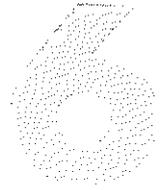


# métodos de cálculo y simulación en CAD



Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra

## 6.1. INTRODUCCION

En un sistema integrado de CAD es esencial una coordinación estrecha entre el soporte gráfico y el modelo de cálculo utilizado. En general, es el soporte gráfico el que debe adaptarse a las necesidades de la metodología de cálculo, lo que, naturalmente, exige un buen conocimiento de la misma para optimizar el volumen de operaciones.

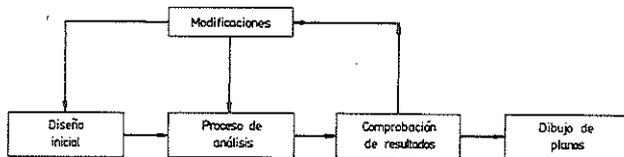


Figura 6.1 Esquema típico de un proceso de CAD.

Para concretar ideas, consideremos el esquema básico de un proceso de CAD que se muestra en la figura 6.1. El problema se reduce al análisis de un diseño inicial para obtener unos resultados que indicarán si el diseño es o no satisfactorio. En el primer caso, se puede proceder al dibujo de los planos de fabricación correspondientes. En el segundo, se deberán efectuar las oportunas modificaciones en el proceso de análisis o en el diseño inicial. Parece evidente que, dentro de las etapas mencionadas, la fase de análisis juega un papel principal, ya que es la que proporciona información para decidir sobre la bondad del diseño.

En la figura 6.2 se presenta algo más detallado el sencillo esquema anterior. Así, observamos que tras la definición de diseño inicial, sería adecuada una fase de preproceso en la que se obtendría una representación gráfica del diseño a partir de la cual se pueden obtener todos los datos geométricos para iniciar la fase de cálculo. Dichos datos son procesados por el modelo de cálculo correspondiente proporcionando resultados que, a su vez, son interpretados y representados en la fase de postproceso, de manera que pueda juzgarse con facilidad si son o no aceptables. En caso negativo o dudoso, habría que repetir toda la fase de cálculo o bien alguna de sus partes, tal como se indica en la figura 6.2. Una vez obtenidos los resultados «correctos», se procede a comprobar la bondad del diseño. Si éste fuera rechazado, habría que efectuar las modificaciones oportunas y volver al punto de inicio del proceso. Dichas modificaciones pueden establecerse basándose en los resultados de un estudio de optimización del diseño. Finalmente, si el diseño es aceptado se procede al dibujo de los planos de fabricación correspondientes.

En este capítulo vamos a concentrar la atención en el estudio de la fase del *modelo de cálculo*. Asimismo, analizaremos la interrelación entre el modelo de cálculo y las fases de pre y postproceso.

## 6.2. MODELO DE CALCULO: SISTEMAS DISCRETOS Y SISTEMAS CONTINUOS

Como se ha indicado en el apartado anterior, la etapa inicial de un proceso de CAD es la definición de un modelo

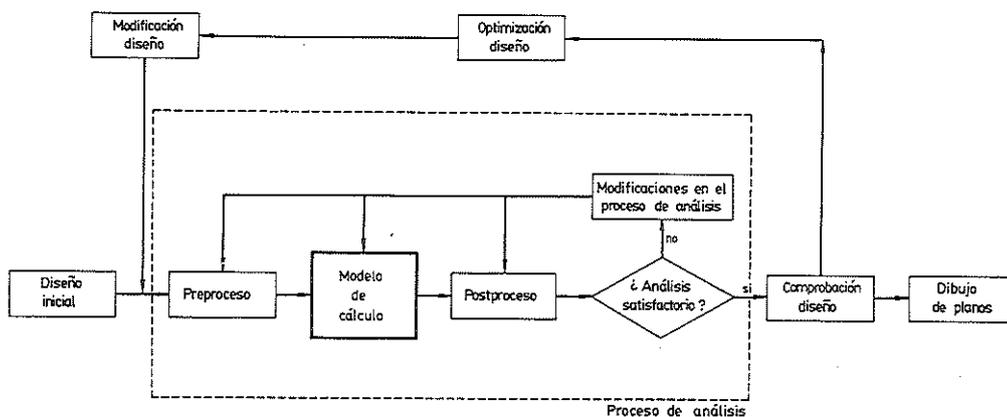


Figura 6.2 Esquema de CAD: Detalles de la fase de análisis.

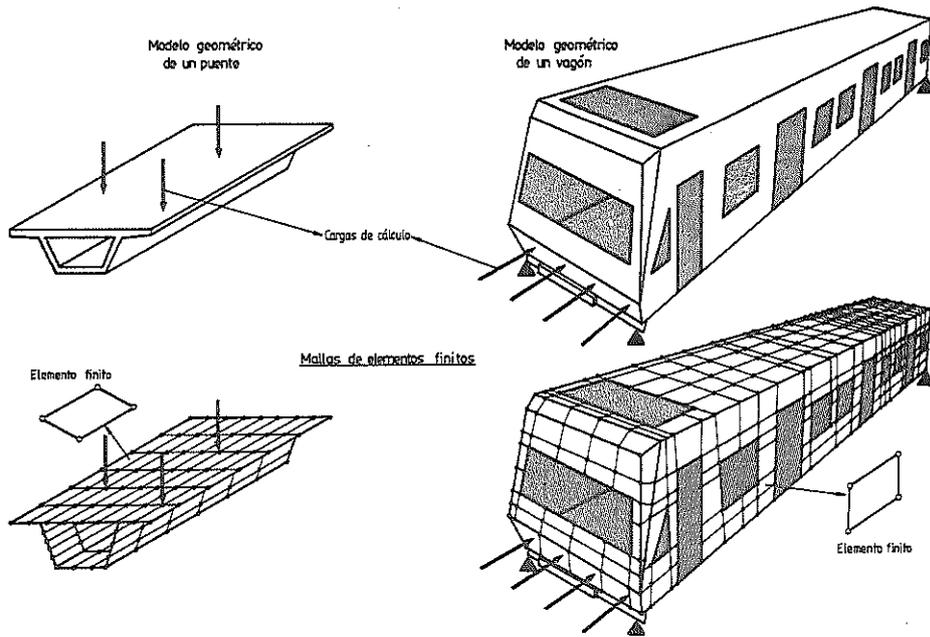


Figura 6.3 Modelos geométricos de un puente y de un vagón. Mallas de elementos finitos para el análisis.

geométrico del diseño inicial a partir del cual se obtienen los datos necesarios para poder analizar su comportamiento. Dicho modelo geométrico puede ser más o menos complejo, en función de la dificultad que presente la geometría real del diseño, o de la capacidad informática disponible. En la figura 6.3 se muestran los modelos geométricos de un puente y un vagón de ferrocarril. Dichos modelos representan simplificaciones de la geometría real y son la base para la definición de los datos de cálculo, como las mallas de elementos finitos que se muestran en la citada figura. Al modelo geométrico del diseño lo denominaremos, en lo sucesivo, *sistema*.

La finalidad, pues, del modelo de cálculo es obtener la respuesta del sistema al ser éste sometido a una serie de perturbaciones que denominaremos *acciones* (por ejemplo: cargas en un sistema estructural). Estudiaremos aquí las bases en que se apoyan los diferentes modelos de cálculo más utilizados para los tipos de sistemas usuales.

### 6.3. SISTEMAS DISCRETOS

Reciben dicha denominación aquellos sistemas compuestos por una serie de *elementos* diferentes, físicamente diferenciables, conectados por sus extremos o *nudos* formando una *malla* y sometidos a una serie de acciones generalmente externas al sistema. Ejemplos de dichos sistemas abundan en ingeniería.

Relacionados con las estructuras, por ejemplo, podemos considerar como sistemas discretos a todas las estructuras de barras, tales como pórticos, simples y compuestos, celosías, entramados de edificación, forjados, etc.

En otras áreas de la ingeniería tenemos ejemplos de dichos sistemas en las redes hidráulicas y eléctricas, en los métodos de optimización de la producción (PERT, etc.), en los sistemas de organización del transporte y otros. En la figura 6.4 se han representado algunos de dichos sistemas.

Los modelos de cálculo de CAD más corrientes para análisis de sistemas discretos utilizan técnicas de *cálculo matricial*. No obstante, en algunos casos particulares, es

posible obtener una *representación analítica* de la respuesta del sistema, lo que simplifica notablemente los cálculos. Aquí consideraremos solamente el planteamiento matricial por ser el más empleado en la práctica.

Así, en dichos casos, las ecuaciones matriciales del sistema se obtienen a partir del estudio del equilibrio de un elemento aislado del sistema. Por ejemplo, para un elem

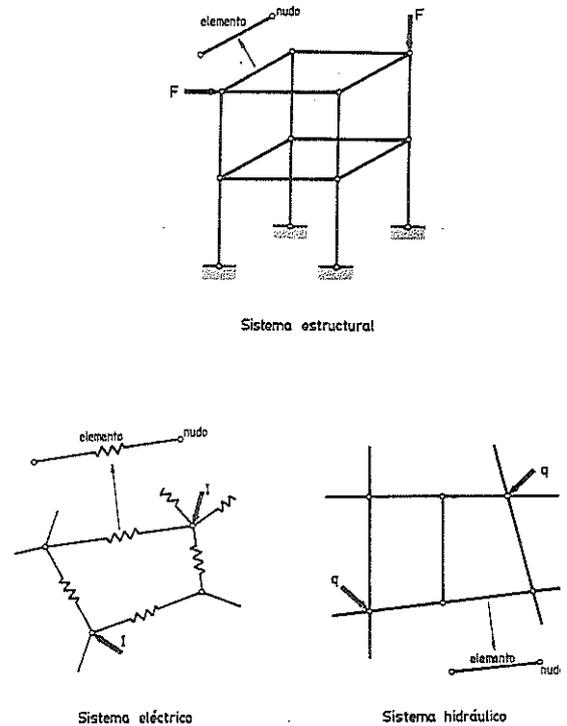


Figura 6.4 Sistemas discretos más usuales.

de barra aislado es fácil obtener una relación entre las fuerzas que actúan en los nudos y los correspondientes desplazamientos. Para la barra de la figura 6.5 se deduce fácilmente de la resistencia de materiales [1] que:

$$R_1^{(e)} = -R_2^{(e)} = (EA)^{(e)} \left( \frac{\Delta l}{l} \right)^{(e)} = \left( \frac{EA}{l} \right)^{(e)} (U_1^{(e)} - U_2^{(e)}) = K^{(e)} (U_1^{(e)} - U_2^{(e)}) \quad (6.1)$$

donde  $K^{(e)} = \left( \frac{EA}{l} \right)^{(e)}$  y el índice  $e$  indica que los valores se refieren a una barra particular. La ecuación anterior puede escribirse en forma matricial como:

$$q^{(e)} = \begin{Bmatrix} R_1^{(e)} \\ R_2^{(e)} \end{Bmatrix} = K^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{(e)} \\ U_2^{(e)} \end{Bmatrix} = K^{(e)} a^{(e)} \quad (6.2)$$

donde  $K^{(e)}$  se denomina *matriz de rigidez* del elemento de barra y es función únicamente de la geometría del mismo y de sus propiedades mecánicas,  $a^{(e)}$  y  $q^{(e)}$  son los *vectores de desplazamientos y de fuerzas* de los nudos de la barra. La ec. (6.2) es la expresión matricial de equilibrio de la barra aislada. Si adicionalmente actuara sobre la barra una fuerza uniformemente repartida por unidad de longitud de intensidad  $b^{(e)}$ , que se equilibra con fuerzas  $\frac{(b)l^{(e)}}{2}$  en cada nudo, la ecuación (6.2) se modifica como:

$$q^{(e)} = \begin{Bmatrix} R_1^{(e)} \\ R_2^{(e)} \end{Bmatrix} = K^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{(e)} \\ U_2^{(e)} \end{Bmatrix} + \frac{(b)l^{(e)}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$q^{(e)} = K^{(e)} a^{(e)} + f^{(e)} \quad (6.3)$$

donde  $f^{(e)}$  es el vector de fuerzas que actúan en los nudos de la barra debidas a cargas exteriores.

La expresión de equilibrio de la estructura se obtiene a partir de la sencilla regla que expresa que la suma de las fuerzas en un nudo, debidas a las diferentes barras que concurren en el mismo, es igual a la fuerza exterior que actúa en el nudo. En forma matemática:

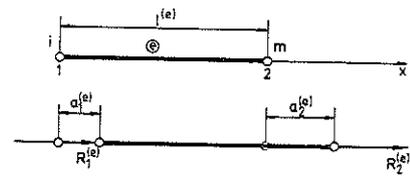
$$\sum_{e=1}^{n_e} R_i^{(e)} = R_i^{exterior} \quad (6.4)$$

donde el sumatorio se extiende a todas las barras,  $n_e$ , que concurren en el nudo de numeración  $i$ . Sustituyendo en dicha expresión los valores de  $R_i^{(e)}$  en función de los desplazamientos de los nudos por la ec. (6.3) se obtiene la ecuación matricial de equilibrio de la estructura como:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

$$K a = f \quad (6.6)$$

donde  $K$  a y  $f$  son respectivamente la matriz de rigidez, el vector de incógnitas (desplazamientos) de los nudos, y el vector de acciones (fuerzas) del sistema (estructura). El proceso de obtención de la ec. (6.6) recibe el nombre de *ensamblaje*. La resolución de la ec. (6.6) proporciona los valores de los desplazamientos en todos los nudos de la



$$K^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1^{(e)} \\ R_2^{(e)} \end{Bmatrix}$$

Ensamblaje  
 $\sum_e R_i^{(e)} = R_i^{exterior}$

Numeración local  
1, 2  
 $a_1^{(e)}, a_2^{(e)}$

Numeración global  
 $i, m$   
 $a_i, a_m$

$$K^{(e)} = k^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ m \end{matrix} ; \quad k^{(e)} = \left( \frac{EA}{l} \right)^{(e)}$$

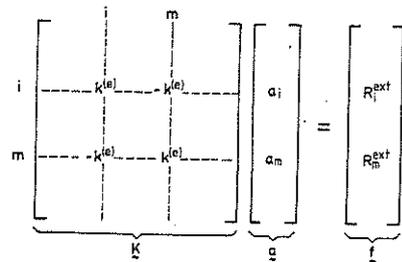
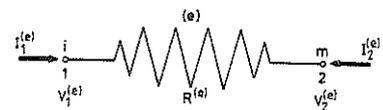


Figura 6.5 Barra a tracción. Ecuaciones matriciales de equilibrio local y global.

estructura a partir de los cuales podemos conocer los esfuerzos internos en las barras. Hay que destacar que el proceso de ensamblaje puede organizarse de forma muy sencilla para que sea efectuado directamente por el ordenador, partiendo simplemente de la numeración de los nudos de las barras de la estructura [2] (figura 6.5).

Los pasos explicados entre las ecs. (6.1) y (6.6) son totalmente análogos para la mayoría de los sistemas discretos. Así, por ejemplo, en el caso de una malla eléctrica, el estudio de un elemento aislado (resistencia) proporciona, de acuerdo con la ley de Ohm, la siguiente relación entre las tensiones e intensidades que entran por cada nudo (figura 6.6)



$$\frac{1}{R^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1^{(e)} \\ V_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1^{(e)} \\ I_2^{(e)} \end{Bmatrix}$$

$\Downarrow$   
 $K^{(e)} a^{(e)} = q^{(e)}$

Figura 6.6 Resistencia eléctrica. Ecuación matricial de equilibrio local.

$$I_1^{(e)} = -I_2^{(e)} = \frac{1}{R^{(e)}} (V_1^{(e)} - V_2^{(e)}) = K^{(e)} (V_1^{(e)} - V_2^{(e)}) \quad (6.7)$$

Se observa que dicha ecuación es análoga a la (6.1) para la barra sin más que intercambiar los conceptos de intensidad y tensión por fuerza y desplazamiento y el inverso de la resistencia  $R^{(e)}$  por  $\left(\frac{EA}{l}\right)^{(e)}$ . La *regla de ensamblaje* la proporciona la conocida ley de Kirchhoff que establece que la suma de las corrientes que concurren en un nudo es igual a cero, o:

$$\sum_{e=1}^{n_e} I_i^{(e)} = I_i^{exterior} \quad (6.8)$$

donde  $I_i^{exterior}$  es la intensidad que entra en el nudo desde el exterior de la red. Puede comprobarse la analogía de dicha ecuación con la (6.4) para barras.

Las mismas analogías se encuentran en el estudio de redes de tuberías. La ecuación de equilibrio entre caudales,  $q$ , y alturas piezométricas,  $h$ , en los nudos de un elemento de tubería se puede escribir como (figura 6.7)

$$q_1^{(e)} = -q_2^{(e)} = K^{(e)} (h_1^{(e)} - h_2^{(e)}) \quad (6.9)$$

donde  $K^{(e)}$  es un coeficiente que depende de la rugosidad de la tubería y de las alturas piezométricas de los nudos, lo que implica que las matrices  $K^{(e)}$  de la ec. (6.2), no están ya formadas por constantes sino por funciones conocidas de  $a^{(e)}$ . Por otra parte, la ec. (6.3) se escribirá de manera idéntica para este caso, siendo, la fuerza  $b^{(e)}$  equivalente a una aportación de caudal uniforme por unidad de longitud de tubería,  $Q^{(e)}$ .

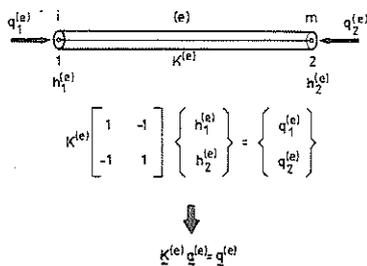


Figura 6.7 Tramo de tubería. Ecuación matricial de equilibrio local.

La regla de ensamblaje se obtiene por la simple condición de equilibrio entre los caudales que concurren en un nudo, el caudal aportado desde el exterior al nudo, es decir:

$$\sum_{e=1}^{n_e} q_i^{(e)} = q_i^{exterior} \quad (6.1)$$

Se puede deducir fácilmente la analogía de expresiones con las correspondientes para barras y mallas eléctricas. La ecuación de equilibrio global de la red de tuberías es, por tanto, idéntica a la (6.6), teniendo en cuenta que la matriz es de naturaleza no lineal y para su solución es necesario utilizar métodos iterativos.

En definitiva, de todo lo anterior se deduce que en el análisis de un sistema discreto intervienen las siguientes etapas:

- Definición de una malla de elementos discretos conectados entre sí por nudos, todos ellos convenientemente numerados. Cada elemento,  $e$ , tiene asignadas unas propiedades geométricas y mecánicas conocidas. Todas estas características constituyen lo que se denomina *datos* del problema y conviene definirlos de la manera más automática posible (fase de *preproceso*).
- Cálculo de las matrices de rigidez  $K^{(e)}$  y vectores fuerzas  $f^{(e)}$  (si las hubiera), de cada elemento del sistema.
- Ensamblaje y resolución de la ecuación matricial de equilibrio global del sistema ( $K a = f$ ) para calcular los valores de las incógnitas en los nudos,  $a$ .
- A partir de los valores de las incógnitas en los nudos se obtiene información sobre otros parámetros de interés del sistema (por ejemplo, tensiones, deformaciones en las barras, voltajes, caudales, etc.).

Todos los resultados anteriores deben presentarse de forma más clara y gráfica posible para facilitar la toma de decisiones sobre el diseño. Esta presentación constituye, definitivamente, la fase de *postproceso* que, naturalmente, al igual que la de *preproceso* debe estar preparada para poder adaptarse a todas las posibles opciones de cada tipo de problema particular. El esquema anterior se presenta en forma gráfica en la figura 6.8.

### 6.4. SISTEMAS CONTINUOS

Denominaremos sistemas continuos aquellos cuyo comportamiento no puede expresarse en forma sencilla

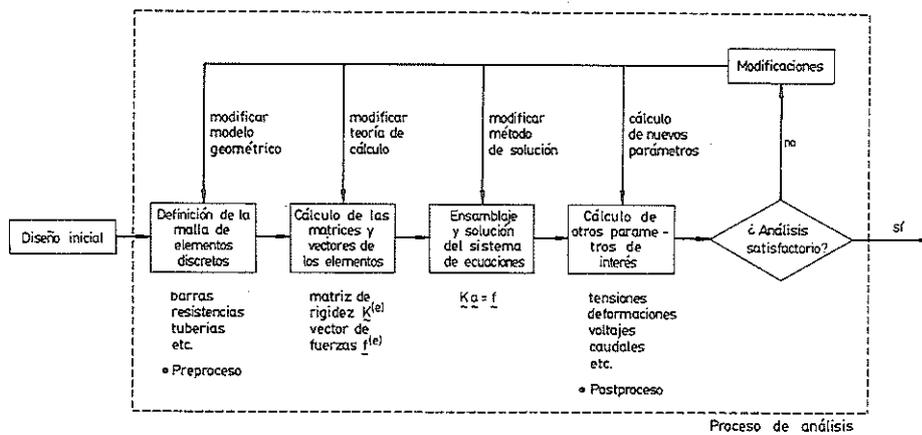


Figura 6.8 Esquema del proceso de análisis de un sistema discreto en un programa de CAD.

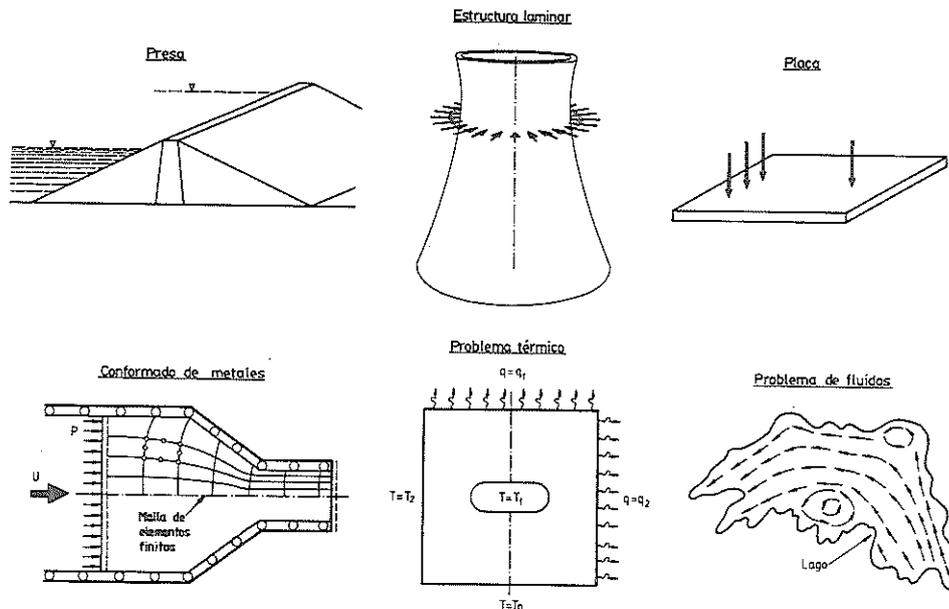


Figura 6.9 Algunos sistemas continuos en ingeniería.

función de un número pequeño de variables discretas. Los ejemplos de dichos sistemas en la ingeniería y en la física son innumerables. En ingeniería de estructuras se puede considerar que, prácticamente, todas las tipologías estructurales, a excepción de las formadas por elementos de barras, responden a dicha clasificación (placas, puentes, láminas, presas, etc.). Similarmente ocurre con otras ramas de la ingeniería tales como la ingeniería del terreno, mecánica, hidráulica, aeronáutica naval, etc. donde la mayor parte de los problemas de interés práctico tienen un carácter bi o tridimensional y, por consiguiente, continuo (figura 6.9). Así, pues, dichos sistemas constituyen un alto porcentaje de los problemas reales que intervienen en el diseño de obras o componentes, en su sentido más amplio, de ingeniería. Esto explica el gran esfuerzo desarrollado en las últimas décadas por elaborar modelos de cálculo eficaces y económicos para su análisis.

Básicamente el estudio del comportamiento de un sistema continuo puede abordarse desde dos puntos de partida diferentes:

- Realizar la integración de las ecuaciones en derivadas parciales, con sus correspondientes condiciones de contorno, que expresan el equilibrio de un elemento diferencial genérico del sistema.
- Partir de un funcional  $\Pi$ , definido como una expresión integral sobre todo el sistema, que depende de las variables fundamentales del mismo  $\mathbf{U}$ . La solución del sistema continuo son los valores de  $\mathbf{U}$  que hacen estacionario a  $\Pi$  con respecto a variaciones pequeñas  $\delta\mathbf{U}$  (Ejemplo: En un problema de estructuras los desplazamientos, hacen estacionario y mínimo el funcional de energía potencial de la estructura).

Puede demostrarse que los dos planteamientos, aunque conceptualmente diferentes, están intrínsecamente relacionados ya que, obviamente, ambos deben proporcionar la respuesta correcta del sistema. No obstante, la utilización de uno u otro conlleva desarrollos matemáticos muy distintos, si bien puede comprobarse que, a efectos prácticos, las etapas fundamentales del modelo de cálculo final, que son

las que interesan para elaborar un programa de CAD, son prácticamente las mismas como veremos a continuación.

#### 6.4.1. Planteamiento a): Solución de las ecuaciones diferenciales del sistema

Por condicionantes de espacio, descartaremos entrar aquí en explicar métodos para la *solución analítica* de ecuaciones diferenciales de sistemas continuos, y abordaremos únicamente el caso de su *solución numérica* que, de hecho, constituye el procedimiento más usual en la práctica. En particular, se prestará especial atención a los detalles relacionados con los *métodos de diferencias finitas, elementos finitos e integral de contorno*, que constituyen las metodologías de cálculo más utilizadas hoy en día en los programas de CAD existentes.

Para introducir las ideas básicas haremos uso de un sencillo ejemplo en una dimensión.

Así, consideremos dos problemas conceptualmente diferentes. El primero es una barra bajo una carga uniformemente repartida,  $b$ , en la dirección de su eje; y el segundo, la misma barra en la que se genera una cantidad de calor también uniforme por unidad de longitud  $Q$ . De la consideración del equilibrio de un elemento diferencial de barra en ambos problemas se deducen las ecuaciones diferenciales de equilibrio siguientes (figura 6.10):

Barra a tracción

$$\frac{dN}{dx} + b = 0$$

$$N = EA \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left( EA \frac{dU}{dx} \right) + b = 0$$

Barra calentada

$$\frac{dq}{dx} - Q = 0$$

$$q = -K \frac{dT}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left( K \frac{dT}{dx} \right) + Q = 0 \quad (6.11)$$

con las condiciones de contorno

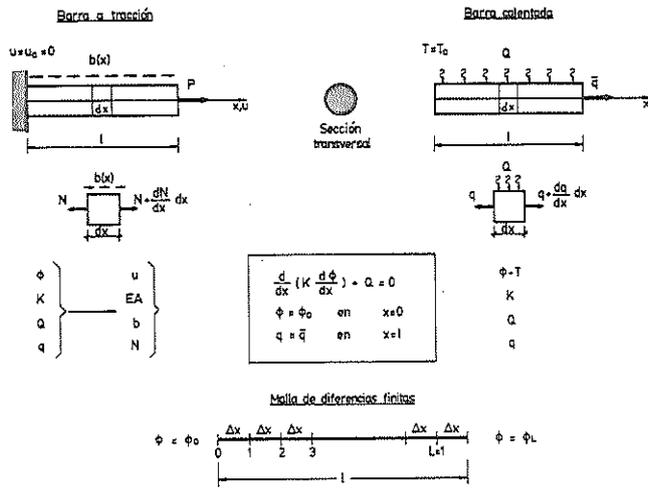


Figura 6.10 Barra a tracción y calentada. Analogía de las ecuaciones diferenciales de equilibrio y malla unidimensional de diferencias finitas para el análisis.

$$\begin{aligned}
 U = U_0 = 0 \text{ en } x=0 & & T = T_0 \text{ en } x=0 \\
 N = EA \frac{dU}{dx} = P \text{ en } X=l & & q = -K \frac{dT}{dx} = \bar{q} \text{ en } x=l
 \end{aligned}
 \tag{6.12}$$

Se observa en las ecuaciones anteriores que ambos problemas son equivalentes sin más que intercambiar los conceptos de desplazamiento,  $u$ , esfuerzo axial,  $N$ , fuerza repartida,  $b$ , y el producto  $EA$  en la barra traccionada por los de temperatura,  $T$ , flujo de calor,  $q$ , cantidad de calor generada por unidad de longitud,  $Q$ , y conductividad térmica,  $K$ , respectivamente en la barra calentada. Por consiguiente, se puede plantear la misma metodología de solución para ambos problemas, que se reduce a encontrar una función  $\Phi$  que satisfaga la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \left( K \frac{d\Phi}{dx} \right) + Q = 0 \text{ en } 0 \leq x \leq l & \tag{6.13} \\
 \text{con } \begin{cases} \Phi - \Phi_0 = 0 \text{ en } x=0 \\ q - \bar{q} = 0 \text{ en } x=l \end{cases}
 \end{aligned}$$

interpretándose los parámetros del problema  $\Phi$ ,  $q$ ,  $Q$ , y  $K$ , adecuadamente en uno u otro caso.

Estudiaremos ahora la solución de las ecuaciones (6.13) por varios procedimientos.

6.4.1.1. Método de diferencias finitas

Este método se basa en dividir el dominio de definición del problema en una malla de  $L + 1$  puntos, igualmente espaciados. El siguiente paso es sustituir las derivadas en los puntos de la malla por expresiones algebraicas de manera que la resolución de la ecuación diferencial se reduzca a resolver un sistema simultáneo de ecuaciones algebraicas donde las incógnitas son los valores de la función buscada en los puntos de la malla.

Así, consideremos la solución de la ecuación

$$K \frac{d^2\Phi}{dx^2} + Q = 0 \tag{6.14}$$

$$\text{con } \begin{cases} \Phi = \Phi_0 \text{ en } x=0 \\ \Phi = \Phi_L \text{ en } x=l \end{cases} \tag{6.14}$$

(Obsérvese que dichas ecuaciones son un caso particular de la ec. (6.13), comentada en el apartado anterior). La malla de diferencias finitas utilizada se muestra en la figura 6.10. Es fácil deducir por el teorema de Taylor (o gráficamente, ver figura 6.11) que las primeras derivadas en un punto  $l$  se pueden aproximar por

$$\left. \frac{d\Phi}{dx} \right|_l = \frac{\Phi_{l+1} - \Phi_l}{\Delta x} \text{ (aproximación hacia adelante)} \tag{6.15}$$

donde  $\Delta x$  es la separación entre los puntos  $l$  y  $l+1$ . Por consiguiente, de la ec. (6.15) se deduce que

$$\left. \frac{d^2\Phi}{dx^2} \right|_l = \frac{\left. \frac{d\Phi}{dx} \right|_l - \left. \frac{d\Phi}{dx} \right|_{l-1}}{\Delta x} = \frac{\Phi_{l+1} - 2\Phi_l + \Phi_{l-1}}{\Delta x^2} \tag{6.16}$$

Así, evaluando la ec. (6.14) en un punto interior de malla,  $l$ , se obtiene haciendo uso de (6.16)

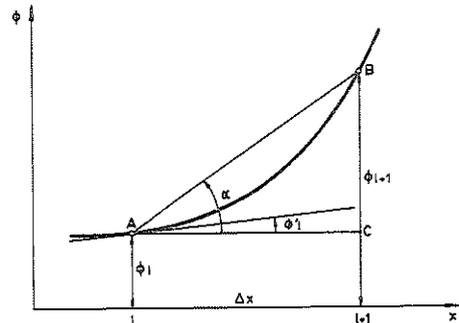
$$K \left. \frac{d^2\Phi}{dx^2} \right|_l = K \frac{\Phi_{l+1} - 2\Phi_l + \Phi_{l-1}}{\Delta x^2} = -Q_l \tag{6.17}$$

Dicha ecuación puede escribirse para cada uno de los puntos interiores ( $l=1,2,\dots,L-1$ ) de la malla de diferencias finitas. Escribiendo las  $L-1$  ecuaciones y teniendo en cuenta las condiciones de contorno (6.14) se obtiene un sistema de ecuaciones algebraico que puede ordenarse en forma matricial como

$$K a = f \tag{6.18}$$

donde

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{6.19}$$



$$\phi_1 = \left. \frac{d\Phi}{dx} \right|_l \approx \frac{\Phi_{l+1} - \Phi_l}{\Delta x} = \frac{BC}{\Delta x} = \tan \alpha$$

Figura 6.11 Método de diferencias finitas. Aproximación hacia adelante la primera derivada.

es una matriz simétrica que se denomina matriz de rigidez de la malla de diferencias finitas,

$$f = \begin{Bmatrix} \frac{\Delta x^2}{K} Q_1 + \Phi_0 \\ \frac{\Delta x^2}{K} Q_2 \\ \dots \\ \frac{\Delta x^2}{K} Q_{L-1} + \Phi_L \end{Bmatrix} \quad (6.20)$$

es el vector de fuerzas en los puntos interiores de la malla y

$$a = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{L-1}]^T \quad (6.21)$$

es el vector que contiene los valores de la función incógnita  $\Phi$  en los puntos interiores de la malla.

Obsérvese la equivalencia de la ec. (6.18) con la obtenida para solución de los sistemas discretos, ec. (6.6). Esta implica que la organización de la metodología de cálculo para este procedimiento sigue prácticamente las etapas descritas en el apartado 6.3.

El sencillo ejemplo anterior presenta de forma clara y concisa las bases fundamentales del método de diferencias finitas. Obviamente, en la aplicación práctica de dicho procedimiento surgen múltiples detalles en los que no podemos entrar por razones de espacio. Simplemente añadiremos aquí que el mismo criterio explicado en el ejemplo se extiende fácilmente a dos o tres dimensiones donde las mallas de diferencias finitas utilizadas son bi y tridimensionales, respectivamente. Un ejemplo de una malla bidimensional se muestra en la figura 6.12. En dicho caso hay que aproximar las derivadas con respecto a las dos direcciones  $x$  y  $y$ , como se muestra en la figura 6.12, pero el proceso general sigue los pasos explicados en el ejemplo anterior, llegándose exactamente a una ecuación matricial del mismo tipo que la (6.18). Los interesados en una información sobre este método pueden consultar las referencias [3] y [4].

#### 6.4.1.2. Métodos de interpolación (Rayleigh-Ritz)

Otro procedimiento para resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales de sistemas continuos es aproximar el valor de las incógnitas,  $\Phi$ , por el sumatorio de productos de funciones conocidas  $N_i(x,y,z)$  por coeficientes incógnitas,  $a_i$ . Así, para el problema de la barra podemos escribir

$$\Phi \approx \hat{\Phi} = \sum_{i=1}^n N_i(x) a_i \quad (6.22)$$

El problema se reduce, pues, a encontrar los valores de  $a_i$  de forma que  $\hat{\Phi}$  satisfaga las ecs. (6.13). Sustituyendo (6.22) en dichas ecuaciones se obtiene

$$\frac{d}{dx} \left( K \frac{d\hat{\Phi}}{dx} \right) + Q = R_\Omega \quad \text{en } 0 \leq x \leq l \quad (6.23)$$

$$\hat{\Phi} - \Phi_0 = R_0 \quad \text{en } x=0$$

$$K \frac{d\hat{\Phi}}{dx} + \bar{q} = R_1 \quad \text{en } x=l$$

donde  $R_\Omega$ ,  $R_0$  y  $R_1$  representan los «residuos» que aparecen

Problema térmico bidimensional

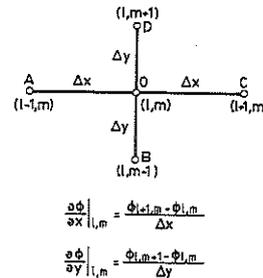
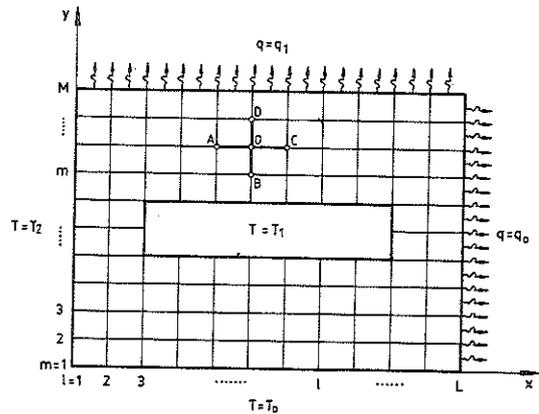


Figura 6.12 Malla de diferencias finitas en dos dimensiones. Aproximación hacia delante de las primeras derivadas.

en las ecs. (6.13) debido a que la solución,  $\hat{\Phi}$ , es aproximada. Es fácil advertir que, precisamente cuando dichos residuos son cero,  $\hat{\Phi}$  satisface las ecuaciones diferenciales del problema y la solución aproximada coincide con la «exacta».

Para garantizar la nulidad de los residuos se utiliza el método denominado de *residuos ponderados*.

Dicho método consiste en hacer cero la suma de las medias ponderadas de los residuos sobre cada uno de sus dominios de definición, es decir

$$\int_0^l W(x) R_\Omega dx + [\bar{W}(x) R_0]_{x=0} + [\bar{\bar{W}}(x) R_1]_{x=l} = 0 \quad (6.24)$$

donde  $W(x)$ ,  $\bar{W}(x)$  y  $\bar{\bar{W}}(x)$  son las funciones de ponderación, o de peso, de cada residuo escogidas de manera arbitraria. La expresión (6.24) se denomina la *forma integral equivalente* del problema. Se deduce fácilmente (de forma heurística) que si dicha ecuación debe satisfacerse para cualquier valor de las funciones  $W$ ,  $\bar{W}$  y  $\bar{\bar{W}}$  se ha de cumplir necesariamente que  $R_\Omega$ ,  $R_0$  y  $R_1$  se anulen en  $0 \leq x \leq l$ ,  $x=0$  y  $x=l$ , respectivamente. Por consiguiente, el valor de  $\hat{\Phi}$  que satisface la ecuación (6.24) es precisamente el que cumple asimismo las ecuaciones diferenciales (6.13) del sistema continuo.

La ec. (6.24) es la base de la obtención del sistema discretizado de ecuaciones del sistema continuo. Efectivamente, haciendo uso de las ecs. (6.22) y (6.23) en (6.24) se obtiene

$$\int_0^l W_i \left[ \frac{d}{dx} \left( K \sum_{j=1}^n \frac{dN_j}{dx} a_j \right) + Q \right] dx + \left[ \bar{W}_i \left( \sum_{j=1}^n N_j a_j - \Phi_0 \right) \right]_{x=0} + \left[ \bar{W}_i \left( K \sum_{j=1}^n \frac{dN_j}{dx} a_j + \bar{q} \right) \right]_{x=l} = 0 \quad (6.25)$$

La expresión anterior puede perfectamente escribirse en forma matricial como

$$K a = f \quad (6.26)$$

donde

$$K_{ij} = \int_0^l W_i \frac{d}{dx} \left( K \frac{dN_j}{dx} \right) dx + [\bar{W}_i N_j]_{x=0} + \left[ \bar{W}_i K \frac{dN_j}{dx} \right]_{x=l}$$

$$f_i = \int_0^l W_i Q dx + [\bar{W}_i \Phi_0]_{x=0} - [\bar{W}_i \bar{q}]_{x=l}$$

$$a = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T \quad (6.27)$$

Por tanto, hemos reducido el problema de encontrar la solución de las ecuaciones diferenciales del sistema continuo al de resolver un sistema simultáneo de ecuaciones algebraicas, análogo al que encontrábamos en la solución de problemas discretos.

Evidentemente, la generalidad de la definición de las funciones de peso, permite una gran cantidad de opciones para escoger  $W_i$ ,  $\bar{W}_i$  y  $\bar{W}_i$ . Una de las más populares en la práctica es tomar  $W_i = \bar{W}_i = \bar{W}_i = N_i(x)$ , lo que se denomina *método de Galerkin*. El lector interesado en otras opciones puede encontrar información al respecto en la referencia [5].

Conviene resaltar la importancia de la selección del desarrollo de la ec. (6.22) y nuevamente existen múltiples alternativas. Así, las funciones  $N_i(x)$  escogidas pueden ser tales que la función  $\Phi$  satisfaga, en principio todas las condiciones de contorno (método de Rayleigh-Ritz [5] y [6]).

En dicho caso, sólo es necesario garantizar la nulidad del residuo  $R_\Omega$ , lo que equivale en la práctica a prescindir de los términos en los que aparece  $\bar{W}_i$  y  $\bar{W}_i$  en las ecuaciones anteriores. Si el desarrollo solo satisficiera alguna de las condiciones de contorno, por ejemplo, la de  $\Phi - \Phi_0 = 0$  en  $x=0$  equivaldría a hacer únicamente cero  $\bar{W}_i$ , debiendo mantenerse la función  $\bar{W}_i$  en la ec. (6.24) para garantizar el cumplimiento de la otra condición en  $x=1$ .

Es importante advertir que la matriz  $K$  de la ec. (6.22) no es simétrica, como se deduce de la ec. (6.27). Para lograr la simetría se integra por partes el término en  $N_j$  de la primera integral de (6.25) obteniéndose

$$- \int_0^l \frac{dW_i}{dx} K \sum_{j=1}^n \frac{dN_j}{dx} a_j dx + \left[ (W_i + \bar{W}_i) \left( K \sum_{j=1}^n \frac{dN_j}{dx} a_j \right) + \bar{W}_i \bar{q} \right]_{x=l} + [W_i q]_{x=0} + \left[ \bar{W}_i \left( \sum_{j=1}^n N_j a_j - \Phi_0 \right) \right]_{x=0} + \int_0^l W_i Q dx = 0 \quad (6.28)$$

La expresión anterior recibe el nombre de *forma débil* de expresión integral inicial. Es muy útil en este caso escoger  $\bar{W}_i = -W_i$ . Asimismo, es corriente seleccionar el desarrollo (6.22) de manera que satisfaga la primera de las condiciones de contorno, ( $\Phi - \Phi_0 = 0$ ), lo que equivale a hacer  $W_i = 0$  (6.24). Con todo esto, la matriz de rigidez y el vector cargas se obtiene como

$$K_{ij} = \int_0^l \frac{dW_i}{dx} K \frac{dN_j}{dx} dx \quad (6.29)$$

$$f_i = \int_0^l W_i Q dx + [W_i q]_{x=0} - [W_i \bar{q}]_{x=l}$$

Obsérvese que, ahora, para la forma de Galerkin ( $W_i = -\bar{W}_i$ ), la matriz de rigidez es simétrica.

Por otra parte, las funciones  $N_i(x)$  pueden estar definidas sobre todo el sistema, o bien por intervalos, subregiones o *elementos* del mismo. Esta última opción constituye conocido *método de los elementos finitos* [6]-[10], y presenta numerosas ventajas de gran utilidad práctica, que ha contribuido decisivamente a que sea el procedimiento más popular para el análisis de sistemas continuos y, consiguientemente, en programas comerciales de CAD. En el apartado siguiente presentaremos brevemente las bases fundamentales de dicho método.

### 6.4.1.3. El método de los elementos finitos

En este procedimiento de análisis, el sistema continuo se discretiza en porciones no intersectantes entre sí, denominadas *elementos finitos*. Sobre cada elemento se *interpola* incógnitas fundamentales del problema, en función de valores en una serie de puntos del elemento, denominados *nodos*, haciendo uso de funciones de interpolación definidas individualmente para cada elemento. Así, recordando el problema unidimensional del apartado anterior se tiene

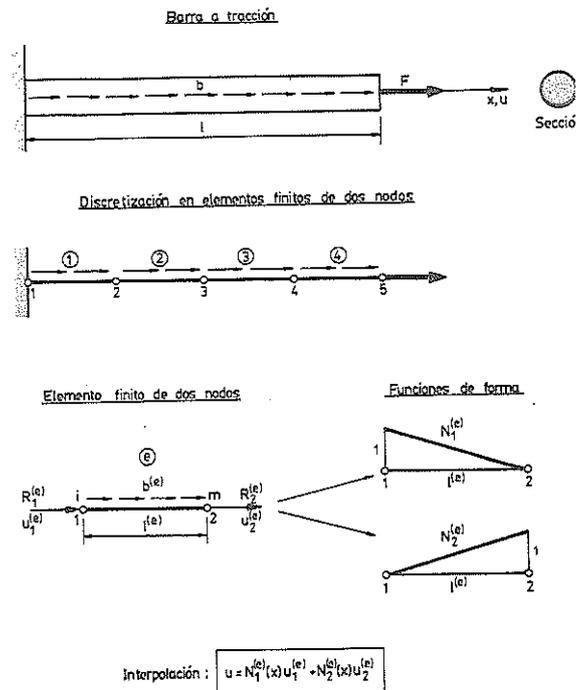


Figura 6.13 Barra a tracción. Discretización en elementos finitos unidimensionales de dos nodos.

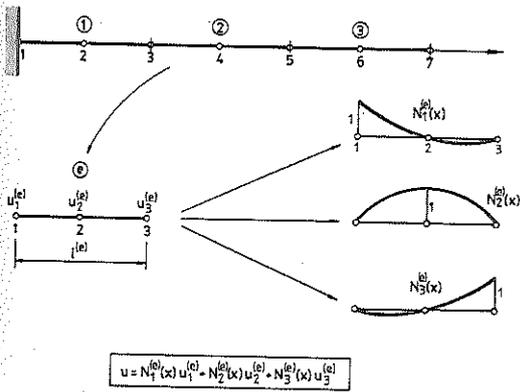


Figura 6.14 Barra a tracción. Discretización en elementos finitos unidimensionales de tres nodos.

escogiendo para la discretización de la barra el sencillo elemento de dos nodos, se puede expresar el valor de la incógnita  $U$  dentro de cada elemento como:

$$U = N_1^{(e)}(x) U_1^{(e)} + N_2^{(e)}(x) U_2^{(e)} \quad (6.30)$$

donde  $N_1^{(e)}$  y  $N_2^{(e)}$  son las funciones de interpolación, o de forma, de los nodos 1 y 2 del elemento (figura 6.13)  $U_1^{(e)}$  y  $U_2^{(e)}$  corresponden con los valores de  $U$  en dichos nodos. Obsérvese que el número de nodos del elemento condiciona el grado de las funciones de forma. Así, en este caso al expresar  $U$  en función de dos valores nodales, las funciones  $N_i(x)$  correspondientes son polinomios de primer grado. Asimismo, de la expresión (6.30) se deduce que la función de forma de un nodo toma el valor unidad en dicho nodo y cero en el resto (figura 6.13).

Si hubiéramos escogido elementos de tres nodos (figura 6.14) la ecuación (6.30) se escribirá

$$U \approx \bar{U} = N_1^{(e)}(x) U_1^{(e)} + N_2^{(e)}(x) U_2^{(e)} + N_3^{(e)}(x) U_3^{(e)} = \sum_{i=1}^3 N_i^{(e)}(x) U_i^{(e)} \quad (6.31)$$

donde las funciones  $N_1^{(e)}$ ,  $N_2^{(e)}$  y  $N_3^{(e)}$  son ahora polinomios cuadráticos (figura 6.14). En general para un elemento de  $n$  nodos se puede escribir:

$$U \approx \bar{U} = \sum_{i=1}^n N_i^{(e)}(x) U_i^{(e)} \quad (6.32)$$

siendo  $N_i^{(e)}(x)$  un polinomio de grado  $n-1$  (figura 6.15). Conviene resaltar que el hecho de que las incógnitas nodales

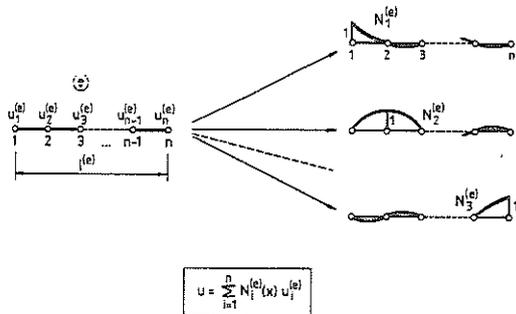


Figura 6.15 Elemento unidimensional de  $n$  nodos, funciones de forma e interpolación.

vayan asociadas precisamente a los valores de  $U$  en los nodos, permite satisfacer de manera automática la condición de contorno  $U=U_0$ , sin más que sustituir en los nodos del contorno correspondientes (en este caso el nodo en  $x=0$ ) el valor de  $U$  por  $U_0$ . Dicha condición de contorno se denomina «natural» y no debe considerarse en el proceso de residuos ponderados (lo que equivale a tomar  $\bar{W}_i=0$ , tal como se ha explicado en el apartado anterior).

Por otra parte, la gran ventaja de la definición local de las funciones de forma es que las integrales sobre el sistema pueden obtenerse fácilmente como suma de las integrales sobre los elementos individuales, es decir:

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} f(x) dx \quad (6.33)$$

de esta manera tanto la matriz de rigidez,  $K_{ij}$ , como el vector de fuerzas,  $f_i$ , de las ec. (6.27), o (6.29), pueden calcularse sumando las contribuciones de las respectivas matrices de rigidez y vectores de fuerzas de los diferentes elementos,  $K_{ij}^{(e)}$  y  $f_i^{(e)}$ , así, de las ec. (6.29) se deduce que:

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^{l^{(e)}} \frac{dW_i}{dx} K^{(e)} \frac{dN_j^{(e)}}{dx} dx = \sum_{e=1}^{n_e} K_{ij}^{(e)} \quad (6.34)$$

$$f_i = \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^{l^{(e)}} W_i Q^{(e)} dx + \text{términos de contorno} = \sum_{e=1}^{n_e} f_i^{(e)} + \text{términos de contorno}$$

donde:

$$K_{ij}^{(e)} = \int_0^{l^{(e)}} \frac{dW_i}{dx} K^{(e)} \frac{dN_j^{(e)}}{dx} dx \quad (6.35)$$

$$f_i^{(e)} = \int_0^{l^{(e)}} W_i Q^{(e)} dx$$

El proceso de suma anterior recibe el nombre de *ensamblaje* y, de hecho, es totalmente idéntico al proceso de ensamblaje explicado en el apartado 6.3 para los sistemas discretos. Tiene gran interés obtener la expresión de la matriz de rigidez y el vector de cargas para el elemento de dos nodos, a partir de las ecuaciones (6.35) con la forma de Galerkin ( $W_i=N_i$ ). Teniendo en cuenta las expresiones de las funciones de forma de la figura 6.14 se deduce fácilmente, tras operar, que:

$$K^{(e)} = \left( \frac{K}{l} \right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

$$f^{(e)} = \frac{(Ql)^{(e)}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \text{términos de contorno}$$

Comprobará el lector (haciendo  $K=EA$  y  $Q=b$ ) la coincidencia de dichas expresiones con las correspondientes al elemento de barra en los sistemas discretos [ecs. (6.2) y (6.3)]. Este es un caso particular que, no obstante, demuestra la equivalencia de ambos procedimientos. En general, la forma explícita de las matrices de rigidez y los vectores de cada elemento se obtienen sustituyendo la expresión de las funciones de forma correspondientes (y las funciones  $W_i$  adecuadas) en las integrales de (6.35). Tras

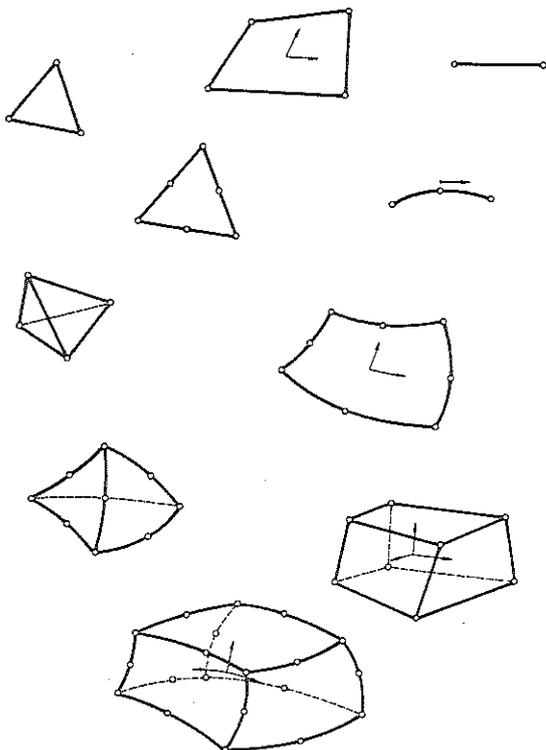


Figura 6.16 Diversos elementos finitos en una, dos y tres dimensiones.

ello, se procede al ensamblaje (que sigue las mismas reglas prácticas que las utilizadas en los sistemas discretos) y se obtiene el sistema de ecuaciones algebraicas de equilibrio global  $Ka=f$ , del que se pueden obtener los valores de las incógnitas nodales  $a$ , y a partir de ellas información del resto de los parámetros de interés dentro de cada elemento.

6.4.1.4. Problemas de elementos finitos en dos y tres dimensiones

En dos y tres dimensiones el tamaño del problema se multiplica pero las etapas básicas del análisis son las mismas. Así, el punto de partida es igualmente el método de residuos ponderados para obtener la expresión integral equivalente del problema y la correspondiente forma débil. Por otra parte, el dominio del problema se discretiza en elementos bi o tridimensionales, según cada caso. Dichos elementos pueden adoptar formas diversas y en la figura 6.16 se presentan algunos de los elementos más usuales en dos y tres dimensiones. Cada elemento lleva asociado un número de nodos, y las funciones de forma correspondientes, que nos proporcionan la expresión básica de la interpolación de las variables del problema en función de sus valores nodales de forma análoga a la ec. (6.32) para el caso unidimensional.

El paso siguiente es obtener la expresión de las matrices de rigidez y el vector de cargas de cada elemento a partir de la forma discretizada de la ecuación de residuos ponderados. Finalmente, se ensamblan las contribuciones de cada elemento en la matriz de rigidez y el vector de fuerzas global, obteniéndose el sistema de ecuaciones final cuya resolución proporciona los valores de las incógnitas nodales. Aclaremos la etapa del cálculo de las matrices y vectores del elemento con un ejemplo.

Ejemplo: Ecuación de Poisson en dos dimensiones

$$\frac{\delta}{\delta x} \left( Kx \frac{\delta \Phi}{\delta x} \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left( Ky \frac{\delta \Phi}{\delta y} \right) + Q = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (6)$$

con

$$\Phi = \Phi_0 \quad \text{en } \Gamma_\Phi \quad (6)$$

$$Kx \frac{\delta \Phi}{\delta x} / x + Ky \frac{\delta \Phi}{\delta y} / y = \bar{q} \quad \text{en } \Gamma_q \quad (6)$$

Ver la figura 6.17.

Esta ecuación se aplica a numerosos problemas de física e ingeniería (transmisión de calor, flujo en medio poroso, electromagnetismo, etc.). Para detalles consultar la referencia [7].

Utilizando elementos triangulares de tres nodos la función incógnita aproxima dentro de cada elemento por

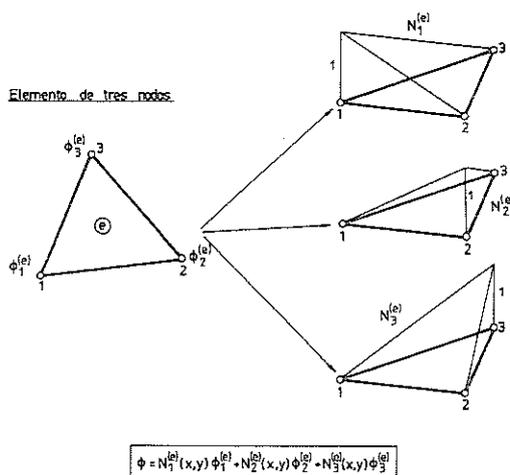
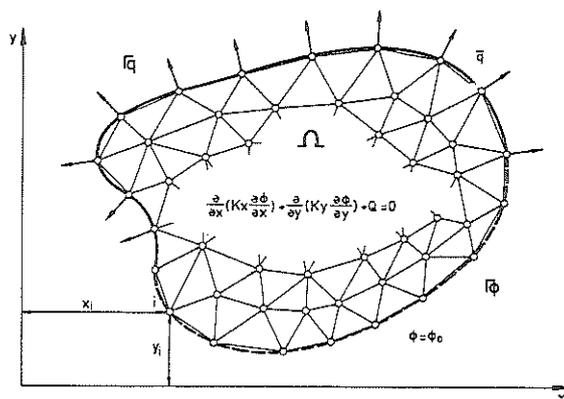
$$\Phi \approx \Phi^e = \sum_{i=1}^3 N_i^{(e)}(x,y) \Phi_i^{(e)} \quad (6)$$

donde

$$N_i^{(e)}(x,y) = \alpha_i^{(e)} + \beta_i^{(e)}x + \gamma_i^{(e)}y$$

es la función de forma del nodo  $i$  que toma un valor unidad en el nodo  $i$  y en el resto (figura 6.17) y los coeficientes  $\alpha_i^{(e)}$ ,  $\beta_i^{(e)}$  y  $\gamma_i^{(e)}$  se obtienen fácilmente en función de las coordenadas de los nodos del elemento (referencia [6] del capítulo 3).

Sustituyendo  $\Phi$  por  $\Phi^e$  en (6.37) y (6.38) y aplicando el método de residuos ponderados a las ecuaciones resultantes y teniendo en cuenta que (6.38a) puede satisfacerse automáticamente en los nodos que pertenecen al contorno  $\Gamma_\Phi$  definiendo los valores nodales apropiados, se obtiene



$$\Phi = N_1^{(e)}(x,y) \Phi_1^{(e)} + N_2^{(e)}(x,y) \Phi_2^{(e)} + N_3^{(e)}(x,y) \Phi_3^{(e)}$$

Figura 6.17 Ecuación de Poisson en dos dimensiones. Solución elementos finitos triangulares de tres nodos.

(6.37) 
$$\iint_{\Omega} W_i \left[ \frac{\delta}{\delta x} \left( K_x \frac{\delta \Phi}{\delta x} \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left( K_y \frac{\delta \Phi}{\delta y} \right) + Q \right] d\Omega +$$

(6.38a) 
$$\oint_{\Gamma_q} \bar{W}_i \left( K_x \frac{\delta \Phi}{\delta x} l_x + K_y \frac{\delta \Phi}{\delta y} l_y - \bar{q} \right) d\Gamma = 0 \quad (6.40)$$

(6.38b) Integrando por partes la primera integral y haciendo  $W_i = -\bar{W}_i = N_i^{(e)}$  (forma de Galerkin) se llega a

(6.39) 
$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left( \frac{\delta N_i}{\delta x} K_x \frac{\delta \Phi}{\delta x} + \frac{\delta N_i}{\delta y} K_y \frac{\delta \Phi}{\delta y} \right) d\Omega &= \\ &= \iint_{\Omega} N_i Q d\Omega + \oint_{\Gamma_q} N_i \bar{q} d\Gamma \end{aligned} \quad (6.41)$$

y sustituyendo la aproximación de la ec. (6.39) se obtiene el sistema de ecuaciones clásico:

(6.42) 
$$K a = f$$

donde los componentes de las matrices  $K$  y  $f$  se determinan sumando (ensamblando) las contribuciones de los elementos individuales.

(6.43) 
$$\begin{aligned} K_{ij}^{(e)} &= \iint_{\Omega^{(e)}} \left( \frac{\delta N_i^{(e)}}{\delta x} K_x \frac{\delta N_j^{(e)}}{\delta x} + \frac{\delta N_i^{(e)}}{\delta y} K_y \frac{\delta N_j^{(e)}}{\delta y} \right) d\Omega \\ f_i^{(e)} &= \iint_{\Omega^{(e)}} N_i^{(e)} Q d\Omega + \oint_{\Gamma_q^{(e)}} N_i^{(e)} \bar{q} d\Gamma \end{aligned}$$

donde  $\Omega^{(e)}$  es la superficie del elemento  $e$  y  $\Gamma_q^{(e)}$  es la porción del contorno del elemento que está contenido en  $\Gamma_q$ . Las ecs. (6.43) son completamente generales y pueden aplicarse a cualquier elemento. En particular, para el elemento de tres nodos se obtiene tras operar y para  $K_x^{(e)} = K_y^{(e)} = K^{(e)}$

(6.44) 
$$\begin{aligned} K^{(e)} &= \\ K^{(e)} \Omega^{(e)} &= \begin{bmatrix} (\beta_1^{(e)})^2 + (\gamma_1^{(e)})^2 & \beta_1^{(e)} \beta_2^{(e)} + \gamma_1^{(e)} \gamma_2^{(e)} & \beta_1^{(e)} \beta_3^{(e)} + \gamma_1^{(e)} \gamma_3^{(e)} \\ \beta_1^{(e)} \beta_2^{(e)} + \gamma_1^{(e)} \gamma_2^{(e)} & (\beta_2^{(e)})^2 + (\gamma_2^{(e)})^2 & \beta_2^{(e)} \beta_3^{(e)} + \gamma_2^{(e)} \gamma_3^{(e)} \\ \beta_1^{(e)} \beta_3^{(e)} + \gamma_1^{(e)} \gamma_3^{(e)} & \beta_2^{(e)} \beta_3^{(e)} + \gamma_2^{(e)} \gamma_3^{(e)} & (\beta_3^{(e)})^2 + (\gamma_3^{(e)})^2 \end{bmatrix} \\ f^{(e)} &= \frac{Q^{(e)} \Omega^{(e)}}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \bar{q}^{(e)} \begin{Bmatrix} l_{12}^{(e)} \\ l_{12}^{(e)} \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6.44)$$

donde se ha supuesto que el contorno  $\Gamma_q^{(e)}$  es el lado 1-2 del elemento.

La dificultad del cálculo de las matrices  $K^{(e)}$  y  $f^{(e)}$  de cada elemento es función de las características del problema y, naturalmente, del tipo de elemento utilizado. Los lectores interesados al respecto pueden encontrar abundante información en las referencias [6]-[10].

6.4.1.5. Método de la integral de contorno

En el intento de elaborar soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales sujetas a condiciones de contorno pueden escogerse funciones de interpolación que aproximen las variables incógnita,  $\Phi$ , de manera que las variables aproximadas,  $\bar{\Phi}$ , satisfagan automáticamente la ecuación diferencial, pero que no satisfagan las condiciones de contorno. Si la ecuación diferencial en consideración es lineal, esto puede lograrse escogiendo funciones de interpolación que a su vez sean soluciones de la ecuación diferencial.

Así,

(6.45) 
$$\Phi \approx \bar{\Phi} = \sum_{m=1}^n N_m a_m$$

donde las  $N_m$  satisfacen la ecuación diferencial (por ejemplo la ecuación (6.37) del ejemplo anterior. En dicho caso, sólo quedan por satisfacer las condiciones de contorno. Aplicando el método de residuos ponderados a dichas condiciones se obtiene:

(6.46) 
$$\int_{\Gamma} \bar{W} R_{\Gamma} d\Gamma = 0$$

donde  $R_{\Gamma}$  es el residuo en el contorno. Por ejemplo para ec. (6.38b) se tendría

(6.47) 
$$\int_{\Gamma_q} \bar{W} \left( K_x \frac{\delta \Phi}{\delta x} l_x + K_y \frac{\delta \Phi}{\delta y} l_y - \bar{q} \right) d\Gamma = 0$$

Sustituyendo la expresión de  $\Phi$  de (6.45) en (6.47) se obtiene el sistema de ecuaciones

(6.48) 
$$K a = f$$

donde en el cálculo de la matriz de rigidez  $K$  y del vector de cargas  $f$  solo aparecen integrales sobre el contorno del sistema. Asimismo, las incógnitas a representan valores de  $\bar{\Phi}$  sobre el contorno, con lo que el tamaño del problema y el volumen de cálculo necesario queda considerablemente reducido. Las etapas de aplicación de este procedimiento son, pues, las siguientes:

- Selección de las funciones de forma y de peso adecuada de manera que todas las integrales queden referidas al contorno del sistema.
- Discretización del contorno en elementos de «contorno uni o bidimensionales según el problema original fuera de naturaleza bi o tridimensional, respectivamente.
- Cálculo de la matriz de rigidez y del vector de cargas de cada elemento de contorno.
- Ensamblaje de dichas matrices y vectores para obtener la ecuación (6.48). Resolución de dicha ecuación para encontrar los valores de las incógnitas sobre el contorno.
- Cálculo de otros parámetros de interés del sistema en función de las incógnitas del contorno. En la figura 6.18

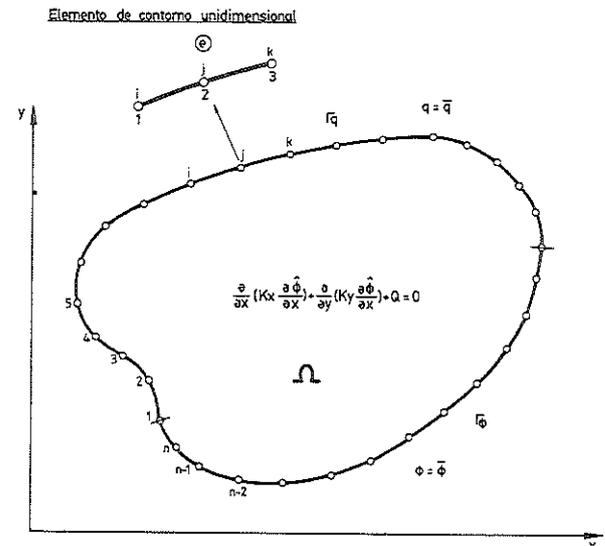


Figura 6.18 Problema bidimensional analizado con elementos de contorno unidimensionales.

se ha esquematizado el análisis de un problema bidimensional por este procedimiento.

La ventaja evidente del método de la integral de contorno es que se reduce en uno el número de dimensiones del problema (ejemplo: para estudiar un problema bidimensional pueden utilizarse elementos de contorno unidimensionales, figura 6.18). Por contrapartida, como desventajas hay que citar la forma llena, generalmente no simétrica, de la matriz  $K$ , y la dificultad para encontrar las funciones de forma y de peso adecuadas para reducir todas las expresiones al contorno en ciertos problemas y muy especialmente, en problemas no lineales. Se remite al lector interesado a las referencias [11] y [12] donde podrá encontrar abundantes detalles sobre este procedimiento de análisis.

6.4.2. Métodos variacionales

En muchos casos la expresión integral de equilibrio del sistema continuo puede obtenerse como condición de estacionariedad de una expresión integral  $\Pi$ , denominada funcional, definida sobre todo el sistema. Un ejemplo típico de esta situación lo encontramos en los problemas de estructuras donde la energía potencial de la estructura  $\Pi$  es estacionaria (y mínima) en la configuración de equilibrio y, por tanto, satisface:

$$\delta\Pi = 0 \tag{6.49}$$

Por consiguiente, si en la discretización de elementos finitos interpolamos las variables (desplazamientos) como:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n N_i \mathbf{a}_i \tag{6.50}$$

La estacionariedad de  $\Pi$  con respecto a variaciones  $\delta\mathbf{U}$  implica que, haciendo uso de (6.49),

$$\delta\Pi = \frac{\delta\Pi}{\delta\mathbf{U}} \delta\mathbf{U} = \frac{\delta\Pi}{\delta\mathbf{a}_1} \delta\mathbf{a}_1 + \frac{\delta\Pi}{\delta\mathbf{a}_2} \delta\mathbf{a}_2 + \dots + \frac{\delta\Pi}{\delta\mathbf{a}_n} \delta\mathbf{a}_n = 0 \tag{6.51}$$

lo que al satisfacerse para cualquier variación  $\delta\mathbf{a}_i$  conduce al sistema de ecuaciones matriciales

$$\frac{\delta\Pi}{\delta\mathbf{a}} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta\Pi}{\delta\mathbf{a}_1} \\ \frac{\delta\Pi}{\delta\mathbf{a}_2} \\ \dots \\ \frac{\delta\Pi}{\delta\mathbf{a}_n} \end{Bmatrix} = \mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{f} = 0 \tag{6.52}$$

Como  $\frac{\delta\Pi}{\delta\mathbf{a}_i} = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\delta\Pi^{(e)}}{\delta\mathbf{a}_i}$  se deduce que las matrices  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{f}$  se pueden formar ensamblando las contribuciones de los distintos elementos en la forma usual.

No obstante, en la práctica no es necesario realizar la variación  $\delta\Pi$  para cada problema ya que, como es bien conocido, la ec. (6.49) es equivalente al popular principio de trabajos virtuales de la estructura.

Ejemplo: Barra a tracción

Energía potencial:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EA} dx - \int_0^l b U dx - \sum_{i=1}^m U_i R_i \tag{6}$$

Sustituyendo  $N = EA \frac{dU}{dx}$  en la expresión anterior y hallando el estacionario de  $\Pi$  con respecto a variaciones  $\delta U$  se obtiene

$$\delta\Pi = \frac{\delta\Pi}{\delta U} \delta U = \int_0^l \delta \left( \frac{dU}{dx} \right) EA \left( \frac{dU}{dx} \right) dx - \int_0^l \delta U b dx - \sum_{i=1}^m \delta U_i R_i = 0 \tag{6}$$

y haciendo  $\delta \left( \frac{dU}{dx} \right) = \frac{d(\delta U)}{dx} = \delta \epsilon$ , se obtiene

$$\int_0^l \delta \epsilon N dx = \int_0^l \delta U \cdot b dx + \sum_{i=1}^m \delta U_i R_i \tag{6}$$

el segundo miembro representa el trabajo de las fuerzas  $b$  y  $R_i$  cuando puntos de la barra sufren un desplazamiento  $\delta U$ , y el primer miembro el trabajo de deformación ejercido por los esfuerzos axiales sobre las deformaciones debidas a los desplazamientos  $\delta U$ . Dichos desplazamientos se denominan «virtuales» y la expresión (6.55) recibe el nombre de *ecuación de los trabajos virtuales* de la barra. Esta ecuación es el punto de partida de las ecuaciones matriciales de la discretización en problemas de estructuras. Así, si la barra se discretiza en elementos finitos de dos nodos se puede escribir para el elemento (figura 6.14):

$$U = \sum_{i=1}^2 N_i^{(e)} U_i^{(e)} ; \delta U = \sum_{i=1}^2 N_i^{(e)} \delta U_i^{(e)} \tag{6}$$

$$N = EA \sum_{i=1}^2 \frac{dN_i^{(e)}}{dx} U_i^{(e)} \quad \text{y} \quad \delta \epsilon = \sum_{i=1}^2 \frac{dN_i^{(e)}}{dx} \delta U_i^{(e)}$$

Aplicando la ecuación de los trabajos virtuales para cada elemento sustituyendo las expresiones anteriores, se obtiene

$$\int_0^{l^{(e)}} \left( \sum_{i=1}^2 \frac{dN_i^{(e)}}{dx} \delta U_i^{(e)} \right) EA \left( \sum_{j=1}^2 \frac{dN_j^{(e)}}{dx} U_j^{(e)} \right) dx = \int_0^{l^{(e)}} \left( \sum_{i=1}^2 N_i^{(e)} U_i^{(e)} \right) b dx + \sum_{i=1}^2 \delta U_i^{(e)} R_i \tag{6}$$

lo que al tener que satisfacerse para todos los  $\delta U_i$  conduce a los dos sistemas de ecuaciones siguientes

$$\int_0^{l^{(e)}} \frac{dN_i^{(e)}}{dx} EA \left( \sum_{j=1}^2 \frac{dN_j^{(e)}}{dx} U_j^{(e)} \right) dx = \int_0^{l^{(e)}} N_i^{(e)} b dx + R_i^{(e)}, \quad i=1,2 \tag{6}$$

Las ecuaciones anteriores pueden escribirse, haciendo uso de las  $N_i^{(e)}$  de la figura y operando, como:

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)} \tag{6}$$

donde

$$\mathbf{K}^{(e)} = \left( \frac{EA}{l} \right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \frac{(bl)^{(e)}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{q}^{(e)} = \begin{Bmatrix} R_1^{(e)} \\ R_2^{(e)} \end{Bmatrix}$$

Del ejemplo anterior se deducen varias conclusiones:

- 1) Se observa la coincidencia de las matrices de rigidez y los vectores de cargas obtenidos en este procedimiento con los obtenidos en la ec. (6.36) y partiendo de las ecuaciones diferenciales de la barra y utilizando el método de residuos ponderados de Galerkin.
- 2) Dicha coincidencia implica necesariamente que la for

6.53) integral del principio de los trabajos virtuales es idéntica a la forma débil de Galerkin de las ecuaciones de equilibrio de la barra. Esto puede comprobarse comparando la ec. (6.58) con la (6.28) (prescindiendo para mayor claridad de los términos de contorno en  $x=0$  y  $x=1$ ).

6.54) En resumen, en problemas de estructuras la forma «natural» de operar es obtener la matriz de rigidez y el vector de cargas de cada elemento a partir de la expresión del principio de los trabajos virtuales del elemento para luego proceder al ensamblaje y solución de las ecuaciones en la forma usual. Los interesados en más detalles sobre aplicación del principio de los trabajos virtuales en problemas de elementos en estructuras uni, bi y tridimensionales pueden consultar las referencias [6]-[10].

6.55) Hay que destacar que para otros tipos de problemas la utilización directa de expresiones variacionales, similares a la de la energía potencial en estructuras, tiene reconocidas ventajas para encontrar la expresión integral de equilibrio de forma sencilla. La dificultad principal estriba en que dichas expresiones no son siempre conocidas, lo que obliga a utilizar métodos como el de residuos ponderados que garantizan la obtención de la expresión integral necesaria para expresar las ecuaciones del problema en forma algebraica. Para mayor información sobre la aplicabilidad de los métodos variacionales ver las referencias [5], [7] y [13].

## 6.5. RESUMEN DE CONCEPTOS. ORGANIGRAMA GENERAL DEL MODELO DE CALCULO EN UN PROGRAMA DE CAD

6.56) Hemos pasado revista en los apartados anteriores a los procedimientos de análisis más utilizados en programas de CAD para estudio de sistemas discretos y continuos. Se habrá podido apreciar que, si bien cada uno de dichos procedimientos se apoya en fundamentos matemáticos conceptualmente distintos, y en ocasiones nada evidentes

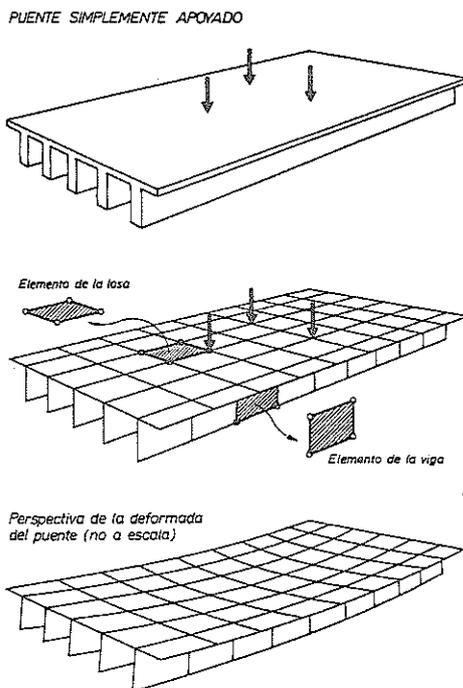


Figura 6.19 Puente analizado con elementos finitos de lámina.

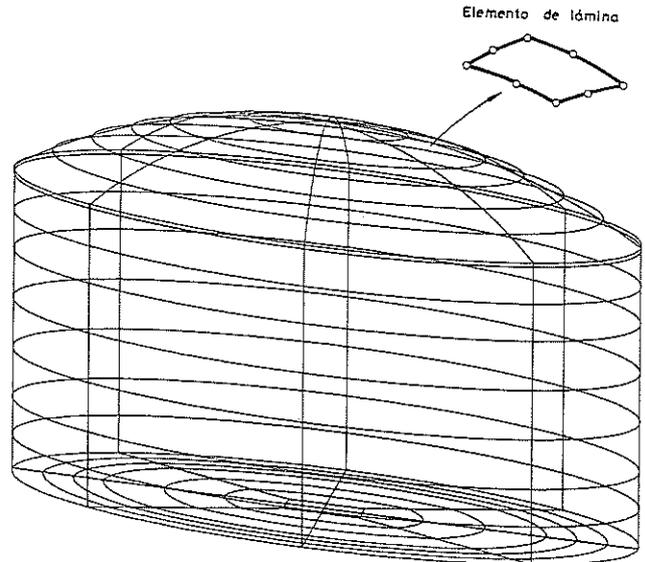


Figura 6.20 Depósito cilíndrico con cúpula esférica analizado con elementos finitos de lámina (dibujo realizado con el programa SICE [20]).

6.57) para el lector profano en el tema, la aplicación práctica de todos ellos presenta numerosos puntos coincidentes de manera que puede hablarse de una metodología común de los procedimientos de cálculo en CAD.

6.58) Para concretar ideas, consideremos el estudio de una serie de problemas diferentes analizados por los procedimientos descritos en los apartados anteriores. Así, supongamos que se precisa el estudio de una estructura de barras, y de una red eléctrica por métodos matriciales (figura 6.4), un problema de transmisión del calor en una placa cuadrada por el método de diferencias finitas (figura 6.12), el cálculo de un puente, un depósito y un bogie por el método de elementos finitos (figuras 6.19-6.23) y, finalmente, la solución de la ecuación de Poisson por el método de la integral de contorno (figura 6.18). Todos los problemas anteriores son típicos casos de aplicación del CAD en ingeniería y su solución, pese a abordarse por procedimientos diferentes, se organiza en la práctica de forma unificada de acuerdo con las etapas siguientes:

6.59) **Etapas 1.** Se selecciona el modelo matemático a utilizar. Por ejemplo, para el cálculo del puente, o del bogie, puede hacerse uso de teorías simplificadas como la de vigas, o más complejas como la de láminas o la de elasticidad tridimensional; asimismo hay que decidir sobre la linealidad o no linealidad (geométrica y del material) del análisis y seleccionar las propiedades mecánicas de los materiales, etc.

6.59) La elección de una u otra teoría condiciona las fases siguientes del cálculo y prefija, de antemano, la aproximación obtenible en el mismo, siendo por consiguiente, una de las etapas fundamentales del proceso de análisis.

6.59) **Etapas 2.** De acuerdo con la teoría seleccionada se escoge el modelo geométrico de análisis y se adapta a las características del método de solución que se escoja. Así, por ejemplo, en el caso de que se utilice el método de diferencias finitas habrá que definir la malla correspondiente (figura 6.12), igualmente se establecerían las mallas de elementos finitos o de elementos de contorno, en el caso de que sean estos los procedimientos a utilizar (figura 6.18). La preparación de todos los datos relacionados con la geometría (real y de cálculo) puede automatizarse al máximo en la fase de preproceso.

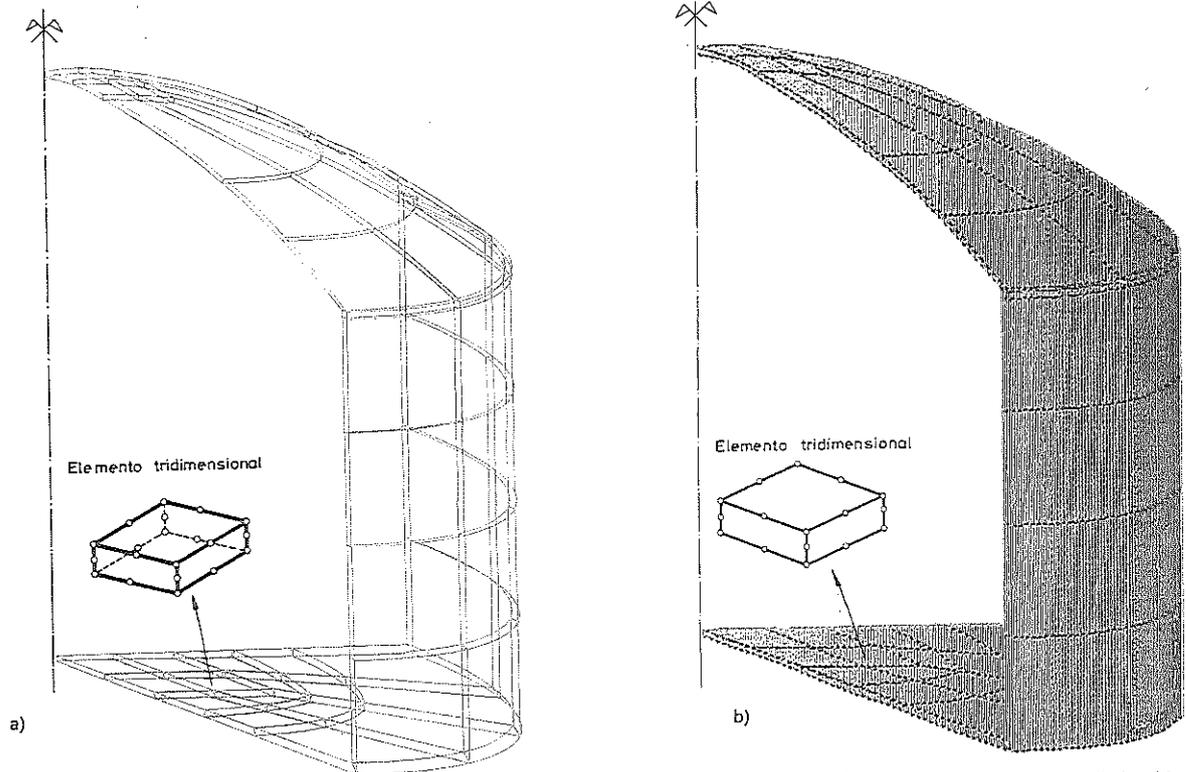


Figura 6.21 Depósito cilíndrico. a) 1/4 de estructura analizado con elementos finitos tridimensionales. b) Malla tridimensional con eliminación de líneas ocultas (dibujos realizados con el programa SICE [20]).

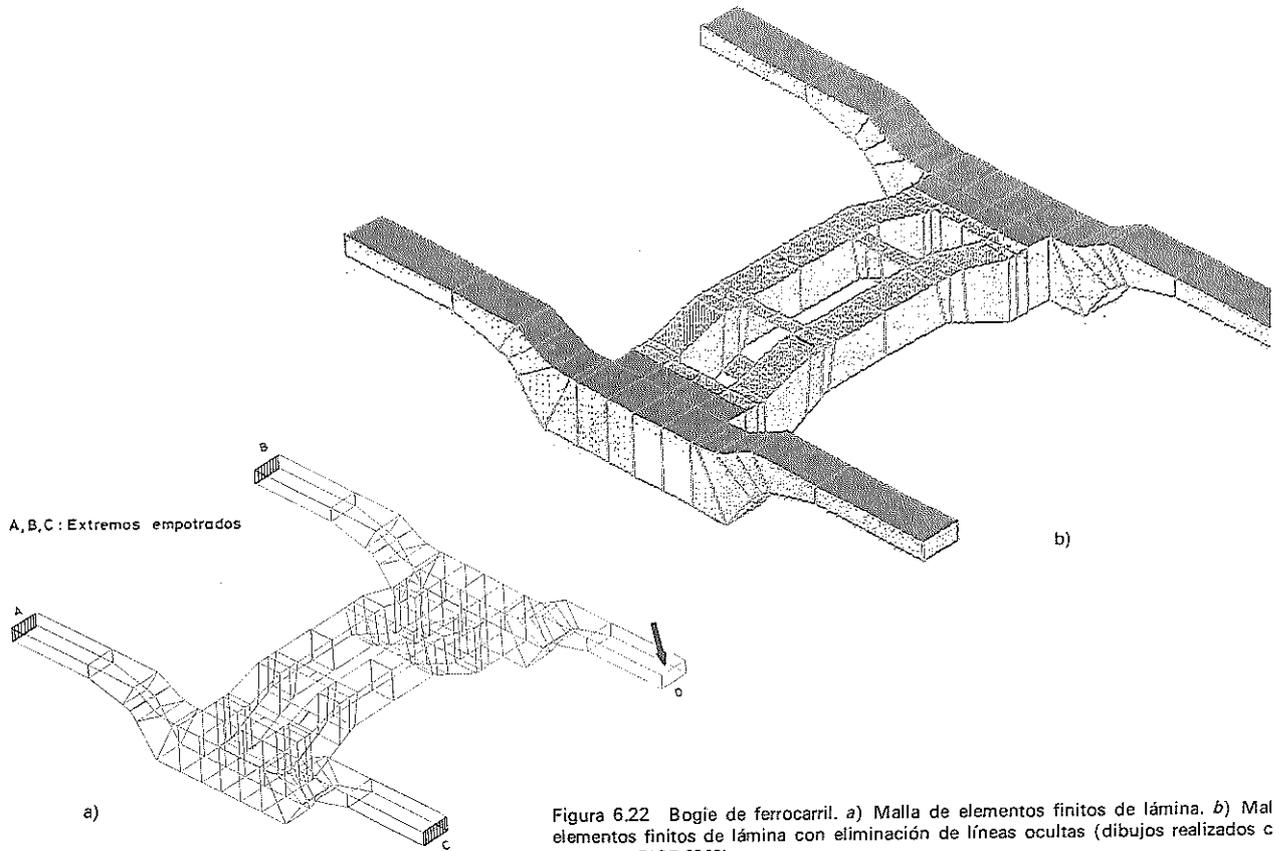


Figura 6.22 Bogie de ferrocarril. a) Malla de elementos finitos de lámina. b) Malla de elementos finitos de lámina con eliminación de líneas ocultas (dibujos realizados con el programa SICE [20]).

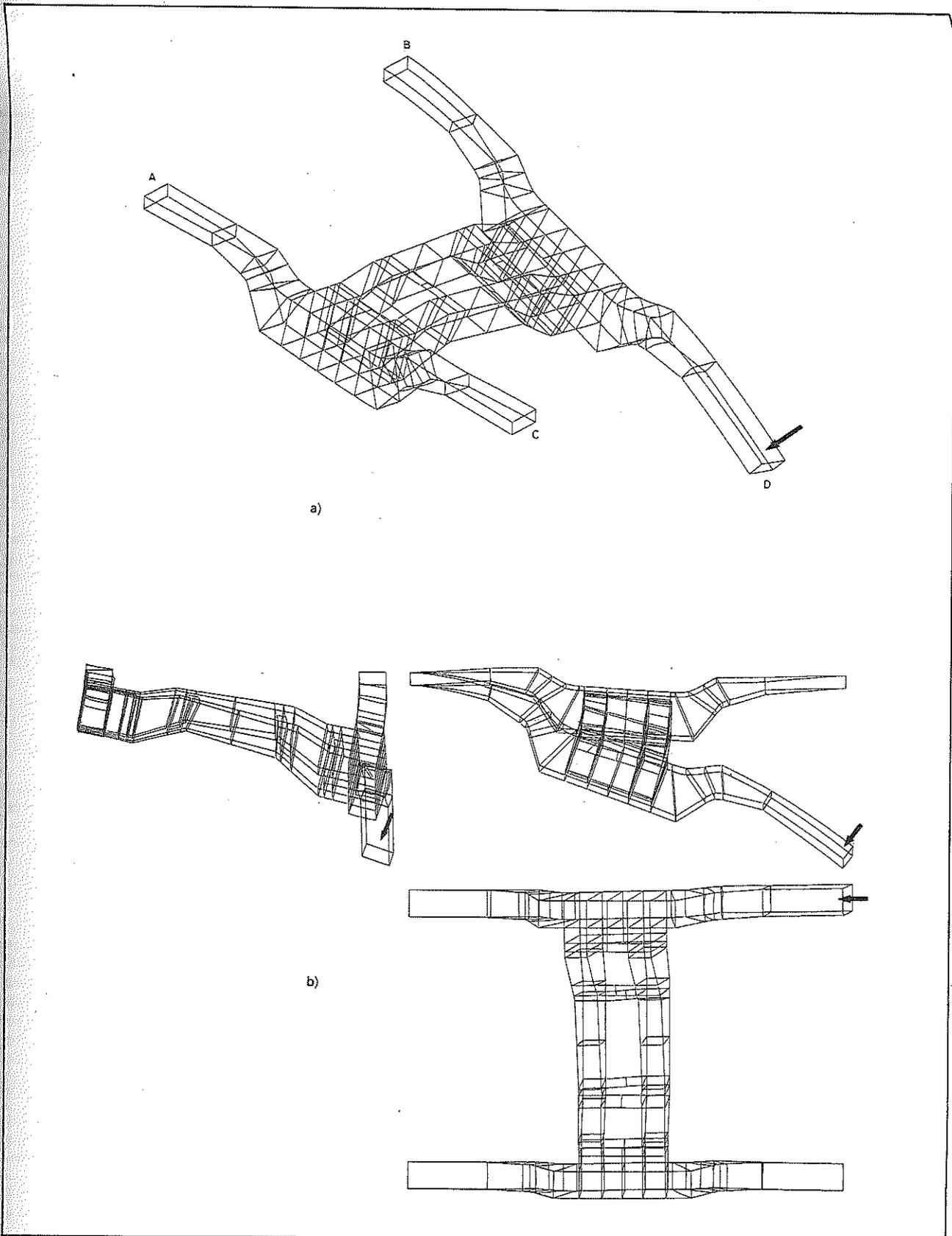


Figura 6.23 Bogie de ferrocarril. a) Perspectiva de la deformada de la malla de elementos finitos bajo una carga puntual en el punto *D*. b) Planta, alzado y perfil de la deformada de la malla de elementos finitos (análisis realizado con el programa SICE [20]).

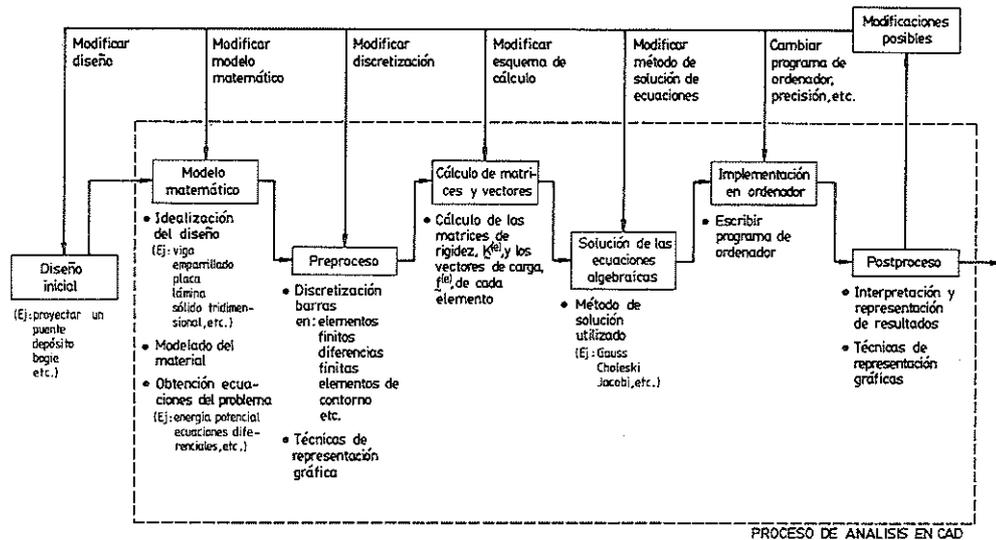


Figura 6.24 Organigrama general del proceso de análisis en CAD.

**Etapa 3.** A partir de los datos geométricos y del material se establecen las matrices y vectores fundamentales de cada «elemento» del sistema. Así, en un análisis por elementos finitos o elementos de contorno se calcularían la matriz de rigidez  $K^{(e)}$  y el vector de cargas  $f^{(e)}$  de cada elemento. Similarmente se haría en el estudio de un sistema discreto, donde por ejemplo, dichas matrices y vectores corresponderían con los de cada barra o resistencia eléctrica (figuras 6.5 y 6.6). Si el método utilizado fuera el de diferencias finitas se establecerían los coeficientes fundamentales asociados a cada nudo de la malla de diferencias, etc.

**Etapa 4.** Las matrices y vectores de los distintos «elementos» se «ensamblan» para obtener la ecuación matricial global del sistema  $Ka=f$ . Dicha ecuación se resuelve para obtener los valores de las incógnitas  $a$  (desplazamientos en problemas de estructuras, temperaturas en problemas térmicos, tensiones en redes eléctricas etc.) utilizando cualquiera de los métodos para resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas existentes (Gauss-Seidel, Choleski, Gauss-Jordan, Jacobi, etc. [10]). La organización interna de esta etapa es prácticamente idéntica para todos los casos anteriormente mencionados y la mayor o menor eficiencia de la misma es función directa del método utilizado para la solución del sistema de ecuaciones y de su buena programación.

**Etapa 5.** Una vez obtenidos los valores de las incógnitas fundamentales  $a$ , puede utilizarse para obtener información sobre otros parámetros de interés del sistema, tales como deformaciones y tensiones en problemas de estructuras, flujo de calor en problemas térmicos, etc.

**Etapa 6.** Todos los resultados obtenidos del análisis deben presentarse de la forma más adecuada posible para facilitar su interpretación rápida. Para ello puede hacerse uso de las diferentes técnicas de representación gráfica existentes. El tratamiento de los resultados constituye lo que comúnmente se denomina *fase de postproceso* y, al igual que la de *preproceso* puede considerarse como parte integrante del modelo de cálculo, o como etapa auxiliar del mismo. En cualquier caso, la interrelación de dichas fases con el resto del proceso de análisis es evidente y difícilmente pueden tratarse como fases independientes ya que la función que

desarrollan está íntimamente relacionada con la metodología de cálculo utilizada.

En las figuras 6.23 se muestra un ejemplo de la deformación (amplificada) del bogie y de varias perspectivas de dicha deformación obtenidas con un programa de postproceso para elementos finitos.

Todas las etapas anteriores se han esquematizado gráficamente en la figura 6.24. Más detalles sobre la programación de las mismas pueden encontrarse en las referencias [10] [14] y [15].

## 6.6. ANALISIS DE ERRORES. PROCESOS AUTOADAPTABLES Y DISEÑO OPTIMO EN CAD

No podemos cerrar esta breve reseña sobre los procedimientos de análisis más usuales en CAD sin hacer mención de tres temas, muy interrelacionados entre sí, y de gran trascendencia para el desarrollo futuro de programas de CA comerciales.

El primer tema se refiere al estudio del error derivado de utilización de procedimientos aproximados de análisis. En los últimos años se han desarrollado diferentes procedimientos para obtener «estimadores» del error en procesos de elementos finitos, así como indicadores de la mejor forma de modificar sucesivamente la malla de elementos de manera que se obtenga una progresiva reducción del error [16] [17]. La utilización de técnicas de predicción-corrección de error permiten reciclar el proceso de solución de manera que la malla de elementos finitos se vaya adaptando de forma automática hasta que el error en la solución se reduzca hasta un valor prefijado. Estos procesos reciben el nombre de autoadaptables puesto que es posible programar el cálculo de manera que las sucesivas modificaciones de la malla, e la búsqueda del error mínimo, se realicen de forma automática por el computador [16].

A la vista de los resultados correctos (error mínimo) del proceso de análisis autoadaptable se deben decidir las modificaciones a efectuar en el diseño inicial, para posteriormente, repetir un nuevo análisis y así sucesivamente hasta que el diseño se considere bueno u óptimo. Este proceso de

optimización puede hacerse manualmente, utilizando meramente criterios subjetivos del proyectista, o bien de forma automática (o semiautomática) acoplando la fase de cálculo con un programa de optimización adecuado. Para introducir los conceptos básicos de los métodos de optimización usuales se necesitaría un nuevo capítulo. El lector interesado en este apasionante tema puede encontrar abundante información en las referencias [18] y [19]. El futuro del CAD apunta precisamente en la dirección de conseguir procesos de optimización automática que combinen las técnicas autoadaptables de análisis antes mencionadas, con potentes métodos de optimización, todo ello auxiliado con nuevas ideas en el campo de la representación gráfica y coordinado por el autor del diseño, quien, en definitiva, tendrá siempre la última palabra sobre la aceptación final del mismo.

## 6.7 BIBLIOGRAFIA

- [1] S. Timoshenko. «Resistencia de Materiales». Espasa-Calpe (1970).
- [2] Argüelles. «Cálculo de Estructuras». E.T.S. Ingenieros de Montes, Madrid (1981).
- [3] I. Fried. «Numerical solution of differential equations». Academic Press, New York (1979).
- [4] A.R. Mitchell y D.F. Griffiths. «The finite difference method in Partial differential equations» J. Wiley, Chichester (1980).
- [5] B.A. Finlayson. «The method of weighted residuals and variational principles». Academic Press, New York (1972).
- [6] O.C. Zienkiewicz y K. Morgan. «Finite element and approximation» J. Wiley (1983).
- [7] O.C. Zienkiewicz. «El método de los elementos finitos». Ed. Reverté, Barcelona (1982).
- [8] R.H. Gallagher. «Finite element analysis fundamentals», Prentice Hall (1975).
- [9] R.D. Cook «Concepts and applications of finite element analysis» J. Wiley, New York (1974).
- [10] K.J. Bathe y E.L. Wilson. «Numerical methods in finite element analysis», Prentice Hall (1976).
- [11] C.A. Brebbia y S. Walker. «Boundary Techniques in engineering» Newnes-Butterworths, Londres (1980).
- [12] E. Alarcón y P. Reyero. «Guía de introducción al método de los elementos de Contorno». E.T.S. Ing. Industriales, Madrid (1982).
- [13] K. Washizu. «Variational methods in elasticity and plasticity» Pergamon Press (1975).
- [14] E. Hinton y R.D.J. Owen. «Finite element programming». Academic Press (1977).
- [15] E. Oñate, A. Gaona, J. Oliver y B. Suárez. «Aplicación de los ordenadores personales al cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos» Revista de Obras Públicas. Abril (1983).
- [16] D.W. Kelly, J.R. de S.R. Gago, O.C. Zienkiewicz e I. Babuska. «A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method. Int. Journ. Num. Meth. Engng., Vol. 19, (1983).
- [17] O.C. Zienkiewicz, J.R. de S.R. Gago y D.W. Kelly. «The hierarchical concept in finite element analysis». Computers and Structures, Vol. 16, nº 1-4 (1983).
- [18] E. Atrek y otros (Editores). «New directions in optimal structural design» J. Wiley (1984).
- [19] R.H. Gallagher. «Diseño estructural óptimo. Una reseña». Rev. Int. Mét. Num. Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 1, nº 1 (1985).
- [20] SICE: Sistema Integrado de Cálculo de Estructuras. Publicación interna de la E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Univ. Politécnica de Cataluña (1986).