Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería, Vol. 1, 1, 3-20 (1985)

DISEÑO ESTRUCTURAL OPTIMO - UNA RESEÑA

R. H. GALLAGHER
Worcester Polytechnic Institute
Worcester, MA 01609 USA

RESUMEN

Se presenta en este artículo una panorámica de las bases fundamentales del diseño estructural óptimo. Así, tras una breve reseña histórica de los diferentes procedimientos desarrollados para abordar el problema, acompañada de la bibliografía correspondiente, se describen los términos fundamentales que intervienen en un problema de diseño óptimo, juntamente con algunos de los métodos más populares para su resolución por ordenador.

SUMMARY

In this paper a survey of the fundamental basis of the optimum structural design is presented. In the first part of the paper the different existing procedures to solve the problems together with the corresponding literature are cronologically presented. Finally, the fundamental terminology used in an optimum structural design problem is defined and some of the most popular methods to solve the problem by computer are described.

INTRODUCCION

Al hablar de diseño estructural óptimo nos referimos a un proceso que, a través de la mayor parte de la historia de su desarrollo, ha sido en su totalidad de carácter analítico. El objetivo a satisfacer por el diseño –minimizar el costo o minimizar el peso– está establecido en forma explícita. Los métodos modernos de diseño óptimo son suficientemente generales como para acomodar cualquier cantidad de hipótesis de carga y modalidades de colapso. El uso de gráficos generados por computador ha contribuido en este proceso, pero sólo en forma limitada. En vista de la popularidad del "Computer Aided Design" (CAD), es útil reflexionar sobre su relación con el diseño estructural óptimo.

El término "Computer aided design" o "Diseño asistido por computador" se refiere a un proceso en el que el analista trabaja en forma interactiva con el computador, explotando al máximo las unidades gráficas periféricas del mismo, para crear una configuración que satisfaga los requerimientos operacionales, estructurales y estéticos del diseño. Aún cuando puede existir el objetivo de obtener un diseño con peso mínimo, aquel no aparece expresado en forma explícita. Además, sólo tenemos a nuestra disposición procedimientos empíricos para tratar casos en que se especifica más de un estado de carga.

Para muchos, el tema de diseño estructural óptimo representa un terreno poco familiar. Nuestro objetivo, es por lo tanto, proveer información básica acerca del mismo. Empezaremos con una breve historia de su desarrollo, ilustraremos su uso por medio de un ejemplo y terminaremos con algunos comentarios acerca de la relación futura entre diseño ayudado por computador y diseño óptimo.

Recibido: Septiembre 1984

RESEÑA HISTORICA

En contraste con la tecnología de análisis estructural, como se presenta en análisis por elementos finitos a gran escala, o en diseño ayudado por computador, el diseño estructural óptimo, en general, no ha gozado hasta hoy de aceptación, aún cuando los conceptos y procedimientos modernos datan de 25 años atrás o más. Los motivos expresados a este respecto son numerosos. Uno de ellos es que al ingeniero práctico se le ha presentado una cantidad desorbitada de posibles técnicas. Muchas de ellas están basadas en conceptos matemáticos que al ingeniero no le son familiares. Los costos de cálculo son mucho más elevados que para un análisis corriente, y los programas disponibles y confiables son escasos. De hecho, el uso generalizado de programas de análisis por elementos finitos y de pre- y post-procesadores para CAD ha estimulado el uso de estas técnicas. No obstante, a pesar de lo mucho que se ha progresado, no hay un nivel de programas comparable para diseño estructural óptimo.

Se pueden identificar cuatro áreas principales independientes (y hasta cierto punto, etapas cronológicas), en el desarrollo del diseño estructural óptimo. Las caracterizaremos de la siguiente manera:

– Teoría de distribución
– Modalidades de colapso simultáneo
– Métodos de criterio de optimalidad
– Métodos de programación matemática.

La *teoría de distribución* busca la disposición de miembros estructurales uniaxiales que produce una estructura de volumen mínimo para un conjunto específico de cargas y de materiales. Los teoremas básicos en este método los estableció Maxwell[1] en 1854, pero el que amplió las ideas pertinentes y les dio la primera aplicación significativa fue Michell[2] en 1904. Estos teoremas, como se aplican sin limitaciones que den sentido a la forma geométrica de la estructura, no dan soluciones prácticas. Consideran una hipótesis de carga solamente y la estructura resultante puede ser inestable bajo otros tipos de cargas. Sin embargo, la teoría de distribución ha sido estudiada más recientemente por Cox[3] y Hemp[4] y algunos investigadores trabajan actualmente en desarrollar aún más estos conceptos.

El método de *modalidades de colapso simultáneo* (SMF), supone que se logra optimalidad si cada elemento componente de la estructura está en su límite de resistencia cuando la estructura completa está al borde del colapso. Para la clase de estructuras diseñadas por éste método los límites de resistencia generalmente están dados por condiciones de estabilidad elástica, en vez de los de resistencia del material. El término "simultáneo" también implica una sola hipótesis de carga, y esta condición es común a casi todo el trabajo que floreció durante los años 1940-1950. Estos esfuerzos, en los albores de la era del computador digital, se restringieron a formas estructurales simples y dependen de las ideas clásicas de minimización de funciones. Cox[3], Shamley[5], Gerald[6] fueron los investigadores más avanzados en esta área.

Si el concepto de modalidades de colapso simultáneo se extiende para admitir más de una hipótesis de carga, pero al mismo tiempo se restringe a limitaciones en resistencia basadas exclusivamente en esfuerzos, se obtiene el método de *diseño de carga completa* (fully stressed design) (FSD). En general, éste método consiste en aplicar análisis sucesivos bajo distintas hipótesis de carga, conduciendo a un diseño en el que a cada miembro se le somete al límite de carga en por lo menos una de las hipótesis de carga definidas. FSD produce lo que los diseñadores llaman tradicionalmente una estructura óptima. El autor ha proporcionado una recopilación de los conceptos, alcance y limitaciones de FSD en la referencia[7].

Los métodos de *criterio de optimalidad* aparecieron a fines de los años 1960 e incluyen el diseño de carga completa como caso especial. En su forma más general utilizan los procedimientos clásicos para determinar los valores extremos de una función de varias variables sujeta a condiciones restrictivas. El trabajo inicial en métodos de criterio de optimalidad se limitó a formas estructurales e hipótesis de carga simples. Sin embargo, en años más recientes ha sido generalizado, y ahora se usa junto con análisis por elementos finitos e hipótesis de carga múltiples. Una buena información sobre este tema puede encontrarse en las referencias[8,9]

Finalmente llegamos a procedimientos caracterizados como *formulaciones de programación matemática*. Para definirlos en forma concisa, podemos decir que buscan el mínimo o máximo de una función de varias variables sujeta a limitaciones (restricciones) expresadas por igualdades o desigualdades.

La representación de restricciones por desigualdades es de gran importancia, ya que permite identificar el diseño como aquél en el cual no todos los elementos están sujetos a condiciones límites bajo un sistema de cargas, evitando así una limitación inherente en algunos de los métodos anteriores. La orientación de las formulaciones de programación matemática es fácil de combinar con el uso de formulaciones de elementos finitos que contienen gran cantidad de incógnitas.

Debemos enfatizar que, en general, los procedimientos de programación matemática no están restringidos a ningún método de análisis en particular.

La programación matemática fue aplicada por primera vez en optimización estructural a fines de los años 1950. Entre las contribuciones iniciales destacan las de Livesley[10] y Pearson[11] que trataron el diseño límite como un problema de programación lineal, y Schmidt[12] quien describió el diseño elástico como un problema más general de programación no lineal.

Existen otros enfoques modernos de la optimización estructural que no se pueden clasificar dentro de las categorías mencionadas. Algunos de éstos se engloban en la teoría de control[13], mientras otros[14] tienen carácter especial y no se pueden clasificar en una disciplina matemática particular.

LITERATURA BASICA

Panorámicas sobre diseño estructural óptimo han sido escritas por Wasiutynski y Brandt[15] (en 1963), Prager y Sheu[16] (en 1968), Niordson y Pederson[17] (en 1973) y Schmidt[18] (en 1981). Recopilaciones más restringidas, con diferentes puntos de vista, han sido preparadas por Barnet[19], Rozvany y Mroz[20], Vanderplaats[21], Ashley[22], y Haftka y Prasad[23]. Pope y Schmidt[24] editaron una exposición básica sobre técnicas de diseño estructural óptimo. El libro editado por Morris[25] tiene un propósito similar. Un valioso compendio de información acerca de diseño estructural óptimo ha sido publicado por la ASCE[26]

Haug y Arora[27] escribieron un texto que enfasiza, tanto la programación matemática, como el punto de vista de control óptimo en diseño estructural óptimo. Los libros de Rao[28], Majid[29] y Kirsch[30] desarrollan el diseño estructural óptimo desde el punto de vista de procedimientos de programación matemática.

Hay una cantidad de publicaciones de conferencias y congresos en que teóricos y diseñadores estructurales han compilado estudios de optimización estructural.

Dos congresos AGARD sobre optimización estructural han sido publicados (Referencias[31,32]). Los trabajos de un congreso realizado en Swansea en enero de 1972, fueron editados por el autor y Zienkiewicz y publicados en forma de libro[36]. Este congreso consistió en una serie de lecciones impartidas por profesores invitados que detallaron y resumieron, en forma de texto, diferentes procedimientos de diseño estructural óptimo. Los trabajos presentados, y los resúmenes de las lecciones de un congreso posterior que tuvo lugar en 1981 han sido recogidos en la referencia[34]. Un libro, también el resultado de este último congreso[33], contiene las lecciones principales completas y versiones expandidas de una selección de los trabajos contribuidos.

DEFINICION DE TERMINOS

La optimización estructural busca seleccionar *variables de diseño* para alcanzar, dentro de los límites (restricciones) requeridos al comportamiento estructural, geometría y otros factores, el fin de la optimalidad definida por la *función objetivo* para las cargas o condiciones generales especificadas. Los tres aspectos básicos –variables de diseño, función objetivo y restricciones – se combinan para formar el problema de diseño en la geometría del *espacio de diseño*.

A continuación discutiremos por partes, cada uno de éstos aspectos del problema.

Variables de Diseño

Las *variables de diseño* en un problema de diseño estructural óptimo, pueden consistir en:

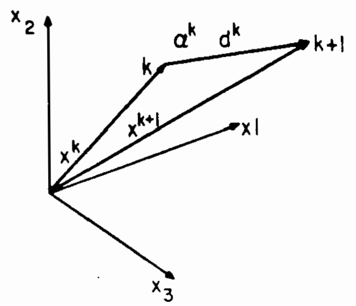
- Tamaño de los elementos
- Parámetros de configuración
- Parámetros de propiedades físicas o mecánicas
- Otros aspectos cuantificables del diseño.

La topología, que no se incluye en esta lista, es difícil de tener en cuenta, aunque se la considera en forma limitada cuando el algoritmo utilizado permite que los elementos adquieran tamaño cero. La transición de un tipo de comportamiento a otro (por ejemplo, de una barra (axial) a viga (flexión)) no es posible en el contexto de un proceso contínuo de diseño.

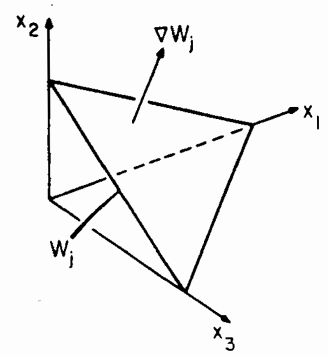
Existe una jerarquía, o un orden de complejidad, entre las distintas clases de variables de diseño. El tamaño de cada elemento es la variable de diseño más simple. Puede representar el área de la sección de una barra, el momento de inercia de un elemento en flexión, o el grosor de una placa. La mayoría de los trabajos publicados en diseño estructural óptimo se refieren exclusivamente a la determinación del tamaño de los elementos, dada la relativa simplicidad del problema, y porque muchas estructuras en la práctica tienen propiedades fijas de geometría y materiales.

La selección de materiales presenta un problema especial, ya que los materiales convencionales tienen propiedades discretas (los materiales compuestos presentan una excepción). Este problema también existe en la selección de los elementos estructurales, pero normalmente existe un rango considerable de secciones y tipos de donde elegir. Los métodos para la selección de variables discretas en diseño óptimo están aún en las primeras etapas de desarrollo. La mayoría de los algoritmos para diseño suponen que contamos con un rango contínuo de variables de diseño.

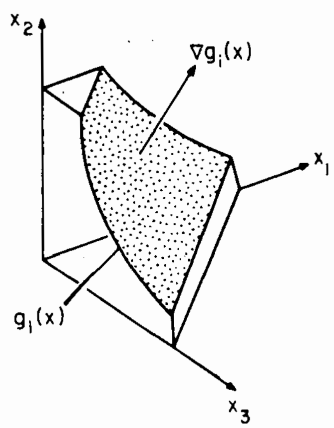
La i-ésima variable de diseño se designara por $x_i(i=1, 2...n)$. El conjunto completo de variables para una estructura dada se lista en el vector $\mathbf{x}$. Quizás el concepto más importante asociado con esta notación es el de *espacio de diseño*, descrito por ejes que representan las distintas variables de diseño. Para el sistema de tres barras de la Figura 2, la Figura 1(a) muestra un espacio de diseño de tres variables,



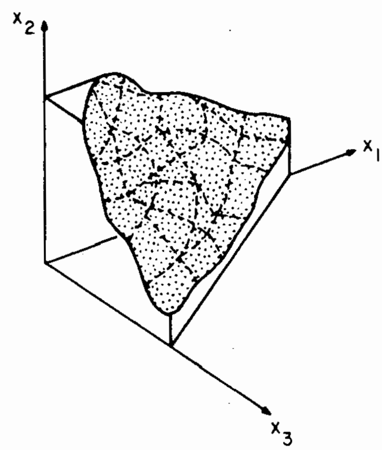
(a) Espacio de diseño



b) Superficie-función de coste



(c) Típicas restricciones laterales y de comportamiento



(d) Superficie de restricciones compuesta

Figura 1.— Espacio de diseño de tres variables.

y por lo tanto tri-dimensional. Por supuesto las variables de diseño son muchas más de tres en situaciones prácticas, y, por lo tanto, generalmente no pueden representarse en el espacio del diseño. Al espacio n-dimensional se le llama *hiperespacio*. Un punto k en diseño, es un diseño con variables $\mathbf{x}^k$.

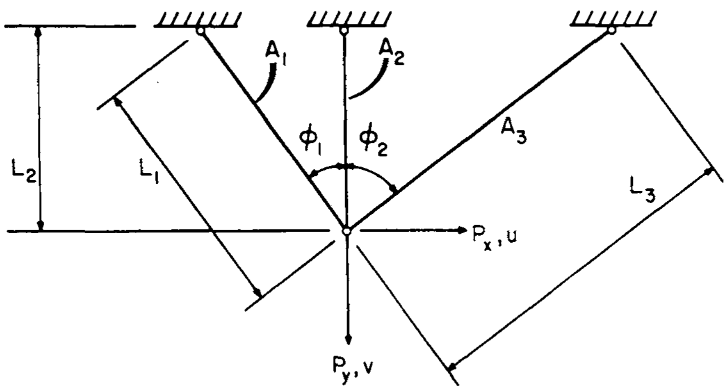


Figura 2.– Estructura de tres barras.

Muchos algoritmos de diseño emplean la estrategia de una *búsqueda directa*, en la que se dirige una serie de cambios en el diseño (movimientos) entre dos puntos sucesivos en el espacio de diseño. Un movimiento típico entre el punto k y el punto k+1 está dada por la ecuación

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{d}^k \tag{1}$$

El vector $\mathbf{d}^k$ (véase la Figura 1(a)) define la dirección del movimiento y α^k la amplitud. El proceso de diseño óptimo puede verse como el de escoger distintos valores para α y $\mathbf{d}$ de manera que un punto de diseño final se puede obtener en forma eficiente desde el punto de vista de cálculo.

Función Objetivo

La *función objetivo*, llamada también *función de coste* o *función de mérito*, es la función que buscamos minimizar (o maximizar) en un proceso de optimización, y constituye la base para seleccionar uno de entre los muchos diseños aceptables. La función objetivo es una función escalar de las variables de diseño, y la designaremos por $W(\mathbf{x})$. Representa la propiedad más importante de un diseño, como el coste o el peso, pero también es posible representar la función objetivo como una función de varias de las propiedades deseables.

Esta última línea, llamada *"diseño de funciones objetivo de criterio múltiple"* es el objeto de intenso trabajo de investigación en la actualidad. Existe también una gran cantidad de formulaciones alternativas, algunas han sido discutidas en las referencias[31] y [35].

El peso es la propiedad que se emplea en forma más frecuente como función objetivo (de ahí el símbolo W). Sin embargo, los procedimientos que describiremos a continuación no dependen del tipo concreto de la función objetivo. El peso es la medida significativa más fácil de cuantificar, y aunque el costo es de mayor importancia práctica, normalmente es difícil obtener suficientes datos para poder construir una función objetivo de costo.

La estructura de tres barras (Figura 2) proporciona un ejemplo simple de la función de peso. Denotando por ρ_i la densidad por unidad de volumen de la barra i, tenemos

$$W = \rho_1 L_1 A_1 + \rho_2 L_2 A_2 + \rho_3 L_3 A_3 \tag{2}$$

y para una estructura con n barras

$$W = \sum_{i=1}^{n} \rho_i L_i A_i \tag{3}$$

Como mencionamos antes, el tamaño de los elementos es generalmente la variable de diseño, y las densidades y la longitud son constantes prescritas. Por lo tanto, es conveniente escribir la ecuación (3) en la forma

$$W = \mathbf{LA} = \mathbf{Cx} \tag{4}$$

donde $\mathbf{L}$ es la matriz $[\rho L_1, \ldots, \rho L_n]$ y $\mathbf{A}$ es el vector columna que contiene las variables $A_1, A_2, \ldots A_n$, $\mathbf{C} = [C_1, C_2, \ldots C_n]$ contiene las propiedades geométricas y de materiales, que son constantes. Se ve claramente que la ecuación (4) es una función lineal de las variables de diseño x_i o A_i.

Es útil ilustrar la función objetivo lineal en el espacio de diseño (Figura 1(b)). Una función lineal en el espacio tri-dimensional es un plano, representado aquí como el lugar geométrico de aquellos puntos de diseño con un mismo valor W_j. En el espacio n-dimensional, la superficie que se define es un hiperplano. Cuando la función objetivo tiene variables de diseño no-lineales, en el espacio de diseño encontramos una hiper-superficie.

En el proceso de optimización del tamaño de los elementos se ha hecho cada vez más popular el uso del inverso del tamaño del elemento como la variable de diseño. Así pues, para una barra con sección de área A_i, el tamaño del elemento y la variable de diseño satisfacen la relación $x_i = 1/A_i$. La función objetivo toma la forma

$$W = \mathbf{C}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}} \tag{5}$$

donde $\mathbf{C}$ se define en la ecuación (4).

Un concepto importante, que se emplea continuamente en procesos de optimización, es el del *gradiente* de la función objetivo ∇W. El gradiente es un vector con componentes de las derivadas de W con respecto a cada una de las variables de diseño

$$\underset{\sim}{\nabla} W = \left[\frac{\partial W}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial W}{\partial x_n}\right]^T \tag{6}$$

Así, para la función objetivo lineal dada en la ecuación (4) tenemos

$$\underset{\sim}{\nabla} W = \mathbf{C} \tag{7}$$

Cuando la función es no-lineal, se puede derivar con respecto al vector $\mathbf{x}$ y calcular cada una de las derivadas en el punto en que se desea obtener el gradiente.

El gradiente representa un vector perpendicular a la función en cuestión en el punto en que se considera. La función lineal de peso (ecuación (4)) describe un plano, de manera que el gradiente de la función objetivo define la dirección de cambio en el diseño, o de avance, que es la dirección en que la función objetivo cambia más rápidamente para un valor dado de α. Así, para reducir la función objetivo tomamos la dirección opuesta al vector gradiente, $\mathbf{d}^k = -\nabla W^k$ y procediendo como en la ecuación (1) obtenemos la siguiente expresión para la búsqueda

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \alpha^k \underset{\sim}{\nabla} W^k \qquad (8)$$

Esta es la base del método de descenso máximo.

Restricciones

Una *restricción*, en cualquier clase de problema, es una limitación que debe satisfacerse para que el diseño sea aceptable. Puede tomar la forma de una limitación impuesta directamente en una variable o grupo de variables (restricción explícita), o puede representar una limitación sobre cantidades cuya dependencia con las variables de diseño no se puede establecer directamente (restricción implícita).

Una *restricción de igualdad*, que puede ser explícita o implícita, se designará por

$$b_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, e \qquad (9)$$

para e restricciones de igualdad. En teoría, cada restricción de igualdad provee una oportunidad para eliminar del proceso de optimización una de las variables de diseño, y así reducir el número de dimensiones del problema. Sin embargo el proceso de eliminación puede ser difícil y de álgebra complicada, por lo que no siempre se hace.

Una *restricción de desigualdad* es de la forma

$$g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots s \qquad (10)$$

cuando hay un total de s restricciones de desigualdad.

La idea de una restricción de desigualdad es de gran importancia en diseño estructural óptimo. Para alcanzar optimalidad es esencial permitir diseños en que no todas las restricciones se satisfacen directamente. Una división importante de las restricciones es la de *restricciones laterales* y *restricciones en comportamiento*. Una restricción lateral es una limitación específica (máximo o mínimo) en una variable de diseño, o una relación que fija el valor relativo de un grupo de variables de diseño. Generalmente son restricciones *explícitas*. Las deficiencias de muchos métodos clásicos de optimización estructural se deben a su incapacidad para tratar piezas de dimensiones mínimas.

Las restricciones en comportamiento en análisis estructural son generalmente limitaciones en los esfuerzos o en los desplazamientos, pero también pueden tomar la forma de restricciones en frecuencias de vibración o resistencia al colapso. En la práctica, encontramos restricciones implícitas y explícitas. Típicamente, las restricciones en comportamiento explícitas se dan por fórmulas provenientes de especificaciones del diseño. Sin embargo las restricciones en comportamiento generalmente son implícitas.

Cada condición que representa una restricción aparece en el espacio de diseño como una superficie, representando el lugar geométrico de los puntos de diseño para los que la restricción se satisface como igualdad. Para variables contínuas de diseño la superficie es en general contínua, y es curva para el diseño estructural clásico de una estructura indeterminada. La Figura 1.c muestra una restricción de comportamiento típica, en el espacio de diseño.

Formulación Matemática del Problema de Diseño Estructural Optimo

En términos algebráicos, el problema de diseño con peso mínimo representado en el espacio de diseño en la Figura 1.d es el siguiente:

Minimizar $W(\mathbf{x})$, que es una función objetivo de n variables de diseño sujeta a las restricciones

$$\mathbf{x} = [\, x_1, \ldots, x_n \,]^T,$$

$$b_i(\mathbf{x}) = 0, \qquad i = 1, \ldots e$$

$$g_j(\mathbf{x}) \leqslant 0, \qquad j = 1, \ldots s.$$

que representan e restricciones de igualdad y s restricciones de desigualdad en las variables de diseño. Si la función objetivo debe maximizarse, el problema es idéntico a si se busca minimizar $-W(\mathbf{x})$.

La representación geométrica del problema de diseño se muestra en la Figura 3

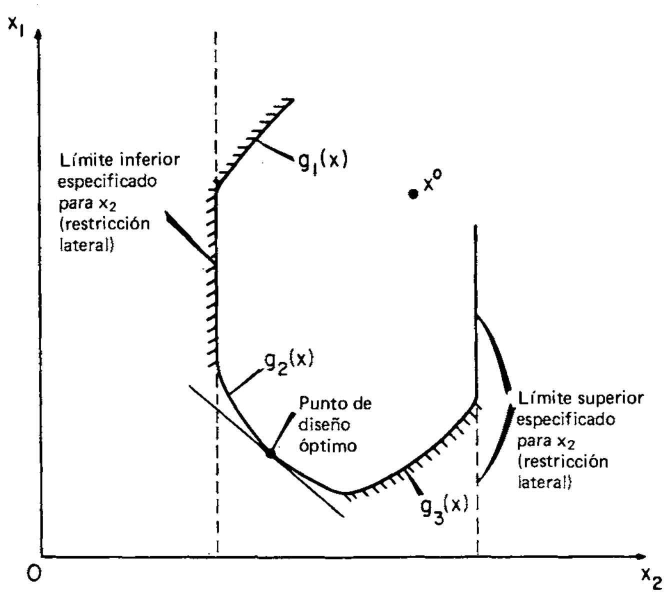


Figura 3.- Espacio de diseño de dos variables.

en términos de sólo dos variables de diseño para mayor simplicidad. Se pueden especificar límites superiores e inferiores para la amplitud de cada esfuerzo o desplazamiento y para cada condición de carga, de manera que tenemos presente una gran cantidad de superficies de restricción. Estas superficies se entrelazan de una manera complicada. Las restricciones forman una *superficie de restricciones compuesta* (que se muestra también en la Figura 1.d) en que cada "parche" representa un segmento de una superficie de restricción individual. Las restricciones laterales mencionadas antes aparecen como planos paralelos a los ejes de coordenadas cuando se refieren a valores mínimos o máximos de las variables de diseño.

Si un punto de diseño está en el espacio sobre la superficie compuesta de restricciones, está en el *espacio libre* y se llama un *diseño posible* o punto *exterior.* Al revés, un punto de diseño que no satisface las restricciones se llama *inadecuado* o *interior.* La habilidad para escoger un punto de diseño consiste en encontrar un punto sobre la intersección de las superficies de peso y de restricciones. El diseñador primero tiene que estimar un conjunto de variables de diseño $\mathbf{x}^{o}$. El objetivo del proceso de cálculo es entonces desplazarse, con el mínimo esfuerzo de cálculo, desde este punto inicial al punto $\mathbf{x}^{k}$ de diseño óptimo.

La ilustración de otro diseño bidimensional representativo (Figura 4) nos permite describir uno de los mayores peligros en la aplicación de los métodos de programación matemática, la incapacidad para distinguir entre un mínimo *local* y un mínimo *global.* Si por ejemplo, el procedimiento nos lleva del punto A al punto B, un exámen analítico aplicado al punto B indicará que no es posible avanzar más sin violar las restricciones. Hemos encontrado un mínimo *local.* Sin embargo el mínimo absoluto o *global* está en el punto C. Un mínimo local es también global cuando la superficie de restricciones es convexa, pero desafortunadamente, las superficies de restricción en diseño estructural raramente lo son.

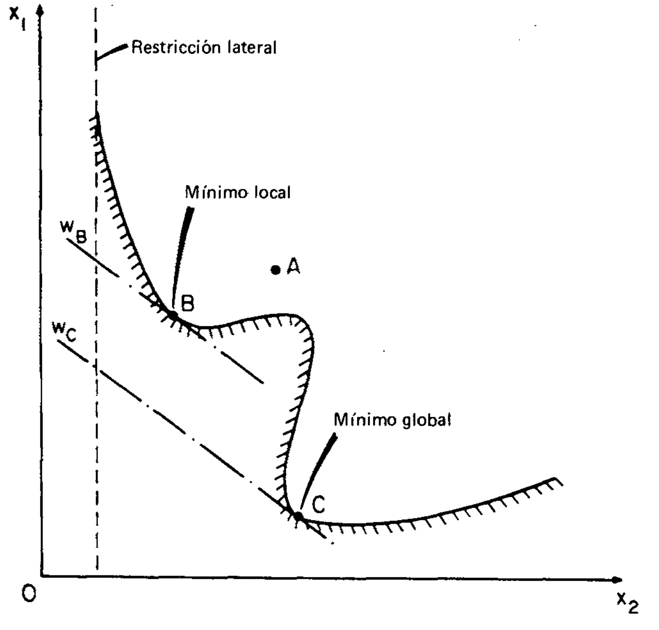


Figura 4.– Puntos óptimos locales y globales.

PROCEDIMIENTOS PARA IMPLEMENTACION EN EL COMPUTADOR

Entre los métodos de diseño estructural óptimo mencionados, los de *criterios de optimalidad* y de *programación matemática* son los que ofrecen un futuro más prometedor en la era del computador debido a su generalidad.

Métodos de Criterio de Optimalidad

Los procedimientos de criterio de optimalidad pretendían originalmente producir una relación de recurrencia simple para el cálculo iterativo de las variables de diseño. Hoy en día han progresado mucho más allá. Para explicar las ideas básicas, tomamos la función objetivo lineal dada por la ecuación (4), y condiciones de restricción de la forma de la ecuación (9), escrita como

$$g_j(\mathbf{x}) = B_j(x_i) - B_j = \mathbf{0} \tag{11}$$

donde $B_j(x_i)$ es el valor real de la restricción j y B_j es un valor aceptable. Para tratar las restricciones usamos el método de multiplicadores de Lagrange.

En este enfoque, para cada restricción activa se define un multiplicador de Lagrange λ_i, $j = 1, \ldots, p$. Formamos el producto de λ_j con su correspondiente función de restricción $g_j(\mathbf{x}) = 0$ y *se suma a W para dar una función objetivo aumentada* $\hat{W}$.

$$\hat{\mathbf{W}} = W + \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) + \ldots + \lambda_p g_p(\mathbf{x}) \tag{12}$$

Ahora tenemos una función de los parámetros $\mathbf{x}$ y $\underset{\sim}{\lambda} = [\lambda_1, \ldots, \lambda_p]^T$. El punto estacionario de la función aumentada es el punto estacionario de la función objetivo restringida y se puede obtener derivando con respecto a las variables x_i y λ_i, e igualando el resultado a cero. Obtenemos un conjunto de ecuaciones del tipo

$$\underset{\sim}{\nabla} \hat{W} = \left[\frac{\partial W}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial W}{\partial x_n} \;\middle|\; \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial W}{\partial \lambda_p} \right]^T = \mathbf{0} \tag{13}$$

La solución de estas ecuaciones da el punto extremo deseado. (Es preciso observar aquí que la ecuación (13) es la base para la *condición de optimalidad de Kuhn-Tucker*, que es una condición necesaria para un punto óptimo local.)

Para una estructura de barras, en que $A_i = x_i$ y A_i es la sección de la barra i, el método de multiplicadores de Lagrange da la siguiente función objetivo aumentada

$$\hat{W}(A_i, \lambda_j) = \Sigma \rho_i L_i A_i + \sum_{j=1}^{P} \lambda_i g_j(\mathbf{A}) \tag{14}$$

Para un mínimo restringido localmente tenemos

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial A_i} = 0 = \rho_i L_i + \sum_{j=1}^{P} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial A_i} \tag{15}$$

que es un criterio de optimalidad.

Tomemos el caso de restricciones en los desplazamientos. Aquí el desplazamiento se puede escribir como $B_j(A_i) = f_{ij}/A_i$, donde f_{ij} es el coeficiente de flexibilidad. En particular, para estructuras de barras, se transforma en $B_j(A_i) = F_i F_{ij} L_i / E_i A_i$ donde F_i es la fuerza en la barra i debida a las cargas aplicadas y F_{ij} es la fuerza debida a la carga virtual asociada con el desplazamiento restringido. E_i es el módulo de elasticidad. Sustituyendo en la ecuación (15) tenemos

$$A_i^2 = \sum_{j=1}^{p} \lambda_i f_{ij}/\rho_i L_i \quad (i = 1, \ldots n) \tag{16}$$

donde f_{ij} es el coeficiente de flexibilidad. Esta ecuación se suplementa con la restricción dada por la ecuación (11).

Los coeficientes de flexibilidad f_{ij}, son funciones de las variables de diseño A_i. Así, estimando los multiplicadores de Lagrange, la ecuación (16) se puede resolver para las áreas, que luego se usan para obtener estimaciones mejores de los multiplicadores de Lagrange, y así sucesivamente. Cuando hay una sola restricción el multiplicador de Lagrange se puede eliminar del problema, dando una relación de recurrencia explícita para A_i.

Por desgracia, generalmente no se sabe qué restricciones serán activas en el punto de diseño, al empezar el análisis de diseño. También hay dificultades asociadas con aquellos elementos cuyo diseño está controlado por tamaños mínimos o máximos. El desarrollo de Fleury[40], que estableció una formulación "dual" del problema de diseño óptimo ha ayudado a resolver la primera de estas dificultades.

Métodos de Programación Matemática

El campo de programación matemática es rico en técnicas para la solución de problemas de diseño estructural óptimo, y virtualmente todas estas técnicas se han aplicado en problemas de optimización estructural.

La programación lineal, que requiere una función objetivo lineal y restricciones lineales, fue la primera técnica de programación matemática, y, como era de esperar, fue una de las primeras que se aplicó a problemas de optimización estructural.

El problema elástico de optimización estructural es intrínsecamente no-lineal en las condiciones restrictivas. La función objetivo puede ser también no-lineal en las variables de diseño. El uso de programación lineal requiere una linearización de estas expresiones, generalmente usando series de Taylor, y la aplicación iterativa del algoritmo de programación lineal. (Debemos hacer notar sin embargo, que el diseño estructural plástico está gobernado por relaciones lineales y la programación lineal se puede aplicar directamente para producir una solución óptima).

Debido a la no-linealidad del problema elástico de optimización estructural, naturalmente los métodos de programación no-lineal han encontrado su lugar. Hay muchos de éstos métodos; cabe destacar las técnicas de Proyección del Gradiente y las de Sucesión de Minimizaciones sin Restricción (SUMT), debido al grado de utilización que han alcanzado. Se han realizado también estudios extensos acerca de los méritos relativos y la eficiencia de estos métodos. Una relación acerca de este trabajo, con mucha información nueva y recomendaciones para el uso de varios métodos se encuentra en Ragsdell[41].

El motivo por el que los métodos de programación matemática no han logrado la utilización que se esperaba de ellos es que el costo computacional es muy elevado si se los aplica a modelos de elementos finitos. Por lo tanto, en los últimos años la investigación se ha concentrado en problemas de eficiencia tales como vinculación de variables de diseño, condensación del problema de análisis antes de entrar al ciclo de optimización y eliminación de restricciones inactivas o redundantes. Estas estrategias están descritas en Schmidt y Miura[37]. También se ha logrado mayor eficiencia en los algoritmos de diseño y en la estrategia global de programación.

Otra dirección en diseño estructural óptimo por medio de la programación matemática es a través de transformaciones que produzcan un problema más simple. El punto de vista de la *programación geométrica* es representativo de este tipo de trabajo. El concepto clásico de la programación geométrica es, desgraciadamente, muy limitado en cuanto al tipo de problemas y el número de variables que se puede considerar.

OPTIMIZACION DE FORMA

Nuestra discusión sobre optimización estructural ha estado basada en clasificar tipos y métodos. Dado un método en particular, por ejemplo, un método de criterio de optimalidad, es posible clasificar aún más el problema de diseño como aquel que trata de, o seleccionar el tamaño de los miembros, o bien de optimizar la forma de la estructura. En general, el segundo problema es más difícil porque la optimización de la forma usa como incógnitas las coordenadas de la superficie de la estructura que se está optimizando, y la formulación en términos de estas incógnitas es sumamente no-lineal. La reseña de Vanderplaats[42] demuestra que se han hecho progresos considerables en optimización de formas.

La Figura 5 muestra un problema de optimización de forma resuelto por Wang, Sun y este autor[43]. El problema se refiere a la sección plana de un arco de presa bajo cargas uniformes. La forma inicial está acotada por líneas rectas. La idealización por elementos finitos consiste en 14 elementos isoparamétricos de ocho nodos.

El método adoptado aquí para la optimización de forma usa programación lineal sucesiva (referencia[44]) y algunos procedimientos nuevos concebidos para hacer más eficiente el análisis de diseño. Cabe destacar el uso de un número limitado de "nodos principales" para caracterizar superficies descritas por elementos isoparamétricos. Los nodos principales se emplean como las variables del proceso de diseño óptimo.

El enfoque de este problema se presta para el uso en CAD. La representación se facilita con el uso de gráficos por computador. Supuestamente se puede usar un proceso interactivo que permita al diseñador crear un diseño final óptimo. En la Figura 5 el diseño óptimo que se muestra no fue obtenido por CAD sino por medio de programación matemática. Es posible que el diseño obtenido por medio de un proceso gráfico interactivo de CAD fuera el mismo.

Este problema consideró sólo una condición de carga. Si hubiera más de una, no se puede concebir que el proceso de CAD nos pueda dar la misma forma y un diseño de peso mínimo. Por otro lado, si CAD y el método de diseño óptimo se combinaran, aparentemente podemos lograr mayor eficiencia en el proceso de diseño.

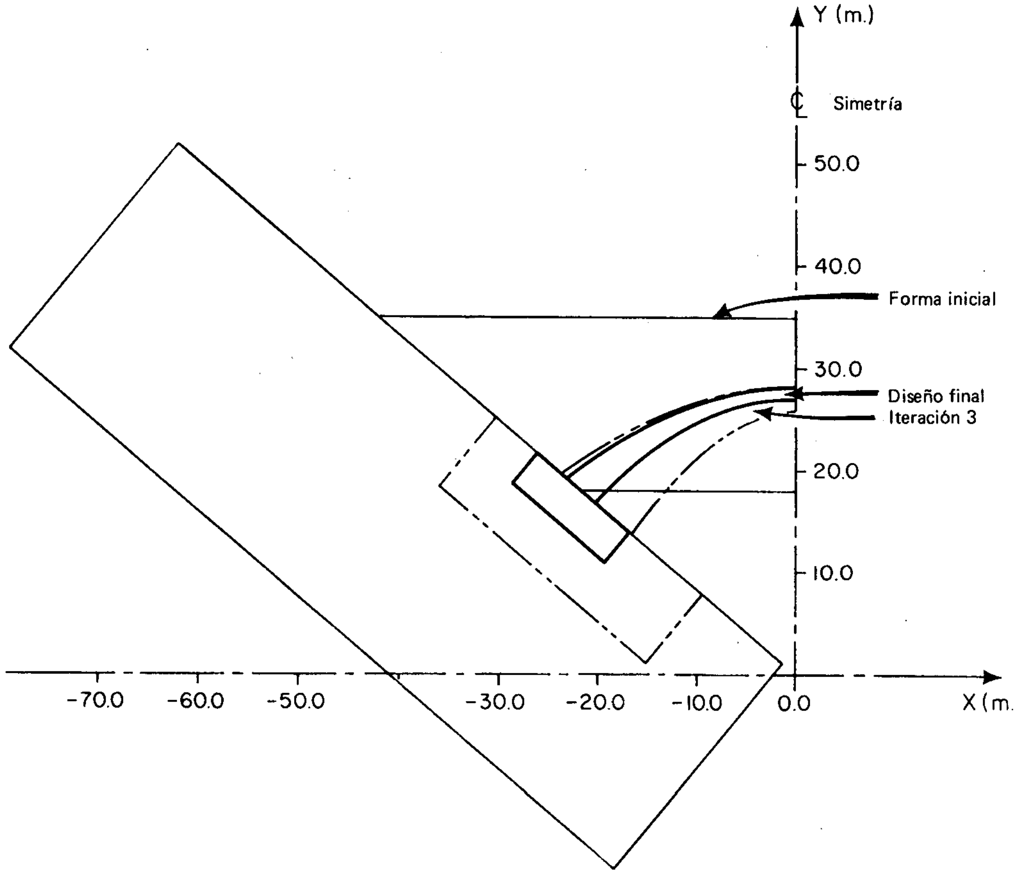


Figura 5.– Diseño óptimo de una presa en arco.

COMENTARIOS FINALES

Veinticinco años después de que apareció el diseño estructural óptimo moderno computarizado, la utilización generalizada que se le había predicho no se ha materializado. Quizás podemos esperarlo ahora. Ha quedado claro que la clave en el avance de esta metodología está en la disponibilidad de programas fiables y de utilidad general. El progreso en esta dirección ha sido grande, en parte, por avances en la tecnología de ordenadores, que ha reducido el costo unitario de cálculo, por refinamientos en los mismos métodos de optimización, y por medio de identificar los métodos más efectivos de entre los muchos que se han propuesto.

Es muy importante el hecho de que algunos individuos y grupos han tomado la iniciativa de desarrollar programas para optimización "partiendo desde abajo", o de integrar programas de elementos finitos que gozan de popularidad con procedimientos de optimización. Ejemplos de lo anterior son los programas ACCESS-III[45], SAMCEF[46], PROSS[47] y STARS[48]. Estos programas emplean capacidades gráficas hasta cierto punto. Una integración más completa de diseño estructural optimo, análisis por elementos finitos y gráficos por computadores, se encuentra en el programa OPINSR[49].

Se podrían citar muchos otros ejemplos de programas para diseño estructural óptimo. La pregunta de cuál logrará utilización general en la práctica, se decidirá por su robustez, confiabilidad, facilidad de uso y otros muchos factores que determinan el éxito en el mercado. Tomando como referencia la historia de aceptación de programas de análisis por elementos finitos, el proceso llevará de cinco a diez años.

Hemos aludido a la integración de métodos de diseño óptimo, CAD y análisis por elementos finitos. CAM (Computer Aided Manufacturing) se puede agregar también a la lista. No está claro que la "integración" significará que CAD tenga un papel especial a que jugar en el proceso de diseño óptimo o si simplemente significará que las tecnologías componentes deban conectarse una a otra. Por ejemplo, con respecto a lo primero, una posibilidad es emplear gráficos para retratar el espacio de diseño y ayudar en la investigación. La idea no es nueva, pero obviamente está limitada a problemas con pocas incógnitas, lo que no es práctico. Sin embargo, la naturaleza de la investigación es el descubrir posibilidades que no se habían previsto antes. Ciertamente, de cualquier manera que estas tecnologías se integren, habrá un progreso implacable dirigido al diseño más eficiente de estructuras óptimas.

REFERENCIAS

1. J. C. Maxwell, *Scientific Papers*, Vol. 2, p. 175 (1869).
2. A. G. M. Michell, "The Limits of Economy of Material in Framed Structures", *Phil. Mag. (Series 6)*, 8, 589-597 (1904).
3. H. Cox, *The Design of Structures of Least Weight*, Pergamon, Oxford, (1965).
4. W. Hemp, *Optimum Structures*, Clarendon Press, Oxford, (1973).
5. F. R. Shanley, *Weight Strength Analysis of Aircraft Structures* McGraw-Hill Book Co., N.Y. (1952).
6. G. Gerard, *Minimum Weight Analysis of Compressive Structures* New York University Press, N.Y. (1956).
7. R. H. Gallagher, "Fully Stressed Design", Ch. 2 of *Optimum Structural Design*, R. H. Gallagher and O. C. Zienkiewicz, Eds. J. Wiley Book Co., London, (1973).
8. N. S. Khot y L. Berke, "Structural Optimization Using Optimality Criteria Methods" en *New Directions in Optimum Structural Design*, E. Atrek, et al, Eds. J. Wiley Book Co., London, (1984).
9. Anón., Optimality Criterion Methods in Structural Optimization in *Foundations of Structural Optimization: A Unified Approach* A. J. Morris, Editor. J. Wiley Book Co., N.Y. (1982).
10. R. K. Livesley, "The Automatic Design of Structural Frames", *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 9, Part 3 (1956).
11. C. Pearson, "Structural Design by High-Speed Computing Machines", *Proc. of ASCE Conf. on Electronic Computation*, Kansas City, MO. (1958).
12. L. Schmit, "Structural Design by Systematic Synthesis", *Proc. of ASCE 2nd Conf. on Electronic Computation*, Pittsburgh, PA. (1960).
13. J. L. Armand, K. A. Lurie y A.V. Cherkaev, "Optimal Control Theory and Structural Design" en *New Directions in Optimum Structural Design*, E. Atrek, et al, Eds. J. Wiley Book Co, London, (1984).
14. G. I. N. Rozvany, *Optimal Design of Flexural Systems*, Pergamon Press, Oxford, (1976).
15. E. Wasiutynski y A. Brandt, "The Present State of Knowledge in the Field of Optimum Design of Structures", *Applied Mechanics Reviews, Mayo, (1963)*.
16. W. Prager y C. Sheu, "Recent Development in Optimal Structural Design", *Applied Mechanics Reviews*, Octubre, (1968).

17. F. I. Niordson y P. Pedersen, "A Review of Optimal Structural Design" en *Proc. of the Thirteenth Int. Congress of Theor. and Applied Mech., Moscow, 1972.* Publ. by Springer-Verlag, Berlín, (1973).
18. L. A. Schmit, "Structural Optimization, Some Key Ideas and Insights" en *New Directions in Optimum Structural Design,* E. Atrek, et al., Eds. J. Wiley Book Co., London, (1984).
19. R. Barnett, "Survey of Optimum Structural Design", *Experimental Mechanics,* 6, No. 12, Diciembre, (1966).
20. G. I. N. Rozvany y Z. Mroz, "Analytical Methods in Structural Optimization", Applied Mechanics Reviews, V. 30, No. 11, pp. 1461-1470, Nov. (1977).
21. G. N. Vanderplaats, "Structural Optimization, Past, Present and Future" AIAA J., V. 20, No. 7, pp. 992-1000, Julio (1982).
22. H. Ashley, "On Making Things Best - Aeronautical Uses of Optimization" *J. Aircraft,* V. 19, No. 1, Enero, (1982).
23. R. T. Hafka y B. Prasad, "Optimum Structural Design with Plate Bending Elements - A Survey" AIAA J., V. 19, No. 4, pp. 517-522, Abril (1981).
24. G. G. Pope y L. A. Schmit (Eds.), *Structural Design Applications of Mathematical Programming Techniques,* AGARDograph 149, 2nd ed., Advisory Group of Aero. Res. and Devel., NATO, Febrero (1972).
25. A. J. Morris (Ed.), *Foundations of Structural Optimization: A Unified Approach.* J. Wiley Book Co., Londres (1982).
26. O. Lev (Ed.), "Structural Optimization: Recent Developments and Applications", ASCE Special Publication, N.Y., (1981).
27. E. Haug y J. S. Arora, *Applied Optimal Design,* J. Wiley Book Co., N.Y., (1979).
28. S. S. Rao, *Optimization: Theory and Applications,* Wiley Eastern Ltd., New Delhi, (1978).
29. K. Majid, *Optimum Design of Structures,* Newnes-Butterworths, Londres, (1974).
30. U. Kirsch, "Optimum Structural Design", McGraw-Hill, N.Y.
31. R. A. Gellatly (Ed.), *Symposium on Structural Optimization,* AGARD Conf. Proc. No. 36, Advisory Group for Aero. Res. and Devel., NATO, Octubre, (1970).
32. R. A. Gellatly (Ed.), *Second Symposium on Structural Optimization,* AGARD Conf. Proc. 123, Abril, (1973).
33. E. Atrek et al. (Eds.) *New Directions in Optimum Structural Design,* J. Wiley Book Co., Londres, (1984).
34. *Proc. Int. Symp. on Optimum Structural Design,* Univ. of Arizona, Tucson, AZ, Octubre, (1981).
35. R. W. Mayne y K. M. Ragsdell, "Progress in Engineering Optimization - 1981", ASME Special Publication, N.Y., (1981).
36. R. H. Gallaguer y O. C. Zienkiewicz, *Optimum Structural Design,* J. Wiley Book. Co., Londres, (1973).
37. H. Miura y L. A. Schmit, "Second Order Approximation of Natural Frequency Constraints in Structural Synthesis" Int. J. Num. Meth. Engrg. V. 13, No. 2, pp. 337-352, (1974).
38. V. B. Venkayya, "Structural Optimization: A Review and Some Recommendations", *Int. J. Num. Methods Engrg.,* V. 13, No. 2, pp. 203-228, (1978).
39. E. J. Haug y J. Cea, *Optimization of Distributed Parameter Structures.* Sijthoff and Noordhoff, Países Bajos, (1981).
40. C. Fleury, "A Unified Approach to Structural Weight Minimization", Comp. Methods in Applied Mechanics and Engrg., V. 20, No. 1, pp. 17-38, (1979).
41. K. Ragsdell, "The Utility of Nonlinear Programming Methods for Engineering Design" en *New Directions in Optimum Structural Design* E. Atrek, et al., Editors. J. Wiley Book Co., (1984).
42. G. Vanderplaats, "Shape Optimization of Continuum Structures" en *New Directions in Optimum Structural Design,* E. Atrek, et al., Editors. J. Wiley Book Co., N.Y. (1984).
43. S. Y. Wang, Y. Sun y R. H. Gallagher, "Sensitivity Analysis in Shape Optimization of Continuum Structures" *Computers and Structures.* (To Appear).

44. S. Bhakrivatti y C. Ramakrishnan, "Computational Efficiency of Improved Move Limit Method of Sequential Linear Programming for Structural Optimization" *Comp. and Struct.* V. 11, pp. 191-196 (1980).
45. C. Fleury, R. Ramanathan, M. Salama y L. A. Schmit, *ACCESS Computer Program for the Synthesis of Large Structural Systems in New Directions in Optimum Structural Design*, E. Atrek, et al., Editors. J. Wiley Book Co., (1984).
46. C. Fleury, "Large Scale Structural Optimization by Finite Elements" en *New Directions in Optimum Structural Design*, E. Atrek, et al., Editors, J. Wiley Book Co., (1984).
47. J. Sobieszczansky-Sobieski y J. L. Rogers, "A Programming System for Research and Applications in Structural Optimization" *New Directions in Optimum Structural Design*, E. Atrek, et al., Editors. J. Wiley Book Co., (1984).
48. P. Bartholomew y A. J. Morris, "STARS-A Software Package for Structural Optimization" en *New Directions in Optimum Structural Design*, E. Atrek, et al., Editors. J. Wiley Book Co., (1984).
49. M. Bhatt, V. Ciampi, K. Pister y E. Polak, "An Iteractive Software System for Optimal Design of Dynamically Loaded Structures with Nonlinear Response" *New Directions in Optimum Structural Design*, E. Atrek, et al., Editors. J. Wiley Book Co., (1984).