

Alguns Aspectos da Simulação Numérica pelo Método dos Elementos Finitos da Estampagem de Chapas Finas

E. Barbosa de Las Casas

Alguns Aspectos da Simulação Numérica pelo Método dos Elementos Finitos da Estampagem de Chapas Finas

E. Barbosa de Las Casas

Publicación CIMNE Nº 78, Diciembre 1995

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, Spain

Alguns Aspectos da Simulação Numérica pelo Método dos Elementos Finitos da Estampagem de Chapas Finas

Estevam Barbosa de Las Casas

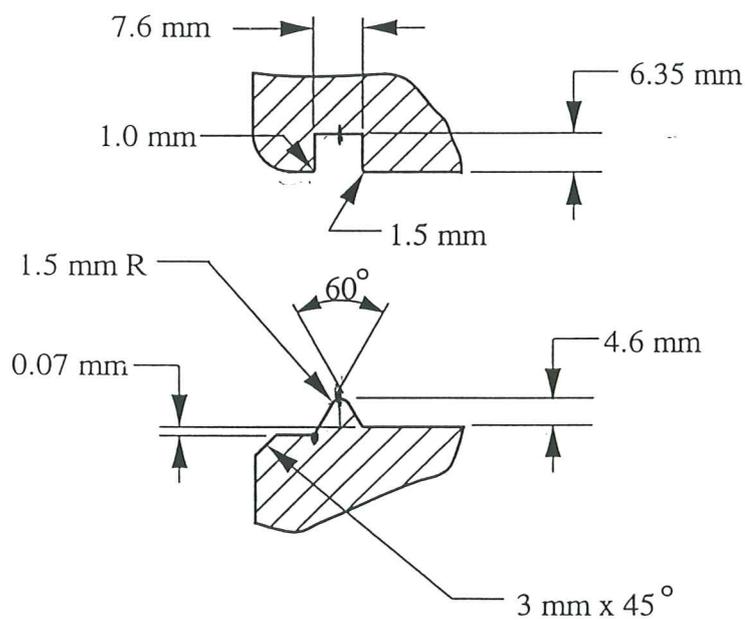
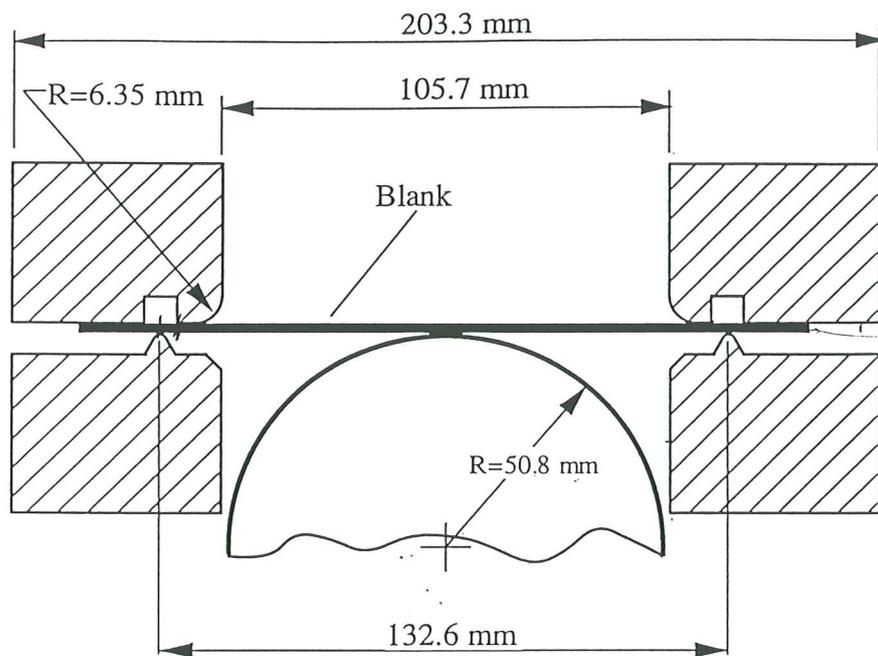
1) Descrição do problema

A utilização de peças estampadas a partir de chapas metálicas finas é hoje essencial em vários ramos da indústria, tais como mecânica, automobilística e aeronáutica. Em uma montadora de veículos, por exemplo, a maior parcela do custo do maquinário está concentrada no setor de prensas, superando o investimento necessário nas demais etapas do processo. A possibilidade de simular numericamente a estampagem, tanto na fase de projeto das ferramentas - matrizes principalmente - quanto quando da definição dos demais parâmetros do processo é bastante recente, e se deve ao desenvolvimento de vários aspectos da mecânica computacional.

Um exemplo de estampagem pode ser observado na figura 1.1, onde se indica as ferramentas utilizadas no processo. Tipicamente envolve o uso de um punção, uma matriz e um anti-rugas. O punção se desloca e deforma a chapa a partir de uma geometria normalmente plana, que se molda à matriz, obtendo-se assim a forma desejada. Muitas vezes a obtenção da peça final requer uma seqüência de operações, com várias matrizes e aplicações de carga. O anti-rugas é pressionado por uma força externa, que deve ser suficiente para evitar o aparecimento de rugas na região comprimida da chapa. Ocasionalmente se utiliza ranhuras e freios (*draw beads*) com a finalidade de reduzir ainda mais a velocidade de entrada do metal na matriz, provocando uma redução de sua espessura e reduzindo a probabilidade de instabilidade local. A chapa é lubrificada em toda sua superfície ou em parte dela, reduzindo neste caso de forma diferenciada o atrito entre as partes.

Os aspectos que limitam o processo são o aparecimento de defeitos localizados tais como rugas e rupturas na chapa (figura 1.2). Estas rugas se dão na região comprimida sob o anti-rugas ou na região externa da matriz, por onde entra a chapa. Para evitá-las, recorre-se a um aumento da força de compressão aplicada pelo anti-rugas, uma redução da lubrificação ou aumento do raio da matriz em relação à espessura da chapa, sendo que todas estas alternativas resultarão em um acréscimo nas deformações nas zonas tracionadas. Cada modificação nos parâmetros do processo virá a alterar os resultados finais, tais como a forma final obtida e a força necessária para deforma-la. Um outro aspecto a ser determinado é a forma inicial da chapa utilizada, de forma a reduzir as sobras durante o processo.

Nas partes tracionadas da chapa, a eventual ruptura se dará tipicamente por localização das deformações transversais (*necking*). Também os esforços devido á flexão, função do raio, ângulo e comprimento das curvas na matriz, podem ocasionar uma ruptura local na zona tracionada.



Draw Bead Detail

Figura 1.1 Chapa e ferramentas para estampagem do *Benchmark Problem B1- NUMISHEET 96*

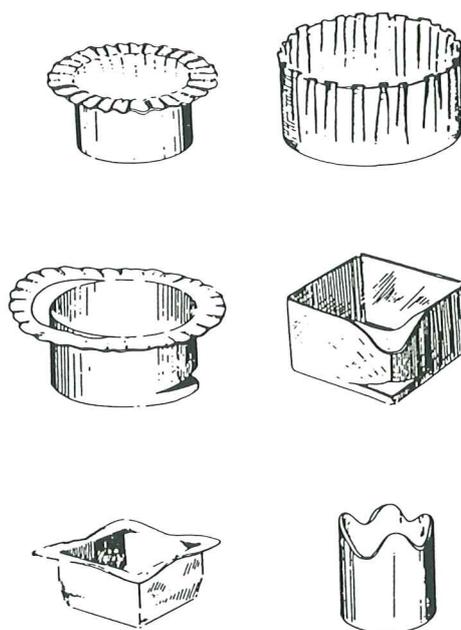


Figura 1.2 Defeitos usuais na estampagem [Kobayashi et al, 89, pag. 48]

Utiliza-se na prática industrial diagramas de conformabilidade baseados em ensaios simples como mostrado na figura 1.3. A utilização destes diagramas é no entanto difícil, já que os resultados obtidos são a rigor válidos apenas para o conjunto de parâmetros utilizados no teste, ou seja, para uma dada história prévia de deformações, espessura da chapa, velocidade de carregamento, etc. Nestes diagramas se mostram os limites de regiões do espaço de deformações principais onde se verifica o início visível das localizações de deformações ou grandezas relacionadas.

Já como propósito de verificar a capacidade do material de ser conformado sem desenvolver defeitos, outros ensaios são utilizados. No teste de Swift, [Chung e Swift, 51] testa-se uma chapa a ser embutida de forma a produzir um copo de fundo reto, utilizando-se um anti-rugas de forma a reduzir o fluxo de metal, mas com uma lubrificação tal que permita a chapa penetrar completamente na matriz. Fixando-se os diferentes parâmetros do processo e variando-se a relação entre o diâmetro da chapa e o diâmetro final da peça, obtêm-se o valor limite desta relação ($LDR = \varnothing_{\text{chapa}} / \varnothing_{\text{copo}}$). Este teste não é apropriado para operações de estampagem onde domine o estiramento, quando se recorre a outros procedimentos [Nakamichi et al, 93].

Do ponto de vista mecânico, uma série de variáveis são, em maior ou menor parte, relevantes para a análise. A geometria da chapa e ferramentas é o primeiro deles. O valor e a velocidade de aplicação da força do punção, a força do anti-rugas, as propriedades mecânicas do material da chapa, incluindo aí a caracterização do comportamento além da fase elástica (endurecimento, efeitos viscosos e anisotropia provocada durante a laminação a frio), tensões residuais, valores de amortecimento e parâmetros de lubrificação complementam a determinação do processo. Alterando-se, por exemplo, as condições locais de lubrificação modifica-se de forma substancial a distribuição de deformações na peça final. Após o final da aplicação da carga, ao se retirar a peça da

NUMISHEET '96 Baseline Forming Limit Diagrams

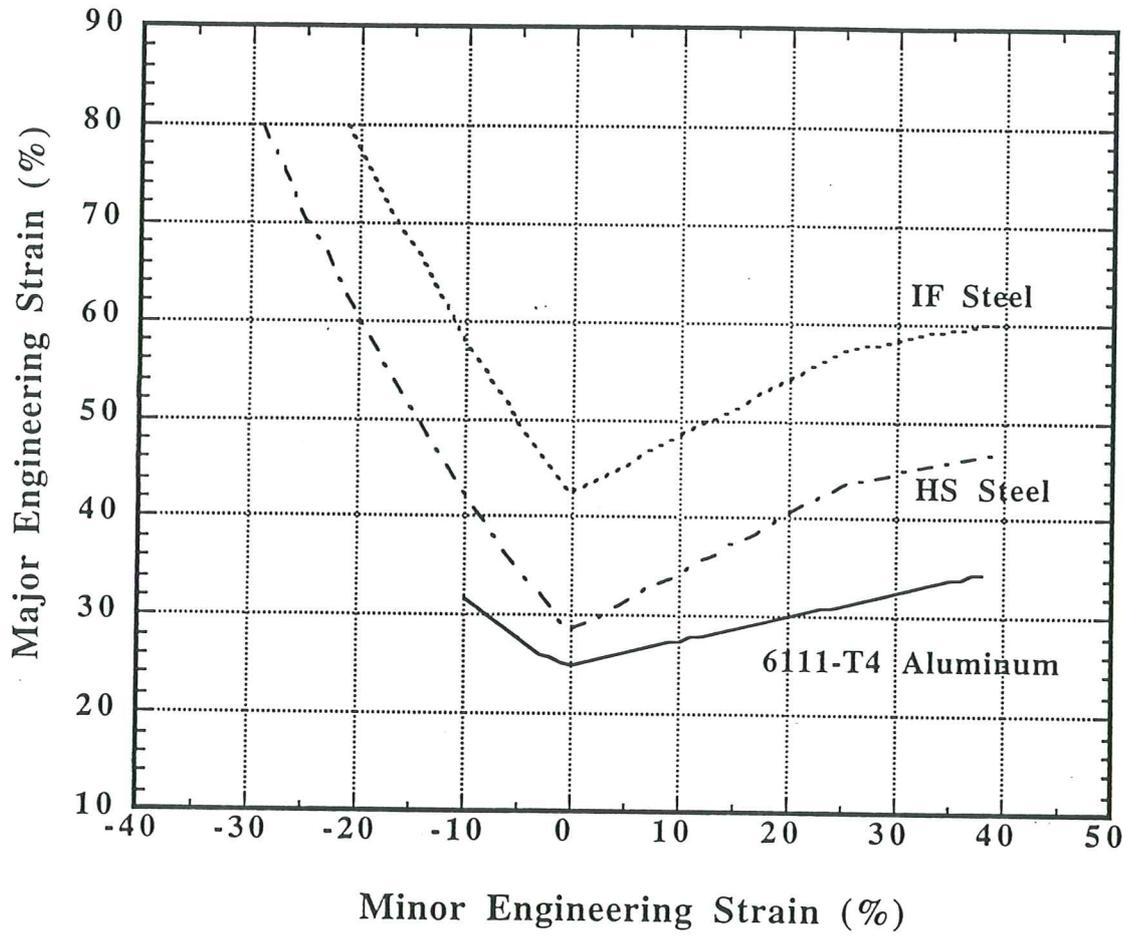


Figura 1.3 Diagramas de formabilidade

matriz, observa-se o fenômeno de recuperação elástica, alterando a geometria obtida e devendo portanto ser considerado quando do projeto do processo.

Um modelo geral de estampagem pode ser descrito pela existência de carregamento quasi-estático, movimento relativo entre as superfícies de contato e contato com ferramentas rígidas, fatores estes comuns a todos os casos. Na manufatura de peças mais complexas as ferramentas são caras e complicadas, e normalmente projetadas a partir do conhecimento empírico acumulado pelos fabricantes. Este processo pode resultar na eventual inadequação das ferramentas ou na necessidade de se ajustar a lubrificação, características mecânicas da chapa e energia utilizada no processo à matriz disponível. A utilização de modelos numéricos para simulação destes processos pode permitir o estudo do emprego de diferentes materiais e espessuras, a verificação do projeto das matrizes, a definição do tipo e forma de lubrificação a ser utilizada bem como otimizar a seqüência de passes na obtenção da peça final desejada.

O interesse pela aplicação do método dos elementos finitos nesta área tem crescido exponencialmente nos últimos anos. Na Europa, Estados Unidos e Ásia, várias iniciativas de pesquisa conjunta envolvendo empresas, órgãos governamentais e institutos de pesquisa atestam este fato. Enquanto em 1977, durante um congresso de estampagem [Koistiner e Wang, 78] eram apresentados dois artigos sobre o tema de simulação numérica, hoje se realizam conferências exclusivas sobre o desenvolvimento da área [Makinouchi et al, 93; VDI Berichte 894, 91; Chenot e Oñate, 88], conferências de plasticidade e elementos finitos dedicam várias sessões ao tema [Owen, Oñate e Hinton, 95; Chenot et al, 92; Thompson et al, 89] e os programas desenvolvidos começam a ser empregadas nas indústrias de forma sistemática.

As dificuldades para obtenção de resultados numéricos confiáveis são, no entanto, consideráveis. Há apenas 6 anos, os professores Lee e Wagoner, da Ohio State University, propuseram aos principais grupos de pesquisa e empresas de *software* da área um problema relativamente simples de estampagem [Lee, Wagoner e Nakamichi, 90], e a partir dos resultados obtidos foi feita uma comparação dos resultados entre si (figura 1.4). A grande dispersão dos resultados serviu de incentivo aos diversos grupos para melhorarem as técnicas de análise e modelagem, e foram organizados encontros no Japão [Makinouchi et al, 93] e Alemanha [VDI Berichte 894, 91] para confrontarem resultados numéricos e experimentais, já agora para problemas mais complexos. Estes encontros servem, entre outros propósitos, para que eventuais usuários possam confrontar os diversos programas na solução de problemas práticos, estando previsto um outro (Numisheet 96) para o ano de 1996 nos Estados Unidos.

2) Aspectos Computacionais

Neste item relaciona-se em linhas gerais as principais hipóteses e considerações a serem consideradas no modelamento do problema, que serão descritas com mais detalhes em outros ítems.

Os problemas de estampagem de chapas finas exigem em geral para sua simulação a elaboração de modelos complexos. Sua preparação, para casos correntes, poderia

demorar meses, tornando a simulação numérica menos atrativa. Assim sendo, torna-se muito importante dispor de uma interface gráfica capaz de gerar a geometria do problema, bem como os demais dados do modelo.

Da mesma forma, o modelo discreto deve ser suficientemente refinado para descrever o comportamento físico do problema, mas evitando-se excessos. O tempo de processamento pode chegar a levar dias; assim a utilização de uma malha criteriosa é importante. Aí se insere a necessidade do emprego de um processo adaptativo de melhora do modelo, que deve cuidar tanto do erro de discretização quanto do erro geométrico, tornando possível prescindir de uma malha muito refinada em todo o domínio.

Os materiais em um processo de estampagem sofrem grandes deformações e deslocamentos, sendo necessário, para se chegar à peça final, a plastificação da chapa, de forma controlada para evitar defeitos e ruptura. Assim sendo, tanto a formulação cinemática do problema quanto a caracterização dos modelos constitutivos devem levar em conta estas fontes de não linearidade.

Outros aspectos básicos são a consideração do atrito e do contato entre chapa e ferramentas. O primeiro é utilizado para redistribuir as deformações na peça, afetando a resposta obtida. O segundo é responsável pela forma final adquirida pela peça. As técnicas mais utilizadas para contato são as de penalizações e de Lagrangiano Aumentado. Algoritmos eficientes de detecção de contato são necessários, sob o risco de tornar o processo altamente dispendioso. Também deve ser considerado o fenômeno da recuperação elástica (*spring-back*), o que reduz a aplicabilidade de modelos constitutivos rígido-plásticos por não incluírem o comportamento durante a fase elástica. Neste caso pode-se recorrer a um segundo processamento com um programa desenvolvido para materiais elásticos, onde as tensões acumuladas durante a estampagem são aplicadas à geometria deformada em uma etapa elástica.

A velocidade de aplicação da carga, que normalmente não é suficiente para tornar necessária uma análise dinâmica, pode ser considerada quando efeitos viscosos são relevantes.

Uma outra opção a ser tomada se refere à formulação matemática do problema. Um primeiro enfoque possível é tratar o problema através de uma analogia com um problema de fluxo. Consegue-se assim, desde que se utilize um modelo rígido-plástico e se suponha as ferramentas rígidas, linearizar o problema, ajustando-se a geometria deformada em função de resposta obtida a cada passo de tempo.

Um segundo enfoque consiste em resolver diretamente o problema mecânico, seja com um algoritmo implícito ou com um explícito. Os métodos implícitos, apesar de maior estabilidade, requerem um tempo de processamento e uma área de memória para armazenamento muito maior. O método explícito pode reduzir o tempo de processamento de um fator entre 10 e 100 para problemas mais complexos. No entanto, por ser condicionalmente estável, requer um passo de tempo reduzido. Desta forma, a etapa de recuperação elástica pode tornar-se mais demorada que a análise plástica, o que parece apontar para o acoplamento dos algoritmos explícito (para a conformação mecânica da chapa) e implícito (para a recuperação elástica).

PS DRAW $f=3$ PH=20

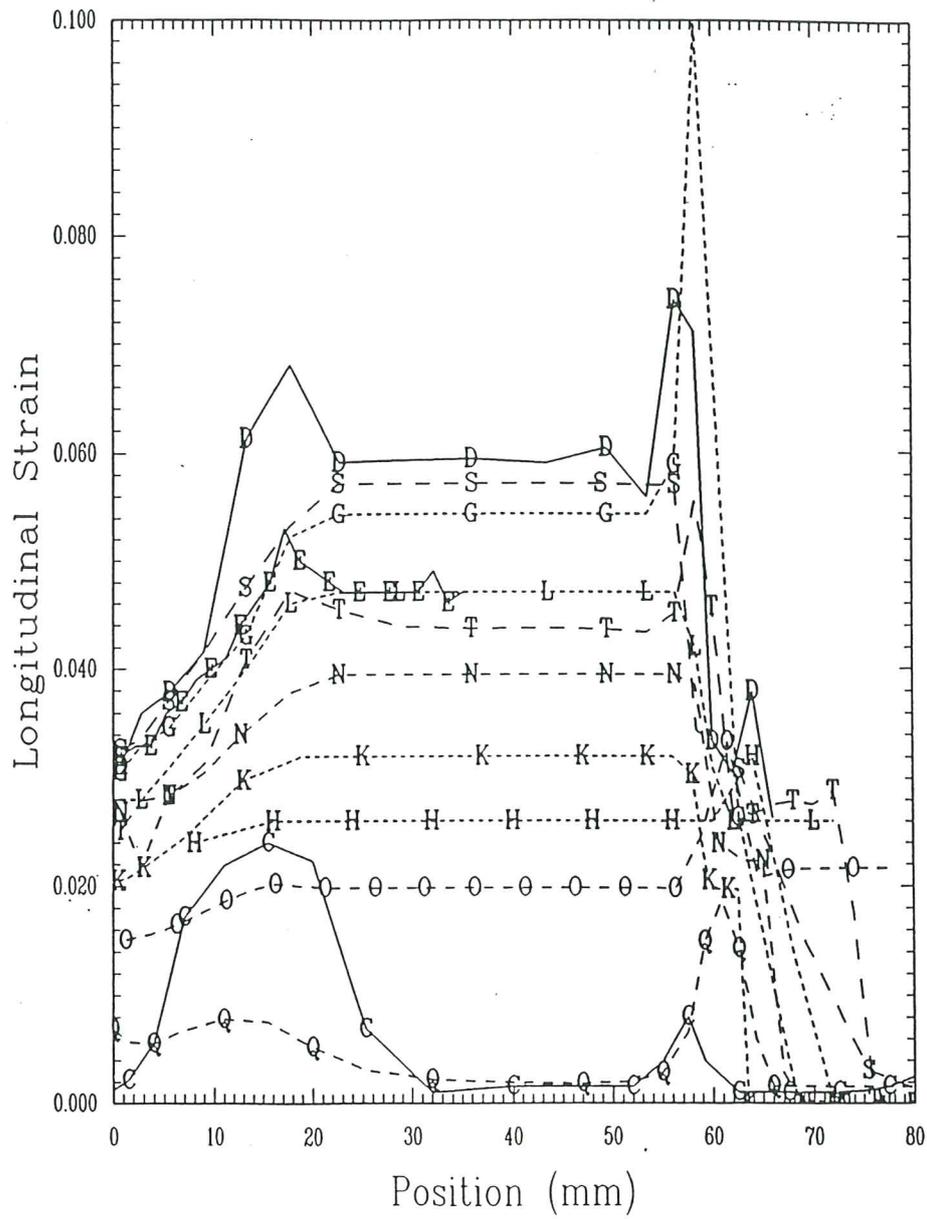


Figura 1.4 Teste de Ohio- resultados em deformação.

Outro ponto a ser considerado é a formulação do elemento a ser utilizado. Modelos matemáticos utilizados são de casca, estado plano e sólidos. A existência da incompressibilidade durante a fase plástica torna necessários cuidados para se evitar o bloqueio da solução, exigindo a utilização de uma formulação mista ou o recurso a técnicas de integração reduzida. A interação de tantos aspectos no modelo computacional a ser desenvolvido torna necessário um programa robusto e confiável. Testes padrão para a aferição da confiabilidade da formulação e implementação dos algoritmos, tais como os propostos por organizações como a Verein Deutscher Ingenieure (VDI) alemã e a National Agency for Finite Element Methods and Standards (NAFEMS) inglesa muitas vezes não são suficientes para comprovar a aplicabilidade de um dado modelo para problemas de estampagem, tornando especialmente importante a comprovação com modelos experimentais.

Um procedimento alternativo cuja utilização vem se generalizando na indústria é o de técnica inversas [Mouatassim et al, 91; Guo et al, 90]. Também designadas como mapeamento geométrico, solução em um passo ou formabilidade ideal, esta simulação é utilizada na indústria nas etapas de pré-projeto das peças e ferramentas, de forma a estimar parâmetros como espessura e forma inicial da chapa, condições de contorno, lubrificações e propriedades do material. A análise parte da forma final (conhecida) da peça, obtendo como resultado a forma e distribuições de espessura na chapa inicial. Como simplificação principal considera-se um modelo constitutivo total, podendo levar em conta grandes deformações e deslocamentos, além da anisotropia. O processamento é de uma ordem de magnitude mais rápido que com uma formulação tradicional, mas não permite obter, por exemplo, a descrição da recuperação elástica, ocorrência de rugas e história de forças e deformações. Um exemplo de aplicação destas técnicas, para o projeto do modelo Twingo da Renault, é descrito em [El Moutassim et al, 95].

3) Geração de Dados do Modelo

A geração de dados para os modelos a serem utilizados pode ser muito trabalhosa, principalmente no caso de não se dispor de ferramentas computacionais apropriadas para esta tarefa. É portanto importante dispor de um programa que, a partir de uma geometria descrita em um arquivo CAD possibilite ao usuário gerar interativamente uma malha adequada e parâmetros tais como a descrição das superfícies de contato, valores iniciais e de contorno, características dos materiais e do carregamento, bem como valores de controle para a análise.

O primeiro aspecto a ser tratado na definição do modelo discreto a ser utilizado é a descrição matemática da geometria a ser estudada. Para o analista, este é um dado normalmente conhecido, fornecido pela indústria, e a princípio ponto de partida para a geração da malha. Ocorre porém com frequência que a descrição via CAD da geometria utilizada na indústria não possui a consistência necessária do ponto de vista geométrico, e por isto deve-se proceder a ajustes e correções [Arabashi et al, 93].

Formalmente, um modelo geométrico Γ é o conjunto $\Gamma = [G, T, A]$, onde
G, a geometria, é a descrição através de entidades geométricas da forma e localização do objeto a ser modelado;
T, a topologia, ou conectividade entre as entidades geométricas;
A, os atributos, dados relacionados com as entidades topológicas tais como tamanhos de elementos, propriedades dos materiais, condições iniciais, etc.

Técnicas de modelamento sólido como *constructive solid modelling* e *boundary representation* são utilizadas nos diversos programas de CAD e discutidas em [Frykestig, 94].

A partir da descrição da geometria, os seguintes passos devem ser seguidos:

- a) definição do domínio de interesse a partir dos dados geométricos,
- b) simplificação e eventual redução da geometria (por exemplo, para utilização de modelos de dimensão reduzida tais como cascas e vigas),
- c) especificação de atributos da análise sobre a geometria,
- d) geração da malha,
- e) definição de parâmetros gerais de controle da análise

Na etapa d), a partir da descrição completa da geometria e atributos relacionados com o tamanho dos elementos, gera-se o modelo discreto a ser utilizado. Elementos mais usuais em problemas de conformação são cascas axisimétricas, elementos 2D para sólidos e lâminas (triangulares e quadrangulares), cascas e elementos sólidos (hexaedros e octaedros). Devem ser o mais regular possível, as malhas devem possuir transições suaves entre regiões com alta e baixa densidade nodal e devem satisfazer conformidade. As malhas podem ser classificadas como estruturadas (quando todos os nós do interior do domínio são cercados por um mesmo número de elementos) ou não estruturadas. As primeiras tem como vantagem o fato de seus elementos serem normalmente mais regulares, as segundas são mais capazes de discretizar geometrias complexas e transições de tamanhos de elementos. A estrutura de dados para armazenar a malha deve ser tal que permita refinamentos locais posteriores, caso se pretenda utilizá-los posteriormente em um processo adaptativo. Uma revisão de estruturas de armazenamento de malhas pode ser encontrada em [Demkowicz et al, 89].

Os três métodos básicos existentes para geração automática de malhas são:

- d1) Enumeração espacial recursiva,
- d2) Método de avanço de frontal e
- d3) Triangularização de Delaunay.

Algumas referencias básicas para cada um destes métodos são [Yerry e Shephard, 84; Peraire et al, 1988 e Watson, 81]. Os métodos enumerados anteriormente são as vezes utilizados em conjunto, de forma a aproveitar as vantagens de cada um.

Um último aspecto relativo à geração de malha é o controle do tamanho dos elementos. Este pode ser feito através de pontos (ou linhas ou superfícies) de controle ou de malhas de *background*, que armazenam valores definidos pelo usuário (ou no caso de processos adaptativos, gerados durante a análise) que são utilizados para interpolar a distância entre nós em cada parte do domínio.

Na etapa c se define, sobre as entidades geométricas, atributos que serão em seguida transferidos à malha, tais como pares para contato, velocidades iniciais, tipos de elementos e solicitações. Normalmente é mais simples que estes sejam atribuídos a entidades geométricas e depois “herdados” pela malha. Terminada a geração da malha, resta ainda ao pré-processador possibilitar que se imponha parâmetros globais do problema e, caso necessário, atributos aos nós e elementos, passo e) da definição do modelo. Na figura 3.1 mostra-se um modelo geométrico utilizado para a análise do problema da figura 1.1.

4) Adaptatividade

Uma malha que seja inicialmente adequada para a chapa não o será em instantes posteriores do processo, já que as regiões mais críticas do modelo mudam com o tempo. Já as ferramentas, normalmente consideradas como rígidas, devem ter uma discretização suficientemente fina para descrever bem sua forma. Uma alternativa é utilizar uma malha regular, bastante discretizada em todo o domínio da chapa, o que levará a um elevado tempo de processamento. O recurso a um processo adaptativo de definição do modelo discreto, por outro lado, permite que se utilize uma malha inicial suficientemente refinada para representar bem as geometrias envolvidas, e automatizar a definição de novas malhas a cada intervalo de tempo que se julgue conveniente.

Parâmetros possíveis para se definir a qualidade da malha em cada região de domínio são:

a) Erro de Discretização

Para uma resposta u_h em deslocamentos obtida pelo programa, trata-se de estimar o erro de discretização $e \approx \|u - u^h\|$, onde u é a solução exata para o modelo matemático utilizado e $\| \cdot \|$ uma dada norma. A medida de erro é obtida então a posteriori, ou seja, a partir de uma solução via MEF, e tem caracter local, sendo válida para cada elemento. O problema de estimativas de erro de discretização para problemas lineares já está razoavelmente tratado na literatura (ver por exemplo, [Babuska, Stroubolis e Upadhyay, 94 ou Las Casas e Magalhães, 95]). No entanto, um estimador eficiente para problemas não lineares ainda é uma questão aberta, apesar de avanços importantes que tem sido feitos nesta área [Johnson e Hansbe, 92], e o problema de transformação consistente das variáveis do problema de uma malha a outra é um de seus aspectos [Hochard et al, 1995, Bonet et al, 92].

b) Erros Geométricos

Uma outra alternativa para definir regiões com discretização não apropriada consiste em verificar se o modelo utilizado é capaz de reproduzir com precisão a geometria com a qual a chapa deve se conformar. Assim sendo, elementos menores são necessários onde existem mudanças rápidas de curvatura. Este critério de qualidade da discretização é então puramente geométrico, notando-se no entanto que as regiões de grande curvatura coincidem muitas vezes com aquelas de maiores gradientes na solução.

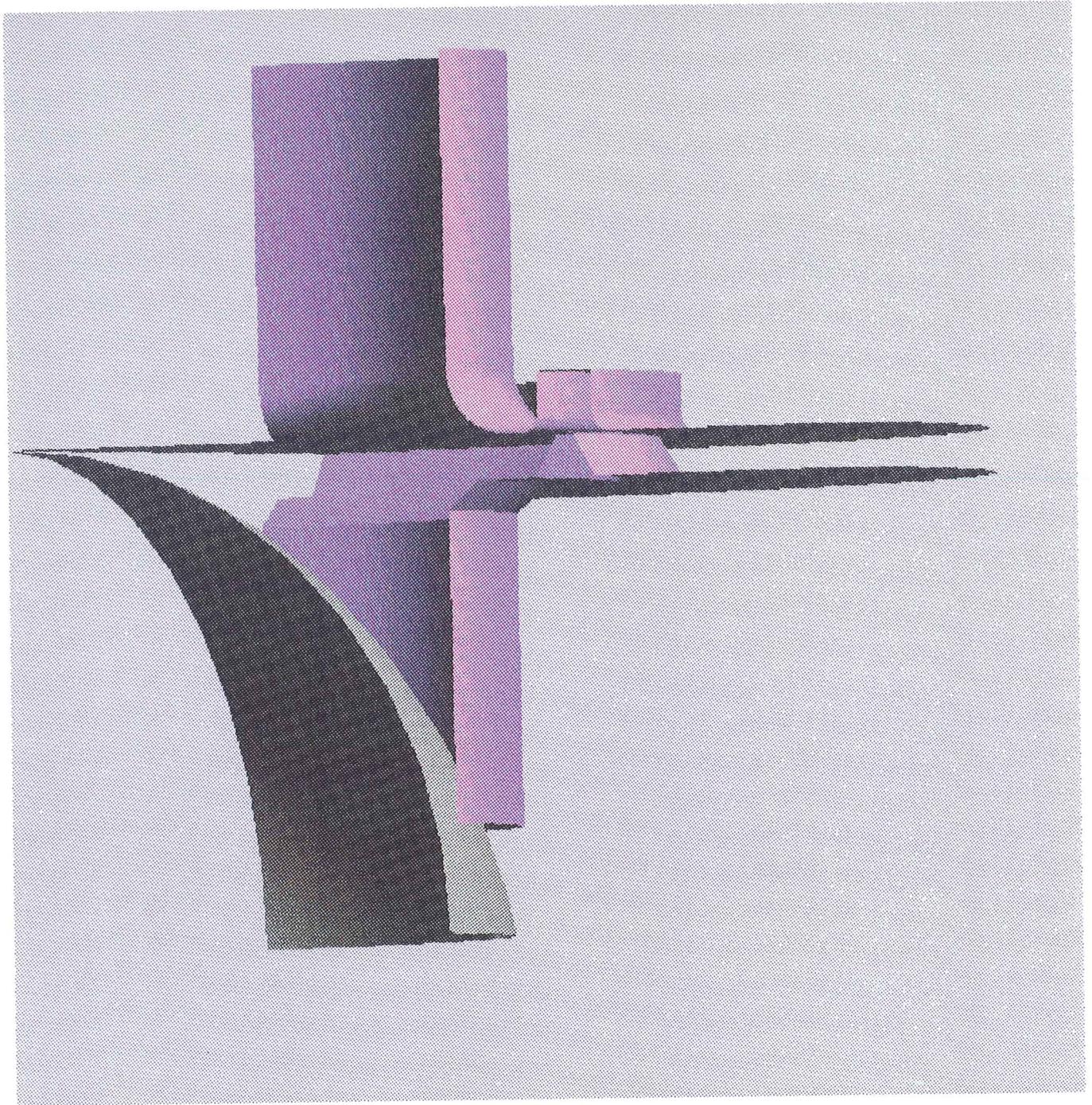


Figura 3.1 Descrição geométrica do modelo para o *Benchmark Problem B1*- Programa FLIPP- UPC

c) Contato

Deve-se evitar que a malha da chapa seja menos refinada que a ferramenta nas superfícies de contato, quando da utilização de algoritmos de penalização. Isto poderia levar a ocorrência de penetrações difíceis de detectar com o algoritmo de busca, tornando desejável considerar estas situações nas redefinições do modelo discreto.

A partir de uma ou mais das medidas de adequação da malha ao problema, duas alternativas podem ser tomadas: redefinir o modelo localmente ou gerar uma nova malha a partir de parâmetros de densidade nodal ajustados. Além de aumentar o número de graus de liberdade considerado, deve-se poder desrefinar o modelo eliminando-se elementos onde não sejam necessários. O refinamento (ou desrefinamento) deve levar em conta as características de regularidade, conformidade e transições suaves entre regiões do modelo para a malha.

As técnicas de refinamento de malha, a partir de um critério de erro determinado, podem ser agrupadas em três tipos:

- refinamentos h , onde se redefine, local ou globalmente, o tamanho dos elementos a partir da qualidade estimada dos resultados obtidos em um passo anterior,
- refinamentos r , onde se altera a disposição espacial dos nós no modelo de forma a redistribuir as densidades nodais em regiões do domínio,
- refinamento p , onde se modifica o número de graus de liberdade do modelo alterando-se o grau das funções de interpolação.

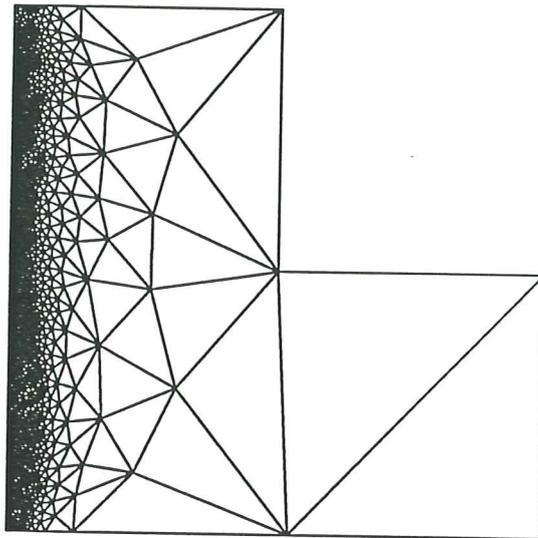
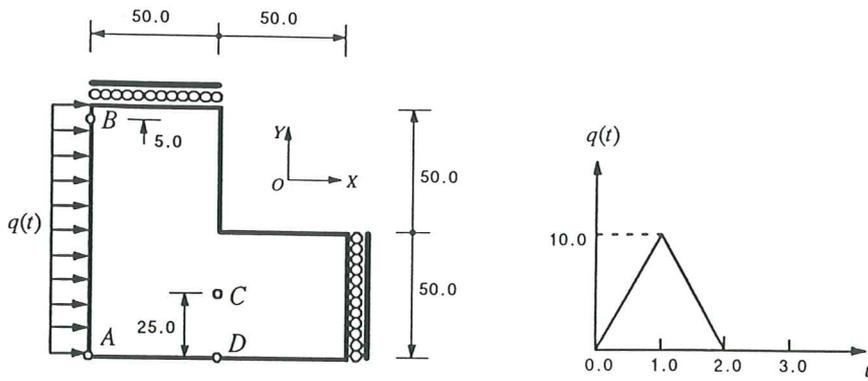
Os refinamentos h tem sido mais utilizados para problemas não-lineares (veja, por exemplo, [Silva et al, 1995]). Uma variante interessante consiste em se recorrer a uma redefinição global do modelo alterando-se os parâmetros de dimensões dos elementos e gerando-se uma nova malha. Um exemplo de utilização de refinamento adaptativo para um problema dinâmico é mostrado na figura 4.1, a partir dos resultados de Zeng [Zeng, 91], obtidos utilizando o estimador do erro de discretização de Zienkiewicz e Zhu.

5) Modelo Matemático

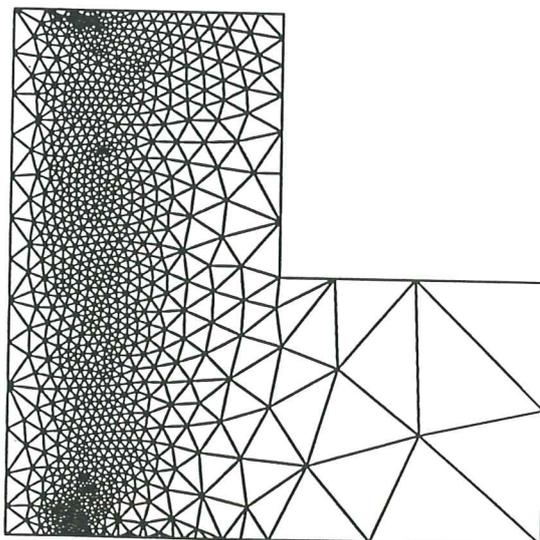
5.1) Formulação de Fluxo e em Deslocamentos

Duas alternativas disponíveis para enfocar o problema de estampagem de chapas finas são tratá-lo do ponto de vista dos deslocamentos desenvolvidos ao longo do processo (formulação em deslocamentos) ou considerando como incógnitas nodais as velocidades de pontos da chapa para cada instante (formulação de fluxo).

Na formulação de deslocamentos, estes estão relacionados com as deformações a partir de considerações cinemáticas de forma a permitir incluir as não-linearidades devidas às grandes deformações e deslocamentos. Estas deformações ϵ são relacionadas com medidas apropriadas de tensões σ , a partir de modelos constitutivos elastoplásticos ou elastoviscopoplásticos. Finalmente, verifica-se o cumprimento das equações de equilíbrio global da peça. O procedimento é mostrado de forma esquemática abaixo:

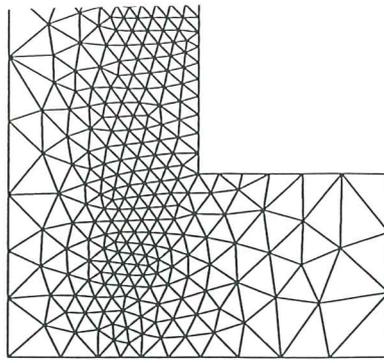


NNO=787
 NEL=1454
 NDOF=1563
 mesh for $t \in [0.1, 0.2]$

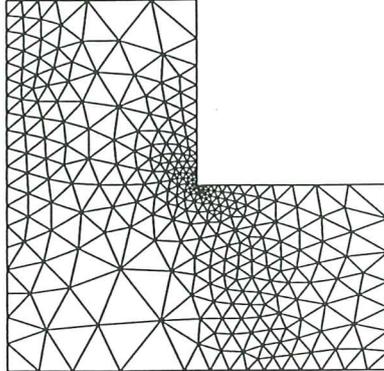


NNO=904
 NEL=1737
 NDOF=1789
 mesh for $t \in [0.3, 0.5]$

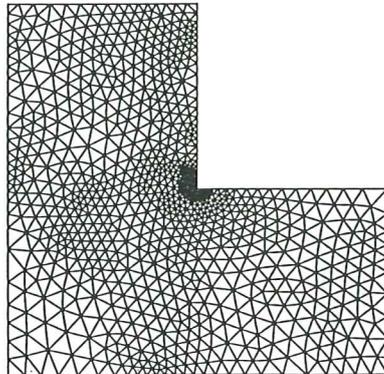
Figura 4.1a- Exemplo de malha para análise dinâmica com adaptatividade [Zeng, 91]



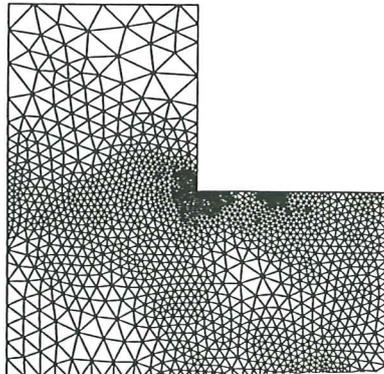
NNO=246
NEL=445
NDOF=478
mesh for $r \in [0.7, 2.2]$



NNO=312
NEL=550
NDOF=609
mesh for $r \in [2.3, 2.6]$



NNO=881
NEL=1639
NDOF=2370
mesh for $r \in [5.1, 7.5]$



NNO=1446
NEL=2755
NDOF=2867
mesh for $r \in [7.6, 8.0]$

Figura 4.1b-Exemplo de malha para análise dinâmica com adaptatividade -continuação

$$\varepsilon = L(u) u \quad (\text{eq. cinemática}) \quad \dot{\varepsilon} = L \dot{u}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \sigma + b &= 0 \text{ em } V \\ \sigma n &= t \text{ em } \Gamma_t \end{aligned} \right\} (\text{eq. equilíbrio})$$

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \int_V \delta u^T b dV + \int_{\Gamma_t} \delta u^T t d\Gamma \quad (\text{trab. virtual}) \quad \int_V \delta \dot{\varepsilon}^T \sigma dV = \int_V \delta \dot{u}^T b dV + \int_{\Gamma_t} \delta \dot{u}^T t d\Gamma$$

$$\overset{\Delta}{\sigma} = D_T \dot{\varepsilon} \quad (\text{modelo constitutivo}) \quad \sigma = D \dot{\varepsilon}$$

Já na hipótese de utilização da formulação de fluxo, emprega-se uma analogia com o tratamento usual em mecânica dos fluidos. O método foi proposto inicialmente para outros tipos de problemas de conformação como laminação e extrusão [Zienkiewicz, Jain e Oñate, 78], e generalizado posteriormente para estampagem [Oñate e Zienkiewicz, 83 e Kobayashi e Kim, 78]. Como mostrado no esquema anterior, as incógnitas básicas do problema agora são as velocidades \dot{u} , que estão *linearmente* relacionadas com as velocidades de deformação $\dot{\varepsilon}$. Para a formulação de fluxo, V e Γ_t se referem à configuração deformada. No caso de problemas de estampagem, o volume de controle deve ser tomado como a deformada da chapa a cada instante da análise [Oñate, 92]. A formulação agora é euleriana, devendo-se considerar a configuração deformada como referência. As relações constitutivas podem ser tomadas na forma desejada, e o problema, da mesma forma que na formulação em deslocamentos, tratado incrementalmente. Para materiais rígido-plásticos, no entanto, tomando-se a relação $\sigma = E \dot{\varepsilon}$, simplifica-se substancialmente a solução do problema, possibilitando a utilização de programas desenvolvidos para análise elástica incompressível com uma simples mudança de variáveis. No caso, por exemplo, de materiais isotrópicos, e material rígido plástico de Von Mises, a única fonte de não linearidade será um parâmetro de viscosidade μ , definido como $\mu = \frac{\sigma_y}{3 \dot{\varepsilon}}$, com $\dot{\varepsilon} = \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right)^{1/2}$, sendo que $D = D(\mu)$.

A recuperação elástica pode ser obtida aplicando-se as forças residuais resultantes das tensões acumuladas durante a etapa plástica, utilizando-se nesta fase um modelo de elasticidade infinitesimal com restrições de contato [Agelet de Saracibar, 92].

5.2) Métodos Explícitos e Implícitos de Solução das Equações de Equilíbrio

Após a discretização do problema, a equação a ser resolvida pode ser descrita como:

$$M\ddot{a} + C\dot{a} = -p(a) + f$$

onde $u = Na$

N- funções de forma

M- matriz de massa

C- matriz de amortecimento

$p(a)$ - vetor de forças internas

f - vetor de forças externas

Nos processos de estampagem, o efeito do amortecimento pode ser normalmente desconsiderado, bem como o das forças de inércia. Assim sendo, obtém-se:

$$r = p(a) - f = 0$$

que pode ser resolvido por um método implícito. Por tratar-se de um problema não-linear, a solução implica na utilização de algoritmos específicos que busquem garantir a convergência. Alguns dos algoritmos de uso corrente são o de Newton-Raphson, métodos incrementais iterativos, com ou sem recurso a aceleradores, métodos baseados na matriz secante (BFGS, Newton secante), com possíveis opções de *line search* ou *arc length* para regiões de difícil convergência. Como não se pode garantir a convergência para cada problema específico, idealmente deve-se dispor da opção por vários métodos, determinando-se aquele a ser utilizado em função do caso estudado. Os algoritmos requerem a determinação e armazenamento da matriz tangente ou de uma sua aproximação, determinando assim os requisitos de memória para um dado problema, bem como sua taxa de convergência.

Uma alternativa a este procedimento consiste em não desprezar os termos da esquerda da equação de equilíbrio, utilizando-se então um algoritmo explícito de integração. Para isto, utiliza-se uma matriz de massa diagonalizada, com a desvantagem de que o método resultante é apenas condicionalmente estável [Zienkiewicz e Taylor, 91]. O algoritmo resultante pode então ser descrito como:

$$\ddot{a}^t = \frac{1}{M} \left(f^t - p^t - p_c^t - C\dot{u}^t \right), \text{ onde } p_c^t \text{ é o vetor de forças de contato}$$

$$\dot{a}^{t+1/2} = \dot{a}^{t-1/2} + 0.5 \ddot{a} \Delta t^n, \text{ com}$$

$$a^{t+1} = a^t + \dot{a}^{t+1/2} \left(\frac{\Delta t^n + \Delta t^{n+1}}{2} \right)$$

Assim sendo, é necessário utilizar um passo no tempo Δt suficientemente pequeno para assegurar convergência. O valor de Δt é função das características do problema e das dimensões dos elementos utilizados no modelo, podendo ser estimado através de equações simplificadas ou calculado a partir do maior autovalor da matriz característica.

Existem formas de aumentar a eficiência dos algoritmos explícitos, tomando-se partido do fato que o processo na realidade é quasi-estático. Uma delas consiste em alterar a matriz de amortecimento C de forma a aumentar a taxa de convergência. Esta técnica, conhecida como relaxação dinâmica, busca encontrar uma matriz característica que, variando C e fixando-se as outras matrizes que definem o problema, permita um aumento no valor crítico de Δt . Outro artifício consiste em reduzir o tempo total do processo, já que os efeitos de inércia são pequenos e mesmo quando aumentados criteriosamente para propósitos numéricos não virão a alterar a solução. Considera-se que a velocidade do punção pode ser de até 20 m/s sem afetar de forma significativa o resultado da análise [Rojek, Garcia Garino e Oñate, 94].

A utilização de métodos explícitos para problemas altamente não lineares é cada vez mais generalizada. Em problemas de estampagem, devido às suas características não-lineares e à necessidade de consideração do contato, a análise de problemas tridimensionais usando-se um método implícito requer uma lenta aplicação do carregamento, tornando-os extremamente caros, como comentado no item 2, e sua utilização fica condicionada à capacidade de armazenamento da máquina utilizada. Os custos computacionais crescem aproximadamente linearmente com o tamanho do problema tratado nos algoritmos dinâmicos explícitos, e a implementação do contato e plasticidade são bastante mais simples [Taylor et al, 93]. Um caminho para aumentar a eficiência dos algoritmos implícitos é a paralelização da solução usando métodos iterativos [Las Casas, Silva e Carvalho, 93] e técnicas de decomposição de domínio.

6) Modelos Constitutivos e Considerações Cinemáticas

Neste item pretende-se ilustrar com um exemplo as considerações básicas a serem levadas em conta quando da formulação de um modelo constitutivo elastoplástico com grandes deformações. Alguns aspectos da mecânica do problema que devem ser incluídos no modelo a ser utilizado na formulação de elementos finitos são:

- Comportamento cinemático não-linear devido às grandes deformações e grandes deslocamentos e rotações.
- Comportamento não-linear do material caracterizado por deformações elasto-plásticas ou elasto-viscoplásticas, podendo incluir a anisotropia própria de chapas laminadas a frio e degradação do material.
- Comportamento não-linear das condições de contorno ocasionada pelas forças de contato e de atrito que se desenvolvem durante o processo.

Os dois primeiros tópicos serão tratados neste item, e o terceiro no item 8.

A teoria da plasticidade vem conseguindo avanços importantes nas últimas décadas, tanto em seus conceitos teóricos quanto em sua implementação computacional (ver, por exemplo, [Lubliner, 90 e Crisfield, 91]). A extensão da Teoria da Plasticidade a problemas de grandes deformações se deu, basicamente, a partir das contribuições de Green e Naghdi [Green e Naghdi, 65]. Um modelo para plasticidade com grandes deformações [Garcia Garino, 93 e Garcia Garino e Oliver, 95], incorporando a sistemática proposta por Simo e Ortiz [Simo e Ortiz, 85], e implementado no programa STAMPAK do Centro Internacional de Métodos Numéricos em Engenharia [STAMPAK, 94], é descrito a seguir. Para o caso de metais, admite-se normalmente a

hipótese de que as deformações elásticas são pequenas em relação às plásticas. Neste modelo optou-se pela utilização de uma relação constitutiva hiperelástica [Lubliner, 72], ou seja, na qual as tensões são derivadas a partir de um potencial, função da energia de deformação. Modelos hipoelásticos, para os quais o tensor de velocidades de tensões é função linear do tensor de velocidades de deformação, são descritos, por exemplo, em [Hughes, 84].

Trabalha-se com a decomposição multiplicativa do tensor gradiente de deformações em suas partes elástica e plástica:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$$

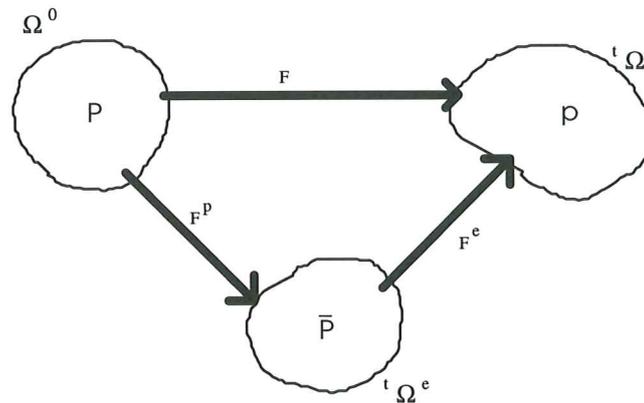


Figura 6.1 Configurações de trabalho para grandes deformações

O modelo trabalha com três configurações a cada passo da análise: a configuração indeformada Ω^0 , a deformada ${}^t\Omega$ e uma intermediária ${}^t\Omega^e$ [Lee, 69], como mostrado na fig. 6.1.

Utiliza-se a propriedade de decomposição aditiva do tensor de Green Lagrange $E = E^e + E^p$. Designa-se por:

$C^p = F^{pT} F^p$ - componente plástica do tensor direito de Cauchy-Green

G - tensor métrico (na configuração inicial)

$E = \frac{1}{2}(C - G)$ - tensor de Green Lagrange

E^p - componente plástica de E . Adotando-se a convenção de letras maiúsculas para grandezas definidas na configuração inicial, minúsculas na deformada e com uma barra para a configuração intermediária, obtém-se o seguinte quadro para os tensores de deformação na configuração inicial:

$$C^p = F^{pT} \bar{G} F^p$$

$$E^e = \frac{1}{2}(C - C^p)$$

$$E^p = \frac{1}{2}(C^p - G)$$

As grandezas definidas para uma configuração podem ser obtidas a partir de medidas equivalentes em outra configuração através de operações denominadas *push forward* ϕ_* e *pull back* ϕ^* [Marsden e Hughes, 83]. Assim sendo, o *push forward* de um tensor na configuração inicial resulta em um tensor espacial (ou euleriano) na configuração deformada. Para \bar{G} o tensor métrico na configuração intermediária, b^{p-1} o tensor plástico de Finger, $\bar{E} = \bar{E}^e \bar{E}^p$ e com g o tensor métrico espacial, obtém-se para a configuração intermediária:

$$\bar{C} = F^{eT} \cdot g \cdot F^p$$

$$\bar{b}^{p-1} = F^{pT} \cdot G \cdot F^{p-1}$$

$$\bar{E}^e = \frac{1}{2} \left(\bar{C} - \bar{G} \right)$$

$$\bar{E}^p = \frac{1}{2} \left(\bar{G} - b^{p-1} \right)$$

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \left(\bar{C} - b^{p-1} \right)$$

Note que o tensor de Finger \bar{b}^{-1} , apesar de definido na configuração intermediária, está escrito com letra minúscula, uma exceção à convenção. Designando-se por b^{-1} ao tensor de Finger, b^{e-1} a sua componente elástica, $e = \frac{1}{2}(g - b^{-1})$ ao tensor de Almansi, com $e^e + e^p$, tem-se:

$$b^{-1} = F^{-T} \bar{G} F^{-1}$$

$$b^{e-1} = F^{-T} C^p F^{-1}$$

$$e^e = \frac{1}{2} (g - b^{e-1})$$

$$e^p = \frac{1}{2} (b^{e-1} - b^{-1})$$

Após a dedução das expressões para deformações, obtém-se as velocidades de deformação a serem utilizadas no modelo. Para isto, devido às alterações de geometria nas configurações intermediária e deformada, deve-se utilizar derivadas objetivas, tais como as de Lie L_v [Marsden e Hughes, 83]. As expressões obtidas são descritas em [Garcia Garino, 93]. Por exemplo, o tensor velocidade de deformações na configuração

espacial será: $d = L_v(e) = \frac{1}{2} (F^e)^{-T} \left(\bar{C} + L_p^T \bar{C} + \bar{C} L_p \right) (F^e)^{-1}$. Com as expressões das

velocidades de deformações \bar{D} , \bar{D}^e , \bar{D}^p para a configuração intermediária e d , d^e e d^p para a configuração espacial, pode-se relacionar a componente plástica do vetor

velocidade de deformação d^p em ${}^t\Omega$ com a variação de fluxo plástico \dot{C}^p na configuração material, utilizando-se as operações ϕ^* e ϕ_* definidas anteriormente.

Deve-se então, após descrita consistentemente a cinemática do problema, definir um modelo constitutivo apropriado. Neste caso o modelo é hiperelástico, requerendo portanto a escolha de um potencial a ser derivado em função das deformações para relacioná-las com as tensões. Utilizando a hipótese da decomposição multiplicativa do tensor gradiente de deformações, trabalha-se no modelo através da configuração intermediária. Para problemas isótropos, onde a regra de fluência independe das velocidades das rotações plásticas, pode-se simplificar a formulação desprezando-se a parte correspondente às rotações em F. Supondo que as deformações *elásticas* sejam pequenas, o que corresponde ao caso do aço, a componente elástica da função de energia livre pode ser descrita por uma função quadrática do tensor elástico de Almansi:

$$\Psi^e = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{1}{2} \lambda \text{tr}(\mathbf{e}^e)^2 + \mu (\mathbf{e}^e : \mathbf{e}^e) \right], \quad \mu \text{ e } \lambda \text{ constantes do material, } \rho_0 \text{ sua densidade}$$

inicial. Para o modelo associado, e usando o critério de fluência de Von Mises,

$$f(\boldsymbol{\tau}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \sqrt{J_2(\boldsymbol{\tau})} - \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma_y \left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right), \quad J_2 \text{ invariante de tensões.}$$

A componente plástica da função de energia livre utilizada pode ser de dois tipos. No caso de considerar-se uma lei de endurecimento isótropo linear,

$$\Psi^p = \Psi^e \left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right) = \frac{1}{2} H \left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right)^2, \quad \text{com } H \text{ o parâmetro de endurecimento.}$$

Para endurecimento isótropo não linear,

$$\Psi^p = \frac{a}{c(n+1)} \left(b + c \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right)^{n+1}, \quad a, b, c \text{ e } n \text{ constantes do material. Neste caso, a tensão de}$$

fluência uniaxial é dada por:

$$\sigma_y = a \left(b + c \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right)^n.$$

O modelo satisfaz os requisitos básicos usuais da mecânica dos meios contínuos, quais sejam, objetividade (as equações constitutivas são independentes do observador), simetria material (equações invariantes em relação a um grupo de transformações dos eixos materiais, grupo este determinado pela anisotropia considerada), segunda lei da termodinâmica (no regime elástico, em um ciclo fechado de carregamento o material não dissipa energia e as tensões residuais resultantes são nulas).

Para uma formulação implícita, resta ainda determinar o tensor elastoplástico tangente.

Para um tensor de elasticidade tangente $\bar{\mathbf{A}}^e$, que se demonstra [Garcia Garino, 93] ser

$$\text{igual a } \rho_0 \frac{\partial^2 \Psi^e \left(\bar{\mathbf{E}}^e \right)}{\partial \bar{\mathbf{E}}^e \otimes \partial \bar{\mathbf{E}}^e}, \quad \text{com } \Psi^e \text{ como função de energia livre, chega-se ao tensor}$$

elastoplástico tangente na configuração intermediária:

$$L_v^p(\bar{S}) = \left[\bar{A}^e - \frac{\left\{ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{S}} : \bar{A}^e \right\} \otimes \left\{ \bar{A}^e : \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{S}} \right\}}{\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{S}} : \bar{A}^e : \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{S}} + H} \right] : \bar{D} = \bar{A} : \bar{D}$$

Na configuração deformada, para um tensor de elasticidade $a = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi^e(e^e, b^{e-1})}{\partial e^e \otimes \partial e^e}$, com ψ^e como função de energia livre, o tensor elastoplástico é dado por:

$$L_v^p(\tau) = \left[a^e - \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \tau} : a^e \right\} \otimes \left\{ a^e : \frac{\partial g}{\partial \tau} \right\}}{\frac{\partial f}{\partial \tau} : a^e : \frac{\partial g}{\partial \tau} + H} \right] : d = a : d$$

O modelo na configuração espacial pode ser resumido como:

$$e = e^e + e^p$$

$$\tau = \frac{\partial \psi^e(e^e, b^{e-1})}{\partial e^e}$$

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad f \leq 0 \quad \dot{\gamma} f = 0$$

$$d^p = \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \tau}$$

Similarmente, na configuração intermediária,

$$\bar{E} = \bar{E}^e + \bar{E}^p$$

$$\bar{S} = \frac{\partial \psi^e(\bar{E}^e)}{\partial \bar{E}^e}$$

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad \bar{F} \leq 0 \quad \dot{\gamma} \bar{F} = 0$$

$$\bar{E}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{S}}$$

A primeira expressão é a decomposição aditiva das deformações, a segunda a relação hiperelástica tensão-deformação, as terceiras as condições de carga e descarga e a relação de consistência (condições de Kuhn Tucker), e a última a lei de fluência, e são completadas pela escolha da lei de fluência apropriada.

No caso de uma formulação explícita, como o que se busca é integrar diretamente a equação de movimento, trata-se de atualizar as variáveis do problema para uma configuração ${}^{t+\Delta t}\Omega$, conhecidos o tensor gradiente de deformação tF , as deformações te e as variáveis de endurecimento tq , todos para o instante anterior t , diante de um incremento de deslocamentos Δu , que define ${}^{t+\Delta t}\Omega$ através do tensor

${}^{t+\Delta t}F = F_u {}^tF$, com o tensor gradiente incremental de deformações dado por $F_u = (I + \text{Grad } u)$. Deve-se então atualizar as variáveis do problema através de um algoritmo preditor elástico-corretor plástico que pode ser decomposto da seguinte forma:

Preditor elástico

$$L_v(e) = d$$

Corretor plástico

$$L_v(e^p) = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

$$L_v(q) = \lambda H \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

O preditor elástico para o tensor de Finger é calculado como:

$${}^{t+\Delta t}b^{e-1} = F^{-T} b^{e-1} F^{-1}$$

e é utilizado para a determinação das tensões predictoras. Para a correção plástica, integra-se o fluxo plástico, dado por $\dot{C}^p = 2\phi^* d^p$, usando um esquema de Euler implícito de onde se obtém, para a deformação corrigida de Finger

$${}^{t+\Delta t}b^{e-1} = \left({}^{t+\Delta t}b^{e-1} \right)^{Pr} + 2\lambda^{t+\Delta t} n,$$

com $n = \frac{\partial f}{\partial \sigma}$. O fator $2\lambda^{t+\Delta t} n$ obtém-se com o algoritmo de retorno radial.

Por outro lado, a partir de considerações metalúrgicas, pode-se desenvolver modelos que busquem incorporar os efeitos de degradação do material (dilatação térmica, sensibilidade à compressão do fluxo plástico, *strain softening* e fluxo não-associado) [Gurson, 75; Agelet de Saracibar, 90]. Provocada pelo desenvolvimento de microfissuras, a degradação do material pode ser incluída no modelo incorporando na lei de fluência um efeito relacionado com o primeiro invariante das tensões. Introduce-se uma variável de dano escalar ou vetorial, sendo escalar para o caso isótropo ($f \in [0,1]$). Para $f = 0$, o material não sofreu dano; $f = 1$ implica na fratura local completa. Assim sendo,

$$\phi(\text{dev } \sigma, \text{tr } \sigma, q, f) = 0,$$

onde ϕ - função de fluência,

q- variáveis internas plásticas.

Um exemplo de função de fluência nestes moldes é, por exemplo [Shina e Oyane, 76]:

$$\phi = \left[\frac{3}{2} a(f) \text{dev } \sigma : \text{dev } \sigma + b(f) \text{tr}^2 \sigma \right]^2 - \sigma_m = 0, \text{ onde } a(f) \text{ e } b(f) \text{ são parâmetros à porosidade do material que devem ser determinadas experimentalmente.}$$

7) Anisotropia

Na presença de grandes deformações, criam-se orientações preferenciais dos planos e direções cristalinas nos metais, com os cristais tornando-se alongados e formando uma textura fibrosa na direção da maior tração, tornando várias de suas características mecânicas dependentes da direção considerada. Os cristais se alinham ao longo da

trajetória de deformações, e sua distribuição deixa de ser aleatória, provocando anisotropia na fase plástica. Esta diferença, em termos de tensão de escoamento, atinge os 10%, e apesar de ser frequentemente desprezada é importante para a simulação de vários comportamentos na conformação de metais. No caso da estampagem está presente a anisotropia introduzida na chapa quando de sua laminação, sendo que as propriedades dos metais após a laminação são diferentes ao longo da espessura quando comparadas com aquelas do plano (isotropia planar ou simetria ortótropa). Um segundo tipo possível de anisotropia é a induzida durante o próprio processo de estampagem.

A primeira forma de considerar numericamente este efeito foi proposta por Hill [Hill, 48], sendo que com alguns ajustes segue sendo bastante atualizada. Partindo da superfície de escoamento de Huber-Mises, Hill propôs a utilização da função quadrática abaixo para descrever o potencial plástico (ou superfície de escoamento):

$$2f = F (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{xz}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1$$

onde F, G, H, L, M e N são constantes características do material, que se supõe ortótropo, e as tensões estão referenciadas aos eixos de anisotropia. A teoria clássica da elastoplasticidade, em sua versão hiperelástica, supõe a existência de um potencial plástico, que deve ser convexo, normalmente associado à superfície de fluência f. A partir da relação constitutiva $d\epsilon = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\gamma}$, com $\dot{\gamma}$ um fator positivo de proporcionalidade,

associa-se as tensões com os incrementos de deformação para materiais anisótropos, como mostrado no item anterior. Para o caso isotrópico, com Y como tensão de escoamento, fixando-se $F=G=H$ e $L=M=N=3/2Y^2$ se obtém o critério de von Mises:

$$2f = (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 6 (\sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{xy}^2) = 2Y^2$$

Os valores das constantes F, G, H, L, M e N são obtidos experimentalmente. Para isotropia planar, é suficiente obter-se os valores de r e σ_u , com $r = \epsilon_{22}/\epsilon_{33}$ e σ_u a tensão de escoamento em um ensaio de tração uniaxial, a partir dos quais se obtém os parâmetros da superfície de fluência. No entanto, resultados experimentais posteriores para o alumínio demonstraram que, ao menos para alguns materiais, a superfície proposta não consegue representar o comportamento anisotrópico. A equação de Hill conduz a que, para $r < 1$, $\sigma_b/\sigma_u < 1$, com σ_b a tensão de escoamento para tração biaxial. No entanto, os experimentos indicam que, para estes materiais, $r < 1$ e $\sigma_b/\sigma_u > 1$. Este comportamento, desde então designado de comportamento anômalo, motivou Hill [Hill, 79] a propor uma generalização da superfície. O objetivo era conseguir uma formulação mais geral com a inclusão de alguns parâmetros adicionais. A equação, já não mais quadrática, do critério de Hill modificado é:

$$F |\sigma_{yy} - \sigma_{zz}|^m + G |\sigma_{zz} - \sigma_{xx}|^m + H |\sigma_{xx} - \sigma_{yy}|^m + A |2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}|^m + B |2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - \sigma_{zz}|^m + C |2\sigma_{zz} - \sigma_{yx} - \sigma_{yy}|^m = \sigma_m$$

com A, B, C, F, G e H caracterizando as propriedades anisótropas do material, m uma constante a ser fixada e σ_m um fator para normalizar as unidades. Quatro possibilidades de truncamento da expressão geral para o caso de isotropia planar (que requer que $A=B$

e $F=G$) foram propostas, eliminando-se algumas das constantes. Por exemplo, para o caso IV, toma-se $A=B=0$ e $F=G=0$, e usando-se a expressão geral

$$r = \frac{(2^{m-1} + 2)A - C + H}{(2^{m-1} + 2)A + 2C + F},$$

obtém-se a superfície de fluência

$$(1 + 2r) |\sigma_{xx} - \sigma_{yy}|^m + |\sigma_{xx} + \sigma_{yy}|^m = 2(r + 1) \sigma_m.$$

Desta forma pode-se representar os materiais anômalos. As características mecânicas do material podem ser obtidas, para problemas de isotropia plana, a partir de um simples ensaio uniaxial, permitindo agora ajustar a superfície com o parâmetro m . Para $m=2$, obtém-se novamente a superfície da primeira proposta.

Apesar de sua ampla aplicação, algumas restrições importantes foram levantadas. Demonstrou-se [Zhu et al, 87] que para 3 dos 4 casos propostos de superfícies para o caso de isotropia planar, estas resultavam côncavas para determinados valores de m e r . Por outro lado, o valor de r muda dependendo da direção carregada no ensaio uniaxial. É usual (ver, p. e., [Dodd, 84]) tomar-se um valor médio de 3 medidas:

$$r = \frac{r_{90} + 2r_{45} + r_0}{4}, \text{ onde } r_{90}, r_{45} \text{ e } r_0 \text{ são as relações entre deformações ao longo da}$$

largura e da espessura obtidas com vários ângulos de aplicação da tração no ensaio uniaxial. Esta simplificação evidencia o fato de que o critério não chega a incorporar o efeito do cisalhamento na superfície de fluência, sendo mais exato quando as tensões principais coincidem com as direções dos eixos de anisotropia.

Barlat e Lian [Barlat e Lian, 89] propuseram uma formulação de uma superfície de fluência para casos de isotropia plana que possibilita incorporar os efeitos das deformações devidas ao cortante, da forma:

$$K_1 = \frac{\sigma_{xx} + h\sigma_{yy}}{2}; \quad K_2 = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - h\sigma_{yy})^2}{2} + p\sigma_{xy}^2},$$

$$f = a|K_1 - K_2|^m + a|K_1 + K_2|^m + (2 - a)|2K_2|^m - 2\bar{\sigma}^m$$

com a , h , p e M constantes do material e $\bar{\sigma}$ a tensão de escoamento na direção de laminação. Para $\sigma_{xy} = 0$, a formulação conduz a resultados similares aos de Hill, a menos dos termos multiplicados por h . Esta formulação foi utilizada em [Dutko, Peric e Owen, 93] para uma implementação usando o método dos elementos finitos, e exemplificam o efeito dos diversos parâmetros nos resultados. Uma formulação semelhante [Chu, 93] também permite o tratamento da anisotropia plana com uma superfície sempre convexa. No ano seguinte [Barlat et al, 90, Barlat, Lege e Bremen, 1991] foi proposta pelo grupo de Barlat uma extensão desta superfície para o caso geral de anisotropia, incluindo os 6 componentes do tensor de tensões e os seis coeficientes do material. Mais recentemente foram apresentados [Hayashida et al, 95] resultados obtidos

com a utilização da superfície de Barlat com uma lei de endurecimento isótropo, bem como para o caso geral de anisotropia [Chung e Shah, 92].

Alternativamente ao tratamento descrito até agora, derivado do trabalho de Hill, em um enfoque menos explorado na área de conformação de metais, pode-se formular o problema da anisotropia através do mapeamento entre dois espaços de tensões [Oller et al 95, Betten, 88]. O espaço real de tensões, anisótropo, é mapeado através de uma transformação linear usando um tensor de transformação de quarta ordem para um espaço fictício isótropo. O tensor de transformações deve conter toda a informação pertinente à dependência espacial das propriedades do material. Assim sendo,

$\bar{S}_{ij} = A^s_{ijkl} S_{kl}$, com \bar{S}_{ij} e S_{kl} como os tensores de tensões nos espaços fictício e real,

e A^s_{ijkl} o tensor de transformação, dado por $A^s_{ijkl} = f_{ik}^{\bar{s}} \left(f_{jl}^s \right)^{-1}$, onde $f_{ik}^{\bar{s}}$ e f_{jl}^s são os

tensores contendo as tensões de escoamento nos dois espaços. Usando o tensor de transformação torna-se possível trabalhar no espaço fictício isotrópico, mesmo para problemas de grandes deformações, simplificando o algoritmo a ser utilizado.

8) Contato

A consideração da interação entre a chapa e as superfícies das ferramentas, um problema de contato com atrito, é central na simulação da estampagem de chapas finas pelo método dos elementos finitos. Problemas mecânicos com contato são inerentemente não-lineares, envolvendo condições de contorno desconhecidas *a priori*. Os modelos matemáticos descrevendo o fenômeno envolvem inequações ou equações não-lineares e sua descrição precisa é complexa, já que os parâmetros relevantes são função do grau de rugosidade das superfícies, de características físicas e químicas dos lubrificantes, movimento e temperatura das partes em contato. No entanto, modelos cada vez mais precisos têm sido propostos na literatura.

O primeiro modelo para o problema, proposto com o objetivo de determinar as forças totais de atrito e de contato, deve-se a Coulomb, limitando o valor da força de atrito à força de contato multiplicada pelo coeficiente de atrito μ : $|f_t| \leq \mu |f_n|$. Um segundo modelo, onde se incluía uma hipotética distribuição elíptica das tensões na superfície de contato, foi proposto por Hertz em 1881. Bastante mais tarde, já com vistas às técnicas computacionais de simulação, novos modelos foram propostos, com o objetivo de se obter uma solução numérica aproximada ao invés de uma solução analítica fechada.

Tomando-se Γ_c como a parte do contorno Γ onde o contato pode ocorrer, deve-se impor as condições de que as forças de contato sejam de compressão e que não haja penetração entre duas superfícies. Assim sendo, para $g(x,t)$ uma função *gap* definindo a distância entre as duas superfícies e $f_c(x,t)$ a força de contato tem-se:

$$g(x,t) = g(x) - u(x,t) \cdot N \geq 0; \quad x \in \Gamma_c$$

$$f_t(x,t) = f_c(x,t) \cdot N \leq 0; \quad x \in \Gamma_c$$

onde f_t é a componente normal de f . Além disto, a condição $g(x,t) f_t(x,t) = 0$ deve ser satisfeita, de forma que sempre g ou f_t seja nulo. Para contato de acordo com a lei de Coulomb, para v_t a velocidade tangencial entre as duas superfícies, tem-se:

$$f_t(x,t) \leq \mu f_1(x,t), \quad x \in \Gamma_c$$

$$v_t(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{se } f_t(x,t) < \mu f_1(x,t); \quad x \in \Gamma_c \\ -\lambda f_t(x,t) & \text{se } f_t(x,t) = \mu f_1(x,t); \quad x \in \Gamma_c \end{cases}$$

onde λ um escalar não negativo, μ o coeficiente de atrito e

$$f_t(x,t) = f_c(x,t) - f_1(x,t).N$$

Esta formulação, devido a sua simplicidade, tem suas limitações. Mesmo diferenciado-se entre o coeficiente de atrito estático de um valor inferior para o coeficiente dinâmico, o modelo não capta fenômenos tais como o pequeno movimento relativo entre as partes (verificado experimentalmente) mesmo para $|f_t(x,t)| < \mu |f_1(x,t)|$. Outros efeitos não considerados são que a lei de Coulomb independe da área de contato entre as partes e das velocidades relativas entre elas, o que contradiz os dados experimentais. Este último efeito, mais pronunciado para altas velocidades, não é normalmente levado em conta. Modelos não-clássicos para o atrito foram então propostos [Michalowski e Mroz,78, p. e.], com um tratamento similar ao utilizado em problemas elastoplásticos. O que se busca é minimizar um funcional com restrições, da mesma forma que em um dos possíveis enfoques na mecânica do contínuo quando se busca minimizar a energia de deformação com as restrições definidas pela função de fluência. No que se segue descreve-se uma lei de atrito não-clássica [Zhong, 1993], formulada em termos de forças concentradas de forma a poder ser incluída em um problema de elementos finitos com mais facilidade. Uma possível relação entre a força de atrito f_t e o deslocamento transversal é dada na figura abaixo para uma força normal constante:

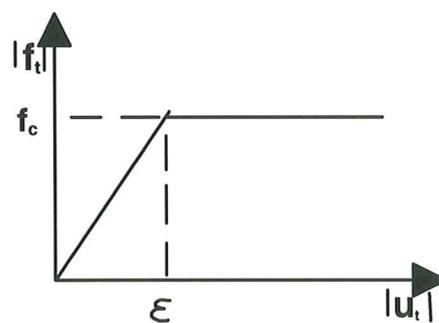


Figura 8.1

Para $|f_t|$ menor que o limite de atrito, $f_t = -E_f u_t$, com E_f a inclinação da curva no trecho correspondente aos micro-deslocamentos, e para $f_t = f_c$ os deslocamentos passam a depender do restante do sistema mecânico. Em uma analogia com a elastoplasticidade, toma-se $v_t = v_t^e + v_t^s$, com v_t^e a velocidade do deslocamento elástico (reversível) e v_t^s a velocidade de deslizamento do trecho irreversível.

Para a parte elástica,

$$v_t^e = -\frac{\dot{f}_t}{E_f} \Rightarrow \dot{f}_t = -E_f (v_t - v_t^s)$$

E_f , que aqui se toma constante, pode ser função do movimento relativo entre as superfícies. Denominando-se por ϕ à condição de deslizamento resulta no seguinte critério:

$$\phi = |f_t| + \mu f_1 \begin{cases} < 0 & \Rightarrow v_t^s = 0 \\ = 0 & \Rightarrow v_t^s = \lambda \left(\frac{\partial \phi}{\partial f_t} \right) \end{cases}$$

A segunda relação implica numa regra de deslizamento associada, e λ é uma constante a ser determinada. Dela pode-se obter:

$$v_t^s = \lambda f_t / |f_t| = \lambda n$$

Diferenciando a equação de v_t^s em ϕ obtém-se

$$n \cdot \dot{f} + \dot{\mu} f_1 + \mu \dot{f}_1 = 0.$$

Tomando-se agora μ como função da variável v_t^p cuja taxa é definida como

$$\dot{v}_t^p = \alpha \sqrt{(v_t^s \cdot v_t^s)}, \text{ obtém-se então } \dot{\mu} = \left(\frac{d\mu}{dv_t^p} \right) \dot{v}_t^p = \mu' \alpha \lambda, \text{ com } \mu' = \frac{d\mu}{dv_t^p}. \text{ Daí,}$$

$$\dot{f}_t = -E_f (v_t - v_t^s) = -E_f (v_t - \lambda n) = -E_f \left[1 - \frac{E_f n \otimes n}{E_f + \mu' \alpha f_1} \right] v_t - \frac{\mu E_f f_1 n}{E_f + \mu' \alpha f_1}.$$

Esta expressão é conhecida como uma relação constitutiva de atrito.

No caso em que $\dot{\mu} = 0$, então $\dot{f}_t = -E_f (1 - n \otimes n) v_t - \mu f_1 n$.

Uma formulação elegante unificando as principais técnicas de solução do problema de contato é a formulação lagrangiana com perturbação [Wrigers e Simo, 1985]. Baseia-se na formulação do problema como um problema de minimização com restrições, onde se busca tornar estacionário o funcional da energia potencial do sistema respeitando as restrições devidas ao contato. Define-se o funcional de Lagrange com perturbação como

$$\Pi_\varepsilon(u, \lambda) = \bar{\Pi}(u) + \lambda' g - \frac{1}{2\varepsilon} \lambda' \lambda,$$

onde $u \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de deslocamentos nodais, $\lambda \in \mathfrak{R}^s$ o vetor contendo as s forças de contato, $g \in \mathfrak{R}^s$ o vetor de *gaps* nodais e $\bar{\Pi}(u)$ a energia potencial total associada

ao problema ($\bar{\Pi}(u) = \frac{1}{2} u' K u - u' f$).

O *gap* para um nó é dado por: $g_s = (x_s - x_1) \cdot n$, onde n o vetor normal ao segmento ou superfície em relação ao qual se busca verificar o contato (*master*), $x_s = X_s + u_s$ é a posição do nó *slave* (para o qual se pretende verificar o contato), $x_1 = X_1 + u_1$ e $x_2 = X_2 + u_2$ definem a posição do segmento *master*.

As equações discretas resultantes da minimização do funcional lagrangiano com perturbação resultam então:

$$\begin{cases} \delta \Pi(u) + \bar{\lambda}' \delta g = 0 \\ \delta \lambda' \left(-\frac{1}{\varepsilon} \bar{\lambda} + g \right) = 0 \end{cases}$$

Tomando-se $\varepsilon = \infty$, obtém-se o método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} \delta \Pi(u) + \bar{\lambda}' \delta g = 0 \\ \delta \bar{\lambda}' g = 0 \end{cases}$$

A equação não-linear a ser resolvida pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \gamma \end{Bmatrix}$$

onde γ é a distância inicial entre dois corpos na direção n e B uma matriz contendo a cinemática dos nós em contato. O número de incógnitas é aumentado pela inclusão das restrições no funcional a ser minimizado e das forças de contato como incógnitas. O sistema resultante é não-singular, porém a matriz é indefinida, com elementos nulos na diagonal, apresentando dificuldades numéricas quando de sua solução. Os elementos de λ são interpretados como as forças de contato nos nós correspondentes (sobre os conceitos básicos do método, veja [Oñate, 92]). A dimensão do sistema varia com o número de nós em contato a cada instante da análise. A vantagem do método é que as condições de contato são satisfeitas exatamente.

A partir do lagrangiano com perturbação pode-se também obter o funcional correspondente ao método das penalizações. Resolvendo-se $\delta \lambda' \left(g - \frac{\lambda}{\varepsilon} \right) = 0$ para g e substituindo-se no funcional original, de onde se obtém $\Pi_\varepsilon(u) = \bar{\Pi}(u) + \frac{\varepsilon g' g}{2}$, onde os elementos da matriz diagonal ε são os coeficientes de penalização. Tornando o funcional estacionário, $\frac{\partial \Pi_\varepsilon}{\partial u} = 0$, se obtém um sistema da forma $K_p u = F_p$. As forças de contato são então dadas por $F_c = \varepsilon P$, onde a penetração P pode ser determinada a partir dos deslocamentos obtidos u . Fisicamente, os termos da diagonal ε_{ii} podem ser interpretados como a rigidez de uma mola fictícia entre dois pontos em contato. Para o método das penalizações, a matriz do sistema resultante é simétrica e positiva definida, e

seu tamanho não se altera durante o processo. No entanto, as restrições de contato se satisfazem apenas aproximadamente e o método é sensível à escolha pelo usuário do parâmetro de penalização. Valores muito elevados provocam uma piora no condicionamento da matriz, podendo provocar erros computacionais, enquanto valores baixos, que reduzem o número de iterações necessárias para convergência, diminuem a precisão do modelo, podendo levar a resultados absurdos [Nour-Omid e Wriggers, 86].

De maneira similar àquela utilizada para os métodos de multiplicadores de Lagrange e das penalizações, pode-se obter o terceiro entre os processos de solução mais usuais a partir do funcional lagrangiano com perturbação. Neste caso, substitui-se o termo $\frac{1}{2\epsilon}\lambda'\lambda$ por $\frac{\epsilon}{2}g'g$, obtendo-se o potencial para o método Lagrangiano aumentado:

$$\Pi_{\epsilon} = \bar{\Pi} + \lambda'g + \frac{\epsilon}{2}g'g.$$

Desta forma, modifica-se a matriz do método lagrangeano tornando-a positiva, e agora pode-se satisfazer as restrições de contato exatamente para um valor finito de λ . A escolha criteriosa dos valores de ϵ_{ii} tornam o sistema de equações de mais fácil solução. Outras técnicas de resolver o problema de minimização com restrições, apesar de menos utilizadas, são encontradas na literatura (veja, por exemplo, [Eterovic e Bathe, 91]).

Um outro aspecto importante é o algoritmo a se utilizar para determinar se houve ou não contato entre duas superfícies. É usual utilizar-se de uma estrutura de pares de superfícies, onde se identifica as partes do contorno Γ_c entre as quais pode haver contato durante o carregamento. Cada par de superfícies é composto de um segmento *master*, que define a região onde se verificará o eventual contato da superfície *slave*, como mencionado anteriormente. Para problemas de estampagem, para os quais Γ_c compreende normalmente quase todo o contorno Γ , a busca de possíveis penetrações toma a maior parcela do tempo utilizado na consideração do contato. Daí a necessidade de utilização de algoritmos eficientes nesta parte do algoritmo.

O cálculo da distância de cada nó da superfície *slave* com os da superfície *master* seria extremamente caro, e aplicável apenas a problemas pequenos. Algoritmos baseados em uma estrutura hierárquica de entidades geométricas, onde o sistema geral é composto por corpos, estes por sua vez por superfícies, formados por segmentos que incluem arestas formadas por nós [Zhong, 93] possibilitam otimizar a busca, aumentando seu desempenho.

Um outro algoritmo [Hallquist, 79] subdivide a busca em três partes: primeiramente (busca global), encontra-se o nó *master* n_m mais próximo de um nó *slave* n_s , define-se então (busca local) como segmento alvo aquele entre os quais n_m está contido que mais se aproxima de n_m . Calcula-se então a menor distância entre este segmento e n_s . Se esta distância for menor que um determinado valor, considera-se que n_s está em contato. Uma variação, onde todas as superfícies de contato são consideradas simultaneamente na busca, é descrita em [Benson e Hallquist, 1987].

Um procedimento que aumenta a confiabilidade do algoritmo consiste em, após a busca, repeti-la com a inversão das superfícies *master-slave* em cada par. Após detectar-se o

contato, deve-se verificar a persistência deste para o passo seguinte de carregamento, operação esta bastante mais simples pois não envolve uma busca.

9) Tecnologia de Elementos

Para uma formulação robusta [Pian, 95] de um elemento, este deve satisfazer os seguintes requisitos:

1. Não deve ter modos cinemáticos de deformação.
2. Deve passar o “patch test”.
3. Ser invariante em relação a escolha dos eixos de coordenadas.
4. Não deve ter problemas de bloqueio quando tratando problemas com material quase incompressível.
5. Ser pouco sensível a distorção da geometria do elemento.

Os dois últimos requisitos são especialmente importantes no caso de estampagem de metais, já que esta classe de problemas envolve grandes distorções nos elementos e deformações plásticas incompressíveis.

O tema de qual elemento é o mais apropriado na análise de problemas de estampagem permanece em aberto, sendo várias as soluções propostas. Duas opções claras são a utilização de elementos sólidos ou de casca. O emprego de elementos sólidos exige a utilização de um elevado número de graus de liberdade, principalmente devido ao fato que, para considerar com precisão os efeitos de flexão é necessária a consideração de algumas camadas de elementos ao longo da espessura da chapa. Para problemas simples e estudos seccionais, pode-se recorrer também a elementos de casca axissimétrica e bidimensionais, de estado plano.

O problema da incompressibilidade durante a fase plástica e do bloqueio resultante na solução numérica pode ser tratado com uma formulação mixta. Para esta formulação, no caso de sólidos, a pressão hidrostática $p = u_{i,i} = 0$ é tomada como uma variável a parte, isolando-se assim a parte volumétrica da desviadora e obtendo-se assim uma formulação mais apropriada [Hughes, 87].

A ordem da função de interpolação utilizada para os deslocamentos e pressões é independente, e os elementos resultantes são normalmente não-conformes, devendo ser verificados quanto à satisfação do patch-test. A partir da escolha da função de interpolação para os deslocamentos (e rotações no caso de cascas) e pressões (ou deformações para cascas) deve-se compatibilizar as duas classes de incógnitas em pontos selecionados do modelo.

Uma alternativa à formulação mixta para evitar o problema de é a integração reduzida, técnica mais antiga no tratamento de problemas de incompressibilidade, [Oñate, 92 e Zienkiewicz e Taylor, 91, Zienkiewicz, Taylor e Too, 71]. Esta técnica, no entanto, pode conduzir a modos de deformação inadmissíveis, reduzindo assim a confiabilidade da solução. Para solucionar estes problemas, foram desenvolvidas técnicas de estabilização da solução (veja por exemplo [Belytschko e Tsay, 83]). Uma variante desta técnica que elimina parte do problema consiste em fazer uma integração seletiva

(também designada método B barra), onde a integração reduzida é utilizada apenas nos termos correspondentes aos esforços cortantes. Mesmo assim restam modos de deformações espúrios que devem ser controlados.

Levando em conta a questão de se evitar o bloqueio da solução uma série de elementos foi proposta para problemas elastoplásticos com deformações finitas.

9.1) Elementos de Casca

O tratamento numérico de cascas, mesmo no caso linear, envolve duas dificuldades básicas: sua descrição geométrica e a solução numérica de equações envolvendo termos relativos a flexão e outros muito mais “rígidos” devido ao comportamento da membrana.

A utilização da teoria clássica de cascas das primeiras formulações, exige continuidade C^1 para as funções de interpolação, além de se restringir ao caso de cascas finas. Visando evitar as complicações inerentes a este tipo de funções, uma série de formulações alternativas vêm sendo propostas ao longo dos anos. Um excelente estudo do estado da arte em formulações de casca pode ser encontrado em [Stolarski et al, 95], e uma outra compilação de diversas formulações em [Huang, 89].

Dois outros problemas no tratamento numérico de cascas são o bloqueio numérico devido ao cortante e devido aos esforços de membrana. A técnica de imposição de um campo de deformações para se evitar o bloqueio numérico devido ao cortante pode ser descrita de forma simplificada, para o caso de placas Reissner-Mindlen, como se segue. A equação matricial do problema [Onate, 92] pode ser escrita como:

$$\left(\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \bar{K}_f + Gt \bar{K}_c \right) a = f$$

de onde

$$\left(\bar{K}_f + \alpha \bar{K}_c \right) a = \frac{12(1-\nu^2)}{Et^3} f, \text{ com } \alpha = \frac{12(1-\nu^2)G}{Et^2}$$

Para $t \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \infty$ e a matriz de rigidez da placa se torna dominada pelos termos relativos ao cortante, quando a solução, dada neste caso pela teoria de Kirchoff, indica o contrário. Além disto o modelo tende a uma rigidez infinita, com os deslocamentos tendendo a zero. A ideia básica da imposição de um campo de deformações para corrigir este problema consiste em impor que, para placas delgadas, $\epsilon_c = 0$. Tomando-se

$\bar{\epsilon}_c = N_\gamma \gamma^{(c)}$, onde $\gamma^{(c)}$ são os valores de deformação cortante transversal e N_γ funções de interpolação apropriadas, e forçando-se a condição de que o cortante transversal se anule, obtem-se os valores do campo de deformação a ser impostos igualando ϵ_c aos valores de deformação obtidos através da função de interpolação para as rotações nos nós. Por exemplo Bathe e Dvorkin e Hinton e Huang [Bathe e Dvorkin, 85 e Hinton e

Huang , 86] igualando as deformações nos pontos indicados na figura abaixo propuzeram um elemento de 4 nós para placas e cascas.

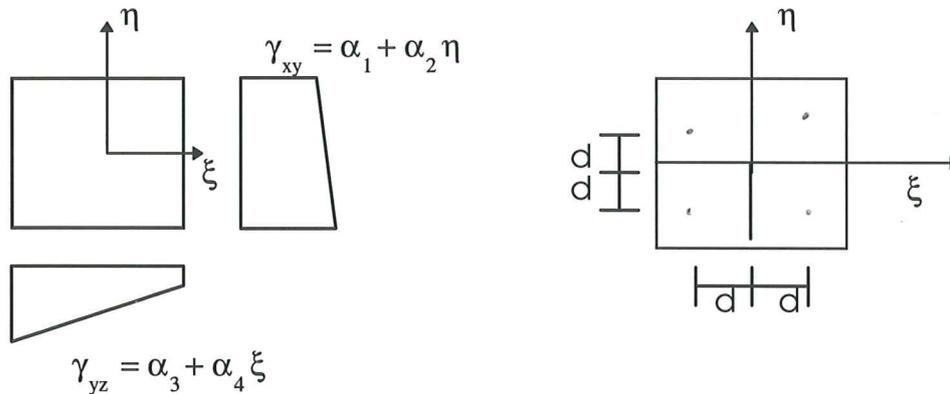


Figura 8.1- Elementos com campo de deformações imposto

No caso do bloqueio de membrana, o problema é análogo ao anterior, só que reflete uma resistência fictícia à deformação através de esforços internos de membrana, em situações onde predomina a flexão. Um exemplo destas situações é o problema da flexão de uma casca cilíndrica para torná-la reta, quando não se desenvolvem esforços de membrana, mas estes aparecem artificialmente em função da interpolação utilizada. Como o estiramento da casca exige mais energia que sua flexão, os esforços de membrana passam a dominar a solução, enrijecendo-a.

Uma das família de elementos de cascas é baseada nas propostas de Ahmadi [Ahmad et al, 70]. Os elementos de casca são tratados como sólidos degenerados onde o campo de deformação é descrito por duas variáveis independentes - rotações em nós no meio dos lados e deslocamentos. A vantagem deste tipo de elementos é que se exige continuidade C^0 apenas, mas deve incluir alguma técnica para evitar o bloqueio da solução. Os elementos ao serem baseados na mecânica do contínuo, têm a seu favor a simplicidade da formulação. Um elemento baseado nestas ideias é o MITCA [Dvorkin e Bathe, 84].

Alternativamente ao tratamento como sólido degenerado, a formulação de elementos de casca pode ser tratado dentro da teoria clássica de cascas, para a qual se dispõe na literatura de várias propostas [Love, 27; Budiansky e Sanders, 63]. No entanto, a tendencia generalizada é de não se utilizar este tipo de elementos, em favor da utilização de elementos com funções de interpolação C^0 .

Os modelos mixtos de cascas são normalmente deduzidos a partir do princípio variacional de Hu-Washizu, onde os deslocamentos u , as tensões τ e as deformações ε são interpoladas independentemente. Em sua forma fraca, este princípio pode ser descrito como:

$$\delta W^{int} - \delta W^{ext} = 0$$

$$\delta W^{int}(u, \varepsilon, \tau) = \int \left[\delta \varepsilon : \sigma(\varepsilon) - \delta \{ \tau : (\varepsilon - \nabla_s u) \} \right] d\Omega$$

Incorporando-se uma relação tensão-deformação, elimina-se a variável ϵ , obtendo-se então o princípio de Hellinger-Reissner. Isto restringe normalmente sua aplicabilidade a problemas lineares, já que as relações constitutivas são em geral função das deformações [Stolarski et al, 95]. Se não se compatibiliza apropriadamente as deformações, tensões e deslocamentos, se verificam modos espúrios de deformação mesmo utilizando a formulação mixta, como verificado para integração reduzida. Este problema é tratado em [Pian e Chen, 83] para elementos baseados na teoria de Hellinger-Reissner, e em [Storaski e Belytschko, 85] para elementos baseados nos princípios de Hu-Washizu. Uma técnica de estabilização dos resultados [Hughes e Franca, 88 e Loula et al, 89] consiste em melhorar a estabilidade e precisão de métodos mixtos adicionando termos relativos ao resíduo na equação de equilíbrio, obtendo como resultado maior consistência e conduzindo à convergência.

Outra formulação mixta para problemas com não-linearidade física e geométrica se deve a Simo [Simo e Kennedy, 92 e Simo et al, 90]. Implementado no programa SIMPACT [Miquel et al, 94], o elemento trata a casca como uma superfície de Colserat. Supõe que qualquer configuração da casca pode ser descrita em termos da superfície média e uma esfera unitária, e emprega um campo de deformações imposto e o critério de Ilyushin-Shapiro para a plasticidade.

Além dos elementos baseados em sólidos degenerados, na teoria clássica de cascas, de formulação mixta e aqueles que incorporam um campo de deformações, outra família, desenvolvida com o propósito de evitar funções de interpolação de ordem C^1 , são aqueles baseados na teoria discreta de Kirchoff [Oden et al, 68]. Uma revisão destes elementos se encontra em [Batoz et al; 1980]. A ideia básica consiste em impor a hipótese de que as normais permaneçam normais apenas em alguns pontos ou linhas. Os elementos usam campos de deslocamentos discretizados de forma independente para rotação e deslocamentos, e os primeiros elementos DKT não incluíam deformações devido ao cortante. Uma proposta no sentido de incluir o efeito do cortante [Batoz e Lardeur, 89] considera a energia devido ao cortante a partir das forças de cisalhamento obtidas das equações diferenciais de equilíbrio.

Mais uma alternativa para o tratamento da modelagem de cascas é a utilização de elementos planos [Oñate, 92]. Como inconvenientes o comportamento de flexão e membrana em cada elemento é desacoplado, e surgem momentos fictícios nas fronteiras dos elementos. Sua utilização, no entanto, para problemas de estampagem, devido ao fato de estes requerem uma malha bastante fina, leva a bons resultados, com a vantagem de sua simplicidade e do reduzido tempo de execução requerido. Um elemento com estas características [Oñate e Cendoya, 95] possui apenas três graus de liberdade por nó relativos às translações, e as rotações são obtidas a partir dos resultados em translações dos elementos vizinhos.

9.2) Elementos Sólidos e para Formulação de Fluxo

As geometrias envolvidas em problemas de estampagem forçam normalmente a utilização de modelos com alta densidade nodal. Nesta situação, em função do resultado buscado e principalmente quando o efeito da flexão não é dominante, torna-se

competitiva a utilização de elementos sólidos, com a vantagem de se evitar várias das complexidades dos elementos de casca. Devido ao problema da incompressibilidade nos processos plásticos, utiliza-se normalmente formulações mixtas, como descrito anteriormente. Alguns destes elementos são descritos em [Nagtegaal, J. C. et al, 74], [Zienkiewicz e Taylor, 89] e [Hughes, 87].

No caso da formulação de fluxo, utiliza-se os mesmos elementos descritos anteriormente, com a vantagem de se tratar o problema como “elástico”. Em [Agelet de Saracibar, 90] descreve-se a implementação de um elemento DKT conjugado com CST para deformações membranais.

10) Outros Tópicos

Além dos aspectos descritos nos itens anteriores, outros temas vinculados ao tratamento numérico de problemas de estampagem têm sido objeto de atenção.

Um deles é o estudo e implementação de modelos viscoplásticos, de forma a considerar o efeito da velocidade de deformação no comportamento do material.

Outro, a necessidade de se obter modelos simplificados para a modelagem de freios (*draw beads*), que devido à sua geometria forçam a um incremento considerável na densidade nodal da chapa. Busca-se eliminar a descrição geométrica detalhada da geometria do freio substituindo-o por elementos a êle equivalentes que imponham as mesmas restrições cinemáticas e modificações nas deformações (veja, por exemplo, [Carleer et al, 95]).

Também importante é o fato de que a estampagem industrial de uma peça raramente se dá em apenas uma etapa, e um programa apropriado para aplicações industriais deve possibilitar redefinir as peças (ferramentas) envolvidas no problema ao final de cada etapa do processo, reutilizando parametros obtidos na etapa anterior (veja, por exemplo, [Nichols et al, 95]).

Para algoritmos explícitos, a determinação do tempo crítico para convergência é um fator primordial para sua eficiência. Como no caso da estampagem a geometria da chapa (e logo a malha) é alterada substancialmente durante o processo devido às grandes deformações, o valor do tempo crítico se modifica ao longo dos incrementos de carga, já que é função da matriz de rigidez do problema. O tratamento adequado desta questão pode levar a uma redução significativa do tempo total de processamento, além de assegurar que o método de integração no tempo permaneça estável.

A representação numérica do amortecimento na recuperação elástica e a modelagem do anti-rugas, normalmente considerado rígido de forma a reduzir custos computacionais, são outros pontos de interesse. Também o desgaste das ferramentas não está suficientemente tratado, bem como o estabelecimento de critérios apropriados de ruptura [Narasimhan et al, 93]. A utilização das curvas tradicionais descrevendo a ruptura como função das deformações principais é bastante simplificada, não levando em conta a

complexidade do comportamento do material, afetado por fatores do processo tais como atrito, velocidades, geometria das ferramentas, etc.

Como visto nesta rápida compilação, a simulação numérica da estampagem de chapas finas envolve questões complexas, e o tratamento unificado de todos os seus aspectos supõe abordar temas de amplo interesse na mecânica computacional, cobrindo uma boa parte de seus pontos fundamentais.

11) Exemplo

Utilizando o programa STAMPACK [STAMPACK, 94] apresenta-se neste item um estudo do problema da estampagem de um recipiente quadrado (figura 11.1). Este problema está detalhadamente documentado, já que foi um dos problemas propostos para grupos experimentais e numéricos em todo o mundo para validação das técnicas de simulação numérica. Na figura 11.2, mostra-se a malha de elementos finitos utilizada para dois modelos, um de cascas planas tipo DKT [Oñate e Cendoya, 95] e outro de elementos sólidos. O material considerado é o aço, que no modelo isotrópico foi tomado com $E=206$ Gpa e $\nu=0,3$, com modelo de von Mises. A curva $\sigma - \varepsilon$ considerada para o endurecimento é

$$\bar{\sigma} = 565,3 \left(0,007117 + \bar{\varepsilon} \right)^{0,2589} \quad (\text{MPa})$$

A densidade é de $\rho=7800$ kg/m³, a força aplicada no anti-rugas de 19,6 KN e o coeficiente do atrito considerado no modelo de Coulomb de 0,144. A relação entre deformações r para a isotropia plana é de 1,77.

As deformadas para quatro diferentes estágios de carregamento, isolando-se a chapa do restante do modelo são mostradas na figura 11.3, onde se verifica as deformações ao longo da espessura. Observa-se que o afinamento se localiza na região do canto do recipiente ($t/t_0 = 1,35$), enquanto a região de maior deformação devido á compressão ($t/t_0 = -0,725$) está no canto externo da chapa.

Na figura 11.4, ilustra-se o efeito da anisotropia, com resultados para uma linha OB entre o centro da chapa e o extremo superior direito do modelo. Compara-se os resultados obtidos com o modelo de Hill de 1948 com o de von Mises e as medidas experimentais. Observa-se que a anisotropia aumenta a formabilidade da chapa, reduzindo as deformações ao longo da espessura. Na figura 11.5 os resultados com a consideração de isotropia plana são apresentados para diversos valores do coeficiente m de Hill. Apesar de m não haver sido fornecido pelos organizadores do teste, outros trabalhos parecem indicar o valor de 2,3 como apropriado para o aço [Chu, 93]. Pode-se observar que com este valor os resultados numéricos se ajustam melhor aos experimentais.

Toma-se dois valores de coeficiente de atrito μ : 0 e 0,144. A deformação máxima de com pressão no caso sem atrito é de 0,769, e de 0,748 para $\mu=0,144$. Na figura 11.6 mostra-se os deslocamentos na linha horizontal de simetria, que para o caso de $\mu=0$ valem 2,87 cm, e para o modelo com atrito 2,72 cm. A chapa se comporta de forma mais rígida com atrito, sendo necessária uma maior força no punção para deslocá-la. Neste

caso uma região mais reduzida da chapa resiste aos esforços, ao contrário do caso sem atrito, quando toda a região interna ao punção resiste de forma mais uniforme. O modelo utilizado não leva em conta a anisotropia, e para o contato utilizou-se o método das penalizações.

Agradecimentos

O autor agradece aos pesquisadores do Departamento de Resistência dos Materiais e Estruturas da E. T. S. Ingenieros de Caminos da Universitat Politècnica de Catalunya pelas diversas e proveitosas trocas de opinião, e em particular aos pesquisadores Patrício Cendoya e Jurek Rojek por vários dos exemplos utilizados neste trabalho. Agradece também à CAPES, do governo brasileiro, por financiar a estadia em Barcelona.

MODEL: BU22

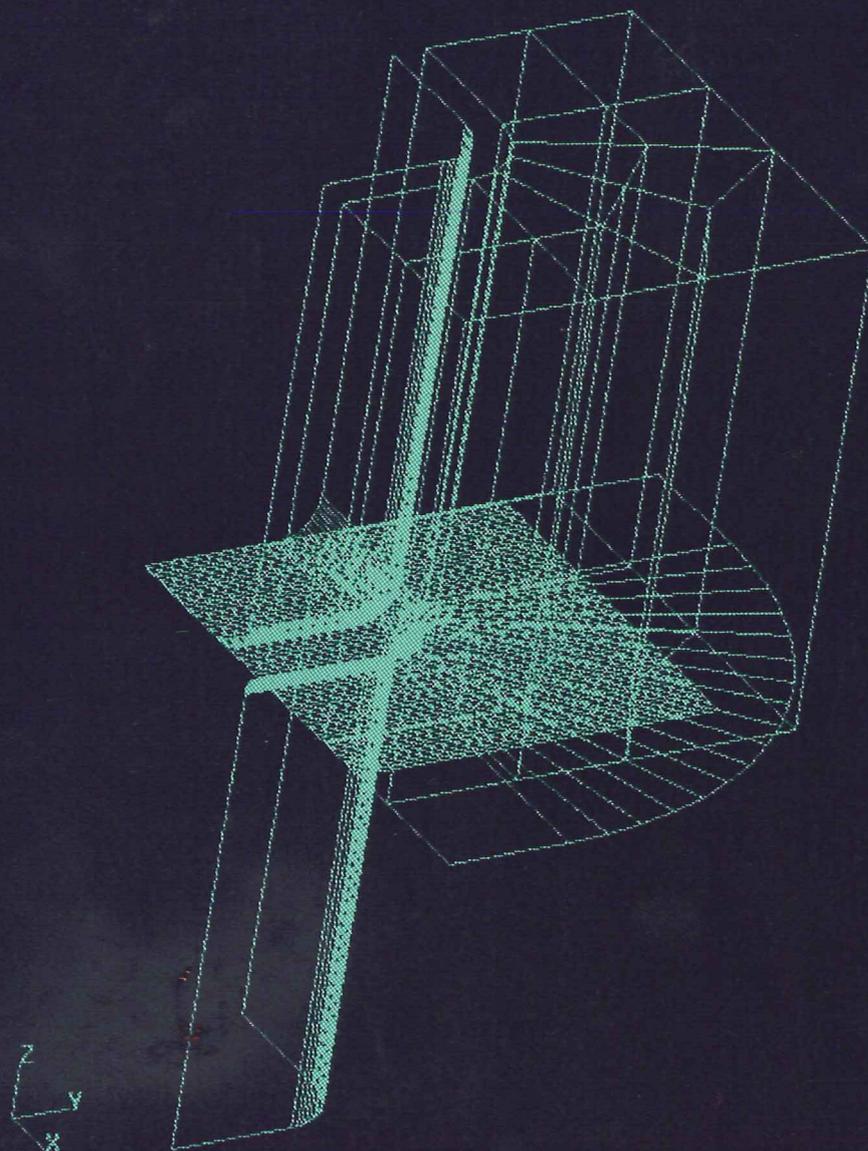
FEMGEN
FEMVIEW
INDEX-----
RESULTS
PRESENT
CONSTRUCT-----
VIEW
LABEL
EYE-----
DRAWING
UTILITY
HELP-----
STOP

Figura 11.2- Malha para análise da estampagem de copo retangular

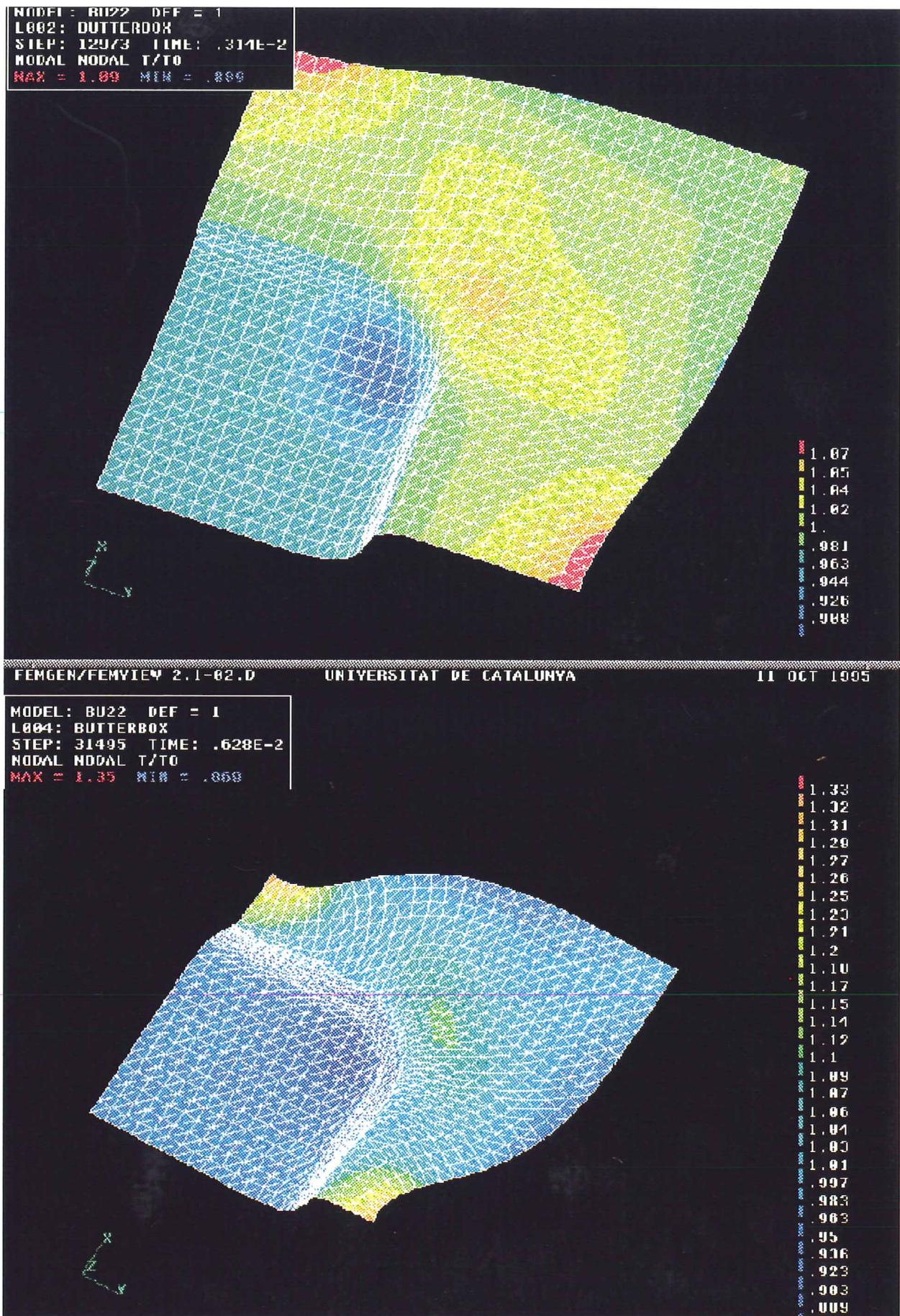


Figura 11.3 - Resposta em deformações ao longo da espessura- copo retangular

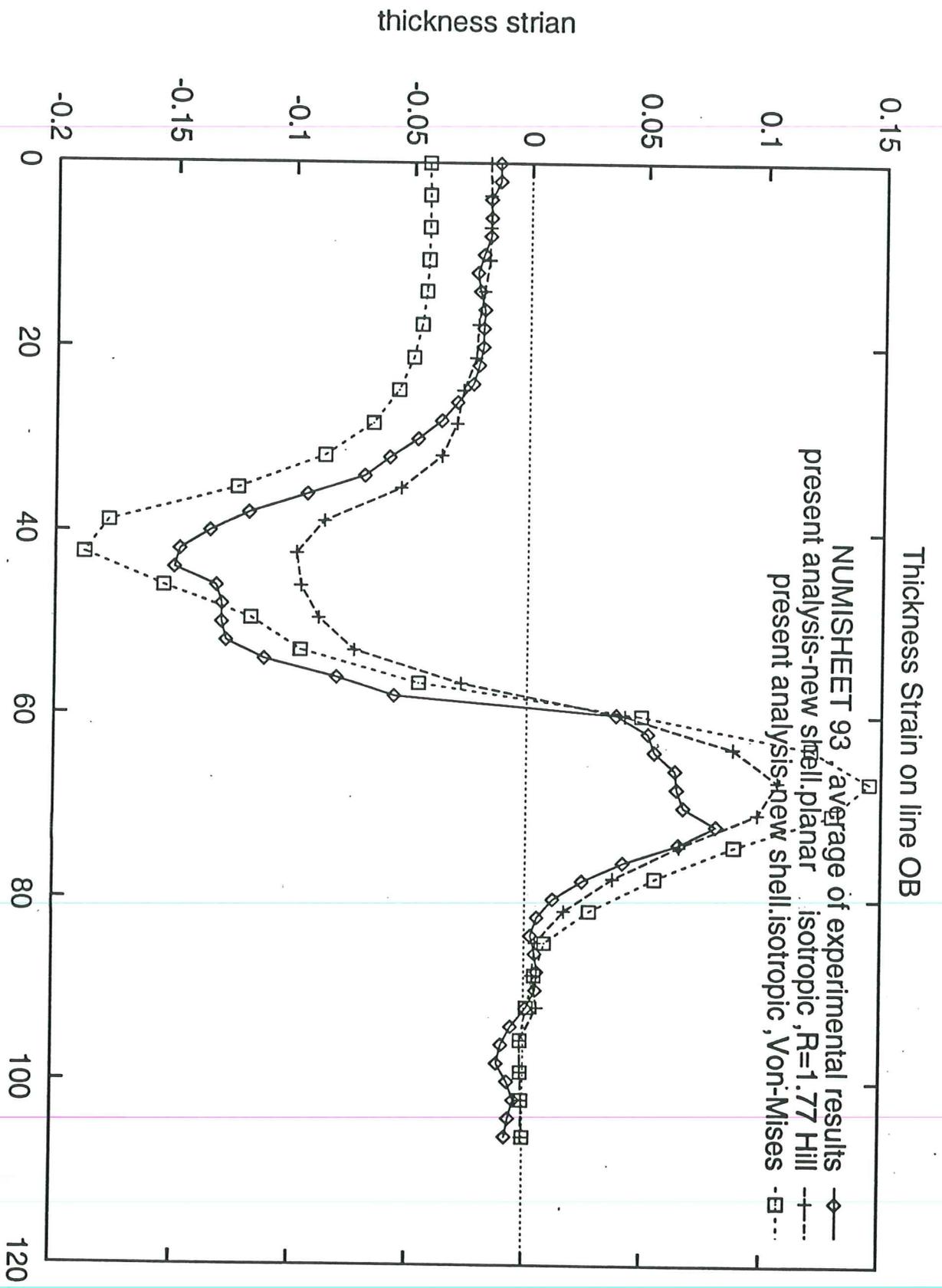


Figura 11.4- Deformações para o modelo de Hill 48, e von Mises.

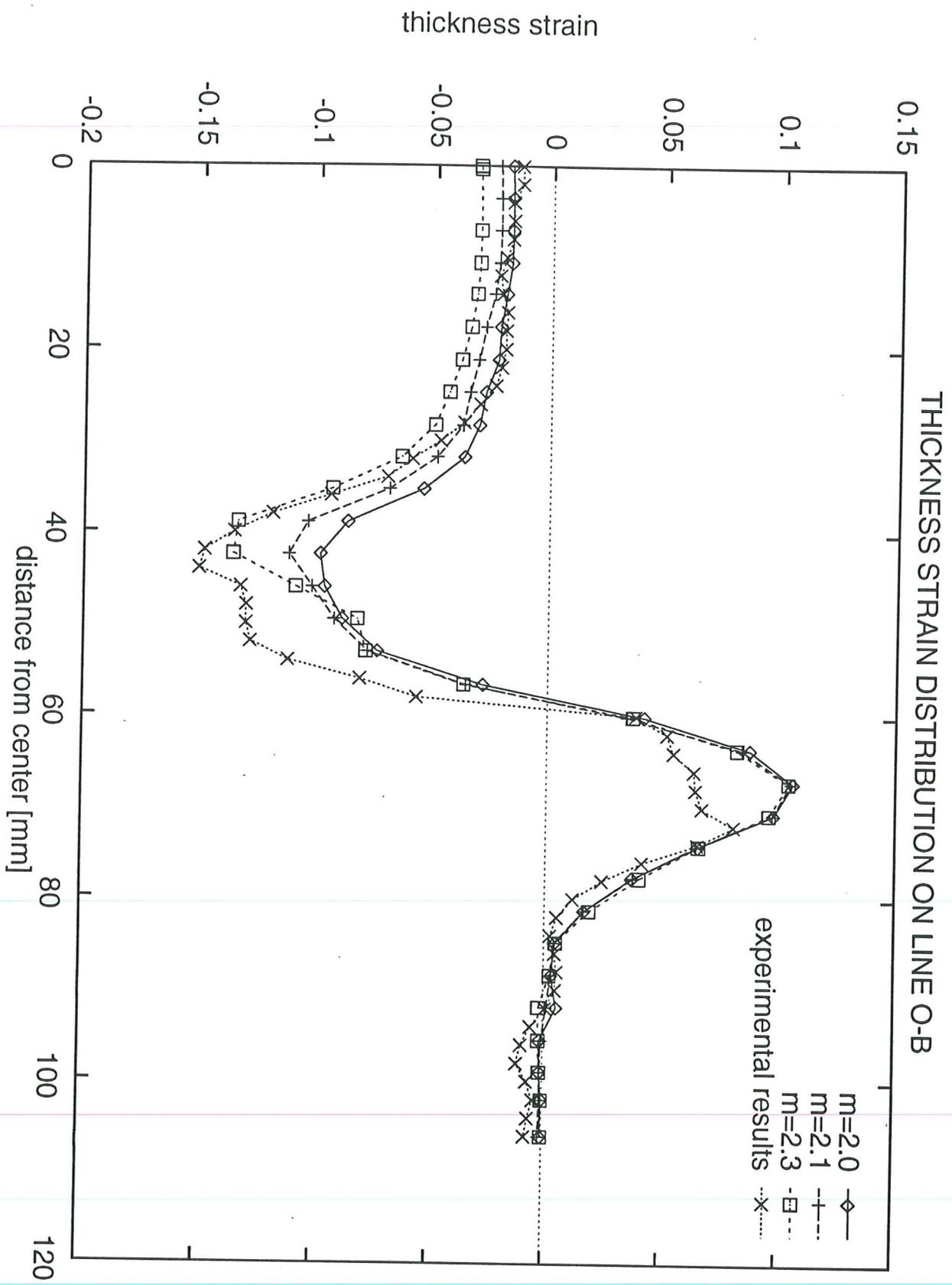


Figura 11.5- Variação da resposta para distintos valores de m

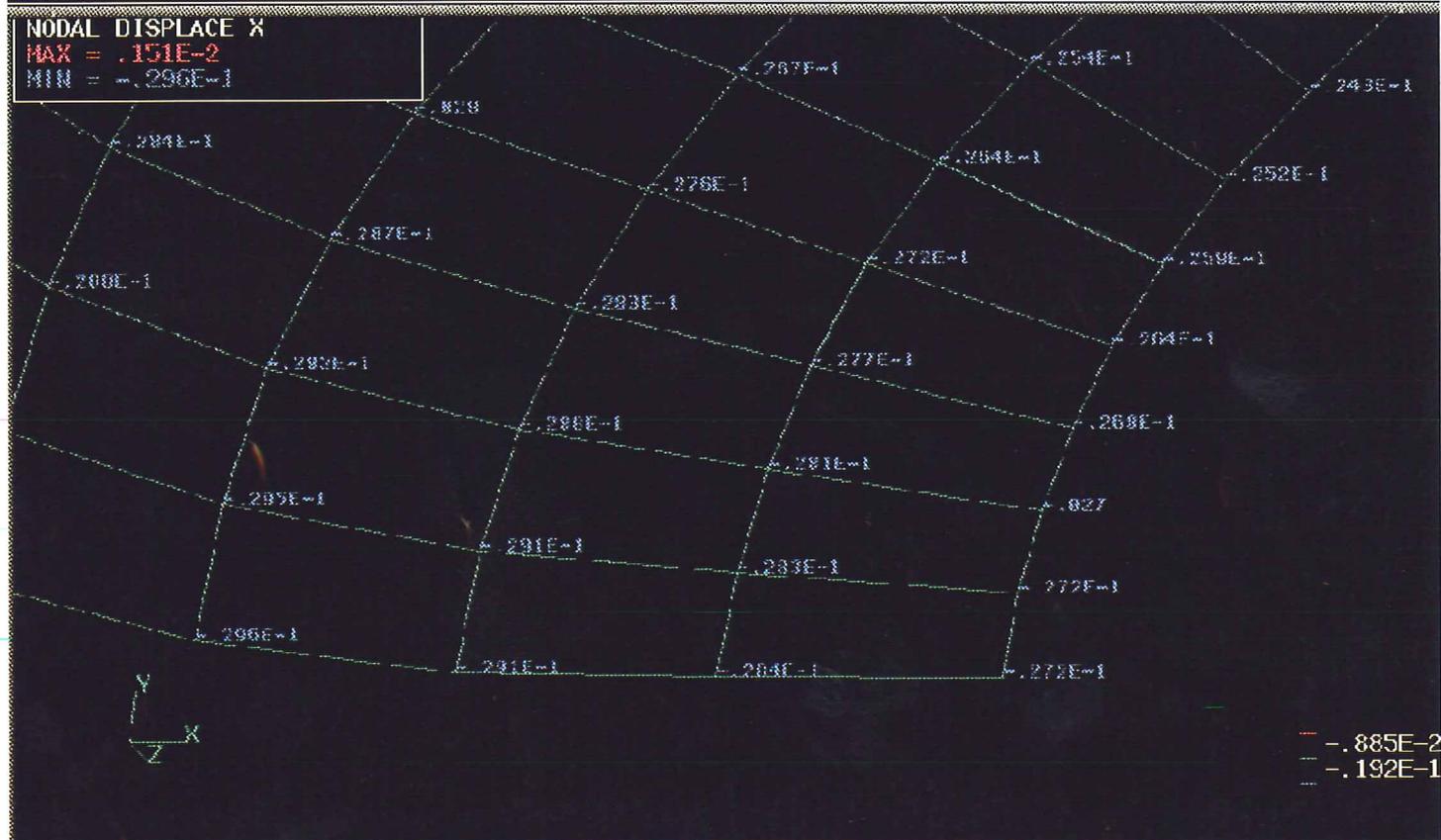
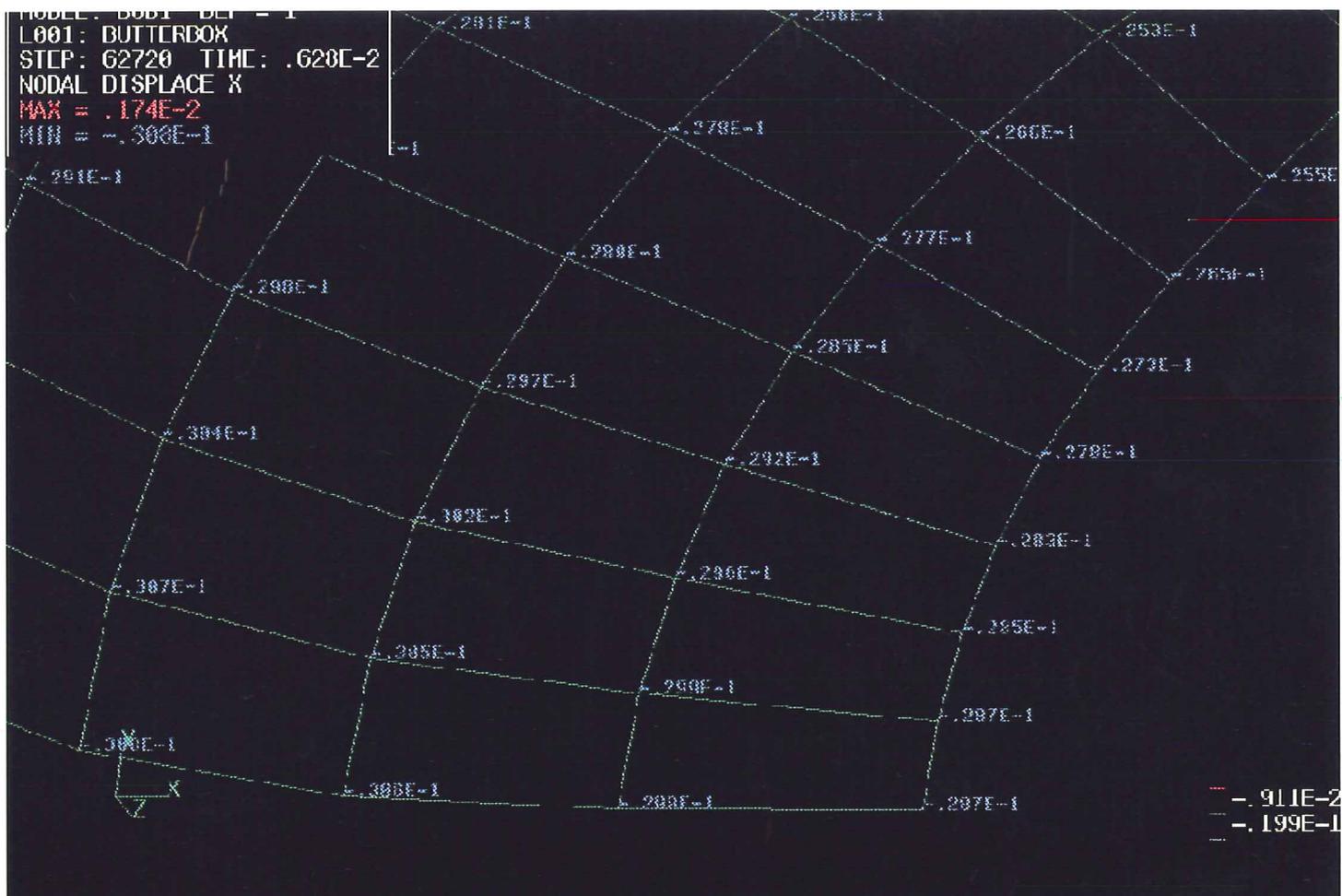


Figura 11.6- Movimento do centro da chapa (*draw in*)
 $\mu = 0,144$ e $\mu = 0$

Referências

Ahmad, S; Irons, B.M. e Zienkiewicz, O.C. "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements" IJNME, **2**, 418-451, 1970.

Agelet de Saracibar, C. "*Análisis por el Método dos Elementos Finitos de Procesos de Conformado de Láminas Metálicas*", tese de doutorado, Universitat Politècnica de Catalunya, Espanha, 1990.

Arabashi, S., Barton, D. C. e Shaw, N. K. "Steps towards CAD-FEA Integration", Engng. Computers, **9**, 17-26, 1993.

Babuska, I.; Strouboulis, T. e Upadhyay, C. S. "A Model Study of the Quality of a-posteriori Error Estimators for Linear Elliptic Problems- Error Estimation in the Interior of Patchwise Uniform Grids of Triangles", Comp. Meth. Appl. Mech. Engng, **14**, 307-378, 1994.

Babuska, I., Strouboulis, T. e Upadhyay, C. S., "A Model Study of the Quality of a Posteriori Error Estimators for Linear Elliptic Problems. Error Estimation in the Interior of Patchwise Uniform Grids of Triangles" , Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. , **114** , 307-378, 1994.

Barlat, F.; Chung, K.; Shah, K. N.; Lege, D. J. e Brem, J. C. "Modeling of Sheet Forming of Polycrystalline Metals", Anais do Second World Congress on Computational Mechanics, Stuttgart, Alemanha, 1990.

Barlat, F.; Lege, D. J. e Brem, J. C. "A Six Component Yield Function for Anisotropic Materials", Int. J. Plasticity, **7**, 693-712, 1991.

Barlat, F. e Lian, J. "Plastic Behaviour and Stretchability of Sheet Metals. Part I- A Yield Function for Orthotropic Sheets under Plane Stress Conditions", Int. J. Plasticity, **5**, 51-66, 1989.

Bathe, R.J. e Dvorkin, E.N. " A Four Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Plate Theory and Mixed Interpolation" IJNME, **21**, 367-383, 1985.

Batoz, J. L.; Bathe, K. J. e Ho, L. W. "A Study of Three-node Triangular Plate Bending Elements", IJNME, **10**, 1771-1812, 1980.

Batoz, J. L. e Lardeur, P. "A Discrete Shear Triangular Nine DOF Element for the Analysis of Thick to Very Thin Plates", IJNME, **28**, 533-560, 1989.

Belytschko, T. e Tsay, C. S. "A Stabilization Procedure for the Quadrilateral Plate Element with One-point Quadrature, IJNME, **19**, 277-286, 1983.

Benson, , D. J. e Hallquist, J. O. "*A Single Surface Contact Algorithm for the Postbuckling Analysis of Shell Structures*", relatório, University of California, San Diego, EUA.

Betten, J. "Application of Tensor Functions to the Formulation of Yield Criteria for Anisotropic Materials", *Int. J. Plasticity*, **4**, 29-46, 1988.

Bonet, J.; Pica, A.; Peiró, J. e Wood, R. D. "Adaptive Mesh Refinement for Faceted Shells", *Communications in Applied Numerical Methods*, **8**, 319-329, 1992.

Budiansky, B. e Sanders, J. L. "On the Best First Order Linear Shell Theory", em *Progress in Applied Mechanics*, Macmillan, 129-140, 1963.

Carleer, B. D.; Louwes, M. F. M.; Huétink, J. e Vreede, P. T. "Modelling Drawbeads in 3D Finite Element Simulations of the Deep Drawing Process", *Anais do NUMIFORM 95*, 681-685, Balkena, 1995.

Chadra, N. e Reddy, J. N. (ed.) "*Advances in Finite Deformation Problems in Material Processing and Structures*", AMD Vol. 25, ASME, 1991.

Chenot, J.L. e Oñate, E. (ed.) "*Modelling of Metal Forming Processes*", Euromech 283 Colloquium, Sophia Antipolis, França, agosto de 1988, Kluwer Academic Publishers.

Chenot, J.L., Wood, R.D., Zienkiewicz, O.C. "*Numerical Methods in Industrial Forming Processes*" NUMIFORM 92, Balkema, 1992.

Chu, E. "Generalization of Hill's 1979 Anisotropic Yield Criteria", *Anais do NUMISHEET 93*, Isehara, Japão, 199-208, 1993.

Chung, K. e Shah, K. "Finite Element Simulation of Sheet Metal Forming for Planar Anisotropic Metals", *Int. J. Plasticity*, **8**, 453-476, 1992.

Chung, S. Y. e Swift, H. W., *Proc. Inst. Mech. Eng.*, **165**, 199, 1951.

Computational Plasticity- Fundamentals and Applications. Eds: D. R. J. Owen, E. Oñate, E. Hinton, Pineridge Press Limited, 1995 (2 volumes).

Crisfield, M. A. "*NonLinear Finite Element Analysis of Solids and Structure-*", Vol. 1, Wiley, 1991.

Demkowicz, L.; Oden, J. T.; Rachowicz, W. e Hardy, O. "Towards a universal h-p Adaptive Finite Element Strategy- Part 1- Constrained Approximation and Data Structure", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **77**, 79-112, 1989.

Dvorkin, E. N. e Bathe, K. J. "A Continuum Mechanics Based Four Node Shell Element for General Non-linear Analysis", *Eng. Comp.*, **1**, 77-88, 1984.

Dvorkin, E.N. "Non Linear Analysis of Shells Using the MITC Formulation" , *Arch. Computational Methods Engineering*, **2**, 1-50, 1995.

El Mouatassim, M.; Thomas, B.; Jameux, J. P. e Di Pasquale, E. "An Industrial Finite Element Code for One-step Simulation of Sheet Metal Forming", anais do NUMETA 95, 761-766, 1995.

Eterovic, A. L. e Bathe, K. J. "On the Treatment of Inequality Constraints arising from Contact Conditions in Finite Element Analysis", Computers and Structures, **40**, 203-209, 1991.

"Finite Element Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes in Automotive Industry", Anais, VDI Berichte 894, VDI-Verlag GmbH, Dusseldorf, Alemanha, 1991.

Frykestig, J. "Advancing Front Mesh Generation Techniques with Application to the Finite Element Method", tese de doutoramento, Departamento de Mecânica Estrutural, Chalmers University of Technology, Suécia, 1994.

Garcia Garino, C. "Un Modelo Numérico para el Analisis de Sólidos Elastoplásticos sometidos a Grandes Deformaciones", tese de doutorado, ETSECCPB, Universitat Politècnica de Catalunya, Espanha, 1993.

Garcia Garino, C. e Oliver, J. "Un Modelo Elastoplástico para el Analisis de Sólidos Elastoplásticos sometidos a Grandes Deformaciones. Parte I: Formulación Teórica e Aplicación a Metales", Rev. Int. Met. Num. Calc. Dis., **2**, 105-123, 1995.

Garcia Garino, C. e Oliver, J. "Un Modelo Elastoplástico para el Analisis de Sólidos Elastoplásticos sometidos a Grandes Deformaciones. Parte II: Implementación numérica y ejempl,os de aplicación", Rev. Int. Met. Num. Calc. Dis., no prelo.

Green, A. E. e Naghdi, P. M. "A General Theory of an Elastic Plastic Continuum", Archive for Rational Mechanics and Analysis, **18**, 251-281, 1965.

Guo, Y. Q., Batoz, J. L. , Detraux, J. M. e Duroux, P. "Finite Element Procedures for Strain Estimations of Sheet Metal Forming Parts", IJNME, **30**, 1385-1401, 1990.

Gurson, A. L. "Plastic Flow and Fracture Behaviour of Ductil Materials Incorporating Void Nucleation, Growth and Interaction", tese de doutorado, Brown Univ., 1975.

Hallquist, J. O. "Nike 2D- a vectorized, implicit, finite deformation, finite element code for analysing the static and dynamic response of 2D solids", relatório técnico UCRL-52678, Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore, EUA.

Hayashida, Y. ; Maeda, Y; Hashimoto, N.; Hattori, S.; Yanagawa, M.; Chung, K., Barlat, F.; Brem, J. C.; Lege, D. J. e Murtha, S. J. "FEM Analysis of Punch Strecching and Cup Drawing Tests for Aluminium Alloys using a Planar Anisotropic Yield Function", NUMIFORM 95, Balkena, 1995.

Hill, R. "The Mathematical Theory of Plasticity", Claredon Press, Oxford, 1950.

Hill, R. "A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals", Proc. Roy. Soc. London Ser. A, **193**, 281-297, 1948.

Hill, R. "Theoretical Plasticity of Textured Aggregates", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **85**, 179-191, 1979.

Hinton, E e Huang, H.C. "A Family of Quadrilateral Mindlin Plate Elements With Substitute Shear Strain Fields", *Comput. and Struct.*, **23**, 409-431, 1986.

Hochard, Ch.; Peric, D, Dutko, M. e Owen, D. R. J., "Transfer Operators for Evolving Meshes in Elasto-plasticity", *Anais, Computational Plasticity*, 2331-2339, Pineridge Press, 1995.

Huang, H. C. "*Static and Dynamic Analysis of Plates and Shells*", Springer-Verlag, 1989.

Hughes, T. J. R. "*The Finite Element Method- Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*", Prentice-Hall, 1987.

Hughes, T. J. R. "Numerical Implementation of Constitutive Models: Rate Independent Deviatoric Plasticity", in *Theoretical Foundations for Large Scale Computations for Non-Linear Material Behaviour*, S. Nemat-Nasser; R. J. Asaro e G. A. Hegemier (eds.), Martinus Nijhoff Publishers, Holanda, 1984.

Hughes, T. J. R. e Franca, L. P. "A Mixed Finite Element Formulation for Reissner-Mindlin Plate Theory: Uniform Convergence of all Higher Order Spaces", *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, **67**, 223-240, 1988.

Johnson, C. e Hansbe, P., "Adaptive Finite Element Methods in Computational Mechanics", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, **101**, 143-181, 1992

Kobayashi, S.; Oh, S. e Altan, T. "*Metal Forming and the Finite Element Method*", Oxford University Press, 1989.

Kobayashi, S. e Kim, J. H. "Deformation Analysis of Axisymmetric Sheet Metal Forming Processes by the Rigid-plastic Finite Element Method", *Mechanics of Sheet Metal Forming*, D. P. Koistiner e N. M. Wang (eds.), Plenum Press, 1978.

Koistiner, D. P. e Wang, N. M. "*Mechanics of Sheet Metal Forming*", Plenum Press, 1978.

Las Casas, E. B. e Magalhães, M. C. "Implementação Computacional de Estimador de Erro baseado em Técnicas Superconvergentes de Recuperação", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Barcelona, **11**, 1995 (no prelo).

Las Casas, E. B.; Silva, R. P. e e Carvalho, M. B. "Solução de Sistemas de Equações Lineares usando o PVM", *Anais das XVII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*, **1**, 121-132, Montevideo, Uruguai, novembro de 1993.

Lee, E. H. "Elastic Plastic Deformation at Finite Strains", ASME Journal of Applied Mechanics, **36**, 1-6, 1969.

Lee, J. K., Wagoner, R. H. e Nakamichi, E. "*Summary of a Benchmark Test for Sheet Forming Analysis*" Center for Net Shape Manufacturing Report ERC/NSM-S-90-22, Columbus, Ohio, Estados Unidos, 1990.

Loula, A. F. D.; Miranda, I.; Hughes, T. J. R. e Franca, L. P. "On Mixed Finite Element Methods for Axisymmetric Shell Analysis", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., **72**, 201-231, 1989.

Love, A. E. H. "*Mathematical Theory of Elasticity*", 4^a Ed., Cambridge University Press, 1927.

Lubliner, J. "On the Thermodynamic Foundations of Non-linear Solid Mechanics", Int. J. Nonlinear Mech., **7**, 237-254, 1972.

Lubliner, J. "*Plasticity Theory*", Macmillan Publishing Company, 1990.

Marsden, J. E. e Hughes, T. J. R. "*Mathematical Foundations of Elasticity*", Prentice Hall, 1983.

Makinouchi, A; Nakamachi, E. ; Oñate, E; Wagoner, R.H. (Eds) "*Numisheet 93-Proceedings*" , Isihara, Japão, 1993.

Michalowski, R. e Mroz, Z. , "Associated and Non-associated Sliding Rules in Contact Friction Problems", Archives of Mech., **30**, 259-276, 1978.

Miquel, J.; Oñate, E.; Garcia Garino, C.; Botello, S.; Flores, F. e Rojek, J. "*Análisis de Problemas de Choque e Impacto entre Sólidos Deformables por el Método de los Elementos Finitos*", monografía CIMNE 25, Barcelona, 1994.

Mouatassim, M, Detraux, J. M., Batoz, J. L. e Guo, Y. Q. "Application of an Inverse Finite Element Procedure for Sheet Forming", VDI Berichte nr. 894, 647-664, 1991.

Narasimhan, K.; Miles, M. P. e Wagoner, R. H. "A Better Formability Test", Anais do NUMISHEET 93, 363-372, 1993.

Nagtegaal, J. C.; Parks, D. M. e Rice, J. R. "On Numerically Accurate Solutions in the Fully Plastic Range", Comp. Met. Appl. Mech. Eng., **4**, 153, 1974.

Narasimhan, K.; Miles, M. P. e Wagoner, R. H. "A Better Sheet Formability Test", Anais do NUMISHEET 93, 363-372, Japão, 1993.

Nichols, I. E.; Louwerse, G. L. e Crook, A. J. L. "The Application of Novel Numerical Methods to Multiple State Forming Operations in the Manufacture of Thin Walled Steel Cans", anais do NUMIFORM 95, 773-778, Bakena, 1995.

NUMISHEET 93, Anais, Ed. Kinouchi, A. M., Nakamichi, E., Oñate, E. e Wagoner, R. H., Isihara, Japão, 1993.

Oden, J. T.; Wempner, G. A. e Kross, D. A. "Finite Element Analysis of Thin Shells", Proc. ASCE, 94 (EM6), 1273-1294, 1968.

Oller, S.; Botelo, S.; Mequel, J. e Oñate, E. "An Anisotropic Elastoplastic Model based on an Isotropic Formulation", Eng. Comp., **12**, 245-262, 1995.

Oñate, E. "*Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos*", CIMNE, 1992.

Oñate, E. "Una Panorámica de las Posibilidades del MEF para Análisis de Procesos de Conformado de Metales", Publicación CIMNE 23, Barcelona, 1992.

Oñate, E. e Agelet de Saracibar, C. "Alternatives for Analysis of Sheet Metal Forming Process" em *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, Chenot, Woods e Zienkiewicz (Ed.), Balkena, 1992.

Oñate, E. e Cendoya, P. "Non Linear Dynamic Analysis of Shells using e Three Node Triangle with Translational Degrees of Freedom", Anais do Third U. S. National Congress on Computational Mechanics, Dallas, EUA, 1995.

Oñate, E. e Zienkiewicz, O. J. "A Viscous Shell Formulation for the Analysis of Thin Shell Metal Forming", IJNME, **25**, 305-335, 1983.

Owen, D. R. J.; Oñate, E. e Hinton, E. , "*Computational Plasticity*", Pineridge Press, 1995.

Peraire, J., Peiro, J., Formaggia, L. Morgan, K. e Zienkiewicz, O. C. "Finite Element Euler Computations in Three Dimensions", IJNME, **26**, 2135-2159, 1988.

Pian, T.H.H. "Evolution of Hybred Stress Finite Element Method and an Example Analysis of Finite Strain Deformation of Rigid Plastic Solid" , NUMIFORM 95, Shen & Dayson (Eds), Balkena, 23-29, 1995.

Pian, T. H. H. e Chen, D. "On the vSuppression of Zero Energy Deformation Modes", IJNME, **19**, 1741-1752, 1983.

Rojek, J.; Garcia Garino, C. e Oñate, E. "Advanced Finite Element Models for Analysis of Industrial Sheet Forming Processes", em *Recent Developments in Sheet Metal Forming Technology*, Lisboa, Portugal, 1994.

Shima, S e Oyane, M. "Plasticity Theory for Porous Metals", Int. J. Mech. Sci., **18**, 285-291, 1976.

Shen, S.F. e Dawson, P (Eds) "Simulation of Material Processing: Theory, Methods and Applications" , NUMIFORM 95, Balkena, 1995.

Silva, R. C. C. ; Landau, L.; Ribeiro, F. L. B. “Estratégia H-Adaptativa para a Análise Elastoplástica Bidimensional”, *Rev. Int. Met. Num. Calc. Dis. Ing.*, **11**, 1995 (no prelo).

Simo, J. C. e Kennedy, J. G. “On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model- Part V- Non-linear Plasticity Formulations and Integration Algorithms”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **96**, 133-170, 1992.

Simo, J. C. Rifai, M. S. e Fox, D. D. “On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model- Part IV- Variable Thickness Shells with Through-the-thickness Stretching”, *Comp. Met. Appl. Mech. Eng.*, **81**, 91-126, 1990.

Simo, J. C. e Ortiz, M. “A Unified Approach to Finite Deformation Elastoplastic Analysis based on the use of Hyperelastic Constitutive Equations”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **49**, 221-245, 1985.

“*STAMPAK - An Explicit Finite Element Program for Analysis of Sheet Spamping Problems- Users Manual*”, Technical Report IT 159, International Center for Numerical Methods in Engineering, Barcelona, Espanha, 1994.

Stolarski, H. e Belytschko, T. “Limitation Principles for Mixed Finite Elements based on the Hu-Washizu Variational Formulation”, em *Hybrid and Mixed Finite Element Methods*, Spinken, R. H. e Reed, K. W. (eds.), ASME, 123-132, 1985.

Stolarski, H; Belytschko, T. e Lee, S.H. “ A Review of Shell Finite Elements and Corotational Theories “, *Computational Mechanics Advances, IACM*, **2**, 125-212, 1995.

Taylor,L.; Cao, J.; Karafilis, A.P. e Boyce, M.C. “Numerical Simulations of Sheet Metal Forming”, *NUMISHEET 93*, 161-171, 1993.

Thompson, E. G.; Wood, K. D.; Zienkiewicz, O. C e Samuelson, A. (ed.) “*Numerical Methods in Industrial Forming Processes*”, Anais, Fort Collins, Estados Unidos, A. A. Bakena, 1989.

Vreede, P. “*A Finite Element Model for Simulation of 3D Sheet Metal Forming*”, tese de doutorado, University of Twente, Holanda, 1992.

Yerry, M. A. e Shephard, M. S. “Automatic Three-dimensional Mesh Generation by the Modified-Octree Technique”, *IJNME*, **20**, 1965-1990, 1984.

Watson, D. F. “Computing the n-dimension Delaunay Tesselation with Application to Voronoi Polytopes”, *Comp. J.*, **21**, 167-172, 1981.

Wriggers, P e Simo, J. C. “A Note on Tangent Stiffness for Fully Nonlinear Contact Problems”, *Comm. Appl. Num. Meth.*, **1**, 199-203, 1985.

Zeng, L. F. ,”On Adaptive Finite Element Procedures for Static and Dynamic Problems”, tese de doutoramento, Chalmers University of Technology, Suécia, 1991.

Zhong, Z. H., “*Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems*”, Oxford Univ. Press, 1993.

Zhou, D. e Wagoner, R. H. “Development and Application of Sheet Forming Simulation”, *Anais do NUMISHEET 93*, 3-17, 1993.

Zhou, Y.; Dodd, B.; Caddel, R. M e Hosford, W. F. “Convexity Restrictions on Non-Quadratic Anisotropic Yield Criteria”, *Int. J. Mech. Science*, **29**, 733-741, 1987.

Zienkiewicz, O. C., Jain, P. C. e Oñate, E. “Flow of Solids during Forming and Extrusion. Some aspects of the Numerical Solutions”, *IJNME*, **14**, 14-38, 1978.

Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L. “*The Finite Element Method*” , Fourth Edition, Vol. 1, McGraw Hill, 1984.

Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L. “*The Finite Element Method*” , Fourth Edition, Vol. 2, McGraw Hill, 1991.

Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. e Too, J.M. “Reduced Integration Techniques in General Analysis of Plates and Shells”, *IJNME*, **3**, 275-290, 1971.

Figura 11.6- Movimento do centro da chapa (*draw in*)
 $\mu = 0,144$ e $\mu = 0$