

UN NUEVO METODO LONGITUD DE ARCO PARA ESTRUCTURAS NO LINEALES

JAVIER MOLINA
y
ENRIQUE ALARCON

*Departamento de Mecánica Estructural y C.I.
E.T.S. Ingenieros Industriales
Universidad Politécnica de Madrid
José Gutierrez Abascal, 2
28006 Madrid*

RESUMEN

En los últimos años el método de longitud de arco ha demostrado ser muy efectivo en la resolución de problemas estructurales no lineales dada su capacidad de manejo de puntos límite y su facilidad en la implementación de un tamaño automático del paso de integración. Sin embargo, existen todavía algunas limitaciones conocidas para este método. En este artículo se presenta una versión diferente que evita una de dichas limitaciones y también son incorporados algunos detalles que pueden dar mayor generalidad a ambas versiones.

SUMMARY

In recent years the arc-length method has proved to be very effective for the solution of non-linear structural problems because of its capability to master limit points and its ease of automatic step size implementation. However, there are still some known limitations in this method. In this paper a different version is presented that avoids one of those limitations; in addition several simple details are incorporated to both approaches that make them more general.

INTRODUCCIÓN

Cuando se traza la respuesta estática de estructuras no lineales es a menudo deseable la posibilidad de sobrepasar los puntos límites (Figura 1) de manera que se pueda obtener un conocimiento más completo del comportamiento estructural. Por otro lado, si el método utilizado no puede trazar puntos límite, es muy difícil saber si una detención del proceso ha sido causada por la presencia de un punto límite o por simples problemas numéricos. Ramm¹ y Crisfield² dan referencias de algunos de los métodos conocidos capaces de sobrepasar puntos límites y describen el método de longitud de arco como uno de los más potentes.

Recibido: Febrero 1988

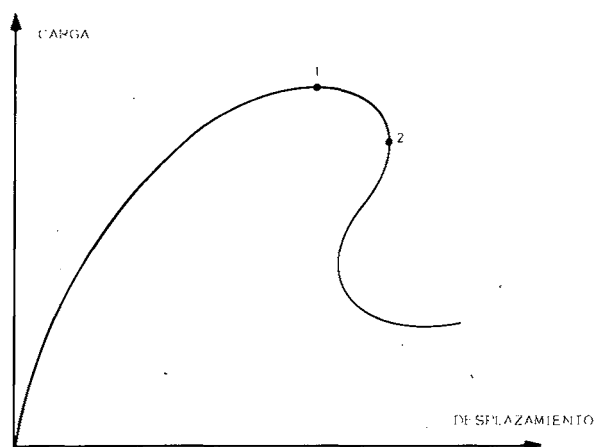


Figura 1. Curva de carga con puntos límites. (1) rebote hacia delante. (2) rebote hacia atrás.

El método de longitud de arco pertenece a una familia de métodos que iteran entre dos puntos de equilibrio considerando el nivel de carga como una variable más y necesitando, por tanto, una condición de vínculo adicional para esta nueva incógnita.

Para una mejor comprensión del significado de la condición de vínculo puede ser útil imaginar un espacio N -dimensional (Figura 2), donde N es el número de grados de libertad de la estructura, o un espacio $N + 1$ -dimensional, si se toma el nivel de carga λ como una dimensión más.

La curva de carga es el lugar geométrico de los puntos de equilibrio dentro de dicho espacio.

Del mismo modo, la condición de vínculo utilizada para las iteraciones dentro de un determinado paso de carga puede ser interpretada como una superficie trazada en el mismo espacio. El objetivo del método es la búsqueda del punto de intersección entre dichas curva de carga y superficie de vínculo, dentro de una determinada tolerancia y siguiendo un procedimiento iterativo. Una vez hallado el mencionado punto de intersección, se toma como punto de partida para un nuevo paso en la curva de carga con una nueva superficie de vínculo. Si dicho punto de intersección no existiese dentro de la tolerancia marcada, el método sería incapaz de continuar la resolución ya que se detendría al superarse el número máximo de iteraciones permitidas.

Desde este punto de vista, sería deseable el uso de una condición de vínculo que representase una superficie cerrada en torno al punto inicial del paso; porque de ese modo está garantizada la existencia de la intersección buscada. Más aún, se puede decir que el uso de una superficie de vínculo abierta es probablemente el punto débil de algunos métodos conocidos como los tradicionales de nivel de carga fijo (superficie de vínculo definida por el plano $\lambda = \text{cte.}$), o de control de desplazamiento (superficie de vínculo definida por el plano $u^k = \text{cte.}$), que resultan incapaces de superar ciertos puntos límites, como es sabido.

Riks³ y Wempner⁴ proponen el uso de un incremento de longitud de arco fijo en la curva de carga como condición de vínculo para las iteraciones dentro del paso de carga. Dicha condición, con fines prácticos, es aproximada mediante una esfera de vínculo, en

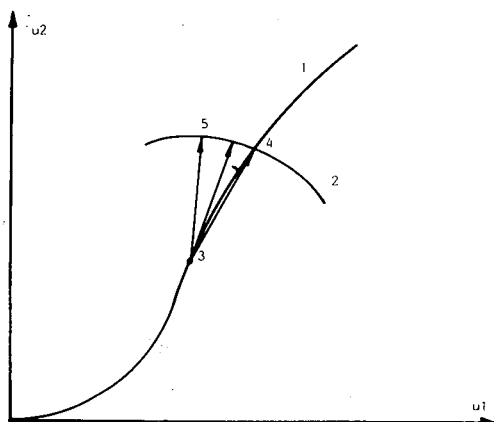


Figura 2. Iteraciones dentro de un paso de carga. (1) curva de carga. (2) superficie de vínculo. (3) punto inicial del paso. (4) punto final del paso. (5) iteraciones intermedias.

torno al punto inicial, siendo su radio el incremento de longitud de arco, es decir,

$$\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{u}_i + b \Delta \lambda_i^2 \mathbf{q}^T \mathbf{q} = \Delta l^2 \quad (1)$$

donde

- $\Delta \mathbf{u}_i$ = incremento del vector de desplazamientos en la iteración i .
- $\Delta \lambda_i$ = incremento del nivel de carga en la iteración i .
- $\mathbf{q}$ = vector de cargas de referencia.
- Δl = incremento de longitud de arco para todas las iteraciones del paso.
- b = factor de escala.

La esfera (1) puede ser simplificada mediante el uso de un plano normal al primer vector incremento

$$\Delta \mathbf{u}_0^T \Delta \mathbf{u}_i + b \Delta \lambda_0 \Delta \lambda_i \mathbf{q}^T \mathbf{q} = \Delta l^2$$

o al vector incremento anterior

$$\Delta \mathbf{u}_{i-1}^T \Delta \mathbf{u}_i + b \Delta \lambda_{i-1} \Delta \lambda_i \mathbf{q}^T \mathbf{q} = \Delta l^2$$

Estas simplificaciones son llamadas respectivamente "plano normal fijo" y "plano normal actualizado" y han sido ampliamente utilizadas¹ como versiones del método de longitud de arco, a pesar de no usar una superficie cerrada de vínculo como en (1).

METODO DE LONGITUD DE ARCO ESFERICO

Al igual que en otras versiones del método, se supone carga proporcional y que las fuerzas internas se pueden calcular a partir de los desplazamientos.

Se define entonces

$$g(u, \lambda) = \lambda q - f(u) \quad (2)$$

como el vector de cargas residuales, siendo λq las cargas aplicadas y $f(u)$ las fuerzas internas.

A partir de dichas cargas residuales, es posible obtener una corrección del desplazamiento para una nueva iteración:

$$\delta u(u, \lambda) = K^{-1} g(u, \lambda) \quad (3)$$

siendo K la matriz de rigidez tangente que puede ser calculada en cada iteración (Newton-Raphson) o en el punto inicial antes de realizar las iteraciones del paso (Newton-Raphson modificado).

Como ecuación de vínculo, Crisfield⁵ propone la ecuación (1) con $b = 0$; de manera que utiliza una superficie esférica en el espacio N -dimensional:

$$\Delta u_i^T \Delta u_i = \Delta l^2 \quad (4)$$

La notación que se utilizará es la siguiente:

- u_{-1}, λ_{-1} son el vector de desplazamientos y el nivel de carga en la última iteración del paso anterior.
- u_i, λ_i son las mismas entidades en la iteración i de este paso.
- $\Delta u_i, \Delta \lambda_i$ son los incrementos en la iteración i .
- $\delta u_i, \delta \lambda_i$ son las correcciones en la iteración i respecto a la $i - 1$.

entendiéndose que

$$\begin{aligned} u_i &= u_{-1} + \Delta u_i & \lambda_i &= \lambda_{-1} + \Delta \lambda_i & i &= 0, 1, \dots \\ \Delta u_i &= \Delta u_{i-1} + \delta u_i & \Delta \lambda_i &= \Delta \lambda_{i-1} + \delta \lambda_i & i &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Sustituyendo (2) en (3) la corrección del desplazamiento puede ser descompuesta según

$$\delta u_i = K_{i-1}^{-1} (\lambda_i q - f(u_{i-1})) = \lambda_i \delta u_i^* + \delta \bar{u}_i \quad (6)$$

donde.

$$\delta u_i^* = K_{i-1}^{-1} q \quad (7)$$

y

$$\delta \bar{\mathbf{u}}_i = -\mathbf{K}_{i-1}^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1}) \quad (8)$$

El vector $\delta \mathbf{u}_i^*$ de (7) puede ser calculado al inicio del paso si se utiliza un procedimiento Newton-Raphson modificado por que, en tal caso,

$$\mathbf{K}_{i-1} = \mathbf{K}_{-1} \quad i = 1, 2, \dots$$

Para comenzar el proceso iterativo, suponiendo un equilibrio perfecto al final del paso anterior

$$\lambda_{-1} \mathbf{q} - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{-1}) = \mathbf{0}$$

el incremento de partida ($i = 0$) del paso se calcula como (utilizando (5) y (7))

$$\Delta \mathbf{u}_0 = \mathbf{K}_{-1}^{-1} (\lambda_0 \mathbf{q} - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{-1})) =$$

$$\mathbf{K}_{-1}^{-1} (\Delta \lambda_0 \mathbf{q} + \lambda_{-1} \mathbf{q} - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{-1})) = \Delta \lambda_0 \delta \mathbf{u}_0^* \quad (9)$$

donde $\Delta \lambda_0$ se puede obtener sustituyendo (9) en (4):

$$\Delta \lambda_0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{u}_0^{*T} \delta \mathbf{u}_0^*}} \quad (10)$$

si bien el signo indeterminado se puede cambiar por el signo del producto

$$\delta \mathbf{u}_0^{*T} \mathbf{q}$$

Los siguientes incrementos iterativos ($i = 1, 2, \dots$) se obtienen sumando (5) y (6)

$$\Delta \mathbf{u}_i = \Delta \mathbf{u}_{i-1} + \lambda_i \delta \mathbf{u}_i^* + \delta \bar{\mathbf{u}}_i \quad (11)$$

eligiendo el valor de λ_i de manera que la ecuación de vínculo sea satisfecha, esto es, sustituyendo (11) en (4)

$$a_1 \lambda_i^2 + a_2 \lambda_i + a_3 = 0 \quad (12)$$

donde

$$a_1 = \delta \mathbf{u}_i^{*T} \delta \mathbf{u}_i^*$$

$$a_2 = 2 \Delta \mathbf{u}_{i-1}^T \delta \mathbf{u}_i^* + 2 \delta \bar{\mathbf{u}}_i^T \delta \mathbf{u}_i^* \quad (13)$$

$$a_3 = \Delta \mathbf{u}_{i-1}^T \Delta \mathbf{u}_{i-1} + 2 \Delta \mathbf{u}_{i-1}^T \delta \bar{\mathbf{u}}_i + \delta \bar{\mathbf{u}}_i \delta \bar{\mathbf{u}}_i - \Delta l^2$$

De la ecuación (12) en general se obtendrán dos raíces reales pero es importante no elegir aquella que dará lugar a una descarga. Este problema se salva mediante el cálculo

del producto $\Delta u_{i-1}^T \Delta u_i$ para cada una de las dos raíces, de las cuales se descartará la que haga menor dicho producto.

Respecto al valor a adoptar para Δl , suele ser más fácil elegir un valor razonable $\Delta \lambda_0$ para el incremento inicial del primer paso y entonces despejar el valor correspondiente de Δl en la ecuación (10) (Crisfield⁵) o, igualmente, elegir un valor razonable Δu_0^T para un grado de libertad representativo procediendo de una forma análoga (Bathe y Dvorkin⁶). Para un ajuste automático del tamaño del paso en los sucesivos incrementos, Ramm¹ propone hacer:

$$\Delta l_s = \Delta l_{s-1} \sqrt{\frac{I_d}{I_{s-1}}} \quad (14)$$

donde Δl_{s-1} y Δl_s son las longitudes del arco en el paso anterior y en el presente e I_{s-1} e I_d son el número de iteraciones requeridas en el paso anterior y el número deseado para el presente, respectivamente. Por otro lado, si el número de iteraciones para un paso resultase excesivo, éste se debería iniciar de nuevo con una longitud de arco más corta.

Este método ha sido combinado con técnicas de líneas de búsqueda y aceleración por Crisfield⁷ para mejorar su convergencia, pero todavía presenta un problema no resuelto, según comentan algunos autores, cuando no existen raíces reales en la ecuación (12). Este es un caso frecuente en modelos con material reblandecible.

Bathe y Dvorkin⁶ intentan salvar dicho problema mediante el uso de una ecuación de vínculo distinta cada vez que no existan raíces reales. Así

$$(\lambda_{-1} + \frac{1}{2} \Delta \lambda_i) q^T \Delta u_i = \Delta W \quad (15)$$

debería sustituir a (4) en tales casos.

Esta nueva condición, llamada incremento fijo de trabajo externo, sustituye la constante Δl por ΔW y dará lugar a una ecuación semejante a (12) cuando (11) sea sustituido en (15) siendo siempre en este caso las dos raíces reales. Sin embargo, es posible que la superficie definida por (15) en el espacio $N + 1$ dimensional no tenga intersección con la curva de carga por tratarse de una superficie abierta. Como se comentó en la sección anterior, la no existencia de dicha intersección significará el bloqueo del método.

Crisfield² explica el problema de la no existencia de raíces reales por la presencia de deformaciones localizadas e inestabilidades materiales en determinados problemas. Las soluciones que él propone están basadas en el cálculo de una nueva matriz de rigidez (cambio de Newton-Raphson modificado a normal) y en la introducción de perturbaciones en la rigidez de los elementos. De todos modos, no ofrece ninguna solución general y recomienda abundante experimentación numérica.

De Borst⁸ también ha encontrado el mismo fallo al método y lo explica por el hecho de que en algunas ocasiones, para problemas de no linealidad material, los modos de fallo o bifurcación están extremadamente localizados. Este autor recomienda el uso de pesos diferentes para cada uno de los grados de libertad en la ecuación de vínculo (4). Dicha ponderación dependería del problema a resolver.

NUEVO METODO DE LONGITUD DE ARCO ESFERICO

En la versión del método que se presenta en esta sección, el vínculo esférico (4) se sigue imponiendo al incremento de desplazamiento, si bien la descomposición (6) de la corrección de desplazamiento no será válida y el valor del nivel de carga se obtendrá por un procedimiento totalmente distinto al conocido.

Utilizando la notación de la sección anterior, el incremento inicial del paso es calculado de manera análoga, esto es, resumiendo (9) y (10) con el mencionado criterio para el signo,

$$\Delta \mathbf{u}_0 = \text{signo}(\delta \mathbf{u}_0^{*T} \mathbf{q}) \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{u}_0^{*T} \delta \mathbf{u}_0^*}} \delta \mathbf{u}_0^*$$

Sin embargo, los restantes incrementos iterativos son calculados de manera distinta. Primero, el valor del nivel de carga se corrige de manera que se haga mínima la norma del vector de cargas residuales.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left[\mathbf{g}(\mathbf{u}_{i-1}, \lambda_i)^T \mathbf{g}(\mathbf{u}_{i-1}, \lambda_i) \right] = 0 \quad (16)$$

y sustituyendo (2) en (16)

$$\lambda_i = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1})^T \mathbf{q}}{\mathbf{q}^T \mathbf{q}} \quad (17)$$

Segundo, se construye un incremento de prueba del vector desplazamiento en la forma:

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_i = \Delta \mathbf{u}_{i-1} + \delta \bar{\mathbf{u}}_i \quad (18)$$

siendo obtenido $\delta \bar{\mathbf{u}}_i$ a través de (6).

Y tercero, el incremento de desplazamiento de la iteración es calculado según

$$\Delta \mathbf{u}_i = \gamma \Delta \hat{\mathbf{u}}_i \quad (19)$$

obteniéndose γ mediante la sustitución de (19) en (4), esto es,

$$\gamma = \frac{\Delta l}{\sqrt{\Delta \hat{\mathbf{u}}_i^T \Delta \hat{\mathbf{u}}_i}} \quad (20)$$

de manera que el vínculo esférico es satisfecho mediante un retorno radial o una línea de búsqueda en la dirección del incremento de prueba $\Delta \hat{\mathbf{u}}_i$.

La minimización utilizada en (16) no es nueva. Por ejemplo, ha sido empleada por Bergan⁹ como base de un método especial de resolución.

La principal ventaja de esta versión del método radica en que las ecuaciones (17) y (20) conducirán siempre a soluciones reales y no ha sido necesario para ello perder el uso de la superficie de vínculo cerrada ni la generalidad del método.

En la Figura 3 se puede observar una interpretación geométrica de las expresiones (4) y (11) (Figura 3 (a)) y las expresiones (4), (18) y (19) (Figura 3 (b)).

Cada parte de la figura corresponde a una versión del método aplicada sobre el mismo problema de dos grados de libertad. En el primer caso, con la versión del método conocida (Figura 3 (a)), el problema no puede ser resuelto porque no existe solución común para las ecuaciones (4) y (11), si bien la curva de carga sí tiene intersección con el vínculo (4) por ser ésta una superficie cerrada. En el segundo caso, con la versión del método propuesta en esta sección (Figura 3 (b)), la iteración se culmina sin problema porque todas las ecuaciones tienen solución real.

No obstante, en algunos casos, se ha encontrado un problema específico de esta nueva versión del método consistente una inesperada solución de descarga o cambio de sentido en la curva de carga. Este problema puede ser evitado si la expresión (18) es sustituida por

$$\Delta \hat{u}_i = \Delta u_{i-1} + \alpha \delta u_i \quad (21)$$

donde α se elige de manera que

$$0 < \alpha \leq 1$$

y

$$\cos(\Delta \hat{u}_i, \Delta u_{i-1}) \geq c \quad (22)$$

siendo c una constante a determinar experimentalmente (0,8 ó 0,9). El valor de α que satisface (22) es único.

EXTENSIONES DEL METODO

La extensión del método de longitud de arco al caso de aplicación sucesiva de varias combinaciones de carga resulta interesante y no entraña gran dificultad. En primer lugar se introducirá la formulación incremental del método que resulta también conveniente porque reduce errores de redondeo⁷.

El vector de cargas acumuladas en la iteración anterior se llamará Q_{i-1} y el correspondiente a la iteración presente $\delta \lambda_i q + Q_{i-1}$, siendo q el vector de cargas de referencia de la combinación actual. Ahora, haciendo referencia a la versión conocida del método, la expresión (6) puede ser reescrita en la forma

$$\delta u_i = K_{i-1}^{-1}(\delta \lambda_i q + Q_{i-1} - f(u_{i-1})) = \delta \lambda_i \delta u_i^* + \delta \bar{u}_i \quad (23)$$

donde δu_i^* es todavía calculado mediante (7), pero

$$\delta \bar{u}_i = K_{i-1}^{-1}(Q_{i-1} - f(u_{i-1})) = K_{i-1}^{-1} g_{i-1} \quad (24)$$

Las ecuaciones (11) y (12) deben modificarse de forma congruente, es decir,

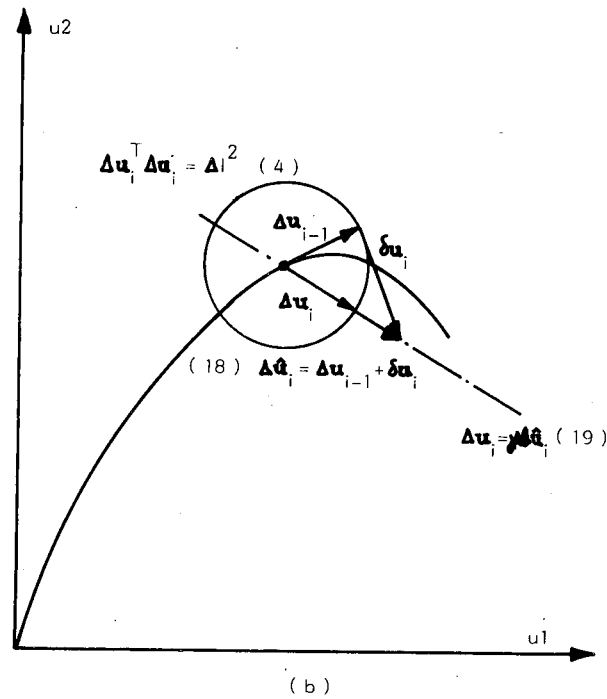
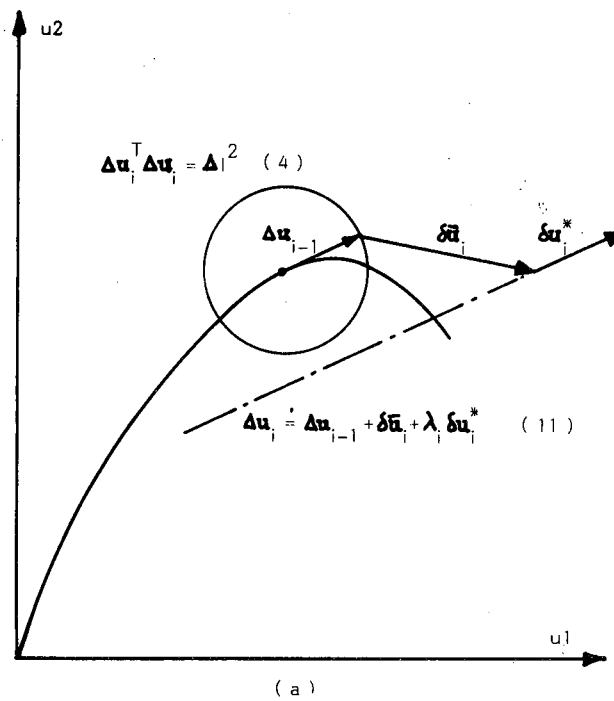


Figura 3. Interpretación geométrica de ambas versiones del método. (a) versión conocida. (b) versión nueva.

Siendo ahora fácil la minimización de la norma del vector de cargas residuales dado en (36), resultando:

$$\delta\lambda_i = -\frac{\bar{\mathbf{g}}_{i-1}^T \mathbf{g}_{i-1}^*}{\mathbf{g}_{i-1}^{*T} \mathbf{g}_{i-1}^*} \quad (39)$$

que sustituirá a (28) terminando así los cambios.

Para el cálculo de la derivada del vector de fuerzas internas con respecto al nivel de cargas, que será utilizada en ambas versiones del método, también será en general conveniente una aproximación secante en la forma

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1}, \lambda_{i-1}) \simeq \frac{1}{\Delta \lambda} [\mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1}, \lambda_{i-1} + \overline{\Delta \lambda}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1}, \lambda_{i-1})] \quad (40)$$

donde $\overline{\Delta \lambda}$ será un valor seleccionado para el problema en particular.

EJEMPLOS RESUELTOS

El primer ejemplo que se presenta es de gran sencillez pero resulta interesante por estar caracterizado por una fuerte no linealidad de tipo geométrico exclusivamente. El sistema (Figura 4) posee dos grados de libertad de desplazamiento conectados mediante muelles lineales y ha sido analizado con ambas versiones del método longitud de arco con fines comparativos.

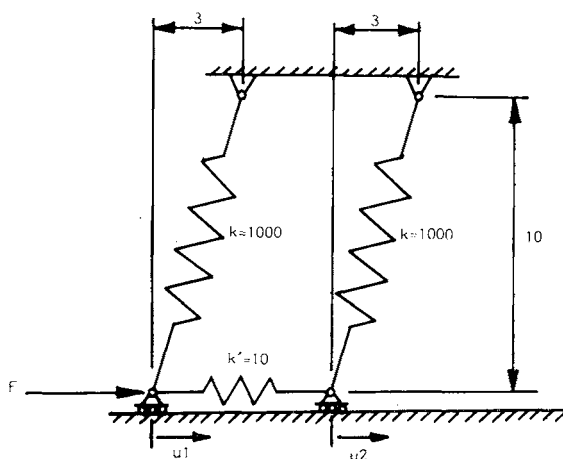


Figura 4. Primer ejemplo: Sistema de muelles con no linealidad geométrica.

Para la resolución se empleó el procedimiento de Newton-Raphson modificado con un número deseado de iteraciones por paso de $I_d = 3$ (expresión (14)) y criterios de convergencia habituales en fuerzas y desplazamientos normalizados.

Los resultados se hallan dibujados en la Figura 5 mediante las proyecciones $F - u^1$ y $u^2 - u^1$ de la curva de carga para una mejor comprensión del comportamiento del sistema.

El punto final de cada paso ha sido señalado con una pequeña marca. Aunque ambas versiones del método resuelven correctamente el problema, se puede apreciar cómo la versión nueva aquí propuesta necesita un número algo mayor de pasos de integración —y, por tanto, de tiempo de resolución—. Quizá éste sea el precio a pagar a cambio de una mayor aplicabilidad, como se verá en el siguiente ejemplo.

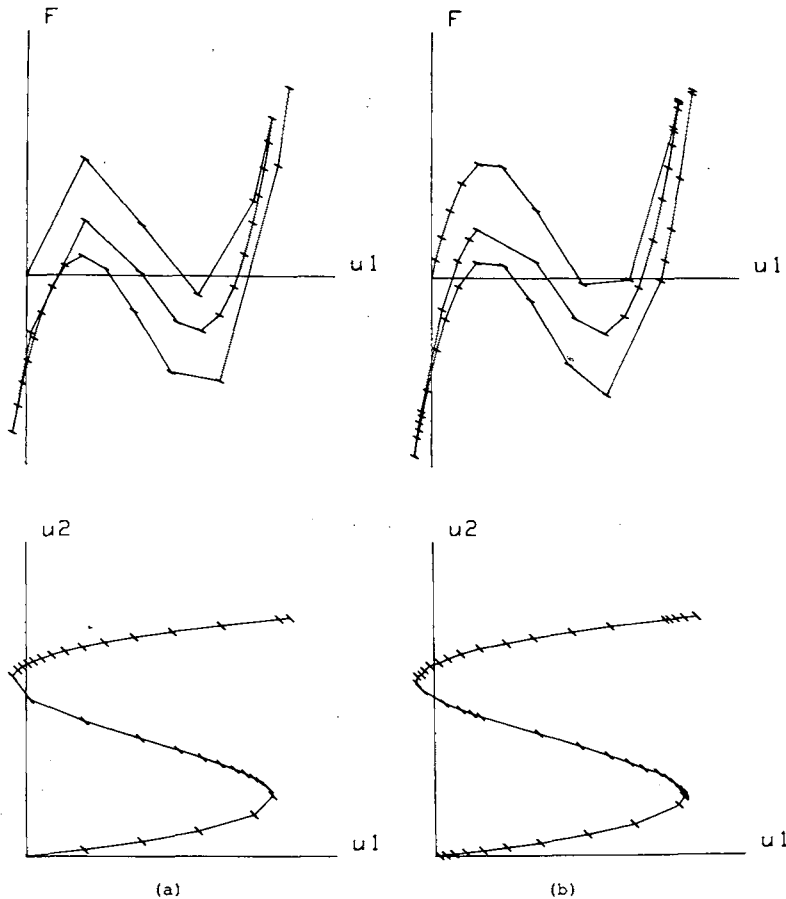


Figura 5. Comparación de resultados con ambas versiones del método para el primer ejemplo: (a) versión conocida. (b) versión nueva.

El segundo ejemplo encierra no linealidad de tipo material exclusivamente. Consiste en una tapa de reactor de hormigón pretensado sometida a presión interna. Las características y los resultados experimentales fueron extraídos de un artículo de Campbell-Allen y Low¹⁰.

El pretensado horizontal estaba provocado por tendones deslizantes y el vertical por barras de acero que apretaban a la tapa contra su base a través de un anillo superior. La presión era suministrada mediante aceite a presión que llenaba una bolsa de goma colocada entre la cara inferior y la placa base. Aunque la tapa ensayada tenía forma octogonal, se ha utilizado para su análisis un modelo axisimétrico de elementos finitos

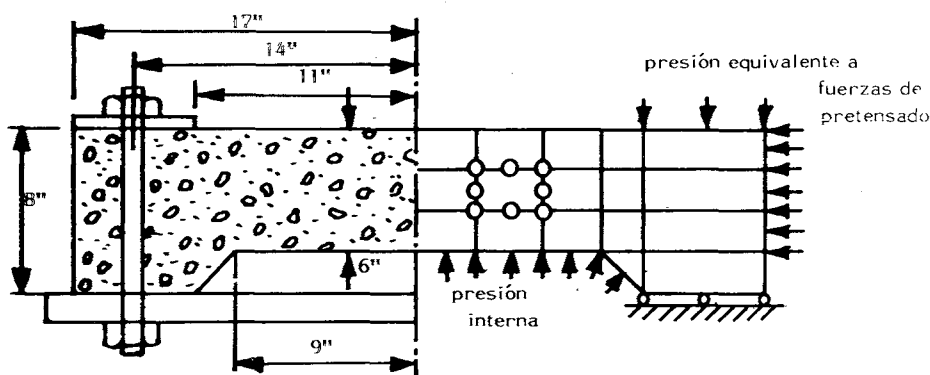


Figura 6. Comparación de resultados con ambas versiones del método para el primer ejemplo: (a) versión conocida. (b) versión nueva.

(Figura 6).

El modelo de comportamiento material utilizado para el hormigón se halla descrito en referencia 11 y consiste en la interpretación de la fisuración mediante el modelo matemático de la teoría de la plasticidad asociada. El Principal parámetro que gobierna el diagrama de reblandecimiento por deformación es la energía de fractura G_f , al igual que en los modelos de fisura difusa. El criterio utilizado para la fisuración fue el de máxima tensión principal.

Cuando este ejemplo fue analizado con la versión conocida del método longitud de arco, el proceso de resolución se interrumpió a los pocos pasos por el mencionado problema de la no existencia de raíces. El problema no se pudo salvar utilizando Newton-Raphson o Newton-Raphson modificado, ni reduciendo el tamaño de la longitud de arco.

No obstante, el ejemplo fue resuelto sin problema mediante la nueva versión del método y la curva obtenida que representa el valor de la presión frente a la flecha central se halla trazada en la Figura 7, junto con los resultados experimentales.

CONCLUSIONES

La nueva versión propuesta del método longitud de arco parece especialmente indicada para aquellos problemas difíciles —normalmente relacionados con reblandecimiento material— que conducen al problema de la no existencia de raíces cuando se usa la versión conocida. La generalidad del método no se pierde porque se mantiene el uso del vínculo esférico y con ello la capacidad de analizar cualquier punto límite; de manera que se puede aplicar también a problemas resolubles con la versión conocida.

Sin embargo, según se desprende del primer ejemplo aquí presentado, para aquellos casos en que son aplicables ambas versiones, la propuesta por Crisfield parece algo más rápida que la nueva. Tal vez la solución más eficaz sea el uso combinado de ambas, limitando la segunda a aquellos pasos en los que se presente el problema de la no existencia de raíces por ser entonces imprescindible.

Las extensiones propuestas del método referentes al caso de carga no proporcional

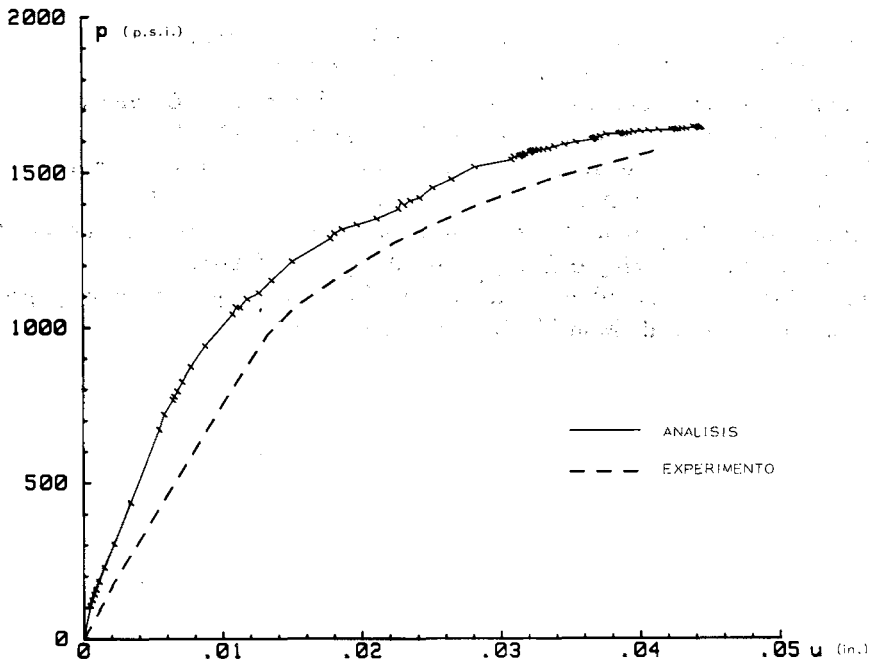


Figura 7. Resultados del segundo ejemplo con la nueva versión del método.

y a la dependencia de las fuerzas internas del nivel de carga son aplicables a ambas versiones del método, según se ha mostrado.

AGRADECIMIENTO

Este trabajo ha sido realizado dentro del Proyecto de Investigación "Métodos para calcular la seguridad de estructuras en centrales nucleares", subvencionado por la C.A.I.C.Y.T.

REFERENCIAS

1. E. Ramm, "The Riks/Wempner approach. An extension of the displacement control method in nonlinear analysis". *Non-Linear Computational Mechanics*, pp. 63. Pineridge Press, (1982).
2. M.A. Crisfield, "Overcoming limit points with material softening and strain localization", *Numerical Methods for Non-Linear Problems*, pp. 244, Pineridge Press, (1984).
3. E. Risks, "The application of Newton's method to the problem of elastic stability", *J. Appl. Mech.*, Vol. 39, pp. 1060, (1972).
4. G.A. Wempner, "Discrete approximations related to non-linear theories of solids", *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 7, pp. 1581, (1971).
5. M.A. Crisfield, "A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap through", *Comp & Structures*, Vol. 13, pp. 55, (1981).
6. K.J. Bathe, E.N. Dvorkin, "On the automatic solution of non-linear finite element equations", *Comp & Structures*, Vol. 17, pp. 871, (1983).

7. M.A. Crisfield, "An arc-length method including line searches and accelerations", *J. Numerical Methods in Eng.*, Vol. 19, pp. 1269, (1983).
8. R. De Borst, "Computational aspects of smeared crack analysis", *Computational Modelling of Reinforced Concrete Structures*, pp. 44, Pineridge Press, (1986).
9. P.G. Bergan, "Automated incremental-iterative solution methods in structural mechanics", *Non-Linear Computational Mechanics*, pp. 41, Pineridge Press, (1982).
10. D. Campbell-Allen, E.W. Low, "Pressure tests on end slabs for prestressed concrete pressure vessels", *Nuclear Engineering & Design*, Vol. 6, pp. 345, (1967).
11. J. Molina, "Seguridad de edificios de contención de hormigón armado y pretensado", Universidad Politécnica de Madrid, *Tesis Doctoral*, (1987).