

Métodos multigrid para a simulação por elementos finitos de escoamentos imiscíveis em meios porosos

Arlenes S. Silva e Alvaro L.G.A. Coutinho

Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Caixa Postal 68506
21945-970 Rio de Janeiro, Brasil
Tel.: 55-21-580 9993 , Fax: 55-21-280 9545
e-mail: alvaro@coc.ufrj.br
<http://www.coc.ufrj.br/~alvaro>

Ian D. Parsons

Dept. of Civil and Environmental Engineering
University of Illinois at Urbana-Champaign
Urbana, IL 61801-2352, USA

Sumário

Estudamos a eficiência do método multigrid para resolver o sistema de equações lineares que surge da discretização por elementos finitos da equação da pressão em escoamentos de fluidos imiscíveis bi-fásicos em meios porosos. Empregamos uma formulação de Galerkin para a equação da pressão. Já a equação da saturação é aproximada no espaço usando-se a formulação de elementos finitos de Petrov-Galerkin com operador de captura de descontinuidade. Para melhorar a qualidade do gradiente de pressão usado para o cálculo das velocidades, utilizamos uma técnica de pós-processamento. O sistema acoplado semi-discreto de equações para pressão, velocidades e saturação é resolvido através de um algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor onde a equação da saturação é tratada de forma implícita/explicita. Exemplos numéricos são apresentados para mostrar a eficiência e precisão do método.

Palavras chave:

Multigrid, elementos finitos, escoamentos imiscíveis, meios porosos

MULTIGRID METHODS FOR FINITE ELEMENT SIMULATION OF IMMISCIBLE FLOW IN POROUS MEDIA

Summary

We study the performance of multigrid and adaptive-implicit methods in the finite element simulation of immiscible two phase flow in porous media considering gravity effects. We employ a Galerkin finite element method for pressure, where the resulting system of equations is solved by a multigrid method. In order to improve the quality of the pressure gradients used to compute the total velocities we use here a post-processing approach. The saturation equation is approximated in space by the SUPG Finite Element formulation with a discontinuity-capturing operator. The resulting semi-discrete equations are solved by a block-iterative predictor-multicorrector algorithm, where the saturation equation is treated by an adaptive-implicit/explicit method able to follow the advance of the sharp saturation fronts. Several numerical experiments are performed to show that the combination of multigrid and adaptive-implicit/explicit methods yields a fast and accurate solution.

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos métodos multi-malhas (ou multigrid) tem sido largamente estudados. Experimentos numéricos mostram que estes métodos são muito eficientes e podem ser aplicados com sucesso a uma ampla classe de problemas de computação científica, veja por exemplo a referência¹. A bibliografia sobre o assunto mostra que o método é bastante geral e sua eficiência não se prende ao tipo da malha utilizado, podendo estas serem estruturadas ou não estruturadas, do método de discretização empregado, isto é, elementos finitos, diferenças finitas, volumes finitos, ou ainda se o sistema de equações resultante da discretização é simétrico ou não simétrico^{1,7}. Embora os métodos multigrid sejam geralmente apresentados com malhas estruturadas, sua aplicação em malhas não estruturadas é bastante utilizada em problemas de engenharia, pois este tipo de malha se adapta melhor a geometrias complexas, como mostrado, por exemplo, em^{11,13}.

No presente trabalho avaliamos um solucionador multigrid para resolver o sistema de equações lineares que surge da discretização por elementos finitos da equação da pressão que compõe o modelo matemático para o escoamento de fluidos imiscíveis incompressíveis em meios porosos. Utilizamos uma malha de elementos triangulares lineares com refinamento uniforme. Parsons e Coutinho¹¹ estudaram o comportamento do método multigrid para esta classe de problemas, propondo um operador de transferência de malha que leva em conta a presença das heterogeneidades, obtendo resultados bastante satisfatórios quando comparados com solucionadores tipo gradiente conjugado pré-condicionado. Porém, neste trabalho, os efeitos da gravidade não foram considerados. Estudos nessa área também foram realizados por outros autores, por exemplo, Hornung e Trangenstein⁷, onde uma técnica de refinamento adaptativo de malha é incorporada ao método multigrid para resolver a equação da pressão. Aqui, procuramos estender os resultados obtidos por Parsons e Coutinho¹¹, incorporando os efeitos da gravidade, e um esquema de integração no tempo para a equação da saturação com implicitude variável, de forma a tentar obter uma redução do esforço computacional necessário para a solução destes problemas.

À seguir, apresentamos o modelo matemático para o escoamento de dois fluidos incompressíveis imiscíveis em um meio poroso rígido. A formulação variacional para este modelo é descrita na terceira seção. Na seção que se segue o método de integração no tempo que empregamos é revisto. Na quinta seção apresentamos de forma breve o método multigrid e, à seguir, na sexta seção os resultados numéricos obtidos para problemas com e sem a consideração da gravidade. A última seção é dedicada às nossas conclusões.

MODELO MATEMÁTICO PARA ESCOAMENTOS IMISCÍVEIS EM MEIOS POROSOS

O deslocamento simultâneo de dois fluidos imiscíveis em um meio poroso rígido, levando-se em conta os efeitos da gravidade, no domínio $\Omega \subset \mathcal{R}^2$, em $t \in [0, T]$, é descrito utilizando-se a lei de Darcy e a equação da conservação de massa para cada fase. Sendo a saturação de uma fase definida como a fração do meio poroso ocupada por esta fase, temos que

$$s_o + s_w = 1 \quad (1)$$

onde os subscritos o e w referem-se respectivamente as fases óleo e água. Assim s_o e s_w representam a saturação das fases. Assumindo-se válida a lei de Darcy para cada fase, a velocidade superficial do fluido em cada fase pode ser escrita como

$$\nu_i = -\lambda_i \mathbf{k}(\nabla p_i - \rho_i g \nabla z), \quad i = o, w \quad (2)$$

sendo

$$\lambda_i = \frac{k_{ri}}{\mu_i} \quad (3)$$

Nas equações acima λ_i são as mobilidades das fases óleo e água, \mathbf{k} é o tensor de permeabilidade absoluta da rocha e k_{ri} são as permeabilidades relativas das fases, μ_i , p_i e ρ_i representam respectivamente a viscosidade, pressão e densidade de cada fase. A força da gravidade é representada por g e ∇z é uma função vetorial que aponta na direção em que g atua. As funções k_{ri} dependem somente da saturação da água e introduzem não linearidade no fluxo dos fluidos, isto é

$$k_{ri} = k_{ri}(s_w) \quad (4)$$

As equações de conservação de massa para cada fase são

$$-\nabla(\rho_i \nu_i) + q_i = \frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_i s_i), \quad i = o, w \quad (5)$$

onde ϕ é a porosidade do meio e q_i é a vazão volumétrica de cada fase. A diferença entre as pressões dos dois fluidos é a pressão de capilaridade p_c , que depende apenas da saturação da água, isto é

$$p_c = p_n - p_w = p_c(s_w) \quad (6)$$

Estas equações podem ser combinadas, conforme Peaceman¹², produzindo um sistema de equações diferenciais parciais que, para fluidos incompressíveis é dado por

$$-\nabla \nu_t + Q_t = 0 \quad (7)$$

$$\nu_t = -A(s_w, \mathbf{x}) \nabla p - A_w(s_w, \mathbf{x}) p'_c \nabla s_w + \mathbf{k}(\lambda_o \rho_o + \lambda_w \rho_w) \mathbf{g} \quad (8)$$

$$\phi \frac{\partial s_w}{\partial t} + [f'_w \nu_t + g'_w(\mathbf{k} \mathbf{g})] \nabla s_w + \nabla [D_t(s_w, \mathbf{x}) \nabla s_w] = 0 \quad (9)$$

A equação (8) representa a velocidade superficial total para os fluidos, isto é, $\nu_t = \nu_w + \nu_o$. Ao substituir ν_t em (7), obtemos a equação da pressão, descrevendo sua variação com o tempo t e posição \mathbf{x} . Nas equações acima a vazão volumétrica total é $Q_t = q_o + q_w$ e o vetor $\mathbf{g} = g \nabla z$. Geralmente impõe-se para o campo de pressões a normalização

$$\int_{\Omega} p(x, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad (10)$$

A equação (9) é a equação da saturação da água que descreve sua variação com o tempo e posição. Define-se ainda, a função de fluxo fracionário da água e sua derivada com respeito à saturação da água por

$$f_w = \frac{\frac{k_{rw}}{\mu_w}}{\frac{k_{rw}}{\mu_w} + \frac{k_{ro}}{\mu_o}} \quad (11)$$

$$f'_w = \frac{df_w}{ds_w} \quad (12)$$

Além disso, a função g'_w é dada por

$$g'_w = (\rho_w - \rho_o)[f'_w \lambda_o + f_w \lambda'_o] \quad (13)$$

e os tensores presentes nas eqs. (8) e (9) são respectivamente

$$A_t(s_w, \mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x})(\lambda_w + \lambda_o) \quad (14)$$

$$A_w(s_w, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{k}(\mathbf{x})(\lambda_o - \lambda_w) \quad (15)$$

$$D_t(s_w, \mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}) \frac{\lambda_w \lambda_o}{\lambda_w + \lambda_o} p'_c \quad (16)$$

À equação diferencial parcial (7) associamos as condições de contorno

$$\nu_t \mathbf{n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T] \quad (17)$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal unitário à Ω . Para a equação da saturação as condições de contorno e a condição inicial são dadas por

$$D_t(s_w, \mathbf{x}) \nabla s_w \mathbf{n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T] \quad (18)$$

$$s_w(\mathbf{x}, 0) = s_0(\mathbf{x}) \quad \text{em} \quad \partial\Omega \quad (19)$$

Neste trabalho adotamos o modelo para a pressão de capilaridade de Durlfisky⁵, isto é, assumimos válida a relação

$$p_c = A \ln \left(\frac{s_w + \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) \quad (20)$$

sendo

$$A = \frac{p_c^{\max}}{\ln \left(\frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon)} \right)} \quad (21)$$

onde ε é tomado normalmente como 10^{-3} , p_c^{\max} é a pressão capilar máxima e

$$p'_c = \frac{dp_c}{ds_w} \quad (22)$$

FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Seja o domínio do problema Ω subdividido em um conjunto de subdomínios Ω^e , isto é, o conjunto dos elementos tal que $\Omega = \bigcup_{e=1}^{Nel} \Omega^e$ e $\bigcup_{e=1}^{Nel} \Omega^e = \emptyset$, onde Nel representa o número total de elementos na malha. Ponderando-se a eq. (7) e integrando por partes o termo do divergente de forma usual, a forma variacional de Galerkin resultante é dada por

$$\int_{\Omega} \nabla w^h \nu_t^h d\Omega = \int_{\Omega} w^h Q_t^h d\Omega + \int_{\partial\Omega} w^h \nu_t^h \mathbf{n} d\Gamma \quad (23)$$

onde w^h é a função peso e ν_t^h a velocidade total discreta. Ambas funções são definidas nos espaços de aproximação usuais do método dos elementos finitos. Substituindo (8) em (23) temos a equação discreta da pressão

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla w^h A_t(s_w^h, \mathbf{x}) \nabla p^h d\Omega &= \int_{\Omega} \nabla w^h A_w(s_w^h, \mathbf{x}) p_c' \nabla s_w^h + \\ &+ \int_{\Omega} \nabla w^h (\lambda_o \rho_o - \lambda_w \rho_w) \mathbf{kg} d\Omega - \int_{\Omega} w^h Q_t^h d\Omega \end{aligned} \quad (24)$$

onde p^h e s_w^h são as correspondentes discretas de p e s_w . De acordo com Malta *et al.*⁹, o campo de velocidades calculado diretamente das leis de Darcy, isto é, pela eq. (8), apresenta baixa precisão e pode afetar a aproximação da saturação. Assim, com o objetivo de melhorar a qualidade da aproximação da velocidade utiliza-se a técnica de pós-processamento estabelecida em Malta *et al.*⁹, que pode ser resumida como se segue. Sendo p^h a solução da equação da pressão, ou seja, da eq. (24), calcule ν_p^h , a velocidade total pós-processada, tal que

$$\int_{\Omega} w^h (A_t^{-1} \nu_p^h + \nabla p^h) d\Omega + \sum_{e=1}^{Nel} \int_{\Omega^e} \delta_e \nabla w^h [\nabla (A_t \nabla p^h + A_w \nabla p_c^h - (\lambda_o \rho_o - \lambda_w \rho_w) \mathbf{g}) - Q] d\Omega^e = 0 \quad (25)$$

onde o parâmetro δ_e depende da malha e p_c^h é a pressão capilar discreta. A eq. (25) impõe que a velocidade total pós-processada satisfaça a equação de conservação de massa (7).

Em função de sua natureza predominantemente convectiva, na equação da saturação é usada uma formulação variacional de Petrov-Galerkin, definida em Coutinho *et al.*⁴ e Coutinho e Alves¹⁵, ou seja

$$\int_{\Omega} w^h L(s_w^h, \nu_p^h) d\Omega + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} w_{PG}^h L(s_w^h, \nu_p^h) d\Omega^e + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} w_{DC}^h L(s_w^h, \nu_t^h) d\Omega^e = 0 \quad (26)$$

onde

$$L(s_w^h, \nu_t^h) = \phi \frac{\partial s_w^h}{\partial t} + [f_w' \nu_p^h + g_w'(\mathbf{kg})] \nabla s_w^h + \nabla [D_t(s_w^h, \mathbf{x}) \nabla s_w^h] \quad (27)$$

$$w_{PG}^h = \tau_{PG} \frac{[f_w' \nu_p^h + g_w'(\mathbf{kg})]}{\|f_w' \nu_p^h + g_w'(\mathbf{kg})\|} \nabla w^h \quad (28)$$

$$w_{DC}^h = \tau_{DC} \frac{\nabla w^h}{\|\nabla s_w^h\|} \nabla s_w^h \quad (29)$$

A primeira integral na eq. (26) corresponde ao termo de Galerkin, a segunda é a correção SUPG², e a última é o operador de captura de descontinuidade. As funções w_{PG}^h e w_{DC}^h complementam a função peso w^h da formulação de Galerkin. A correção SUPG tem o objetivo de acrescentar estabilidade na direção das linhas de fluxo, enquanto que operador de captura de descontinuidade adiciona estabilidade na direção do gradiente da solução.

Estas funções agem apenas no interior dos elementos, podendo ser descontínuas ao longo de seu contorno.

Os parâmetros τ_{PG} e τ_{DC} são dados respectivamente por

$$\tau_{PG} = \frac{h^e}{2\|\nu^e\|} \min\left(\frac{P_e}{3}, 1\right), \quad P_e = \frac{h^e \|\nu^e\|^3}{2(\nu^e)^T D(\nu^e)} \quad (30)$$

$$\tau_{DC} = \frac{h^e}{2} \left| R(s_w^h) \right| \quad (31)$$

sendo h^e o tamanho do elemento, ν^e o vetor de velocidades totais restrito ao elemento e $R(s_w^h)$ o resíduo discreto no interior dos elementos, definido como

$$R(s_w^h) = \phi \frac{\partial s_w^h}{\partial t} + [f'_w \nu_p^h + g'_w(\mathbf{kg})] \nabla s_w^h \quad (32)$$

Da definição de f'_w e g'_w nas eqs. (11) e (12), podemos notar que para $s_w = 0$ a correção de Petrov-Galerkin se anula. Além disso, a formulação variacional do presente trabalho permite a utilização de elementos finitos padrão, empregando a mesma ordem de interpolação para todas as variáveis de interesse.

DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL

Em sua forma matricial o conjunto semi-discreto de equações acopladas, correspondendo à equação da pressão, eq.(24), à técnica de pós processamento da velocidade, eq. (25) e a equação da saturação, eq. (26), é

$$\mathbf{K}\mathbf{p} = \mathbf{F} \quad (33)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (34)$$

$$\overline{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{s}} + \overline{\mathbf{K}}\mathbf{s} = \overline{\mathbf{F}} \quad (35)$$

onde \mathbf{K} é uma matriz simétrica, \mathbf{p} é o vetor de pressões nodais, \mathbf{F} é o vetor de termos fonte para a equação da pressão, $\dot{\mathbf{s}}$ indica a derivada no tempo de \mathbf{s} . A matriz $\overline{\mathbf{M}}$ é formada pelos termos dependentes do tempo da eq. (26). A matriz $\overline{\mathbf{K}}$ é formada pelo termo convectivo e o termo difusivo da equação da saturação. O vetor $\overline{\mathbf{F}}$ representa a ação das condições de contorno para a equação da saturação. A matriz $\tilde{\mathbf{K}}$ representa a técnica de pós-processamento e é também simétrica. O vetor \mathbf{v} é o vetor nodal das velocidades pós-processadas e $\tilde{\mathbf{F}}$ o vetor de termos independentes correspondentes à equação de pós-processamento das velocidades, ou seja, a eq. (24). A integração no tempo é feita pelo algoritmo trapezoidal generalizado, conforme descrito em Hughes¹⁶. Estando no passo n atingimos o passo $n+1$ utilizando o seguinte algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor:

Dados $\mathbf{p}_{n+1}^0 = \mathbf{p}_n^j$; $\mathbf{s}_{n+1}^0 = \mathbf{s}_n^j$; $\dot{\mathbf{s}}_{n+1}^0 = \mathbf{0}$

Para $i = 0, 1, 2, \dots$, até a convergência faça

Bloco 1: Resolva a equação da pressão

$$\mathbf{K}(\mathbf{s}_{n+1}^i) \mathbf{p}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{F}_{n+1}$$

Bloco 2: Calcule o campo de velocidades

$$\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{s}_{n+1}^i) \mathbf{v}_{n+1}^{i+1} = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{p}_{n+1}^{i+1})$$

Bloco 3: Resolva a equação da saturação

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{n+1}^* \Delta \dot{\mathbf{s}}_{n+1}^{i+1} &= \bar{\mathbf{F}}_{n+1} - \bar{\mathbf{M}}(\dot{\mathbf{s}}_{n+1}^i) - \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{v}_{n+1}^{i+1}, \mathbf{p}_{n+1}^{i+1}, \mathbf{s}_{n+1}^i) \mathbf{s}_{n+1}^i \\ \mathbf{M}_{n+1}^* &= \bar{\mathbf{M}} + \alpha \Delta t \bar{\mathbf{K}} \end{aligned}$$

Atualização: Atualize a saturação e sua derivada temporal

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{n+1}^{i+1} &= \mathbf{s}_{n+1}^i + \alpha \Delta t \dot{\mathbf{s}}_{n+1}^{i+1} \\ \dot{\mathbf{s}}_{n+1}^{i+1} &= \dot{\mathbf{s}}_{n+1}^i + \Delta \dot{\mathbf{s}}_{n+1}^{i+1} \end{aligned}$$

Fim

No algoritmo acima i é o contador de iterações, Δt é o passo de tempo α é o parâmetro que controla precisão e estabilidade da integração no tempo. Normalmente assume-se $\alpha = 1/2$ que conduz a um método implícito incondicionalmente estável. O processo iterativo continua até que um critério de convergência seja satisfeito. Os critérios empregados no presente trabalho estão descritos em detalhe em Coutinho e Alves¹⁵. A equação da pressão é resolvida através do método multigrid tendo como técnica de suavização o método dos gradientes conjugados com pré-condicionador de Jacobi. A equação da saturação é solucionada através do algoritmo GMRES com pré-condicionador elemento-por-elemento do tipo Gauss-Seidel conforme descrito em Coutinho e Alves¹⁵. O sistema correspondente à técnica de pós-processamento das velocidades é resolvido por iterações tipo Jacobi.

A aproximação no tempo da equação da saturação é feita através do algoritmo adaptativo implícito/explicito apresentado em Coutinho *et al.*³. O termo adaptativo é aqui utilizado com respeito à forma de divisão do domínio em elementos implícitos e explícitos. Como o critério que define esta divisão depende da velocidade, os conjuntos dos elementos implícitos e explícitos podem variar com o tempo. Sendo assim, seja o conjunto de todos os elementos do domínio Ω^e , $e = 1, 2, 3, \dots, Nel$. Este conjunto é dividido em dois subconjuntos E_I e E_E correspondendo, respectivamente aos elementos implícitos e explícitos, tal que

$$E = E_I \cup E_E \quad e \quad E_I \cap E_E = \emptyset \quad (36)$$

Em consequência, a matriz efetiva da equação da saturação torna-se

$$\mathbf{M}^* = \sum_{e \in E_I} \mathbf{M}_e^* + \sum_{e \in E_E} \mathbf{M}_e^L \quad (37)$$

onde \mathbf{M}_e^* é a matriz efetiva de elemento e \mathbf{M}_e^L é a matriz efetiva diagonalizada. O agrupamento definido em (36) é efetuado de forma dinâmica ou adaptativa, baseado em critérios de estabilidade e precisão. O critério de estabilidade é definido como

$$\text{se } C_{\Delta t}^e = \frac{\|f'_w \nu_p^h + g'_w(\mathbf{k} \cdot \mathbf{g})\| \Delta t}{\phi h^e} > 1,0 \quad \text{então } e \in E_I \quad (38)$$

onde $C_{\Delta t}^e$ é o número de Courant do e -ésimo elemento. Como a velocidade depende do campo de saturação corrente, os elementos que atendem o critério de estabilidade variam

ao longo do tempo. De forma a aumentar a precisão do algoritmo de integração no tempo em torno da frente de saturação, podemos utilizar um estimador de erro para localizar as regiões com altos gradientes da saturação. A norma L^2 do erro do gradiente de saturação é definida como

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (\nabla \bar{s} - \nabla s_w^h)(\nabla \bar{s} - \nabla s_w^h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (39)$$

onde $\Delta \bar{s}$ é o gradiente de saturação pós-processado. Aqui $\Delta \bar{s}$ é obtido tomando-se a média das contribuições dos elementos nos nós. O erro médio é definido como

$$e_m = \frac{\|e\|}{\sqrt{Nel}} \quad (40)$$

Sendo assim, o critério de precisão é então dados por

$$\text{se } \|e\|_e \geq \eta e_m \text{ então } e \in E_I \quad (41)$$

onde $\|e\|_e$ é o erro a nível de elemento e $\eta \in [0, 1]$ é um parâmetro de controle definido pelo usuário.

O MÉTODO MULTIGRID

O algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor requer a solução de um sistema de equações lineares para a equação da pressão em cada iteração por bloco. De forma genérica este sistema pode ser reescrito como

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (42)$$

Existem vários métodos para resolver este problema. Entre estes, um método muito eficiente é o método multigrid, cuja idéia central é o uso de um conjunto de malhas, $M^1, M^2, M^3, \dots, M^k$, com espaçamento $h_1 > h_2 > h_3 > \dots > h_k$, respectivamente, para aproximar o mesmo domínio Ω do problema. Desta forma, esquemas de transferência de informações entre as diversas malhas são muito importantes no método multigrid. Esta questão é resolvida através da definição de operadores de restrição e interpolação. Estes são

- Operador de restrição R , que transfere as informações da malha *fina* Ω^h para a malha *grossa* Ω^{2h}

$$\Omega^{2h} = R(\Omega^h) \quad (43)$$

- Operador de interpolação ou prolongamento P , que transfere informações da malha *grossa* Ω^{2h} para a malha *fina* Ω^h

$$\Omega^h = P(\Omega^{2h}) \quad (44)$$

A forma destes operadores pode variar com o tipo de elemento ou com o tipo de problema. Para meios heterogêneos, estes operadores podem ser definidos à partir da distribuição espacial do tensor de permeabilidades conforme Parsons e Coutinho¹¹. Neste trabalho empregamos uma definição simples. Considere por exemplo uma discretização de elementos finitos triangulares lineares conforme mostrado na Figura 1. Os operadores de restrição e interpolação podem ser definidos como se segue:

- Operador de interpolação ou prolongamento P

$$u_i^h = u_i^{2h}; \text{ para } i = 1, 2, 3$$

$$u_j^h = \frac{1}{2}(u_m^{2h} + u_n^{2h}); \text{ para } j = 4, 5, 6; \quad m = 1, 2, 3; \quad n = 2, 3, 1$$

- Operador de restrição R

$$u_i^{2h} = \frac{1}{2} \left[u_i^h + \frac{1}{2} (u_m^h + u_n^h) \right]; \quad \text{para } i = 1, 2, 3; \quad m = 4, 4, 5; \quad n = 6, 5, 6$$

Figura 1. Operadores de restrição e interpolação. Os nós 1, 2, 3 pertencem à malha grossa, os nós 4, 5, e 6 pertencem à malha fina

De posse da definição dos operadores de restrição e interpolação podemos sintetizar o conceito do método como segue. Seja \mathbf{u} a solução exata do sistema dado pela eq. (42) e \mathbf{v} uma aproximação de \mathbf{u} . Assim o erro é definido por

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \quad (45)$$

que não pode ser computado, pois não conhecemos a solução exata \mathbf{u} . Uma medida que pode ser calculada é o resíduo

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{v} \quad \text{ou} \quad \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{r} \quad (46)$$

que nos dá uma idéia do quanto \mathbf{v} está próximo de \mathbf{u} . Subtraindo esta equação da original (45), temos

$$\mathbf{A}\mathbf{e} = \mathbf{r} \quad (47)$$

conhecida como equação do resíduo. Usamos a equação do resíduo (47) para obter uma aproximação para o erro na malha mais *grossa* que será usada para corrigir a solução na malha mais *fina*. Através de recursão, pode-se definir uma família de métodos multigrid, chamada Ciclo- μ , que é dada no algoritmo abaixo:

$$\text{Ciclo-}\mu : \mathbf{v}^h \leftarrow M\mu^h(\mathbf{v}^h, \mathbf{f}^h)$$

1. Relaxar ν_1 vezes em $\mathbf{A}\mathbf{u}^h = \mathbf{f}^h$ com aproximação inicial \mathbf{v}^h
2. Se $\Omega^h =$ malha mais grossa, então vá para o passo 4

Senão

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{2h} &\leftarrow R_h^{2h}(\mathbf{f}^h - \mathbf{A}^h \mathbf{v}^h) \\ \mathbf{v}^{2h} &\leftarrow 0 \\ \mathbf{v}^{2h} &\leftarrow M\mu^h(\mathbf{v}^{2h}, \mathbf{f}^{2h}), \quad \mu \text{ vezes} \end{aligned}$$

3. Corrigir $\mathbf{v}^h \leftarrow \mathbf{v}^h + P_{2h}^h \mathbf{v}^{2h}$

4. Relaxar ν_2 vezes em $\mathbf{A}\mathbf{u}^h = \mathbf{f}^h$ com aproximação inicial \mathbf{v}^h

Os dois tipos de ciclos multigrid mais usados são o ciclo V , quando $\mu = 1$ e o ciclo W , quando $\mu = 2$. A representação gráfica dos ciclos V e W encontram-se na Figura 2.

Figura 2. Representação dos tipos de ciclos Multi-Grid

Os valores de ν_1 e ν_2 que determinam o número de relaxações em cada passo são fixados no início do algoritmo, e seus valores geralmente variam entre 1 e 5. As matrizes \mathbf{A}^h são normalmente calculadas para cada malha. Como técnica de relaxação usamos o método dos gradientes conjugados com preconditionador de Jacobi, implementado através da técnica elemento-por-elemento. Esta técnica apresenta baixa demanda de memória e é adequada para os métodos multigrid, pois é insensível à ordem de numeração dos nós. Portanto, o produto matriz-vetor é computado como

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{A}^e \mathbf{u}^e \quad (48)$$

onde \mathbf{A}^e é a matriz de elemento e \mathbf{u}^e as componentes de \mathbf{u} restritas ao elemento. O vetor de resíduos é calculado a partir das contribuições individuais dos elementos, ou seja

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{b}^e - \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{A}^e \mathbf{u}^e \quad (49)$$

sendo \mathbf{b}^e o vetor de termos independentes a nível de elemento.

TESTES NUMÉRICOS

Solução da equação da pressão no problema de cinco poços

De forma a avaliar a precisão e desempenho do método multigrid, inicialmente resolvemos a equação da pressão no problema de cinco poços. Neste problema clássico, um poço central

é usado como injetor e os outros quatro à sua volta como produtores. O domínio do problema é o quadrado unitário correspondendo a um quarto do modelo de cinco poços, conforme indicado na região sombreada da Figura 3. Para este teste assumimos $k_x = k_y = 1$ o que corresponde a um meio homogêneo. O objetivo é comparar a solução obtida utilizando o método multigrid com a solução exata que, fora dos poços é dada, de acordo com Teigland¹⁴, pela equação

$$p(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{|m|} \ln \left\{ \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}(x+y-2m)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}(x+y-2m)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right)} \right\} \quad (50)$$

Figura 3. Modelo de cinco poços: P_I poço injetor, P_P poço produtor

Sendo $p(x, y)$ solução exata dada pela eq. (50) e $\bar{p}(x, y)$ a solução computada através do método numérico, o erro é dado por

$$\varepsilon_p = \left\{ \sum_{(x,y) \in \Omega} h^2 (p(x, y) - \bar{p}(x, y))^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (51)$$

sendo que para fins de cálculo é excluída a região em torno da singularidade, isto é, o domínio do problema é redefinido como

$$\Omega_E = [0, 1] \times [0, 1] - \left[0, \frac{1}{8}\right] \times \left[0, \frac{1}{8}\right] + \left[\frac{7}{8}, 1\right] \times \left[\frac{7}{8}, 1\right] \quad (52)$$

Os resultados obtidos com o método multigrid que implementamos são mostrados na Tabela I e II. A Tabela I mostra os resultados para um refinamento uniforme, enquanto que a Tabela II apresenta os resultados que obtivemos com o método multigrid usando a malha com refinamento não uniforme mostrada na Figura 4. Nas Tabelas I e II Nel_f é o número de elementos na malha mais fina. Em ambos os casos utilizamos o ciclo V com $\nu_1 = \nu_2 = 1$.

Elementos na malha inicial	Níveis	ε_p	Nel_f
2	5	3,6e-04	512
2	6	8,6e-05	2048
8	6	2,1e-0,5	8192

Tabela I. Resultados obtidos pelo método multigrid para o problema de cinco poços usando uma malha com refinamento uniforme

Elementos na malha inicial	Níveis	ε_p	Nel_f
24	3	6,3e-04	384
24	4	1,6e-04	1536
24	5	4,2e-0,5	6144

Tabela II. Resultados obtidos pelo método multigrid para o problema de cinco poços usando uma malha com refinamento não uniforme

Figura 4. Malha com refinamento não uniforme

Ao solucionarmos este problema com o ciclo W notamos que os resultados foram os mesmos. Podemos observar também que quanto maior é o número de níveis, menor o erro, tanto para os casos com malhas uniformes, quanto para os casos com malhas não uniformes. Além disso, ao compararmos os nossos resultados com aqueles de Teigland¹⁴, podemos observar que ambos estão em boa concordância.

A Figura 5 mostra a comparação da solução analítica e numérica ao longo da linha entre o poço de injeção e o poço de produção. Nesta comparação empregou-se a solução computada usando-se o método multigrid em malha com refinamento uniforme, com ciclo V e seis níveis. Pode-se observar que os resultados são praticamente coincidentes.

Figura 5. Comparação da solução exata e da solução multigrid com o ciclo V , $\nu_1 = \nu_2 = 1$ em uma malha uniforme com 32 divisões na malha mais fina

Para compararmos o desempenho computacional do método multigrid com o método dos gradientes conjugados resolvemos o problema completo, considerando as viscosidades $\mu_o = \mu_w = 1$, as densidades $\rho_w = 1$ e $\rho_o = 1$ e a porosidade $\phi = 0,2$. Assumiu-se que as permeabilidades relativas da água e do óleo fossem dadas respectivamente por $k_{rw} = s^2$ e $k_{ro} = (1 - s_w)^2$ e que a pressão capilar fosse nula. Empregamos malhas com refinamento uniforme. No primeiro caso foi usado uma malha com 16 divisões na malha mais fina e

5 níveis e no segundo caso, uma malha com 32 divisões na malha mais fina e 6 níveis. O problema foi solucionado durante 1000 passos de tempo. A Tabela III mostra o tempo de processamento médio normalizado correspondente à solução da equação da pressão pelo método multigrid, identificado por MG, e pelo método dos gradientes conjugados com preconditionador elemento-por-elemento Gauss-Seidel, identificado simplesmente como PCG. Podemos notar que o método multigrid é mais eficiente do ponto de vista computacional que o método dos gradientes conjugados utilizado.

Método	Tempo de processamento	
	Malha 1	Malha 2
MG	0,22	0,12
PCG	1,0	1,0

Tabela III. Tempo de processamento médio normalizado para a solução da equação da pressão no problema de cinco poços. Malha 1; 512 elementos; Malha 2; 2.048 elementos

Solução do problema com gravidade

Hansen e Espedal⁶ analisaram o deslocamento imiscível de dois fluidos em meios porosos considerando os efeitos da gravidade. Na maioria de seus experimentos Hansen e Espedal consideraram problemas onde o domínio computacional é o quadrado unitário, sendo injeção e produção tomadas respectivamente como $q = 1$ na fronteira esquerda e $q = -1$ na fronteira direita. As permeabilidades relativas são dadas por $k_{rw} = s^2$ e $k_{ro} = (1 - s_w)^2$ e o tensor de difusão é $D(s) = 0,04s_w(1 - s_w)$. O tensor de permeabilidade absoluta é isotrópico, com componentes $k_x = k_y = 1,0$. A porosidade é $\phi = 0,2$, o vetor gravidade $\mathbf{g} = (0, 0; -1, 0)$ e as densidades da água e do óleo são dadas respectivamente por $\rho_w = 2$ e $\rho_o = 1$.

Solucionamos este problema empregando uma malha uniforme de triângulos lineares com 32 divisões na malha mais fina. Usamos o ciclo V com $\nu_1 = \nu_2 = 1$ e 5 níveis. A integração no tempo foi executada para um tempo máximo $t_{\max} = 0,1$ com um passo de tempo fixo $\Delta t = 0,00001$. A partição implícita foi atualizada à cada 5 passos de tempo e a pressão à cada passo. A tolerância dos métodos iterativos foi fixada em 10^{-4} e a tolerância para iteração não linear como 10^{-2} .

As Figuras 6, 7 e 8 apresentam respectivamente os contornos da frente de saturação da água, em elevação e vista de topo, para os instantes $t = 0,03$, $t = 0,04$ e $t = 0,065$. Podemos observar que a presença do campo gravitacional provoca um acúmulo de água na parte inferior da malha. Tal efeito também foi verificado por Hansen e Espedal⁶.

A variação no tempo do número de elementos implícitos até $t = 0,01$ é mostrada na Figura 9. Observamos que o número de elementos implícitos não alcançou 25 % do total de elementos da malha, que é 2.048.

A Tabela IV mostra o esforço computacional medido pelo número médio de iterações por bloco-iteração para se resolver a equação da pressão pelo método multigrid, o número médio de iterações de gradientes conjugados com preconditionador elemento-por-elemento Gauss-Seidel também para a solução da equação da pressão, além do número médio de iterações GMRES com preconditionador elemento-por-elemento Gauss-Seidel para a solução da equação da saturação. Dos resultados da Tabela IV podemos observar que o método multigrid apresentou melhor desempenho que o método dos gradientes conjugados com o preconditionador elemento-por-elemento Gauss-Seidel. Além disso, a solução da equação da saturação é muito rápida, devido basicamente ao pequeno número de elementos implícitos em cada solução.

Figura 6. Contorno da frente de saturação da água utilizando o método multigrid na equação da pressão, em uma malha com 32 divisões, em $t = 0,03$ e vetor gravidade $\mathbf{g} = (0, 0; -1, 0)$

Figura 7. Contorno da frente de saturação da água utilizando o método multigrid na equação da pressão, em uma malha com 32 divisões, em $t = 0,04$ e vetor gravidade $\mathbf{g} = (0, 0; -1, 0)$

Figura 8. Contorno da frente de saturação da água utilizando o método multigrid na equação da pressão, em uma malha com 32 divisões, em $t = 0,065$ e vetor gravidade $\mathbf{g} = (0, 0; -1, 0)$

Figura 9. Variação do Número de Elementos Implícitos para 1000 passos de tempo

Método	Número de iterações
MG	10,8
PCG	24,5
GMRES	3,8

Tabela IV. Número de ciclos por iteração não linear para o problema com gravidade. Malha com 2.048 elementos

Cumpramos observar que o tempo de CPU é diretamente relacionado ao número de iterações listado na Tabela IV. Conforme observado anteriormente por Parsons¹⁰, Jouglard e Coutinho⁸ e Parsons e Coutinho¹¹, o custo das operações de transferência de informações entre as malhas no método multigrid é desprezível. Portanto, o custo computacional é dominado pelos produtos matriz-vetor efetuados ao longo das iterações. Note ainda que segundo Parsons¹⁰ e Jouglard e Coutinho⁸, a memória requerida pelo método multigrid é ligeiramente superior à demanda do método dos gradientes conjugados. Entretanto, a demanda de memória do método multigrid é diretamente proporcional aos parâmetros das malhas, isto é, o número de elementos e nós em cada nível.

CONCLUSÕES

Neste trabalho estudamos a utilização do método multigrid para a solução da equação da pressão na simulação de escoamentos bi-fásicos imiscíveis em meios porosos. Observamos que o método multigrid é sempre mais eficiente que o método dos gradientes conjugados com condicionamento elemento-por-elemento Gauss-Seidel. A consideração da gravidade torna o problema mais fortemente não linear e, conseqüentemente, aumenta o esforço computacional necessário à solução.

A estratégia de solução proposta, o método multigrid para a solução da pressão e o método adaptativo implícito-explícito para a equação da saturação nos parece bastante promissora, pois procura minimizar o esforço computacional escolhendo os métodos mais indicados para as características de cada equação.

AGRADECIMENTOS

Ao Núcleo de Atendimento em Computação de Alto Desempenho (NACAD) da COPPE/UFRJ pelos recursos computacionais. O presente trabalho é parcialmente apoiado pelo Projeto Integrado CNPq/MCT 522.692/95-8, do Laboratório de Métodos Computacionais em Engenharia do Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ. Arlenes S. Silva agradece o Programa CAPES/PICD/UFMT, que permite-seu afastamento para capacitação na COPPE-UFRJ. Prof. I. D. Parsons é grato ao apoio da National Science Foundation, USA, através do projeto ECS 91-57304.

REFERÊNCIAS

- 1 W.L. Briggs, “A multigrid tutorial”, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, (1987).
- 2 A.N. Brooks e T.J.R. Hughes, “Streamline Upwind/Pretrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier- Stokes equations”, *Comp. Meth. Appl. Mech. and Engng*, Vol. **32**, pp. 199–259, (1982).
- 3 A.L.G.A. Coutinho, J.L.D. Alves, L. Landau e N.F.F. Ebecken, “A dynamic mesh partition algorithm for the finite element solution of two-phase immiscible flow in oil reservoirs, finite elements in fluids: New trends and applications, K. Morgan *et al.* (Eds.), CIMNE/Pineridge Press, Barcelona, Vol. **II**, pp. 856–865, (1993).
- 4 A.L.G.A. Coutinho, J.L.D. Alves, E.L.M. Garcia e A.F.D. Loula, “Solution of miscible and immiscible flows employing element-by-element iterative strategies”, *3 SPE Latin American/Caribbean Petroleum Engineering Conference*, SPE 27050, pp. 431–444, (1994).
- 5 L.J. Durlofsky, “A triangle based mixed finite element-finite volume technique for modeling two phase flow through porous media”, *J. Comput. Physics*, Vol. **105**, pp. 252–266, (1993).
- 6 R. Hansen e M. Espedal, “On the numerical solution of non-linear reservoir flow models with gravity”, *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. **38**, pp. 2017–2032, (1995).
- 7 R.D. Hornung e J.A. Trangenstein, “Adaptive mesh refinement and multilevel iteration for flow in porous media”, *J. Comp. Physics*, Vol. **136**, pp. 522–545, (1997).
- 8 C.E. Jouglard e A.L.G.A. Coutinho, “A comparison of multi-level iterative finite element solvers”, *Comp. and Structures*, Vol. **69**, pp. 655–670, (1998).
- 9 S.M.C. Malta, A.F.D. Loula e E.L.M. Garcia, “A Post-processing technique to aproximate the velocity field in miscible displacement”, *Contemporary Mathematics*, Vol. **8**, pp. 239–268, (1995).
- 10 I.D. Parsons, “Parallel adaptive multigrid methods for elasticity, plasticity and eigenvalue problems”, In “*Solving large-scale problems in mechanics-volume II: Parallel and distributed computer applications*”, M. Papadrakakis, (Ed.), J.Wiley, (1997).
- 11 I.D. Parsons e A.L.G.A. Coutinho, “Finite element multigrid for two phase immiscible flow in heterogeneous media”, *Comm. in Num. Meth. Engng*, Vol. **15**, pp. 1–7, (1999).
- 12 D.W. Peaceman, “*Fundamentals of numerical reservoir simulation*”, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, (1977).
- 13 G.H. Schmidt e F.J. Jacobs, “Adaptive local grid refinement and multigrid in numerical reservoir simulation”, *J. Comp. Physics*, Vol. **77**, N °1, pp. 140–165, (1988).
- 14 R. Teigland, “On some variational techniques and related methods for local refinement”, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. **28**, N °6 , pp. 945–960, (1998).
- 15 A.L.G.A. Coutinho e J.L.D. Alves, “Parallel finite element simulation of miscible displacements in porous media”, *SPE Journal*, Vol. **1**, pp. 487–500, (1996).
- 16 T.J.R. Hughes, “*The finite element method*”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1987).