DISEÑO OPTIMO DE VASIJAS DE PRESION USANDO EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS Y UN OPTIMIZADOR NO LINEAL.

CDU 51:624.011:681.174.8

JOHN MIDDLETON *
B.Sc., M.Sc.

EUGENIO OÑATE **
Ingeniero de Caminos, M.Sc.

RESUMEN:

Se presenta un esquema de diseño para vasijas de presión metálicas de manera que se minimice la tensión tangencial en la vasija. La geometría final se establece mediante un procedimiento iterativo que optimiza un modelo matemático que expresa la variación de la tensión tangencial en la vasija. Los parámetros del modelo se calculan para cada iteración a partir de los valores de las tensiones tangenciales en la vasija, determinados por el método de los elementos finitos.

SUMMARY:

A design scheme to minimize the shear stress in steel pressure vessels is presented. The final geometry is calculated following an iterative scheme which optimates a matematical model expressing the variation of shear stresses in the vessel . The parameters of the model are evaluated from the values of the shear stresses in the vessel for each iteration, calculated using the finite element method.

INTRODUCCION

El diseño de vasijas de presión se ha basado hasta muy recientemente en datos empíricos obtenidos de la experiencia. La necesidad de economizar el material al máximo, junto con el requerimiento de que resista cada vez mayores tensiones de trabajo, ha hecho que la filosofía del diseño de vasijas de presión cambie por completo, habiéndose desarrollado numerosos métodos para producir diseños acordes con las severas condiciones que sufren las vasijas de presión en la industria moderna (1) (2).

El proceso de adaptar las nuevas técnicas analíticas al campo de la ingeniería práctica es lento. Esta situación se debe principalmente a las complicaciones que se derivan de la computación, y la pregunta que surge de inmediato es la de si un análisis detallado de un modelo simplificado es más valioso que un análisis más grosero de un modelo más realístico. En el análisis de modelos más realísticos el computador ha jugado un papel esencial, aunque no obstante, el establecer programas demasiado entrevesados ha oscurecido en ocasiones los objetivos prácticos ante la dificultad de interpretar grandes cantidades de resultados.

Teniendo estos puntos en mente, el objeto de este artículo es desarrollar un esquema para el diseño óptimo de vasijas de presión que conjugue las más modernas filosofías en el diseño, junto con las últimas técnicas analíticas y computacionales.

(*) Lector, Departamento de Ingeniería Civil, University of Wales, Swansea.

(**) Research fellow, Departamento de Ingeniería Civil, University of Wales, Swansea.

Objetivos y Esquema de Diseño

El objetivo primordial es organizar un esquema tal, que una vez conocidos los datos geométricos del problema nos corrija la geometría original, proporcionándonos información sobre el diseño estructural óptimo. Aunque este concepto de diseño es muy general, los pasos intermedios que implica, como análisis, modelación estructural y optimización, presentan no pocos problemas. Incluso si se dispone de un modelo matemático de la estructura relativamente bueno la solución numérica de la misma puede ser laboriosa, sin mencionar que sólo para optimizar un problema de seis variables se precisan casi mil iteraciones en el análisis.

Se puede reducir este número de iteraciones introduciendo un "modelo de comportamiento" que crea un modelo aproximado del comportamiento de la estructura, efectuándose la optimización sobre este modelo (3), (4), (5). Más aún, este concepto se puede enlazar con una secuencia de modelos estructurales aproximados, realizando la aproximación sobre éstos en un proceso se secuencias sucesivas.

El análisis de la estructura se efectuará usando el método de los elementos finitos, ya que éste ha probado ser el arma más poderosa en la actualidad para resolver sistemas estructurales como el que aquí se considera. También, como el modelo de la estructura tendrá en general forma no lineal, el método de optimización usado ha de ser capaz de tratar con problemas no lineales. Para esto se usará la técnica de minimización secuencial no condicionada (SUMT) desarrollada por FIACCO y Mc CORMICK (6). Dicho método basado en una función de corrección es sumamente versátil y puede aplicarse también a problemas condicionados.

Con todo esto, el esquema de diseño estructural óptimo consistirá de los siguientes pasos:

1) Análisis de la estructura usando el método de los elementos finitos.
2) Uso de un modelo matemático (tanto lineal, como no lineal) para descubrir el comportamiento estructural del sistema.
3) Aplicación de la técnica de minimización secuencial no condicionada para optimizar el modelo estructural.

Se explica a continuación con detalle cada uno de los pasos anteriores en el contexto del problema que se considera.

EL Problema Estructural y el Análisis mediante Elementos Finitos

El problema estructural que se considera es el diseño óptimo de la sección extrema de una vasija de presión cilíndrica. En la figura 1 se muestra la configuración de una vasija típica con los parámetros requeridos para definir su forma (7). Nótese que el radio de la cabeza es un parámetro implícito, ya que viene definido automáticamente al escoger los parámetros r_1, r_2, d_1, d_2 y d_3.

En el problema de optimización de una estructura existen dos necesidades básicas que el análisis estructural ha de proveer para asegurar que los resultados que se obtengan del proceso de optimización son los correctos, y éstos son:

1) El análisis debe ser capaz de poder predecir resultados lo más exactos posible del comportamiento de la estructura que se optimiza.

2) El análisis debe poder proporcionar los resultados que se requieran sobre el comportamiento de la estructura, como tensiones, deformaciones, etc., en cualquier punto dentro de la estructura.

El método de los elementos finitos satisface adecuadamente los dos requisitos anteriores, poseyendo, además, la versatilidad de poder analizar formas complejas.

La configuración de la vasija de presión que se muestra en la figura 1 se reduce a un problema de revolución, pudiéndose ver las tensiones y deformaciones asociadas en la figura 2.1. La relación entre deformaciones y desplazamientos para las deformaciones no nulas se puede escribir como

$$\epsilon_r = \partial u/\partial r \quad ; \quad \epsilon_z = \partial v/\partial z$$
$$\epsilon_\theta = u/r \quad ; \quad \gamma_{rz} = \partial u/\partial z + \partial v/\partial r \qquad (1)$$

y las relaciones tensiones deformaciones como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 \\ & & 1-\nu & 0 \\ & & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

Las bases del método de los elementos finitos se pueden encontrar en el libro de Zienkiewicz(8) y aquí solo daremos una breve presentación del mismo.

Las ecuaciones que gobiernan el equilibrio se obtienen minimizando la energía potencial total del sistema

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V [\sigma]^T\{\epsilon\}\,dV - \int_V \{\delta\}^T\{p\}\,dV - \int_S \{\delta\}^T\{q\}\,dS \qquad (3)$$

El elemento usado ha sido el rectangular isoparamétrico de 8 nodos como el que se muestra en la figura 2.2 . El campo de desplazamientos en el interior del elemento se define por

$$\{\delta\} = \sum_{i=1}^{8} [N_i]\{\delta_i\} \qquad (4)$$

siendo

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \qquad (5)$$

donde $[N_i]$ es un sistema de funciones de forma para el elemento y $\{\delta_i\}$ es el vector de desplazamientos nodales.

Así pues, se obtiene la relación

$$\{\epsilon\} = \sum_{i=1}^{8} [B_i]\{\delta_i\} \qquad (6)$$

donde en problemas de revolución la matriz de deformación B tiene la forma de

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \partial N_i/\partial r & 0 \\ 0 & \partial N_i/\partial z \\ \frac{1}{r} N_i & 0 \\ \partial N_i/\partial z & \partial N_i/\partial r \end{bmatrix} \quad (7)$$

Sustituyendo las ecuaciones (6) y (4) en (3) se puede reescribir la energía potencial total como

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \{\delta\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta\} dV - \int_V \{\delta\}^T [N]^T \{P\} dV - \int_S \{\delta\}^T [N]^T \{q\} dS \quad (8)$$

Tras proceder a la minimización de la expresión anterior con respecto a los parámetros nodales $\{\delta\}$ se obtiene la conocida relación general

$$[K]\{\delta\} = \{F\} \quad (9)$$

donde $[K]$ se puede escribir para problemas de revolución como

$$[K] = 2\pi \int_S [B]^T [D] [B] \, r \, dr \, dz \quad (10)$$

Usando la ecuación anterior se puede calcular la matriz de rigidez del elemento, para tras ensamblar las matrices de los diferentes elementos, obtener los desplazamientos nodales $\{\delta\}$ mediante la solución del sistema de ecuaciones.

Para acomodar el cambio de forma de la vasija de presión al análisis mediante elementos finitos, se desarrolló un esquema para generar automáticamente la malla de elementos tal, que al avanzar en el proceso de optimización la nueva forma de la vasija se discretiza automáticamente.

Modelo matemático de la optimización

El criterio de la optimización es encontrar las variables óptimas que definan la forma de la vasija tal, que el valor de la tensión tangencial máxima en la vasija sea mínimo, puesto que está demostrado que la vida media de una vasija de presión está directamente relacionada con sus tensiones tangenciales, ya que éstas son las que causan mayor fatiga al material.

La función a optimizar define la tensión tangencial en la vasija como función lineal de un conjunto de variables

$$\tau(\underline{x}) = \sum_{n=1}^{N} (a_n x_n) + a_{n+1} \quad (11)$$

en donde a_n representa la variación de la tensión tangencial con algún parámetro de la estructura y x_n representan las variables del diseño. Cada uno de los valores a_n se puede encontrar mediante la fórmula general de diferencias finitas. a_{n+1} es un factor de corrección.

$$a_n = \frac{\partial \tau}{\partial x_n} = \frac{(\tau(\underline{x} + \Delta x_n) - \tau(\underline{x}))}{\Delta x_n}, \quad (n = 1, N) \quad (12)$$

donde $\underline{\Delta} X_n$ es un vector que tiene todos los términos nulos excepto el enésimo.

El vector $\underline{x}$ contiene las variables de diseño de la vasija y se define como sigue, usando los parámetros que se muestran en la figura 1

$$\underline{X} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ t_1 \\ t_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} \qquad (13)$$

Las condiciones a imponer en la geometría de la vasija son:
1) Condiciones laterales

$$x_{Min} \leq x_i \leq x_{Max} \qquad (14)$$

que se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} l_1(\underline{x}) &= x_i - x_{Min} \geq 0 \\ l_2(\underline{x}) &= x_{Max} - x_i \geq 0 \end{aligned} \qquad (15)$$

Así pues, la variable x_i está sometida a dos condiciones.

2) Condición de altura
Se puede escribir como :

$$h(\underline{x}) = x_5 - (x_1 + x_2) \geq 0 \qquad (16)$$

Se puede a continuación formar una secuencia de modelos matemáticos (4), (5) , cada uno de los cuales conteniendo los siguientes pasos:

1) Para un valor característico dado de un parámetro de la geometría x_n calcula el valor de la tensión tangencial máxima $\tau(\underline{x})^i$ i indica el punto donde dicha tensión es máxima.

2) Calcula el valor de la tensión tengencial en el punto i anterior para un incremento Δx_n del parámetro geométrico considerado.

3) Determina la derivada parcial $\partial\tau(\underline{x})^i/\partial x_n$ en el punto i donde la tensión tangencial es máxima para calcular a_n.

4) Repetir los pasos 1), 2) y 3) para todos los parámetros de diseño escogidos de manera que la función $\tau(\underline{x})$ quede completamente definida.

5) Aplicar el proceso de optimización para minimizar $\tau(\underline{x})$ sujeta a las condiciones

$$\begin{cases} l(\underline{x}) \geq 0 \\ h(\underline{x}) \geq 0 \end{cases} \qquad (17)$$

y obtener un nuevo vector de parámetros geométricos $\underline{X}'$. Repetir el proceso desde el paso 1) usando hasta que el grado de convergencia sea el deseado.

Esquema de Optimización

La técnica usada en el esquema de optimización será la de la función de corrección. Este método se aplica para transformar problemas condicionados no lineales en otros que puedan resolverse mediante una secuencia de minimización de problemas no condicionados. Fiacco y McCormick (6) fueron los primeros en introducir esta terminología que es hoy ampliamente conocida como SUMT (Sequential Unconstrained Minimation Technique).

La idea básica de usar una función de corrección es transformar el problema de minimizar una función $\tau(\underline{X})$ sometida a la condición $g_i(\underline{X})>0$ en otro equivalente en donde la función a minimizar no está condicionada y es de la forma:

$$\phi(\underline{X}, r_K) = \tau(\underline{X}) + r_K \sum_{i=1}^{m} G(g_i(\underline{X})) \qquad (18)$$

donde m es el número de condiciones, escogiéndose G de manera que si la ecuación (18) se hace mínima para una serie de valores de r_K, la solución converja a la del problema condicionado inicial. En el SUMT la función G escogida es la función logaritmo ya que ha probado dar buenos resultados en la práctica (6).

Algoritmo de Diseño

Disponemos, pues de los ingredientes básicos para poner en práctica un esquema tal, que dada la geometría inicial de una vasija de presión determinada nos fije las modificaciones que hay que efectuar en la geometría original para que la vida media de la vasija, sometida a unas condiciones determinadas, sea máxima.

Así pues, el algoritmo de diseño consta de los siguientes pasos:
1) Definición de la geometría original. Entrada de datos.
2) Análisis mediante elementos finitos de la estructura.
3) Obtención de un modelo matemático del comportamiento de la estructura.
4) Optimización del modelo matemático.

La entrada de datos para una geometría dada se ha mantenido lo más simple posible para facilidad del proyectista, generándose automáticamente los distintos tipos de carga (puntual, distribuida, etc.) y las condiciones de contorno.

Con esto, los pasos intermedios del algoritmo se definen como sigue:

1) Entrada de datos
Parámetros de control para análisis mediante el método de elementos finitos y SUMT + parámetros de condiciones de carga en la estructura (puntual, térmica, etc.).

2) Diseño inicial
Definir vector de variables de diseño inicial $\underline{X}_r$ e imponer condiciones laterales y de altura.

3) Análisis mediante elementos finitos
Genera automáticamente la malla y calcula el punto de tensión tangencial máxima y el valor de ésta.

4) Formulación del modelo matemático
En nuestro caso

$$\tau(\underline{X}) = \sum_{j=1}^{N} a_j x_j + a_{j+1}$$

5) Optimización del modelo
Se aplica el método SUMT para minimizar $\tau(\underline{X})$ sujeta a las condiciones definidas en 2). Obtención del nuevo vector de variables de diseño.

6) Comprobación de la convergencia
Comparar

$$\Delta\tau(\underline{X}) = |\tau(\underline{X})^i| - |\tau(\underline{X})^{i+1}|$$

Si $\Delta\tau(\underline{X})$ es menor que un valor prefijado de antemano, fin del proceso. En caso contrario, volver a 2). (Ver figura (3)).

EJEMPLOS

La configuración de la vasija de presión ha sido ya definida en la sección 3 (Figura 1). El estado de tensiones en la vasija se supondrá debido al efecto de una carga vertical en la boca, una presión interior uniforme, y una distribución de temperatura no uniforme (Figuras 4.1 y 4.2).

Al escoger el vector de variables de diseño con el propósito de que la tensión tangencial en la estructura sea mínima, puede darse el caso de que las restricciones a imponer sean mutuamente opuestas o incongruentes. Por ejemplo, una presión interior aplicada a la vasija predecirá que es conveniente un mayor espesor de la misma, mientras que una distribución no uniforme de temperatura aconsejará que el espesor sea el menor posible. Del mismo modo se puede presentar un caso similar con las otras variables y, por consiguiente, es el efecto conjunto de todos los estados de carga posibles el que proporcionará un diseño de la vasija lo más ajustado posible, con la condición siguiente: reducir la tensión tangencial al máximo.

En los ejemplos analizados la configuración de la vasija de presión sobre la que se realizaron los ensayos de diseño óptimo se definió usando dos vectores diferentes, de tres y cinco variables de diseño, respectivamente. Asimismo, se estudió el efecto de distintas combinaciones de los tres tipos de carga descritos anteriormente.

La estructura se discretizó en veinte elementos usando un elemento isoparamétrico parabólico de ocho nodos (Figura 2-2) para el análisis mediante elementos finitos.

Para las propiedades del material de la vasija se tomaron las características del acero

- Módulo de Young 30×10^6 libras/pulg^2
- Coeficiente de Poisson 0,3
- Coeficiente de expansión térmica 12×10^{-6}/°C

Los dos vectores de variables de diseño usados fueron

$$\underline{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix}$$

Junto con las restricciones que se aplicaron para el caso particular estudiado

$$\begin{cases} 0.3 \leq x_1 \leq 1.5 \\ 0.4 \leq x_2 \leq 1.5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0.15 \leq x_3 \leq 0.35 \\ 0.15 \leq x_4 \leq 0.35 \\ 1.5 \leq x_5 \leq 3.5 \end{cases}$$

Asimismo, en todos los ejemplos se tomaron como constantes los valores siguientes:

- Diámetro de la boca $d_1 = 1,0$
- Diámetro de la vasija $d_2 = 4,0$
- Longitud de la boca $n_1 = 1,0$
- Longitud de la vasija $n_3 = 1,0$

Ejemplo I

La configuración inicial de la vasija se definió en función del vector de tres variables

$$\underline{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,4 \\ 0,85 \\ 2,75 \end{Bmatrix}$$

Las condiciones laterales aplicadas a dichas variables fueron:

$$\begin{aligned} 0,3 &\leq x_1 \leq 1,5 \\ 0,4 &\leq x_2 \leq 1,5 \\ 1,5 &\leq x_5 \leq 3,5 \end{aligned}$$

La estructura se sometió solamente a una presión de 200 unidades. El incremento ΔX_n usado en el esquema de diseño se acotó a 0,3 y los espesores de la boca y de la vasija se mantuvieron constantes al alcanzar el valor de 0,25.

Los resultados de la geometría final de la vasija y la reducción en la tensión tangencial máxima se pueden ver en la Figura 5.

Ejemplo 2

La configuración de la vasija de presión se debió usando un vector de cinco variables de diseño. Los valores iniciales se tomaron

$$\underline{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 0,5 \\ 0,25 \\ 0,25 \\ 2,0 \end{Bmatrix}$$

Las restricciones laterales fueron:

$$\begin{aligned} 0,3 &\leq x_1 \leq 1,5 \\ 0,4 &\leq x_2 \leq 1,5 \\ 0,15 &\leq x_3 \leq 0,35 \\ 0,15 &\leq x_4 \leq 0,35 \\ 1,5 &\leq x_5 \leq 3,5 \end{aligned}$$

El estado de carga se tomó de la combinación de: una carga puntual de 800 unidades en la boca, una presión interior de 200 unidades y una variación no uniforme de temperatura a través del espesor del material. La temperatura varía linealmente con el espesor, tomando el valor de 50°C en la cara interior y cero en la exterior.

El valor del incremento ΔX_n se limitó a ± 0,3.
En la figura 6 se puede apreciar la gran reducción obtenida para la tensión tangencial máxima y la geometría final de la vasija analizada.

EJEMPLO 3

De nuevo el vector de variables de diseño consta de cinco variables cuyos valores iniciales son

$$\underline{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,85 \\ 0,40 \\ 0,15 \\ 0,35 \\ 2,15 \end{Bmatrix}$$

Las condiciones laterales y las cargas aplicadas son similares a las del ejemplo 2. El límite asignado al incremento del vector de variables de diseño se tomó como 0,1 .

En la figura 7 se muestran los resultados obtenidos en este ejemplo. De nuevo la tensión tangencial máxima se ha dibujado en función del número de iteraciones en el proceso, hasta obtener la solución óptima. La reducción obtenida en la tensión tangencial máxima es aproximadamente del 40% en este ejemplo.

CONCLUSIONES

En todos los ejemplos presentados, el diseño final resultante tiene una forma más estilizada que la inicial, siendo la tensión tangencial máxima considerablemente inferior a la que se obtendría de mantener la sección inicial.

Los valores asignados al límite que se establece en la variación de las variables de diseño (ΔX_n) tienen gran influencia en la convergencia del proceso. En general, para límites en la variación del ΔX_n bajos, el proceso evoluciona muy lentamente hacia la solución óptima y la tensión tangencial máxima en la estructura se reduce solo en una proporción muy pequeña. Por el contrario, si el límite que se establece es elevado, el proceso disminuye la tensión tangencial máxima mucho más rápidamente en cada iteración. Sin embargo, esta mayor rapidez tiene la desventaja de que proporciona oscilaciones alrededor de la solución óptima, y éstas pueden dar diseños con tensiones tangenciales mayores que las obtenidas previamente.

En la mayoría de los ejemplos expuestos las restricciones laterales han permanecido inactivas durante el proceso de optimización, y solo en algunos han intervenido activamente en la parte intermedia y final del algoritmo de diseño. Esto se debe a que el espacio disponible durante el proceso de optimización para las restricciones es generalmente elevado, pudiendo reducirse para aplicaciones prácticas, con la consiguiente disminución en el número de iteraciones necesarias para producir un diseño óptimo.

El proceso de optimización SUMT resultó de gran eficacia, usando aproximadamente un 8% del tiempo de computación total. Todos los cálculos han sido efectuados en el ordenador ICL-1904S de la Universidad de Swansea (País de Gales).

El tiempo total empleado en cada uno de los ejemplos presentados en este artículo fue de, aproximadamente, 600 segundos en el caso de un vector de tres variables de diseño, y 900 segundos para el caso de cinco variables de diseño. Asimismo, el número medio de iteraciones necesarias para producir el diseño óptimo varía entre seis y diez. Es evidente que los resultados obtenidos dependen considerablemente de la magnitud de los límites asignados a y de cuan cerca estén los parámetros de diseño iniciales de la solución óptima.

Los resultados obtenidos en este estudio demuestran la efectividad del proceso de optimización estructural, y permiten que el ingeniero escoja los parámetros que han de permanecer invariables y los que han de modificarse, de acuerdo con el esquema de diseño propuesto. De esta manera, el algoritmo de diseño óptimo es capaz de combinar la necesidad del ingeniero junto con la información necesaria para ajustar la estructura de modo que se minimicen las tensiones en el material.

REFERENCIAS

1 - VITIELLO, E., "Shape optimization using mathematical programming and modelling techniques", 2nd AGARD Conference on Optimization of Structures. 1973 (Milán).

2 - SAWCZUK,A, MROZ,Z , "Optimization in structural design", Symposium Warsaw, Poland August 21-24. 1973.

3 - REINŚCHIMDT,K.F., CORNELL,C.A and BROTCNIE,J.F., "Iterative design and structural optimization". Proc. ASCE. Journal Structural Division. Vol 92.St6, pp.281-318. Dec. 1966.

4 - ROMSTAD,K.M., WANG,C.K., "Optimum design of framed structurs", Proc. ASCE Journal. Structural Division, Vol 94, St5, pp. 1219-1241. Dec. 1968.

5 - CAMPBELL,J.S., "A finite element system for analysis and design", Ph.D. thesis, University College of Swansea, 1975

6 - FIACCO,A.V., Mc CORMICK,G.P., "Non linear programming: sequential unconstrained minimization technikes", John Wiley & Sons, New York 1968

7 - ASME , "Boiler and pressure Vessel code", Section III, July 1971.

8 - ZIENKIEWICZ,O.C, "Finite element method in Engineering Science". McGraw Hill, Londres-Nueva York 1971