

UN METODO DE LAGRANGIANO AUMENTADO PARA LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE FLUJO NO LINEAL EN MEDIO POROSO

L. FERRAGUT

y

J. ELORZA

*Departamento de Cálculo Numérico e Informática
de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas de Madrid
Ríos Rosas, 21 - 28003 Madrid*

RESUMEN

Al estudiar el comportamiento del flujo de un fluido a través de un medio poroso se observa que para velocidades altas la ley de Darcy no es válida y requiere su sustitución por expresiones más generales. En este trabajo adoptaremos una expresión del tipo exponencial para formular el problema de flujo en régimen no lineal. La dependencia de la permeabilidad del medio con el gradiente de la altura piezométrica sugiere el uso de los métodos de Lagrangiano aumentado. Aquí describimos un algoritmo de resolución basado en estos métodos y en una discretización mediante elementos finitos que adaptamos al problema que nos ocupa incluyendo los efectos debidos a la posible aparición de una frontera libre. Finalmente, presentamos varios ejemplos físicos resueltos con el método numérico descrito.

SUMMARY

While studying the behaviour from the flow of a fluid through a porous media we notice that in the case of high flow velocities, Darcy's law is not valid and it requires its replacement by more general expresions. In our work we adopt an expression of exponential type to formulate the nonlinear flow in porous media problem. The dependance of the media permeability with the gradient of the piezometric head suggest the use of the Lagrangien augmented methods. Here we present an algorithm of resolution of this problem based both in these methods and in a discretization of the flow field by finite elements. This algorithm includes the effects of the possible apparition of a free surface. Finally, we present the application of this method to various experimental flow problems.

INTRODUCCION

Para velocidades relativamente altas del flujo a través de un medio poroso se producen desviaciones significativas de la ley de Darcy, por lo que resulta necesario utilizar otras expresiones matemáticas para representar la relación no lineal, existente en muchos casos, entre el gradiente hidráulico y la velocidad de flujo (Pérez Franco⁷, Nazeer⁶). Las expresiones de uso más generalizado son del tipo binómico, más realista, y las de tipo exponencial, más sencillas desde el punto de vista matemático y que son las adoptadas en este trabajo.

Recibido: Marzo 1985

La ley exponencial de flujo consiste en sustituir la ley de Darcy $\mathbf{v} = -k \nabla u$, donde \mathbf{v} es la velocidad, u la altura piezométrica y k la conductividad hidráulica por la siguiente

$$\mathbf{v} = -k_n |\nabla u|^{n-1} \nabla u \quad (1)$$

donde $|\cdot|$ designa el módulo de un vector en \mathbb{R}^d ($d=1, 2$ ó 3) y k_n es una constante dependiente de n , que a su vez depende del valor de $|\nabla u|$. En régimen lineal $n=1$ y en régimen turbulento puro $n=0.5$. Cuando las variaciones del gradiente hidráulico dentro del campo de flujo son relativamente pequeñas, es posible considerar que los valores de n y de k_n se mantienen constantes. En el método de cálculo aquí desarrollado se ha considerado que n y k_n son constantes "a trozos". De hecho se puede demostrar⁷ que es prácticamente imposible tener en un mismo medio flujo turbulento puro y flujo lineal. Así pues en lo que sigue supondremos para simplificar el desarrollo que n y k_n son constantes.

Las ecuaciones que gobiernan el flujo estacionario en un medio isótropo serán:

$$-\nabla(k_n |\mathbf{u}|^{n-1}) \nabla u = f \text{ en } \Omega \quad (2)$$

$$u = u_0 \text{ sobre } \Gamma_0 \quad (3)$$

$$-k_n |\nabla u|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sobre } \Gamma_1 \quad (4)$$

siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ el dominio del espacio ocupado por el medio, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ el contorno de Ω y f , u_0 y g son funciones conocidas que representan respectivamente el caudal volumétrico aportado en cada punto de Ω , la altura piezométrica conocida en Γ_0 y el flujo conocido en Γ_1 .

FORMULACION VARIACIONAL

En sabido² que el problema formulado mediante las expresiones (2), (3) y (4) se puede expresar mediante un problema de optimización de la siguiente forma:

Consideremos para $1 < s < \infty$ el espacio funcional

$$W^{1,s}(\Omega) = \left\{ v \in L^s(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^s(\Omega) \quad 1 \leq i \leq d \right\}$$

que es un espacio de Banach reflexivo con la norma

$$\|v\|_{1,s,\Omega} = \left\{ \int_{\Omega} |v|^s dx + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^s dx \right\}^{1/s}$$

Llamaremos $W_{0,\Gamma_0}^{1,s}(\Omega)$ al subespacio cerrado de $W^{1,s}(\Omega)$ dado por

$$W_{0,\Gamma_0}^{1,s}(\Omega) = \left\{ v \in W^{1,s}(\Omega); v|_{\Gamma_0} = 0 \right\}$$

y designaremos por K el conjunto convexo y cerrado

$$K = \left\{ v \in W^{1,s}(\Omega); v|_{\Gamma_0} = u_0 \right\}$$

la solución u de (2), (3) y (4) verifica

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v) \quad (5)$$

donde $J(\cdot)$ viene dada por

$$J(v) = \frac{1}{s} \int_{\Omega} k_n |\nabla v|^s dx - \int_{\Omega} fv dx - \int_{\Gamma_1} gv d\gamma \quad (6)$$

y siendo el valor de $s = n+1$

Debido a la monotonía del operador $v \rightarrow -\nabla(k_n |\nabla v|^{s-2}) \nabla v$ sabemos que el problema (5) tiene solución única.

Salvo en el caso $s=2$ (ley de Darcy) el problema anterior es no lineal debido a la dependencia de la conductividad hidráulica de la solución u a través del gradiente. Este tipo de dependencia sugiere la introducción de una nueva variable y una nueva ecuación $p = \nabla u$ que permita desacoplar las dificultades inherentes por un lado al operador gradiente y por otro a la dependencia no lineal. Las expresiones (5) y (6) se transformarán en las siguientes:

$$\begin{aligned} J(u,p) = \min_{(v,q) \in W} & J(v,q) \\ & (7) \end{aligned}$$

siendo $W = \{(v,q) \in K \times (L^s(\Omega))^d ; q = \nabla v\}$

$$J(v,q) = \frac{1}{s} \int_{\Omega} k_n |q|^s dx - \int_{\Omega} fv dx - \int_{\Gamma_1} gv d\gamma \quad (8)$$

APROXIMACION POR ELEMENTOS FINITOS

En primer lugar introduzcamos la versión discretizada de (7) y (8) mediante el método de elementos finitos¹⁰. El análisis numérico de la aproximación mediante elementos finitos de (5) y (6) se puede encontrar por ejemplo en Ciarlet². Consideremos el subconjunto K_h de K y el subespacio L_h de $(L^s(\Omega))^d$ siguientes:

$$\begin{aligned} V_h &= \left\{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}), v_h|_T \in P_k(T) \forall T \in \mathcal{T}, v_h|_{\Gamma_0} = 0 \right\} \\ K_h &= \left\{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}), v_h|_T \in P_k(T) \forall T \in \mathcal{T}, v_h|_{\Gamma_0} = u_0 \right\} \\ L_h &= \left\{ q_h \in (L^s(\Omega))^d ; |q_{hi}|_T \in P_{k-1}(T) \quad 1 \leq i \leq d \quad \forall T \in \mathcal{T} \right\} \end{aligned}$$

Hemos designado mediante \mathcal{T} una triangulación (división en tetraedros para $d=3$) del dominio Ω en elementos T y por $P_k(T)$ el conjunto de polinomios de grado k en el elemento T . Análogamente procederíamos para una descomposición del dominio en elementos cuadrilaterales y los correspondientes polinomios incompletos Q_k . El problema aproximado es ahora

$$\text{Hallar } (u,p) \in W_h = \{(v,q) \in K_h \times L_h ; q = \nabla v\}$$

tal que

$$\begin{aligned} J_h(u,p) = \min_{(v,q) \in W_h} & J_h(v,q) \\ & (9) \end{aligned}$$

y siendo $J_h(v,q)$ la restricción de $J(\cdot, \cdot)$ dada por (8) al conjunto W_h .

ALGORITMO DE RESOLUCION

Un método para resolver (7) consiste en evitar la restricción $\mathbf{q} = \nabla v$ introduciendo un multiplicador de Lagrange $\lambda \in L_h$ y sustituyendo $J_h(\cdot)$ por la función Lagrangiana

$$\mathcal{L}(v, q, \mu) = \frac{1}{s} \int_{\Omega} k_n |q|^s dx - \int_{\Omega} fv dx - \int_{\Gamma_1} gvd\gamma + \int_{\Omega} k_D \mu (\nabla v - q) dx \quad (10)$$

definida sobre $W_h \times L_h$ y siendo k_D la conductividad hidráulica de Darcy cuya inclusión aquí justificaremos más adelante. Es fácil comprobar que la solución buscada es un punto silla de la Lagrangiana \mathcal{L} , es decir, (u, p, λ) es solución de:

$$\mathcal{L}(u, p, \mu) \leq \mathcal{L}(u, p, \lambda) \leq \mathcal{L}(v, q, \lambda) \quad (11)$$

$$\forall (v, q) \in K_h \times L_h \quad \text{y} \quad \forall \mu \in L_h$$

Desde el punto de vista numérico la resolución de (11) plantea ciertas dificultades debido al condicionamiento de las matrices de los sistemas de ecuaciones que resultan; por ello siguiendo una idea de Hestenes⁵ modificaremos el anterior Lagrangiano de la forma siguiente; para $r > 0$

$$\mathcal{L}_r(v, q, \mu) = \mathcal{L}(v, q, \mu) + \frac{r}{2} \int_{\Omega} k_D |\nabla v - q|^2 dx \quad (12)$$

y la solución buscada es ahora un punto silla de \mathcal{L}_r .

Varios algoritmos de búsqueda de punto silla basados en el método de Uzawa se pueden encontrar en Fortin y Glowinski³. Describimos a continuación el adoptado aquí:

Elegimos los valores p^0 y λ^0 arbitrarios

1.^o) Conocido p^i y λ^i calculamos u^{i+1} resolviendo

$$\mathcal{L}_r(u^{i+1}, p^i, \lambda^i) \leq \mathcal{L}_r(v, p^i, \lambda^i) \quad (13)$$

$$\forall v \in K_h \quad \text{y} \quad u^{i+1} \in K_h$$

2.^o) Calculamos p^{i+1} resolviendo

$$\mathcal{L}_r(u^{i+1}, p^{i+1}, \lambda^i) \leq \mathcal{L}_r(u^{i+1}, q, \lambda^i) \quad (14)$$

$$\forall q \in L_h$$

3.^o) Calculamos λ^{i+1} mediante ($\rho > 0$)

$$\lambda^{i+1} = \lambda^i + \rho (\nabla u^{i+1} - p^{i+1}) \quad (15)$$

si $|\nabla u^{i+1} - p^{i+1}| \geq \alpha |\nabla u^{i+1}|$ hacemos i igual a $i+1$ y volvemos al paso 1.^o.

Los problemas (13), (14) y (15) son sencillos de resolver, en efecto:

El cálculo (13) equivale a resolver el siguiente problema lineal:

Hallar $u^{i+1} \in K_h$ tal que verifique

$$r \int_{\Omega} k_D \nabla u^{i+1} \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} k_D (r p^i - \lambda^i) \nabla v dx + \int_{\Omega} fv dx + \int_{\Gamma_1} g \gamma d\gamma \quad (16)$$

$$\forall v \in V_h$$

Observemos que la matriz de este sistema es fija y bastará factorizarla una sola vez. El cálculo (14) equivale a hallar $\mathbf{p}^{i+1} \in \mathbf{L}_h$ tal que

$$\int_{\Omega} (k_n |\mathbf{p}^{i+1}|^{s-2} \mathbf{p}^{i+1} + r k_D \mathbf{p}^{i+1}) \mathbf{q} \, dx = \int_{\Omega} k_D (r \nabla u^{i+1} + \lambda^i) \mathbf{q} \, dx \quad (17)$$

$$\forall \mathbf{q} \in \mathbf{L}_h$$

como las funciones de \mathbf{L}_h son discontinuas y no guardan relación de un elemento a otro (17) equivale a un problema local en cada elemento, es decir (17) se puede resolver en cada punto de integración resultando

$$k_n |\mathbf{p}^{i+1}|^{s-2} \mathbf{p}^{i+1} + r k_D \mathbf{p}^{i+1} = (r \nabla u^{i+1} + \lambda^i) k_D \quad (18)$$

que es un sistema no lineal de d ecuaciones; de hecho la no linealidad se resuelve en una sola ecuación, en efecto, conocido $|\mathbf{p}^{i+1}|$ el cálculo es explícito y para calcular $|\mathbf{p}^{i+1}|$ obtenemos la ecuación no lineal en la variable $|\mathbf{p}^{i+1}|$ siguiente

$$k_n |\mathbf{p}^{i+1}|^{s-1} + r k_D |\mathbf{p}^{i+1}| = k_D |r \nabla h^{i+1} + \lambda^i|$$

que es fácilmente resoluble por el método de Newton.

Finalmente (15) es también un cálculo explícito en cada punto de integración.

La inclusión de la conductividad de Darcy k_D en los términos $\int_{\Omega} k_D \mu(\nabla v - \mathbf{q}) \, dx$ de (10) y $\frac{r}{2} \int_{\Omega} k_D |\nabla v - \mathbf{q}|^2 \, dx$ de (12) puede venir justificada intuitivamente por la idea de acercarse al problema lineal correspondiente y de manera especial en la expresión (16); concretamente, si resolvemos un problema lineal ($k_n = k_D$ y $s = 2$) con el algoritmo anterior obtenemos la convergencia de u en una sola iteración (no así de ∇u) si elegimos $\rho = r = 1$. Este hecho fue observado y estudiado por Glowinski y Marroco⁴ para un problema parecido.

Cuando los valores de k_n y s no sean constantes sino variables y dependientes del valor de ∇u , modificamos el 2.^o paso del algoritmo anterior de la siguiente forma:

- Calculamos ∇u^{i+1}
- Calculamos $k_n = k_n(\nabla u^{i+1}), s = s(\nabla u^{i+1})$
- Resolvemos (18)

TRATAMIENTO DE ACUÍFEROS CON SUPERFICIE LIBRE

En el estudio de acuíferos no confinados o acuíferos libres, el agua presenta una superficie libre, sujeta a la presión atmosférica, como límite superior de la zona de saturación. La posición de esta superficie es desconocida a priori por lo que incluso en el caso lineal de la ley de Darcy hay que recurrir a un procedimiento iterativo para clacular la solución. Aquí adaptamos una idea que Bathe y Khoshgoftaar¹ utilizan en el caso lineal para el tratamiento de este tipo de problemas y que consiste en considerar la conductividad hidráulica dependiente de la altura piezométrica u de la siguiente manera.

$$k(u) = \begin{cases} k_D & \text{si } u > y \\ 0 & \text{si } u \leq y \end{cases}$$

siendo y la altura geométrica del punto considerado; se procede entonces por un método de Newton-modificado es decir:

Partiendo de un valor u^0 inicial y conocido u^i calculamos u^{i+1} resolviendo

$$\int_{\Omega} k_D \nabla \delta \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx + \int_{\Gamma_1} gv \, d\gamma - \int_{\Omega} k(u^i) \nabla u^i \cdot \nabla v \, dx \quad (19)$$

$$u^{i+1} = u^i + \delta$$

Introduciendo el mismo término corrector en el caso no lineal, se modifica la expresión (16) una vez puesta en forma incremental de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} r \int_{\Omega} k_D \nabla \delta \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\Omega} k_D (rp^i - \lambda^i) \nabla v \, dx + \int_{\Omega} fv \, dx + \int_{\Gamma_1} gv \, d\gamma - \\ &\quad - \int_{\Omega} k(u^i) \nabla u^i \cdot \nabla v \, dx \end{aligned}$$

y tomamos $s = 2$ en (18) si $u \leq y$ lo que equivale a considerar como lineal el flujo ficticio en la zona no saturada.

EJEMPLOS NUMERICOS

Se consideran a continuación tres ejemplos resueltos con el algoritmo descrito. El primero de ellos se refiere a un acuífero confinado con régimen de flujo no lineal y los otros dos a una situación también con régimen de flujo no lineal pero con la presencia de una superficie libre.

Acuífero confinado: Resolvemos aquí bajo hipótesis de régimen no lineal un ejemplo similar al propuesto por Segerlind⁸ y tratado allí según el modelo de la ley lineal de Darcy. Un acuífero ocupa una región rectangular de 1500 m x 3000 m y está rodeado por un material impermeable en dos de sus lados opuestos conociéndose el valor de la altura piezométrica en los otros dos lados; una corriente divide la región como se indica en la Figura 1, siendo la infiltración de agua debida a ella de 0.24 m³/día/m., además existen dos pozos en la situación (2000.,830.) y (1100.,600.) que retiran agua con un caudal de 1200 m³/día y 2400 m³/día respectivamente. Se ha resuelto el problema considerando un régimen no lineal tomando como valores constantes para k_n y n de la expresión (1) iguales a 10. y 0.8 respectivamente. En el algorit-

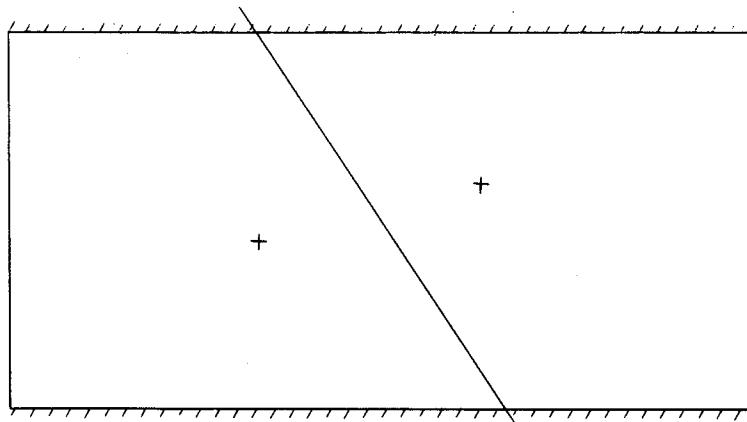


Figura 1.— Acuífero confinado.

mo (13)-(14)-(15) se ha tomado $\rho = r$ y estudiado la convergencia para diversos valores obteniendo los resultados de la Tabla 1. El valor de α en el test de convergencia es igual a 10^{-3} . En la Figura 2 se muestran las líneas de igual altura piezométrica obtenidas y finalmente en la Figura 3 se representa el resultado correspondiente al caso de un cálculo en régimen lineal de Darcy obtenido tomando como valor de la permeabilidad un valor promedio igual a 17.88.

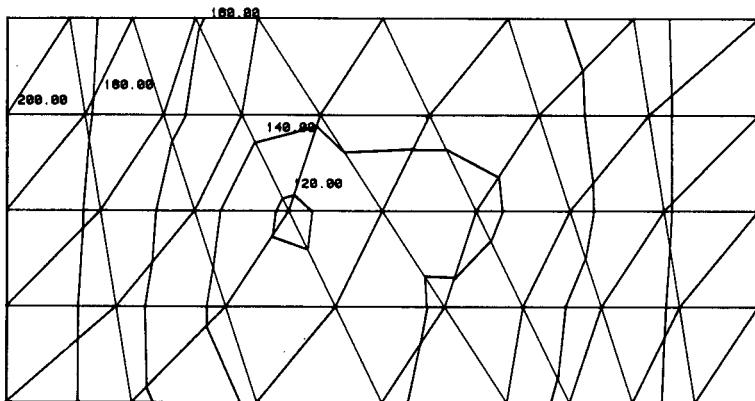


Figura 2.— Líneas de igual altura piezométrica.

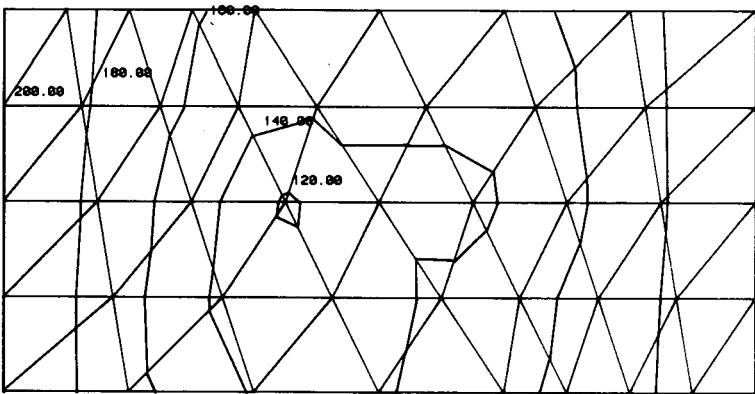


Figura 3.— Líneas de igual altura piezométrica en el caso lineal.

En todos los casos se ha utilizado una discretización mediante 64 triángulos de tres nodos y polinomios de primer grado; el número de nodos de la triangulación es de 45 y el número de grados de libertad 35.

$\rho = r$	n.º iteraciones	$\rho = r$	n.º iteraciones
0.5	16	1.	11
0.6	14	1.2	12
0.7	13	1.5	13
0.8	12	2.	15
0.9	12	3.	19

Tabla 1.— Convergencia del algoritmo.

Se ha estudiado este ejemplo con el fin de comprobar la convergencia del algoritmo, siendo necesario para cálculos más precisos afinar el mallado, en particular cerca de los pozos y de la corriente que atraviesa el acuífero.

Flujo no confinado: Hemos considerado en este segundo ejemplo el flujo a través de una presa de forma aproximadamente trapezoidal como se indica en la Figura 4. Este caso ha sido resuelto por Volker⁹, mediante el método clásico del punto fijo en lo que concierne a la no linealidad de la ley de flujo y efectuando un ajuste de la posición de la superficie libre resolviendo reiteradas veces el problema.

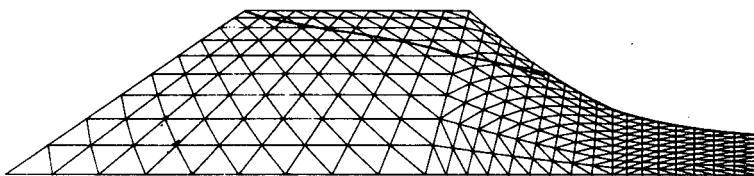


Figura 4.— Mallado y superficie libre en el ejemplo 2.

El valor de la altura piezométrica aguas arriba es igual a 1.215 pies. El valor de k_n es igual a 0.286 y el valor del exponente n es 1.573. La discretización utilizada ha sido realizada mediante triángulos lineales de tres nodos y según el mallado representado en la Figura 4. Los resultados obtenidos han sido verificados con los resultados experimentales dados por Volker⁹ observándose una discrepancia menor del 1% en promedio. La posición de la superficie libre se muestra en la Figura 4 y en la Figura 5 se presentan las líneas de igual altura piezométrica donde sólo tiene significado físico la parte que aparece por debajo de la superficie libre.

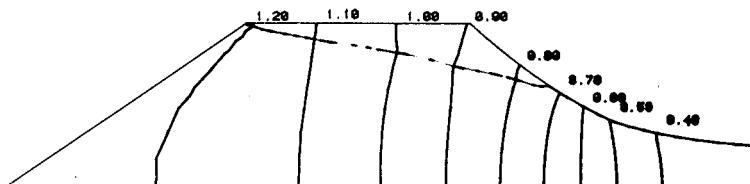


Figura 5.— Líneas de igual altura piezométrica en el ejemplo 2.

Valores variables de los coeficientes: En este tercer ejemplo se ha supuesto que los valores de k_n y n en la ecuación (1) dependen del valor del gradiente y corresponde a un talud de una mina a cielo abierto con altura piezométrica aguas arriba igual a 16 m. El cálculo de la solución de (1)-(2)-(3) permitirá estimar el caudal de flujo que habrá que evacuar de la mina si no queremos que ésta se inunde. Los valores de k_n y n en función del gradiente se dan en la tabla 2.

$ \nabla u $	n	k_n
0. -10^{-2}	1.	1.
$10^{-2} - 10^{-1}$	0.90	0.6
$10^{-1} - 1.$	0.70	0.3
1. $-10.$	0.57	0.27
$10. -100.$	0.52	0.1

Tabla 2.— Valores de n y k_n .

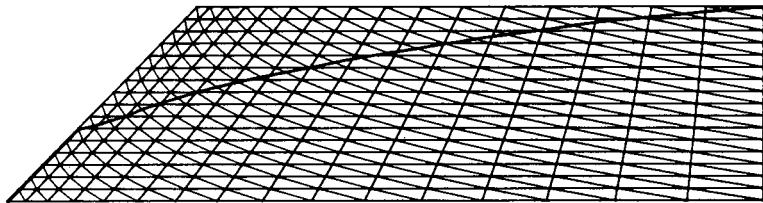


Figura 6.— Mallado y superficie libre en el ejemplo 3.

La discretización se ha realizado mediante elementos triangulares de 3 nodos y según el mallado de la Figura 6. La discontinuidad de flujo que aparece en la frontera que representa el talud aconseja afinar el mallado en los alrededores de la misma. En la Figura 6 se representa la superficie freática en el acuífero una vez abierta la mina. En la Figura 7 aparecen dibujadas las líneas de igual altura piezométrica.

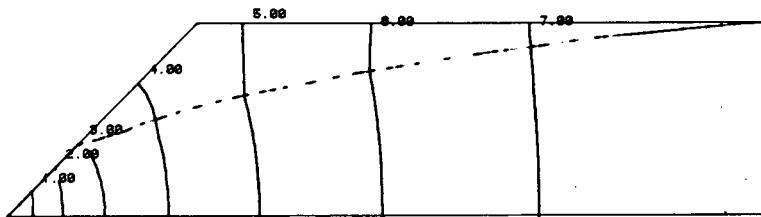


Figura 7.— Líneas de igual altura piezométrica en el ejemplo 3.

REFERENCIAS

1. K. J. Bathe y Khoshgoftaar. "Finite Element free surface seepage analysis without mesh iteration". *Int. J. Num. A. Meth. Geom.* **3**, 13-22 (1979).
2. P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. Editorial North-Holland, Amsterdam, Holanda (1978).
3. M. Fortin y R. Glowinski. *Méthodes de Lagrangien augmenté*. Editorial Dunod, París, Francia, (1982).
4. R. Glowinski y A. Marrocco. "Sur l'approximation, par éléments finis d'ordre un, et la résolution, par pénalisation-dualité, d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires" *Rapport de Recherche n.º 115 IRIA* (1975).
5. M. Hestenes. "Multiplier and gradient methods". *J. Optimization theory and Applications* **4**, 303-320 (1969).
6. A. Nazeer y D. K. Sunada. "Nonlinear flow in porous media" *Journal of the Hydraulics Division HY* **6**, 1847-1857 (1969).
7. D. Pérez Franco. *Hidráulica Subterránea*. Editorial Científico Técnica, Ciudad de la Habana, Cuba, (1982).
8. L. J. Segerlind. *Applied Finite Element Analysis*. Editorial Wiley, New York, USA (1976).
9. R. E. Volker. "Nonlinear flows in porous media by finite elements". *Journal of the Hydraulics Division HY* **6**, 2093-2114 (1969).
10. O. C. Zienkiewicz. *El método de los elementos finitos*. Editorial Reverté, Barcelona, España (1979).

**UNIVERSIDAD POLITECNICA DE CATALUÑA
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS DE BARCELONA
CURSO DE POSTGRADO**

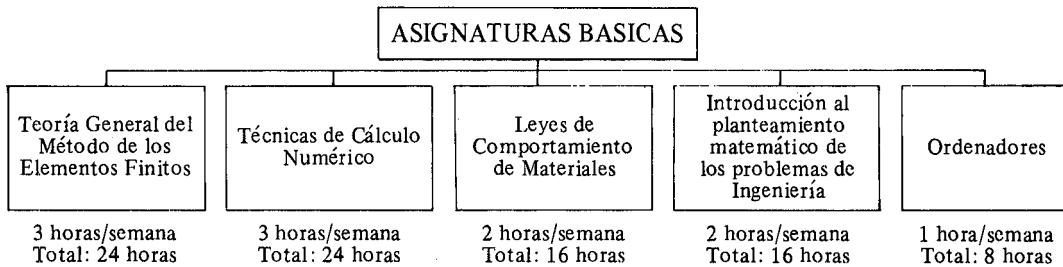
**METODOS NUMERICOS PARA CALCULO Y DISEÑO EN INGENIERIA
ENERO - JUNIO 1986**

El objetivo de este Curso de Postgrado es proporcionar al ingeniero información actualizada sobre la metodología y utilización de procedimientos de cálculo y diseño por ordenador para la solución de toda una variedad de problemas de ingeniería.

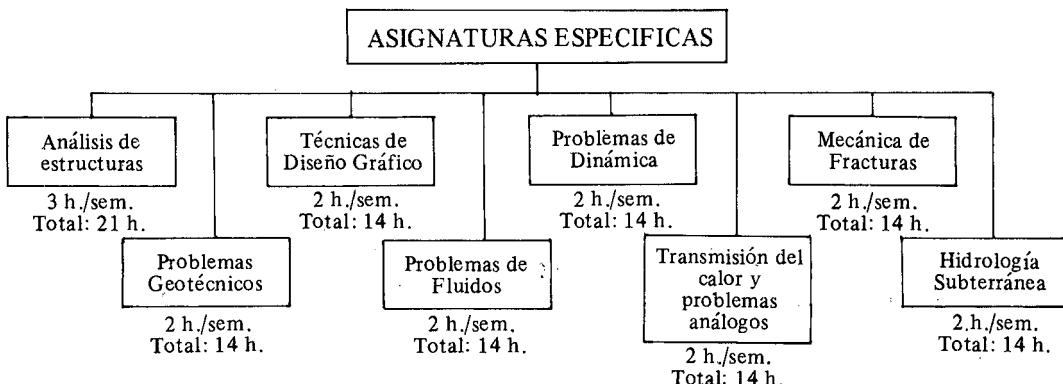
El curso se ha estructurado en dos fases. La primera fase, general e introductoria, comprende una serie de asignaturas de carácter básico, con temas tan importantes, dentro del campo del Diseño y el Análisis numérico en Ingeniería, como la Teoría General del Método de los Elementos Finitos, las técnicas más usuales del cálculo numérico y diversos conceptos esenciales sobre ordenadores, las leyes de comportamiento de los materiales y la introducción al planteamiento matemático de los problemas de ingeniería.

En la segunda fase del curso se han escogido una serie de asignaturas específicas que abarcan la mayor parte de los problemas de ingeniería más usuales que permiten su resolución por métodos numéricos.

1.^a FASE Todas las asignaturas de esta fase son obligatorias **DURACION: 8 SEMANAS**



2.^a FASE Deberán cursarse como mínimo cinco asignaturas de esta fase **DURACION: 7 SEMANAS**



Para mayor información escribir a:

Secretaría del Curso sobre Métodos Avanzados de Diseño y Análisis Numérico en Ingeniería
E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Jordi Girona Salgado, 31 - 08034 Barcelona - España - Teléfono (93) 204 82 52