

# **Edificios con aislamiento de base no lineal**

N. Molinares  
A.H. Barbat

**Monografías de Ingeniería Sísmica**

Editor A. H. Barbat

**Edificios con aislamiento  
de base no lineal**

N. Molinares  
A.H. Barbat

**Monografía CIMNE IS-5 1994**

CENTRO INTERNACIONAL DE METODOS NUMERICOS EN INGENIERIA  
Edificio C1, Campus Norte UPC  
C/ Gran Capitán, s/n  
08034 Barcelona, España.

MONOGRAFIAS DE INGENIERIA SISMICA  
Editor A.H. Barbat

ISSN: 1134-3249

EDIFICIOS CON AISLAMIENTO DE BASE NO LINEAL  
Monografía CIMNE IS-5  
© Los Autores

ISBN: 84-87867-41-3  
Depósito Legal: B-35888-94

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

# ÍNDICE

## 1. Introducción

1.1. Aspectos generales	1
1.2. Aspectos históricos	5
1.3. Aspectos desarrollados en la monografía	6
Referencias	7

## 2. Teoría lineal del aislamiento sísmico

2.1. Ecuaciones del movimiento	9
2.2. Problema de autovalores	10
2.3. Modelo con amortiguamiento	14
2.4. Consideraciones prácticas	19
2.5. Respuestas frente a movimientos armónicos del terreno	20
2.5.1. Modelo sin aislamiento de base	20
2.5.2. Modelo con aislamiento de base	23
2.5.3. Orden de magnitud de los coeficientes de amplificación	25
Referencias	28

## 3. Formulación de sistemas no lineales de aislamiento sísmico

3.1. Descripción de diferentes sistemas de aislamiento existentes	31
3.2. Ecuaciones del movimiento	35
3.2.1. Ecuaciones generales	35
3.2.2. Sistema de fricción pura	36
3.2.3. Sistema de goma laminada	37
3.2.4. Sistema flexible-friccionante	38
3.2.5. Sistema electrité de France	39
3.2.6. Sistema neozelandés	39
3.2.7. Sistema de deslizamiento flexible-friccionante	40
3.3. Modelización del sistema de aislamiento	42
3.3.1. Introducción	42

3.3.2. Fuerza restitutiva histerética	42
3.3.3. Fuerza restitutiva de fricción	43
3.3.4. Modelo elastoplástico	44
Referencias	45
<b>4. Procedimientos de Solución</b>	
4.1. Introducción	49
4.2. Método de Newmark	50
4.2.1. Métodos de integración paso a paso	50
4.2.2. Ecuaciones de diferencias finitas	50
4.2.3. Análisis lineal	52
4.2.4. Análisis no lineal	53
4.3. Método de Runge-Kutta	56
4.3.1. Descripción del método	56
4.3.2. Método de Runge-Kutta de cuarto orden	57
4.4. Cálculo de la respuesta del sistema	58
4.5. Procedimiento de cálculo	60
Referencias	61
<b>5. Respuesta de modelos con sistemas de aislamiento sísmico no lineal</b>	
5.1. Introducción	65
5.2. Descripción del modelo	66
5.3. Definición de la excitación	67
5.4. Definición de los sistemas de aislamiento	69
5.5. Rigidez de la base	72
5.6. Historia de la respuesta en el tiempo	74
5.7. Comparación entre modelos con aislamiento de base y modelos de base fija	77
5.8. Comportamiento histerético del sistema de aislamiento	79
5.9. Comparación entre diferentes sistemas de aislamiento	81
5.9.1. Introducción	81
5.9.2. Respuestas frente al terremoto de El centro	82
5.9.3. Respuestas frente al terremoto de Ciudad de México	87
5.10. Respuestas máximas por piso	92
5.11. Respuestas frente a excitaciones con diferente contenido frecuencial	94
Referencias	97

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 ASPECTOS GENERALES

Un gran porcentaje de la población mundial vive en zonas de riesgo sísmico, en las cuales los movimientos del terreno son los causantes de pérdidas de vida y de grandes pérdidas materiales. Por este motivo se han desarrollado a través de los tiempos procedimientos de diseño de estructuras orientados a mitigar sus efectos. El aislamiento de base es uno de estos procedimientos.

El objetivo fundamental del diseño de estructuras frente a acciones sísmicas es el de mantener la respuesta dentro de unos límites marcados por condiciones de seguridad, servicio y confort humano. Dicho objetivo se puede alcanzar aplicando los conceptos básicos del diseño antisísmico convencional, los cuales parten de la idea de que el movimiento del terreno se transmite a la estructura a través de su base fija. En todas las normativas de diseño sísmico del mundo se dan ciertos detalles de diseño tradicional que tienen el propósito de disipar una parte de la energía inducida por el terremoto, a fin de evitar aceleraciones y corrimientos excesivos en la estructura. Dicha disipación suele conseguirse mediante la plastificación de algunos elementos estructurales que, en el caso de edificios, son la entrega de las vigas a las columnas. Las medidas antisísmicas tradicionales fundamentan el adecuado comportamiento de una estructura en los siguientes principios generales:<sup>(1)</sup>

- Peso y rigidez de la estructura distribuidos uniforme y simétricamente.
- Uso de estructuras ligeras y con el centro de gravedad lo más bajo posible.
- Elementos estructurales constituidos por materiales flexibles y de adecuada resistencia, diseñados de tal forma que aseguren la máxima disipación de energía.
- Elementos estructurales vinculados entre sí de manera que formen contornos cerrados tanto en planta como en elevación.

- Cimentaciones profundas, apoyadas sobre capas de terreno uniformes y firmes.

De esta manera se consigue un incremento de la capacidad de resistencia que permite que las estructuras sometidas al efecto del movimiento sísmico no presenten daños importantes. Sin embargo se presentan los siguientes inconvenientes:

- Se obtienen estructuras más rígidas y de mayor peso que en el caso estático y por lo tanto de mayor coste.
- Las incertidumbres en las cargas, que pueden tener otras características que las de diseño, pueden provocar daños importantes e incluso el colapso de la estructura.

Los registros típicos de aceleración sísmica tienen períodos predominantes en el rango (0.1 s – 1 s) pero en la mayoría de los casos los máximos valores espectrales corresponden al rango de períodos (0.2 s – 0.6 s). Consecuentemente las estructuras con períodos naturales entre (0.1 s – 1 s) son extremadamente vulnerables a las acciones sísmicas. Por este motivo, como una alternativa al diseño sísmico tradicional, se desarrollaron los sistemas de aislamiento de base, los cuales consisten esencialmente en la instalación de mecanismos que desacoplan parcialmente la estructura del terreno para disminuir de esta manera los daños en ella o en su contenido. Este desacoplamiento se lleva a cabo colocando entre la base de la estructura y su cimentación aparatos de apoyo que incrementen la flexibilidad del sistema global estructura-base y que produzca, al mismo tiempo, un amortiguamiento apropiado. El mencionado incremento de flexibilidad hace que el período fundamental de la estructura se incremente más allá del período predominante del terremoto, evitándose de esta manera la resonancia o la vibración en un rango de frecuencias cercanas a la resonancia. Aplicar esta idea requiere medidas que permitan que se produzca un desplazamiento horizontal de la estructura que pueda variar entre 5 cm y 40 cm y que, en el caso de terremotos fuertes puede llegar hasta el doble de este valor.<sup>(2)</sup> El papel del amortiguamiento debido al aparato de apoyo es muy importante en la reducción de los valores del desplazamiento de la base, puesto que los dispositivos amortiguadores consiguen una importante disipación de la energía inducida por el terremoto. Todos estos aspectos hacen que muchos de los problemas planteados por el diseño tradicional sean solucionados utilizando el aislamiento de base, ya que éste limita las deformaciones estructurales y las demandas de ductilidad. Consecuentemente se presentan niveles de daño muy bajos tanto en elementos estructurales como en los no estructurales. En este sentido el aislamiento de base proporciona un tipo de diseño antisísmico que protege las estructuras, limitando la acción de los terremotos sin incrementar su capacidad de resistencia.

El aislamiento de base normalmente reduce el coste que se genera al proveer a la estructura del nivel requerido de resistencia sísmica. En la referencia (2) se afirma que en Nueva Zelanda las reducciones son del 5% del coste estructural. El motivo de esta reducción es, tal como se ha dicho anteriormente, la

disminución de las cargas sísmicas en la estructura, que produce la mencionada limitación de la demanda de ductilidad y que tiene también como consecuencia la simplificación del diseño de los elementos de resistencia. Además, al ser muy pequeñas las deformaciones estructurales, son menos complicados los detalles especiales de acabados y fachadas.

La principal desventaja de los sistemas de aislamiento de base consiste en que su capacidad de reducir la respuesta estructural es limitada y depende del contenido frecuencial de la excitación. Este último aspecto requiere una evaluación previa muy fiable de las características de los futuros terremotos en la región. Es obvio que si el período predominante de algún terremoto en la zona es del mismo orden de magnitud que el período fundamental del sistema estructura-aislamiento de base, la presencia de este último incrementa la respuesta estructural.

En la figura 1.1 se ilustra esquemáticamente el concepto de aislamiento sísmico. El edificio de la figura 1.1(a) tiene un sistema de protección convencional mientras que el de la figura 1.1(b) presenta un sistema de aislamiento de base.

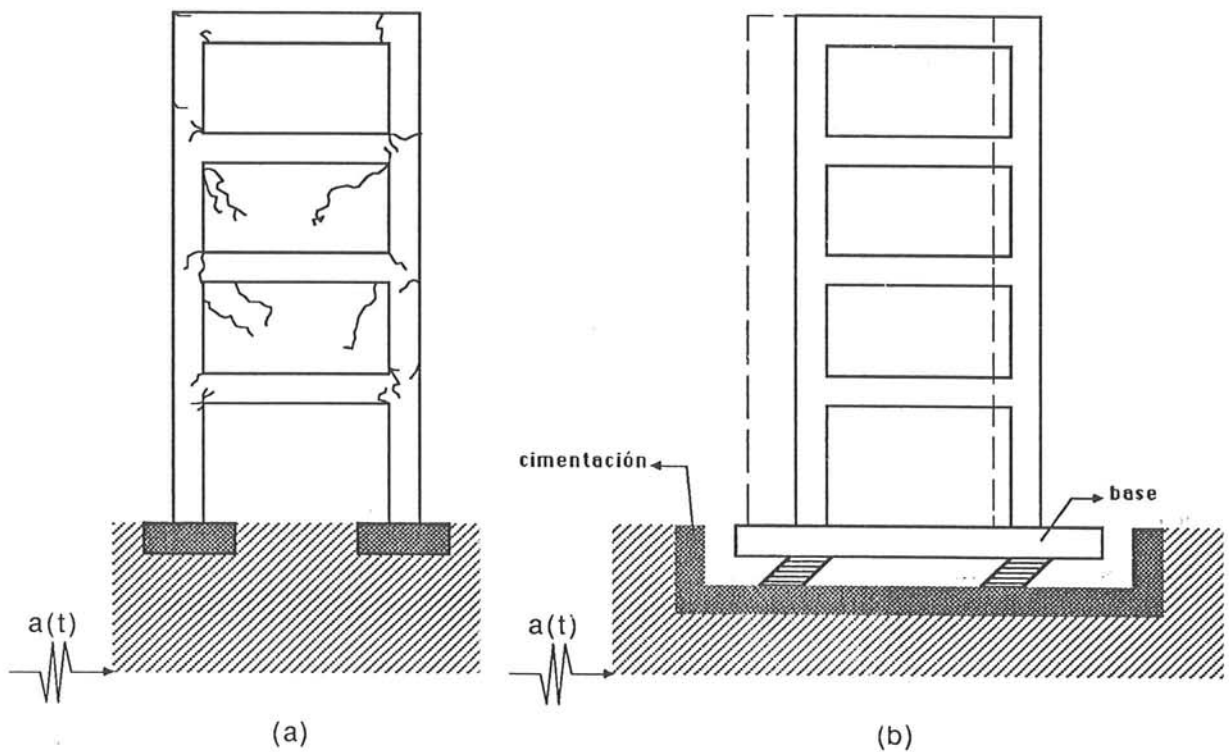


Figura 1.1 (a) Edificio convencional. (b) Edificio con aislamiento sísmico.

En la figura 1.1(a) puede verse como al actuar el sismo sobre la estructura convencional se producen deformaciones y fisuras considerables en la estructura.



Por el contrario, el efecto del sismo en la estructura aislada de la figura 1.1(b) disminuye y el mayor desplazamiento ocurre en el sistema de aislamiento. La estructura sufre pequeñas deformaciones, moviéndose prácticamente como un sólido rígido. La diferencia básica entre los dos casos es que la disipación de energía en la estructura convencional se obtiene a consecuencia de los daños estructurales mientras que en la estructura aislada es proveída por el comportamiento histerético, friccional o viscoso del aislamiento.

En la figura 1.2 se muestra otra comparación entre un edificio convencional y uno con aislamiento de base. La comparación se realiza variando el período propio de un modelo de un solo grado de libertad, sometido a la acción de la componente N-S del terremoto de El Centro (1940). Como parámetro de evaluación se utiliza la relación entre la máxima fuerza de cortante generada por el terremoto en la estructura y el peso de dicha estructura. Las gráficas de la figura 1.2 corresponden a tres diferentes escalas del terremoto de El Centro; se observa como el sistema de aislamiento de base reduce las fuerzas de cortante en la estructura para todo el rango de períodos analizados.

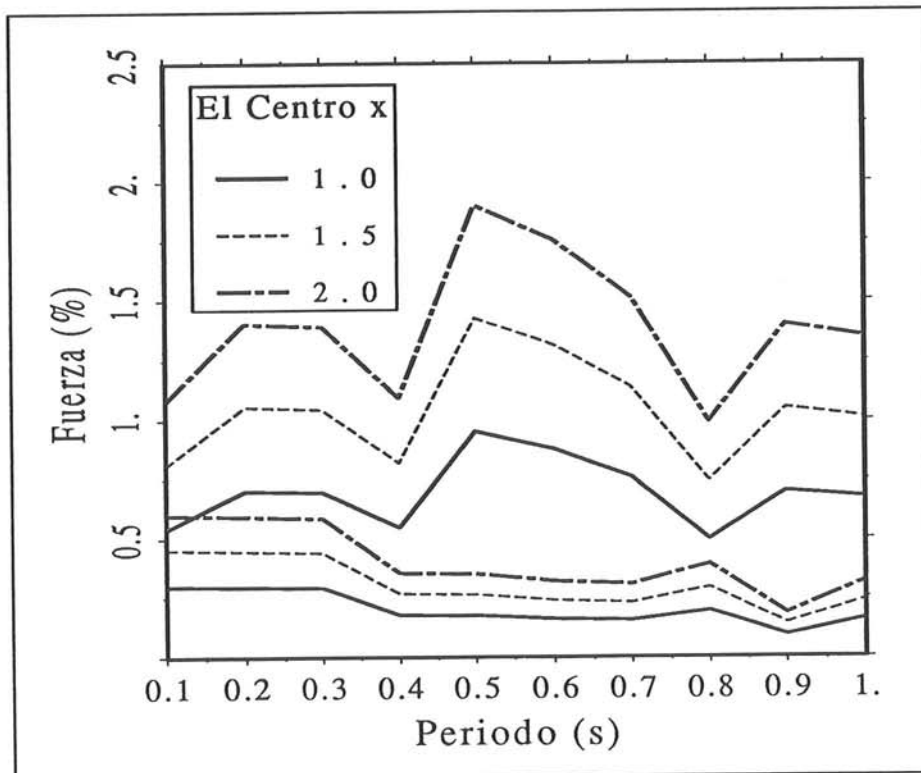


Figura 1.2 Fuerza de cortante máxima.

## 1.2 ASPECTOS HISTÓRICOS

El concepto de aislamiento sísmico de estructuras no es nuevo. Kirikov<sup>(1)</sup> describe varios procedimientos utilizados en la antigüedad por los sumerios, griegos, romanos, bizantinos, etc, para proteger sus estructuras del efecto de los terremotos. Algunos de éstos se basan en el aumento de la ductilidad de las rígidas construcciones de mampostería de piedra o ladrillo de aquellos tiempos, mediante la utilización, por ejemplo de morteros con arcilla y betún. Los muros de piedra, muchas veces realizados sin mortero, se ductilizaban fijando las piedras entre sí mediante chapas metálicas selladas con plomo. De esta manera, se lograba que las construcciones no se comportasen como sólidos completamente rígidos, sino que absorbieran parte de la energía de los sismos. A veces, la mampostería dúctil se colocaba solamente en la parte inferior de los muros, constituyendo un verdadero aislamiento de la construcción.

Un cierto tipo de aislamiento de base desarrollado en Knossos (Creta) 2000 años a.J.C. consistía en colocar una capa de arena fina debajo de las cimentaciones de la construcción, a fin de conseguir una especie de apoyo deslizante. Otro procedimiento similar se ha empleado en Chokrak, en donde se colocó la cimentación del templo sobre una capa gruesa de arcilla y de otras dos capas, una de piedras de mediano tamaño y la segunda de piedras pequeñas [ver figura 1.3(a)]. Tal vez el sistema más parecido a los que se utilizan en la actualidad se utilizó en los siglos VI-IV a.J.C. en el templo de Ponticapéa que se realizó con barras de madera colocadas entre los muros y la cimentación [ver figura 1.3(b)].

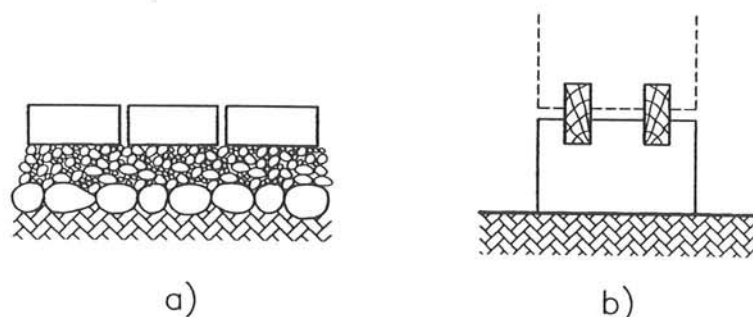


Figura 1.3 Sistemas de aislamiento utilizados en la antigüedad (a)Templo en Chokrak, (b)Templo de Ponticapéa.

Todas estas medidas, aplicadas desde la antigüedad, dieron paso al desarrollo de los procedimientos de aislamientos de base actuales, como el compuesto por rodillos metálicos que sostienen un edificio impidiendo la transmisión de energía<sup>(3-8)</sup> o los sistemas de elastómeros utilizados por primera vez en 1969 en Scopje

(Yugoslavia). A partir de este momento, el estudio de los sistemas de aislamiento estuvieron enfocados a los de elastómeros, cabiendo resaltar la aparición del aparato de apoyo de neopreno zunchado,<sup>(9)</sup> el cual es el más difundido en la actualidad.

Los desarrollos modernos han seguido prácticamente las mismas medidas de protección antisísmica que en la antigüedad, añadiéndole a éstas la experiencia alcanzada con los años y el desarrollo de la ciencia.

La utilización de sistemas de aislamiento permite cumplir con los requisitos de las normas de diseño sísmico de estructuras sin un sustancial aumento de los costes. Por este motivo, han sido estudiados en muchas instituciones de distintos países del mundo, en las cuales se han obtenido resultados muy importantes. Finalmente, hay que destacar el gran número de edificios con aislamiento de base realizados en el mundo desde el año 1982, tal como puede verse en las listas que se incluyen en las referencias (2) y (10).

### 1.3 ASPECTOS DESARROLLADOS EN LA MONOGRAFÍA

Una adecuada simulación del efecto de un sistema de aislamiento de base con comportamiento no lineal requiere algoritmos capaces de analizar tanto los sistemas histeréticos como los friccionales. Algunos de los aspectos esenciales que deben considerarse a fin de obtener modelos constitutivos que describan el comportamiento de los aislamientos de base son<sup>(11)</sup>:

- La representación de la rigidez a cortante en los apoyos histeréticos antes y después de que se produzca la fluencia.
- El desarrollo de un modelo matemático para los apoyos histeréticos que describa la pérdida de rigidez a cortante en función del incremento de esfuerzo axial (efecto  $P - \Delta$ ). Aunque la rigidez y el amortiguamiento de los sistemas de apoyo es dependiente de la frecuencia de la vibración, esta dependencia es poco importante en el rango de frecuencias que pueden producirse en dichos sistemas.<sup>(12)</sup>
- La variación de los coeficientes de fricción en función de la velocidad y de la presión en los apoyos de fricción.

Desde hace dos décadas se ha efectuado un gran número de estudios en los que se han considerado varios sistemas de aislamiento de base. Sin embargo existen pocos análisis comparativos entre dichos sistemas, cuyas ventajas y limitaciones no son totalmente evaluadas. Por lo tanto existe la necesidad de un estudio de este tipo, que aporte las ventajas y desventajas de varios sistemas. En esta monografía se comparan estructuras aisladas por medio de los principales sistemas existentes con estructuras convencionales. Un estudio comparativo de este tipo requiere la definición de unos criterios de evaluación del comportamiento

de los diferentes sistemas. Obviamente no existe un único criterio de evaluación y en la literatura se han propuesto diferentes criterios que examinan las distintas facetas del problema. Hadjan y Tsen<sup>(13)</sup> han propuesto once criterios de evaluación del comportamiento deseado, relacionados con la seguridad y la fiabilidad de la estructura con aislamiento. Los criterios utilizados en esta monografía para evaluar el comportamiento de los sistemas de aislamiento son:

- Desplazamiento del punto más alto de la estructura con respecto a la base.
- Desplazamiento de la base con respecto a la cimentación.
- Aceleración absoluta del punto más alto de la estructura.
- Desplazamiento relativo máximo entre cada uno de los pisos de la estructura.
- Aceleración absoluta máxima de cada uno de los pisos de la estructura.

El esquema numérico utilizado en la monografía para la solución de las ecuaciones del movimiento de una estructura con aislamiento antisísmico considera un modelo con comportamiento lineal para la estructura y uno no lineal para el sistema de aislamiento de base. El tipo de no linealidad del aislamiento se formula mediante ecuaciones diferenciales, capaces de describir tanto sistemas histeréticos como friccionales.

En el capítulo 2 se desarrolla la teoría lineal de los sistemas de aislamiento sísmico, explicándose sus fundamentos y analizándose su formulación, ya que dicha teoría es importante para entender el comportamiento de los edificios con sistema de aislamiento de base no lineal. En el capítulo 3 se describen los sistemas de aislamiento considerados en esta monografía y su comportamiento no lineal. Se formulan las ecuaciones del movimiento que definen dicho comportamiento, las cuales son el punto de partida de las simulaciones que se realizan. Dichas ecuaciones se solucionan mediante un procedimiento de cálculo que se desarrolla en el capítulo 4. Finalmente, en el capítulo 5, se incluyen resultados que comparan el comportamiento de estructuras de base fija con el de las mismas estructuras pero con diferentes sistemas de aislamiento de base.

## REFERENCIAS

1. KIRIKOV B., *History of Earthquake Resistant Construction*, Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja, Madrid, 1992.
2. SKINNER R. I., ROBINSON W. H. y McVERRY G. H., *An Introduction to Seismic Isolation*, Jhon Wiley & Sons, Chichester, 1993.
3. RYUITI O., "Experiment on earthquake construction using roller type damper", *Journal of Architectural Institute of Japan*, **32**, 1941.
4. RYUITI O., "A note on the seismoffree foundation", *Journal of Architectural Institute of Japan*, **42**, 1951.
5. RYUITI O., "A study of the seismofree building structures", *Journal of Architec-*

- tural Institute of Japan*, 43, 1952.
6. RYUITSU O., "Practical study of seismofree foundation", *Journal of Architectural Institute of Japan*, 47, 1956.
  7. CASPE M. S., "Earthquake isolation of multy - story concrete structures", *Journal of the American Concrete Institute*, 11, 923-933, 1970.
  8. CASPE M. S., "Base isolation from earthquake hazards, an idea whose time come!", *Eigth World Conference on Earthquake Engineering*, San Francisco, 5, 1031-1038, 1984.
  9. FAN F-G, AHMADI G., y TADJBAKHSI I. G., *Base Isolation of a Multi - Story Building Under a Harmonic Ground Motion. A comparison of Performances of Various Systems*, Technical Report NCEER-88-0010, National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York, Buffalo, Mayo 1988.
  10. JANE L. A. y BARBAT, A. H., *Estructuras de edificación con aislamiento antisísmico*, Monografía No.13, Centro Internacional de métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, 1992.
  11. KELLY J. M., "Aseismic Base Isolation.: Review and Bibliography", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 5(3), 202-216, 1986.
  12. NAGARAJIAH S., REINHORN A. M. y CONSTANTINOU M. C., 3D-BASIS - Nonlinear Dynamic Analysis of Three - Dimensional Base Isolated Structures: Part II, National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo, Technical Report NCEER-91-0005, February 1991.
  13. SU L., AHMADI G. y TADJBAKHSI I. G., "A comparative study of performances of various base isolation systems, Part I: Shear beam structures", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 18, 11-32, 1989.
  14. HADJIAN A. H. y TSENG W. S., "A comparative evaluation of passive seismic isolation schemes, in base isolation and passive energy dissipation", (Editor Rojahn C.), ATC-17, *National Bureau of Standards*, 291-304, 1986.
  15. CANET J. M. y BARBAT A. H., *Estructuras Sometidas a Acciones Sísmicas - Cálculo por ordenador*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, 1988.
  16. BARBAT A. H., MOLINARES N. y CANAS J. A., "Simulación de Sistemas de Apoyo Antisísmico con Comportamiento No Lineal", *Segundo Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, 1, 359-368, La Coruña, 1993.
  17. NAGARAJIAH S., REINHORN A. M. y CONSTANTINOU M. C., Nonlinear Dynamic Analysis of Three - Dimensional Base Isolated Structures (3D-BASIS), National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo, Technical Report NCEER-89-0019, August 1989.
  18. KWOK K., "Damping increase in building with tuned mass dampers", *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, 110(11), 1645-1649, 1984.

## CAPÍTULO 2

### TEORÍA LINEAL DEL AISLAMIENTO SÍSMICO

#### 2.1 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Como un paso previo al estudio del comportamiento no lineal de los sistemas de aislamiento de base es importante conocer los fundamentos y alcances de la teoría lineal de éstos, por lo que en este capítulo se efectúa un resumen de dicha teoría en base a las referencias (1) y (2).

Se analiza el comportamiento del modelo con un solo grado de libertad con la base aislada para obtener resultados que expliquen su comportamiento sísmico. Se considera, primeramente, el caso más general de un pórtico plano que descansa sobre su cimentación mediante aparatos de apoyo [figura 2.1(a)]. Su modelo puede verse en la figura 2.1(b). Su deformada es función de los desplazamientos horizontales de los pisos. En este modelo, las masas  $m_b$  y  $m_1$  corresponden a la base y a la primera planta respectivamente. La rigidez  $k_b$  y el amortiguamiento  $c_b$  caracterizan los aparatos de apoyo. La rigidez  $k_1$  corresponde a las columnas modelizadas en el pórtico de la figura 2.1(a). El amortiguamiento  $c_1$  caracteriza la disipación de energía en la estructura.

El movimiento sísmico del terreno, caracterizado por su desplazamiento  $d(t)$ , su velocidad  $v(t)$  y su aceleración  $a(t)$ , actúa sobre la cimentación, suponiéndose una propagación unidireccional. Las vibraciones de la cimentación se transmiten a través de los aparatos de apoyo, induciendo traslaciones tanto de la masa  $m_b$  como de la masa  $m_1$ . El corrimiento de la masa  $m_1$  respecto a la base es  $x_1(t)$  mientras que  $x_b(t)$  es el corrimiento de la masa  $m_b$  respecto a la cimentación [figura 2.1(b)]. Para este modelo de un grado de libertad se pueden escribir las siguientes ecuaciones del movimiento:

$$m_1 [\ddot{x}_1(t) + \ddot{x}_b(t) + a(t)] + k_1 x_1(t) + c_1 \dot{x}_1(t) = 0 \quad (2.1)$$

$$m_b [\ddot{x}_b(t) + a(t)] + m_1 [\ddot{x}_1(t) + \ddot{x}_b(t) + a(t)] + k_b x_b(t) + c_b \dot{x}_b(t) = 0 \quad (2.2)$$

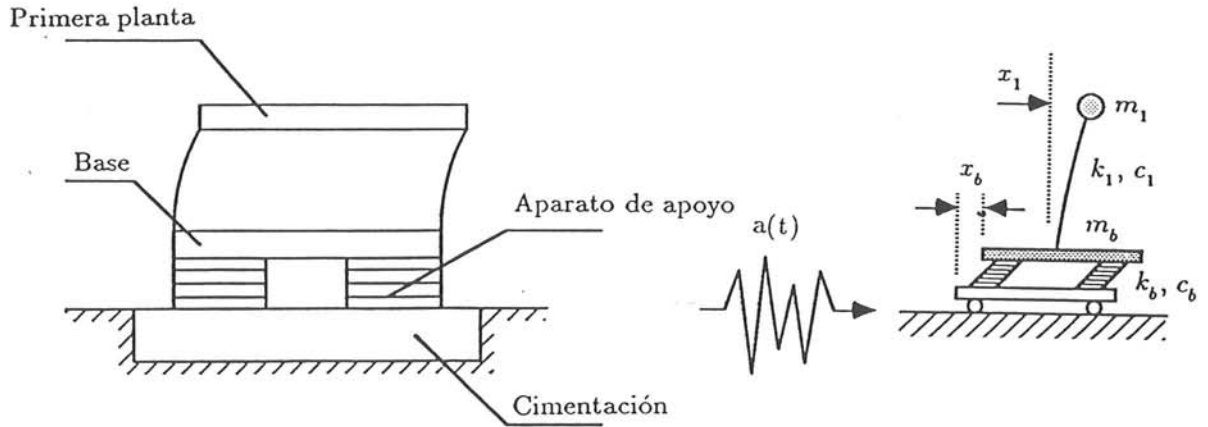


Figura 2.1 (a) Esquema del sistema considerado; (b) modelo dinámico.

Utilizando la notación matricial, las ecuaciones (2.1) y (2.2) se expresan en la forma compacta

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = -MJ a(t) \quad (2.3)$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} m_b + m_1 & m_1 \\ m_1 & m_1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_b & 0 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_b & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_b \\ x_1 \end{bmatrix}$$

## 2.2 PROBLEMA DE AUTOVALORES

Se supone ahora que el sistema no está amortiguado ( $c_b = c_1 = 0$ ) y que oscila libremente ( $a(t) = 0$ ). La ecuación (2.3) queda

$$M\ddot{X} + KX = 0 \quad (2.4)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales tiene soluciones particulares del tipo

$$X(t) = A e^{i\omega t} \quad (2.5)$$

donde el vector  $A$  contiene las amplitudes de los desplazamientos y  $\omega$  es la frecuencia circular del modelo. Sustituyendo (2.5) en (2.4) se obtiene

$$(K - \omega^2 M) A = 0 \quad (2.6)$$

Este sistema algebraico de dos ecuaciones lineales y homogéneas constituye un problema de autovalores. El sistema tiene soluciones de  $A$  distintas de la trivial solamente si el determinante de la matriz de coeficientes es nulo

$$|K - \omega^2 M| = \begin{vmatrix} k_b - \omega^2(m_b + m_1) & -\omega^2 m_1 \\ -\omega^2 m_1 & k_1 - \omega^2 m_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

Desarrollando el determinante se obtiene la siguiente ecuación de cuarto grado:

$$\omega^4[(m_b + m_1)m_1 - m_1^2] - \omega^2[m_1 k_b + (m_b + m_1)k_1] + k_1 k_b = 0 \quad (2.8)$$

que dividida por el producto  $m_1(m_1 + m_b)$  toma la forma

$$\omega^4(1 - \gamma) - \omega^2\left(\frac{k_b}{m_1 + m_b} + \frac{k_1}{m_1}\right) + \frac{k_1}{m_1} \frac{k_b}{m_1 + m_b} = 0 \quad (2.9)$$

donde

$$\gamma = \frac{m_1}{m_1 + m_b}$$

Se define

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad (2.10)$$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{k_b}{m_b + m_1}} \quad (2.11)$$

siendo  $\omega_s$  la frecuencia fundamental de vibración de la estructura y  $\omega_b$  la frecuencia natural del aparato de apoyo,  $\omega_b = \frac{\pi}{2} - 2\pi$  rad/s. <sup>(3,4,5)</sup> Con estas definiciones, (2.9) se reescribe

$$\omega^4(1 - \gamma) - \omega^2(\omega_b^2 + \omega_s^2) + \omega_b^2 \omega_s^2 = 0 \quad (2.12)$$

Se introduce la notación

$$\varepsilon = \frac{\omega_b^2}{\omega_s^2} \quad (2.13)$$



Dado que la rigidez  $k_1$  del modelo es mucho mayor que la rigidez  $k_b$  del aparato de apoyo se deduce a partir de las ecuaciones (2.10) y (2.11), que el término  $\varepsilon$  es despreciable, siendo del orden del 1%.<sup>(2)</sup> Resolviendo (2.12) se obtiene

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{\omega_b^2 + \omega_s^2 \pm \sqrt{(\omega_b^2 + \omega_s^2)^2 - 4(1-\gamma)\omega_b^2\omega_s^2}}{2(1-\gamma)} \\ &= \frac{\omega_b^2 + \omega_s^2}{2(1-\gamma)} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(1-\gamma)\omega_b^2\omega_s^2}{(\omega_b^2 + \omega_s^2)^2}} \right) \\ &= \frac{\omega_b^2 + \omega_s^2}{2(1-\gamma)} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(1-\gamma)\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}} \right)\end{aligned}\quad (2.14)$$

Esta expresión puede simplificarse del siguiente modo

$$\begin{aligned}\omega^2 &\simeq \frac{\omega_b^2 + \omega_s^2}{2(1-\gamma)} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4(1-\gamma)\varepsilon} \right) \\ &\simeq \frac{\omega_b^2 + \omega_s^2}{2(1-\gamma)} \left( 1 \pm (1 - 2(1-\gamma)\varepsilon) \right)\end{aligned}\quad (2.15)$$

Dado que  $\varepsilon$  es muy pequeño, se deduce que los autovalores son

$$\omega_1^2 \simeq \frac{\omega_b^2 + \omega_s^2}{2(1-\gamma)} 2(1-\gamma)\varepsilon \simeq \omega_b^2(1+\varepsilon) \simeq \omega_b^2 \quad (2.16)$$

$$\omega_2^2 \simeq \frac{\omega_b^2 + \omega_s^2}{2(1-\gamma)} (2 - 2\varepsilon(1-\gamma)) \simeq \frac{\omega_b^2 + \omega_s^2}{1-\gamma} = \frac{\omega_s^2(1+\varepsilon)}{1-\gamma} \simeq \frac{\omega_s^2}{1-\gamma} \quad (2.17)$$

En estas ecuaciones  $\omega_1$  es la frecuencia natural modificada del aparato de apoyo y  $\omega_2$  es la frecuencia fundamental de la estructura, modificada por la presencia de los aparatos de apoyo. Las frecuencias propias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  del sistema con aislamiento antisísmico en la base tienen asociados, los vectores propios  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  respectivamente. Éstos se deducen del sistema de ecuaciones (2.6)

$$(K - \omega_1^2 M)\varphi_1 = 0 \quad (K - \omega_2^2 M)\varphi_2 = 0$$

Utilizando la notación

$$\varphi_1^T = [\varphi_1^b \quad \varphi_1^s] \quad ; \quad \varphi_2^T = [\varphi_2^b \quad \varphi_2^s]$$

se resuelve el sistema de ecuaciones

$$\left[ k_b - \omega_1^2(m_b + m_1) \right] \varphi_1^b - \omega_1^2 m_1 \varphi_1^s = 0 \quad (2.18, a)$$

$$\left[ k_b - \omega_2^2 (m_b + m_1) \right] \varphi_2^b - \omega_2^2 m_1 \varphi_2^s = 0 \quad (2.18, b)$$

Fijando  $\varphi_1^b = 1$  se obtiene

$$\varphi_1^s = \frac{k_b - \omega_1^2 (m_b + m_1)}{\omega_1^2 m_1} = \frac{\omega_b^2 - \omega_1^2}{\gamma \omega_1^2} \quad (2.19)$$

y tomando un valor aproximado de  $\omega_1^2$  según (2.16)

$$\varphi_1^s \simeq \frac{\omega_b^2 - \omega_b^2 (1 + \varepsilon)}{\gamma \omega_b^2 (1 + \varepsilon)} = \frac{-\varepsilon}{\gamma (1 + \varepsilon)} \simeq \frac{-\varepsilon}{\gamma} \quad (2.20)$$

Fijando  $\varphi_2^b = 1$  se obtiene

$$\varphi_2^s = \frac{k_b - \omega_2^2 (m_b + m_1)}{\omega_2^2 m_1} = \frac{\omega_b^2 - \omega_2^2}{\gamma \omega_2^2} \quad (2.21)$$

y tomando un valor aproximado de  $\omega_2^2$  según (2.17)

$$\varphi_2^s \simeq \frac{(1 - \gamma) \omega_b^2 - \omega_s^2}{\gamma \omega_s^2} = \frac{\varepsilon (1 - \gamma) - 1}{\gamma} \simeq \frac{-1}{\gamma} \quad (2.22)$$

Por lo tanto los vectores propios son

$$\varphi_1^T = \left[ 1 \quad \frac{-\varepsilon}{\gamma} \right] \quad (2.23)$$

$$\varphi_2^T = \left[ 1 \quad \frac{-1}{\gamma} \right] \quad (2.24)$$

Los vectores propios  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  se denominan formas propias de vibración y pueden verse representados en la figura 2.2.

Dichos vectores  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  forman una base completa y se pueden utilizar para describir el movimiento del modelo estudiado

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_b(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix} = y_1(t) \varphi_1 + y_2(t) \varphi_2 \quad (2.25)$$

Sus componentes  $x_b(t)$  y  $x_1(t)$  se expresan por separado:

$$x_b(t) = y_1(t) \varphi_1^b + y_2(t) \varphi_2^b = y_1(t) + y_2(t) \quad (2.26)$$

$$x_1(t) = y_1(t) \varphi_1^s + y_2(t) \varphi_2^s = \frac{-\varepsilon}{\gamma} y_1(t) - \frac{y_2(t)}{\gamma} \quad (2.27)$$

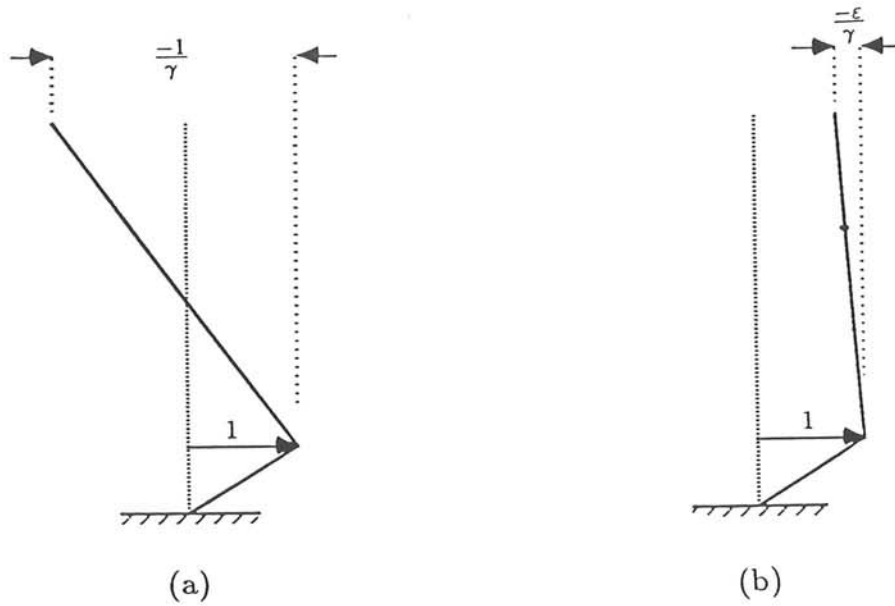


Figura 2.2 Formas propias de vibración del modelo. (a)  $\varphi_1$  — primer modo de vibración; (b)  $\varphi_2$  — segundo modo de vibración.

### 2.3 MODELO CON AMORTIGUAMIENTO

Se considera ahora en el modelo el amortiguamiento como expresión de la disipación de energía en la estructura. Sustituyendo (2.25) en la ecuación (2.3) se obtiene

$$\begin{aligned} M(\ddot{y}_1(t)\varphi_1 + \ddot{y}_2(t)\varphi_2) + C(\dot{y}_1(t)\varphi_1 + \dot{y}_2(t)\varphi_2) + \\ + K(y_1(t)\varphi_1 + y_2(t)\varphi_2) = -MJa(t) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Los vectores  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  pueden organizarse en la matriz modal  $\phi$

$$\phi = [\varphi_1 \ \varphi_2]$$

Los vectores propios son ortogonales respecto a las matrices de masa y de rigidez<sup>(6,7)</sup>

$$\phi^T M \phi = M^* \quad (2.29)$$

$$\phi^T K \phi = K^* \quad (2.30)$$

donde  $\mathbf{M}^*$  y  $\mathbf{K}^*$  son matrices diagonales. Premultiplicando (2.28) por  $\varphi_1^T$  se obtiene

$$\ddot{y}_1(t) \varphi_1^T \mathbf{M} \varphi_1 + \dot{y}_1(t) \varphi_1^T \mathbf{C} \varphi_1 + \dot{y}_2(t) \varphi_1^T \mathbf{C} \varphi_2 + y_1(t) \varphi_1^T \mathbf{K} \varphi_1 = -\varphi_1^T \mathbf{M} \mathbf{J} a(t) \quad (2.31)$$

Premultiplicando (2.28) por  $\varphi_2^T$  se obtiene

$$\ddot{y}_2(t) \varphi_2^T \mathbf{M} \varphi_2 + \dot{y}_1(t) \varphi_2^T \mathbf{C} \varphi_1 + \dot{y}_2(t) \varphi_2^T \mathbf{C} \varphi_2 + y_2(t) \varphi_2^T \mathbf{K} \varphi_2 = -\varphi_2^T \mathbf{M} \mathbf{J} a(t) \quad (2.32)$$

Se supone que el amortiguamiento es proporcional, con lo cual la matriz  $\mathbf{C}$  es ortogonal:

$$\varphi_1^T \mathbf{C} \varphi_2 = \varphi_2^T \mathbf{C} \varphi_1 = 0$$

De acuerdo con ésto y dividiendo por  $\varphi_1^T \mathbf{M} \varphi_1$ , la ecuación (2.31) se expresa como

$$\ddot{y}_1(t) + \frac{\varphi_1^T \mathbf{C} \varphi_1}{\varphi_1^T \mathbf{M} \varphi_1} \dot{y}_1(t) + \frac{\varphi_1^T \mathbf{K} \varphi_1}{\varphi_1^T \mathbf{M} \varphi_1} y_1(t) = -\frac{\varphi_1^T \mathbf{M} \mathbf{J}}{\varphi_1^T \mathbf{M} \varphi_1} a(t) \quad (2.33)$$

Se define

$$L_1 = \frac{\varphi_1^T \mathbf{M} \mathbf{J}}{\varphi_1^T \mathbf{M} \varphi_1} \quad (2.34)$$

$$2\omega_1 \nu_1 = \frac{\varphi_1^T \mathbf{C} \varphi_1}{\varphi_1^T \mathbf{M} \varphi_1} \quad (2.35)$$

En base a los resultados (2.16) y (2.23) y a las formulaciones de las matrices  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{C}$ , se calcula la expresión (2.35) que permite deducir un valor aproximado de la fracción de amortiguamiento crítico  $\nu_1$

$$\varphi_1^T \mathbf{C} \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\varepsilon}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_b & 0 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-\varepsilon}{\gamma} \end{bmatrix} = c_b + \frac{c_1 \varepsilon^2}{\gamma^2} \quad (2.36)$$

$$\varphi_1^T \mathbf{M} \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\varepsilon}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_b + m_1 & m_1 \\ m_1 & m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-\varepsilon}{\gamma} \end{bmatrix} = m_b + m_1 - \frac{2\varepsilon m_1}{\gamma} + \frac{\varepsilon^2 m_1}{\gamma^2} \quad (2.37)$$

de donde se deduce que

$$\nu_1 = \frac{c_b}{2\omega_1(m_b + m_1)} \frac{1 + \frac{c_1 \varepsilon^2}{c_b \gamma^2}}{1 - 2\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{\gamma}} \quad (2.38)$$

Despreciando los terminos de orden  $\varepsilon^2$  se obtiene

$$\nu_1 \simeq \frac{c_b}{2\omega_1(m_b + m_1)} \frac{1}{1 - 2\varepsilon} \quad (2.39)$$

y utilizando el desarrollo en serie de Taylor

$$\nu_1 \simeq \frac{c_b}{2\omega_1(m_b + m_1)} (1 + 2\varepsilon + 4\varepsilon^2 + \dots) \simeq \frac{c_b}{2\omega_1(m_b + m_1)} \quad (2.40)$$

Se define

$$\nu_b = \frac{c_b}{2\omega_b(m_b + m_1)} \quad (2.41)$$

$\nu_b$  es la fracción del amortiguamiento crítico de los aparatos de apoyo, del orden del 10%. En base al valor aproximado de  $\omega_1^2$  de la ecuación (2.16) se deduce

$$\nu_1 \simeq \frac{c_b}{2\omega_b(m_b + m_1)} = \nu_b \quad (2.42)$$

es decir, que  $\nu_1$  es del mismo orden de magnitud que  $\nu_b$ . Por otra parte

$$(K - \omega_1^2 M) \varphi_1 = 0$$

Desarrollando esta expresión

$$K \varphi_1 = \omega_1^2 M \varphi_1$$

y premultiplicándola por  $\varphi_1^T$ , se obtiene

$$\varphi_1^T K \varphi_1 = \omega_1^2 \varphi_1^T M \varphi_1$$

con lo cual

$$\omega_1^2 = \frac{\varphi_1^T K \varphi_1}{\varphi_1^T M \varphi_1} \quad (2.43)$$

Utilizando este resultado y las definiciones (2.34) y (2.35), (2.33) queda

$$\ddot{y}_1(t) + 2\omega_1 \nu_1 \dot{y}_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) = -L_1 a(t) \quad (2.44)$$

Dividiendo (2.32) por  $\varphi_2^T M \varphi_2$  se obtiene

$$\ddot{y}_2(t) + \frac{\varphi_2^T C \varphi_2}{\varphi_2^T M \varphi_2} \dot{y}_2(t) + \frac{\varphi_2^T K \varphi_2}{\varphi_2^T M \varphi_2} y_2(t) = -\frac{\varphi_2^T M J}{\varphi_2^T M \varphi_2} a(t) \quad (2.45)$$

Se define

$$L_2 = \frac{\varphi_2^T \mathbf{M} \mathbf{J}}{\varphi_2^T \mathbf{M} \varphi_2} \quad (2.46)$$

$$2\omega_2 \nu_2 = \frac{\varphi_2^T \mathbf{C} \varphi_2}{\varphi_2^T \mathbf{M} \varphi_2} \quad (2.47)$$

El desarrollo de (2.47) permite obtener una expresión de  $\nu_b$

$$\varphi_2^T \mathbf{C} \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_b & 0 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} = c_b + \frac{c_1}{\gamma^2} \quad (2.48)$$

$$\varphi_2^T \mathbf{M} \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_b + m_1 & m_1 \\ m_1 & m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} = m_b + m_1 - \frac{2m_1}{\gamma} + \frac{m_1}{\gamma^2} \quad (2.49)$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} \nu_2 &= \frac{1}{2\omega_2} \frac{c_b + \frac{c_1}{\gamma^2}}{m_b + m_1 - \frac{2m_1}{\gamma} + \frac{m_1}{\gamma^2}} \\ &= \frac{1}{2\omega_2} \frac{c_b + \frac{c_1}{\gamma^2}}{\frac{m_1}{\gamma^2} - \frac{m_1}{\gamma}} = \frac{1}{2\omega_2 m_1} \frac{c_b \gamma^2 + c_1}{1 - \gamma} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Utilizando el valor aproximado de  $\omega_2^2$  expuesto en (2.17)

$$\nu_2 \simeq \frac{1}{2\omega_s m_1} \frac{c_b \gamma^2 + c_1}{\sqrt{1 - \gamma}} \quad (2.51)$$

Se define

$$\nu_s = \frac{c_1}{2\omega_s m_1} \quad (2.52)$$

$\nu_s$  es la fracción del amortiguamiento crítico de la estructura, que es del orden del 2%.

$$\begin{aligned} \nu_2 &\simeq \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma}} \left[ \nu_s + \frac{c_b \gamma^2}{2\omega_s m_1} \right] = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma}} \left[ \nu_s + \frac{c_b \gamma}{2\omega_s (m_b + m_1)} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma}} \left[ \nu_s + \frac{c_b \gamma \sqrt{\varepsilon}}{2\omega_b (m_b + m_1)} \right] = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma}} \left[ \nu_s + \gamma \nu_b \sqrt{\varepsilon} \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

El resultado (2.53) muestra que al amortiguamiento estructural se le añade el amortiguamiento de los aparatos de apoyo, afectado por el coeficiente  $\gamma\sqrt{\varepsilon}$ . El producto  $\gamma\nu_b\sqrt{\varepsilon}$  puede ser una aportación importante al término  $\nu_s$ , lo que demuestra que un alto amortiguamiento en los aparatos de apoyo puede contribuir significativamente al amortiguamiento del segundo modo de vibración. Este hecho es positivo puesto que, según se desprende de la figura 2.2(b), la vibración según el segundo modo es muy desfavorable.

Mediante un razonamiento análogo al efectuado anteriormente para hallar la expresión (2.43) se puede escribir

$$\omega_2^2 = \frac{\varphi_2^T \mathbf{K} \varphi_2}{\varphi_2^T \mathbf{M} \varphi_2} \quad (2.54)$$

Utilizando este resultado y las definiciones (2.46) y (2.47), la ecuación (2.45) se expresa del siguiente modo:

$$\ddot{y}_2(t) + 2\omega_2\nu_2\dot{y}_2(t) + \omega_2^2 y_2(t) = -L_2 a(t) \quad (2.55)$$

A partir de las definiciones de  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{J}$  y de la expresión (2.23), se procede al cálculo de  $L_1$ . Primeramente se evalúa el producto  $\varphi_1^T \mathbf{M} \mathbf{J}$

$$\varphi_1^T \mathbf{M} \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\varepsilon}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_b + m_1 & m_1 \\ m_1 & m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = m_b + m_1 - \frac{m_1 \varepsilon}{\gamma} \quad (2.56)$$

Luego, utilizando los resultados (2.37) y (2.56) en la definición (2.34), se obtiene

$$L_1 = \frac{m_b + m_1 - \frac{\varepsilon m_1}{\gamma}}{m_b + m_1 - \frac{2\varepsilon m_1}{\gamma} + \frac{\varepsilon^2 m_1}{\gamma^2}} = \frac{1 - \varepsilon}{1 - 2\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{\gamma}} \simeq 1 \quad (2.57)$$

$L_2$  se calcula de una manera análoga

$$\varphi_2^T \mathbf{M} \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_b + m_1 & m_1 \\ m_1 & m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = m_b + m_1 + m_1 E \quad (2.58)$$

$$\varphi_2^T \mathbf{M} \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_b + m_1 & m_1 \\ m_1 & m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ E \end{bmatrix} = m_b + m_1 + 2m_1 E + m_1 E^2 \quad (2.59)$$

donde

$$E = -\frac{1}{\gamma}(1 - (1 - \gamma)\varepsilon)$$

Desarrollando estas expresiones

$$\varphi_2^T \mathbf{M} \mathbf{J} = (m_b + m_1)(1 - \gamma)\varepsilon \quad (2.60)$$

$$\varphi_2^T \mathbf{M} \varphi_2 = m_b + m_1 - 2(m_b + m_1)(1 - (1 - \gamma)\varepsilon) + \frac{(m_b + m_1)^2}{m_1} (1 - (1 - \gamma)\varepsilon)^2 \quad (2.61)$$

y despreciando el término de orden  $\varepsilon^2$

$$\varphi_2^T \mathbf{M} \varphi_2 = \frac{(m_b + m_1)^2}{m_1} (1 - \gamma) [1 - 2(1 - \gamma)\varepsilon] \quad (2.62)$$

sustituyendo los resultados (2.60) y (2.62) en (2.46) y despreciando el término  $2(1 - \gamma)\varepsilon$  de (2.62) se obtiene

$$L_2 \simeq \gamma\varepsilon \quad (2.63)$$

## 2.4 CONSIDERACIONES PRÁCTICAS

Los resultados obtenidos hasta este punto permiten hacer algunas consideraciones acerca del comportamiento del sistema. Supóngase que la frecuencia predominante del movimiento sísmico es mayor que 7 rad/s, lo que ocurre en la mayoría de los casos.<sup>(8)</sup> Dada su proximidad con las frecuencias fundamentales de vibración más habituales en estructuras de edificación, se hace aconsejable la colocación del aislamiento antisísmico en la base para alejar la frecuencia del primer modo de vibración de la estructura de la frecuencia predominante del movimiento del terreno. La estructura con un grado de libertad con la base fija tiene una frecuencia  $\omega_s$ . El sistema con aislamiento de base tiene dos frecuencias propias,  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Según se desprende de (2.16), la frecuencia fundamental  $\omega_1$  es similar a  $\omega_b$ , del orden de  $\pi$  rad/s. Es pues menor que  $\omega_s$  y menor que la frecuencia predominante del sismo. Para tener un orden de magnitud se puede suponer  $\gamma = 0.6$ ,  $\omega_b = \pi$  rad/s y  $\omega_s = 40$  rad/s. En este caso  $\omega_1 = \pi$  rad/s, siendo un 92% menor que  $\omega_s$ . Este distanciamiento es positivo al impedir que la frecuencia del primer modo de vibración de la estructura entre en resonancia con la frecuencia predominante del terremoto. Además, a la vista de la figura 2.2(a), se aprecia que la vibración según el primer modo comporta desplazamientos mayormente concentrados en el sistema de aislamiento, teniendo la estructura un movimiento prácticamente de sólido rígido.

La segunda frecuencia propia,  $\omega_2$ , es mayor que  $\omega_s$ . Con los mismos datos tomados anteriormente a modo de ejemplo,  $\omega_2 = 63$  rad/s, es decir un 58% mayor



que  $\omega_s$ . Este aumento puede ser suficiente para alejar la segunda frecuencia propia de las frecuencias más sensibles a las aceleraciones sísmicas esperadas en la zona. Sin embargo, podría ser que la nueva frecuencia propia  $\omega_2$  fuese igualmente sensible a las excitaciones sísmicas. En la figura 2.2(b) se puede apreciar el riesgo que corre la estructura al vibrar en el segundo modo puesto que entraña una gran deformación de ésta. Afortunadamente la influencia de este modo es menor incluso en el caso en que los espectros de respuesta del terremoto muestren una respuesta importante a excitaciones de frecuencia  $\omega_2$ .

Si las frecuencias  $\omega_b$  y  $\omega_s$  están suficientemente separadas, el valor de  $\varepsilon$  puede ser muy pequeño. Para el ejemplo expuesto anteriormente, de acuerdo con la ecuación (2.13),  $\varepsilon = 0.00617$ . Como se ha visto,  $\gamma$  es siempre menor que la unidad y, en algunos casos, puede reducir considerablemente el producto  $\gamma\varepsilon$  que define a  $L_2$ . Se aprecia pues que el valor de  $L_2$  es tan pequeño que la repercusión de la aceleración  $a(t)$  en (2.55) es mínima. Esto significa que la contribución del segundo modo de vibración será muy reducida al ser casi nulo el valor de  $y_2(t)$ . Por lo tanto, aún en el caso de que la frecuencia predominante del terremoto coincida con  $\omega_2$ , el movimiento siguiendo  $\varphi_2$  será pequeño, siendo ésta una de las principales características del aislamiento de edificios: se minimiza la respuesta a la aceleración sísmica no por absorción de energía sino por el cambio de la dinámica estructural.<sup>(5)</sup>

Se ha trabajado hasta ahora en base a un terremoto de frecuencia predominante mayor que 7 rad/s, alejada de  $\omega_b$  y próxima a  $\omega_s$ . Es éste el caso de la mayoría de los sismos importantes, habiéndose demostrado la efectividad del aislamiento antisísmico en estos casos. Por otra parte, existen terremotos con frecuencias predominantes excepcionalmente bajas. La proximidad de  $\omega_1$  a la frecuencia predominante del terremoto implica que el sistema esté cercano a la resonancia, haciendo que la estructura con aislamiento antisísmico se comporte muy desfavorablemente. La respuesta de la estructura es excesiva, limitada únicamente por el amortiguamiento. En este caso, la presencia de los aparatos de apoyo en la base es contraproducente. Es pues necesario realizar un estudio sismológico previo que determine las frecuencias predominantes en los terremotos futuros y en caso de estar próximas a las frecuencias naturales usuales en los aparatos de apoyo, desestimar la utilización del aislamiento antisísmico.

## 2.5 RESPUESTA FRENTE A MOVIMIENTOS ARMÓNICOS DEL TERRENO

### 2.5.1 Modelo sin aislamiento de base

Se considera un modelo con un solo grado de libertad sometido a un movimiento armónico del terreno. La ecuación diferencial que describe su vibración es

$$\ddot{y}(t) + 2\nu\omega\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = C \text{ sen } \theta t \quad (2.64)$$

donde  $C$  es la amplitud de la aceleración. Su solución  $y_g(t)$  puede escribirse

$$y_g(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad (2.65)$$

donde  $y_h(t)$  es la solución de su ecuación homogénea asociada y  $y_p(t)$  es una solución particular. La ecuación homogénea asociada es

$$\ddot{y}(t) + 2\nu\omega\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad (2.66)$$

que se resuelve mediante la sustitución

$$y(t) = e^{rt} \quad (2.67)$$

que proporciona la ecuación característica

$$r^2 + 2\nu\omega r + \omega^2 = 0 \quad (2.68)$$

cuyas raíces son

$$r_{1,2} = -\nu\omega \pm \omega\sqrt{\nu^2 - 1} \quad (2.69)$$

Se supone  $\nu < 1$ . Las raíces de la expresión (2.69) pasan a escribirse

$$r_{1,2} = -\nu\omega \pm i\omega_v \quad (2.70)$$

donde

$$\omega_v = \omega\sqrt{1 - \nu^2} \quad (2.71)$$

$\omega_v$  es la frecuencia de vibración del sistema amortiguado. La solución de la ecuación homogénea se escribe

$$y_h(t) = e^{-\nu\omega t} (b_1 \text{ sen } \omega_v t + b_2 \text{ cos } \omega_v t) \quad (2.72)$$

Las constantes  $b_1$  y  $b_2$  dependen de las condiciones iniciales del problema. La solución particular  $y_p(t)$  será de la forma

$$y_p(t) = A \text{ sen } \theta t + B \text{ cos } \theta t \quad (2.73)$$

Sustituyendo (2.73) en (2.64) se deducen los valores de las constantes  $A$  y  $B$ :

$$A = -C \frac{\theta^2 - \omega^2}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\nu^2\theta^2\omega^2} \quad (2.74)$$

$$B = -C \frac{2\nu\theta\omega}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\nu^2\theta^2\omega^2} \quad (2.75)$$

La solución general de la ecuación (2.64) es de la forma

$$y_g(t) = e^{-\nu\omega t} (b_1 \operatorname{sen} \omega_v t + b_2 \operatorname{cos} \omega_v t) + A \operatorname{sen} \theta t + B \operatorname{cos} \theta t \quad (2.76)$$

En los problemas de cálculo sísmico en que se utiliza este resultado, el valor  $\nu$  es del orden del 10%. El peso de los términos afectados por  $e^{-\nu\omega t}$  es mínimo, siendo de pequeño interés en el análisis dinámico. Despreciando estos términos, (2.76) se expresa

$$y_g(t) = y_p(t) = A \operatorname{sen} \theta t + B \operatorname{cos} \theta t \quad (2.77)$$

cuya primera derivada es

$$\dot{y}_g(t) = A\theta \operatorname{cos} \theta t - B\theta \operatorname{sen} \theta t \quad (2.78)$$

El planteamiento de la ecuación

$$\dot{y}_g(t_e) = 0 \quad (2.79)$$

permite determinar el instante  $t_e$  en el cual  $y_g(t)$  toma un valor extremo. El resultado es

$$t_e = \frac{1}{\theta} \tan^{-1} \frac{A}{B} = \frac{1}{\theta} \tan^{-1} \left( \frac{\theta^2 - \omega^2}{2\nu\theta\omega} \right) \quad (2.80)$$

Cuya sustitución en (2.77) proporciona el máximo valor absoluto de  $y_g(t)$ :

$$|y_g(t)|_{max} = \left| \frac{C}{\sqrt{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\nu^2\theta^2\omega^2}} \right| \quad (2.81)$$

### 2.5.2 Modelo con aislamiento de base

La respuesta del modelo con aislamiento de base se estudia a través de los desplazamientos relativos al terreno  $x_b(t)$  y  $x_1(t)$ . Se recurre a los cocientes entre los máximos desplazamientos relativos,  $|x_b(t)|_{max}$  y  $|x_1(t)|_{max}$  y el movimiento máximo  $d_{max}$  del terreno, con el fin de valorar la amplitud de la respuesta estructural con independencia de la amplitud del acelerograma utilizado

$$A_b = \frac{|x_b(t)|_{max}}{d_{max}} \quad (2.82)$$

$$A_s = \frac{|x_1(t)|_{max}}{d_{max}} \quad (2.83)$$

Se define la función del desplazamiento armónico del terreno en la forma

$$d(t) = d_{max} \text{sen } \theta t \quad (2.84)$$

Derivando dos veces respecto al tiempo

$$a(t) = -d_{max} \theta^2 \text{sen } \theta t \quad (2.85)$$

La ecuación (2.44) se escribe

$$\ddot{y}_1(t) + 2\omega_1 \nu_1 \dot{y}_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) = L_1 d_{max} \theta^2 \text{sen } \theta t \quad (2.86)$$

Aplicando el resultado (2.81) a (2.86) se deduce

$$|y_1(t)|_{max} = \left| \frac{L_1 d_{max} \theta^2}{\sqrt{(\omega_1^2 - \theta^2)^2 + 4\nu_1^2 \theta^2 \omega_1^2}} \right| \quad (2.87)$$

La ecuación (2.55) se escribe

$$\ddot{y}_2(t) + 2\omega_2 \nu_2 \dot{y}_2(t) + \omega_2^2 y_2(t) = L_2 d_{max} \theta^2 \text{sen } \theta t \quad (2.88)$$

Aplicando el resultado (2.81) en la ecuación (2.88) se deduce

$$|y_2(t)|_{max} = \left| \frac{L_2 d_{max} \theta^2}{\sqrt{(\omega_2^2 - \theta^2)^2 + 4\nu_2^2 \theta^2 \omega_2^2}} \right| \quad (2.89)$$

La respuesta máxima se suele calcular como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las respuestas modales máximas.<sup>(9,10,11)</sup> Es decir, de acuerdo con (2.26) y (2.27)

$$|x_b(t)|_{max} = \sqrt{(\varphi_1^b y_1(t))^2 + (\varphi_2^b y_2(t))^2}$$

$$|x_1(t)|_{max} = \sqrt{(\varphi_1^s y_1(t))^2 + (\varphi_2^s y_2(t))^2}$$

Recordando los modos propios de vibración del modelo, cuyas expresiones se encuentran en (2.23) y (2.24), los resultados (2.87) y (2.89) permiten reescribir los coeficientes de amplificación  $A_b$  y  $A_s$  del siguiente modo:

$$A_b = \sqrt{\frac{L_1^2 \theta^4}{(\omega_1^2 - \theta^2)^2 + 4\nu_1^2 \theta^2 \omega_1^2} + \frac{L_2^2 \theta^4}{(\omega_2^2 - \theta^2)^2 + 4\nu_2^2 \theta^2 \omega_2^2}} \quad (2.90)$$

$$A_s = \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} \frac{\varepsilon^2 L_1^2 \theta^4}{(\omega_1^2 - \theta^2)^2 + 4\nu_1^2 \theta^2 \omega_1^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{L_2^2 \theta^4}{(\omega_2^2 - \theta^2)^2 + 4\nu_2^2 \theta^2 \omega_2^2}} \quad (2.91)$$

Sustituyendo  $L_1$  y  $L_2$  por sus expresiones aproximadas (2.57) y (2.63)

$$A_b = \sqrt{\frac{\theta^4}{(\omega_1^2 - \theta^2)^2 + 4\nu_1^2 \theta^2 \omega_1^2} + \frac{\gamma^2 \varepsilon^2 \theta^4}{(\omega_2^2 - \theta^2)^2 + 4\nu_2^2 \theta^2 \omega_2^2}} \quad (2.92)$$

$$A_s = \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} \frac{\varepsilon^2 \theta^4}{(\omega_1^2 - \theta^2)^2 + 4\nu_1^2 \theta^2 \omega_1^2} + \frac{\varepsilon^2 \theta^4}{(\omega_2^2 - \theta^2)^2 + 4\nu_2^2 \theta^2 \omega_2^2}} \quad (2.93)$$

A fin de comparar el comportamiento de la estructura con y sin aislamiento antisísmico se emplea como estimador el cociente

$$A = \frac{|x(t)|_{max}}{d_{max}} \quad (2.94)$$

donde  $x(t)$  es el desplazamiento de la masa respecto a la cimentación. La ecuación que describe el movimiento es

$$\ddot{x}(t) + 2\nu_s \omega_s \dot{x}(t) + \omega_s^2 x(t) = -d_{max} \theta^2 \sin \theta t \quad (2.95)$$

Aplicando el resultado (2.81) a la ecuación (2.95) se deduce

$$A = \frac{\theta^2}{\sqrt{(\omega_s^2 - \theta^2)^2 + 4\nu_s^2\theta^2\omega_s^2}} \quad (2.96)$$

### 2.5.3 Orden de magnitud de los coeficientes de amplificación

Se evalúa el orden de magnitud de los estimadores  $A_b$ ,  $A_s$  y  $A$  cuando la frecuencia  $\theta$  de la excitación sinusoidal coincide con ciertas frecuencias singulares:  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_s$ . En las estimaciones que siguen es necesario recordar que tanto  $\varepsilon$  como las fracciones del amortiguamiento crítico  $\nu_1$  y  $\nu_2$  toman valores pequeños, del orden del 1%.

**Caso (a):**  $\theta = \omega_1$

Según las expresiones (2.92) y (2.93)

$$A_b = \sqrt{\frac{1}{4\nu_1^2} + \frac{\gamma^2\varepsilon^2\omega_1^4}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 4\nu_2^2\omega_1^2\omega_2^2}} \quad (2.97)$$

$$A_s = \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} \frac{\varepsilon^2}{4\nu_1^2} + \frac{\varepsilon^2\omega_1^4}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 4\nu_2^2\omega_1^2\omega_2^2}} \quad (2.98)$$

Se desprecia el segundo término de la expresión (2.97) al ser de orden  $\varepsilon^2$ . Por el mismo motivo se prescinde del segundo término de la expresión (2.98). Después de estas simplificaciones,  $A_b$  y  $A_s$  se aproximan del siguiente modo:

$$A_b = \frac{1}{2\nu_1} \quad (2.99)$$

$$A_s = \frac{\varepsilon}{2\gamma\nu_1} \quad (2.100)$$

$A_b$  es de orden  $1/\varepsilon$ . Al ser del mismo orden  $\varepsilon$  y  $\nu_1$ ,  $A_s$  será de orden 1.

Con  $\theta = \omega_1$ , la expresión (2.96) se escribe

$$A = \frac{\omega_1^2}{\sqrt{(\omega_s^2 - \omega_1^2)^2 + 4\nu_s^2\omega_1^2\omega_s^2}} \simeq \frac{\omega_b^2}{\sqrt{(\omega_s^2 - \omega_b^2)^2 + 4\nu_s^2\omega_b^2\omega_s^2}} \simeq \frac{\varepsilon}{\sqrt{(1 - \varepsilon)^2 + 4\nu_s^2\varepsilon}} \quad (2.101)$$

donde se aprecia que  $A$  es de orden  $\varepsilon$ .

**Caso (b):**  $\theta = \omega_2$

Tomando  $\theta = \omega_2$  en las ecuaciones (2.92) y (2.93), los estimadores  $A_b$  y  $A_s$  se escriben

$$A_b = \sqrt{\frac{\omega_2^4}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\nu_1^2 \omega_2^2 \omega_1^2} + \frac{\gamma^2 \varepsilon^2}{4\nu_2^2}} \quad (2.102)$$

$$A_s = \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} \frac{\varepsilon^2 \omega_2^4}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\nu_1^2 \omega_2^2 \omega_1^2} + \frac{\varepsilon^2}{4\nu_2^2}} \quad (2.103)$$

Recordando las aproximaciones de  $\omega_1$  y  $\omega_2$  expuestas en (2.16) y (2.17), el primer término de la expresión  $A_b$  se puede formular del siguiente modo:

$$\frac{\omega_2^4}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\nu_1^2 \omega_2^2 \omega_1^2} \simeq \frac{1}{((1 - \gamma)\varepsilon - 1)^2 + 4\nu_1^2(1 - \gamma)\varepsilon}$$

de donde se deduce que este cociente está próximo a la unidad. Simplificando

$$A_b \simeq \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 \varepsilon^2}{4\nu_2^2}} \simeq 1 + \frac{1}{8} \frac{\gamma^2 \varepsilon^2}{\nu_2^2} \quad (2.104)$$

En lo que respecta a  $A_s$

$$\begin{aligned} A_s &\simeq \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} \frac{\varepsilon^2}{((1 - \gamma)\varepsilon - 1)^2 + 4\nu_1^2(1 - \gamma)\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{4\nu_2^2}} \\ &\simeq \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{\gamma^2} + \frac{\varepsilon^2}{4\nu_2^2}} \simeq \frac{\varepsilon}{2\nu_2} \end{aligned} \quad (2.105)$$

Se observa su proximidad a la unidad. Si  $\theta = \omega_2$ , el estimador  $A$  se expresa

$$A = \frac{\omega_2^2}{\sqrt{(\omega_s^2 - \omega_2^2)^2 + 4\nu_s^2 \omega_2^2 \omega_s^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 4\nu_s^2(1 - \gamma)}} \quad (2.106)$$

de donde se deduce que  $A$  es de orden 1.

**Caso (c):**  $\theta = \omega_s$

En base a las expresiones (2.92) y (2.93) se obtiene

$$A_b = \sqrt{\frac{\omega_s^4}{(\omega_1^2 - \omega_s^2)^2 + 4\nu_1^2 \omega_s^2 \omega_1^2} + \frac{\gamma^2 \varepsilon^2 \omega_s^4}{(\omega_2^2 - \omega_s^2)^2 + 4\nu_2^2 \omega_s^2 \omega_2^2}} \quad (2.107)$$

$$A_s = \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} \frac{\varepsilon^2 \omega_s^4}{(\omega_1^2 - \omega_s^2)^2 + 4\nu_1^2 \omega_s^2 \omega_1^2} + \frac{\varepsilon^2 \omega_s^4}{(\omega_2^2 - \omega_s^2)^2 + 4\nu_2^2 \omega_s^2 \omega_2^2}} \quad (2.108)$$

Recordando las aproximaciones (2.16) y (2.17), las expresiones (2.107) y (2.108) se escriben

$$A_b = \sqrt{\frac{1}{(\varepsilon - 1)^2 + 4\nu_1^2 \varepsilon} + \frac{\gamma^2 \varepsilon^2}{\left(\frac{1}{1-\gamma} - 1\right)^2 + 4\nu_2^2 \left(\frac{1}{1-\gamma}\right)}} \quad (2.109)$$

$$A_s = \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon - 1)^2 + 4\nu_1^2 \varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{\left(\frac{1}{1-\gamma} - 1\right)^2 + 4\nu_2^2 \left(\frac{1}{1-\gamma}\right)}} \quad (2.110)$$

donde se aprecia que  $A_b$  es de orden 1 mientras que  $A_s$  es de orden  $\varepsilon$ . El estimador  $A$  del modelo sin aislamiento de base se escribe

$$A = \frac{1}{2\nu_s} \quad (2.111)$$

De (2.111) se deduce que  $A$  es de orden  $1/\varepsilon$ .

En la tabla 2.1 se recogen los resultados obtenidos. Obsérvense los dos casos en que el factor de amplificación es del orden de  $1/\varepsilon$ . Uno corresponde a la resonancia del primer modo de vibración de la estructura sin aislamiento antisísmico con el movimiento del terreno. El otro corresponde a la resonancia del sistema con aislamiento antisísmico según el primer modo de vibración.

**Tabla 2.1**— Ordenes de magnitud de la respuesta estructural.

	$A$	$A_s$	$A_b$
$\omega_1$	$\varepsilon$	1	$1/\varepsilon$
$\omega_2$	1	1	1
$\omega_s$	$1/\varepsilon$	$\varepsilon$	1



La respuesta a la aceleración sinusoidal de frecuencia  $\omega_s$  muestra la razón de ser del aislamiento de edificios: mientras el factor de amplificación de la estructura de base fija era de orden  $1/\varepsilon$ , la colocación de aparatos de apoyo de neopreno zunchado da un factor de amplificación  $A_s$  de orden  $\varepsilon$ , lo que muestra un pequeño desplazamiento relativo en la estructura, con unos desplazamientos en la base tolerables.

Los factores  $A_b$  y  $A_s$  en el caso de excitaciones sísmicas de frecuencia  $\omega_2$  son de orden 1. Deberían ser de orden  $1/\varepsilon$  al entrar en resonancia con la segunda frecuencia propia pero, como se vió anteriormente, la casi ortogonalidad entre el modo de vibración de sólido rígido, que representa la aceleración y los modos propios de vibración distintos del primero, impide la transmisión al edificio de la energía del terremoto en frecuencias distintas de  $\omega_1$ .

### REFERENCIAS

1. KELLY J. M., "Base Isolation", Publicación del Curso "Theory, Testing and Implementation of Seismic Isolation Systems", Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento, Madrid, 13-14 Octubre 1988.
2. JANÉ L. y BARBAT A. H., *Estructuras de edificación con aislamiento antisísmico*, Monografía No 13, Centro internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, 1992.
3. GUERAND R., NOEL-LERONX J. P., LIVOLANT M. y MICHALOPOULOS A. P., "Seismic Isolation Using Sliding-Elastomer Bearing Pads", *Nuclear Engineering and Design*, 84, 363-377, 1985.
4. MOSTAGHEL N. y KHODAVERDIAN M., "Dynamics of Resilient-Friction Base Isolator (R-FBI)", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 15, 379-390, 1987.
5. TARICS A. G., WAY D. y KELLY J. M., "The Implementation of Base Isolation for the Foothill Communities Law and Justice Center", *Report to the National Science Foundation and the County of San Bernardino*, 1984.
6. BATHE K. J. y WILSON E. L., "Solution Methods for Eigenvalue Problems in Structural Mechanics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 6(2), 213-225, 1973.
7. BATHE K. J. y WILSON E. L., *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
8. CONSTANTINOU M. C. e TADJBAKHSI I. G., "The Optimum Design of a Base Isolation System with Frictional Elements", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 12, 203-214, 1989.
9. NEWMARK N. M. y ROSENBLUETH E., *Fundamentals of Earthquake Engineering*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
10. GIUFFRÉ A., *Analisi Matriciale delle Strutture*, Masson Italia Editori, Milano, 1979.
11. MEIROVITCH L., *Elements of Vibration Analysis*, McGraw - Hill Kogakusha, Ltd, Tokyo, 1975.

12. KELLY J. M., "Base Isolation: Origins and Development", *Bulletin of the Earthquake Engineering Research Center*, **12(1)**, Enero 1991.
13. STANTON J. y ROEDER C., "Advantages and Limitations of Seismic Isolation", *Earthquake Spectra*, Earthquake Engineering Research Institute, **7(2)**, 301-323, 1991.
14. \*\*\*, "Seismic Isolation and Response Control for Nuclear and Non-Nuclear Structures", *Special Issue for the Exhibition of the 11th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMIRT 11)* Tokyo, 18-23 Agosto 1991.



## CAPÍTULO 3

### FORMULACIÓN DE SISTEMAS NO LINEALES DE AISLAMIENTO SÍSMICO

#### 3.1 DESCRIPCIÓN DE DIFERENTES SISTEMAS DE AISLAMIENTO EXISTENTES

La utilización de sistemas de aislamiento de base a fin de proteger las estructuras de los efectos debidos a los terremotos ha llamado considerablemente la atención de los especialistas en los últimos años. Su principal propósito es el de reducir la aceleración horizontal transmitida por los terremotos a la estructura. Desde hace mucho tiempo y en literatura reciente,<sup>(1,2)</sup> se han propuesto numerosos sistemas básicamente caracterizados por su flexibilidad según la dirección horizontal y por su capacidad de absorción de energía. En esta monografía sólo se estudian aquellos que se utilizan en la actualidad o que están considerados como potencialmente utilizables.

Los sistemas de aislamiento de base llamados de **fricción pura** [**pure friction (P-F)**] son aquellos en los cuales el mecanismo de aislamiento solo incluye fricción de deslizamiento. Un esquema que cumple estas condiciones puede verse en la figura 3.1. Éste es el más sencillo de todos y en la actualidad existe un gran desarrollo teórico y experimental de su comportamiento. En las referencias (3,4), se ha efectuado su estudio bajo el efecto de excitaciones sinusoidales y sísmicas. También se ha analizado frente a excitaciones estocásticas.<sup>(5,6)</sup> En las referencias (7,8), se describe la utilización en una edificación en Beijing (China), de una capa de arena como un sistema muy sencillo de aislamiento de fricción pura.

El sistema de aislamiento de base más extensamente estudiado es el conocido como **apoyo de goma laminada** [**laminated rubber bearing (LRB)**].<sup>(1,2,9)</sup> Dicho sistema ha sido muy utilizado en edificaciones en Japón, Nueva Zelanda, Europa, California, etc. Está conformado por láminas alternadas de goma y acero vulcanizadas entre sí, en donde el acero se utiliza para evitar la deformación

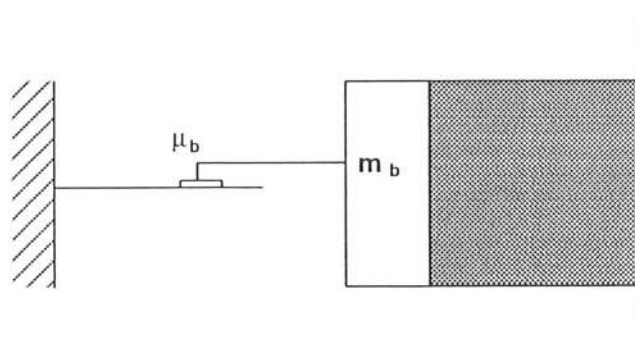


Figura 3.1 Sistema P-F.

vertical del sistema. Su característica predominante es la acción paralela de resorte y amortiguador tal como se muestra esquemáticamente en la figura 3.2.

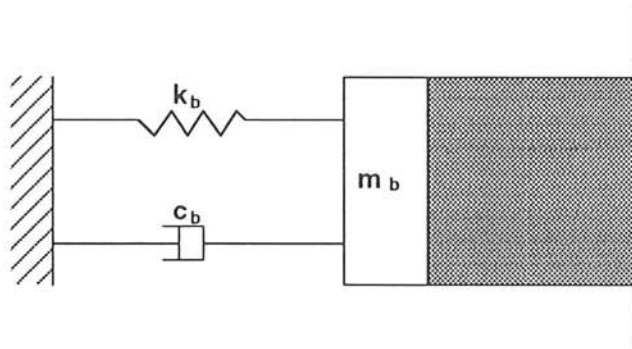


Figura 3.2 Sistema LRB.

Un sistema de aislamiento recientemente desarrollado es el de base **flexible-friccionante** [resilient-friction base isolator (R-FBI)].<sup>(10-13)</sup> Está formado por láminas cubiertas de teflón en contacto entre sí y por un núcleo de neopreno. El sistema aísla la base a través de la acción conjunta de fricción, amortiguamiento y elasticidad de los resortes. Un mecanismo similar conocido como Alexisimon,<sup>(14)</sup> básicamente utiliza un apoyo de goma y un aislamiento de fricción pura en paralelo (véase el esquema de la figura 3.3).

Un sistema muy importante de aislamiento ha sido desarrollado por la compañía eléctrica francesa [Electricité de France (EDF)].<sup>(15)</sup> Este sistema ha sido aplicado al aislamiento de centrales nucleares localizadas en regiones de alta sismicidad. El sistema EDF está compuesto por neopreno zunchado con una lámina de bronce en la parte superior, la cual está en contacto con una lámina de acero anclada a la estructura. Se constituye de esta manera una superficie de fricción diseñada para que tenga un coeficiente de fricción de  $\mu = 0.2$  durante la

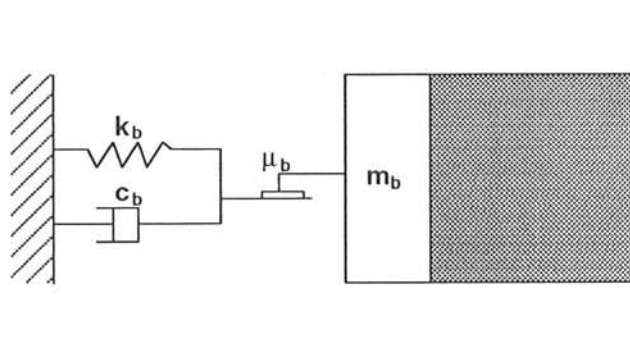


Figura 3.3 Sistema R-FBI.

vida de servicio del sistema de aislamiento. Dicho sistema está esquematizado en la figura 3.4 como una combinación de un apoyo elastomérico con uno de fricción pura en serie. Una característica importante del sistema EDF es que para bajas amplitudes de la aceleración del terreno es la flexibilidad del neopreno la que produce la reducción de la respuesta sísmica, mientras que para altos niveles de excitación es el deslizamiento friccionante quien proporciona una protección adicional.

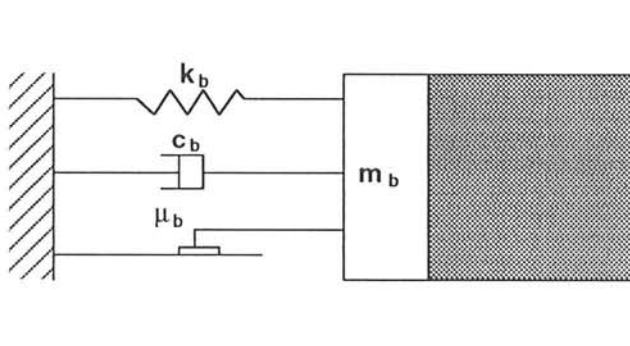


Figura 3.4 Sistema EDF.

Otro sistema de aislamiento de base ampliamente aplicado en Nueva Zelanda, Japón, Islandia, Italia y Estados Unidos de América es el de **plomo-goma**, el cual es más conocido como **neozelandés (NZ)**.<sup>(2,9,16)</sup> Este aislamiento está compuesto por un apoyo elastomérico laminado con un núcleo de plomo. La función del plomo es principalmente la de disipar energía, mientras que la flexibilidad lateral es suministrada por el apoyo de neopreno zunchado. Se comporta esencialmente como un amortiguador histerético.<sup>(9,17-19)</sup> El sistema neozelandés, así como otros aislamientos de base histeréticos, pueden ser modelizados mediante el esquema simplificado de la figura 3.5, utilizando un módulo histerético, un amortiguador y un resorte.

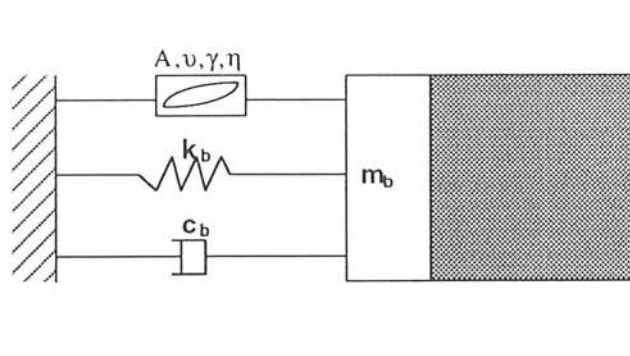


Figura 3.5 Sistema NZ.

Se ha propuesto un nuevo diseño de aislamiento de base, que reemplaza el apoyo elastomérico del aislamiento de base EDF por el R-FBI.<sup>(20)</sup> La superficie superior del sistema R-FBI se reemplaza en el diseño modificado por una placa de fricción. Como resultado, la estructura puede deslizarse sobre la cimentación de manera similar a la del sistema EDF. El comportamiento de este aislamiento, llamado de **deslizamiento flexible-friccionante** [sliding resilient friction (SR-F)], se ilustra esquemáticamente en la figura 3.6. Para un nivel bajo de excitación sísmica, el sistema se comporta como un R-FBI. El deslizamiento en la placa superior ocurre solamente para un nivel muy alto de aceleración del terreno, lo que constituye una medida de seguridad adicional para excitaciones excepcionales del terreno.

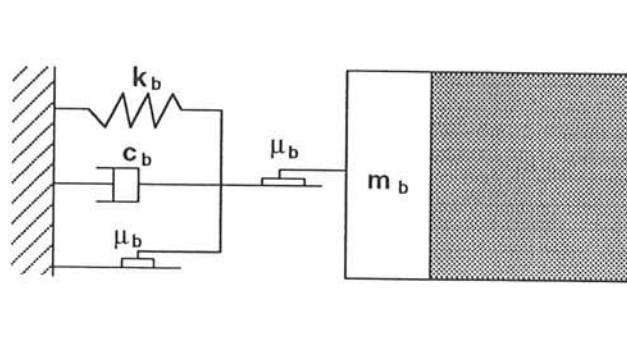


Figura 3.6 Sistema SR-F.

A continuación se desarrollan las ecuaciones del movimiento tanto para la estructura como las que describen los principales sistemas de aislamiento existentes. Se comienza por los sistemas de fricción pura y de goma laminada y se continúa con combinaciones o modificaciones de éstos.

## 3.2 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

### 3.2.1 Ecuaciones generales

En la figura 3.7 se muestra de manera esquemática una estructura con sistema de aislamiento de base. Se asume que debido al efecto del aislamiento de base, la estructura se comporta elásticamente. Se considera que el aparato de apoyo tiene características no lineales y que puede ser modelizado mediante algunos de los esquemas definidos anteriormente.

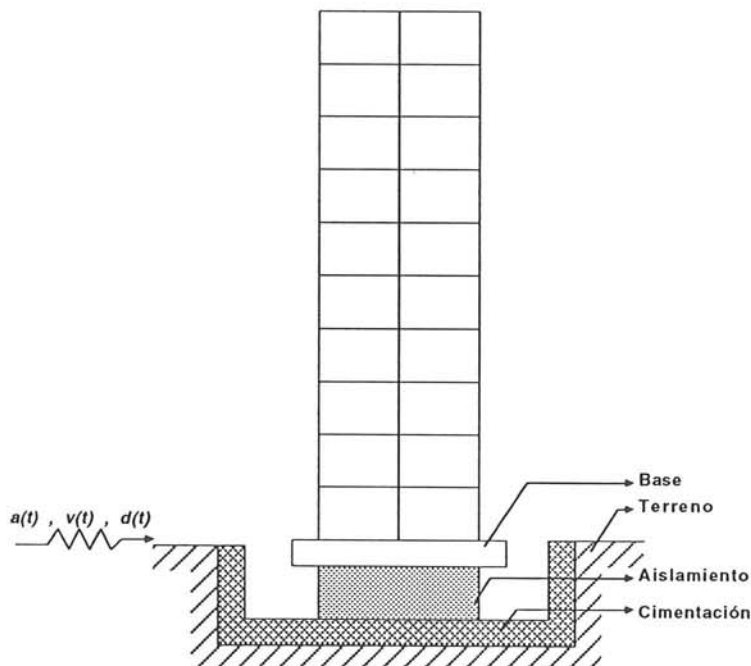


Figura 3.7 Estructura con aislamiento de base.

La ecuación del movimiento de la estructura sometida a una excitación sísmica de aceleración  $a(t)$  es

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{K}\mathbf{D} = -\mathbf{M}\mathbf{J}[\ddot{d}_b + a(t)] \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{D}$  es el vector de desplazamiento relativo a la base,  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa,  $\mathbf{C}$  es la matriz de amortiguamiento,  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez,  $\ddot{d}_b$  es la aceleración de la base relativa al terreno y  $\mathbf{J}$  es el vector que expresa el movimiento de sólido rígido según los grados de libertad del modelo. Por consiguiente,  $\ddot{d}_b + a(t)$  es la aceleración absoluta de la base aislada. Esta ecuación es válida para modelos dinámicos desarrollados mediante cualquier proceso de discretización espacial. Las condiciones iniciales son



$$\text{Para } t = 0 \Rightarrow \mathbf{D} = 0, \dot{\mathbf{D}} = 0 \quad (3.2)$$

La ecuación que gobierna el movimiento de la base está dada por

$$m_b(\ddot{d}_b + a(t)) + \mathbf{J}^T \mathbf{M} [\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t))] + f = 0 \quad (3.3)$$

Aquí,  $m_b$  es la masa de la base, la cual se encuentra localizada en la parte superior del aislamiento y  $f$  es la fuerza ejercida por el aislamiento de base sobre  $m_b$ . El comportamiento de la fuerza  $f$  depende de la naturaleza del aislamiento utilizado y será analizado en posteriores secciones.

La solución general de la ecuación (3.1) puede simplificarse mediante un desacoplamiento modal previo del sistema. Utilizando los  $q$  primeros modos de vibración, el vector de los desplazamientos se expresa como

$$\mathbf{D}(t) = \sum_{i=1}^q \boldsymbol{\varphi}_i y_i(t) \quad (3.4)$$

Esta transformación permite el mencionado desacoplamiento, donde  $\boldsymbol{\varphi}_i$  es el vector propio y la función  $y_i(t)$  es una coordenada generalizada correspondiente al modo de vibración  $i$ . El vector modal  $\boldsymbol{\varphi}_i$  es determinado por

$$\ddot{y}_j(t) + 2\nu_j \omega_j \dot{y}_j(t) + \omega_j^2 y_j(t) = -\frac{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{J}}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j} [\ddot{d}_b + a(t)] \quad (3.5)$$

Siendo  $\omega_j$  y  $\nu_j$ , las frecuencias naturales y factores de amortiguamiento crítico de la estructura, respectivamente. Reemplazando (3.4) en la ecuación (3.3), la ecuación que gobierna el movimiento de la masa de la base  $m_b$  puede ser expresada como

$$m_b(\ddot{d}_b + a(t)) + \mathbf{J}^T \mathbf{M} \left[ \sum_{i=1}^q \boldsymbol{\varphi}_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right] + f = 0 \quad (3.6)$$

A continuación se particulariza esta última ecuación para los diferentes sistemas de apoyo considerados.

### 3.2.2 Sistema de fricción pura (P-F)

Cuando la estructura con un sistema de aislamiento de base de fricción pura está sometida a una excitación horizontal del terreno  $a(t)$ , la ecuación (3.6) puede ser expresada como

$$m_b(\ddot{d}_b + a(t)) + \mathbf{J}^T \mathbf{M} \left[ \sum_{i=1}^q \varphi_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right] + \mu g \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \text{sign}(d_b) = 0 \quad (3.7)$$

En esta ecuación se asume que no hay desprendimiento entre las superficies de fricción. Aquí,  $\mu$  es el coeficiente de fricción y  $g$  es la aceleración de la gravedad. La ecuación (3.7) describe el comportamiento de el sistema en la fase de deslizamiento. Cuando la masa de la base se encuentra pegada a la cimentación, la condición de no deslizamiento

$$\dot{d}_b = 0 ; \ddot{d}_b = 0 \quad (3.8)$$

viene dada por

$$\mu g - |a(t) + \mathbf{J}^T \left[ \sum_{i=1}^q \varphi_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right]| > 0 \quad (3.9)$$

Si la ecuación (3.9) no se cumple, se produce deslizamiento y se debe aplicar la ecuación (3.7).

La ecuación (3.5) junto con las ecuaciones (3.7) o (3.8) forman un sistema de  $q + 1$  ecuaciones diferenciales acopladas que permiten determinar el desplazamiento de la base  $d_b$  y las amplitudes modales  $y_i(t)$ . Con  $y_i(t)$  conocida puede ser evaluado el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de la estructura por medio de la ecuación (3.4).

En los sistemas de aislamiento de fricción pura, el coeficiente de fricción  $\mu$  varía significativamente con la naturaleza de la superficie de fricción utilizada. Además, el coeficiente de  $\mu$  también es función de la velocidad relativa. Para el sistema de aislamiento de fricción pura se utiliza comúnmente  $\mu \leq 0.2$ . En las referencias (3-6,23-25) se da todo un rango de valores de  $\mu$ .

### 3.2.3 Sistema de goma laminada (LRB)

Cuando una estructura con un sistema de apoyo de goma laminada o con amortiguador viscoso es excitada por una aceleración horizontal del terreno  $a(t)$ , la ecuación (3.6) puede ser expresada como

$$m_b(\ddot{d}_b + a(t)) + c_b \dot{d}_b + k_b d_b + \mathbf{J}^T \mathbf{M} \left[ \sum_{i=1}^q \varphi_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right] = 0 \quad (3.10)$$

donde  $c_b$  y  $k_b$  son el amortiguamiento y la rigidez del aislamiento, respectivamente. Las amplitudes modales  $y_i(t)$  y el desplazamiento de la base relativo al

terreno  $d_b$  son calculados resolviendo el sistema lineal de ecuaciones diferenciales dado por las ecuaciones (3.5) y (3.10). El período natural de diseño recomendado para el sistema de goma laminada es de 2 s, lo cual corresponde a una frecuencia  $\omega_0 = \pi$  rad/s. El coeficiente de amortiguamiento crítico varía considerablemente, este puede ser de  $\nu = 0.3$  para bajos esfuerzos, y de  $\nu = 0.05$  para altos esfuerzos. Se recomienda un valor promedio de  $\nu = 0.1$ .

### 3.2.4 Sistema flexible-friccionante (R-FBI)

El aislamiento de base flexible-friccionante utiliza en paralelo la acción flexible de la goma y la fricción de las placas cubiertas de teflón. Cuando la estructura está aislada con un sistema flexible-friccionante, la ecuación del movimiento para la base viene dada por

$$m_b(\ddot{d}_b + a(t)) + c_b \dot{d}_b + k_b d_b + \mu g \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \text{sign}(d_b) + \mathbf{J}^T \mathbf{M} \left[ \sum_{i=1}^q \boldsymbol{\varphi}_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right] = 0 \quad (3.11)$$

Aquí,  $c_b$  y  $k_b$  son, respectivamente, el amortiguamiento y la rigidez del aislamiento de base,  $\mu_1$  es el coeficiente de fricción,  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $\boldsymbol{\varphi}_i$  está definido por la ecuación (3.4). La ecuación (3.11) describe el movimiento de la base en la fase de deslizamiento. Cuando las placas de fricción están pegadas entre sí, la condición de no deslizamiento dada por la ecuación (3.8) se reemplaza por la ecuación

$$\mu g - |a(t) + \omega^2 d_b + \mathbf{J}^T \left[ \sum_{i=1}^q \boldsymbol{\varphi}_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right]| > 0 \quad (3.12)$$

El no cumplimiento de la ecuación (3.12) indica la ocurrencia de deslizamiento y el movimiento estará gobernado por la ecuación (3.11). Durante la fase de deslizamiento, cuando la velocidad relativa llega a ser cero, la condición de no deslizamiento dada por la ecuación (3.12) debe ser comprobada; esto determina si la base se encuentra pegada a la cimentación o está deslizando.

La ecuación (3.5) junto con las ecuaciones (3.8) o (3.11) son resueltas simultáneamente para determinar las amplitudes modales y el desplazamiento de la base. Los valores recomendados de los parámetros para el sistema R-FBI son:  $T_0 = 4$  s (correspondiente a  $\omega_0 = \pi/2$  rad/s) y  $0.03 \leq \mu \leq 0.05$ ; también se recomiendan  $\mu = 0.04$  y  $\nu = 0.1$ .

### 3.2.5 Sistema electricité de France (EDF)

El sistema Electricité de France utiliza un apoyo elastomérico con uno de fricción en serie. Para una estructura con un sistema EDF, la ecuación del movimiento de la base en la fase de deslizamiento está dada por

$$m_b(\ddot{d}_b + a(t)) + \mu g \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \text{sign}(d_b - x) + \mathbf{J}^T \mathbf{M} \left[ \sum_{i=1}^q \varphi_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right] = 0 \quad (3.13)$$

$$c_b \dot{x} + k_b x + \mu g \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \text{sign}(d_b - x) = 0 \quad (3.14)$$

donde,  $k_b$  es la rigidez del apoyo elastomérico y  $\mu$  es el coeficiente de fricción. Cuando no hay deslizamiento en la placa de fricción, el aislador EDF se comporta como un apoyo de goma laminada y su movimiento está gobernado por

$$m_b(\ddot{x} + a(t)) + c_b \dot{x} + k_b x + \mathbf{J}^T \mathbf{M} \left[ \sum_{i=1}^q \varphi_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right] = 0 \quad (3.15)$$

$$\dot{d}_b - \dot{x} = 0 \quad (3.16)$$

En estas ecuaciones,  $d_b$  es el desplazamiento de la base relativo al terreno y  $x$  es el desplazamiento experimentado por el neopreno.

Cuando la base se encuentra pegada a la cimentación y es el apoyo elastomérico de arriba el que funciona, las ecuaciones (3.15) y (3.16) gobiernan el movimiento y la ecuación de no deslizamiento es

$$\mu g - |a(t) + \ddot{d}_b + \mathbf{J}^T \left[ \sum_{i=1}^q \varphi_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right]| > 0 \quad (3.17)$$

Cuando esta condición no se cumple, ocurre el deslizamiento y se aplican las ecuaciones (3.13) y (3.14). En la fase de deslizamiento, cuando  $(\dot{d}_b - \dot{x})$  se hace cero, la ecuación (3.17) debe ser comprobada para determinar si las placas de fricción están deslizando o si por el contrario continúan pegadas. En la práctica, un período de  $T_0 = 1$  s ( $\omega_0 = 2\pi$  rad/s) y  $\mu = 0.2$  son comúnmente utilizados.

### 3.2.6 Sistema neozelandés (NZ)

Este sistema propone, para reducir el deslizamiento relativo de la base y proveer una medida de disipación de energía, agregar un núcleo de plomo al apoyo de goma. Wen<sup>(25,26)</sup> sugiere un modelo histerético para describir el comportamiento de este tipo de aislamiento. De acuerdo con el modelo de Wen, la fuerza histerética restitutiva  $f$  se expresa

$$f = \alpha \frac{f^y}{d^y} d_b + (1 - \alpha) f^y z \quad (3.18)$$

Aquí,  $z$  es una componente histerética adimensional que satisface la ecuación diferencial no lineal de primer orden:

$$\dot{z} = A \dot{d}_b - \nu |z|^n \dot{d}_b - \gamma |z|^{n-1} z |d_b| \quad (3.19)$$

donde  $d^y$  y  $f^y$  son el desplazamiento y la fuerza límite de fluencia del amortiguador, respectivamente.  $A$ ,  $\nu$ ,  $\gamma$  y  $n$  son coeficientes que permiten la descripción de una clase muy amplia de ciclos histeréticos. El parámetro  $n$  es un entero, que controla la transición del comportamiento elástico al plástico de la respuesta y  $\alpha$  define el comportamiento post-fluencia del sistema. En la referencia (30) se sugieren los valores de  $f^y = 46\text{KN}$ ,  $d^y = 7.7\text{mm}$ ,  $\alpha = 0.157$ ,  $\nu = -0.54$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $A = 1$  y  $n = 1$ , para predecir la respuesta de los modelos experimentales de apoyo de goma laminada con corazón de plomo.

Para estructuras con un aislamiento de base histerético, la ecuación del movimiento de la base es

$$m_b(\ddot{d}_b + a(t)) + c_b \dot{d}_b + k_b d_b + \alpha \frac{f^y}{d^y} d_b + (1 - \alpha) f^y z + \mathbf{J}^T \mathbf{M} \left[ \sum_{i=1}^q \varphi_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right] = 0 \quad (3.20)$$

donde la componente histerética  $z$  está definida por la ecuación (3.19). En la ecuación (3.20),  $a(t)$  es la aceleración horizontal del terreno,  $c_b$  es el amortiguamiento y  $k_b$  la rigidez del aislamiento de base. Como se puede ver, el sistema de ecuaciones que gobierna el movimiento de la base está dado por las ecuaciones (3.19) y (3.20), que son resueltas simultáneamente con la ecuación (3.5) que gobierna la evolución en el tiempo de las amplitudes modales.

### 3.2.7 Sistema de deslizamiento flexible-friccionante (SR-F)

Debido a la presencia de dos coeficientes de fricción diferentes, las ecuaciones del movimiento del aislamiento de base SR-F se hacen algo más complicadas. En la fase de deslizamiento, dichas ecuaciones son

$$m_b(\ddot{d}_b + a(t)) + \mu g \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \text{sign}(d_b - x) + \mathbf{J}^T \mathbf{M} \left[ \sum_{i=1}^q \varphi_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right] = 0 \quad (3.21)$$

$$c_b \dot{x} + k_b x + \mu_1 g \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \text{sign}(x) + \mu g \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \text{sign}(d_b - x) = 0 \quad (3.22)$$

donde,  $\mu$  y  $\mu_1$  son los coeficientes de fricción de la placa de arriba y la placa de la parte de abajo del aislamiento, respectivamente. Cuando no ocurre deslizamiento en la placa superior, pero las placas friccionales de la parte de abajo del aislamiento están deslizando, las ecuaciones del movimiento llegan a ser

$$\dot{d}_b - \dot{x} = 0 \quad (3.23)$$

$$m_b(\ddot{x} + a(t)) + c_b \dot{x} + k_b x + \mu g \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \text{sign}(x) + \mathbf{J}^T \mathbf{M} \left[ \sum_{i=1}^q \varphi_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right] = 0 \quad (3.24)$$

En este caso, el comportamiento del aislamiento de base es idéntico al del sistema R-FBI. Cuando solamente deslizan las placas superiores, el aislamiento de base se comporta como un sistema de fricción pura y las ecuaciones del movimiento están dadas por

$$m_b(\ddot{d}_b + a(t)) + \mu g \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \text{sign}(d_b) + \mathbf{J}^T \mathbf{M} \left[ \sum_{i=1}^q \varphi_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right] = 0 \quad (3.25)$$

$$\dot{x} = 0 \quad (3.26)$$

Si no hay deslizamiento, la ecuación del movimiento se pone simplemente en la forma

$$\dot{d}_b = \dot{x} = 0 \quad (3.27)$$

La condición de no deslizamiento para la placa friccionante superior es

$$\mu g - \left| \dot{d}_b + a(t) + \mathbf{J}^T \left[ \sum_{i=1}^q \varphi_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right] \right| > 0 \quad (3.28)$$

La condición de reposo, para las láminas de fricción del cuerpo del aislamiento de base, viene dada por la desigualdad

$$\mu_1 g - \left| \dot{d}_b + a(t) + \omega^2 x + \mathbf{J}^T \left[ \sum_{i=1}^q \varphi_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right] \right| > 0 \quad (3.29)$$

Las amplitudes modales de la estructura  $y_i(t)$  y los coeficientes del vector modal  $\varphi_i$  están definidos por las ecuaciones (3.5) y (3.4), respectivamente. Para que la acción del sistema de aislamiento de base SR-F sea efectiva,  $\mu$  debe ser mayor que  $\mu_1$ . Para el sistema de aislamiento de base SR-F se utilizan los valores de  $\mu_1 = 0.04$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\nu = 0.1$  y un período natural de 4 s ( $\omega_0 = \pi/2$  rad/s).

### 3.3 MODELIZACIÓN DEL SISTEMA DE AISLAMIENTO

#### 3.3.1 Introducción

Los sistemas de aislamiento de base presentan generalmente un comportamiento no lineal que en la muchos casos es de tipo histerético. La fuerza restitutiva de un sistema histerético no solo depende del desplazamiento corriente, sino que también depende de su evolución en el tiempo. La modelización analítica y solución numérica son difíciles de obtener. Cuando el amortiguamiento del sistema es pequeño se puede utilizar el método de linelización equivalente.<sup>(28-30)</sup>

Lo que se desea es desarrollar un método para analizar la respuesta de sistemas con aislamiento de base histeréticos. Básicamente, el modelo utilizado es una extensión de la formulación de Markov y del procedimiento de solución de Galerkin para sistemas no lineales, pero no histeréticos, propuestos en la referencia (31). La extensión de este procedimiento ha hecho posible la obtención de un método de modelización versátil de fuerzas restitutivas histeréticas, compatible con la formulación Markov-Galerkin.

#### 3.3.2 Fuerza restitutiva histerética

La fuerza restitutiva de un sistema histerético no lineal puede ser descompuesta de la siguiente forma:

$$f = g(x, \dot{x}) + z(x) \quad (3.30)$$

en la cual  $g$  es una componente no histerética, función de la velocidad y de los desplazamientos instantáneos.  $z$  es la componente histerética, la cual es función de la evolución en el tiempo del desplazamiento. La componente  $g$  es un polinomio que, para una amplia clase de fuerzas, puede ser expresada como

$$g(x, \dot{x}) = j(x) + h(\dot{x}) \quad (3.31)$$

En esta ecuación se han utilizado las definiciones

$$j(x) = b_0 \text{sign}(x) + b_1 x + b_2 |x| + b_3 x^3 + \dots \quad (3.32)$$

$$h(\dot{x}) = a_0 \text{sign}(\dot{x}) + a_1 \dot{x} + a_2 |\dot{x}| + a_3 \dot{x}^3 + \dots \quad (3.33)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes. El propósito de este análisis es la modelización y solución de sistemas que contengan una componente histerética  $z(x)$ . El comportamiento de  $z(x)$  depende principalmente de las propiedades del material,

de la amplitud de respuesta y de las características estructurales. Sozen<sup>(32)</sup> e Iwan<sup>(33)</sup> han estudiado la histeresis en varios elementos estructurales en el rango inelástico y han dado varias reglas empíricas para su aplicación. De todas formas, con la excepción de sistemas bilineales, el análisis de sistemas gobernados por estas reglas presentan mucha dificultad.

Puede ser construído un modelo de fuerza restitutiva, que permite un tratamiento analítico, si  $x$  y  $z$  cumplen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\dot{z} = -\gamma |\dot{x}| z^n - \nu \dot{x} |z|^n + A\dot{x} \quad (3.34)$$

$$\dot{z} = -\gamma |\dot{x}| z^{n-1} |z| - \nu \dot{x} z^n + A\dot{x} \quad (3.35)$$

donde,  $n$ ,  $\gamma$ ,  $\nu$ , y  $A$  son constantes. Si  $n$  es impar se aplica la ecuación (3.34) y, en caso contrario, se utiliza la ecuación (3.35). Dependiendo de los valores de  $\dot{x}$  y  $z$ , las ecuaciones (3.34) y (3.35) pueden ser sintetizadas en la siguiente forma:

$$\frac{dz}{dx} = A \pm (\gamma \pm \nu) z^n \quad (3.36)$$

La ecuación (3.36) puede ser integrada y, a partir de ella, observarse la relación histerética existente entre  $z$  y  $x$ . La escala y la forma general del ciclo histerético están gobernadas por los parámetros  $A$ ,  $\gamma$ ,  $\nu$  y  $n$ . Para "ajustar" los valores de estas constantes se generan una serie de fuerzas restitutivas. Por ejemplo, para  $n = 1$ , la curva  $z - x$  es del tipo exponencial. En la figura 3.8 se ilustran variaciones de  $z$  correspondientes a desplazamientos periódicos para  $A = 1$  y una de las muchas combinaciones posibles de los valores de  $\gamma$  y  $\nu$ .

### 3.3.3 Fuerza restitutiva de fricción

Para la descripción del comportamiento de los elementos friccionales se propone el cálculo de la fuerza de fricción pura mediante la ecuación

$$f = \mu Q \text{sign}(\dot{d}_b) \quad (3.37)$$

en la cual  $Q$  es la fuerza normal a la superficie de fricción,  $\dot{d}_b$  es la velocidad de la base y  $\mu$  es el coeficiente de fricción. En este caso  $Q$  es el peso del edificio y  $\mu$  está definido por la ecuación

$$\mu = \mu_{max} - \Delta\mu e^{-\beta|\dot{d}_b|} \quad (3.38)$$



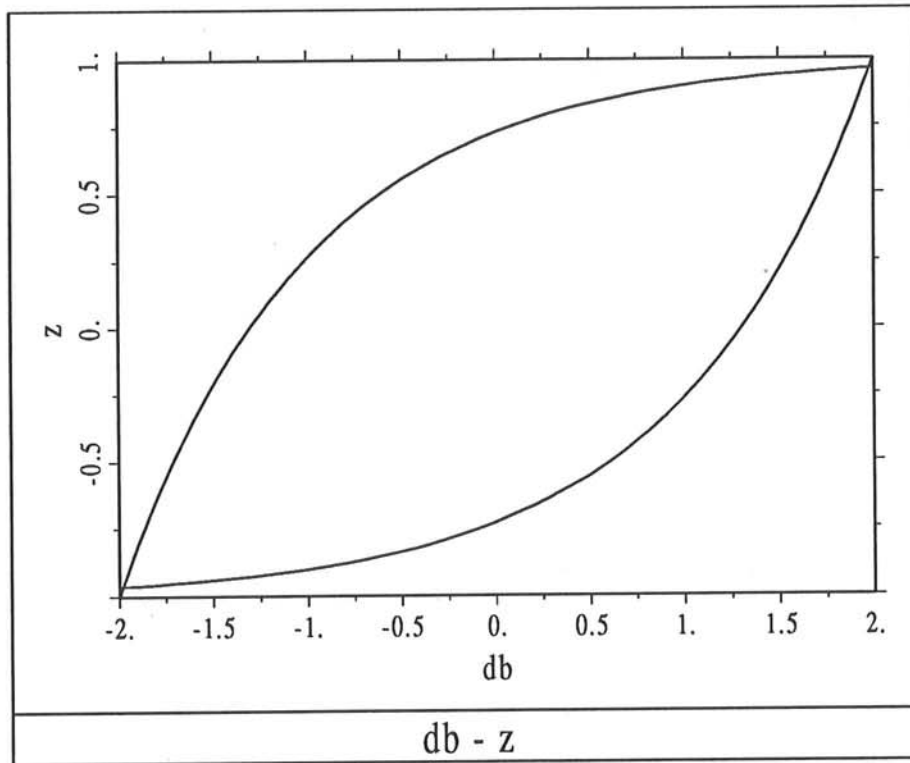


Figura 3.8 Fuerza restitutiva histérica de tipo exponencial ( $n = 1$ ).

donde  $\beta$  es una constante, y  $\mu_{max}$  es el coeficiente de fricción a gran velocidad de deslizamiento, mientras que  $\Delta\mu$  es la diferencia entre  $\mu_{max}$  y el coeficiente de fricción a baja velocidad de deslizamiento.

### 3.3.4 Modelo elastoplástico

Una manera sencilla de definir el comportamiento de la fuerza restitutiva es proponer un modelo elastoplástico, el cual se describe a continuación. El tramo  $AB$  de la figura 3.9 es una línea cuya pendiente está dada por la relación entre la fuerza límite de fluencia  $f^y$  y el desplazamiento de fluencia  $d^y$  del aislamiento de la base. Este tramo define la fuerza restitutiva mientras ésta sea menor que el límite de fluencia. Después de superar el límite de fluencia  $f^y$ , la fuerza restitutiva estará definida por el tramo  $BC$  de la figura 3.9, el cual caracteriza el "endurecimiento" del modelo constitutivo. Cuando el desplazamiento decrece o cambia de sentido, la fuerza estará dada por el tramo  $DE$ , el cual es paralelo al tramo  $BC$ . El paso del tramo  $BC$  al  $DE$  se realiza a lo largo del tramo  $CD$ , el cual es paralelo al tramo  $AB$ .

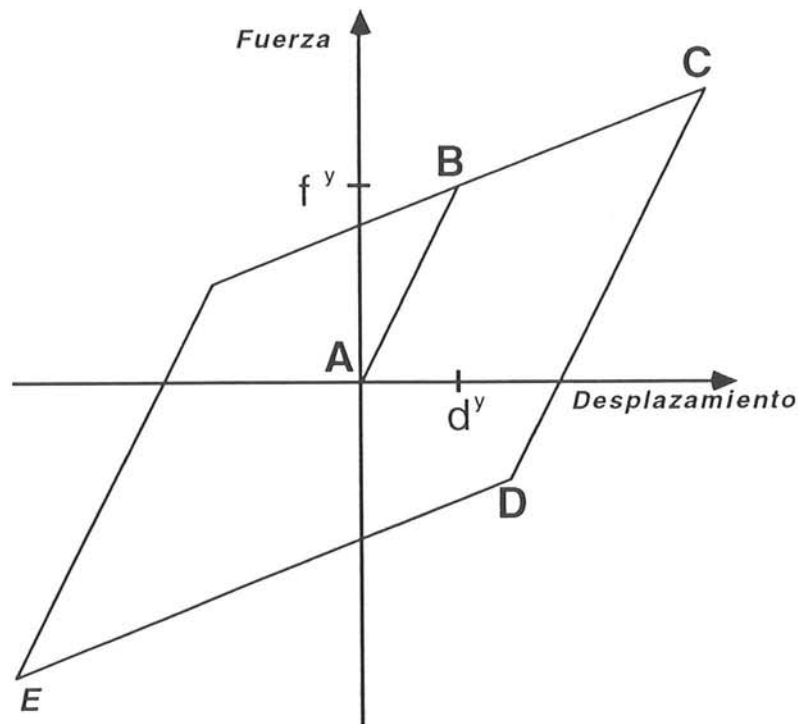


Figura 3.9 Modelo elastoplástico.

### REFERENCIAS

1. SKINNER, R. I., ROBINSON, W. H. y McVERRY, G. H., *An Introduction to Seismic Isolation*, John Wiley & Sons, 1993.
2. KELLY, J. M., "Aseismic base isolation: Review and bibliography", *Soil Dynamic and Earthquake Engineering*, 5, 202-216, 1986.
3. CHEN, D. y CLOUGH, R. W., "Earthquake response of structures with friction sliding motion", Draft, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkely, 1981.
4. YOUNIS, C. J. y TADJBAKHSI, I. G., "Response of sliding rigid structure to base excitation", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 110, 417-432, 1984.
5. AHMADI, G., "Stochastic earthquake response of structures on sliding foundation", *International Journal of Engineering Science*, 21, 93-102, 1983.
6. SU, L., ORABI, I. I. y AHMADI, G., "Nonstationary earthquake response of a sliding rigid structure", *International Journal of Engineering Science*, 26, 1013-1026, 1988.
7. LI, L., "Base isolation measure for aseismic building in China", *Proceedings, 8th World Conference on Earthquake Engineering, San Francisco*, VI, 791-798, 1984.
8. LI, L., "Advances in base isolation in China", *3rd International Conference on Soil*

- Dynamics and Earthquake Engineering, Princeton University, Princeton, 1987.*
9. KELLY, J. M. y HODDER, S. B., "Experimental study of lead and elastomeric dampers for base isolation systems in laminated Neoprene bearings", *Bulletin of the New Zealand National Society Earthquake Engineering*, **15**, 53-67, 1982.
  10. HUFFMANN, G. R., "Full base isolation for earthquake protection by helical springs and viscodampers", *Nuclear Engineering Design*, **84**, 331-338, 1985.
  11. MOSTAGHEL, N., "Resilient-friction base isolator", Report UTEC 84-097, The University of Utah, 1984.
  12. MOSTAGHEL, N., HEJAZI, M., y KHODAVERDIAN M., "Response of structures supported on resilient-friction base isolator", *Proceedings, 3rd U.S. National Conference on Earthquake Engineering*, Charleston, South Carolina, 1993-2003, 1986.
  13. MOSTAGHEL, N. y KHODAVERDIAN, M., "Dynamics of resilient-friction base isolator (R-FBI)", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **15**, 379-390, 1987.
  14. IKONOMOU, A. S. "Alexisismon seismic isolation levels for traslational and rotational seismic input", *Proceedings, 8th World Conference Earthquake Engineering, San Francisco*, **V**, 975-982, 1984.
  15. GUERAUD, R., NOEL-LEROUX, J.-P, LIVOLANT, M. y MICHALOPOULOS, A. P., "Seismic isolation using sliding-elastomer bearing pads", *Nuclear Engineering Design*, **84**, 363-377, 1985.
  16. BUCKLE, I. G., "New Zealand seismic base isolation concepts and their application to nuclear engineering", *Nuclear Engineering Design*, **84**, 313-326, 1985.
  17. SKINNER, R. I., KELLY, M. y HEINE, A. J., "Hysteretic dampers for earthquake resistant structures", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **3**, 287-296, 1975.
  18. CONSTANTINOU, M. C. y TADJBAKHSI, I. G., "Hysteretic dampers in base isolation: Random approach", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **111**, 705-721, 1985.
  19. ROBINSON, W. H. y TUCKER, A. G., "A lead-rubber shear damper", *Bulletin of the New Zealand National Society of Earthquake Engineering*, **10**, 151-153, 1977.
  20. SU, L., AHMADI, G. y TADJBAKHSI, I. G., "A comparative study of base isolation systems", Clarkson University, Report No MIE-150, Potsdam, 1987.
  21. HADJIAN, A. H., y TSENG, W. S., "A comparative evaluation of passive seismic isolation schemes, in Base Isolation and Passive Energy Dissipation", (Editor Rojahn C.), *ATC-17, National Bureau of Standards*, 291-304, 1986.
  22. SU, L., AHMADI, G. y TADJBAKHSI, I. G., "A comparative study of performances of various base isolation systems, Part I: Shear beam structures", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **18**, 11-32, 1989.
  23. MOSTAGHEL, N. y TANBAKUCHI, J., "Response of sliding structures to earthquake support motion", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **11**, 729-748, 1983.
  24. KELLY, J. M. y BEUCKE, K. E., "A friction damped base isolation system with fail-safe characteristics", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **11**, 33-56, 1983.

25. AHMADI, G. y MOSTAGHEL, N., "On dynamics of a structures with a frictional foundation", *Journal de Mecanique Theorique Appliquee*, **3**, 271-285, 1984.
26. WEN, Y.-K., "Method for random vibration of hysteretic systems", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, **102**, 249-263, 1976.
27. WEN, Y.-K., "Equivalent linearization for hysteretic systems under random excitation", *Journal of Applied Mechanics, ASME* **47**, 150-154, 1980.
28. CAUGHEY, T. K., "Equivalent linearization technique", *Journal of the Acoustic Society of America*, **35(11)**, 1706-1711, 1963.
29. IWAN, W. D., "A generalization of the method of equivalent linearization", *International Journal of Nonlinear Mechanics*, **8**, 1973
30. IWAN, W. D. y YANG I.-M., "Application of statistical linearization techniques to Nonlinear Multi-Degree-of-Freedom Systems", *Journal of Applied mechanics*, **359(2)**, 1972.
31. WEN, Y.-K., "Approximate Method for Nonlinear Random Vibration", *Journal of Mechanics Division, ASCE*, **101(8)**, 389-401, 1975.
32. SOZEN, M. A., "Hysteresis in structural elements", *Applied Mechanics in Earthquake Engineering, American Society of Mechanical Engineers Annual Meeting, AMD 8*, 63-98, 1974.
33. IWAN, W. D., "Application of nonlinear analysis techniques", *Applied Mechanics in Earthquake Engineering, American Society of Mechanical Engineers Annual Meeting, AMD 8*, 135-162, 1974.
34. BARBAT, A. H., MOLINARES, N. y CANAS, J. A., "Simulación de Sistemas de Apoyo Antisísmico con Comportamiento No Lineal", *Segundo Congreso Métodos Numéricos en Ingeniería*, **1** 359-368, La Coruña, 1993.
35. Structural Engineering Association of California, "Tentative general requirements for the design and construction of seismic isolated structures", Appendix II of *Recommended Lateral Force Requirements and Commentary, Blue Book*, California, 1990.
36. NAGARAJIAH, S., REINHORN A. M. y CONSTANTINOU, M. C., Nonlinear Dynamic Analysis of Three - Dimensional Base Isolated Structures (3D-BASIS), National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo, Technical Report NCEER-89-0019, August 1989.
37. NAGARAJIAH, S., REINHORN A. M. y CONSTANTINOU, M. C., 3D-BASIS - Nonlinear Dynamic Analysis of Three - Dimensional Base Isolated Structures: Part II, National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo, Technical Report NCEER-91-0005, February 1991.
38. JANE, L. A. y BARBAT, A. H., *Estructuras de edificación con aislamiento antisísmico*, Monografía No. 13, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, 1992.
39. CONSTANTINOU, M. C. y TADJBAKHSI, I. G., "Response of a sliding structures to filtered random excitation", *Journal of Structural Mechanics* **12**, 401-418, 1984.
40. MEIROVITCH, L., "Analytical Methods in vibrations", Macmillan, New York, 1967.

41. MOSTAGHEL, N. y NOWROOZI, A. A., "Earthquake response of hills" , *Bulletin of Seismic Society American*, **65**, 1733-1742, 1975.
42. AHMADI, G., "Earthquake response of linear continuous systems", *Nuclear Engineering Design*, **50**, 327-345, 1978.
43. SU, L. y AHMADI, G., "Earthquake response of linear continuous structures by the method of evolutionary spectra", *Engineering and Structures*, **10**, 47-56, 1988.

# CAPÍTULO 4

## PROCEDIMIENTOS DE SOLUCIÓN

### 4.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 3 se ha visto como en las ecuaciones del movimiento de la estructura ha sido utilizado el desacoplamiento modal. En este capítulo se describen y analizan los métodos utilizados para solucionar las ecuaciones desarrolladas. El procedimiento numérico desarrollado se basa en las siguientes suposiciones:

- La estructura siempre permanece dentro del rango elástico.
- Cada piso tiene un único grado de libertad en la dirección horizontal.
- La base, al igual que cada uno de los pisos, tiene un único grado de libertad en la dirección horizontal.
- El aislamiento de la base es rígido en la dirección vertical.
- Se desprecia la deformación por axil de las columnas de la estructura.
- Se supone el mismo desplazamiento horizontal para todos los puntos de una misma planta (los forjados se comportan en su plano como diafragmas rígidos).

Las ecuaciones del movimiento se resuelven utilizando un método de integración paso a paso, aplicando un esquema implícito, en el cual el desplazamiento  $D_{i+1}$  correspondiente al instante  $t_{i+1}$  se obtiene a partir de la ecuación diferencial planteada en el instante  $t_{i+1}$ . La respuesta se obtiene por lo tanto como solución de un sistema de ecuaciones algebraicas.

En secciones siguientes se estudian las características más importantes del método de integración directa utilizado, que es el método de Newmark. En lo que se refiere al modelo histerético, la fuerza  $f$  se calcula mediante esquema de Runge-Kutta de cuarto orden.

## 4.2 MÉTODO DE NEWMARK

### 4.2.1 Métodos de integración paso a paso

Los métodos de integración directa permiten hallar la historia de la respuesta dinámica en el tiempo tanto para sistemas lineales como para sistemas no lineales. El punto de partida lo constituye la ecuación del movimiento (3.1) o (3.3). La respuesta no se obtiene como una función continua sino únicamente en una serie de instantes predefinidos  $t_i$ . La forma general de proceder consiste en expresar las velocidades y aceleraciones en un instante de tiempo determinado en función únicamente del corrimiento correspondiente al instante en que se quiere hallar la solución y de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones ya conocidos correspondientes a instantes anteriores. Estas ecuaciones en diferencias, juntamente con la ecuación diferencial particularizada para  $t = t_i$  o  $t = t_{i+1}$ , permiten obtener la solución conociendo la de los instantes de tiempos anteriores. Se llega por tanto para cada caso a una ecuación recurrente de la forma

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{Y}_i + \mathbf{Z}_{i+\alpha} \quad (4.1)$$

donde  $\mathbf{Y}$  es la respuesta de la estructura y  $\mathbf{A}$  es una matriz característica de cada esquema de integración. El término  $\mathbf{Z}_{i+\alpha}$  hace referencia a las ordenadas del acelerograma incluidas en el análisis para el cálculo de la respuesta en  $t_{i+1}$ .

Tal como se ha dicho, en este caso el método utilizado está basado en un esquema implícito, el de Newmark, el cual es incondicionalmente estable.

### 4.2.2 Ecuaciones en diferencias finitas

Se considera la variación de la aceleración  $\ddot{\mathbf{D}}(t)$  entre dos instantes de tiempo consecutivos  $t_i$  y  $t_i + \Delta t$  (ver figura 4.1). Se realiza el cambio de variable  $\tau = t - t_i$  de tal forma que para  $t = t_i$  el valor de  $\tau$  sea cero y para  $t = t_i + \Delta t$  valga  $\Delta t$ . Se supone que el valor del vector de aceleración en un instante  $\tau \leq \Delta t$  es

$$\ddot{\mathbf{D}}(\tau) = \ddot{\mathbf{D}}_i + f(\tau)(\ddot{\mathbf{D}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{D}}_i) \quad (4.2)$$

de tal manera que la función  $f(\tau)$  valga cero para  $\tau = 0$  y uno para  $\tau = \Delta t$ . La expresión (4.2) supone que la ley de variación de las aceleraciones en el intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$  es la misma para todos los grados de libertad.

La velocidad  $\dot{\mathbf{D}}(\tau)$  se puede expresar de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{D}}(\tau) = \dot{\mathbf{D}}_i + \ddot{\mathbf{D}}_i \tau + (\ddot{\mathbf{D}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{D}}_i) \int_0^\tau f(\tau) d\tau \quad (4.3)$$

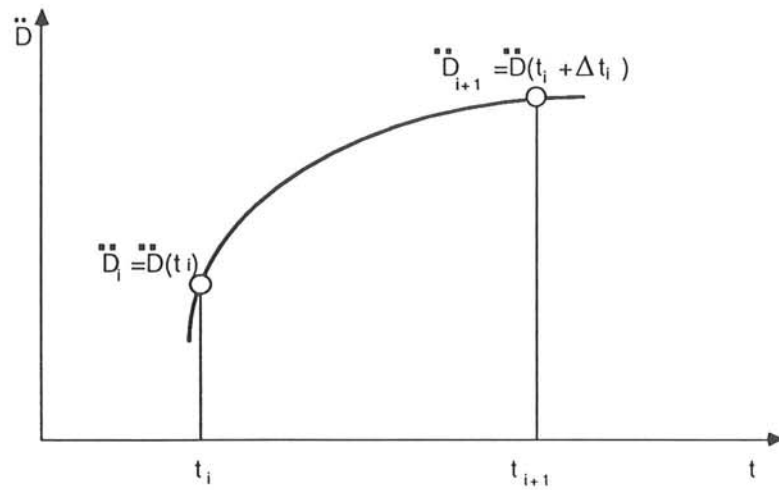


Figura 4.1 Variación de la aceleración en el tiempo.

Realizando la sustitución:

$$g(\tau) = \int_0^\tau f(\tau) d\tau \quad (4.4)$$

y también

$$\gamma = \int_0^{\Delta t} f(\tau) d\tau \quad (4.5)$$

la expresión (4.3) queda

$$\dot{D}(\tau) = \dot{D}_i + \ddot{D}_i \tau + (\ddot{D}_{i+1} - \ddot{D}_i) g(\tau) \quad (4.6)$$

y, para  $\tau = \Delta t$ , las ecuaciones (4.6) y (4.5) proporcionan

$$\dot{D}_{i+1} = \dot{D}_i + \ddot{D}_i \Delta t + (\ddot{D}_{i+1} - \ddot{D}_i) \gamma \quad (4.7)$$

$$\dot{D}_{i+1} = \dot{D}_i + [(1-\gamma)\ddot{D}_i + \gamma\ddot{D}_{i+1}] \Delta t \quad (4.8)$$

Para calcular los desplazamientos se integra (4.6), lo que permite escribir:

$$D(\tau) = D_i + \dot{D}_i \tau + \ddot{D}_i \frac{\tau^2}{2} + (\ddot{D}_{i+1} - \ddot{D}_i) \int_0^\tau g(\tau) d\tau \quad (4.9)$$

Particularizando ahora para  $\tau = \Delta t$  e introduciendo la notación



$$\beta = \int_0^{\Delta t} g(\tau) d\tau \quad (4.10)$$

se obtiene la relación final:

$$\mathbf{D}_{i+1} = \mathbf{D}_i + \dot{\mathbf{D}}_i \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{D}}_i + \beta \ddot{\mathbf{D}}_{i+1} \right] \Delta t^2 \quad (4.11)$$

Las expresiones (4.8) y (4.11) constituyen las ecuaciones en diferencias de Newmark, las cuales, juntamente con la ecuación diferencial del movimiento (3.1) o (3.3), permiten hallar los vectores de desplazamientos, velocidad y aceleración en el instante  $t_{i+1}$ .

### 4.2.3 Análisis lineal

La ecuación que rige el movimiento en régimen elástico de una estructura con varios grados de libertad, viene dada por

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{K} \mathbf{D} = -\mathbf{M} \mathbf{J} a(t) \quad (4.12)$$

Esta ecuación en el tiempo  $t = t_{i+1}$  toma la forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{D}}_{i+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{D}}_{i+1} + \mathbf{K} \mathbf{D}_{i+1} = -\mathbf{M} \mathbf{J} a_{i+1} \quad (4.13)$$

De las ecuaciones (4.8) y (4.11) se obtiene

$$\ddot{\mathbf{D}}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{D}_{i+1} - \mathbf{D}_i) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\mathbf{D}}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{\mathbf{D}}_i \quad (4.14)$$

e, introduciendo estas expresiones en la ecuación del movimiento (4.12), ésta puede expresarse de la siguiente manera:

$$\mathbf{K}^* \mathbf{D}_{i+1} = \mathbf{P}_{i+1} \quad (4.15)$$

en donde

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i+1} = & -\mathbf{M} \mathbf{J} a_{i+1} + \mathbf{M} \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{D}_i + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{D}}_i + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{D}}_i \right] \\ & + \mathbf{C} \left[ \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{D}_i + \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{D}}_i + \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{D}}_i \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (4.15) se obtienen los desplazamientos  $\mathbf{D}_{i+1}$  y, una vez calculado este valor, sustituyendola en (4.14) y (4.8) se obtienen las aceleraciones y las velocidades en el instante de tiempo  $t_{i+1}$ . Para el primer instante de tiempo  $t=t_1=\Delta t$  en que se calcula la respuesta, es preciso conocer los valores del desplazamiento, velocidad y aceleración en el instante cero, es decir  $\mathbf{D}_0$ ,  $\dot{\mathbf{D}}_0$  y  $\ddot{\mathbf{D}}_0$ , respectivamente. Generalmente, las condiciones iniciales corresponden a desplazamiento y velocidad nulos y, consecuentemente, la aceleración será

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{D}}_0 = -\mathbf{M} \mathbf{J} a_0 \quad (4.18)$$

#### 4.2.4 Análisis no lineal

En el caso del análisis no lineal, la matriz  $\mathbf{K}$  de la expresión (4.13) ya no es constante, por lo que se tendrá que recurrir a la formulación

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{D}}^{t+\Delta t} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{D}}^{t+\Delta t} + \int_V \mathbf{b}^T \Delta \sigma dV = -\mathbf{M} \mathbf{J} a(t) - \mathbf{F}_R \quad (4.19)$$

obtenida en la referencia (1) para un modelo de elementos finitos a partir del principio de los trabajos virtuales. Solucionar la ecuación (4.19) presenta dificultades suplementarias al no poderse escribir el término integral en función de una matriz  $\mathbf{K}$ .

Aplicando el método de Newmark a la ecuación (4.19), explicitada para el instante  $t_{i+1}$ , se tiene

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{D}}_{i+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{D}}_{i+1} + \int_V \mathbf{b}^T \Delta \sigma_{i+1} dV = \mathbf{Q}_{i+1} \quad (4.20)$$

$$\ddot{\mathbf{D}}_{i+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{D}_{i+1} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{D}}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{\mathbf{D}}_i \quad (4.21)$$

$$\dot{\mathbf{D}}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{D}_{i+1} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\mathbf{D}}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{\mathbf{D}}_i \quad (4.22)$$

donde

$$\mathbf{Q}_{i+1} = -\mathbf{M} \mathbf{J} a_{i+1} - \int_V \mathbf{b}^T \Delta \sigma_i dV \quad (4.23)$$

y

$$\Delta \mathbf{D}_{i+1} = \mathbf{D}_{i+1} - \mathbf{D}_i \quad (4.24)$$

Linealizando la ecuación (4.20)

$$\Delta\sigma_{i+1} = \mathbf{D}_{ep} \mathbf{b} \Delta\mathbf{D}_{i+1} \quad (4.25)$$

el término integral queda como

$$\int_V \mathbf{b}^T \Delta\sigma_{i+1} dV = \mathbf{K} \Delta\mathbf{D}_{i+1} \quad (4.26)$$

donde

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{b}^T \mathbf{D}_{ep} \mathbf{b} dV \quad (4.27)$$

de esta manera la ecuación (4.20) puede expresarse en la forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}}_{i+1} + \mathbf{K} \Delta\mathbf{D}_{i+1} = \mathbf{Q}_{i+1} \quad (4.28)$$

En un primer paso se sustituyen las ecuaciones (4.21) y (4.22) en (4.28), con lo que

$$\mathbf{K}^* \Delta\mathbf{D}_{i+1}^{(1)} = \mathbf{F}_{i+1}^{*(1)} \quad (4.29)$$

donde

$$\mathbf{K}^* = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (4.30)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+1}^{*(1)} = & \mathbf{Q}_{i+1} + \mathbf{M} \left[ \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{D}}_i + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{D}}_i \right] \\ & - \mathbf{C} \left[ \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{D}}_i + \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{D}}_i \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

El sistema linealizado (4.29) se resuelve, obteniéndose un primer valor de  $\Delta\mathbf{D}_{i+1}$

$$\Delta\mathbf{D}_{i+1}^{(1)} = \mathbf{K}^{*-1} \mathbf{F}_{i+1}^{(1)} \quad (4.32)$$

Los valores de las aceleraciones, velocidades y desplazamientos totales son calculados a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{\mathbf{D}}_{i+1}^{(1)} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \Delta\mathbf{D}_{i+1}^{(1)} - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{D}}_i - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{D}}_i \quad (4.33)$$

$$\dot{\mathbf{D}}_{i+1}^{(1)} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{D}_{i+1}^{(1)} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\mathbf{D}}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{\mathbf{D}}_i \quad (4.34)$$

$$\mathbf{D}_{i+1}^{(1)} = \mathbf{D}_i + \Delta \mathbf{D}_{i+1}^{(1)} \quad (4.35)$$

Como, por lo general, éste no es el valor correcto, se realizan iteraciones sucesivas. Para esto, es necesario calcular las fuerzas residuales correspondientes a este primer paso. Resolviendo la condición de plasticidad se calculan las tensiones  $\Delta \sigma_{i+1}^{(1)}$ . Las tensiones totales después del primer paso son

$$\sigma_{i+1}^{(1)} = \sigma_i + \Delta \sigma_{i+1}^{(1)} \quad (4.36)$$

las fuerzas residuales están dadas por la ecuación

$$\mathbf{Q}_{i+1}^{(1)} = -\mathbf{M} \mathbf{J} a_{i+1} - \int_V \mathbf{b}^T \sigma_{i+1}^{(1)} dV \quad (4.37)$$

En este proceso, la solución del paso  $n$  se obtiene a partir del paso  $n-1$ . En el paso  $n$  las ecuaciones (4.21) y (4.22) quedan de la forma

$$\ddot{\mathbf{D}}_{i+1}^{(n)} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{D}_{i+1}^{(n)} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{D}}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{\mathbf{D}}_i \quad (4.38)$$

$$\ddot{\mathbf{D}}_{i+1}^{(n)} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \delta \mathbf{D}_{i+1}^{(n)} + \ddot{\mathbf{D}}_{i+1}^{(n-1)} \quad (4.39)$$

$$\dot{\mathbf{D}}_{i+1}^{(n)} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{D}_{i+1}^{(n)} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\mathbf{D}}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{\mathbf{D}}_i \quad (4.40)$$

$$\dot{\mathbf{D}}_{i+1}^{(n)} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \delta \mathbf{D}_{i+1}^{(n)} + \dot{\mathbf{D}}_{i+1}^{(n-1)} \quad (4.41)$$

donde

$$\delta \mathbf{D}_{i+1}^{(n)} = \Delta \mathbf{D}_{i+1}^{(n)} - \Delta \mathbf{D}_{i+1}^{(n-1)} \quad (4.42)$$

A este paso  $n$  le corresponden unas ecuaciones del movimiento definidas de la forma

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{D}}_{i+1}^{(n)} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{D}}_{i+1}^{(n)} + \mathbf{K} \delta \mathbf{D}_{i+1}^{(n)} = \mathbf{Q}_{i+1}^{(n-1)} \quad (4.43)$$

en la cual

$$Q_{i+1}^{(n-1)} = -M J a_{i+1} - \int_V \mathbf{b}^T \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{(n-1)} dV \quad (4.44)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{(n-1)}$  es el vector de tensiones correspondientes al desplazamiento  $\mathbf{D}_{i+1}^{(n-1)}$ .  
Reemplazando las ecuaciones (4.39) y (4.41) en la ecuación (4.43), se obtiene

$$K^* \delta \mathbf{D}^{(n)} = \mathbf{F}_{i+1}^{*(n)} \quad (4.45)$$

siendo

$$\mathbf{F}_{i+1}^{*(n)} = Q_{i+1}^{(n-1)} - [M \ddot{\mathbf{D}}_{i+1}^{(n-1)} + C \dot{\mathbf{D}}_{i+1}^{(n-1)}] \quad (4.46)$$

Después de resolver el sistema (4.45) y aplicar la condición de plasticidad, se obtienen las tensiones  $\Delta \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{(n)}$ , las aceleraciones, velocidades y las fuerzas residuales  $Q_{i+1}^{(n)}$

$$Q_{i+1}^{(n)} = Q_{i+1} - \int_V \mathbf{b}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{(n)} dV \quad (4.47)$$

El proceso iterativo se repite hasta que se cumpla la condición impuesta como tolerancia, es decir cuando

$$\frac{|\delta \mathbf{D}^{(n)}|}{|\mathbf{D}_i + \Delta \mathbf{D}_{i+1}^{(n)}|} \leq \text{Tolerancia} \quad (4.48)$$

### 4.3 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

#### 4.3.1 Descripción del método

Los métodos de Runge-Kutta tienen la exactitud del esquema de la serie de Taylor sin necesitar del cálculo de derivadas superiores. Existen muchas variantes pero todas ellas se pueden ajustar a la forma general

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \quad (4.49)$$

donde  $\phi(x_i, y_i, h)$  se llama función de incremento y puede interpretarse como el promedio de la pendiente sobre el intervalo. La función de incremento se puede escribir en forma general como

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n \quad (4.50)$$

en donde las  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  son constantes y las  $k_i$  son

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (4.51a)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{1,1} k_1 h) \quad (4.51b)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{2,1} k_1 h + q_{2,2} k_2 h) \quad (4.51c)$$

⋮  
⋮  
⋮

$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h) \quad (4.51d)$$

Se puede observar que los coeficientes  $k_i$  están definidos por relaciones recurrentes. Esto es,  $k_1$  aparece en la ecuación de  $k_2$  que a su vez aparece en la ecuación de  $k_3$ , etc. Esta recurrencia hace a los métodos de Runge-Kutta eficientes para su cálculo en ordenador.

Se pueden desarrollar varios métodos de Runge-Kutta, empleando un número diferente de términos en la función de incremento. Hay que destacar que el método de Runge-Kutta de primer orden, para  $n = 1$ , es de hecho, el método de Euler. Una vez escogido  $n$ , los valores de  $a_i$ ,  $p_i$  y  $q_{i,j}$  se evalúan igualando la ecuación (4.49) a los términos de una expansión de la serie de Taylor. Por lo tanto, al menos para valores menores de la orden, el número de términos  $n$  representa el orden del método. Por ejemplo, los métodos de Runge-Kutta de segundo orden utilizan una función de incremento con dos términos ( $n = 2$ ). Debido a que se desprecian los términos con  $h^3$  y de orden superior durante la derivación, el error local de truncamiento es  $O(h^3)$  y el error global es de  $O(h^2)$ .

### 4.3.2 Método de Runge-Kutta de cuarto orden

El método de Runge-Kutta más usado es el de cuarto orden, por lo que existen diferentes versiones de este procedimiento. En este método, la derivada es evaluada cuatro veces en cada paso y, a partir de estas derivadas es obtenido el valor final de la función (ver figura 4.2). Dicho método puede formularse de la siguiente forma:

$$y_{i+1} = y_i + \left[ \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \right] h \quad (4.52)$$

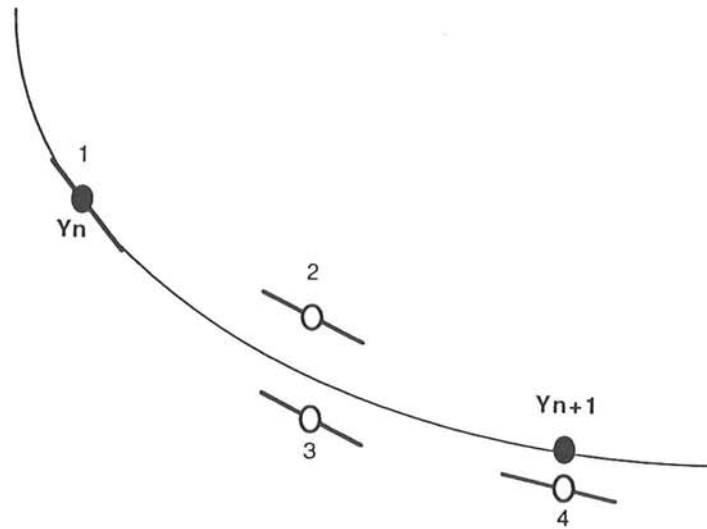


Figura 4.2 Método de Runge-Kutta de cuarto orden.

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (4.53a)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \quad (4.53b)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right) \quad (4.53c)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3) \quad (4.53d)$$

En este caso, el error global de truncamiento es  $O(h^4)$ .

#### 4.4 CÁLCULO DE LA RESPUESTA DEL SISTEMA

El movimiento del sistema está gobernado por las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{\mathbf{y}}_j(t) + 2\nu_j \omega_j \dot{\mathbf{y}}_j(t) + \omega_j^2 \mathbf{y}_j(t) = -\frac{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{J}}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j} [\ddot{\mathbf{d}}_b + a(t)] \quad (4.54)$$

$j = 1, 2, \dots, q$  correspondientes al movimiento de la estructura y

$$m_b(\ddot{d}_b + a(t)) + \mathbf{J}^T \mathbf{M} \left[ \sum_{i=1}^q \varphi_i \ddot{\mathbf{y}}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right] + c_b \dot{d}_b + k_b d_b + f = 0 \quad (4.55)$$

que describe el movimiento de la base con  $c_b$ ,  $k_b$  y  $f$  definidos por el sistema de aislamiento.

El sistema de ecuaciones (4.54) y (4.55) puede escribirse en la siguiente forma compacta

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{y}}^* + \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{y}}^* + \mathbf{K}^* \mathbf{y}^* = -\mathbf{P}^* a(t) - \mathbf{F}^* \quad (4.56)$$

donde

$$\ddot{\mathbf{y}}^* = \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{y}} \\ \ddot{d}_b \end{pmatrix}_{(q+1,1)}$$

$$\dot{\mathbf{y}}^* = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \dot{d}_b \end{pmatrix}_{(q+1,1)}$$

$$\mathbf{y}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ d_b \end{pmatrix}_{(q+1,1)}$$

$$\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} [\mathbf{I}] & \begin{bmatrix} \frac{\varphi^T \mathbf{M} \mathbf{J}}{\varphi^T \mathbf{M} \varphi} \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}^T \mathbf{M} \varphi & \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} + m_b \end{pmatrix}_{(q+1, q+1)}$$

$$\mathbf{C}^* = \begin{pmatrix} [2\nu_j \omega_j] & 0 \\ 0 & c_b \end{pmatrix}_{(q+1, q+1)}$$

$$\mathbf{K}^* = \begin{pmatrix} [\omega_j^2] & 0 \\ 0 & k_b \end{pmatrix}_{(q+1, q+1)}$$

$$\mathbf{P}^* = \begin{pmatrix} \frac{\varphi^T \mathbf{M} \mathbf{J}}{\varphi^T \mathbf{M} \varphi} \\ \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} + m_b \end{pmatrix}_{(q+1, 1)}$$

$$\mathbf{F}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}_{(q+1, 1)}$$

Después de haber definido los términos de la ecuación (4.56), se puede iniciar el procedimiento de cálculo de la respuesta del sistema.



#### 4.5 PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO

El procedimiento que se desarrolla se basa en la resolución de la ecuación (4.56) mediante integración paso a paso, teniendo en cuenta que se ha definido un modelo lineal para la estructura — ecuación (4.54) — y uno no lineal para la base — ecuación (4.55) —. La fuerza  $f$  se calcula solucionando numéricamente la ecuación (3.50).

A continuación se describe sintéticamente el procedimiento considerado:

- 1) El estado de movimiento se inicializa, especificando los valores iniciales de la velocidad y del desplazamiento.
- 2) Se calculan los autovectores y autovalores correspondientes a los  $q$  primeros modos de vibración considerados en el análisis. El problema de autovalores

$$|K - \omega^2 M| \varphi = 0 \quad (4.57)$$

se resuelve utilizando un método que proporcione los modos de vibración requeridos, en este caso, el *Determinant Search Method*;  $\varphi$  es el autovector normalizado y  $\omega$  son los autovalores.

- 3) Se formula el estado del sistema.
- 4) A partir de los valores iniciales de desplazamiento, velocidad y aceleración de respuesta de la estructura, se comienza el proceso de cálculo.
- 5) La fuerza histerética se calcula solucionando numéricamente la ecuación (3.50). En este trabajo, se utiliza un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden, el cual aproxima bien la solución en el intervalo de definición de la ecuación si se utilizan incrementos de desplazamiento  $d_b$  adecuados. En este caso, el incremento de desplazamiento considerado en el proceso de resolución está relacionado con el incremento de tiempo  $\Delta t$  utilizado en la discretización de la excitación  $a(t)$ , mientras que el intervalo de definición es igual a los desplazamientos tope que caracterizan cada sistema de apoyo en concreto. De esta manera, se determina el valor de la variable  $z$  de la ecuación (3.50).
- 6) Se resuelven las ecuaciones del movimiento, utilizando el método de integración paso a paso de Newmark.
- 7) Se calcula la respuesta en el tiempo  $D(t)$  del sistema con aislamiento de base, incluyendo los  $q$  modos de vibración calculados.

Los cálculos previstos en los pasos 5, 6 y 7 del procedimiento se deben repetir en cada instante de tiempo utilizado en la discretización del acelerograma  $a(t)$  que describe la excitación.

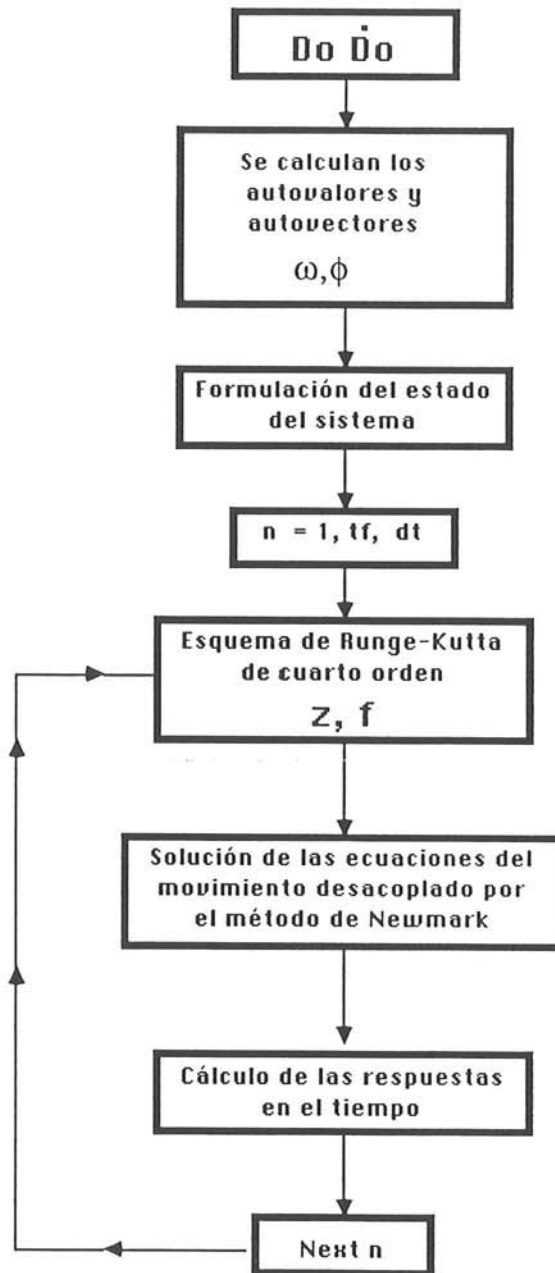


Figura 4.3 Algoritmo de cálculo.

## REFERENCIAS

1. CANET J. M. y BARBAT A. H., *Estructuras Sometidas a Acciones Sísmicas - Cálculo por ordenador*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, 1988.
2. CHAPRA y S. C., CANALE R. P., *Numerical Methods For Engineer with Personal*

- Computer Applications*, McGraw-Hill, 1990.
3. BARBAT A. H., MOLINARES N. y CANAS J. A., "Simulación de Sistemas de Apoyo Antisísmico con Comportamiento No Lineal", *Segundo Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, 1, 359-368, La Coruña, 1993.
  4. CRAIG R. Jr., *Structural Dynamics - An Introduction to Computer Methods*, Jhon Wiley & Sons, 1981.
  5. NAGARAJAIAH S., REINHORN A. M. y CONSTANTINOU M. C., Nonlinear Dynamic Analysis of Three - Dimensional Base Isolated Structures (3D-BASIS), National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo, Technical Report NCEER-89-0019, August 1989.
  6. NAGARAJAIAH S., REINHORN A. M. y CONSTANTINOU M. C., 3D-BASIS - Nonlinear Dynamic Analysis of Three - Dimensional Base Isolated Structures: Part II, National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo, Technical Report NCEER-91-0005, February 1991.
  7. STOER J. y BULIRSCH R., *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag New York Inc., 1983.
  8. BATHE K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall Inc, 1982.
  9. PARK K. C. y HOUSNER J. M., "Semi-implicit Transient Analysis Procedures for Structural Dynamics Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18, 609-622, 1982.
  10. ZIENKIEWICZ O. C., "A new look at the Newmark, Houbolt and other time stepping formulas. A weighted residual approach", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5, 413-418, 1978.
  11. ZIENKIEWICZ O. C., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill Inc, New York, 1977.
  12. NEWMARK N. M., "A method of computation for structural dynamics", *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE 85, 67-94, 1959.
  13. WILSON E. L., FARHOOMAND I. y BATHE K. J., "Nonlinear Dynamic Analysis of complex structures", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1, 241-252, 1973.
  14. COLLATZ L., *The Numerical Treatment of Differential Equations*, Springer Verlag, New York, 1966.
  15. WEN Y.-K., "Equivalent linearization for hysteretic systems under random excitation", *Journal of Applied Mechanics*, ASME 47, 150-154, 1980.
  16. CAUGHEY T. K., "Equivalent linearization technique", *Journal of the Acoustic Society of America*, 35(11), 1706-1711, 1963.
  17. IWAN W. D., "A generalization of the method of equivalent linearization", *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 8, 1973
  18. WEN Y.-K., "Approximate Method for Nonlinear Random Vibration", *Journal of mechanics division*, ASCE 101 EM8 389-401, 1975
  19. SOZEN M. A., "Hysteresis in structural elements", *Applied mechanics in earthquake engineering*, American Society of Mechanical Engineers Annual Meeting,

- AMD 8, 63-98, 1974.
20. IWAN W. D., "Application of nonlinear analysis techniques", *Applied mechanics in earthquake engineering, American Society of Mechanical Engineers Annual Meeting, AMD 8*, 135-162, 1974.



## CAPÍTULO 5

### RESPUESTA DE MODELOS CON SISTEMAS DE AISLAMIENTO SÍSMICO NO LINEAL

#### 5.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se analiza el comportamiento de edificios con aislamiento sísmico, considerando los tipos de aislamiento descritos previamente en el capítulo 3. En los ejemplos que se presentan se comparan las respuestas de edificaciones con y sin aislamiento sísmico. Los edificios sin ningún tipo de aislamiento, [**fixed base (FB)**], son aquellos en los cuales la base de dicha edificación se encuentra empotrada directamente en el terreno. Un esquema de un edificio de base fija se muestra en la figura 5.1.

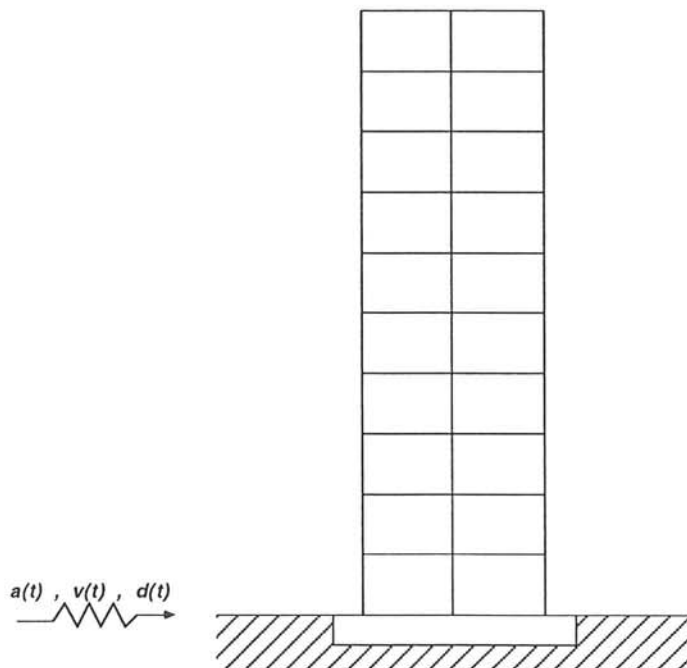


Figura 5.1 Edificio de base fija.

En muchos casos, un sistema pasivo puede proporcionarle a la estructura una protección mucho mayor de la requerida en base a las condiciones de seguridad por lo que ésta se comporta de manera muy parecida a un sólido rígido.

Como ya se ha mencionado en el capítulo 3, es muy complicado comparar entre sí edificaciones, ya que no existen unos criterios generalmente aceptados que permitan decidir la eficacia del sistema. A pesar de esta dificultad se han considerado adecuados los parámetros dinámicos: el desplazamiento de la base respecto a la cimentación, el desplazamiento del punto más alto de la estructura respecto a la base, la aceleración absoluta de dicho punto, la aceleración máxima absoluta de los diferentes pisos de la estructura y el desplazamiento relativo máximo entre pisos.

El desplazamiento de la base respecto a la cimentación es un parámetro básico del diseño de instalaciones que unen al edificio con el terreno. El desplazamiento del punto más alto de la estructura respecto a la base y el desplazamiento relativo máximo entre pisos son parámetros proporcionales a la tensión que soportan las columnas de la estructura. La aceleración absoluta del punto más alto de la estructura y la aceleración máxima de los diferentes pisos son fundamentales, ya que determinan el nivel de "confort" y además son los principales causantes de daño en equipos contenidos en el edificio.

## 5.2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

Se analiza un edificio como el de la figura 5.2. La estructura se modeliza como un edificio de cortante con un solo grado de libertad, correspondiente a la dirección horizontal de cada una de las plantas. A la base también se le atribuye un solo grado de libertad, correspondiente a la dirección horizontal.

A fin de efectuar experiencias numéricas que simulen el efecto del sistema de aislamiento de base, se definen las características de un edificio de diez plantas.

La masa de cada una de las plantas, así como la de la base es de  $6 \times 10^5$  Kg. La rigidez de las columnas varían en  $5 \times 10^7$  N/m entre plantas, desde  $9 \times 10^8$  N/m la primera hasta  $4.5 \times 10^8$  N/m la última. La fracción de amortiguamiento crítico se ha fijado en 0.05 para todos los modos de vibración.

El sistema de ecuaciones del movimiento (3.1) correspondiente a la estructura se desacopla, considerando en el análisis los dos primeros modos de vibración. De esta manera el sistema de ecuaciones a solucionar está formado por dos ecuaciones del tipo (3.5) a las que se les añade la ecuación (3.6).

En algunos de los ensayos numéricos efectuados se ha considerado un modelo con un solo grado de libertad, de masa  $6 \times 10^5$  Kg, rigidez  $9.6 \times 10^8$  N/m y la masa de la base de  $6 \times 10^5$  Kg.

Las características del sistema de aislamiento, varían en los diferentes ejemplos de simulación, según el tipo de aislamiento utilizado y serán descritas a medida que éstos se utilicen.

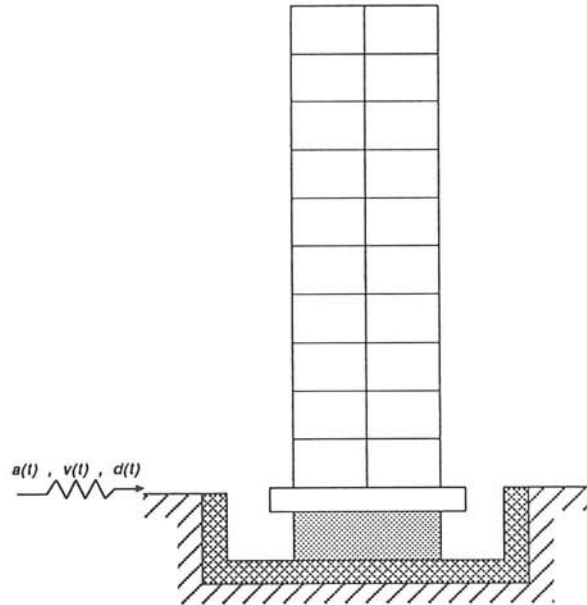


Figura 5.2 Modelo analizado.

### 5.3 DEFINICIÓN DE LA EXCITACIÓN

La excitación  $a(t)$  a la cual está sometido el modelo para analizar su comportamiento dinámico, se define de tres maneras distintas:

- Aceleración de tipo sinusoidal, de amplitud constante.
- Aceleración de tipo sinusoidal, de amplitud creciente.
- Acelerograma registrado de un terremoto real.

En el caso de la definición como una aceleración sinusoidal de amplitud constante, esta será

$$a(t) = A \operatorname{sen} \theta t \quad (5.1)$$

donde,  $A$  es la amplitud en  $\text{m/s}^2$ ,  $\theta$  es la frecuencia de excitación en  $\text{rad/s}$  y  $t$  es el tiempo en  $\text{s}$ . Una excitación de este tipo es mostrada en la figura 5.3(a).

Cuando la excitación se define como una aceleración sinusoidal de amplitud creciente,  $a(t)$  será del mismo tipo que la ecuación (5.1) y estará dada por

$$a(t) = A(t) \operatorname{sen} \theta t \quad (5.2)$$

donde,  $A(t)$  es creciente con el tiempo. La figura 5.3(b) nos muestra una excitación de este tipo.

La otra manera de definir la excitación es aprovechar un acelerograma previamente registrado y discretizado y utilizarlo como acción. Se han considerado



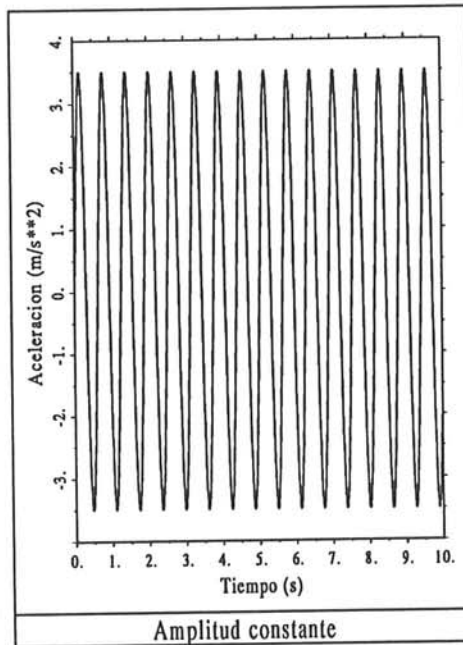


Figura 5.3(a) Sinusoide de amplitud constante.

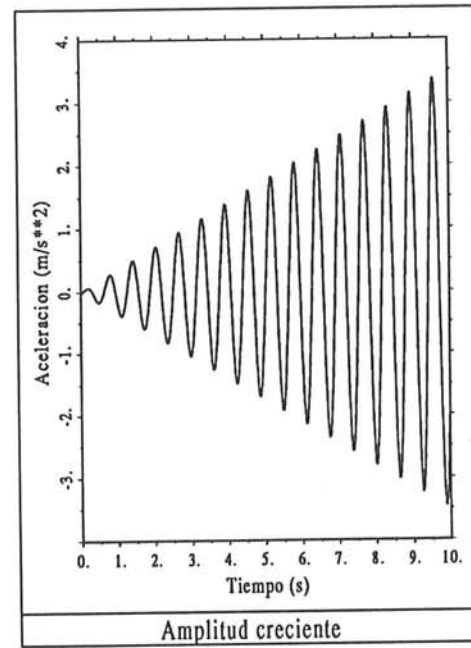


Figura 5.3(b) Sinusoide de amplitud creciente.

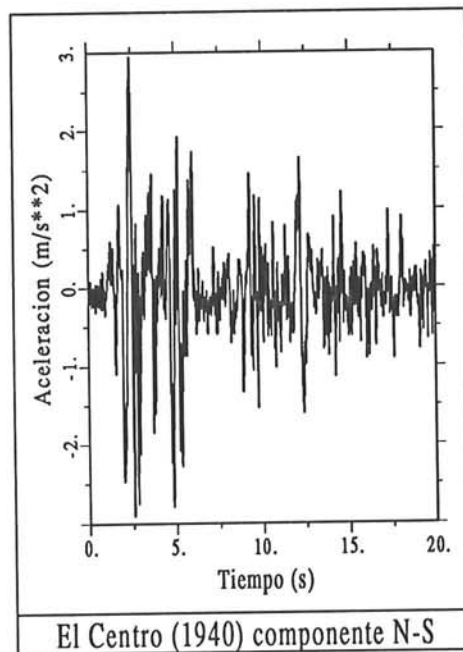


Figura 5.4(a) El Centro.

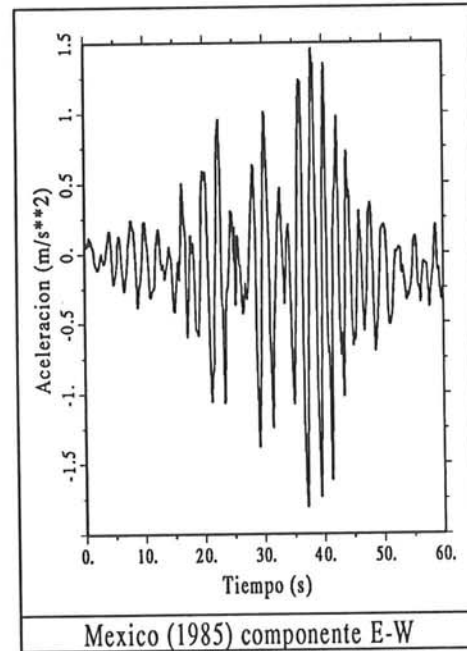


Figura 5.4(b) Ciudad de México

dos acelerogramas registrados, la componente N-S del terremoto de El Centro (California) de 1940 con aceleración pico de  $0.34 g$  [figura 5.4(a)] y la componente

E-W del terremoto de Ciudad de Mexico de 1985 con aceleración pico de  $0.17g$  [figura 5.4(b)].

#### 5.4 DEFINICIÓN DE LOS SISTEMAS DE AISLAMIENTO

Como ejemplos ilustrativos se simulan en esta monografía otros dos tipos de aislamientos de base, obtenidos combinando los sistemas neozelandés y de fricción pura descritos en el capítulo 3.

Un primer sistema obtenido de dicha combinación es el **NZ+F-PAR**, que combina en forma paralela el sistema neozelandés con uno de fricción pura; Su esquema puede verse en la figura 5.5. Con el sistema NZ+F-PAR se pretende aumentar la capacidad de disipación de energía del apoyo elastomérico con núcleo de plomo agregándole una superficie friccionante.

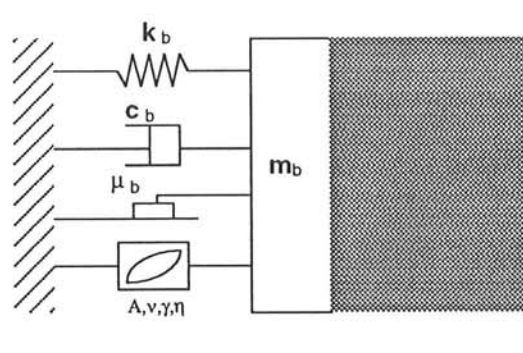


Figura 5.5 Sistema NZ+F-PAR.

Para una estructura aislada por medio de un sistema NZ+F-PAR, la ecuación del movimiento correspondiente a la base aislada está dada por

$$m_b(\ddot{d}_b + a(t)) + c_b \dot{d}_b + k_b d_b + \mathbf{J}^T \mathbf{M} \left[ \sum_{i=1}^q \varphi_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right] + f = 0 \quad (5.3)$$

Esta ecuación es similar a la (3.20), correspondiente al sistema neozelandés, con la diferencia de que la fuerza restituitiva  $f$  no es solamente histerética sino una combinación de histeresis y fricción.

La fuerza  $f$ , se define de la forma

$$f = f_1 + f_2 \quad (5.4)$$

donde,  $f_1$  es la fuerza histerética restituitiva, mientras que  $f_2$  es la fuerza debida a los elementos friccionales.

$f_1$  es definida de la forma

$$f_1 = \alpha \frac{f^y}{d^y} d_b + (1 - \alpha) f^y z \quad (5.5)$$

y  $f_2$  está dada por

$$f_2 = \mu g \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \text{sign}(d_b) \quad (5.6)$$

Cuando la masa de la base  $m_b$  se encuentra pegada a la cimentación, o sea que no ocurre deslizamiento,

$$f_2 = 0 \quad (5.7)$$

por lo que la fuerza  $f$  quedaría como

$$f = f_1 \quad (5.8)$$

de esta manera, el sistema NZ+F-PAR se comporta como un apoyo elastomérico laminado con núcleo de plomo. Esto ocurre si se cumple la condición de no deslizamiento, la cual es

$$\mu g - |a(t) + \mathbf{J}^T \left[ \sum_{i=1}^q \varphi_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right]| > 0 \quad (5.9)$$

Si la ecuación (5.9) no se cumple, ocurre el deslizamiento, y la fuerza  $f$  estará definida por la ecuación (5.4).

El segundo sistema es el NZ+F-SER, que está constituido por el sistema neozelandés combinado con uno de fricción pura en serie, y se representa esquemáticamente en la figura 5.6. La idea básica del NZ+F-SER es la de suministrar al sistema neozelandés una medida de seguridad adicional frente a excitaciones excepcionales.

Cuando una estructura, aislada con un sistema NZ+F-SER, es sometida a una excitación sísmica  $a(t)$ ; las ecuaciones del movimiento de la base, durante el deslizamiento, son expresadas como

$$m_b(\ddot{d}_b + a(t)) + \mathbf{J}^T \mathbf{M} \left[ \sum_{i=1}^q \varphi_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right] + f_2 = 0 \quad (5.10)$$

$$c_b \dot{x} + k_b x + f_1 + f_2 = 0 \quad (5.11)$$

donde,  $f_2$  es

$$f_2 = \mu g \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \text{sign}(d_b - x) \quad (5.12)$$

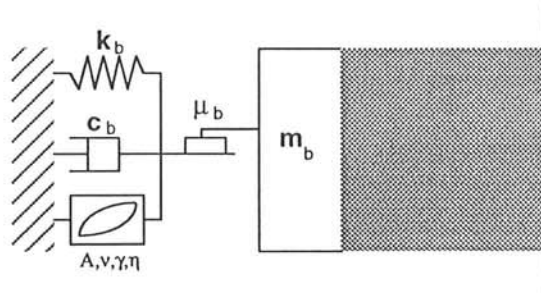


Figura 5.6 Sistema NZ+F-SER.

y  $f_1$  se expresa como

$$f_1 = \alpha \frac{f^y}{d^y} d_b + (1 - \alpha) f^y z \quad (5.13)$$

Cuando no ocurre deslizamiento, el aislamiento NZ+F-SER, se comporta como un apoyo de goma laminada y su movimiento está definido por las ecuaciones

$$m_b(\ddot{x} + a(t)) + c_b \dot{x} + k_b x + f_1 + \mathbf{J}^T \mathbf{M} \left[ \sum_{i=1}^q \varphi_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right] = 0 \quad (5.14)$$

$$\dot{d}_b - \dot{x} = 0 \quad (5.15)$$

estas ecuaciones rigen el movimiento de la base aislada, dependiendo de la condición de no deslizamiento

$$\mu g - |a(t) + \ddot{d}_b + \mathbf{J}^T \left[ \sum_{i=1}^q \varphi_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a(t)) \right]| > 0 \quad (5.16)$$

Si la condición (5.16) se cumple, las ecuaciones (5.14) y (5.15) son las que gobiernan el movimiento de la base, en caso contrario lo harán las ecuaciones (5.10) y (5.11).

A continuación se definen los parámetros de cada uno de los sistemas de aislamiento.

#### ► Sistema de fricción pura

Para que este sistema quede completamente definido, hace falta conocer el valor del coeficiente de deslizamiento utilizado, el cual se ha considerado de  $\mu = 0.165$ .

► **Sistema de goma laminada**

Para el sistema de goma laminada, se ha fijado el factor de amortiguamiento crítico en 0.2.

► **Sistema flexible-friccionante**

Se toma  $\mu = 0.04$  y el factor de amortiguamiento crítico se fija en 0.1, quedando definido de esta manera el sistema.

► **Sistema electricidad de France**

Para simular este sistema de aislamiento, se toma un valor del coeficiente de deslizamiento  $\mu = 0.2$ .

► **Sistema neozelandés**

Para definir el comportamiento histerético del sistema neozelandés, las constantes que definen dicho comportamiento se fijan en  $A = 1$ ,  $\nu = 0.5$ ,  $\gamma = 0.5$  y  $n = 1$ . Además, la fuerza y el desplazamiento de fluencia se fijan en  $f^y = 1.5 \times 10^3$  N y  $d^y = 0.0245$  m. Para la simulación de este sistema de aislamiento se utiliza un factor de amortiguamiento crítico de 0.2.

► **Sistema de deslizamiento flexible-friccionante**

Para la simulación de este sistema de aislamiento se utilizan  $\mu_1 = 0.04$ ,  $\mu = 0.1$  y el factor de amortiguamiento crítico 0.1.

► **Sistema NZ+F-PAR**

Para la simulación de este sistema de aislamiento se utiliza un coeficiente de deslizamiento de  $\mu = 0.165$ , igual al del sistema de fricción pura.

► **Sistema NZ+F-SER**

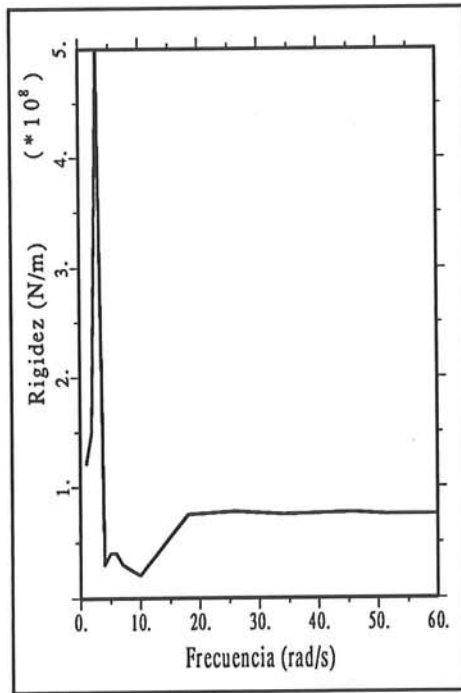
Para la simulación de este sistema se utiliza un coeficiente de deslizamiento de  $\mu = 0.1$ .

## 5.5 RIGIDEZ DE LA BASE

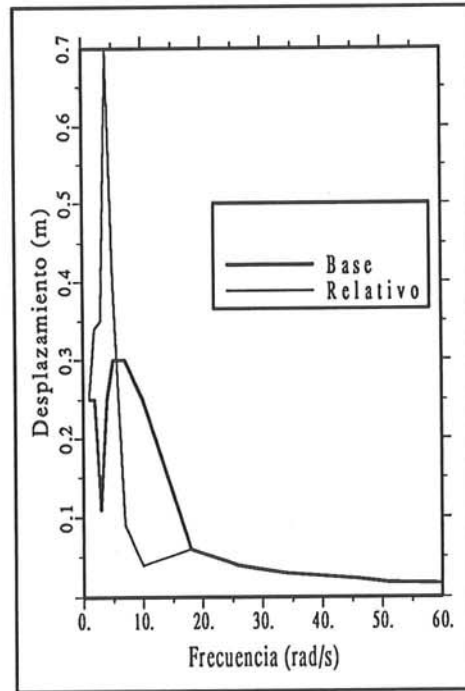
En el apartado anterior, se han definido todos los parámetros de los diferentes sistemas de aislamiento, excepto la rigidez  $k_b$ . Para obtener valores adecuados de la rigidez  $k_b$ , se ha tomado el modelo de diez grados de libertad descrito en el apartado 5.2 utilizando como aislamiento un sistema neozelandés. Este modelo

se somete a una excitación sinusoidal de amplitud constante definida por la ecuación (5.1), con una duración igual a 10 s y una amplitud  $A$  de  $3.5 \text{ m/s}^2$ .

Se ha calculado la respuesta máxima del modelo para un rango de rigideces desde una muy baja hasta una prácticamente igual a la rigidez de la primera planta, variándose la frecuencia  $\theta$  de la excitación entre cero y 60 rad/s. Se han obtenido una serie de resultados que relacionan a la rigidez  $k_b$  con el desplazamiento relativo máximo y con el desplazamiento máximo de la base. De esta manera se puede seleccionar el valor de  $k_b$  aplicando el criterio que se considere adecuado, en este caso se aplica el criterio de que el desplazamiento de la base con respecto a la cimentación no exceda de 30 cm y de que al mismo tiempo, el desplazamiento relativo entre el punto más alto del edificio y la base sea el menor posible. Los valores obtenidos aplicando el criterio previamente mencionado se muestran en los gráficos de las figuras 5.7 y 5.8.



**Figura 5.7** Influencia de la frecuencia de la excitación en la rigidez adicional de la base.

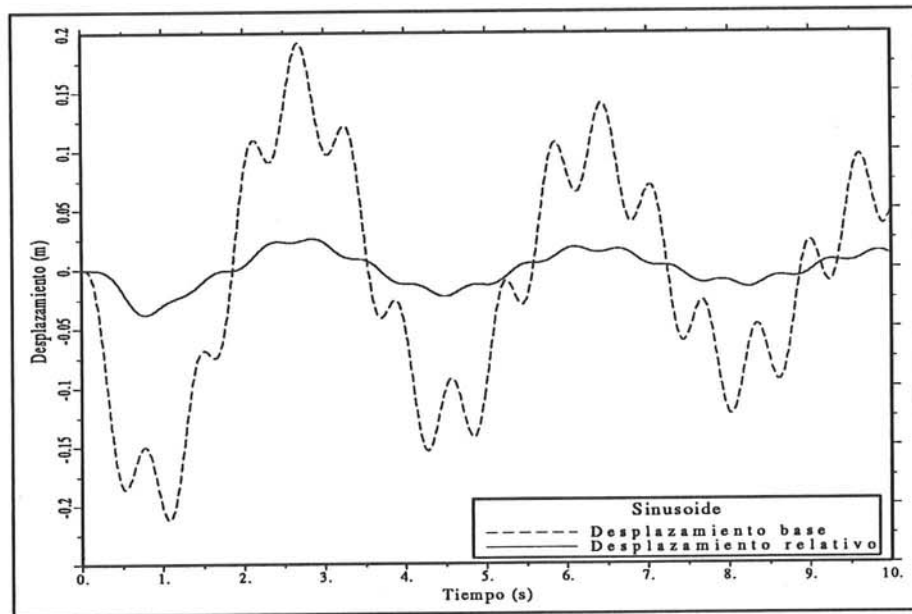


**Figura 5.8** Máximo desplazamiento relativo y de la base representado en función de  $\theta$ .

Por ejemplo, para un valor de  $\theta = 10 \text{ rad/s}$ , el valor que se obtiene del gráfico de la figura 5.7 es  $k_b = 0.2 \times 10^8 \text{ N/m}$ , al cual le corresponde un desplazamiento máximo de la base de 25 cm y un desplazamiento máximo relativo de 5 cm, conforme a la figura 5.8.

## 5.6 HISTORIA DE LA RESPUESTA EN EL TIEMPO

Para el modelo con diez grados de libertad, aislado con el sistema neozelandés se presenta en la figura 5.9 su respuesta temporal, la cual muestra la variación en el tiempo tanto del desplazamiento relativo como del de la base. Estas respuestas se obtienen al someter el modelo a una excitación sinusoidal de amplitud constante  $3.5 \text{ m/s}^2$ , frecuencia de  $10 \text{ rad/s}$  y  $10 \text{ s}$  de duración. Esta excitación corresponde a la que se muestra en la figura 5.3(a).



**Figura 5.9** Respuestas temporales frente a la excitación sinusoidal.

En la figura 5.10 se muestra la respuesta temporal del mismo modelo, al someterlo al terremoto de El Centro (California) de 1940.

En las figuras 5.11 y 5.12, se muestra la variación en el tiempo de la aceleración absoluta del punto más alto de la estructura, correspondiente al modelo de base aislada con sistema neozelandés descrito anteriormente.

En la figura 5.11 el modelo es sometido a la excitación sinusoidal de amplitud constante, mientras que en la figura 5.12 el modelo es sometido al terremoto de El Centro.

Para el mismo modelo de diez grados de libertad y el terremoto de El Centro, se calcula la historia en el tiempo del desplazamiento de la base con respecto a la cimentación y del desplazamiento relativo del punto más alto de la estructura respecto a la base, para tres diferentes sistemas de aislamiento. Los sistemas de aislamiento analizados son el neozelandés, NZ+F-PAR y NZ+F-SER. La variación en el tiempo del desplazamiento de la base se muestra en la figura 5.13,

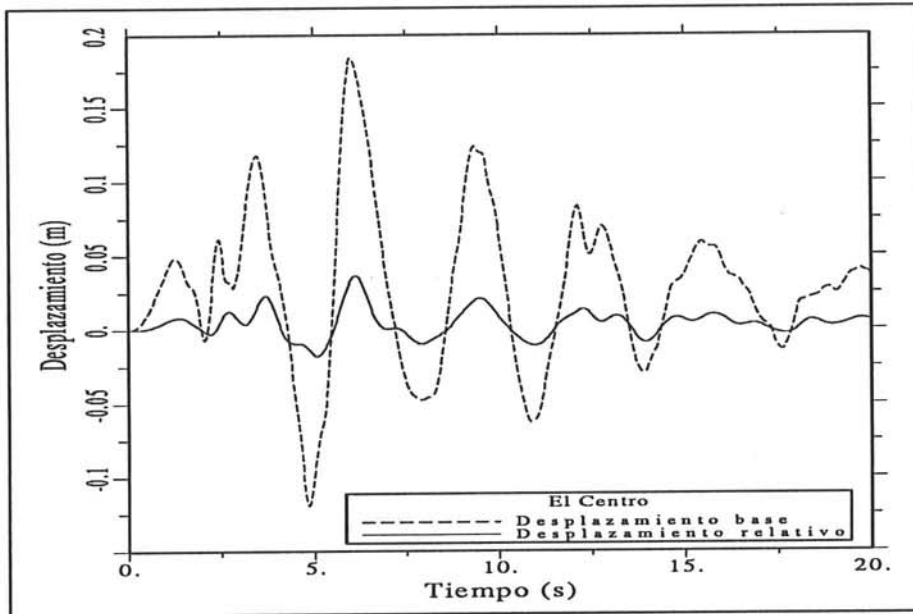


Figura 5.10 Respuestas temporales frente al terremoto de El Centro.

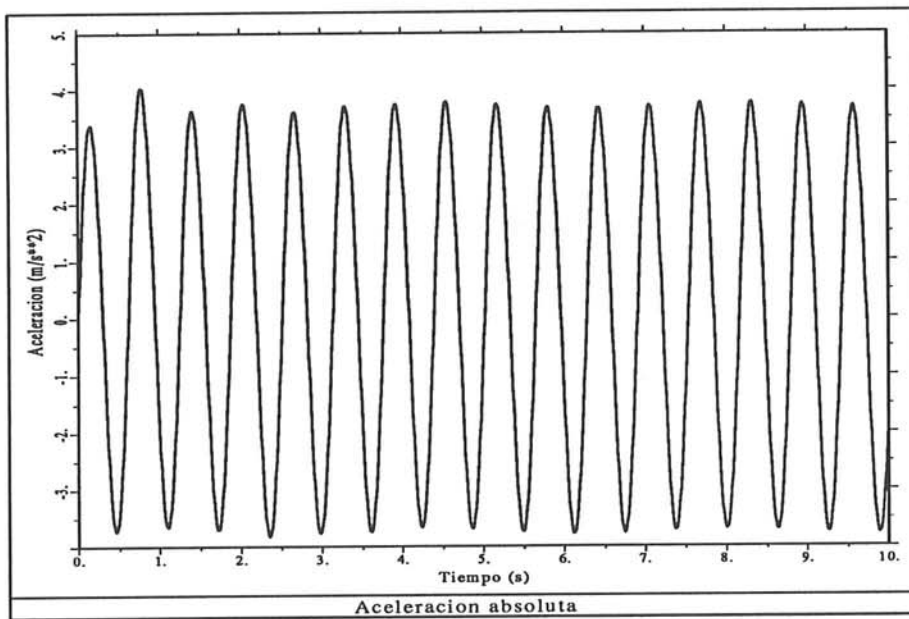


Figura 5.11 Variación de la aceleración del punto más alto de la estructura frente a una excitación sinusoidal.

mientras que la variación en el tiempo del desplazamiento relativo es ilustrado en el gráfico de la figura 5.14.



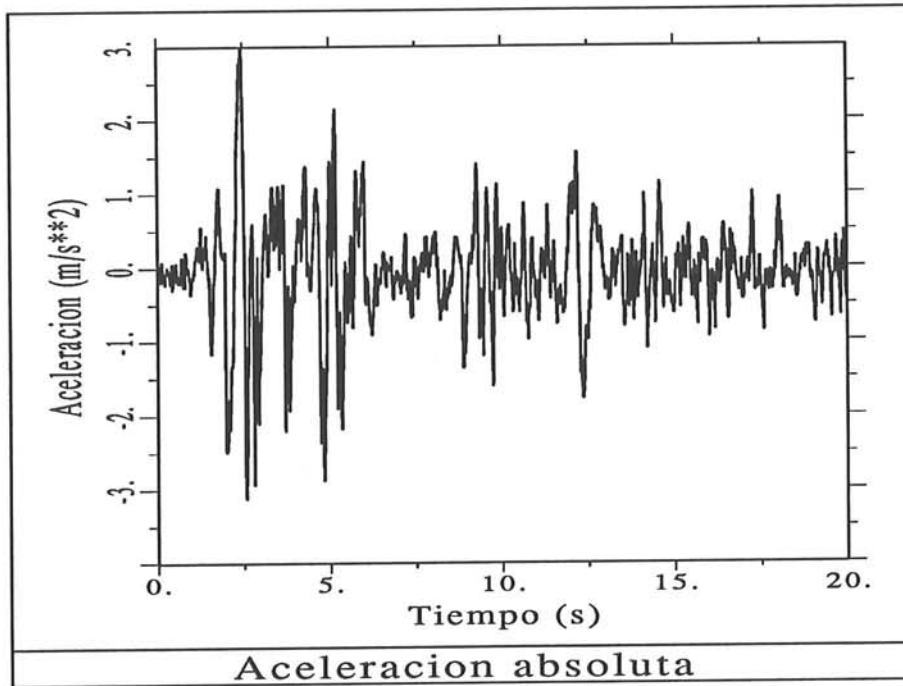


Figura 5.12 Variación de la aceleración del punto más alto de la estructura frente al terremoto de El Centro.

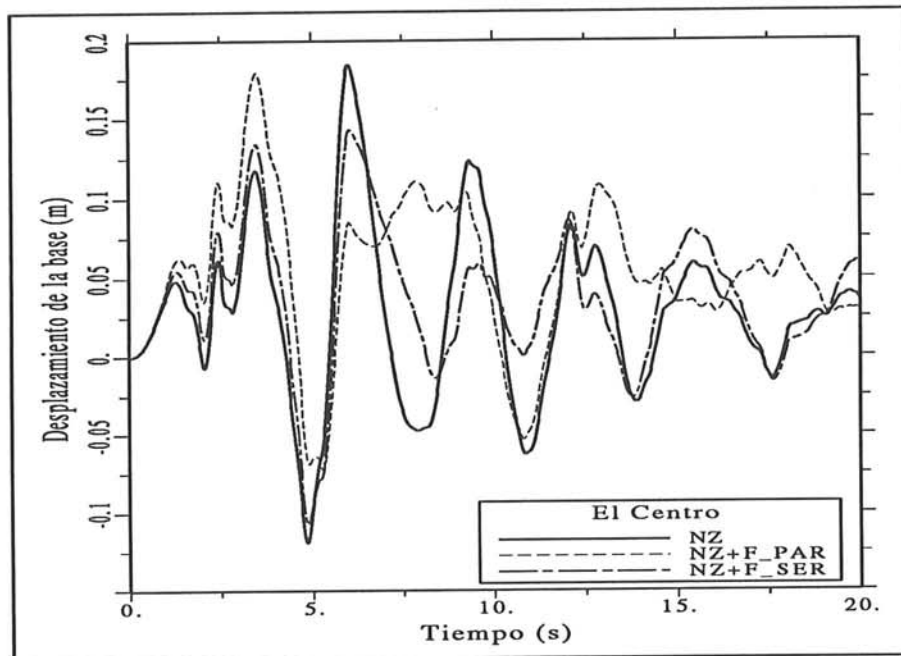


Figura 5.13 Desplazamiento de la base respecto a la cimentación.

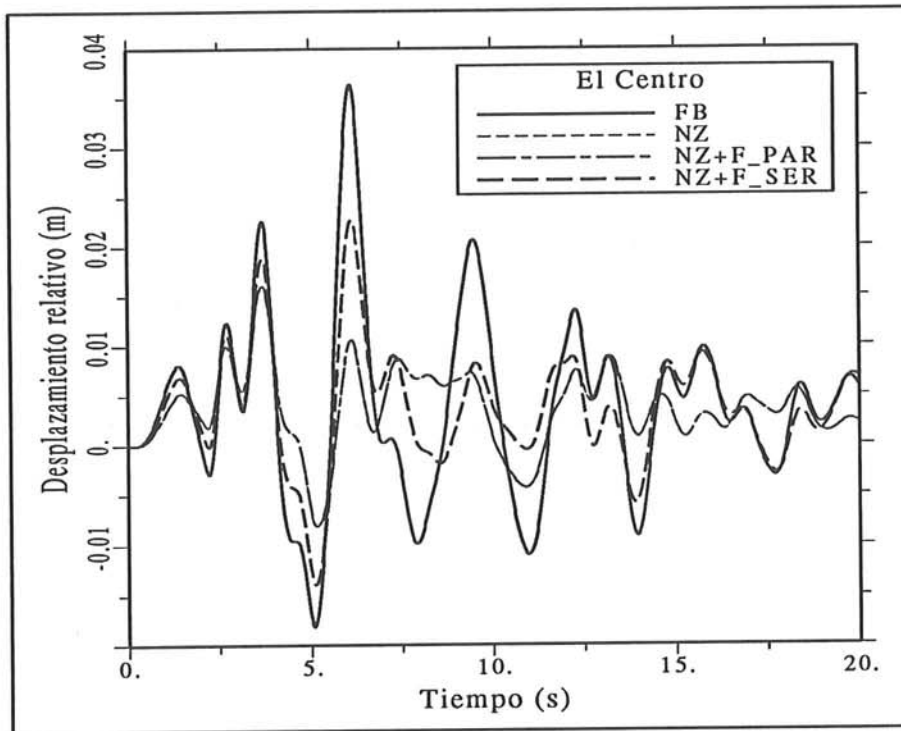


Figura 5.14 Desplazamiento del punto más alto de la estructura respecto a la base.

## 5.7 COMPARACIÓN ENTRE MODELOS CON AISLAMIENTO DE BASE Y MODELOS DE BASE FIJA

Para comparar el comportamiento de la estructura con la base aislada y una de las mismas características pero sin aislamiento en la base, el parámetro que se analiza es el desplazamiento relativo.

Una comparación frecuencial entre el modelo aislado y el mismo modelo pero sin aislamiento es mostrado en el gráfico de la figura 5.15. Este análisis se lleva a cabo variando la frecuencia de la excitación sinusoidal de amplitud constante.

Otra comparación, ahora temporal, se muestra en la figura 5.16. En esta comparación se utiliza como excitación la senoide de amplitud constante.

En la figura 5.17 se compara nuevamente la variación en el tiempo del desplazamiento relativo, entre el modelo aislado y sin aislamiento, pero ahora se utiliza como excitación el terremoto de El Centro. Se observan reducciones de los valores máximos de los desplazamientos en el punto más alto de la estructura de alrededor del 80%, cuando la excitación es sinusoidal de amplitud constante, y del 58% cuando la excitación utilizada es el terremoto de El Centro.

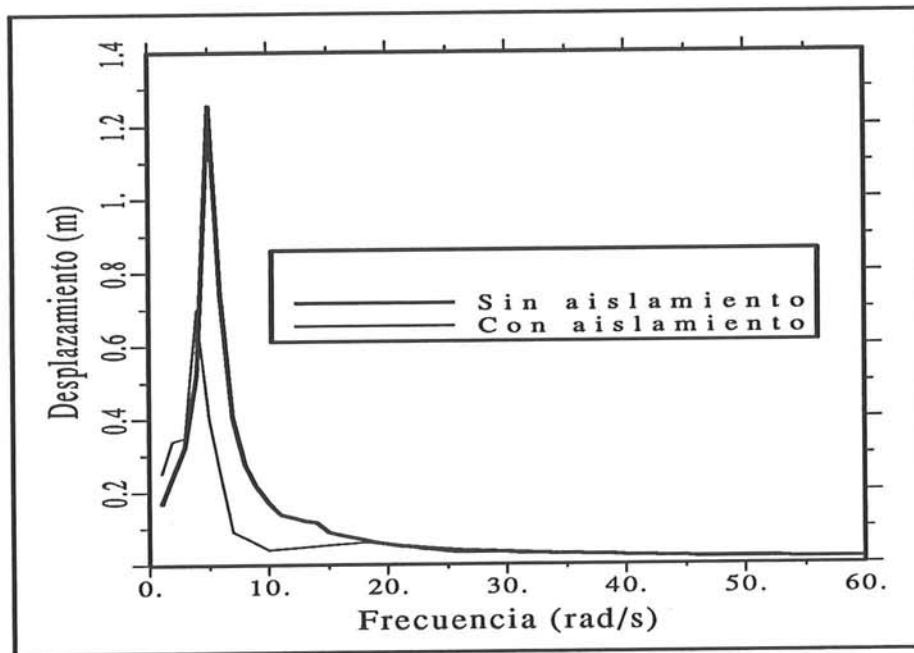


Figura 5.15 Variación frecuencial del desplazamiento en el punto más alto de la estructura.

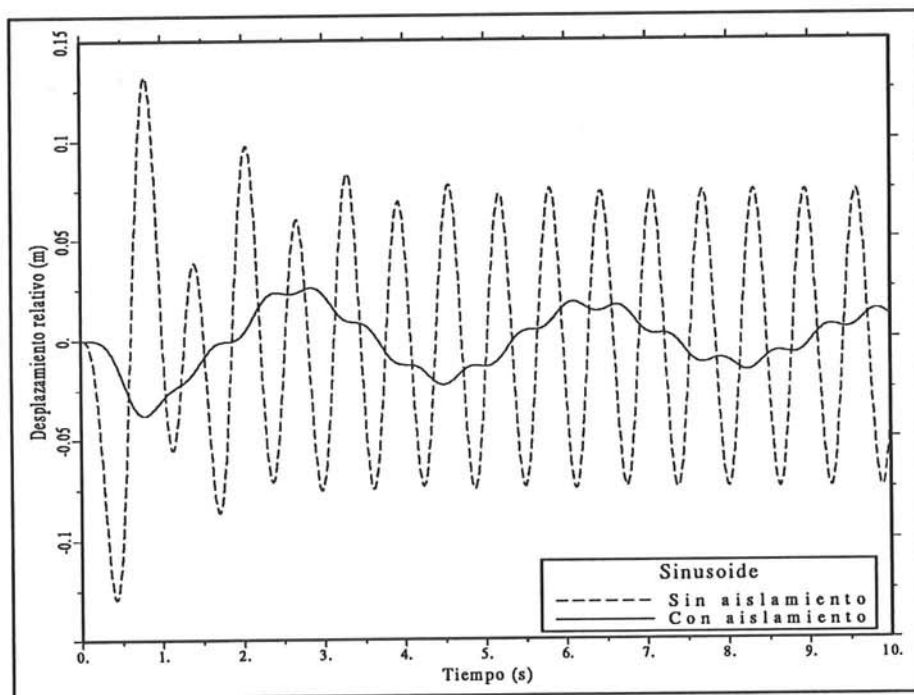
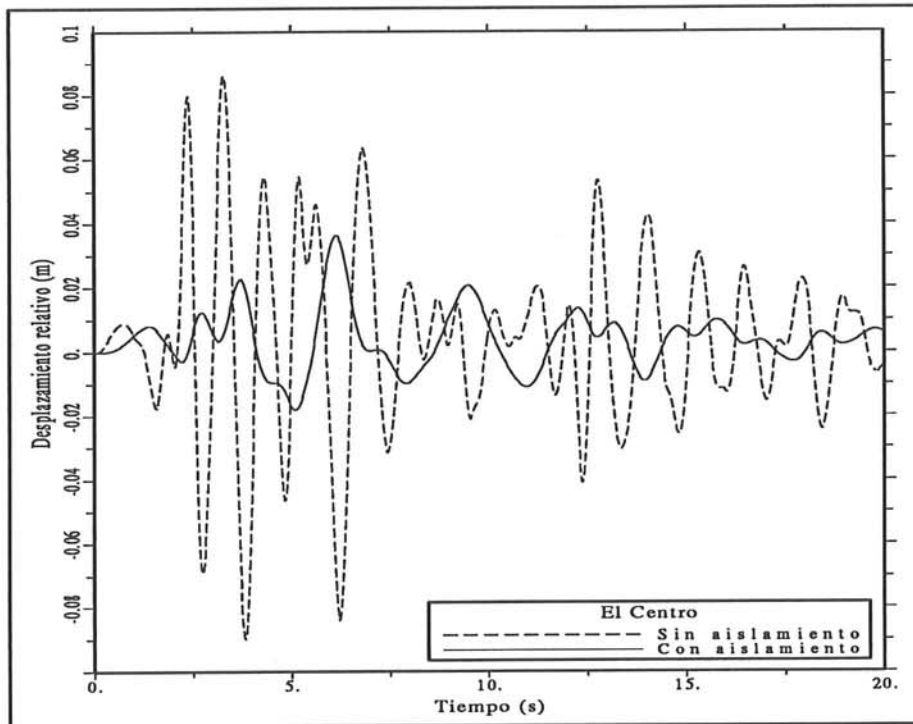


Figura 5.16 Variación en el tiempo del desplazamiento en el punto más alto de la estructura frente a una excitación sinusoidal .



**Figura 5.17** Variación en el tiempo del desplazamiento en el punto más alto de la estructura frente al terremoto del El Centro.

## 5.8 COMPORTAMIENTO HISTERÉTICO DEL SISTEMA DE AISLAMIENTO

Para analizar el comportamiento histerético del sistema de aislamiento neozelandés, se utiliza el modelo con diez grados de libertad. En la figura 5.18, puede verse dicho comportamiento histerético del sistema de aislamiento definido en el apartado 3.3.2.

El modelo se somete ahora a una excitación sinusoidal de amplitud creciente, a fin de calcular la variación de la fuerza restitutiva histerética que se produce en el aislamiento en función del desplazamiento de la base. Dicha variación puede verse en el gráfico de la figura 5.19. La excitación sinusoidal de amplitud creciente a la cual se somete el modelo corresponde a la que se ilustra en la figura 5.3(b).

También se utiliza el sistema de diez grados de libertad para analizar el modelo elastoplástico propuesto en el apartado 3.3.4, con una fuerza y desplazamiento de fluencia de  $f^y = 2.0 \times 10^5$  N y  $d^y = 0.05$  m. El comportamiento elastoplástico del sistema de aislamiento se muestra en el gráfico de la figura 5.20.

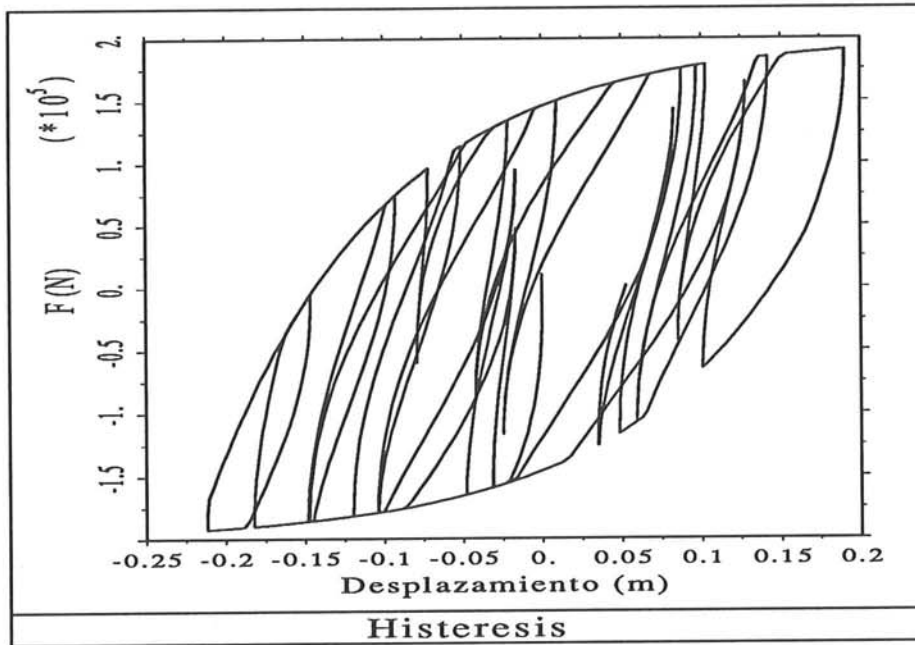


Figura 5.18 Variación de la fuerza histérica.

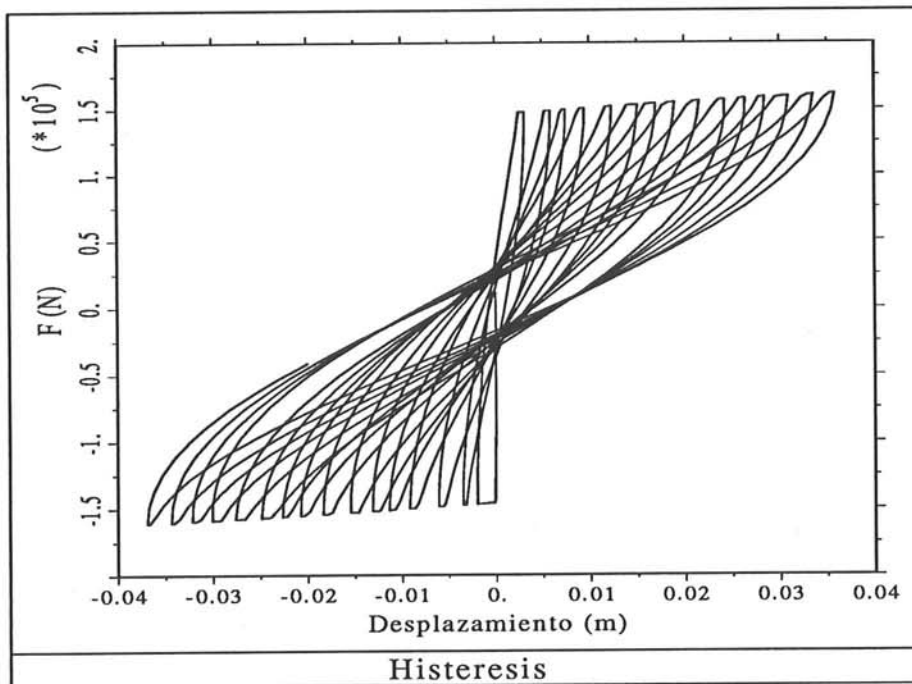
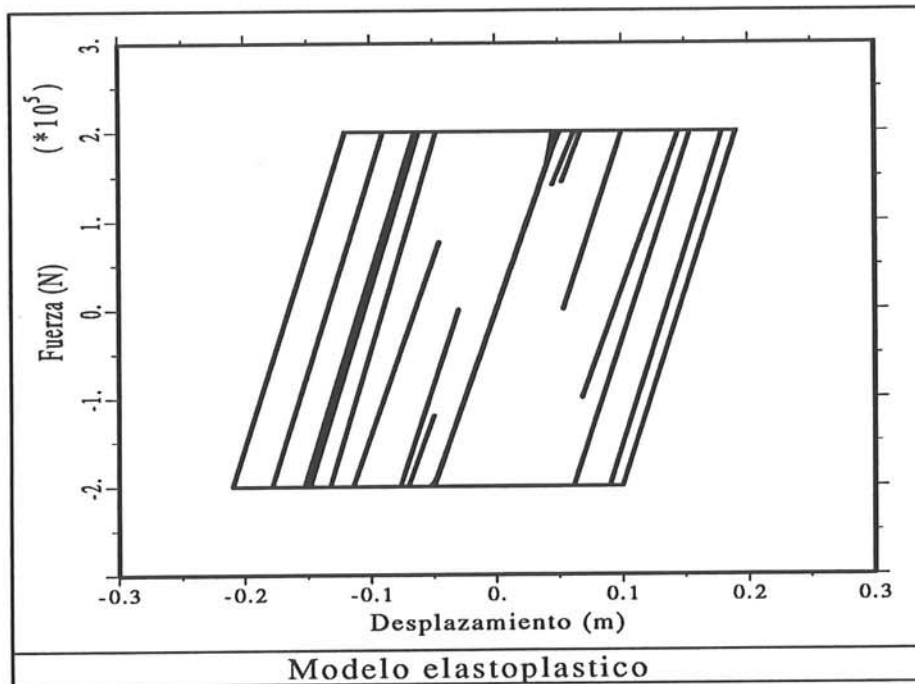


Figura 5.19 Comportamiento del aislamiento frente a la excitación sinusoidal de amplitud creciente.



**Figura 5.20** Comportamiento elastoplástico del sistema de aislamiento frente al terremoto de El Centro.

## 5.9 COMPARACIÓN ENTRE DIFERENTES SISTEMAS DE AISLAMIENTO

### 5.9.1 Introducción

En esta sección se estudian las respuestas de estructuras aisladas, utilizando los diferentes sistemas de aislamiento descritos en el capítulo 3 y definidos en la sección 5.4 de este capítulo. El modelo empleado es el de un solo grado de libertad descrito en la sección 5.2. Para comparar los diferentes sistemas de aislamiento entre sí, se ha variado el período de la estructura desde 0.1 s hasta 1.0 s; y se han calculado las respuestas máximas para cada uno de estos períodos. Las excitaciones utilizadas para este análisis son la componente N-S del terremoto de El Centro y la componente E-W del terremoto de Ciudad de México. Se han escogido estas dos excitaciones por que son representativas de dos tipos diferentes de contenido frecuencial. El terremoto de El Centro se considera un terremoto estándar, mientras que el terremoto de Ciudad de México es un claro ejemplo de bajo contenido frecuencial.

### 5.9.2 Respuestas frente al terremoto de El Centro

La figura 5.21 muestra el desplazamiento relativo máximo del punto más alto de la estructura con respecto a la base, frente a distintos períodos naturales de la estructura y para los diferentes sistemas de aislamiento. Al observar la figura 5.21 se puede ver que la estructura de base aislada presenta desplazamientos relativos mucho más bajos que la estructura de base fija, independientemente del sistema de aislamiento, lo que ya nos muestra las bondades de los diferentes sistemas de aislamiento. También se puede observar que entre los sistemas de aislamiento comparados, el de fricción pura y el electricité de France son los que presentan mayores valores de desplazamiento máximo relativo y que el neozelandés es el que presenta menores valores del parámetro analizado. Además es de resaltar que los desplazamientos máximos relativos de los sistemas R-FBI y SR-F coinciden; esto es debido a que para estos niveles de excitación, en el sistema SR-F no se alcanza a deslizar la placa superior, por lo que este sistema se comporta como si fuera un sistema R-FBI.

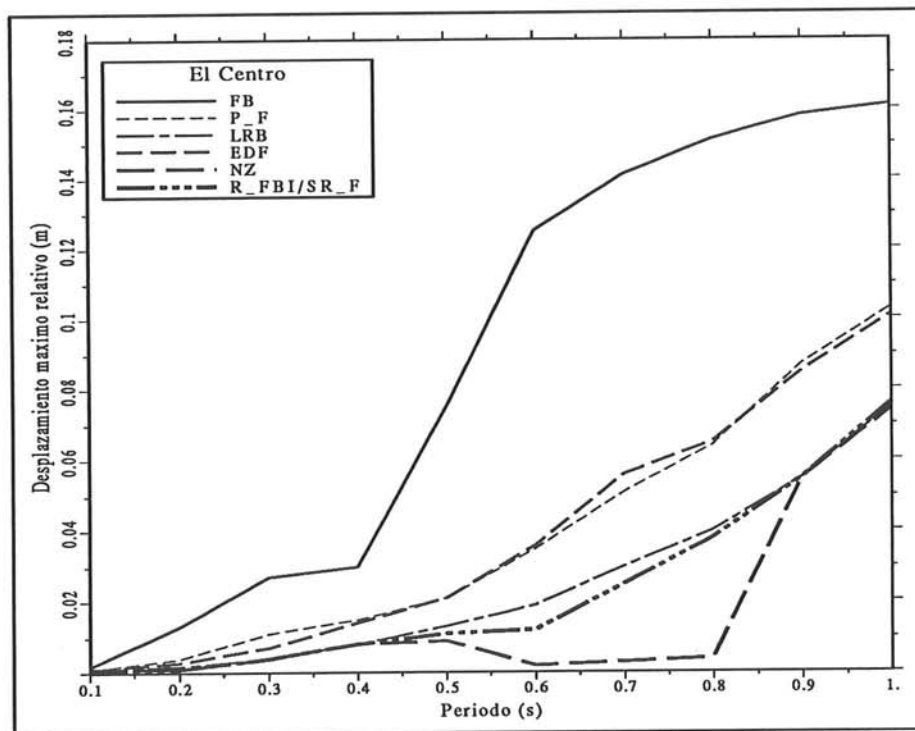


Figura 5.21 Desplazamiento relativo máximo.

En base al desplazamiento máximo relativo y para todo el rango de períodos analizados, el sistema neozelandés tiene el mejor comportamiento, por este motivo se comparan en la figura 5.22 los sistemas de aislamiento neozelandés,

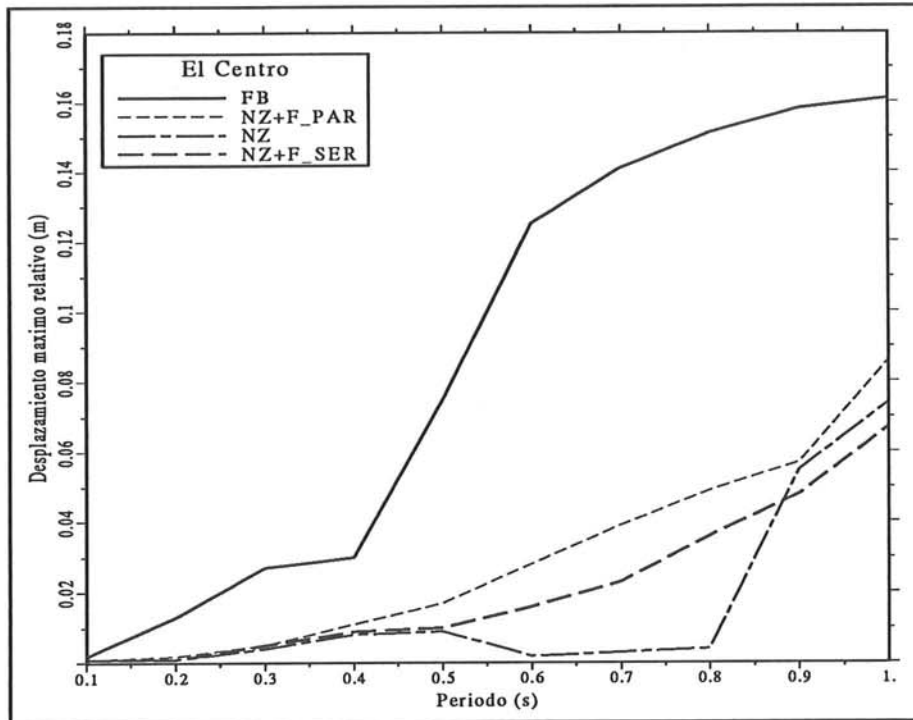


Figura 5.22 Desplazamiento relativo máximo.

NZ+F-PAR y NZ+F-SER conjuntamente con el modelo de base fija. Al analizar la figura 5.22 se vé que el sistema de aislamiento NZ+F-PAR, para este caso, empeora la respuesta del sistema neozelandés; mientras que el sistema de aislamiento NZ+F-SER es el que presenta menores desplazamientos máximos relativos.

En la figura 5.23 se muestra la aceleración absoluta máxima del punto más alto de la estructura para diferentes períodos naturales de la estructura. Analizando el gráfico de esta figura, se puede ver que se presentan reducciones de la aceleración absoluta máxima del punto más alto de la estructura, desde el 3% hasta el 10%, cuando se compara la estructura aislada por cualquier sistema de aislamiento con la estructura de base fija.

Se debe también, resaltar que, según los resultados de la figura 5.23, los sistemas de aislamiento que presentan algún tipo de fricción transmiten altas aceleraciones a la estructura. Esta afirmación se confirma en la figura 5.24, en la cual al comparar el sistema neozelandés con los sistemas NZ+F-PAR, NZ+F-SER y la estructura de base fija, se puede ver como al agregarle fricción al sistema neozelandés, ya sea en paralelo o en serie, se aumentan los valores de la aceleración absoluta máxima del punto más alto de la estructura a lo largo de todo el rango de períodos naturales de la estructura.

La figura 5.25 compara el máximo desplazamiento relativo entre la base y la cimentación producido por diferentes sistemas de aislamiento, para diferentes períodos naturales de la estructura. En dicha figura se puede ver que, para



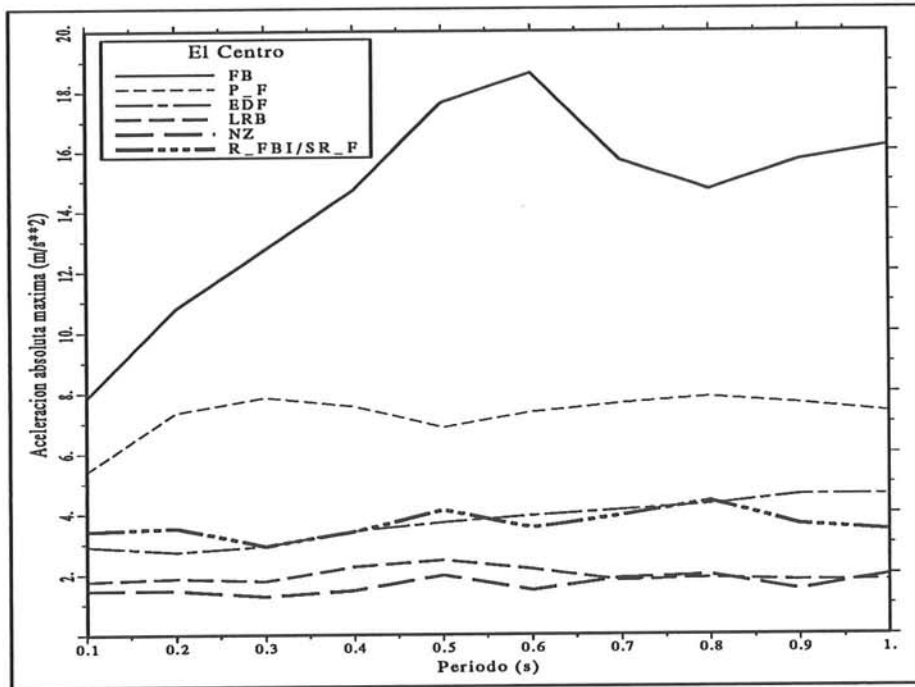


Figura 5.23 Aceleración absoluta máxima.

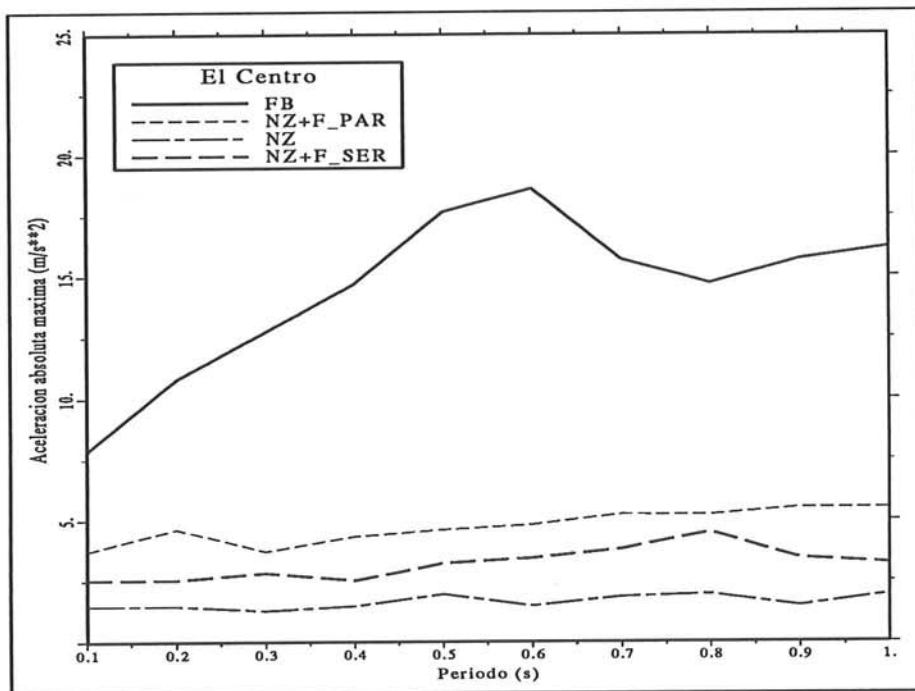


Figura 5.24 Aceleración absoluta máxima.

los diferentes sistemas de aislamiento, el desplazamiento máximo de la base respecto a la cimentación permanece más o menos constante a lo largo del rango de períodos considerados. El comportamiento mostrado por todos los sistemas de aislamiento analizados en la figura 5.25 confirma la suposición de que las estructuras con aislamiento de base se comportan como un sólido rígido. También es de destacar que el desplazamiento máximo de la base es alto para el sistema LRB y muy bajo para el de fricción pura.

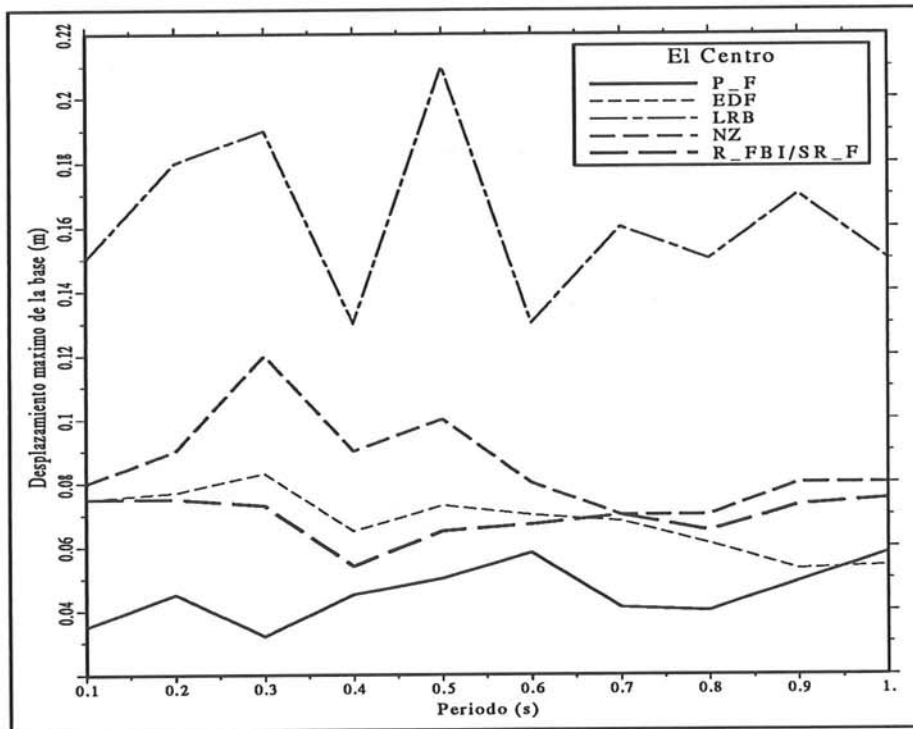


Figura 5.25 Desplazamiento máximo de la base.

En la figura 5.26 se puede ver como se mejora el sistema neozelandés al añadirle fricción, siendo el sistema NZ+F-SER el que presenta menores desplazamientos máximos de la base con respecto a la cimentación.

Para el mismo modelo de diez grados de libertad, se comparan el modelo propuesto por Wen y el modelo elastoplástico con un sistema de aislamiento con comportamiento lineal, utilizando como parámetros la variación en el tiempo del desplazamiento de la base respecto a la cimentación y del desplazamiento del punto más alto de la estructura con respecto a la base. En la figura 5.27 se muestra dicha comparación utilizando como parámetro el desplazamiento de la base con respecto a la cimentación y en la figura 5.28 se muestra la misma comparación pero utilizando como parámetro el desplazamiento relativo del punto más alto de la estructura con respecto a la base.

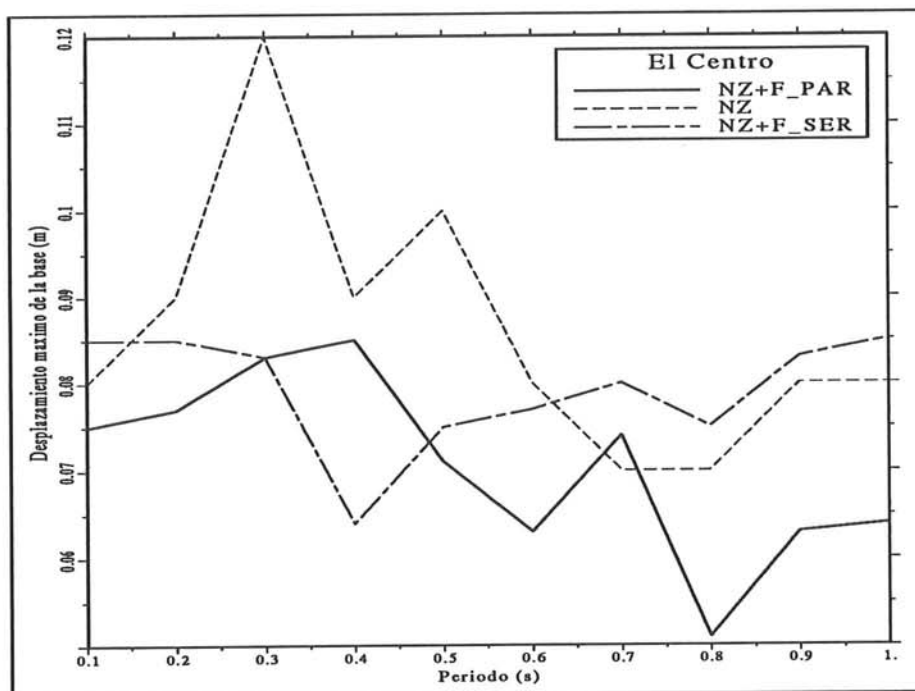


Figura 5.26 Desplazamiento máximo de la base.

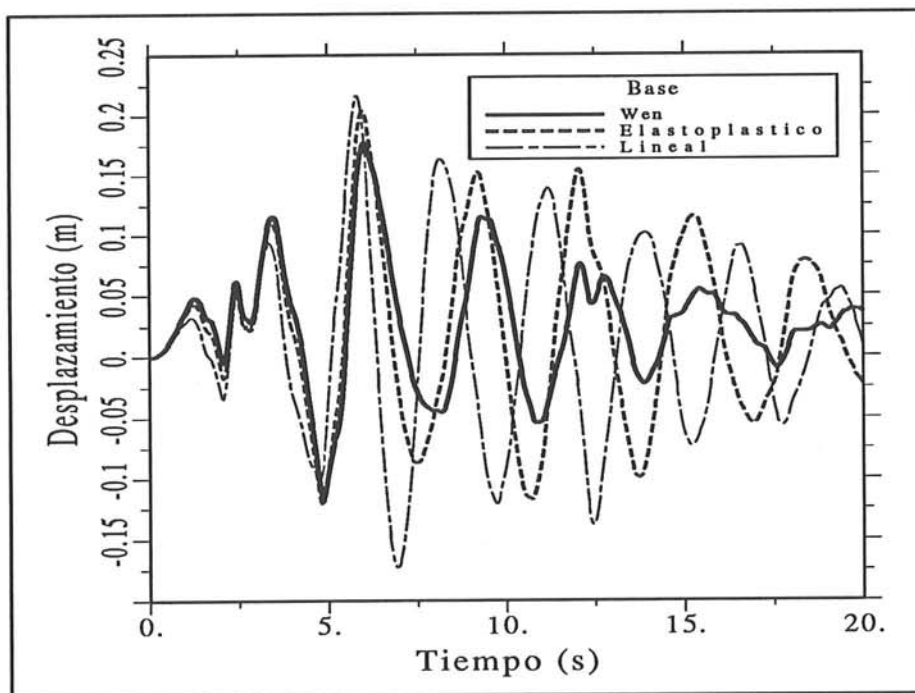


Figura 5.27 Desplazamiento de la base.

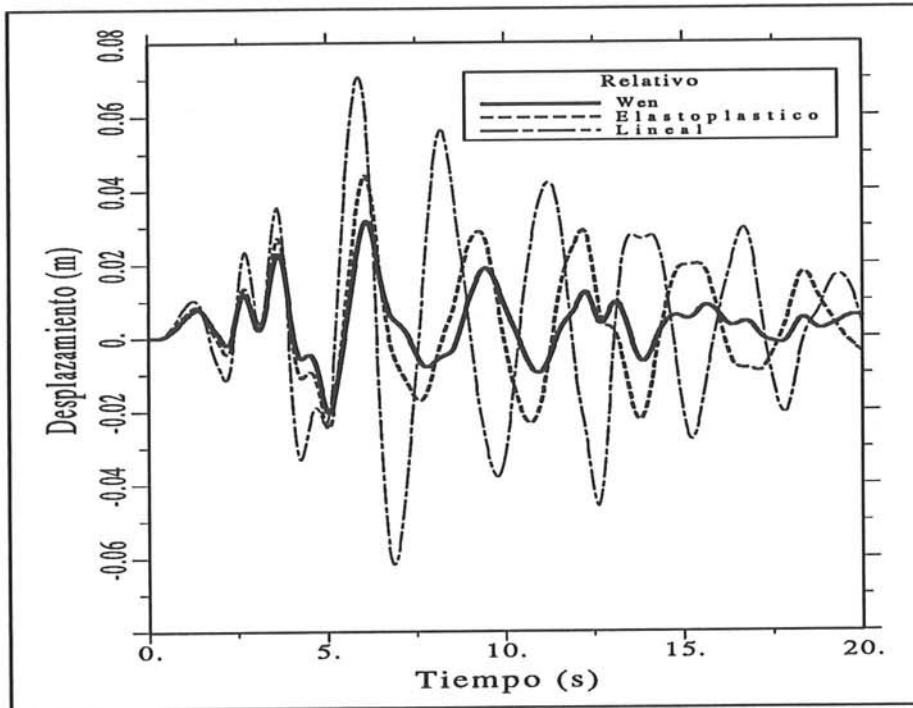


Figura 5.28 Desplazamiento relativo.

### 5.9.3 Respuestas frente al terremoto de Ciudad de Mexico

El terremoto de Ciudad de Mexico (1985) presenta ciertas características peculiares, entre las que destaca su prolongado comportamiento sinusoidal en una frecuencia muy cercana a los 2s. Esta característica es muy importante, ya que la mayoría de los sistemas de aislamiento de base son diseñados con un período natural muy cercano a este rango, por lo que este terremoto es de particular interés al analizar el comportamiento de varios sistemas de aislamiento de base.

La comparación entre los diferentes sistemas de aislamiento frente al terremoto de Ciudad de Mexico se analiza a continuación.

El desplazamiento máximo del punto más alto de la estructura con respecto a la base es mostrado en la figura 5.29, en donde se puede ver que ninguno de los sistemas de aislamiento analizados funciona adecuadamente. Además los sistemas LRB y NZ presentan valores mayores que el modelo de base fija a lo largo de todo el rango de períodos analizado. Esto se debe a que el terremoto de ciudad de Mexico (1985) presenta una considerable cantidad de energía en el rango de frecuencias alrededor de 0.5 Hz, la cual coincide con la frecuencia natural de los sistemas LRB y NZ. También se puede ver que los sistemas P-F y

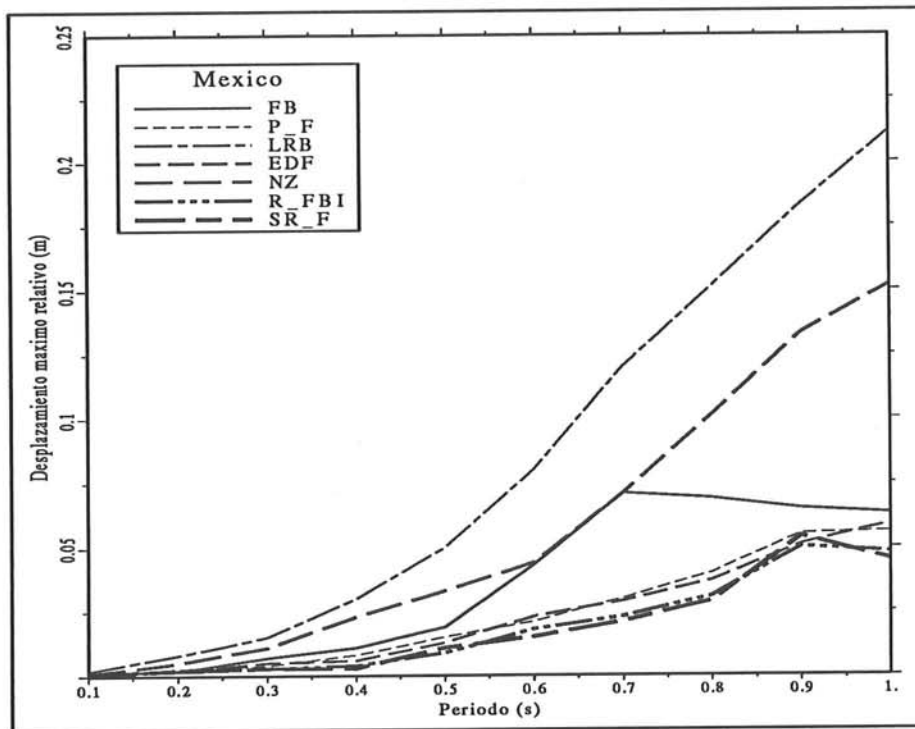


Figura 5.29 Máximo desplazamiento relativo.

EDF presentan un comportamiento casi igual, y que los sistemas SR-F y R-FBI son los que mejor se comportan. De la figura 5.29 se puede deducir que el incluir fricción en el sistema de aislamiento mejora el comportamiento del sistema frente a excitaciones de este tipo.

Para comprobar lo deducido de la figura 5.29, en la figura 5.30 se comparan los sistemas NZ, NZ+F-PAR y NZ+F-SER con el modelo de base fija. Al observar la figura 5.30 se corrobora lo deducido previamente, ya que al añadirle fricción al sistema de aislamiento NZ se logra mejorar su comportamiento a lo largo de todo el rango de períodos analizado.

La variación de la aceleración absoluta máxima del punto más alto de la estructura, para los diferentes sistemas de aislamiento analizados, se muestra en la figura 5.31. Al analizar dicha figura se puede ver que los sistemas LRB y NZ amplifican la aceleración del terreno entre un 200% y un 300%. El sistema P-F se comporta de forma muy parecida al modelo de base fija, mientras que el EDF no se comporta adecuadamente hasta  $T = 0.55$  s y a partir de este valor mejora con respecto al modelo de base fija. Además, a partir de  $T = 0.3$  s el sistema SR-F y de  $T = 0.4$  s el sistema R-FBI, mejoran su comportamiento en comparación con el modelo de base fija.

En la figura 5.32, vuelven a ser comparados los sistemas NZ, NZ+F-PAR y NZ+F-SER con el modelo de base fija, pero utilizando ahora como parámetro la aceleración del punto más alto de la estructura y se puede ver claramente como

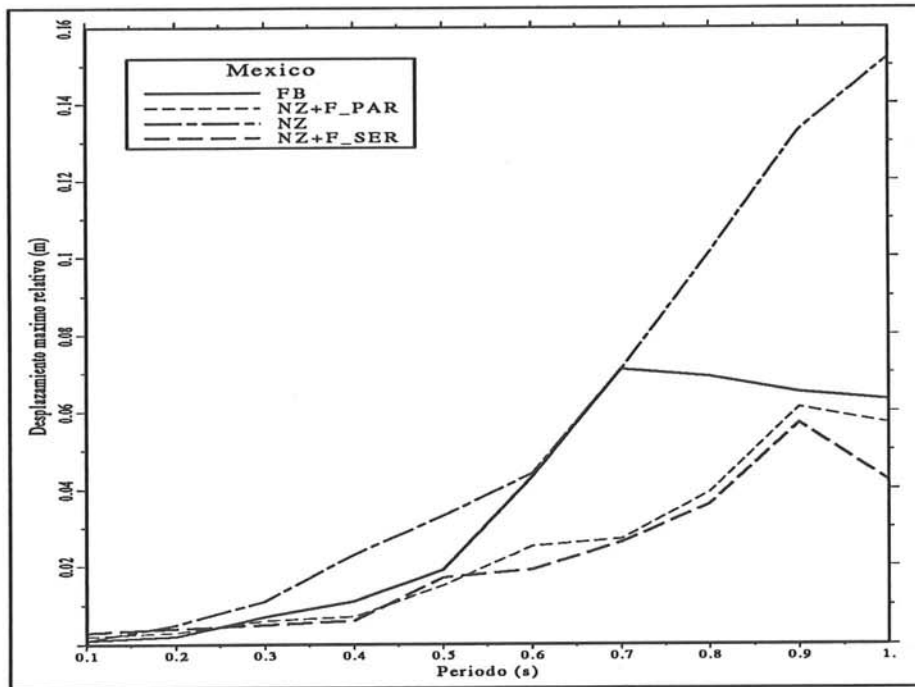


Figura 5.30 Máximo desplazamiento relativo.

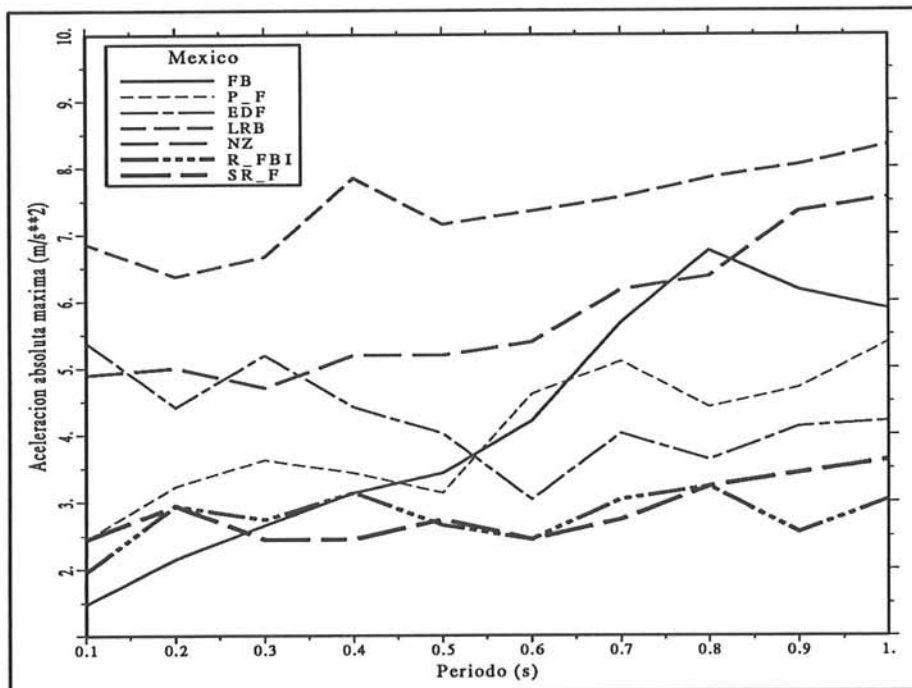


Figura 5.31 Aceleración absoluta máxima.

a partir de  $T = 0.5$  s los sistemas NZ+F-PAR y NZ+F-SER mejoran en forma considerable el comportamiento del sistema NZ frente al modelo de base fija.

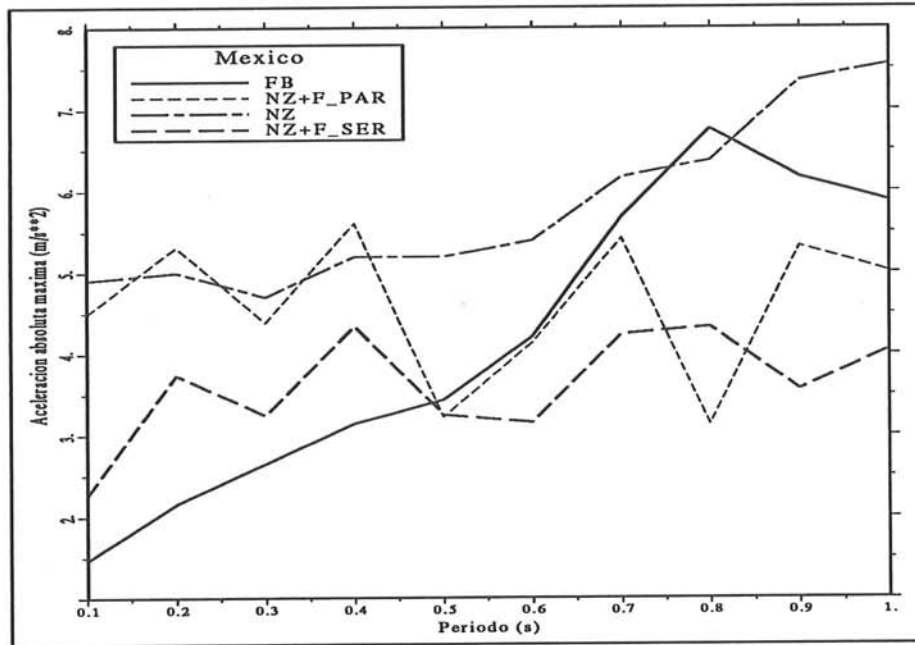


Figura 5.32 Aceleración absoluta máxima.

Los desplazamientos máximos de la base con respecto a la cimentación para el rango de períodos analizado y para todos los sistemas de aislamiento comparados, son mostrados en el gráfico de la figura 5.33. En esta figura se observa que las estructuras con base aislada se comportan de manera parecida a un sólido rígido y que los desplazamientos máximos de la base con respecto a la cimentación, para los diferentes sistemas de aislamiento analizados, no varían con el período natural de la estructura. Además, se presentan desplazamientos máximos de la base muy altos para el sistema LRB (0.60 m) y muy bajos para el sistema EDF (0.05 m), mientras sistemas como el R-FBI, SR-F y NZ presentan valores promedio de 0.25 m y el P-F presenta valores entre 0.1 m y 0.2 m.

Se vuelven a comparar los sistemas NZ, NZ+F-PAR y NZ+F-SER, pero ahora utilizando como parámetro el desplazamiento máximo de la base con respecto a la cimentación, y se obtiene el gráfico de la figura 5.34. En esta figura no aparecen mejoras muy importantes al añadir fricción al sistema NZ ya que los tres sistemas se comportan más o menos igual, presentando valores promedio de 0.30 m.

Se hace una última comparación de todos los sistemas de aislamiento analizados y del modelo de base fija. Para esta comparación se toma la excitación sinusoidal de amplitud constante descrita en el apartado 5.5 y de igual manera se varía la frecuencia de excitación entre cero y 50 rad/s. Además se utiliza el

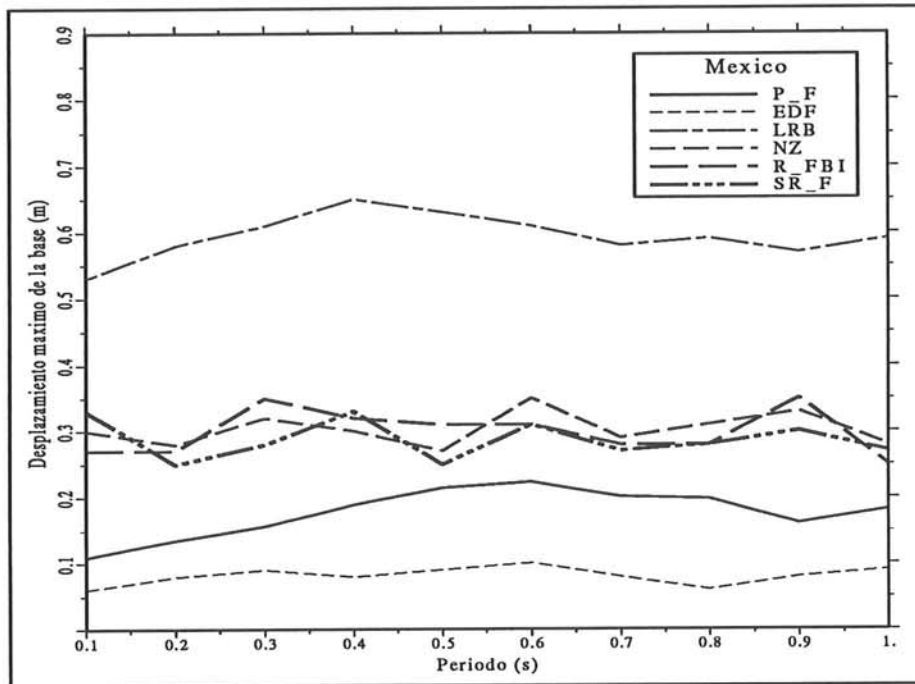


Figura 5.33 Desplazamiento máximo de la base.

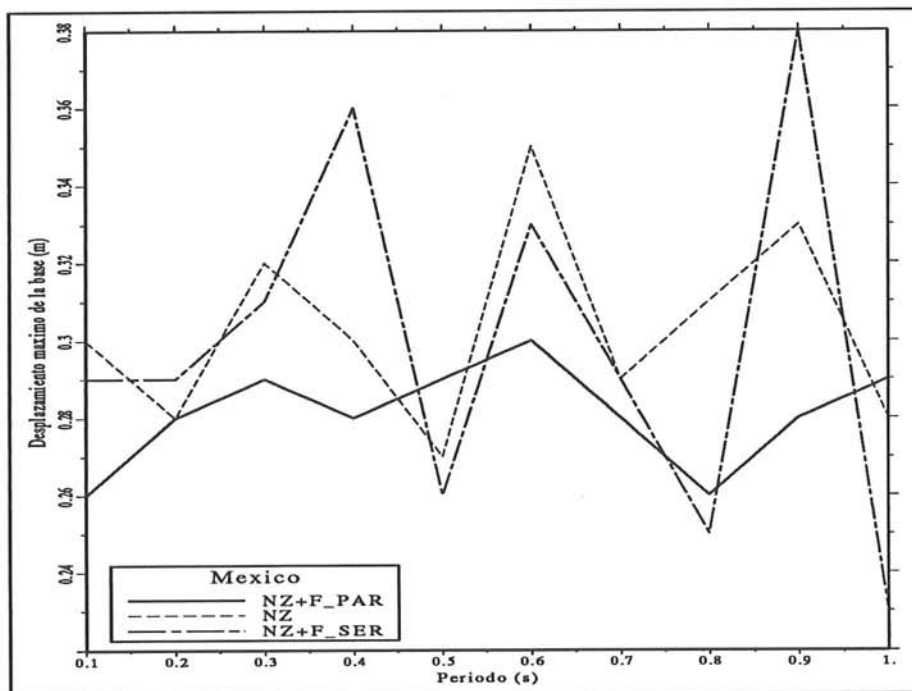


Figura 5.34 Desplazamiento máximo de la base.



modelo de un solo grado de libertad y para los diferentes sistemas de aislamiento se consideran los valores recomendados en el capítulo 3. Los parámetros utilizados para esta comparación son el desplazamiento de la base con respecto a la cimentación y el desplazamiento relativo entre el punto más alto de la estructura y la base, los cuales se muestran en las figuras 5.35 y 5.36 respectivamente.

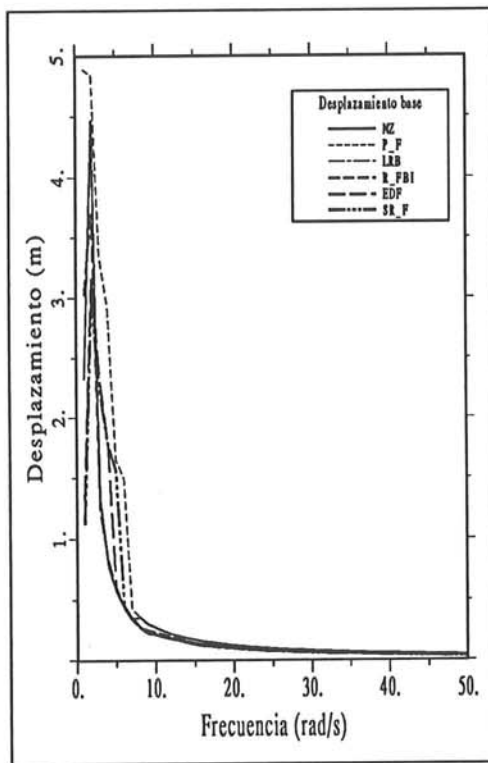


Figura 5.35 Variación frecuencial del desplazamiento máximo de la base.

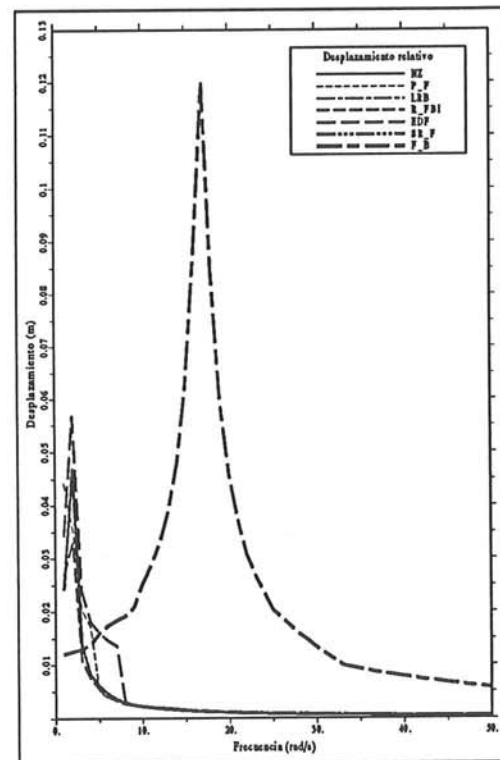


Figura 5.36 Variación frecuencial del desplazamiento máximo relativo.

## 5.10 RESPUESTAS MÁXIMAS POR PISO

Una manera más ilustrativa de analizar sistemas de aislamiento es comparar las respuestas máximas del modelo para cada uno de los pisos, ya que de esta manera vemos el comportamiento general de la estructura. Los parámetros a analizar en este caso serán el desplazamiento relativo máximo entre cada uno de los pisos de la estructura y la aceleración absoluta máxima de cada uno de estos pisos. El modelo utilizado corresponde al de diez grados de libertad descrito en el apartado 5.2 y la excitación utilizada es la componente N-S del terremoto de El Centro (1940). Se comparan las respuestas del modelo aislado por los sistemas NZ, NZ+F-PAR y NZ+F-SER con las del modelo de base fija.

En la figura 5.37 se muestra el desplazamiento relativo máximo entre pisos dado como porcentaje de la altura entre pisos, la cual se ha fijado en 2.3 m para todos los pisos. Con este análisis se comprueba una vez más el comportamiento como sólido rígido de la estructura aislada, ya que los porcentajes de desplazamiento máximos relativos entre pisos son muy parecidos para todos los pisos y para los tres tipos de aislamiento analizados. Además se puede ver que la estructura aislada, por cualquiera de los tres sistemas analizados, presenta valores mucho menores que los de la estructura de base fija.

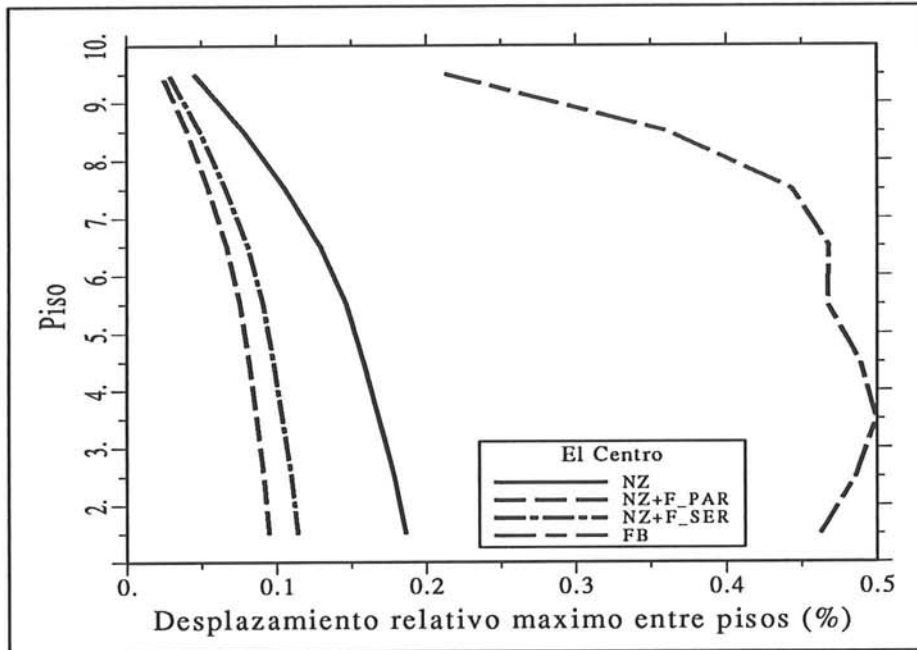


Figura 5.37 Porcentaje de desplazamiento entre pisos.

La figura 5.38 muestra la aceleración absoluta máxima para cada uno de los pisos de la estructura. En esta figura se puede ver que entre los tres sistemas analizados prácticamente no existe diferencia en cuanto a este parámetro se refiere lo que nos indica que el "comfort" en estos sistemas, para este caso, es muy parecido. Lo que si se aprecia muy bien en la figura 5.38, es que la estructura con base aislada se comporta mucho mejor que la de base fija, presentando reducciones del orden del 45% en el décimo piso.

Después de comparar los diferentes sistemas de aislamiento, se puede decir que para terremotos estándar, como el de El Centro (1940), todos los sistemas de aislamiento se comportan de forma correcta, ya que cada uno con su particular diseño puede reducir los efectos de la excitación del terreno en la estructura, presentando valores adecuados de los diferentes parámetros dinámicos analizados.

Para terremotos con contenido considerable de energía en las bajas frecuencias, como el de Ciudad de México, los sistemas de aislamiento no se comportan

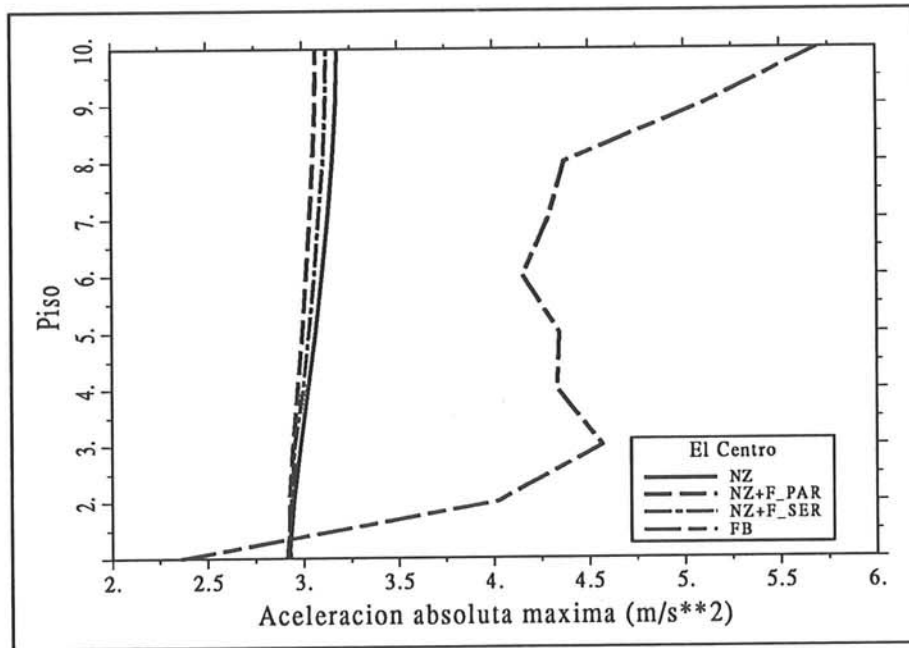


Figura 5.38 Aceleración absoluta por pisos.

adecuadamente. Más claramente, los sistemas de goma como el LRB y el NZ amplifican los efectos de la excitación del terreno, así como ocurre también con algunos tipos de sistemas de aislamiento con fricción.

### 5.11 RESPUESTAS FRENTE A EXCITACIONES CON DIFERENTE CONTENIDO FRECUENCIAL

Para ilustrar el efecto del contenido frecuencial de la excitación, se toma el modelo de un solo grado de libertad descrito en la sección 5.2, con sistema de aislamiento neozelandés, y se somete a la excitación sinusoidal de amplitud constante descrita en el apartado 5.5. Además se varía el período de la estructura y la frecuencia de excitación. También se somete el modelo a cinco terremotos para analizar su comportamiento frente excitaciones reales con diferente contenido frecuencial. Los terremotos utilizados son El Centro (1940), Ciudad de Mexico (1985), Beznar (1984), Miyagioki (1978) y Quito (1987). En este caso los parámetros analizados son el desplazamiento de la base con respecto a la cimentación, el desplazamiento del punto más alto de la estructura relativo a la base y la aceleración absoluta de dicho punto.

En la figura 5.39 se muestra el máximo desplazamiento del punto más alto de la estructura relativo a la base, siendo la figura 5.39(a) la correspondiente a excitaciones sinusoidales y la 5.39(b) la correspondiente a terremotos reales. En esta figura se observa que únicamente para los casos de la senoide con frecuencia de excitación de 3 rad/s y el terremoto de Ciudad de Mexico se presentan valores

altos de este parámetro ya que para los otros casos los valores son aceptables para todo el rango de períodos analizado.

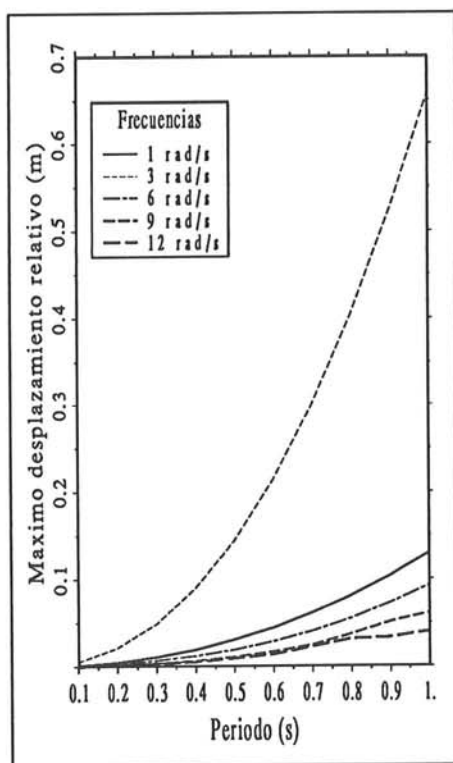


Figura 5.39(a) Sinusoides.

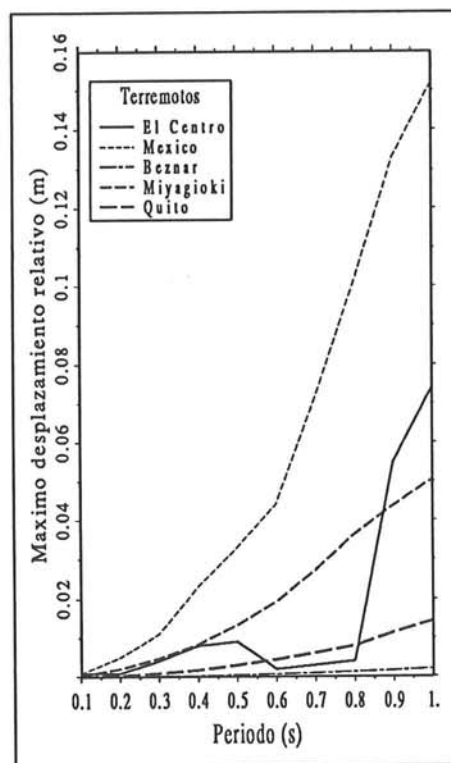


Figura 5.39(b) Terremotos.

En los gráficos de las figuras 5.40 se ilustra el máximo desplazamiento de la base con respecto a la cimentación, correspondiendo la figura 5.40(a) al caso sinusoidal y la 5.40(b) al de terremotos reales. Al observar dichas figuras se vé que, excepto para la senoide de frecuencia de excitación 3 rad/s, el sistema de aislamiento se comporta adecuadamente. Los valores alcanzados en los casos de senoide con frecuencia 1 rad/s y del terremoto de Ciudad de Mexico se consideran adecuados ya que en la referencia (1) se afirma que, para este tipo de aislamiento de base, un valor de hasta 40 cm de este parámetro es aceptable e incluso puede ser mayor para excitaciones más fuertes.

Se analiza ahora la máxima aceleración absoluta del punto más alto de la estructura, cuyo comportamiento se aprecia en las figuras 5.41(a), para el caso sinusoidal, y 5.41(b) para los terremotos. Esta figura confirma lo deducido al evaluar los dos parámetros anteriores, ya que se vé como la senoide de frecuencia 1 rad/s y el terremoto de Ciudad de Mexico son los que presentan mayores valores en sus respectivos casos.

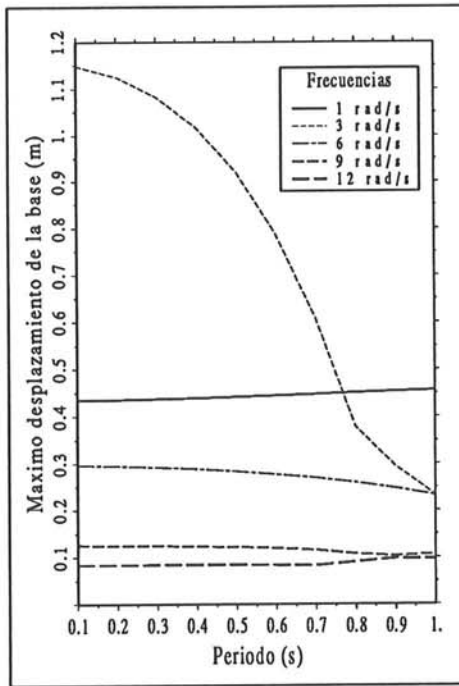


Figura 5.40(a) Sinusoides.

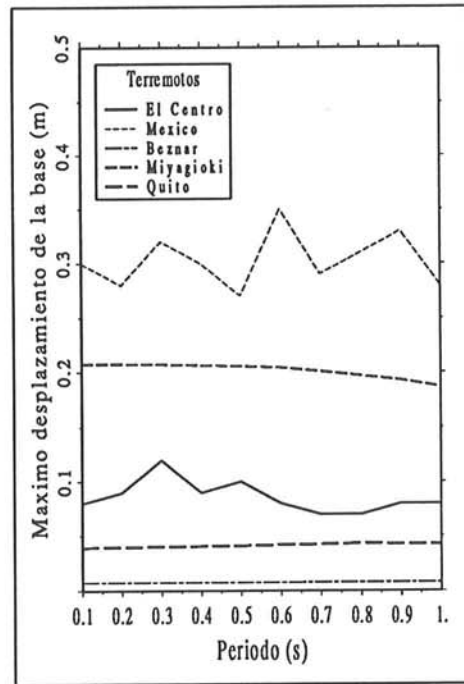


Figura 5.40(b) Terremotos.

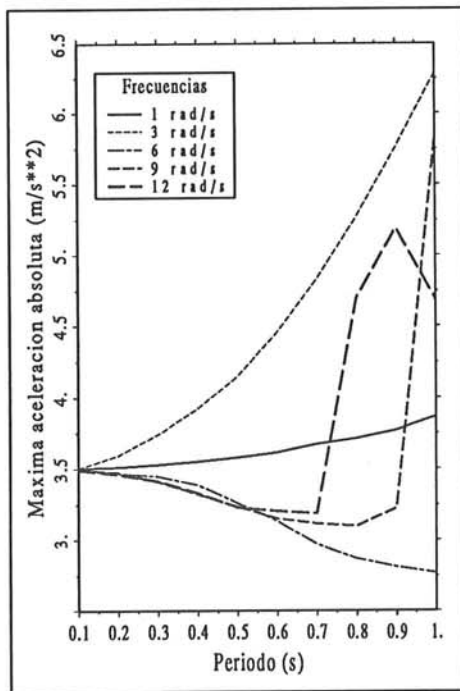


Figura 5.41(a) Sinusoides.

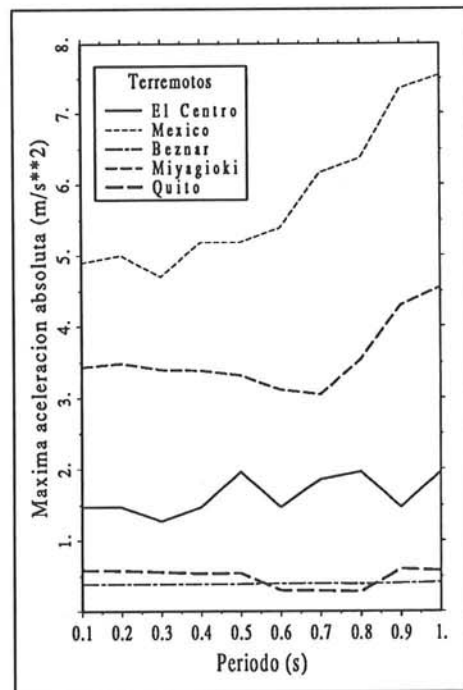


Figura 5.41(b) Terremotos.

Al analizar todas las comparaciones realizadas en este capítulo, se puede considerar adecuada la combinación de los sistemas flexibles con los friccionales para obtener, de esta manera, un comportamiento adecuado frente a cualquier tipo de excitación.

## REFERENCIAS

1. SKINNER R. I., ROBINSON W. H. y McVERRY C. H., *An Introduction to Seismic Isolation*, Jhon Wiley & Sons, Chichester, 1993.
2. BARBAT A. H., MOLINARES N. y CANAS J. A., "Simulación de Sistemas de Apoyo Antisísmico con Comportamiento No Lineal", *Segundo Congreso Métodos Numéricos en Ingeniería*, 1, 359-368, La Coruña, 1993.
3. Structural Engineering Association of California, "Tentative general requirements for the design and construction of seismic isolated structures", Appendix II of *Recommended Lateral Force Requirements and Commentary Blue Book*, California, 1990.
4. NAGARAJAIAH S., REINHORN A. M. y CONSTANTINOU M. C., Nonlinear Dynamic Analysis of Three - Dimensional Base Isolated Structures (3D-BASIS), National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo, Technical Report NCEER-89-0019, August 1989.
5. NAGARAJAIAH S., REINHORN A. M. y CONSTANTINOU M. C., 3D-BASIS - Nonlinear Dynamic Analysis of Three - Dimensional Base Isolated Structures: Part II, National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo, Technical Report NCEER-91-0005, February 1991.
6. SU L., AHMADI G. Y TADJBAKHSI I. G., "A comparative study of performances of various base isolation systems, Part I: Shear beam structures", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 18, 11-32, 1989.
7. WEN Y.-K., "Method for random vibration of hysteretic systems", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 102, 249-263, 1976.
8. JANE L. A. y BARBAT A. H., *Estructuras de edificación con aislamiento antisísmico*, Monografía No. 13, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, 1992.
9. CONSTANTINOU M. C. y TADJBAKHSI I. G., "Response of a sliding structures to filtered random excitation", *Journal of structural mechanics*, 12, 401-418, 1984.
10. CANET J. M. y BARBAT A. H., *Estructuras Sometidas a Acciones Sísmicas - Cálculo por ordenador*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, 1988.
11. CRAIG R. Jr., *Structural Dynamics - An Introduction to Computer Methods*, Jhon Wiley & Sons, 1981.
12. PARK K. C. y HOUSNER J. M., "Semi-implicit Transient Analysis Procedures for Structural Dynamics Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18, 609-622, 1982.
13. PAZ M., *Dinámica Estructural - Teoría y Cálculo*, Editorial Reverté, S.A., 1992.



CENTRO INTERNACIONAL DE METODOS NUMERICOS EN INGENIERIA

**Lista de monografías publicadas en la serie de Ingeniería Sísmica**

Las monografías pueden adquirirse dirigiéndose al Departamento de Publicaciones del Centro Internacional de Métodos Numericos en Ingeniería, Edificio C1, Campus Norte UPC, c/ Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, teléfono: 93-401.60.37, Fax: 93-401-65-17.

- IS-1. *Qualitative Reasoning for Earthquake Resistant Buildings*,  
Luís M. Bozzo, 1993.
- IS-2. *Control predictivo en sistemas de protección sísmica de estructuras*,  
R. Andrade Cascante, J. Rodellar, F. López Almasa, 1993.
- IS-3. *Simulación numérica del comportamiento no lineal de presas de hormigón ante acciones sísmicas*,  
M. Galindo, J. Oliver, M. Cervera, 1994.
- IS-4. *Simulación del daño sísmico en edificios de hormigón armado*,  
A. Hanganu, A.H. Barbat, S. Oller, E. Oñate, 1993.

Los autores interesados en publicar monografías en esta serie deben contactar con el editor para concretar las normas de preparación del texto.



