

IDENTIFICAÇÃO DE PROPRIEDADES MECÂNICAS DE MATERIAIS COMPÓSITOS UTILIZANDO TÉCNICAS DE OPTIMIZAÇÃO

CRISTOVÃO M. MOTA SOARES,
M.J. MOREIRA DE FREITAS
e
J.M. MEIRA AFONSO

*CEMUL - Cent. de Mecânica e Materiais da Univ.Téc. de Lisboa,
Instituto Superior Técnico,
Av. Rovisco Pais, 1096 Lisboa Codex, Portugal*

RESUMEN

É apresentado um modelo numérico para a identificação de propriedades mecânicas de placas de materiais compósitos que associa técnicas de optimização com um método experimental de determinação de frequências próprias. A análise dinâmica e o cálculo das sensibilidades com respeito a perturbações nos parâmetros adimensionais do material são obtidas com um modelo discreto de elementos finitos formulado segundo a teoria das deformações de corte lineares de Mindlin. A optimização de um funcional de erro que exprime a diferença entre as frequências obtidas experimentalmente e as que lhes correspondem no modelo numérico é levada a cabo com o programa ADS (Automated Design Synthesis). Apresentam-se vários exemplos de identificação.

SUMMARY

A numerical model for the identification properties of mechanical properties of composite plates which associates optimization techniques with an experimental method of determination eigen frequencies is presented. The eigen value analysis and the evaluation of sensitivities with respect to perturbations in the non-dimensional material parameters are based in a discrete finite element model formulated from the linear shear deformation theory of Mindlin. The optimization of an error functional expressing the difference between the measured higher eigen frequencies of a plate specimen and the corresponding eigen frequencies of the numerical model is carried out using program ADS (Automated Design Synthesis). Several identification examples are discussed.

Recibido: Diciembre 1992

INTRODUÇÃO

A utilização de materiais compósitos em estruturas e componentes estruturais é cada vez mais frequente devido às boas qualidades de resistência específica, resistência à corrosão, e baixos custos de manutenção.

Para determinadas aplicações o material compósito é frequentemente manipulado por forma a ir ao encontro de certas exigências do projecto sem que por vezes as suas propriedades mecânicas sejam conhecidas na totalidade. Se é verdade que as propriedades podem ser estimadas através de regra das misturas¹, o processo mais fiável e formalmente mais correcto consiste na realização de ensaios experimentais com provetes de geometria normalizada.

Neste trabalho é descrito um método indirecto para identificação de propriedades mecânicas de placas de compósito que faz uso da análise experimental de frequências naturais de uma placa de compósito, da análise de frequências naturais equivalente obtida por via numérica e de técnicas de optimização.

O método assenta na minimização de um funcional de erro que exprime a diferença entre os valores experimentais das frequências naturais e os seus equivalentes numéricos obtidos através de um modelo de elementos finitos para a placa ensaiada. Este funcional é minimizado à custa dos parâmetros adimensionais do material. Quanto menor for o valor do funcional de erro, maior será a proximidade entre os valores experimentais e numéricos das frequências e mais perto do óptimo se encontram os valores das variáveis de projecto, neste caso, os parâmetros adimensionais que permitem identificar as propriedades elásticas do material.

A análise de valores próprios e o cálculo de sensibilidades são executados através de um modelo discreto de elementos finitos baseado num elemento isoparamétrico de 8 nós formulado segundo a teoria de Mindlin².

Este trabalho está relacionado como os desenvolvimentos levados a cabo por Pedersen³ para placas finas de compósito considerando as hipóteses da teoria clássica de Kirchhoff e um modelo numérico em que as frequências naturais são calculadas pelo método de Rayleigh-Ritz. Trabalhos de identificação, mas que utilizam técnicas iterativas cujo modelo numérico é também baseado nos pressupostos de Kirchhoff, são descritos por Wilde e Sol⁴, Sol⁵ e Wilde⁶. Todos esses trabalhos assentam em modelos numéricos que não permitem a generalização aqui apresentada.

ANÁLISE DE LAMINADOS

Considerando o sistema de eixos cartesianos x, y, z e os eixos principais X_1, X_2, X_3 da k ésima camada, (Figura 1) as equações constitutivas para essa camada pertencente a uma placa de compósito constituída por um número finito de camadas ortotrópicas e desprezando os efeitos da tensão normal transversal podem ser representadas por:

$$\{\sigma\}_k = [\bar{Q}]_k \{\epsilon\}_k \quad (a)$$

$$\{\sigma\}_k = \{\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{yz} \sigma_{xz} \sigma_{xy}\}^T \quad (b)$$

$$\{\epsilon\}_k = \{\epsilon_{xx}\epsilon_{yy}\epsilon_{yz}\epsilon_{xz}\epsilon_{xy}\}^T \quad (c) \quad (1)$$

onde $\{\sigma\}_k$ é vector das tensões, $\{\epsilon\}_k$ é o vector das deformações normais e de corte, $[\bar{Q}]_k$ a matriz constitutiva do material transformada dos eixos X_1, X_2, z para x, y, z e T representa o transposto de um vector ou de uma matriz.

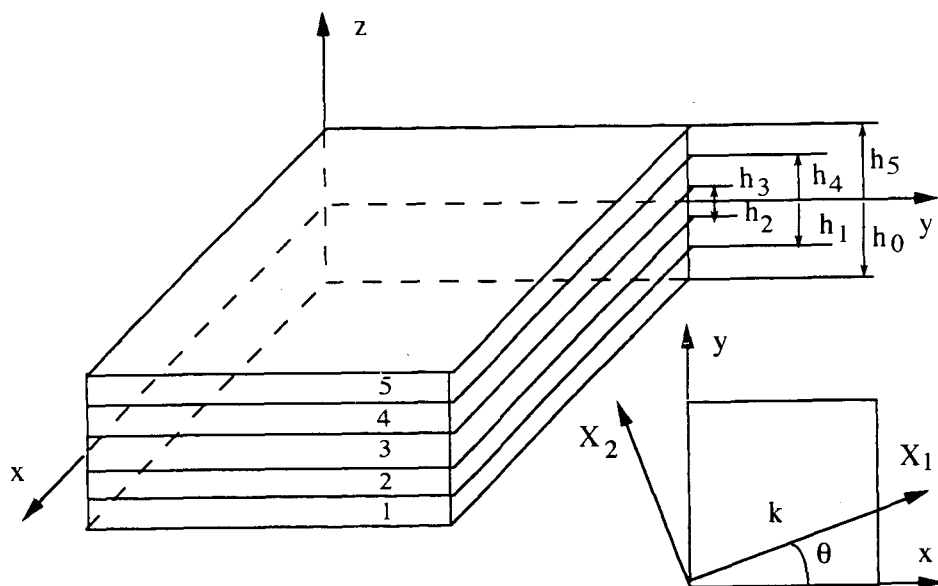


Figura 1. Nomenclatura para a placa laminada.

As propriedades mecânicas da camada (k), de acordo com o modelo da teoria de placas de Mindlin, são definidas como E_1, E_2 para os módulos de Young nas direcções X_1 e X_2 (sendo X_1 paralelo às fibras), G_{12}, G_{13}, G_{23} os módulos de elasticidade transversais nos planos $X_1 - X_2, X_1 - X_3, X_2 - X_3$, respectivamente e ν_{12} um dos coeficientes de Poisson. Considera-se também que a camada é transversalmente isotrópica, o que implica $G_{12} = G_{13}$.

Os termos da matriz $[\bar{Q}]_k$ podem ser representados como:

$$[\bar{Q}]_k = \frac{E_1}{8\alpha_0} [c]_k \quad (a) \quad (2)$$

$$\alpha_0 = 1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_2}{E_1} \quad (b)$$

onde a matriz $[c]_k$ e α_0 são aqui representados em função dos parâmetros adimensionais do material $\alpha_m (m = 2, 3, 4, 5)^{1,3,7}$. Os termos desta matriz e o parâmetro α_0 , utilizando a convenção seguida por Vinson¹ para os índices, são dados por:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= 8 - \alpha_2[1 - \cos(2\theta_k)] - \alpha_3[1 - \cos(4\theta_k)]; \\
c_{12} &= c_{21} = \alpha_4 - \alpha_3 \cos(4\theta_k); \\
c_{16} &= c_{61} = \frac{1}{2}\alpha_2 \sin(2\theta_k) + \alpha_3 \sin(4\theta_k); \\
c_{22} &= 8 - \alpha_2[1 + \cos(2\theta_k)] - \alpha_3[1 - \cos(4\theta_k)]; \\
c_{26} &= c_{62} = \frac{1}{2}\alpha_2 \sin(2\theta_k) - \alpha_3 \sin(4\theta_k); \\
c_{66} &= \frac{1}{2}(8 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) - \alpha_3 \cos(4\theta_k); \\
c_{55} &= \alpha_5 - \left[\frac{1}{2}(8 - \alpha_2 - 3\alpha_3 - \alpha_4) - \alpha_5\right] \cos(2\theta_k); \\
c_{54} &= c_{45} = \left[\frac{1}{2}(8 - \alpha_2 - 3\alpha_3 - \alpha_4) - \alpha_5\right] \sin(2\theta_k); \\
c_{44} &= \alpha_5 + \left[\frac{1}{2}(8 - \alpha_2 - 3\alpha_3 - \alpha_4) - \alpha_5\right] \cos(2\theta_k);
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\alpha_0 = 1 - [(\alpha_4 - \alpha_3)/(8 - 2\alpha_2)]^2(4 - \alpha_2)/4$$

sendo θ_k o ângulo que o eixo X_1 da camada (k) faz com o eixo x do sistema de referência. Os parâmetros adimensionais do material são definidos como:

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= 4 - 4(E_2/E_1); \\
\alpha_3 &= 1 + (E_2/E_1)(1 - 2\nu_{12}) - 4(G_{12}/E_1)\alpha_0; \\
\alpha_4 &= 1 + (E_2/E_1)(1 + 6\nu_{12}) - 4(G_{12}/E_1)\alpha_0; \\
\alpha_5 &= 4(G_{23} + G_{12})\alpha_0/E_1
\end{aligned} \tag{4}$$

As relações inversas das eq.(4) são:

$$\begin{aligned}
E_2/E_1 &= (4 - \alpha_2)/4; \\
G_{12}/E_1 &= (8 - \alpha_2 - 3\alpha_3 - \alpha_4)/16\alpha_0; \\
\nu_{12} &= (\alpha_4 - \alpha_3)/(8 - 2\alpha_2); \\
G_{23}/E_1 &= (2\alpha_5 - \frac{1}{2}(8 - \alpha_2 - 3\alpha_3 - \alpha_4))/8\alpha_0
\end{aligned} \tag{5}$$

O campo de deslocamentos em qualquer ponto (x, y, z) da placa e de acordo com a teoria das deformações de corte lineares de Mindlin² é expresso como:

$$\begin{aligned}
U(x, y, z) &= u(x, y) - z\psi_x(x, y); \\
V(x, y, z) &= v(x, y) - z\psi_y(x, y); \\
W(x, y, z) &= w(x, y)
\end{aligned} \tag{6}$$

onde u, v, w são componentes do deslocamento para um ponto na superfície média respectivamente nas direcções x, y, z e ψ_x, ψ_y são as rotações da normal ao plano médio em torno dos eixos y e x . O campo de deslocamentos está relacionado com as deformações no plano $\{\epsilon^0\}$, curvaturas $\{k\}$ e deformações de corte $\{\gamma\}$ através das seguintes relações cinemáticas:

$$\{\epsilon^0\} = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^T \quad (a)$$

$$\{k\} = \left[-\frac{\partial \psi_x}{\partial x}, -\frac{\partial \psi_y}{\partial y}, -\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right]^T \quad (b) \quad (7)$$

$$\{\gamma^0\} = \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x, \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right]^T \quad (c)$$

Integrando a eq. 1a, camada a camada, através da secção transversal da placa considerando as eqs. 6 e 7, vamos obter as relações constitutivas na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{Q\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & 0 \\ [B] & [D] & 0 \\ 0 & 0 & [S] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\epsilon^0\} \\ \{k\} \\ \{\gamma\} \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$A_{ij} = \frac{E_1}{8\alpha_0} \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1})(c_{ij})_k \quad ; \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (b)$$

$$B_{ij} = \frac{E_1}{8\alpha_0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}(h_k^2 - h_{k-1}^2)(c_{ij})_k \quad ; \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (c) \quad (8)$$

$$D_{ij} = \frac{E_1}{8\alpha_0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3}(h_k^3 - h_{k-1}^3)(c_{ij})_k \quad ; \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (d)$$

$$S_{ij} = \frac{E_1}{8\alpha_0} \frac{5}{4} \sum_{k=1}^n \left[h_k - h_{k-1} - \frac{4}{3}(h_k^3 - h_{k-1}^3) \frac{1}{h^2} \right] (c_{ij})_k \quad ; \quad i, j = 5, 4 \quad (e)$$

$$\{N\} = \{N_x N_y N_{xy}\}^T ; \{M\} = \{M_x M_y M_{xy}\}^T ; \{Q\} = \{Q_x Q_y\}^T \quad (f)$$

onde as submatrizes $[A], [B], [D], [S]$ representam respectivamente os termos da rigidez extensional, de acoplamento, de flexão e de corte para o material, $\{N\}, \{M\}, \{Q\}$ são os vectores dos componentes das tensões no plano, dos momentos flectores e dos esforços transversos, sendo n o número de camadas da placa de compósito.

MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Para vibrações livres e harmónicas, as equações de equilíbrio ao nível do elemento podem ser representadas por:

$$K^e q^e = \omega^2 M^e q^e \quad (9)$$

onde K^e , M^e e q^e são respectivamente a matriz de rigidez do elemento, a matriz de massas do elemento, o vector dos deslocamentos no sistema de eixos x , y , z e ω a frequência natural.

Para o nó i do elemento e o sub-vector dos graus de liberdade é

$$q_i^e = \{u_i^e; v_i^e; w_i^e; \psi_{xi}^e; \psi_{yi}^e\}^T \quad (10)$$

sendo u_i^e , v_i^e , w_i^e os deslocamentos nodais do plano médio em relação aos eixos x , y , z respectivamente e ψ_{xi}^e , ψ_{yi}^e as rotações nodais em torno dos eixos y e x .

Para compósitos multicamada com sequência de empilhamento não simétrica pode ser demonstrado seguindo um procedimento usual através do princípio dos trabalhos virtuais que as submatrizes de massas consistente e de rigidez do elemento relacionadas com os nós i e j podem ser determinadas como:

$$M_{ij}^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_i^e]^T [m] [N_j^e] \det \underline{\mathbf{J}} \, d\xi \, d\eta \quad (11)$$

$$[m] = \sum_{k=1}^n [m]_k \quad (a)$$

$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = \rho_k (h_k - h_{k-1}); \quad m_{44} = m_{55} = \frac{\rho_k}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3); \quad (12)$$

$$m_{14} = m_{25} = \frac{\rho_k}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (b)$$

$$K_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \{ [B_{mi}^e]^T [A] [B_{mj}^e] + [B_{bi}^e]^T [B] [B_{mj}^e] + [B_{mi}^e]^T [B] [B_{bj}^e] + \\ + [B_{bi}^e]^T [D] [B_{bj}^e] + [B_{si}^e]^T [S] [B_{sj}^e] \} \det \underline{\mathbf{J}} \, d\xi \, d\eta \quad (13)$$

onde os termos não nulos da matriz simétrica $[m]_k$ são indicados acima, sendo ρ_k a massa específica da camada k e $\det \underline{\mathbf{J}}$ o determinante da matriz Jacobiana que relaciona as coordenadas naturais ξ , η com as derivadas das coordenadas locais. As matrizes $[N^e]$, $[B_m^e]$, $[B_b^e]$ e $[B_s^e]$ relacionam os graus de liberdade nodais do elemento com o campo de deslocamentos generalizado $\{u, v, w, \psi_x, \psi_y\}^T$, deformações no plano (eq.7a), curvaturas (eq.7b) e deformações de corte transversais (eq.7c) respectivamente^{8,9}.

Os termos das matrizes de massas e rigidez do elemento eq.(11) e eq.(13), para o elemento de "Serendipity" de oito nós, usado neste trabalho, são obtidos através de integração numérica de Gauss. Verifica-se que a utilização de uma teoria de Mindlin conduz para placas muito finas à obtenção de soluções demasiado rígidas para o campo de deslocamentos, se for adoptada uma integração completa das matrizes de rigidez^{10,11,12,13}. Este fenómeno é devido à incapacidade dos elementos representarem configurações em flexão pura sem o aparecimento de deformações de corte transversais de maneira a satisfazerem as hipóteses de Kirchhoff¹. O fenómeno de retenção é uma característica dos elementos e das condições de fronteira do problema, estando

relacionado com número de equações independentes obtidas através do "ranking" do elemento¹³, fazendo $\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 0$.

Para o presente modelo os termos das matrizes de rigidez são obtidos usando a regra de Gauss com 3×3 pontos para os coeficientes de membrana, flexão e para os termos interligados de membrana/flexão.

Os termos devido ao corte transversal são integrados usando uma quadratura (2×2) a fim de atenuar a retenção através da eliminação dos efeitos espúrios de corte, quando as placas são muito finas.

As equações de equilíbrio são obtidas na forma usual conduzindo a um problema de valores e vectores próprios:

$$\mathbf{K} \mathbf{q}_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \mathbf{q}_i \quad (14)$$

onde $\mathbf{K}$ e $\mathbf{M}$ são as matrizes globais de rigidez e massas e $\mathbf{q}_i$ o modo de vibração (i), a que corresponde a frequência própria ω_i .

Quando não são especificadas condições de suporte, como será o caso presente em que se considera uma placa livre no espaço, a eq.(14) terá de ser modificada pela realização de uma translacção à matriz $\mathbf{K}^9$, para evitar a sua singularidade.

Vamos obter um problema equivalente na seguinte forma

$$(\mathbf{K} + \beta \mathbf{M}) \mathbf{q}_i = (\omega_i + \beta) \mathbf{M} \mathbf{q}_i \quad (15)$$

onde β deverá ser um valor superior a zero e de preferência da ordem de grandeza de ω_1^2 . Nesta aplicação em particular for escolhido o valor de ω_1^2 para valor inicial de β . Um novo valor de β deverá ser previsto antes de cada nova iteração ($i + 1$) do processo de optimização, por esta implicar novos valores das variáveis de projecto e consequentemente um novo conjunto de valores próprios. A previsão de um valor de β para a iteração seguinte é feita com base no conhecimento das sensibilidades de ω_1^2 em ordem às variáveis adimensionais do material e com recurso a uma expansão em série de Taylor de primeiro grau na forma,

$$\begin{aligned} \beta &= \omega_1^2(\alpha_{2i+1}, \alpha_{3i+1}, \alpha_{4i+1}, \alpha_{5i+1}) \simeq \omega_1^2(\alpha_{2i}, \alpha_{3i}, \alpha_{4i}, \alpha_{5i}) \\ &+ \frac{\partial \omega_1^2}{\partial \alpha_{2i}}(\alpha_{2i+1} - \alpha_{2i}) + \frac{\partial \omega_1^2}{\partial \alpha_{3i}}(\alpha_{3i+1} - \alpha_{3i}) + \frac{\partial \omega_1^2}{\partial \alpha_{4i}}(\alpha_{4i+1} - \alpha_{4i}) + \\ &+ \frac{\partial \omega_1^2}{\partial \alpha_{5i}}(\alpha_{5i+1} - \alpha_{5i}) \end{aligned} \quad (16)$$

A actualização de β não é essencial para o método, mas é aconselhável por poder prevenir situações em que uma escolha infeliz de valores iniciais para as variáveis adimensionais do material conduzirá a problemas de instabilidade numérica durante o processo de identificação.

DESCRIÇÃO DO PROBLEMA DE IDENTIFICAÇÃO/OPTIMIZAÇÃO

A técnica de identificação das propriedades mecânicas de um compósito laminado tira partido da concordância entre as frequências naturais obtidas experimentalmente para uma placa suspensa por dois fios e os correspondentes valores numéricos para um modelo de fronteiras livres.

Os quadrados das frequências naturais obtidas experimentalmente são designados por $\underline{\omega}_1^2, \underline{\omega}_2^2, \dots, \underline{\omega}_i^2, \dots, \underline{\omega}_I^2$, sendo I o número de frequências medidas. Os valores numéricos correspondentes das frequências naturais para um dado conjunto de parâmetros materiais α_m são designados por $C\omega_1^2, \dots, C\omega_i^2, \dots, C\omega_I^2$, onde a constante C é escolhida através da relação

$$C = \frac{\omega_1^2}{\underline{\omega}_1^2} \quad (17)$$

para que seja obtida concordância da primeira frequência e para permitir eliminar a influência de factores que estejam a afectar de um factor de escala todo o conjunto de frequências naturais.

A função objectivo Φ é definida como sendo um funcional de erro que depende apenas das frequências naturais de ordem superior:

$$\Phi = \sum_{i=2}^I (\underline{\omega}_i^2 - C\omega_i^2)^2 / \underline{\omega}_i^4 \quad (18)$$

O problema de optimização é definido como sendo a identificação do conjunto de parâmetros adimensionais do material α_m que minimizam o funcional de erro:

$$\text{Min } \Phi(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \geq 0 \quad (19)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} g_1 &= -\alpha_2 < 0 & \Leftrightarrow & (E_1/E_2 > 1) \\ g_2 &= \frac{(8 - \alpha_2 - 3\alpha_3 - \alpha_4)}{16 \left\{ 1 - \left[\frac{\alpha_4 - \alpha_3}{8 - 2\alpha_2} \right]^2 \left(\frac{4 - \alpha_2}{4} \right) \right\}} < 0 & \Leftrightarrow & (G_{12}/E_1 > 0) \\ g_3 &= \frac{(2\alpha_5 - \frac{1}{2}(8 - \alpha_2 - 3\alpha_3 - \alpha_4))}{8 \left\{ 1 - \left[\frac{\alpha_4 - \alpha_3}{8 - 2\alpha_2} \right]^2 \left(\frac{4 - \alpha_2}{4} \right) \right\}} < 0 & \Leftrightarrow & (G_{23}/E_1 > 0) \\ g_4 &= \left| \frac{(\alpha_4 - \alpha_3)}{(8 - 2\alpha_2)} \right| - \sqrt{\frac{4}{(4 - \alpha_2)}} < 0 & \Leftrightarrow & (|\nu_{12}| - \sqrt{E_1/E_2} < 0) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\alpha_i^l \leq \alpha_i \leq \alpha_i^u, \quad i = 2, 3, 4, 5$$

sendo g_i constrangimentos de desigualdade e α_i^l, α_i^u os limites inferiores e superiores das variáveis, sendo de notar que $\alpha_2^l = 0$ como consequência de g_1 e que $\alpha_2^u = 4$ como

consequência de g_4 , o que se verifica ser coerente com a realidade física e não apenas uma consequência da representação matemática, pois que sendo $\alpha_2 = 4 - 4(E_2/E_1)$ temos $\lim_{(E_1/E_2) \rightarrow 1} \alpha_2 = 0$ (isotropia) e $\lim_{(E_1/E_2) \rightarrow \infty} \alpha_2 = 4$ (ortotropia infinita).

O cálculo das sensibilidades necessárias para a análise é levado a cabo através de um modelo de elementos finitos formulado de acordo com a teoria de Mindlin para deformações de corte lineares.

O problema de optimização é resolvido com o auxílio de técnicas de programação matemática não linear descritas por Vanderplaats¹⁴ estando os algoritmos incorporados no programa ADS¹⁵ (Automated Design Synthesis). O método utilizado foi o método das direcções possíveis modificado.

Após a determinação dos valores óptimos para os parâmetros adimensionais do material (α_m) que satisfazem a eq.(19) o valor de E_1 pode ser encontrado, uma vez que C e α_0 são conhecidos. A relação de equilíbrio, (eq.9), para o modo q_1 , ao qual corresponde o valor próprio ω_1^2 também pode ser escrita pondo E_1 em evidência na matriz de rigidez, i.e.,

$$E_1 K^* q_1 = \omega_1^2 M q_1 \quad (21)$$

$$C E_1^0 K^* q_1 = C \omega_1^2 M q_1 \quad (22)$$

sendo

$$C = \frac{E_1}{E_1^0} = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^0} \quad (23)$$

onde E_1^0 representa o valor inicial atribuído ao módulo de Young na direcção X_1 e E_1 o valor identificado.

As restantes propriedades mecânicas podem então ser determinadas através das relações inversas nas eq.(5).

ANÁLISE DE SENSIBILIDADES

Para minimizar o funcional de erro Φ , eq.(18), é necessário calcular as sensibilidades $\partial\Phi/\partial\alpha_m$ para $m = 2, 3, 4, 5$.

Diferenciando a função objectivo eq.(18) em ordem a α_m , obtemos:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_m} = -2C \sum_{i=2}^I \left(1 - \frac{C\omega_i^2}{\omega_i^2} \right) \left[\left(\frac{\partial\omega_i^2}{\partial\alpha_m} - \frac{\omega_i^2}{\omega_1^2} \frac{\partial\omega_1^2}{\partial\alpha_m} \right) / \frac{\omega_i^2}{\omega_1^2} \right], \quad (m = 2, 3, 4, 5) \quad (24)$$

o que exige o cálculo das sensibilidades dos valores próprios em ordem aos parâmetros adimensionais do material α_m .

$$\frac{\partial\omega_i^2}{\partial\alpha_m}, \quad (i = 2, 3, \dots, I; m = 2, 3, 4, 5) \quad (25)$$

Estas sensibilidades são calculadas através do modelo numérico de elementos finitos. Diferenciando a eq.(14) em ordem aos α_m e assumido que os vectores próprios são normalizados pela relação $q_i M q_i$, obtemos¹⁶:

$$\frac{\partial \omega_i^2}{\partial \alpha_m} = q_i^T \left(\frac{\partial K}{\partial \alpha_m} - \omega_i^2 \frac{\partial M}{\partial \alpha_m} \right) q_i \quad (26)$$

onde $\partial K / \partial \alpha_m$ e $\partial M / \partial \alpha_m$ são as sensibilidades das matrizes de rigidez e massas do sistema em relação às perturbações nos parâmetros adimensionais α_m . Para a presente situação $\partial M / \partial \alpha_m$ considera-se uma matriz nula, uma vez que não depende dos parâmetros do material.

Utilizando a técnica de obtenção das sensibilidades ao nível do elemento, para esta aplicação particular a eq.(26) pode ser representada por:

$$\frac{\partial \omega_i^2}{\partial \alpha_m} = \sum_{l \in E} q_i^{e(l)} \left(\frac{\partial K^{e(l)}}{\partial \alpha_m} \right) q_i^{e(l)} \quad (27)$$

sendo E o conjunto de elementos que são perturbados pelo parâmetro α_m , $\partial K^e / \partial \alpha_m$ a sensibilidade da matriz de rigidez do elemento e q_i^e o vector dos deslocamentos nodais do elemento para o modo i e elemento (l) .

As sensibilidades da matriz de rigidez do elemento em ordem aos parâmetros α_m são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{ij^e}}{\partial \alpha_m} = & \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left\{ [B_{mi}^e]^T \frac{\partial}{\partial \alpha_m} [A] [B_{mj}^e] + [B_{bi}^e]^T \frac{\partial}{\partial \alpha_m} [B] [B_{mj}^e] + [B_{mi}^e]^T \frac{\partial}{\partial \alpha_m} [B] [B_{bj}^e] + \right. \\ & \left. + [B_{bi}^e]^T \frac{\partial}{\partial \alpha_m} [D] [B_{bj}^e] + [B_{si}^e]^T \frac{\partial}{\partial \alpha_m} [S] [B_{sj}^e] \right\} \det J \, d\xi \, d\eta \end{aligned} \quad (28)$$

Isto é obtido pela diferenciação analítica das equações (8b-e) em ordem a α_m seguido pela multiplicação das matrizes e integração pela regra de Gauss. Os termos das matrizes $\partial[c]_k / \partial \alpha_m$ e $\partial(1/\alpha) / \partial \alpha_m$ estão explicitamente indicados em Meira Afonso¹⁷.

VALIDAÇÃO DO MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO

Para a validação do método de identificação de parâmetros mecânicos foi realizada uma série de testes de convergência em que as frequências experimentais foram substituídas por valores de referência obtidos numericamente com uma malha regular de 8×8 elementos em que se fez variar a relação lado/espessura (a/h).

Os exemplos escolhidos dizem respeito a placas quadradas livres de dimensão $a = 0.2\text{m}$, massa específica 8000 kg/m^3 e isotrópicas, o que implica que

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 = E \\ \nu_{12} &= \nu \\ G_{12} &= G_{23} = G = E/(2 + 2\nu) \end{aligned}$$

sendo os valores especificados das propriedades a identificar, respectivamente:

$$E = 200\text{GPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$G = 76.9\text{GPa}$$

O gráfico da Figura 2, representa o erro relativo à determinação de E_1 , E_2 , G_{12} e ν_{12} , revelando valores de erro bastante baixos, sempre inferiores a 1% e sem uma dependência digna de registro em relação a (a/h) .

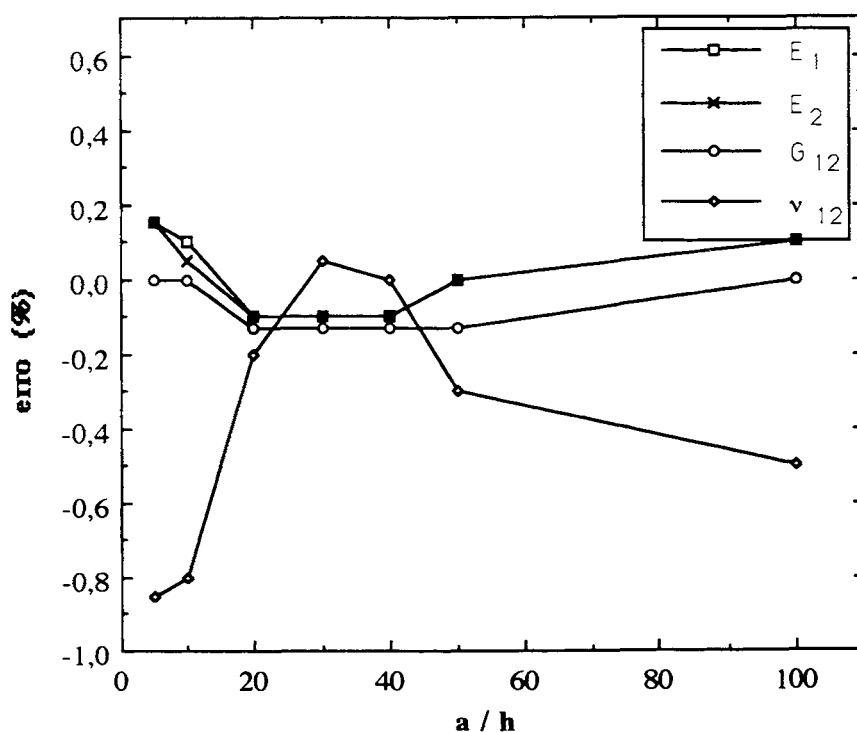


Figura 2. Erro relativo à determinação de E_1 , E_2 , G_{12} e ν_{12} .

No gráfico que se mostra na Figura 3, representando o erro relativo à determinação de G_{23} , a situação altera-se para relações de (a/h) superiores a 10, atingindo erros na determinação de G_{23} de 33% para (a/h) superiores a 50. Assinale-se, no entanto, que para valores de $(a/h) \leq 10$, a determinação de G_{23} é feita de forma correcta.

Há de notar ainda, que no respeitante à qualidade dos resultados das frequências naturais obtidas através do presente modelo¹⁷, os mesmos comparam muito favoravelmente com os propostos por Morris¹⁸ para as vibrações livres de uma placa quadrada isotrópica de relação lado/espessura $a/h = 200$.

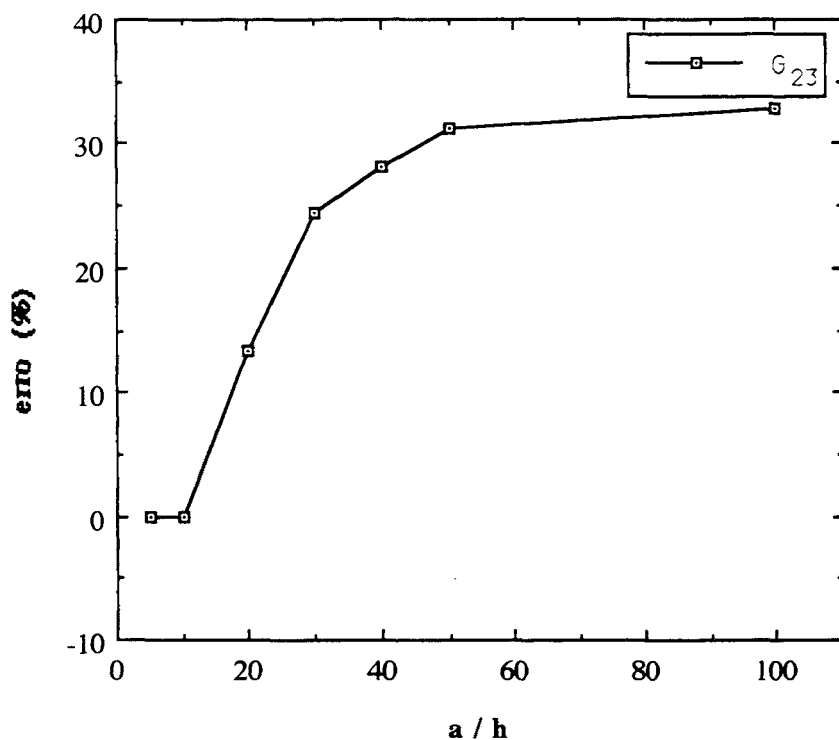


Figura 3. Erro relativo à determinação de G_{23} .

EXEMPLOS DE IDENTIFICAÇÃO

Para identificação de propriedades mecânicas apresentam-se nas Tabelas 1, 2 e 3, três exemplos também reproduzidos em [3], e que permitem a comparação entre os dois métodos; os resultados experimentais são também comparados através do cálculo dos valores para a placa (macro-modelo) como se de uma única camada ortotrópica se tratasse¹⁷. Os valores da estimativa inicial utilizada foram:

$$E_1 = E_2 = 100 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = G_{23} = 50 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0.3$$

EXEMPLO 1: Placa de alumínio quadrada ($a/h = 207$)

Dimensão em $x(a)$	:	0.205 m
Dimensão em $y(b)$	:	0.205 m
Espessura (h)	:	0.00099 m
Massa específica	:	2684 kg/m ³

i	<i>experimental</i> [Hz]	<i>calculado</i> [Hz]	<i>erro</i> (%)
1	75.4	75.4	0.0
2	111.6	111.7	0.09
3	138.2	139.4	0.87
4	196.5	196.2	-0.15
5	197.0	196.2	-0.41
6	347.6	350.5	0.83
7	353.5	350.5	-0.85
8	357.9	358.4	0.14
9	393.1	393.3	0.05
10	447.3	441.4	-1.32

Tabela I. Propriedades mecânicas identificadas (Exemplo 1).

Método	Modelo	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	G_{23} (GPa)	ν_{12}
Presente	—	68.1	68.1	25.1	30.1	0.31
Pedersen ³	—	68.9	66.0	24.8	—	0.34
Pedersen ³ extensometria	—	70.7	69.0	—	—	0.34

EXEMPLO 2: Placa rectangular de carbono-epoxy ($a/h = 74$)

Dimensão em $x(a)$	:	0.175 m
Dimensão em $y(b)$	:	0.210 m
Espessura (h)	:	0.00237 m (16 camadas de espessura igual)
Massa específica	:	1564 kg/m ³
Orientação das fibras	:	[0°, -45°, 40°, 55°, 90°, -50°, -85°, 85°] _s

i	<i>experimental</i> [Hz]	<i>calculado</i> [Hz]	<i>erro</i> (%)
1	245.9	245.9	0.0
2	263.4	264.9	0.58
3	516.6	518.5	0.37
4	569.0	567.0	-0.36
5	680.7	675.7	-0.73
6	799.0	796.1	-0.36
7	1058.0	1054.1	-0.37
8	1147.0	1159.3	1.07
9	1416.0	1410.4	-0.40

Tabela II. Propriedades mecânicas identificadas (Exemplo 2).

Método	Modelo	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	G_{23} (GPa)	ν_{12}
Presente	micro	128.3	10.5	5.95	68.4	0.23
Presente	macro	35.8	67.0	19.4	6.63	0.22
Pedersen ³	micro	128.0	10.1	5.36	–	0.23
Pedersen ³	macro	35.1	66.1	18.9	–	0.228
Pedersen ³ extensometria	macro	38.2	71.1	18.9	–	0.236

EXEMPLO 3: Placa rectangular de vidro-epoxy ($a/h = 80.7$)

Dimensão em $x(a)$	:	0.209 m
Dimensão em $y(b)$	:	0.192 m
Espessura (h)	:	0.00259 m (16 camadas de espessura igual)
Massa específica	:	2120 kg/m ³
Orientação das fibras	:	[0°, -40°, 40°, 90°, 40°, 0°, 90°, -40°] _s

<i>i</i>	<i>experimental</i> [Hz]	<i>calculado</i> [Hz]	<i>erro</i> (%)
1	172.5	172.5	0.0
2	250.2	250.5	0.18
3	300.6	299.4	-0.43
4	437.9	439.6	0.57
5	443.6	443.0	-0.33
6	760.3	755.5	-0.14
7	766.2	771.7	0.21
8	797.4	804.3	0.88
9	872.6	878.7	0.71
10	963.4	962.7	-0.09

Tabela III. Propriedades mecânicas identificadas (Exemplo 3).

Método	Modelo	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	G_{23} (GPa)	ν_{12}
Presente(4 × 4)	micro	56.2	21.0	11.2	0.18	0.248
Presente(4 × 4)	macro	36.6	32.0	17.1	0.17	0.292
Presente(8 × 8)	micro	57.2	21.4	11.3	11.8	0.30
Presente(8 × 8)	macro	36.9	34.0	14.1	11.5	0.26
Pedersen ³	micro	61.3	21.4	9.8	–	0.28
Pedersen ³	macro	37.4	34.0	13.9	–	0.28
Pedersen ³ extensometria	macro	34.1	31.8	–	–	0.29

Da análise dos resultados dos valores próprios das frequências naturais (Tabelas 1b, 2b, 3b) constata-se que o maior erro verificado entre os resultados experimentais e

os numéricos otimizados é de -1.32% para o modo $i = 10$ do Exemplo 1, sendo de uma maneira geral inferior a 1% em todos os casos ensaiados.

Os resultados das propriedades mecânicas identificados, Tabelas II, IV e VI, apresentam boa correlação com os valores obtidos quer pelo método alternativo descrito em [3] quer experimentalmente.

CONCLUSÕES

O estudo de identificação de propriedades mecânicas utilizando técnicas de otimização, conduziu às seguintes conclusões:

– A identificação das propriedades mecânicas de E_1 , E_2 , ν_{12} e G_{12} de cada camada do laminado é efectuada de forma correcta, sem erro apreciável, para qualquer valor de a/h .

– Na identificação das propriedades, os valores de G_{23} apresentam-se correctos para relações de $a/h \leq 10$ e com erros apreciáveis para valores superiores de a/h ; este facto prende-se com a importância relativa das deformações de corte transversal em relação às deformações de flexão, pois que os termos de corte são importantes em placas espessas, onde o método determina a constante elástica que lhes está associada de forma correcta. Contudo, as outras propriedades elásticas continuam a ser determinadas de uma forma fiável para todas as relações de a/h .

O modelo proposto para além de abranger a área coberta por alguns trabalhos baseados na teoria de Kirchhoff estende-se também a placas com baixas relações de a/h , permitindo levar em conta os efeitos de corte transversal quando estes são importantes.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o suporte financeiro concedido pela JNICT – Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (Projecto C/MPF/531/90) e STRD/A/TPR/592/92), assim como a participação das seguintes Empresas/Instituições: INDEP – Indústrias Nacionais de Defesa, E.P., CONAFI – Construção Naval de Fibras, Ltd, INIP – Instituto Nacional de Investigação das Pescas, RINAVE – Registro Internacional Naval, S.A. e PULREVI – Pultrusão de Resinas e Vidro, S.A..

REFERENCIAS

1. J.R. Vinson and R.L. Sierakowski, "The Behaviour of Structures Composed of Composite Materials", Martinus Nijhoff Pub., (1986).
2. R.D. Mindlin, "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motion of Isotropic Elastic Plates", *J. Appl. Mech.*, Vol. 18, pp. 31–38, (1951).
3. P. Pedersen, "Optimization Method Applied to Identification of Material Parameters, Discretization Methods and Structural Optimization – Procedures and Applications" (Ed. Eschenauer, H.A., and Thierauf, G.), pp. 277–283, Springer-Verlag, (1989).
4. W.P. Wilde and H. Sol, "Anisotropic Material Identification Using Measured Resonant Frequencies of Rectangular Composite Plates", *Composite Structures* 4, (Ed. Marshall, I.H.), pp. 2317–2324, Elsevier Applied Science, Vol. 2, London, (1987).

5. H. Sol, *"Identification of the Complex Moduli of Composite Materials by a Mixed Numerical/Experimental Method, Composite Materials Design and Analysis"* (Ed. Wilde, W.P. e Blain, W.R.), pp. 267-279, Springer-Verlag, Berlim, (1990).
6. W.P. Wilde, *"Identification of the Rigidities of Composite System by Mixed Numerical/Experimental Methods, Mechanical Identification of Composites"*, (Ed. Vautrin, A. e Sol, H.), Elsevier Applied Science, pp. 1-15, (1991).
7. P. Pedersen, *"On Sensitivity Analysis and Optimal Design for Laminates, Mechanical Behaviour of Composites"*, (Ed. Green & Micunovic), Elsevier, (1987).
8. D.R.J. Owen and E. Hinton, *"Finite Elements in Plasticity"*, Pineridge Press LTD, Swansea U.K., pp. 157-174, (1980).
9. O.C. Zienkiewicz, *"The Finite Element Method in Engineering Science"*, McGraw-Hill Book Company, 2nd. Ed., pp. 349-351, (1971).
10. O. C. Zienkiewicz, R. C. Taylor and J. M. Too, *"Reduced Integration Techniques in General Analysis of Plates and Shells"*, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 3, pp. 275-290, 1971.
11. E. D. L. Pugh, E. Hinton and O. C. Zienkiewicz, *"A study of Quadrilateral Plate Bending Elements with Reduced Integration"*, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 12, pp. 1059-1079, 1978.
12. T. J. R. Hughes, M. Cohen and M. Haroun, *"Reduced and Selective Integration in the Finite Element Analysis of Plates"*, Nucl. Eng. Design, Vol. 46, pp. 203-222, 1978.
13. U. Tsach., *"Locking of Thin Plate/Shell Elements"*, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 17, pp. 633-644, 1981.
14. G.N. Vanderplaats, *"Numerical Optimization Techniques For Engineering Design"*, McGraw-Hill Book Company, (1984).
15. G.N. Vanderplaats, *"ADS - A Fortran program for Automated Design Synthesis"*, Version 2.01, Engineering Design Optimization Inc., St. Barbara, California, U.S., (1987).
16. R.T. Haftka and M. Kamat, *"Finite Elements on Optimal Structural Design, Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems"*, (Ed. Mota Soares, C.A.), pp. 241-270, Springer-Verlag, Berlin, (1987).
17. J.M. Meira Afonso, *"Identificação de Propriedades Mecânicas de Materiais Compósitos Utilizando Técnicas de Optimização"*, Tese de Mestrado, Setembro, (1991), I.S.T.
18. A. Morris, *"Selected Results from NASFEMS Dynamic Working Group-Free Vibrations"*, Benchmark, pp. 12-19, April, 1989.