежу се посматрају као негативна потрошња), док се прерасподела протока по гранама (цевима) мреже

прорачунава. Код проблема оптимизације, унапред је позната расподела протока по гранама цевоводне мреже, док се пречници прорачунавају у итеративном поступку. У случају протока гаса кроз полиетиленске цеви вредност релативне хртавости се занемарује јер је у овом случају режим протока уобичајено хидраулички 'гладак'. У овом раду ће се посматрати само проблем дистрибуције гаса као сложенији у односу на проблем дистрибуције воде из тог разлога што је гас компресибилан флуид. Наиме у типичној градској мрежи за дистрибуцију гаса притисак је отприлике $4 \cdot 10^5$ Pa, што значи да иста маса гаса има четири пута мању запремину од запремене исте масе гаса на нормалним или стандардним условима. Последица овога је да брзина гаса у цевоводу зависи од притиска који влада у истом (1):

$$v = \frac{4 \cdot p_{st} \cdot Q}{D_u^2 \cdot \pi \cdot p} \quad (1)$$

Проблем оптимизације пречника у гасоводној мрежи прстенастог типа је најкорисније размотрити на примеру. Један такав пример гасоводне мреже се даје на слици 1. Дужина свих цеви са слике 1 је 100m, осим цеви 1 чија је дужина 200m.



Слика 1: Пример гасоводне мреже

На основу једначине (1) лако се може изразити непознати пречник (2):

$$D_u = \sqrt{\frac{4 \cdot p_{st} \cdot Q}{v \cdot \pi \cdot p}} \quad (2)$$

У претходној једначини (2) једина непозната величина је брзина флуида која се у случају протока гаса усваја да буде мања од 20 m/s, док се за водове брзина воде усваја као знатно нижа и то у опсегу 0,75-1,5 m/s. Усвојиће се да је у нашем случају брзина струјања гаса кроз цеви 15 m/s. Израчунати полазни пречници за пример са слике 1 се дају у табели 1.

Табела 1: Полазни (А) и коначни (Б) пречници

Цев	D_u (mm)		Цев	D_u (mm)	
	(А)	(Б)		(А)	(Б)
1	42,05	45,86	6	24,28	23,94
2	64,24	60,43	7	54,29	52,75
3	42,05	45,86	8	38,39	39,93
4	34,34	32,07	9	48,56	48,90
5	48,56	52,03	10	29,74	28,53

Пречници цеви у табели 1 су добијене за $p/p_{st}=4$. Падови притиска за гасне мреже се добијају на основу Реноарове једначине (3):

$$F = p_2^2 - p_1^2 = 4810 \cdot \frac{\rho_r \cdot L \cdot Q_{st}^{1,82}}{D_u^{4,82}} \quad (3)$$

Са слике 1 може се закључити да је за сваки чвор мреже задовољен услов по првом Кирхофовом закону који мора и да се одржи за сваку наредну итерацију. Међутим за пречнике дате у табели 1, други Кирхофов закон није задовољен, тако да се мора приступити уравнотежењу мреже које се може извести на два начина; -1. Класично, тако што се пречници цеви сматрају константама, а протоци по цевима се прорачунавају погодном методом [1-4, 9], или -2. Оптимизацијом, где се пречници сматрају променљивима а протоци по гранама мреже константама.

3. ОПТИМИЗАЦИОНИ МЕТОД

Слично као и код класичног метода дефинисаће се функције контура (4) полазећи од једначине (3) за мрежу са слике 1.

$$\left. \begin{aligned} F_I &= F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 \\ F_{II} &= F_4 - F_7 + F_8 - F_{10} \\ F_{III} &= -F_5 - F_6 + F_9 + F_{10} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Функције контура (4) су написане за тако што је свака контура описивана у смеру супротном од кретања казаљке на сату.

За разлику од класичног приступа, за методу оптимизације пречника је потребно наћи изводе ако се пречници посматрају као променљиве величине (5):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_I(D_u)}{\partial D_u} &= \frac{\partial F_1(D_u)}{\partial D_u} - \frac{\partial F_2(D_u)}{\partial D_u} + \frac{\partial F_3(D_u)}{\partial D_u} - \frac{\partial F_4(D_u)}{\partial D_u} + \frac{\partial F_5(D_u)}{\partial D_u} \\ \frac{\partial F_{II}(D_u)}{\partial D_u} &= \frac{\partial F_4(D_u)}{\partial D_u} - \frac{\partial F_7(D_u)}{\partial D_u} + \frac{\partial F_8(D_u)}{\partial D_u} - \frac{\partial F_{10}(D_u)}{\partial D_u} \\ \frac{\partial F_{III}(D_u)}{\partial D_u} &= -\frac{\partial F_5(D_u)}{\partial D_u} - \frac{\partial F_6(D_u)}{\partial D_u} + \frac{\partial F_9(D_u)}{\partial D_u} + \frac{\partial F_{10}(D_u)}{\partial D_u} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

На пример, за цев 1 први извод је (6):

$$F_1' = \frac{\partial F_1(D_u)}{\partial D_u} = -4,82 \cdot 4810 \cdot \frac{\rho_r \cdot L \cdot Q_1^{1,82}}{D_1^{5,82}} \quad (6)$$

Поправка пречника за прву контуру се према класичној Харди Крос методу рачуна, нпр. за контуру I као (7):

$$\Delta_1(D_u) = \Delta_I = \frac{F_I(D_u)}{\partial F_I(D_u)} \quad (7)$$

Пошто ће се оптимизација у нашем случају вршити унапређеном Харди Кросовом методом за коју је потребно увести матрични рачун, прорачун поправних пречника записати у матричном облику (8):

$$[\nabla F(D_u)^{(i-1)}] \cdot [\Delta D_u^i] = [F(D_u)^{(i-1)}] \quad (8)$$

Табела 2: Пример прорачуна (прва итерација за мрежу са слике 1)

	Цев	D (m)	F	F'	Корекција 1	Корекција 2	D (m)	
I	1	+0,04205	+28746376456	-3294893153110	+0,003400943		+0,045453	
	2	-0,06424	-8718601136	-654209195465	+0,003400943		-0,060835	
	3	+0,04205	+14373188228	-1647446576555	+0,003400943		+0,045453	
	4	-0,03434	-18257737380	-2563013020964	+0,003400943	-0,001280657±	-0,032215	
	5	+0,04856	+12129398327	-1204004519864	+0,003400943	-0,000240858=	+0,051718	
		Σ	+28272624496	-9363566465958				
			Δ _I (D _u)=-0,003400943; према j-ни (8)					
II	4	+0,03434	+18257737380	-2563013020964	+0,001280657	-0,003400943=	+0,032215	
	7	-0,05429	-10633160046	-944052622692	+0,001280657		-0,053009	
	8	+0,03839	+16005529575	-2009642924520	+0,001280657		+0,039669	
	10	-0,02974	-21635194830	-3506986026540	+0,001280657	-0,000240858±	-0,028696	
		Σ	+1994912078	-9023694594716				
			Δ _{II} (D _u)=-0,001280657; према j-ни (8)					
III	5	-0,04856	-12129398327	-1204004519864	+0,000240858	-0,003400943±	-0,051718	
	6	-0,02428	-27482399807	-545598273507	+0,000240858		-0,024038	
	9	+0,04856	+12129398327	-1204004519864	+0,000240858		+0,048799	
	10	+0,02974	+21635194830	-3506986026540	+0,000240858	-0,001280657=	+0,028696	
		Σ	-5847204976	-11370984339774				
			Δ _{III} (D _u)=-0,000240858; према j-ни (8)					

У нашем случају матрица, тј. вектор непознатих поправки протока се може записати као (9):

$$[\Delta D_u^i] = \begin{bmatrix} \Delta_I(D_u) \\ \Delta_{II}(D_u) \\ \Delta_{III}(D_u) \end{bmatrix}_i \quad (9)$$

Вектор функција контура се даје у матричном облику као (10):

$$[F(D_u)^{(i-1)}] = \begin{bmatrix} F_I(D_u) \\ F_{II}(D_u) \\ F_{III}(D_u) \end{bmatrix}_{i-1} \quad (10)$$

Матрица извода се у случају оригиналне Харди Крос методе даје као (11):

$$[\nabla F(D_u)^{(i-1)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_I(D_u)}{\partial D_u} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_{II}(D_u)}{\partial D_u} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_{III}(D_u)}{\partial D_u} \end{bmatrix}_{i-1} \quad (11)$$

Бројач i се односи на одређену итерацију. Разлика између оригиналне и унапређене Харди Крос методе је у томе што се код оригиналне методе јављају само 0 на местима свих чланова ван главне дијагонале у матрици извода функција контура (11). Код модификоване Харди Крос методе ова празна поља се попуњавају на основу суседности контура. Тако нпр. цев 4 је заједничка за контуре I и II, цев 10 за контуре II и III, док је цев 5 заједничка за контуре I и III. Тако се у случају унапређеног Харди Крос метода може написати матрица извода као (12). Матрица извода је симетрична у односу на главну дијагоналу. Тако се нпр. у пресеку прве колоне и другог реда, као и у пресеку првог реда и друге колоне уписује исти члан, односно извод функције цеви 4 пошто је ова цев заједничка контуре I и II. Сви елементи ван главне

дијагонале у матрици извода се узимају са супротним предзнаком од оних на главној дијагонали.

$$[\nabla F(D_u)^{(i-1)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_I(D_u)}{\partial D_u} & -\frac{\partial F_4(D_u)}{\partial D_u} & -\frac{\partial F_5(D_u)}{\partial D_u} \\ -\frac{\partial F_4(D_u)}{\partial D_u} & \frac{\partial F_{II}(D_u)}{\partial D_u} & -\frac{\partial F_{10}(D_u)}{\partial D_u} \\ -\frac{\partial F_5(D_u)}{\partial D_u} & -\frac{\partial F_{10}(D_u)}{\partial D_u} & \frac{\partial F_{III}(D_u)}{\partial D_u} \end{bmatrix}_{i-1} \quad (12)$$

Након прорачуна матрице непознатих, тј. матрице поправних протока, на пречник сваке цеви у одређеној контури који је прорачунат у претходној итерацији потребно је додати одговарајућу поправку за припадајућу контуру са негативним предзнаком. Тако нпр. поравни пречник Δ_I се додаје са негативним предзнаком на пречнике свих цеви из прве конуре, тј. на цеви 1, 2, 3, 4 и 5. Пречници цеви 1, 3 и 5 у првој итерацији се узимају као позитивни јер се њихов смер поклапа са усвојеним смером обиласка контуре.

Цеви заједничке за две контуре морају примити додатну корекцију пречника на основу правила [3,4,9], тако да алгебарско сабирање треба извршити на основу следећих правила [8, 9], [12]:

1. Алгебарски знак за поправку Δ_1 треба узети са различитим предзнаком од свог знака, тј. потребно је сабрати када је знак – (минус), и обрнуто;
2. Алгебарска операција за поправку Δ_2 треба да буде супротна од њеног доњег знака када је горњи знак исти као онај уз проток срачунат у претходној итерацији (односно у првој итерацији знак уз претпостављен иницијални проток), у супротном је исти као доњи знак.

Горњи знак који се обично пише уз поправку пречника која потиче из суседне контуре (Δ_2) при прорачуну; + (плус) или – (минус), указује нам на

начин обилажења суседне контуре у односу на претпостављени смер протока. Уколико се смер претпостављеног протока поклопи са смером обилажења суседне контуре усваја се горњи знак + (плус), у супротном—(минус). Доњи знак се преписује из прве поправке суседне контуре са којом постоји заједничка цев. Корекција Δ_1 се односи на припадајућу контуру, док се корекција Δ_2 усваја из контура којима припадају заједничке цеви [3, 4] (видети табелу 2 за појмове горњи и доњи знак, иза коркције 2).

Прорачун се зауставља када услов по другом Кирхофовом закону буде приближно 0 у складу са унапред претпостављеном тачношћу. У литератури се често први Кирхофов закон назива и првим законом хидраулике, а други Кирхофов закон другим законом хидраулике. Први закон суштински одговара принципу одржања масе, а други одржања енергије.

По завршетку прорачуна, брзина протока флуида неће бити она за коју је вршена оптимизација, већ ће та брзина (у нашем случају 15 m/s), бити отприлике средња брзина протока у мрежи. У неким гранама ће бити мања, док ће у неким бити већа од ове 'оптимизирајуће' брзине, али се ниуједној цеви неће јавити превелико одступање (Табела 3). Наравно, крајњи резултати који се добију за пречнике неће одговарати стандардним пречницима цеви, тако да је потребно усвојити први већи или мањи стандардни пречник. Ово ће унеколико покварити расподелу протока по цевима тако да би било добро са овим стандардним пречницима још једном прорачунати мрежу на класичан начин код кога се протоци посматрају као променљиве.

За прорачун приказан у табели 2 су потребни протоци по цевима који су дати на слици 1, док је потребна дужина цеви дата у претходном тексту. Протоци у прорачуну приказаном у табели 2 морају бити у m^3/s . Коначне брзине протока гаса по цевима су дате у табели 3. Прорачун је вршен у десет итерација.

Табела 3: Крајње брзине протока

Цев	v (m/s)	Цев	v (m/s)
1	12,61	6	15,43
2	16,95	7	15,89
3	12,61	8	13,86
4	17,20	9	14,79
5	13,07	10	16,29

4. ЗАКЉУЧАК

Унапређеним Харди Крос методом се добија решење проблема прорачуна мреже са унапред задатом тачношћу, било класичног или оптимизационог после знатно мањег броја потребних итерација у поређењу са оригиналним Харди Крос методом.

Унапређени Харди Крос метод припада тзв. Њутновој групи нумеричких метода [10]. Данас су доступне различите варијанте Њутнових нумеричких метода за решавање проблема протока у прстенастим мрежама

[11, 12]. У стручној литератури се методе често Харди Кроса називају и методама петљи.

КОРИШЋЕНЕ ОЗНАКЕ

v – брзина (m/s)
 Q – проток (m^3/s)
 p – притисак (Pa)
 ρ_r – релативна густина гаса (0,64)
 L – дужина цеви (m)
 D – пречник цеви (m)
 st - стандардни услови

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Cross, H., "Analysis of flow in networks of conduits or conductors", *University of Illinois Engineering Experimental Station Bulletin* 286, 34(22) (1936)
- [2] Epp, R., Fowler, A.G., "Efficient code for steady flows in networks", *Journal of the Hydraulics Division of the American Society of Civil Engineers*, 96(HY1) (1970) 43–56.
- [3] Brkić, D., "An improvement of Hardy Cross method applied on looped spatial natural gas distribution networks", *Applied Energy*, 86(7-8) (2009) 1290-1300.
- [4] Corfield, G., Hunt, B.E., Ott, R.J., Binder, G.P., Vandaveer, F.E., "Distribution design for increased demand," 63–83 [chapter 9]. In: Segeler, C.G., editor. *Gas engineers handbook*, Industrial Press, New York. (1974)
- [5] Boulos, P.F., Lansley, K.E., Karney, B.W., *Comprehensive Water Distribution Systems Analysis Handbook for Engineers and Planners*, MWH Soft Inc, Hardback, 2006.
- [6] Aynsley, R.M., "A resistance approach to analysis of natural ventilation airflow networks", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 67-68 (1997) 711-719.
- [7] Wang, Y.-J., Hartman, H.L., "Computer solution of three-dimensional mine ventilation networks with multiple fans and natural ventilation", *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 4(2) (1967) 129-154.
- [8] Lopes A.M.G., "Implementation of the Hardy-Cross method for the solution of piping networks", *Computer Applications in Engineering Education*, 12(2) (2004) 117-125.
- [9] Бркић, Д., Танасковић, Т., "Унапређење методе контура прилагођене за прорачун гасних дистрибутивних мрежа", *XXXV Sym-Op-Is* (2008) 97-100.
- [10] Mah, R.S.H., Lin, T.D., "Comparison of modified Newton's methods", *Computers and Chemical Engineering*, 4(2) (1980) 75-78.
- [11] Mah, R.S.H., Shacham, M., "Pipeline network design and synthesis", *Advances in Chemical Engineering*, 10 (1978) 125-209.
- [12] Gay, B., Middleton, P., "The solution of pipe network problems", *Chemical Engineering Science*, 26(1) (1971) 109-123.