

## Cálculo directo de la carga crítica de pandeo de pórticos. Parte II

Mariano Cacho Pérez · Antolín Lorenzana Iván

Recibido: Abril 2009, Aceptado: Noviembre 2009  
©Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España 2010

**Resumen** En un artículo anterior se presentó una herramienta matemática para el cálculo sistemático de la carga crítica y el modo de pandeo de cualquier pórtico plano bajo ciertas hipótesis simplificativas. Este trabajo, extiende dicha formulación para proporcionar mayor generalidad, considerando la posibilidad de analizar barras de sección variable bajo de carga (incluyendo cualquier tipo de carga distribuida y variación lineal de la temperatura en el canto del perfil). Para ello, se plantea el equilibrio de cada barra en su configuración deformada, bajo hipótesis de pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones (Teoría de Primer Orden), resultando un sistema de ecuaciones diferenciales de coeficientes variables para cada barra. Para obtener la respuesta no lineal del conjunto es necesario imponer en cada unión compatibilidad de desplazamientos y equilibrio de fuerzas y momentos, nuevamente en la configuración deformada. La solución buscada se obtiene exigiendo que en el instante de pandeo la variación de la energía potencial total sea nula. El objetivo de este trabajo es desarrollar un método sistemático de análisis que permita determinar la carga crítica y el modo de pandeo de estructuras de barras sin necesidad de recurrir a las simplificaciones que usualmente se asumen en planteamientos matriciales o de elementos finitos. Esto permitirá obtener resultados precisos independientemente de la discretización empleada.

### STRAIGHT METHOD FOR CRITICAL BUCKLING LOAD OF FRAMES. PART II

**Summary** In a previous article, we presented a mathematical tool for the systematic calculation of the critical buckling load and the buckling mode of any frame, under some simplificative hypothesis. The present work extends this formulation to provide greater generality, considering the possibility of analyzing variable section beams under any kind of loads (including any distributed load and linear variation of the temperature in the edge of the profile). With this purpose, we consider the equilibrium equations of each beam in its deformed configuration, under the hypothesis of infinitesimal strains and displacements, so called First-Order Theory, resulting in a system of differential equations with variable coefficients for each element. To obtain the nonlinear response of the frame, it is necessary to impose in each beam end the compatibility of displacements and the equilibrium of forces and moments, also in the deformed configuration. The solution is obtained by requiring that the total variation of potential energy is zero at the instant of buckling. The objective of this work is to develop a systematic method to determine the critical buckling load and the buckling mode of any frame, without using the common simplifications usually assumed in matrix analysis or finite element approaches. This allows us to obtain precise results regardless of the discretization done.

---

Mariano Cacho Pérez · Antolín Lorenzana Ibán  
Aula UVa-CIMNE, Escuela de Ingenierías Industriales  
Universidad de Valladolid  
Paseo del Cauce 59, 47011, Valladolid, España  
Tel.: 34 983 423391, 423529; Fax: 34 983 423631  
e-mail: cacho, ali@eis.uva.es

### 1. Introducción

Como es sabido, las herramientas numéricas de aplicación del método de los elementos finitos, en general, resuelven el problema de pandeo con una formulación teórica aproximada que da lugar a la modificación de la

rigidez de cada barra mediante la denominada matriz de rigidez geométrica. Con este planteamiento los resultados dependen en gran medida de la discretización empleada y en general requiere de varios elementos por barra para conseguir precisión suficiente.

Para evitar estos inconvenientes, en este trabajo se desarrolla una herramienta matemática sencilla, implementada con la ayuda de un manipulador simbólico, que permite calcular de forma directa la carga crítica y el modo de pandeo con deformaciones de flexión de cualquier estructura plana de barras.

Para alcanzar dicho objetivo, el trabajo se ha organizado de la manera siguiente: en primer lugar, tras esta breve introducción, se presenta el marco teórico para caracterizar el comportamiento no lineal del elemento estructural barra 2D junto con las correspondientes ecuaciones de estabilidad. A continuación se extiende la formulación al análisis de cualquier pórtico plano sometido a condiciones de contorno cualesquiera, y se expone cómo determinar para dicho pórtico la carga crítica y el modo de pandeo asociado. En el cuarto apartado se presentan resultados numéricos para varios ejemplos y por último, en base a los resultados, se resumen las principales conclusiones obtenidas de este trabajo.

## 2. Comportamiento de la barra

### 2.1. Hipótesis básicas

Se asume la hipótesis de pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos y se considera que el comportamiento del material es de tipo lineal. Así mismo, se adopta un estado proporcional de cargas, de tal manera que todas las acciones sobre la estructura, excepto el peso propio y la temperatura, se incrementan en igual proporción respecto a sus valores nominales.

En base a estas hipótesis se presentan a continuación las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y comportamiento para el elemento tipo barra bajo estudio.

### 2.2. Equilibrio no lineal

Antes de pasar a plantear el equilibrio, y debido a que en este tipo de análisis el equilibrio debe plantearse en la configuración real, es decir, en la deformada, se hace necesario fijar el sistema de referencia al que referir desplazamientos y esfuerzos de la barra. Se considera un sistema de referencia cartesiano de orientación fija para cada barra independiente de su deformación, sistema local de la barra que denotamos  $(X, Y, Z)$ . Del equilibrio de fuerzas según los ejes  $(X, Y)$  y de momentos según  $Z$ , resulta el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

en términos de los pseudo esfuerzos o esfuerzos de Piola-Kirchhoff [5] (véase la Figura 1):

$$\begin{cases} H'(s) + q_X(s) = 0 \\ V'(s) + q_Y(s) = 0 \\ M'(s) - H(s)\theta(s) + V(s) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

donde las variables primadas indican derivada respecto de la coordenada espacial  $s$ , y donde se ha aproximado el seno del ángulo por el ángulo y su coseno por la unidad en base a la hipótesis de pequeños desplazamientos.

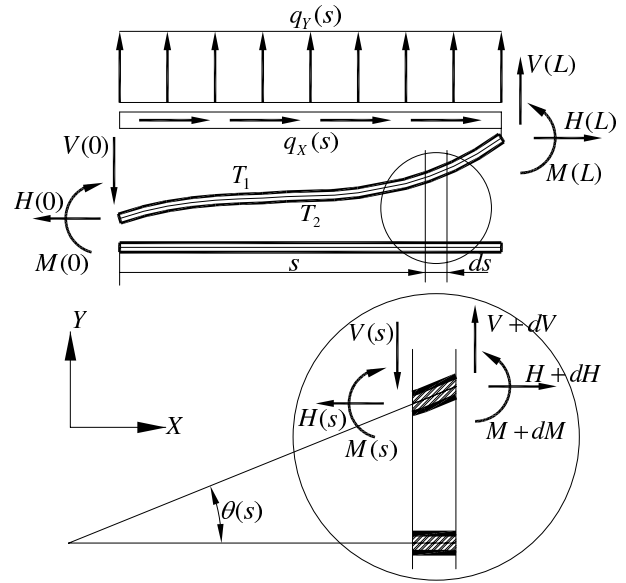


Figura 1. Equilibrio. Sistema local

### 2.3. Ecuaciones de compatibilidad-comportamiento

Las ecuaciones que relacionan los esfuerzos anteriormente mencionados con los desplazamientos  $(u, v, \theta)$  de un punto de la directriz de la barra son:

$$\begin{cases} H(s) = EA(s) \left( u'(s) - \frac{\alpha}{2}(T_1 + T_2) \right) \\ \theta(s) = v'(s) \\ M(s) = EI_z(s) \left( \theta'(s) + \frac{\alpha}{h(s)}(T_1 - T_2) \right) \end{cases} \quad (2)$$

siendo  $E$  el módulo de Young del material,  $I_z(s)$  y  $A(s)$  el momento de inercia y el área de cada sección transversal de la barra. Nótese que se incluye el efecto térmico, suponiendo por simplicidad variación lineal de la temperatura en el canto  $h(s)$ , entre  $T_1$  y  $T_2$ , siendo  $\alpha$  el coeficiente de dilatación térmica.

Finalmente, las ecuaciones anteriores, las de equilibrio (1) junto con las ecuaciones de compatibilidad-comportamiento (2), constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes variables que en

general no tiene solución matemática cerrada o explícita. No obstante se puede calcular la solución numérica para cada caso concreto analizado mediante distintas técnicas de análisis numérico. Conocida la respuesta de cada barra será necesario solamente exigir compatibilidad y equilibrio entre las barras que constituyen la estructura para determinar la respuesta del conjunto.

#### 2.4. Ecuaciones de estabilidad

Como es bien conocido, según aumenta el factor de carga  $\lambda$  la respuesta no lineal de cada barra viene dada por la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales (1) y (2) con sus correspondientes condiciones de contorno, y dicha solución está en general perfectamente definida (solución estable). Sin embargo, existe un valor del factor de proporcionalidad de carga para el que aparecen repentinamente desplazamientos transversales indeterminados (modo de pandeo).

Para determinar el valor crítico  $\lambda_{cri}$  que puede originar dicho fenómeno, un posible método se basa en introducir una pequeña perturbación del equilibrio que consiste en suponer una deformación infinitesimal adicional de flexión  $\Delta u$  respecto al estado estable, lo que da lugar a un nuevo estado de la estructura que lógicamente debe seguir cumpliendo las ecuaciones (1) y (2), de tal manera que las magnitudes incrementales en desplazamientos ( $\Delta u, \Delta v, \Delta \theta$ ) y en esfuerzos ( $\Delta H, \Delta V, \Delta M$ ) deben satisfacer las siguientes ecuaciones, que se conocen como ecuaciones de estabilidad [9]:

$$\begin{cases} \Delta H'(s) = 0 \\ \Delta V'(s) = 0 \\ \Delta M'(s) - H(s)\Delta\theta(s) - \theta(s)\Delta H(s) + \Delta V(s) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \Delta H(s) = EA(s)\Delta u'(s) \\ \Delta\theta(s) = \Delta v'(s) \\ \Delta M(s) = EI_z(s)\Delta\theta'(s) \end{cases} \quad (4)$$

Estas ecuaciones (3) y (4), junto con las condiciones de contorno asociadas al problema original con solicitaciones exteriores nulas son las que permiten determinar el valor de  $\lambda_{cri}$ .

### 3. Análisis del fenómeno de pandeo

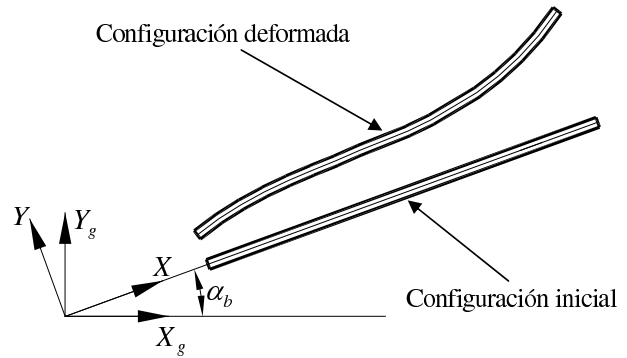
#### 3.1. Equilibrio y compatibilidad en los nudos

Siempre que se analizan estructuras compuestas por más de una barra, es necesario establecer un sistema de referencia común a todas las barras de la estructura sistema de referencia/ejes global es  $(X_g, Y_g, Z_g)$ . Figura 2.

El segundo paso es discretizar la estructura/pórtico, es decir, dividir la estructura en un número adecuado de barras. Debido a la formulación empleada en este trabajo y en base a las hipótesis asumidas es suficiente con emplear un número de barras mínimo, coincidente con los tramos rectos entre nudos. Discretizaciones más finas llevan a igual solución final a pesar del mayor esfuerzo computacional.

Para pasar las magnitudes monodimensionales de cada barra al sistema de referencia común de toda la estructura, se procede a realizar el correspondiente cambio de base en función de la orientación inicial de las barras, dada por el ángulo  $\alpha_b$  mediante las expresiones siguientes:

$$\begin{bmatrix} H \\ V \\ M \end{bmatrix}_{(X_g, Y_g, Z_g)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_b & -\sin \alpha_b & 0 \\ \sin \alpha_b & \cos \alpha_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H \\ V \\ M \end{bmatrix}_{(X, Y, Z)} \quad (5)$$



**Figura 2.** Orientación inicial de la barra

Tras estas operaciones sólo resta imponer en cada uno de los nudos de la estructura las correspondientes condiciones de compatibilidad de desplazamientos y de equilibrio de fuerzas y momentos. Este proceso, aunque sencillo, es de casuística muy variada dependiendo de las libertades consideradas en cada nudo. En la aplicación informática desarrollada se ha conseguido sistematizar para que una vez definidos los datos del problema (geometría, perfiles, materiales, cargas, apoyos, libertades, etc.) se realice de forma automática sin la intervención del usuario, consiguiendo de esta manera el objetivo buscado.

#### 3.2. Condiciones de contorno

A la vista del orden del sistema de ecuaciones diferenciales (1) y (2), es necesario imponer seis condiciones de contorno por barra en desplazamientos y/o esfuerzos. Como es sabido del teorema de unicidad [12], en cada sección donde se impongan condiciones de contorno,

si es conocido el desplazamiento en una determinada dirección el esfuerzo en esa misma dirección será una incógnita del problema y viceversa.

Para un problema plano, toda la casuística posible relativa a la imposición de condiciones de contorno se puede resumir como sigue, por ejemplo, en el extremo ( $s = L$ ), relativas al sistema de referencia global de la barra, se pueden expresar como:

$$\begin{bmatrix} H(L) \\ V(L) \\ M(L) \end{bmatrix}_{(X_g, Y_g, Z_g)} = - \begin{bmatrix} k_u & 0 & 0 \\ 0 & k_v & 0 \\ 0 & 0 & k_\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(L) \\ v(L) \\ \theta(L) \end{bmatrix}_{(X_g, Y_g, Z_g)} \quad (6)$$

Esta representación de las condiciones de contorno, incluye entre otras, las más habituales: apoyo rígido ( $k_i = \infty$ ), extremo libre ( $k_i = 0$ ), apoyos semirrígidos ( $0 < k_i < \infty$ ), etc.

El siguiente paso será resolver el conjunto de ecuaciones (1) y (2) de todas las barras de la estructura junto con las condiciones de contorno correspondientes para determinar el valor de  $\lambda$  por el que hay que ponderar el estado de cargas actuante para que aparezcan desplazamientos de flexión indeterminados.

### 3.3. Carga crítica y modo de pandeo

La deformada del pórtico justo en el instante en el que la carga alcanza el valor crítico de pandeo resulta indeterminada, y por lo tanto, para determinar el modo de pandeo asociado, lo que se hace es resolver las ecuaciones de estabilidad (3) y (4), en función del factor de carga  $\lambda$  sustituyendo una de las ecuaciones de equilibrio por una condición adicional en desplazamientos, es decir, imponiendo un valor arbitrario para uno de los grados de libertad del pórtico objeto de análisis.

Para ello, como en las ecuaciones de estabilidad intervienen magnitudes del estado estable o prepandeo, es necesario resolver de forma simultánea las ecuaciones de comportamiento mecánico de cada barra más las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio de los nudos, que junto con las condiciones de contorno constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales lineal de coeficientes variables cuya solución se puede encontrar mediante técnicas numéricas de resolución de problemas frontera como por ejemplo el algoritmo de disparo no lineal, ya que en la mayoría de los casos no se dispone de una expresión matemática explícita cerrada para dicha solución.

Pues bien, en un artículo anterior, se expuso que para calcular numéricamente la carga crítica de pandeo ( $\lambda_{cri}$ ) era necesario determinar el menor valor del factor ( $\lambda$ ) que anulaba el determinante del sistema de ecuaciones no lineal resultante. En este trabajo, se emplea un criterio alternativo más general para determinar dicho

valor crítico basado en un balance energético. Para ello, se sabe que en el instante de pandeo el pórtico puede deformarse según el modo de pandeo, de tal manera que el valor crítico de carga buscado será aquel que anule el funcional variación de energía potencial total dado por:

$$\Delta W(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b \int_0^{L_i} (\Delta M_i(s) \Delta \theta'_i(s) + H_i(s) (\Delta \theta_i(s))^2) ds \quad (7)$$

siendo  $b$  el número total de barras de la estructura.

Por tanto, la condición ( $\Delta W = 0$ ) permite calcular de forma numérica el valor buscado, mediante el método de la Secante o el algoritmo de Newton-Raphson.

## 4. Resultados numéricos

Se presentan varios ejemplos, de complejidad creciente, con los que se pretende mostrar la metodología de cálculo expuesta en los puntos anteriores.

### 4.1. Barra a compresión (Validación)

#### ■ Caso a



**Figura 3.** Perfil constante (caso a)

En este caso sencillo, es conocida la solución exacta y corresponde al problema de una barra empotrada-libre sometida únicamente a la carga de compresión  $P$ , ya que aunque pueda existir una variación lineal de la temperatura en el canto, se trata de una estructura isostática. Concretamente en este caso las condiciones de contorno del problema no lineal son:

$$H(0) = -P; V(0) = M(0) = u(L) = v(L) = \theta(L) = 0$$

de manera que de la integración del sistema de ecuaciones diferenciales constituido por (1) y (2) resulta:

$$H(s) = -P; V(s) = M(s) = u(s) = v(s) = \theta(s) = 0$$

Ahora bien, por otro lado, las condiciones de contorno que deben satisfacer las ecuaciones de estabilidad resultan ser:

$$\Delta v(0) = v_0; \Delta H(0) = \Delta V(0) = \Delta M(0) = \Delta u(L) = \Delta \theta(L) = 0$$

donde  $v_0$  es un valor arbitrario suficientemente pequeño.

La solución de las ecuaciones de estabilidad (3) y (4) sujetas a dichas condiciones de contorno es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta H(s) = 0 \\ \Delta V(s) = \frac{EI_z K^3 v_0 \cos(KL)}{KL \cos(KL) - \sin(KL)} \\ \Delta M(s) = -\frac{EI_z K^2 v_0 \sin(Ks)}{KL \cos(KL) - \sin(KL)} \\ \Delta u(s) = 0 \\ \Delta \theta(s) = \frac{K v_0 (\cos(KL) - \cos(Ks))}{\sin(KL) - KL \cos(KL)} \\ \Delta v(s) = \frac{e^{-iK(L+s)} (ie^{iKL} - ie^{iL(L+2s)} + e^{iKs} (K(L-s) - i) + \\ + e^{iK(2L+s)} (i + K(L-s))) v_0}{2(KL \cos(KL) - \sin(KL))} \\ + \frac{v_0}{2(KL \cos(KL) - \sin(KL))} \end{array} \right.$$

siendo  $K = \sqrt{\frac{P}{EI_z}}$

El funcional de variación de la energía potencial total se calcula como:

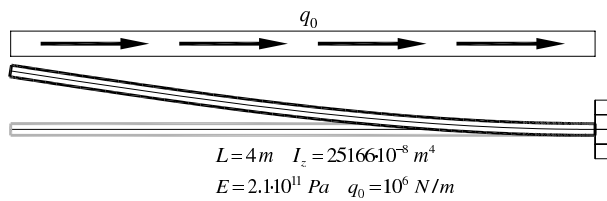
$$\begin{aligned} \Delta W(P) &= \frac{1}{2} \int_0^L (\Delta M(s) \Delta \theta'(s) - P(\Delta \theta(s))^2) ds \\ &= \frac{EI_z K^3 v_0^2 \cos(KL)}{\sin(KL) - KL \cos(KL)} \end{aligned}$$

y por lo tanto, se comprueba que la carga crítica de pandeo tiene por valor:

$$P_{cri} = \frac{\pi^2 EI_z}{(2L)^2}$$

ya que es el valor que anula el funcional.

■ Caso b



**Figura 4.** Axil variable (caso b)

En este segundo caso, la barra está sometida a una distribución de carga tal que el esfuerzo axil en la barra no es constante (pilar sometido a peso propio, por ejemplo). Este problema tiene la dificultad de que lógicamente la ecuación diferencial correspondiente resulta de coeficientes variables y aunque puede llevarse a cabo el análisis de inestabilidad mediante un planteamiento matricial y posterior búsqueda de raíces del determinante de la matriz de rigidez de la estructura, requiere menor esfuerzo computacional el planteamiento energético ya

que conlleva el cálculo de una integral. Pues bien, para el caso de axil variable se ha obtenido la siguiente estimación de la carga crítica de pandeo:

$$\lambda_{cri} = 6,47176$$

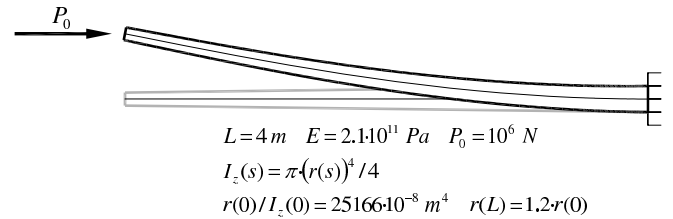
Si comparamos el resultado obtenido con el proporcionado por el paquete de análisis por el método de los elementos finitos Cosmos/M, basado en la linealización del problema no lineal mediante la modificación de la matriz de rigidez de cada barra con su correspondiente matriz de rigidez geométrica, llegamos a la conclusión importante de que lo recomendable es hacer el análisis con un discretización del orden de cincuenta elementos por barra si queremos obtener información suficientemente precisa sobre magnitudes relativas a la estabilidad:

**Tabla 1.** Barra a compresión. Axil variable. Método matricial

| b                   |         | 10      | 50      | 100      | 200       |
|---------------------|---------|---------|---------|----------|-----------|
| $\lambda_{cri}$     | 5.81257 | 6.44510 | 6.47070 | 6.47151  | 6.47171   |
| $\varepsilon_r$ (%) | 10.19   | 0.4119  | 0.01638 | 0.003863 | 0.0007726 |

■ Caso c

Todavía más interesante desde el punto de vista práctico que el caso anterior pueden ser las situaciones en las que el perfil aunque de directriz recta presenta



**Figura 5.** Perfil variable (caso c)

características estáticas (canto, área e inercia) variables en dirección longitudinal. Las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento mecánico en este caso, aunque lineales son nuevamente de coeficientes variables, de manera que el planteamiento energético presenta clara ventaja operacional frente al matricial, ventaja que aún es mucho mayor cuanto mayor sea el número de barras que forman la estructura. El resultado de la carga crítica obtenido en este caso es:

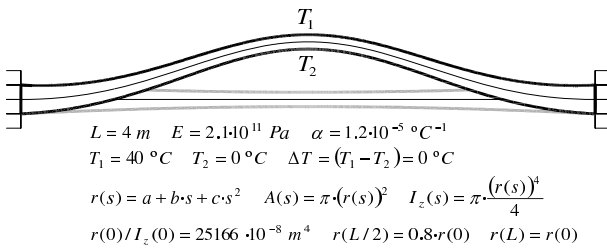
$$\lambda_{cri} = 13,5635$$

**Tabla 2.** Barra a compresión. Perfil variable. Método matricial

| b                   | 2       | 10      | 50      | 100     | 200     |
|---------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\lambda_{cri}$     | 10.9825 | 13.0753 | 13.4672 | 13.5154 | 13.5395 |
| $\varepsilon_r$ (%) | 19.03   | 3.599   | 0.7080  | 0.3546  | 0.1769  |

Como se comprueba, para obtener la misma precisión en los resultados con el planteamiento matricial de la aplicación Cosmos/M es necesario irse a discretizaciones muy finas.

■ Caso d

**Figura 6.** Temperatura (caso d)

Como último ejemplo de validación vamos a considerar la inestabilidad por efecto térmico en una barra biempotrada. En primer lugar, comprobamos que para el caso de perfil de propiedades estáticas constantes el resultado obtenido coincide con el teórico:  $(r(s)/I_z(s) = 25166 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4)$

$$N_{cri} = \frac{(2\pi)^2 EI_z}{L^2} = EA\alpha\lambda_{cri}\Delta T$$

$$\lambda_{cri} = 46,0077$$

Comparado con Cosmos/M:

**Tabla 3.** Barra a compresión. Temperatura. Método matricial

| b                   | 2       | 10      | 50      | 100     | 200     |
|---------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\lambda_{cri}$     | 46.0547 | 46.0431 | 46.0272 | 46.0261 | 46.0242 |
| $\varepsilon_r$ (%) | 0.1022  | 0.07694 | 0.04238 | 0.03999 | 0.03586 |

Para el caso de perfil variable (variación longitudinal del canto de tipo cuadrático) la solución es:

$$\lambda_{cri} = 35,9735$$

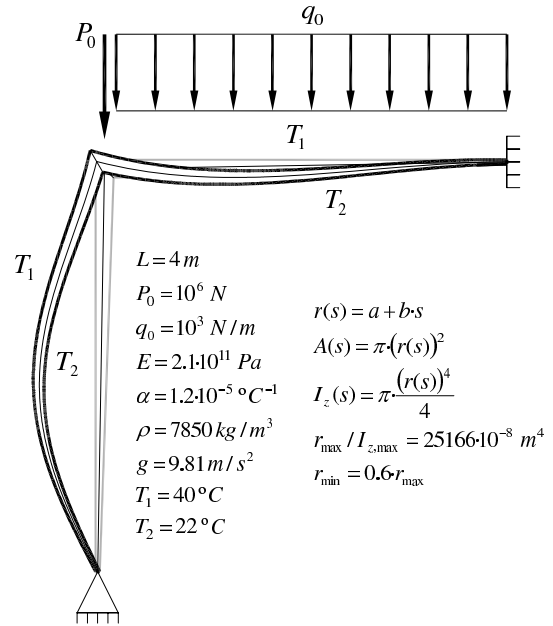
En la siguiente tabla se compara con la solución obtenida con la aplicación Cosmos/M:

**Tabla 4.** Barra a compresión. Temperatura y perfil variable. Método matricial

| b                   | 2       | 10      | 50      | 100     | 200     |
|---------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\lambda_{cri}$     | 38.5335 | 36.0012 | 35.9883 | 35.9881 | 35.9881 |
| $\varepsilon_r$ (%) | 7.116   | 0.077   | 0.04114 | 0.04059 | 0.04059 |

#### 4.2. Pórtico de Lee (Aplicación 1)

La estructura de la figura, denominada en la literatura [3] ‘Pórtico de Lee’, permite ilustrar de forma clara y sencilla el objetivo de este trabajo y las posibilidades de generalización de la técnica numérica empleada.

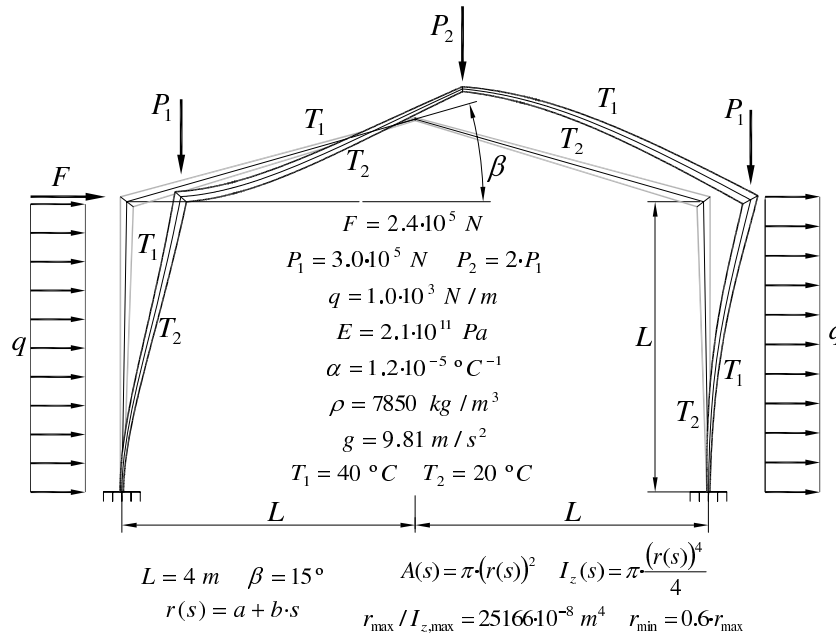
**Figura 7.** Pórtico de Lee. Perfiles de inercia variable

Inicialmente se considera por simplicidad que el pórtico está formado por barras iguales en cuanto a longitud ( $L$ ), material ( $E$ ) y perfil ( $I_z$ ), y se supone unión rígida en la sección  $b$ . Llevando a cabo un balance energético entre el instante de prepandeo y el de pandeo, y para los valores numéricos indicados, se llega al siguiente valor del factor de carga crítica que origina el pandeo por flexión en el plano del pórtico:

$$\lambda_{cri} = 47,5063$$

El modo de pandeo asociado correspondiente a cada caso se indica a trazo grueso sobre cada una de las figuras.

Lo más interesante del planteamiento de este trabajo, consiste en que permite dotar al análisis de una



**Figura 8.** Pórtico simple a dos aguas. Perfiles de inercia variable.

gran generalidad, y así, se puede considerar cualquier tipo de carga, el efecto del peso propio, efectos de origen térmico e incluso variación del perfil en dirección longitudinal de las barras. Concretamente a continuación, se estudia el fenómeno de pandeo en el pórtico de Lee de la Figura 7.

Para el caso de propiedades estáticas variables resulta un factor de carga crítica de valor:

$$\lambda_{cri} = 14,5092$$

#### 4.3. Pórtico simple a dos aguas (Aplicación 2)

Se aplica finalmente la técnica de análisis al pórtico simple a dos aguas indicado en la Figura 8:

Considerando una discretización de sólo cuatro elementos coincidentes con las barras que forman el pórtico y asumiendo un estado proporcional de cargas (siendo  $\lambda$  dicho factor de proporcionalidad), resulta para el caso de perfil de inercia constante ( $r(s)/I_z(s) = 25166 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ ), un valor crítico:

$$\lambda_{cri} = 29,1906$$

Mientras que para el caso recogido en la Figura 8, perfil variable en dirección longitudinal de barra, el factor de carga crítica es bastante menor, concretamente:

$$\lambda_{cri} = 9,39849$$

Para conseguir resultados con un nivel de precisión similar mediante la técnica de la matriz de rigidez geométrica sería necesario un mínimo de cincuenta elementos por barra.

## 5. Conclusiones

Para finalizar, se comentan de forma breve las principales conclusiones que se desprenden de este trabajo. En primer lugar, respecto al modelo teórico, el punto de partida ha sido la teoría de pandeo de Euler, que asume pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones, y que da lugar a los conceptos de carga crítica y modo de pandeo, consecuencia del modelo matemático planteado. Por tanto no es posible conocer los desplazamientos en el instante de pandeo ni el posible comportamiento post-pandeo.

En segundo lugar, relativo a la herramienta de análisis desarrollada comentar que es totalmente sistemática, sencilla, y permite incluir modelos generales, por ejemplo, barras de sección variable, cargas distribuidas sobre las barras, estructuras espaciales (3D), etc. A pesar de que la aplicación informática se ha desarrollado mediante manipulador simbólico (Mathematica v7) no es posible en general obtener soluciones analíticas en función de todos los parámetros, sino sólo numéricas.

Respecto a los resultados numéricos, se comprueba que gracias a una formulación matemática rigurosa, se obtiene la ventaja de que luego, al calcular, se obtienen resultados precisos con discretizaciones mínimas y que para discretizaciones más finas los resultados son prácticamente los mismos.

## Referencias

1. Truesdell C. (1975) *Ensayos de Historia de la Mecánica*. Tecnos. Madrid. España
2. Burden R.L., Faires J.D. (1998) *Análisis numérico*. Thomson. Mexico
3. Ortega M.A., Romero J.L., Rosa E. (2007) Un estudio histórico del problema de las piezas prismáticas rectas sometidas a compresión. Parte I. *Informes de la Construcción*. 59 (507):69–81. Jul-Sept
4. Ortega M.A., Romero J.L., Rosa E. (2007) Un estudio histórico del problema de las piezas prismáticas rectas sometidas a compresión. Parte II. *Informes de la Construcción*. 59(508):61-71. Oct-Dic
5. Monleón S.(1999) *Análisis de vigas, arcos, placas y láminas, una presentación unificada*. Universidad Politécnica de Valencia
6. Lázaro C. (2005) *Formulación material y espacial del modelo geoméricamente exacto de piezas alargadas*. Universidad Politécnica de Valencia
7. Garrido J.A., Foces A. (2002) *Resistencia de Materiales*. Universidad de Valladolid
8. Gere J.M. (2005) *Timoshenko. Resistencia de Materiales*. Thomson
9. Simitses G.J., Hodges D.H. (2006) *Fundamentals of Structural Stability*. Elsevier Inc.
10. Timoshenko S.P. (1963) *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill
11. Horne M.R., Merchant W. (1965) *The Stability of Frames*. Pergamon Press
12. Timoshenko S., Goodier J.N. (1975) *Teoría de la Elasticidad*. Urmo