

COMPARACIÓN DE ALGORITMOS NUMÉRICOS EN PROBLEMAS DE LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA CON CAVITACIÓN EN DIMENSIÓN UNO

N. CALVO
J. DURANY
y
C. VÁZQUEZ

*Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Vigo
Campus Macrosende, 36280 Vigo, España
Tel.: + 34-86-812164 Fax: + 34-86-812116
E-mail: durany@dma.uvigo.es*

RESUMEN

En este trabajo se analizan algunos algoritmos numéricos para problemas matemáticos unidimensionales de frontera libre que aparecen en la lubricación hidrodinámica de dispositivos eje-cojinete. Los modelos matemáticos de estos problemas de la mecánica de fluidos en capas delgadas se basan en la ecuación de Reynolds, acompañada de ciertas condiciones que tienen en cuenta los fenómenos de cavitación. En este sentido, se compara el modelo de cavitación de Elrod-Adams y el modelo de cavitación de Reynolds mediante inecuación variacional. La aproximación numérica de la solución de ambos modelos se realiza mediante el método de elementos finitos combinado con diferentes técnicas de resolución de ecuaciones e inecuaciones variacionales no lineales. Los ejemplos numéricos resueltos ratifican los resultados teóricos conocidos.

COMPARISON OF NUMERICAL ALGORITHMS FOR ONE DIMENSIONAL HYDRODYNAMIC LUBRICATION PROBLEMS WITH CAVITATION

SUMMARY

In this work several numerical algorithms for one dimensional free boundary problems appearing in the hydrodynamic lubrication of journal bearing devices are analyzed. The mathematical models for thin fluid films are based on Reynolds equation and certain conditions which take into account cavitation phenomena. In this way, Elrod-Adams and Reynolds variational inequality cavitation models are compared. The numerical approximation of the solution for both models is obtained by means of finite elements discretization combined with different techniques for nonlinear variational equations and variational inequalities. The performed numerical tests agree with the previous theoretical results.

Recibido: Febrero 1996

INTRODUCCIÓN

La teoría de la lubricación es fuente de numerosos problemas en el marco de la modelización, el análisis y los métodos numéricos. En este trabajo nos vamos a limitar a los fenómenos hidrodinámicos, dejando para análisis posteriores los casos que tienen en cuenta las posibles deformaciones elásticas debidas a las sobrepresiones. Algunos problemas teóricos que incorporan diferentes comportamientos elásticos de las superficies en contacto son temas de las referencias 8, 16 y 23.

En concreto, planteamos matemáticamente algunos problemas de contacto lubricado, que son fácilmente reconocibles en el ámbito de la tecnología mecánica y cuyos aspectos fundamentales son:

- El desplazamiento de un fluido cuya presión, al ocupar éste un espacio de espesor pequeño, verifica la ecuación en derivadas parciales de Reynolds.
- El fenómeno de la cavitación o presencia de burbujas de aire en el interior del lubricante que requiere la utilización de modelos que tienen en cuenta este hecho.
- Las características físicas del lubricante que se reflejan en las leyes de comportamiento.
- La geometría del dispositivo lubricado.

El desplazamiento tridimensional de un fluido newtoniano en régimen laminar está gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes. Sin embargo, en el caso particular de desplazamientos con una dirección preferencial, es decir, cuando una dimensión (el espesor) es muy pequeña comparada con las otras dos, las ecuaciones de Navier-Stokes se simplifican notablemente dando lugar a la ecuación de Reynolds bidimensional. Esta ecuación describe el comportamiento de la presión p del lubricante para un espesor h , conocido de la película fluida, un campo de velocidades $\mathbf{u} = (u, 0)$, una viscosidad ν y una densidad ρ . La ecuación de Reynolds se escribe en la forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho}{\nu} h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho}{\nu} h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6u \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) \quad (1)$$

La deducción de la ecuación (1) se obtiene a través de razonamientos heurísticos^{21,11} o matemáticos^{14,4}.

Las dos propiedades básicas del lubricante son la densidad y la viscosidad. La variación de la densidad con la presión en los aceites más usuales es muy pequeña, por lo cual suponemos un fluido incompresible ($\rho = cte$). En cuanto a la viscosidad, además del caso isoviscoso ($\nu = cte$) la relación viscosidad-presión más utilizada es la ley de Barus

$$\nu = \nu_0 e^{\alpha p} \quad (2)$$

donde ν_0 es la viscosidad a presión atmosférica y α es el coeficiente de piezoviscosidad, característico de cada lubricante¹¹. Desde el punto de vista matemático, el considerar un régimen piezoviscoso introduce una no linealidad en la parte de difusión de la ecuación de Reynolds (1).

Un ejemplo práctico en el que estamos en las condiciones de aplicabilidad de la ecuación de Reynolds, lo constituye el sistema formado por un eje cilíndrico que gira dentro de un cojinete también cilíndrico, fijo y separado del eje por una capa muy delgada de fluido lubricante, que amortigua los efectos del rozamiento o calentamiento, posibles causantes de daños en las dos superficies de contacto. Para el buen funcionamiento del dispositivo es necesario mantener una alimentación de fluido mediante una ranura axial o circunferencial en el par eje-cojinete (ver Figura 1).

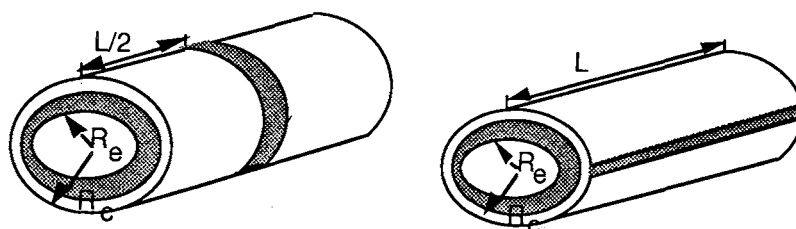


Figura 1. Alimentación en el dispositivo eje-cojinete

En cualquiera de los dos casos se extiende el anillo cilíndrico de la película lubricante en un plano xy , de modo que el dominio bidimensional del problema es el rectángulo

$$\Omega = (0, 2\Pi) \times (0, L/2) \quad \text{en el caso circunferencial} \quad (3)$$

$$\Omega = (0, 2\Pi) \times (0, L) \quad \text{en el caso axial} \quad (4)$$

En ambos casos, L es la longitud del par y la función h depende sólo de la coordenada x , en la forma

$$h(x) = C(1 + \epsilon \cos x) \quad (5)$$

siendo C la diferencia entre los radios del eje y cojinete (R_e y R_c) y ϵ el coeficiente de excentricidad del eje con respecto al cojinete ($0 \leq \epsilon < 1$). Cuando se considera la no coincidencia de los ejes de los cilindros (es decir, $\epsilon > 0$), se producen zonas de sobrepresión y zonas de bajas presiones. Estas últimas originan la aparición de burbujas: fenómeno conocido con el nombre de cavitación. Se produce, principalmente, en la parte divergente del dominio (es decir, $x > \pi$) debido a que la presión alcanza valores iguales o ligeramente inferiores a la presión de saturación, provocando la ruptura de la película fluida. En el caso de alimentación circunferencial, puede aparecer también en la parte convergente, pues en los laterales del dominio rectangular existe periodicidad y, en el caso de alimentación axial, puede que la cavitación aparezca en dicha zona, debido al fenómeno de la falta de alimentación (starvation). No todos los modelos matemáticos del problema son capaces de simular este hecho³.

Los modelos matemáticos del fenómeno de la cavitación consideran que la ecuación de Reynolds es válida solamente en una parte del dominio (zona activa o lubricada),

mientras que en el resto (zona cavitada) la presión es constante e igual a la ambiental. La diferencia de los modelos se basa en las condiciones impuestas a la presión en la interfase que separa ambas zonas^{22,15,6}.

El objetivo fundamental del trabajo es presentar una comparación de los distintos métodos numéricos alternativos para la resolución de los dos modelos matemáticos de cavitación más utilizados: el de Reynolds y el de Elrod-Adams.

En los dos apartados siguientes se describen dichos modelos y se indican algunos resultados relativos a la existencia y unicidad de solución de algunos problemas ya estudiados, así como las referencias bibliográficas en las que pueden encontrarse los detalles de las demostraciones.

En el penúltimo apartado, con objeto de presentar la comparación de los métodos numéricos sobre problemas monodimensionales, se procede a la descripción de los mismos. En concreto, primeramente se plantea el modelo sin cavitación y su solución numérica mediante elementos finitos de Lagrange de grado 1. A continuación, tras una justificación clásica del modelo de cavitación mediante inecuación variacional, que supone la condición de Reynolds en la frontera libre, se describen las técnicas de Gauss-Seidel con proyección y dos variantes de un algoritmo de Bermúdez-Moreno¹⁰ para la aproximación numérica de la inecuación variacional. Esta sección finaliza con tres algoritmos de resolución numérica del modelo más realista de cavitación de Elrod-Adams: una adaptación a dimensión uno del método de Alt¹ para el problema del dique y dos variantes del algoritmo de Bermúdez-Moreno¹⁰ combinadas con técnicas de descentramiento por características de términos convectivos no lineales.

En el último apartado se presentan los resultados obtenidos con los distintos métodos sobre diferentes problemas test y se establecen las conclusiones.

MODELO DE CAVITACIÓN DE REYNOLDS

Entre las diferentes opciones de modelización del fenómeno de la cavitación, una de las más utilizadas es la conocida por el nombre de Reynolds, que considera la continuidad de flujo a través de la frontera libre que separa la zona lubricada ($p > 0$) de la zona cavitada ($p = 0$). Este modelo de cavitación es fácilmente transformable en una inecuación variacional y su análisis matemático y resolución numérica se puede obtener por esta vía²⁰.

La formulación fuerte de este modelo, en el caso del dispositivo con alimentación axial (ver Figura 2), consiste en encontrar la función presión p que verifique las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\alpha p} h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{-\alpha p} h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6\nu_0 u \frac{\partial}{\partial x}, \quad p > 0 \quad \text{en } \Omega^+ \quad (6)$$

$$p = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (7)$$

$$p = \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{en } \Sigma \quad (8)$$

$$p = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (9)$$

donde \vec{n} es el vector unitario normal a Σ , señalando hacia el exterior de Ω^+ . Los conjuntos anteriores se definen a partir del dominio Ω del modo siguiente:

$$\Omega^+ = \{(x, y) \in \Omega / p(x, y) > 0\} \tag{10}$$

$$\Omega_0 = \{(x, y) \in \Omega / p(x, y) = 0\}$$

$$\Sigma = \partial\Omega^+ \cap \Omega$$

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \partial\Omega / x = 0\} \tag{11}$$

$$\Gamma = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$$

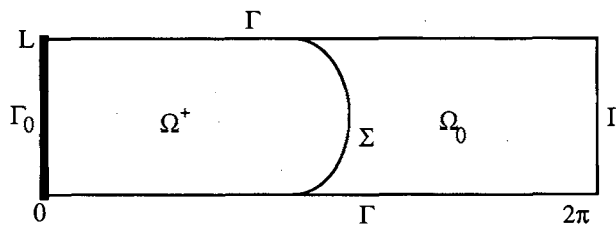


Figura 2. Dominio bidimensional

Antes de pasar a la formulación variacional, resulta útil eliminar la no linealidad que aparece en el término de difusión en (6) como consecuencia de la ley de Barus (2). Para ello se utiliza el cambio de variable de Kirchoff, estrategia clásica en los problemas de difusión no lineales y, que en el caso concreto de la lubricación piezoviscosa, se conoce con el nombre de transformación de Grubin¹¹

$$q(p) = \frac{1 - e^{-\alpha p}}{\alpha} \tag{12}$$

La nueva variable q se denomina presión reducida y siempre que p sea solución del problema (6)-(9), q lo será del problema isoviscoso, que se correspondería con las ecuaciones (6)-(9) con $\alpha = 0$, escritas en la nueva incógnita q .

Es clásico que introduciendo el conjunto convexo

$$K = \{z \in H_0^1(\Omega) / z \geq 0 \text{ c.p.d. en } \Omega\} \tag{13}$$

a partir del espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ el problema se transforma en la inecuación variacional

$$\int_{\Omega} h^3 \nabla q \cdot \nabla (z - q) dx dy \geq -6\nu_0 u \int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial x} (z - q) dx dy, \quad \forall z \in K \tag{14}$$

cuya existencia y unicidad de solución puede encontrarse en la referencia 20.

Sin embargo, esta transformación en inecuación variacional impone una restricción adicional que no está presente en el modelo continuo de Reynolds y, en muchos casos, en los problemas físicos de partida. La restricción se refiere a la localización de la frontera libre que debe de estar contenida totalmente en la parte del dominio donde $h(x)$ es una función creciente (parte divergente). Por tanto, no sirve para modelizar el fenómeno de la falta de alimentación o incluso los fenómenos de periodicidad en las fronteras laterales de Ω en el caso de alimentación circunferencial.

Este inconveniente ha inducido a varios autores en los trabajos^{5,2,18}, entre otros, a emplear como modelo matemático el llamado de Elrod-Adams¹⁹, que es más realista en la mayor parte de las situaciones.

MODELO DE CAVITACIÓN DE ELROD-ADAMS

Este modelo introduce la hipótesis de que en la zona de cavitación existe una mezcla de fluido y aire, definiendo una nueva variable $\theta(x, y)$ que representa la concentración de lubricante existente en el entorno del punto (x, y) , es decir, una función de saturación que vale 1 en la zona activa y toma valores entre 0 y 1, ambos incluidos, en la zona cavitada. La formulación del problema con este modo es la siguiente:

Hallar (p, θ) tal que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\alpha p} h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{-\alpha p} h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6\nu_0 u \frac{\partial h}{\partial x}, \quad p > 0 \text{ y } \theta = 1 \text{ en } \Omega^+ \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\theta h) = 0, \quad p = 0 \text{ y } 0 \leq \theta \leq 1 \text{ en } \Omega_0 \quad (16)$$

$$h^3 e^{-\alpha p} \frac{\partial p}{\partial n} = 6u\nu_0(1 - \theta)h \cos(\vec{n}, \vec{i}), \quad p = 0 \text{ en } \Sigma \quad (17)$$

$$\theta = \theta_0 \text{ en } \Gamma_0 \quad (18)$$

donde \vec{i} es el vector unitario en el eje de las x y el resto de la notación se corresponde con la del apartado anterior.

El problema matemático queda bien planteado cuando se introducen los espacios funcionales de trabajo, la expresión del espesor $h(x)$ y las condiciones del contorno, siempre en función del problema físico que estemos tratando en cada momento y del tipo de alimentación en el sistema eje-cojinete. En caso de fluidos piezoviscosos, se puede realizar el cambio de variable (12) y trabajar con la presión reducida q como función incógnita, que será solución de un problema isoviscoso de modo análogo al apartado previo.

En cuanto a las condiciones de contorno, serán en el caso de alimentación axial

$$p = 0 \text{ en } \partial\Omega, \quad \theta = \theta_0 \text{ en } x = 0 \quad (19)$$

Un análisis teórico del problema isoviscoso con resultados de existencia, unicidad y regularidad de las soluciones se puede ver en las referencias 23 y 24, utilizando métodos de penalización y de monotonía para la siguiente formulación variacional:

Hallar (q, θ) en $H_0^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} h^3 \nabla q \cdot \nabla z \, dx dy = 6\nu_0 u \int_{\Omega} h \theta \frac{\partial z}{\partial x} \, dx dy + 6\nu_0 u \int_{\Gamma_0} \theta_0 h z d\sigma \quad \forall z \in V \quad (20)$$

$$\theta \in H(q) = \begin{cases} 1 & q > 0 \\ [0, 1] & q = 0 \\ 0 & q < 0 \end{cases} \quad (21)$$

donde Γ_0 representa la frontera de alimentación (Figura 2) y el espacio funcional V es

$$V = \{z \in H^1(\Omega) / z = 0 \text{ en } \Gamma\} \quad (22)$$

Los principales resultados teóricos para el problema (20)-(21), que se resumen a continuación en forma de teoremas, permitirán verificar que las soluciones numéricas obtenidas en el apartado siguiente responden adecuadamente a dichos resultados.

Teorema 1 (Existencia de solución en el espacio V)

Para $\theta_0 \in L^2(\Gamma_0)$, $0 \leq \theta_0 \leq 1$ existe (q, θ) en $V \times L^\infty(\Omega)$ solución del problema (20)- (21).

Teorema 2 (Existencia de solución en $H_0^1(\Omega)$)

Sea $q_r \in K$ la solución única de la inecuación variacional del modelo de Reynolds (14) y sea θ_0^r la alimentación correspondiente a dicha función q_r , es decir

$$h^2(0) \frac{\partial q_r}{\partial x}(0, y) = 1 - \theta_0^r \quad (23)$$

Si $\theta_0 \leq \theta_0^r$, entonces la solución del problema (20), (21) verifica $q \leq q_r$ y en consecuencia $q \in H_0^1(\Omega)$.

Teorema 3 (Unicidad de solución)

Sea $\theta_0 \in L^2(\Gamma_0)$, $0 \leq \theta_0 \leq 1$, $\theta_0 \leq \theta_0^r$, entonces la solución q del problema (20) es monótona respecto de θ_0 (por tanto, única para un dato θ_0 fijo).

Teorema 4 (Existencia y unicidad del problema piezoviscoso)

Si el coeficiente de piezoviscosidad α verifica

$$\|q\|_{C(\bar{\Omega})} < \frac{1}{\alpha} \quad (24)$$

donde q es la solución única del problema isoviscoso (20), entonces existe una única solución p

$$p = -\frac{1}{\alpha} \log(1 - \alpha q) \quad (25)$$

de la formulación variacional del problema piezoviscoso (15)-(18).

RESOLUCIÓN NUMÉRICA

La resolución numérica de las ecuaciones (20)-(21) no ha sido motivo de muchos trabajos, dada la reciente utilización de este tipo de modelo de Elrod-Adams. En el marco de los elementos finitos cabe destacar los trabajos de El Alaoui-Bayada¹⁸, Carrillo-Infante¹² y Carrillo-Martínez¹³ adaptando el modelo de Alt¹ para el problema del dique. En otra línea diferente, Bermúdez-Durany⁹, Durany-Vázquez¹⁷ y Durany-García-Vázquez¹⁶ utilizan el método de las características combinado con técnicas de elementos finitos.

Con el fin de validar y mostrar las ventajas e inconvenientes de los métodos numéricos en problemas de lubricación, el objetivo principal en este apartado es analizar diferentes alternativas de resolución numérica de los modelos descritos, ratificando los resultados teóricos de comparación de los mismos, así como los resultados de monotonía. Por razones de simplicidad, en lo que sigue se considera un fluido isoviscoso, tomando el producto de las constantes $6\nu_0 u = 1$.

Caso de modelo unidimensional de lubricación sin cavitación

Se trata de resolver el problema:

Encontrar p tal que

$$-\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right) = -\frac{dh}{dx} \quad \text{en } \Omega = (0, 2\pi) \quad (26)$$

$$p(0) = 0; \quad p(2\pi) = 0 \quad (27)$$

siendo h la función definida en (5).

Una formulación variacional del problema (26)-(27) se escribe:

Encontrar $p \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} -\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right) v \, dx = \int_{\Omega} -\frac{dh}{dx} v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (28)$$

A continuación planteamos la aproximación numérica con el método de elementos finitos clásicos de Lagrange lineales a trozos.

A partir de un parámetro real positivo h se define la partición τ_h de Ω con nodos equidistantes $x_i = (i-1)h$, $i = 1, \dots, N+1$. Asociado a esta partición se construye el espacio de elementos finitos clásicos de tipo Lagrange P_1

$$\begin{aligned} V_h &= \{ \varphi_h \in C^0(\Omega) / \varphi_h|_E \in P_1 \quad \forall E \in \tau_h \} \\ K_{0h} &= \{ \varphi_h \in V_h / \varphi_h|_{\Gamma} = 0 \} \end{aligned} \quad (29)$$

donde E denota un elemento finito de la discretización. Entonces

$$p_h = \sum_{i=1}^{N+1} p_i \phi_i \quad v_h = \sum_{i=1}^{N+1} v_i \phi_i \quad (30)$$

siendo

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{en } [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{en } [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad i = 1, \dots, N + 1 \quad (31)$$

Tenemos, por tanto

$$\sum_{j=1}^{N+1} p_j \int_{\Omega} h^3 \frac{d\phi_j}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} dx = \int_{\Omega} -\frac{dh}{dx} \phi_i dx \quad \forall i = 1, \dots, N + 1 \quad (32)$$

que da lugar al sistema $Mp_h = b$, donde

$$M \in M_{(N+1) \times (N+1)}, \quad m_{ij} = \int_{\Omega} h^3 \frac{d\phi_j}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} dx \quad (33)$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{N+1} \end{pmatrix} \quad \text{con } b_i = \int_{\Omega} -\frac{dh}{dx} \phi_i dx \quad i = 1, \dots, N + 1$$

La resolución del sistema de ecuaciones lineales (32) se puede efectuar, por ejemplo, mediante la factorización LU o el método de Gauss-Seidel.

Este modelo sin cavitación puede dar lugar a una presión que alcanza valores negativos en la parte donde h es creciente. Desde el punto de vista físico estos valores no tienen sentido y la explicación es que cuando la presión es inferior a un cierto valor ($p = 0$), la ecuación de Reynolds ya no modela su comportamiento, pues se produce el fenómeno de cavitación.

Casos de modelos unidimensionales de lubricación con cavitación

Como ya se ha mencionado anteriormente, el modelo de cavitación más utilizado es el de Reynolds, que en el caso unidimensional se plantea del modo siguiente:

MODELO DE REYNOLDS

Encontrar p tal que

$$-\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right) = -\frac{dh}{dx} \quad \text{en } \Omega^+, \quad p > 0 \quad \text{en } \Omega^+ \quad (34)$$

$$p = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (35)$$

$$p(0) = 0; \quad p(2\pi) = 0 \quad (36)$$

que podemos escribir en la forma

$$A_p = f \quad \text{en } \Omega^+, \quad p > 0 \quad \text{en } \Omega^+ \quad (37)$$

$$p = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (38)$$

$$p(0) = 0; \quad p(2\pi) = 0 \quad (39)$$

siendo

$$A: p \rightarrow -\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right), \quad f = -\frac{dh}{dx} \quad (40)$$

Es fácil comprobar que una formulación variacional de (37)-(39) se puede escribir en la forma:

Hallar $p \in K$ tal que

$$\langle A_p - f, \varphi - p \rangle_{(H_0^1(\Omega))' \times H_0^1(\Omega)} \geq 0 \quad \forall \varphi \in K$$

o equivalentemente

$$\int_{\Omega} -\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right) (\varphi - p) dx \geq - \int_{\Omega} \frac{dh}{dx} (\varphi - p) dx \quad \forall \varphi \in K \quad (41)$$

Utilizando fórmulas de Green de integración por partes, obtenemos la formulación final del modelo de Reynolds:

Hallar $p \in K$ tal que

$$\int_{\Omega} h^3 \frac{dp}{dx} \frac{d}{dx} (\varphi - p) dx \geq - \int_{\Omega} \frac{dh}{dx} (\varphi - p) dx \quad \forall \varphi \in K \quad (42)$$

que evidentemente se enmarca en el contexto de las inecuaciones variacionales.

La resolución numérica se puede realizar, en consecuencia, mediante técnicas específicas para inecuaciones variacionales. A modo de ejemplo, se plantean a continuación dos de estas estrategias.

a) Método de Gauss-Seidel con proyección y elementos finitos P_1

Se trata de un método clásico para inecuaciones variacionales. Para aplicar el método de Gauss-Seidel con proyección se plantea la formulación variacional del problema sin cavitación (28) y la correspondiente discretización (32) con elementos finitos de Lagrange P_1 . El sistema lineal se resuelve con el algoritmo de Gauss-Seidel proyectando en cada etapa sobre el convexo K . Es decir

$$\begin{aligned} p^0 & \text{ conocido} \\ (D - E)p_i^{k+1} &= Fp_i^k + b_i \quad i = 1, \dots, N + 1 \\ p_i^{k+1} &= \max(p_i^{k+1}, 0) \end{aligned} \quad (43)$$

siendo $M = D - E - F$ la descomposición clásica de Gauss-Seidel para la matriz M con la notación habitual para la diagonal principal (D), subdiagonales con signo opuesto (E) y superdiagonales con signo opuesto (F).

b) Algoritmo de Bermúdez-Moreno con elementos finitos P_1 y P_0

El algoritmo de Bermúdez-Moreno¹⁰ está concebido, en principio, para la aproximación numérica de inecuaciones variacionales. Para ello se reescribe la inecuación variacional (42) con ayuda de la función indicatriz del convexo K :

Encontrar $p \in K$ tal que

$$\int_{\Omega} h^3 \frac{dp}{dx} \frac{d}{dx} (\varphi - p) dx + I_K(\varphi) - I_K(p) \geq - \int_{\Omega} \frac{dh}{dx} (\varphi - p) dx \quad \forall \varphi \in V \quad (44)$$

que en términos de la subdiferencial de la indicatriz de K se escribe en la forma

$$\gamma = -(Ap - f) \in \partial I_K(p) \quad (45)$$

siendo

$$(Ap, \varphi) = \int_{\Omega} h^3 \frac{dp}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx \quad (46)$$

$$(f, \varphi) = - \int_{\Omega} \frac{dh}{dx} \varphi dx \quad (47)$$

Observación 1

Como consecuencia de la definición de subdiferencial se tiene

$$\gamma \in \partial I_K(p) \Leftrightarrow \langle \varphi - p, \gamma \rangle \leq I_K(\varphi) - I_K(p) \quad \forall \varphi \in V \quad (48)$$

de modo que (45) se puede expresar en la forma

$$- \int_{\Omega} h^3 \frac{dp}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx - \int_{\Omega} \frac{dh}{dx} \varphi dx = \int_{\Omega} \gamma \varphi dx \quad \forall \varphi \in V \quad (49)$$

y el problema final a resolver es:

Encontrar $p \in K$ tal que

$$\int_{\Omega} h^3 \frac{dp}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx + \int_{\Omega} \gamma \varphi dx = - \int_{\Omega} \frac{dh}{dx} \varphi dx \quad \forall \varphi \in V \quad (50)$$

$$\gamma \in \partial I_K(p) \quad (51)$$

La utilización de las técnicas de Bermúdez-Moreno¹⁰ requiere las siguientes definiciones:

Definición 1

Un operador maximal monótono G en un espacio de Hilbert H es una aplicación definida en un subconjunto $D(G)$ de H , llamado dominio de G , con valores en el conjunto de las partes de H , que es monótono, es decir

$$\begin{aligned} u_1 \in G(y_1) \\ \implies (u_1 - u_2, y_1 - y_2) \geq 0 \quad \forall y_1, y_2 \in H \\ u_2 \in G(y_2) \end{aligned}$$

Si G es un operador maximal monótono, puede probarse que para λ, ω números reales tales que $\lambda\omega < 1$, $\lambda \geq 0$, $\omega \geq 0$, entonces dada $f \in H$ existe un único $y \in H$ tal que $f \in (1 - \lambda\omega)y + \lambda G(y)$.

Definición 2

El operador $J_\lambda^\omega = ((1 - \lambda\omega)I + \lambda G)^{-1}$ se llama resolvente del operador $G - \omega I$, donde λ y ω son parámetros reales estrictamente positivos e I denota el operador identidad.

Definición 3

El operador $G_\lambda^\omega = \frac{I - J_\lambda^\omega}{\lambda}$ se llama aproximación Yosida de parámetro real λ del operador $G - \omega I$.

El resultado siguiente es fundamental para la justificación del algoritmo que se propone.

Lema 1

Sea G un operador maximal monótono en un espacio de Hilbert V . Son equivalentes:

- a) $u \in G(y) - \omega y$
- b) $u = G_\lambda^\omega(y + \lambda u) \quad \lambda > 0$

En nuestro problema, la función ∂I_K es un operador maximal monótono, ya que es subdiferencial de la función indicatriz I_K . Entonces, para la nueva incógnita planteamos una formulación equivalente a (50)-(51)

$$\int_{\Omega} h^3 \frac{dp}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx + \int_{\Omega} (\beta + \omega p) \varphi dx = - \int_{\Omega} \frac{dh}{dx} \varphi dx \quad \forall \varphi \in V \quad (52)$$

$$\beta \in \partial I_K(p) - \omega p \quad (53)$$

con ω número real estrictamente positivo.

Finalmente, utilizando la equivalencia del Lema 1 proponemos el algoritmo iterativo siguiente para resolver (52)-(53) a partir de β^0 conocido

$$\int_{\Omega} h^3 \frac{dp^j}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx + \omega \int_{\Omega} p^j \varphi dx = - \int_{\Omega} \beta^j \varphi dx - \int_{\Omega} \frac{dh}{dx} \varphi dx \quad \forall \varphi \in V \quad (54)$$

$$\beta^{j+1} = K_{\lambda}^{\omega}(p^j + \lambda\beta^j) \quad (55)$$

donde K_{λ}^{ω} denota la aproximación Yosida del operador $\partial I_K - \omega I$, que se expresa fácilmente en términos de la función proyección P_K sobre el conjunto convexo cerrado K . En efecto

$$K_{\lambda}^{\omega}(x) = \frac{1}{1 - \lambda\omega} K_{\frac{1}{1-\lambda\omega}} x - \frac{\omega}{1 - \lambda\omega} x$$

Si denotamos

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{1 - \lambda\omega}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{1 - \lambda\omega} x$$

podemos escribir

$$K_{\lambda}^{\omega}(x) = \frac{1}{1 - \lambda\omega} K_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) - \omega\bar{x}$$

donde

$$K_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = \frac{\bar{x} - J_{\bar{\lambda}}(\bar{x})}{\bar{\lambda}}, \quad J_{\bar{\lambda}} = (I + \bar{\lambda}\partial I_K)^{-1}$$

y mediante cálculos sencillos se obtiene

$$K_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = \frac{\bar{x} - P_k(\bar{x})}{\bar{\lambda}}$$

y por tanto

$$K_{\lambda}^{\omega}(\bar{x}) = \frac{1}{\bar{\lambda}(1 - \lambda\omega)} (\bar{x} - P_k(\bar{x})) - \omega\bar{x}$$

El esquema de este método podemos sintetizarlo en la forma:

- Inicializar β^0 a un valor arbitrario.
- Calcular p^j solución de la ecuación lineal (54) en la iteración j -ésima.
- Poner al día la función β mediante (55)

$$\beta^{j+1} = \frac{1}{\bar{\lambda}(1 - \lambda\omega)} ((p^j + \lambda\beta^j) - (P_k(p^j + \lambda\beta^j))) - \omega(p^j + \lambda\beta^j)$$

- Test de convergencia en la sucesión $\{p^j\}$.

El análisis de la convergencia de este método¹⁰ queda garantizada siempre y cuando los parámetros λ y ω verifiquen $\lambda\omega \leq \frac{1}{2}$.

Las dos alternativas de este método que llamaremos P_1 y P_0 hacen referencia al espacio de polinomios utilizado para discretizar la función β^j en la integral

$$\int_{\Omega} \beta^j \varphi \, dx$$

En el caso P_1 la función β , lineal a trozos, se integra mediante la fórmula del trapecio, mientras que en el caso P_0 , constante por elemento, se utiliza la fórmula de rectángulo.

MODELO DE ELROD-ADAMS

La formulación del problema continuo en dimensión 1 de este modelo con las mismas notaciones previas es la siguiente:

Hallar (p, θ) tal que

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right) = \frac{dh}{dx}, \quad p > 0 \text{ y } \theta = 1 \text{ en } \Omega^+ \quad (56)$$

$$\frac{d(\theta h)}{dx} = 0, \quad p = 0 \text{ y } 0 \leq \theta \leq 1 \text{ en } \Omega_0 \quad (17)$$

$$p(2\pi) = 0, \quad \theta = \theta_0 \text{ en } x = 0 \quad (58)$$

$$p = 0, \quad h^3 \frac{dp}{dx} = h(1 - \theta) \text{ en } \Sigma \quad (59)$$

La formulación variacional del problema es análoga al caso bidimensional (20).

Dada θ_0 , $0 \leq \theta_0 \leq 1$, encontrar $p \in H_0^1(\Omega)$ y $\theta \in L^\infty(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} h^3 \frac{dp}{dx} \frac{d\varphi}{dx} \, dx = \int_{\Omega} h\theta \frac{d\varphi}{dx} \, dx + \int_{\Gamma_0} \theta_0 h\varphi \, d\sigma \quad \forall \varphi \in V \quad (60)$$

$$\theta \in H(p) \text{ en } \Omega \quad (61)$$

$$p \geq 0 \text{ en } \Omega \quad (62)$$

donde $V = \{\varphi \in H^1(\Omega) / \varphi(2\pi) = 0\}$.

Para la resolución numérica de este problema se presentan dos alternativas: la adaptación del método de Alt¹, originalmente aplicado a problemas bidimensionales de flujos en medio poroso, y la combinación de técnicas "upwind" con discretizaciones de elementos finitos P_1 y P_0 y técnicas de dualidad para resolver las no linealidades.

a) Método de Alt

Se trata de adaptar a dimensión 1 el esquema utilizado para dimensión 2 por Alt¹ en el problema del dique y por Bayada-Chambat-El Alaoui⁷ en otro problema de lubricación. Primeramente aproximamos p utilizando el espacio de elementos finitos de Lagrange V_h definido en (29) y θ utilizando elementos finitos P_0 . Es decir

$$p = \sum_{i=1}^{N+1} p_i \phi_i \quad \theta = \sum_{j=1}^N \delta_j \chi_j \quad (63)$$

donde las funciones ϕ_i son las descritas en (31) y las χ_j están definidas por

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{en } [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (64)$$

Aplicando dichas aproximaciones en (60), obtenemos dos matrices A y E definidas

$$A = (a_{ij}) \quad \text{con} \quad a_{ij} = \int_{\Omega} h^3 \frac{d\phi_j}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} dx \quad i, j = 1, \dots, N+1 \quad (65)$$

$$E = (e_{ij}) \quad \text{con} \quad e_{ij} = \int_{\Omega} h \chi_j \frac{d\phi_i}{dx} dx \quad i = 1, \dots, N+1; \quad j = 1, \dots, N \quad (66)$$

de modo que, completando E con la columna $e_{iN+1} = 0$, $i = 1, \dots, N$, se consigue el sistema no lineal de ecuaciones

$$AP - E\Theta = \begin{pmatrix} h(x_1)\theta_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{N+1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_{N+1} \end{pmatrix} \quad (67)$$

donde $p_{N+1} = 0$, $(p(2\pi) = 0)$ y $\theta_{N+1} = \theta_N$. El siguiente paso es transformar este sistema junto a la ecuación (61) en un problema de punto fijo. Para ello se introduce una nueva incógnita T cuyas componentes t_i son $t_i = p_i + \theta_i$, $i = 1, \dots, N+1$.

Teniendo en cuenta la relación existente entre P y Θ , dada en (61), es decir, que θ_i es igual a uno, si y sólo si p_i es estrictamente mayor que cero, es posible expresar P y Θ a partir de T de la siguiente forma

$$\begin{aligned} p_i &= \max(t_i - 1, 0), \quad i = 1, \dots, N+1 \\ \theta_i &= \min(t_i, 1), \quad i = 1, \dots, N; \quad \theta_{N+1} = \theta_N \end{aligned} \quad (68)$$

y sustituyendo estas expresiones en la ecuación (67) obtenemos

$$a_{ii} \max(t_i - 1, 0) - e_{ii} \min(t_i, 1) = \sum_{j \neq i} (a_{ij} (-\max(t_j - 1, 0) + e_{ij} \min(t_j, 1))) \quad (69)$$

Si denotamos el segundo término de esta igualdad por

$$c_i(T) = \sum_{j \neq i} (-a_{ij} \max(t_j - 1, 0) + e_{ij} \min(t_j, 1))$$

es decir

$$c_i(T) = \begin{cases} -e_{ii}t_i & \text{si } t < 1 \\ a_{ii}(t_i - 1) - e_{ii} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (70)$$

se puede definir un operador no lineal B cuyas componentes discretas en los nodos x_i son

$$B_i(T) = \begin{cases} c_i(T)/(-e_{ii}) & \text{si } 0 \leq c_i(T) \leq -e_{ii} \\ 1 + (c_i(T) + e_{ii})/a_{ii} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (71)$$

y (69) se reescribe como el siguiente problema de punto fijo

$$T = B(T) \quad (72)$$

cuya resolución se plantea de modo clásico mediante

$$\begin{aligned} T^0 &= 0 \\ T^{j+1} &= B(T^j) \end{aligned} \quad (73)$$

b) Método de características

Utilizando una fórmula de Green de integración por partes en (60) podemos escribir

$$\int_{\Omega} h^3 \frac{dp}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx = - \int_{\Omega} \frac{d}{dx} (\theta h) \varphi dx \quad \forall \varphi \in V \quad (74)$$

$$\theta = \theta_0 \quad \text{en } x = 0 \quad (75)$$

Con el fin de transformar ficticiamente este problema en uno evolutivo, introducimos una dependencia "artificial" del tiempo t de todas las funciones que intervienen en él. De este modo se definen

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(x, t) &= \varphi(x) \\ \bar{p}(x, t) &= p(x) \\ \bar{h}(x, t) &= h(x) \\ \bar{\theta}(x, t) &= \theta(x) \end{aligned} \quad (76)$$

Así, el segundo término de (74) se puede reescribir en términos de una derivada total a partir del campo de velocidades "artificial" $V(x) = 1$, ya que

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \quad (77)$$

y para el caso particular de funciones independientes del tiempo, como el que nos ocupa, se tiene

$$\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dx} \quad (78)$$

Podemos escribir entonces (74) en la forma

$$\int_{\Omega} \bar{h}^3 \frac{d\bar{p}}{dx} \frac{d\bar{\varphi}}{dx} dx + \int_{\Omega} \frac{D}{Dt}(\bar{\theta h}) \bar{\varphi} dx = 0 \quad \forall \varphi \in V \quad (79)$$

y tratar a continuación de discretizar la derivada total.

La trayectoria de una partícula que se desplaza de acuerdo con el campo de velocidades V y llega en el instante t a la posición x se denota por $\chi(x, t; \tau)$ y es solución del problema de valor final

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(\chi(x, t; \tau)) &= V(\chi(x, t; \tau)) \\ \chi(x, t; t) &= x \end{aligned} \quad (80)$$

Para aproximar la derivada total en (79) se propone un esquema descentrado siguiendo las trayectorias de las partículas

$$\frac{D\bar{\varphi}}{Dt}(x, t^{n+1}) \approx \frac{\bar{\varphi}^{n+1}(x) - \bar{\varphi}^n(\chi^n(x))}{\Delta t} \quad (81)$$

donde Δt representa un paso de tiempo $t^n = n\Delta t$ y $\chi^n(x) = \chi(x, t^{n+1}; t^n)$ denota la posición que en el instante t^n ocupaba una partícula que en el instante t^{n+1} ocupa la posición x que se mueve siguiendo la trayectoria del campo de velocidades definido por V . Además $\bar{\varphi}^{n+1}(x) = \bar{\varphi}(x, (n+1)\Delta t)$.

No obstante, como nuestro programa es estacionario, las funciones $\bar{\varphi}^{n+1}$ y $\bar{\varphi}^n$ son iguales e independientes de n , por tanto, el esquema anterior se puede adaptar en la forma

$$\frac{D\bar{\varphi}}{Dt}(x) \approx \frac{\varphi(x) - \varphi(\chi^k(x))}{k} \quad (82)$$

donde k juega el papel de paso de tiempo "artificial" y $\chi^k(x)$ denota la posición que en el instante $t - k$ ocupaba una partícula que en el instante t ocupa la posición x . De este modo, podemos aproximar nuestro problema por la siguiente familia de problemas estacionarios no lineales que dependen del parámetro k

$$\int_{\Omega} h^3 \frac{dp}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{1}{k} \int_{\Omega} \theta h \varphi dx = \frac{1}{k} \int_{\Omega} (\theta h) \circ \chi^k \varphi dx \quad \forall \varphi \in V \quad (83)$$

$$\theta \in H(p) \quad (84)$$

Para la resolución de (83)-(84) se propone un algoritmo de punto fijo que define la función p^{n+1} como solución del problema no lineal

$$\int_{\Omega} h^3 \frac{dp^{n+1}}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{1}{k} \int_{\Omega} \theta^{n+1} h \varphi dx = \frac{1}{k} \int_{\Omega} (\theta^n h) \circ \chi^k \varphi dx \quad \forall \varphi \in V \quad (85)$$

$$\theta^{n+1} \in H(p^{n+1}) \quad (86)$$

y que es similar a los procedimientos clásicos de hacer tender el tiempo al infinito hasta alcanzar el estado estacionario.

Utilizando los espacios de elementos finitos de tipo Lagrange P_1 definidos en (29) para aproximar p y θ se plantea el problema (85)-(86) discretizado en espacio

$$\int_{\Omega} h^3 \frac{dp_h^{n+1}}{dx} \frac{d\varphi_h}{dx} dx + \frac{1}{k} \int_{\Omega} \theta_h^{n+1} h \varphi_h dx = \frac{1}{k} \int_{\Omega} (\theta_h^n h) \circ \chi^k \varphi_h dx \quad \forall \varphi_h \in K_{0h} \quad (87)$$

$$\theta_h^{n+1}(b) \in H(p_h^{n+1}(b)) \quad \forall b \text{ nodo de } \tau_h \quad (88)$$

Así, en la etapa $n+1$ del algoritmo de características se calcula $(p_h^{n+1}, \theta_h^{n+1})$ a partir de (p_h^n, θ_h^n) . Para ello se considera el algoritmo de Bermúdez-Moreno¹⁰ que, en este caso, utilizará la regularización Yosida del operador de Heaviside de modo análogo a lo expuesto en el epígrafe anterior para el operador ∂I_K .

Se define $\beta^{n+1} \in H(p_h^{n+1}) - \omega p_h^{n+1}$, donde ω es un parámetro real positivo. De este modo, el problema (87)-(88) se escribe

$$\int_{\Omega} h^3 \frac{dp_h^{n+1}}{dx} \frac{d\varphi_h}{dx} dx + \frac{1}{k} \int_{\Omega} h(\omega p_h^{n+1} + \beta^{n+1}) \varphi_h dx = \frac{1}{k} \int_{\Omega} (\theta_h^n h) \circ \chi^k \varphi_h dx \quad \forall \varphi_h \in K_{0h} \quad (89)$$

$$\beta^{n+1} \in H(p_h^{n+1}(b)) - \omega p_h^{n+1}(b) \quad \forall b \text{ nodo de } \tau_h \quad (90)$$

Aplicando el Lema 1, se verifica que

$$\beta^{n+1} = H_{\lambda}^{\omega}(p_h^{n+1} + \lambda \beta^{n+1}) \quad (91)$$

y el algoritmo propuesto consiste en resolver en cada iteración el problema lineal

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h^3 \frac{d(p_h^{n+1})^j}{dx} \frac{d\varphi_h}{dx} dx + \frac{\omega}{k} \int_{\Omega} h((p_h^{n+1})^j) \varphi_h dx = \\ = \frac{1}{k} \int_{\Omega} (\theta_h^n h) \circ \chi^k \varphi_h dx - \frac{1}{k} \int_{\Omega} h(\beta^{n+1})^j \varphi_h dx \quad \forall \varphi_h \in K_{0h} \end{aligned} \quad (92)$$

actualizando la función β^{n+1} mediante la ecuación (91) en la forma

$$(\beta^{n+1})^{j+1} = H_{\lambda}^{\omega}((p_h^{n+1})^j + \lambda(\beta^{n+1})^j) \quad (93)$$

La convergencia de la sucesión $\{(\beta^{n+1})^j\}$ a β^{n+1} en $L^2(\Omega)$ y de $\{(p_h^{n+1})^j\}$ a p^{n+1} en $H^1(\Omega)$ está garantizada en Bermúdez-Moreno¹⁰ siempre que $\lambda\omega \leq \frac{1}{2}$. El esquema del algoritmo será:

- $(\beta^{n+1})^0$ conocido al principio de cada iteración de características, por ejemplo $(\beta^{n+1})^0 = \theta^n - \omega p^n$.
- $(p^{n+1})^j$ solución de la ecuación lineal (92) en la etapa j .
- Puesta al día del multiplicador β^{n+1} por (93).
- Test de convergencia de la sucesión $(p^{n+1})^j$.
- Test de convergencia de la sucesión p^n .

Existe la posibilidad, análoga al método de Alt¹, de aproximar p con elementos finitos P_1 y utilizar elementos finitos P_0 para aproximar β y, por tanto, θ . Esta alternativa del método de Bermúdez-Moreno¹⁰ lo llamaremos P_0 .

RESULTADOS NUMÉRICOS

Para la validación y comparación de los métodos numéricos descritos en el apartado anterior se considera un dominio unidimensional $\Omega = (0, 2\pi)$ y un caso extremo de excentricidad en la función espesor. Concretamente, en la ecuación (5) que define la función $h(x)$, se toma $\epsilon = 0,9$ y $C = 1$ (ver Figura 3).

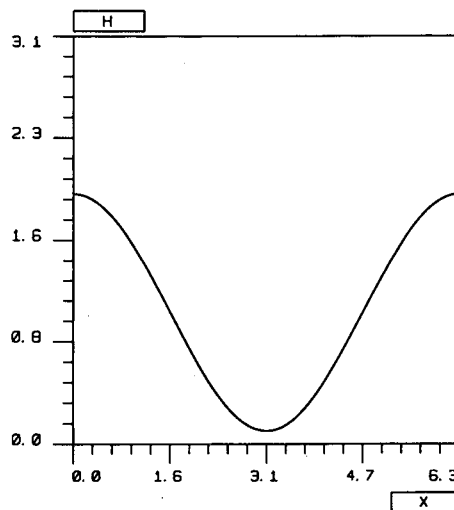


Figura 3. Función espesor $h(x) = 1 + 0,9 \cos x$

También con el fin de analizar la convergencia de los métodos a las soluciones de problemas con comportamientos extremos, se considera en todos los ejemplos un test de parada menor que 10^{-3} de error relativo, en norma infinito, para los algoritmos.

El primer ejemplo constituye la resolución de la inecuación variacional (42) con condición de contorno $p(0) = 0$ y $p(2\pi) = 0$, mediante el método de Gauss-Seidel

con proyección descrito en (43) y el algoritmo de Bermúdez-Moreno dado en (54)-(55). Las Figuras 4 y 5 muestran las presiones obtenidas respectivamente con cada método coincidiendo prácticamente en su totalidad. Puede observarse, no obstante, que el número de iteraciones efectuado por el método de Gauss-Seidel ha sido 463, mientras que con el método de Bermúdez-Moreno han sido necesarias solamente 12.

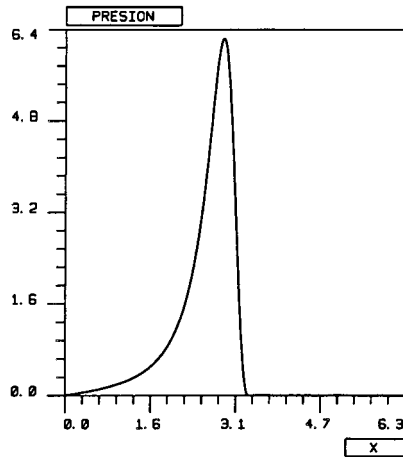


Figura 4. Presión de la inecuación variacional (Gauss-Seidel) con proyección

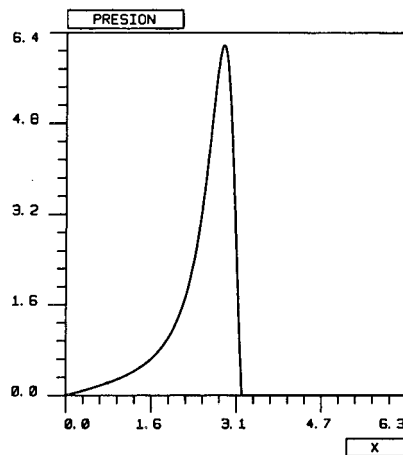


Figura 5. Presión de la inecuación variacional (Bermúdez-Moreno)

El segundo ejemplo trata de comparar las diferentes curvas de presión que proporcionan los dos modelos matemáticos de cavitación analizados. En la Figura 6 se representan, por una parte, la solución del modelo de Reynolds de inecuación variacional y, por otra parte, varias soluciones exactas del modelo de Elrod-Adams

correspondientes a diferentes valores de la concentración de alimentación θ_0 . En efecto, en este caso unidimensional se puede obtener la solución exacta del modelo de Elrod-Adams integrando la ecuación de Reynolds, teniendo en cuenta la existencia de una zona de cavitación

$$[x_c, 2\pi] \subset [0, 2\pi]$$

que permite calcular x_c a partir de la identidad:

$$\theta h = cte \quad \text{en} \quad [x_c, 2\pi]$$

ya que si se impone $\theta = \theta_0$, en $x = 2\pi$ se tiene

$$x_c = \arccos \left(\frac{\theta_0(1 + \epsilon) - 1}{\epsilon} \right) \in [\pi, 2\pi] \tag{94}$$

A continuación, integrando la ecuación de Reynolds en la zona lubricada, se obtiene

$$p(x) = \int_{x_c}^x \frac{1}{h^2(s)} ds - \theta_0(1 + \epsilon) \int_{x_c}^x \frac{1}{h^3(s)} ds \quad \text{en} \quad [x_a, x_c] \tag{95}$$

$$p(x) = 0 \quad \text{en} \quad [0, x_a] \tag{96}$$

siendo x_a el punto de corte en $[0, \pi]$ de $p(x)$ y el eje OX . La frontera libre está constituida por los puntos x_a y x_c .

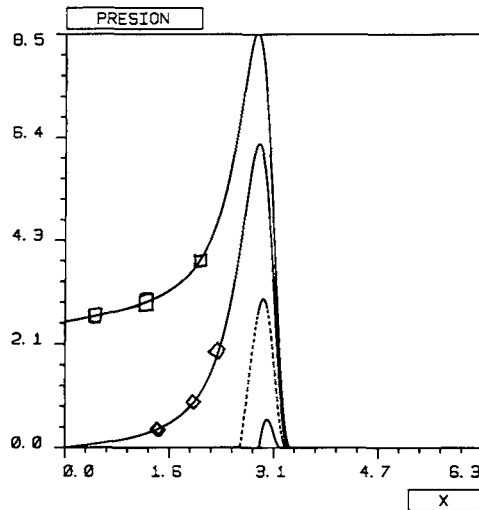


Figura 6. Modelos de cavitación Reynolds y Elrod-Adams: -- Elrod-Adams con $\theta_0 = 0,055$; ... Elrod-Adams con $\theta_0 = 0,06$; \diamond Reynolds; \square Elrod-Adams con $\theta_0 = 0,068$

De este modo, mediante fórmulas de integración gaussianas de orden elevado se obtiene la expresión discretizada de p sobre los puntos de la malla τ_h para diferentes valores de ϵ y θ_0 . En la Figura 6 se puede observar que las soluciones del modelo de Elrod-Adams son subsoluciones del modelo de inecuación variacional tal y como se refleja en el Teorema 2, cuando la concentración de alimentación θ_0 es inferior al valor θ_0^* determinado en (23). Asimismo, en esta Figura se ratifica que cuando $\theta_0 = 0,068$, y por lo tanto, mayor que $\theta_0^* = 0,06$, no se garantiza que la solución del modelo de Elrod-Adams esté en $H_0^1((0, 2\pi))$.

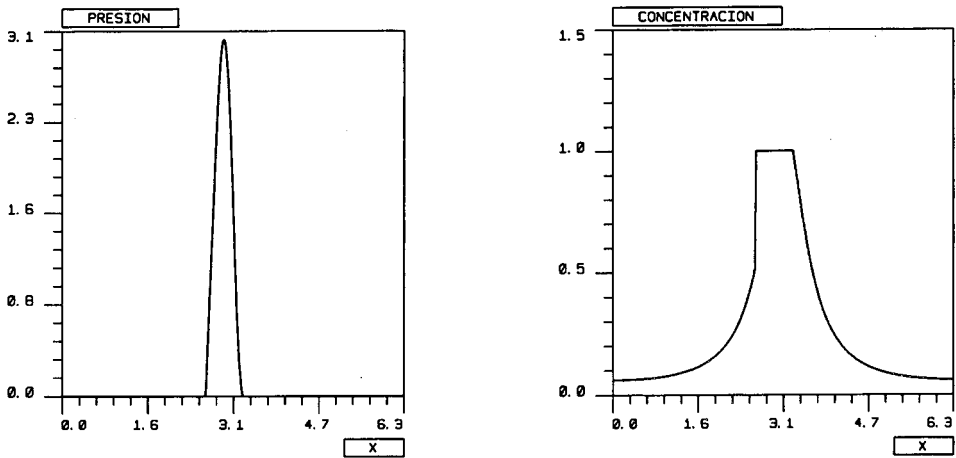


Figura 7. Método de Alt: presión y concentración ($\theta_0 = 0,06$)

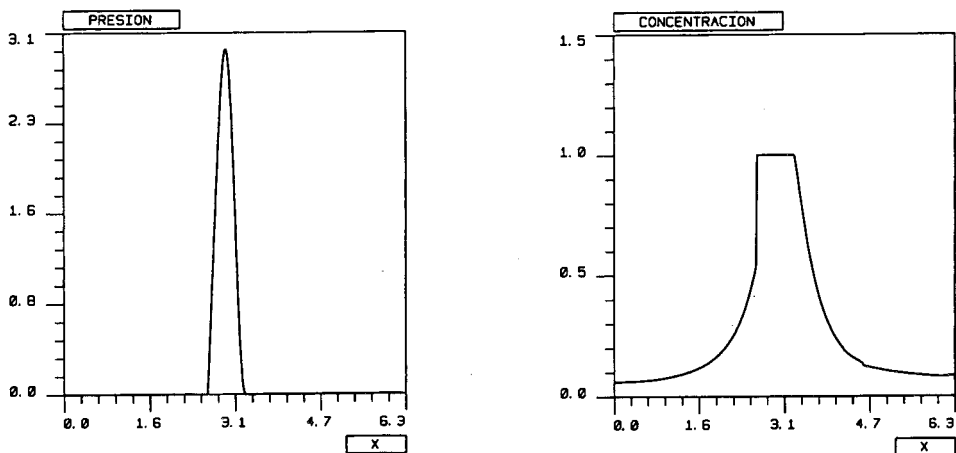


Figura 8. Características y $B - M P_1$: presión y concentración ($\theta_0 = 0,06$)

El último bloque de figuras ilustra la resolución numérica del modelo de Elrod-Adams (60)-(62) con $\theta_0 = 0,06$ mediante las diferentes estrategias planteadas previamente. Las Figuras 7, 8 y 9 representan las presiones y concentraciones utilizando método de Alt (73) (Figura 7), método de características y Bermúdez-Moreno (92)-(93) con discretización de elementos finitos P_1 para p y θ (Figura 8) y este mismo método con elementos finitos P_0 para θ (Figura 9). El número de iteraciones efectuadas con cada método ha sido: 800, 587 y 456, respectivamente. La solución exacta para este modelo con $\theta_0 = 0,06$ aparece en la Figura 10.

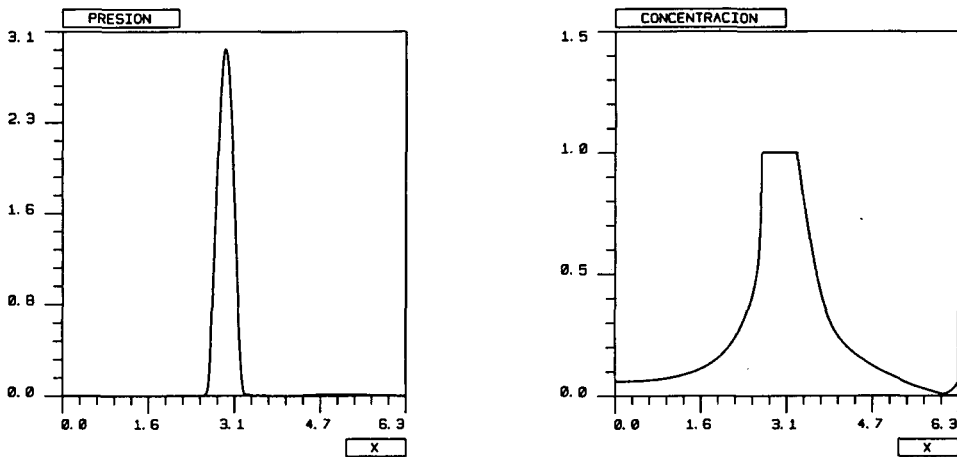


Figura 9. Características y $B - M P_0$: presión y concentración ($\theta_0 = 0,06$)

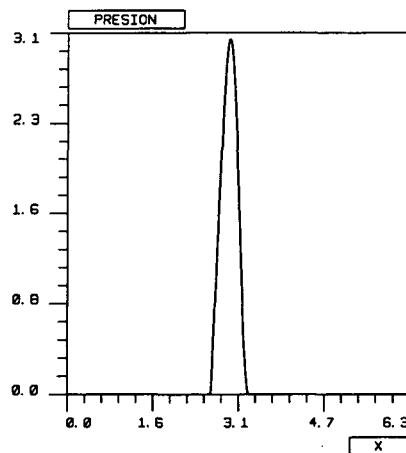


Figura 10. Solución exacta ($\theta_0 = 0,06$)

CONCLUSIONES

En este trabajo se han planteado y resuelto numéricamente los dos modelos matemáticos de cavitación más importantes que rigen procesos de lubricación de dispositivos eje-cojinete: el modelo de inecuación variacional de Reynolds y el de Elrod-Adams. En primer lugar, se ha observado la concordancia entre las aproximaciones obtenidas con los distintos métodos numéricos para diferentes valores de los parámetros de funcionamiento del dispositivo. Por otro lado, los resultados de los tests numéricos han permitido ratificar las propiedades teóricas previamente conocidas de las soluciones de ambos modelos.

Más concretamente, por una parte, en el modelo de inecuación variacional se comparan los resultados obtenidos con el método clásico de Gauss-Seidel con proyección y el algoritmo de Bermúdez-Moreno. Por otra parte, para el modelo de Elrod-Adams se compara una versión unidimensional, ideada por los autores, del método de Alt con el algoritmo de Bermúdez-Moreno combinado con características. Para ello se utiliza como referencia una discretización de la solución exacta. La conclusión más destacable, que se extrae de la contrastación de los diferentes métodos numéricos de resolución, es que alguno de estos métodos, con una complejidad algorítmica superior, disminuye considerablemente el coste computacional en relación con los otros.

Finalmente, es interesante indicar que los métodos admiten una extensión natural al problema bidimensional que ya ha sido realizada para cada método por separado en algunas de las referencias bibliográficas, pero sin que exista en la literatura un análisis comparativo del tipo que aquí se presenta. La técnica de comparación con la solución analítica creemos que admite una extensión al caso de dispositivos con rugosidades lo que permitiría extender el análisis teórico-numérico a este contexto.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo fue parcialmente financiado por D.G.I.C.Y.T. (PB. 92-0323) y Xunta de Galicia (XUGA-32205B93).

REFERENCIAS

1. H.W. Alt, "Numerical Solution of Steady-State Porous Flow Free Boundary Problems", *Num. Math.*, Vol. **36**, pp. 73-98, (1980).
2. S. Alvarez, "*Problemas de frontera libre en teoría de lubricación*", Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, (1986).
3. G. Bayada, "Variational Formulation and Associated Algorithm for the Starved Finite Journal Bearing", *J. of Lub. Tech.*, Vol. **105**, pp. 453-457, (1983).
4. G. Bayada y M. Chambat, "The Transition between the Stokes Equation and the Reynolds Equation: A Mathematical Proof", *Appl. Math. Opt.*, Vol. **14**, pp. 73-93, (1986).
5. G. Bayada y M. Chambat, "Nonlinear Variational Formulation for a Cavitation Problem in Lubrication", *J. of Math. Anal. and Appl.*, Vol. **90**, pp. 286-298, (1982).

6. G. Bayada y M. Chambat, "Sur quelques modélisations de la zone de cavitation en lubrification hydrodynamique", *J. of Theor. and Appl. Mech.*, Vol. 5, 5, pp. 703-729, (1986).
7. G. Bayada, M. Chambat y M. El Alaoui, "Variational Formulations and Finite Element Algorithms for Cavitation Problems", *J. of Trib.*, Vol. 112, pp. 398-403, (1990).
8. G. Bayada, J. Durany y C. Vázquez, "Existence of a Solution for a Lubrication Problem in Elastic Journal-Bearing with Thin Bearing", *Math. Meth. in Appl. Sci.*, Vol. 18, pp. 255-266, (1995).
9. A. Bermúdez y J. Durany, "Numerical Solution of Cavitation Problems in Lubrication", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 75, pp. 455-466, (1989).
10. A. Bermúdez y C. Moreno, "Duality Methods for Solving Variational Inequalities", *Comp. Math. with Appls.*, Vol. 7, pp. 43-58, (1981).
11. A. Cameron, "*Basic Lubrication Theory*", Ellis Horwood Series, (1981).
12. J. Carrillo y J.A. Infante, "Numerical Approach of a Lubrication Problem with Cavitation", en: *Proceedings of Mathematical Modelling on Lubrication*, Bayada, Chambat, Durany (Eds.), Universidad de Vigo, pp. 19-24, (1991).
13. J. Carrillo, A. Martínez, "A Numerical Method for an Evolution Problem with Cavitation", en: *Proceedings of Mathematical Modelling on Lubrication*, Bayada, Chambat, Durany (Eds.), Universidad de Vigo, pp. 25-30, (1991).
14. G. Cimatti, "How the Reynolds Equation is Related to the Stokes Equation", *Appl. Math. Opt.*, Vol. 10, pp. 223-248, (1983).
15. J. Dowson y C.M. Taylor, "Cavitation in Bearings", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 1, pp. 35-66, (1979).
16. J. Durany, G. García y C. Vázquez, "Finite Element Approximation of Lubrication Problems with Cavitation in Elastic Journal Bearings", en: *Finite elements in fluids*, Morgan, Oñate, Periaux, Peraire, Zienkiewicz, Pineridge Press, pp. 268-277, (1993).
17. J. Durany y C. Vázquez, "Análisis y resolución numérica de flujos cavitacionales piezoviscosos en lubricación hidrodinámica", *Rev. Int. Mét. Num. Cál. y Dis. en Ing.*, Vol. 9, 2, pp. 141-160, (1993).
18. M. El Alaoui y G. Bayada, "Une méthode de type caractéristiques pour la résolution d'un problème de lubrification hydrodynamique", *Math. Modell. and Num. Anal.*, Vol. 25, 4, pp. 395-423, (1991).
19. C. Elrod, "A Derivation of the Basic Equation for Hydrodynamic Lubrication with a Fluid Having Constant Properties", *Q. of Appl. Math.*, Vol. 17, 1, pp. 349-359, (1959).
20. D. Kinderlehrer y G. Stampacchia, "*An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*", Academic Press, (1980).
21. O. Reynolds, "On the Theory of Lubrication and Its Applications to M. Beauchamp Tower's Experiments", *Phil. Trans. Roy. Soc. London A117*, pp. 157-234, (1886).
22. M.D. Savage, "Cavitation in Lubrication. Part: 1 On Boundary Conditions and Cavity-Fluid Interfaces", *J. of Fluid Mech.*, Vol. 80, 4, pp. 743-755, (1977).
23. C. Vázquez, "*Análisis matemático y resolución numérica de problemas de lubricación con cavitación*", Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela, (1992).
24. C. Vázquez, "Existence and Uniqueness of Solution for a Lubrication Problem with Cavitation in a Journal Bearing with Axial Supply", *Adv. in Math. Sci. and Appl.*, Vol. 4, 2, pp. 313-331, (1994).