Vol. 15, 3, 357–373 (1999)

Revista Internacional de
Métodos Numéricos para
Cálculo y Diseño en Ingeniería

Modelado de láminas ortotrópicas axisimétricas para excitaciones con alto contenido en frecuencia

Juan José López Cela

Universidad de Castilla-La Mancha
ETS Ingenieros Industriales
13071 Ciudad Real, España
Tel.: 34-926-29 53 00 ext. 3806, Fax: 34-926-29 53 61
e-mail:jlopez@ind-cr.uclmes

Consuelo Huerta y Enrique Alarcón

Universidad Politécnica de Madrid
ETS Ingenieros Industriales
José Gutiérrez Abascal 2
28006 Madrid, España
Tel.: 34-91-336 31 35/336 30 21, Fax: 34-91-336 30 04
e-mail: chuerta@estru.upm.es, alarcon@estru.upm.es

Resumen

El propósito de este artículo es el análisis lineal de estructuras laminares sometidas a excitaciones dinámicas con alto contenido en frecuencia. El método numérico propuesto utiliza para el modelado elementos continuos monodimensionales. La respuesta exacta de este tipo de elementos es conocida, y por lo tanto el método es más conveniente para este tipo de problemas que otros métodos convencionales basados en discretización espacial, por ejemplo el método de los elementos finitos (MEF), que precisarían de una malla muy fina para recoger adecuadamente los fenémenos de interés. El estudio aquí descrito se limita a estructuras axisimétricas con formas cilíndricas o cónicas. Se presentan criterios para modelar dichas estructuras mediante vigas sobre apoyo elástico.

MODELLING OF ORTHOTROPIC AXISYMMETRIC SHELLS FOR EXCITATION WITH VERY HIGH FREQUENCY CONTENTS

Summary

Tho goal of this work is the linear analysis of laminar structures subject to dynamic excitations with very high frequency contents. The proposed numerical method uses for the modelling one-dimensional continuum elements. The exact solution of this kind of elements is well known and therefore the method is more suitable for these problems than other conventional ones that need spatial discretization, for example the Finite Element Method (FEM), that should need a very fine mesh to reproduce the correct behaviour. The study herein is limited to the case of axisymmetric cylindrical and conical shells. Criteria to model axisymmetric structures by beams on elastic foundation are presented.

 ISSN: 0213–1315 Recibido: Noviembre 1997

INTRODUCCIÓN

En este tabajo se analiza la respuesta de láminas ortotrópicas de formas cónicas y cilíndricas sometidas a excitaciones con alto contenido en frecuencia. Este problema se originó durante el estudio de los efectos dinámicos inducidos en el vehículo lanzador de satélites ARIANE 5 (A5 VEB) por un dispositivo pirotécnico que produce la rotura del anillo que conecta la parte superior del vehículo. Es necesario estudiar numéricamente los efectos causados por la propagación de las ondas originadas por la explosión con el fin de garantizar que los equipos electrónicos vitales para la misión del vehículo no resulten dañados.

En el caso de la explosión pirotécnica en el A5 VEB el contenido en frecuencia de la carga alcanza 30 000 Hz en la estructura, mientras que la primera frecuencia de vibración del vehículo es aproximadamente 10 Hz. Para este tipo de análisis los métodos basados en discretización espacial, por ejemplo el método de los elementos finitos (MEF), necesitan una malla muy fina y/o un paso de integración muy pequeño, lo que hace que cualquier modelo computacional no sea prácticamente eficiente. Por otro lado, la complejidad del problema lleva asociado un alto grado de indeterminación tanto en la definición de la carga como en el modelo de la estructura, por lo que se precisa un método computacional que permita realizar estudios paramétricos con suficiente rapidez y efectividad.

Inicialmente se intentó utilizar la teoría de la propagación de ondas[1,2,3,4]. Dicho método presenta un importante problema: el tiempo de cálculo crece enormemente con el número de frecuencias utilizadas para la tranformada de Fourier y con los casos de carga analizados. Por tanto se decidió utilizar una aproximación clásica basada en elementos continuos[5,6]: el cálculo de la matriz de impedancia dinámica utilizando como elementos de modelado vigas del tipo Rayleight-Timoshenko sobre apoyo eslástico, es decir con deformación debida a la flexión al axil y al cortante y que incluya los efectos debidos a la inercia de rotación. En este sentido la discretización puede tener elementos tan grandes como se desee con la única limitación de cambios en la geometría, en el material o en las condiciones de contorno.

El trabajo llevado a cabo ha seguido dos líneas de actuación: por un lado, se ha desarrollado un extenso programa experimental (todas las probetas se ensayaron en la División Espacio de Construcciones Aeronáuticas CASA) y paralelamente se han desarrollado métodos numéricos (junto con la correspondiente implementación en códigos computacionales) para reproducir los fenómentos observados experimentalmente.

Los primeros ensayos se realizaron sobre probetas planas con el fin de simplificar los problemas debidos a la curvatura de la estructura real. En estas condiciones y desde el punto de vista analítico, el modelo es bidimensional. Los resultados de estos ensayos se reprodujeron correctamente con el método numérico propuesto.

En una fase posterior se ensayaron probetas con cierta curvatura. Por esta razón se incluyó en el código la posibilidad de analizar láminas ortotrópicas. Aunque el tratamiento de la ortotropía es más complejo, es necesario debido a que la parte estudiada del A5 VEB está construída con láminas de aluminio reforzadas con larguerillos y sándviches de fibra de carbono.

A continuación se presenta el esquema matemático utilizado para modelar mediante sistemas equivalentes de vigas, el comportamiento de estructuras laminares, así como algunos ejemplos de validación, en los que se comparan los resultados del método propuesto con otros de referencia obtenidos teóricamente o mediante modelos de elementos finitos. Especial hincapié se hace en estructuras con simetría axial, aunque el método es aplicable a cualquier tipo de geometría, como se pone de manifiesto en el último ejemplo.

MODELO MATEMÁTICO

Generalidades

El método matemático se formula en el dominio de la frecuencia. Se calcula la respuesta estructural para todos los componentes armónicos de la excitación y se obtiene a continuación la respuesta temporal aplicando un procedimiento de superposición adecuado. En el dominio de la frecuencia aplicar el concepto de matriz de rigidez compleja es sencilo así como incorporar los efectos de masas concentradas o distribuídas y de los elementos elásticos y disipativos. Como la solución exacta de la ecuación de campo en el dominio de la frecuencia de elementos continuos monodimensional es conocida, el cálculo de la matriz de impedancia es inmediato mediante la aplicación de desplazamientos unitarios en los grados de libertad adecuados.

Mediante la utilización de los módulos complejos de elasticidad E y de cortadura G se permite la consideración de diversos tipos de amortiguamiento: viscoso, histerético y variable con la frecuencia de acuerdo con una ley determinada.

Las ventajas más interesantes del método son las siguientes:

- El número de elementos es el mínimo compatible con la variación de las propiedades geométricas y de los materiales.
- Velocidad de cálculo debido a la posibilidad de estudiar simultáneamente para cada frecuencia varios casos de carga sin aumento significativo de tiempo de cálculo.
- Se puede calcular fácilmente la respuesta en puntos interiores del elemento, ya que las funciones de interpolación son soluciones exactas de las ecuaciones de campo en el dominio de la frecuencia.

Las masas concentradas se añaden directamente a la matriz de impedancia. Para el caso de muelles y amortiguadores que actúan entre nudos se decidió duplicar la numeración de éstos, distinguir entre nudo inicial y final y referir la dirección del sistema muelle-amortiguador a una barra de la estructura.

Una vez establecida la matriz de impedancia global $D(\omega)$ se puede organizar para cada frecuencia la matriz de carga (una columna para cada caso de carga) $F(\omega)$ y obtener el campo de desplazamientos $x(\omega)$ mediante la resolución de la ecuación

$$x(\omega) = D(\omega) \cdot F(\omega) \tag{1}$$

$$\dot{x} = i \cdot \omega \cdot x(\omega) \tag{2}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 \cdot x(\omega) \tag{3}$$

donde ω es la frecuencia angular e i es la unidad imaginaria.

Para calcular la respuesta temporal de interés se utiliza una transformada de Fourier inversa que superpone las diferentes respuestas en frecuencia. El tratamiento de casos de carga con diferente contenido en frecuencia es sencillo. La primera parte del proceso se hace utilizando carga unitaria para cada armónico, los resultados se multiplican por el contenido en frecuencia de la carga considerada y finalmente se realiza una transformación inversa al dominio del tiempo.

Efectos axisimétricos

En este apartado se presentan los principales aspectos del comportamiento de láminas axisimétricas. El objetivo es modelar estructuras axisimétricas con los elementos descritos: vigas sobre apoyo elástico y muelles. Es decir, no se realiza una formulación en dos dimensiones propiamente dicha. La estructura considerada es una lámina con simetría axial. En la Figura 1 se representa una lámina esférica en la cual los radios cincunferencial y meridional son los mismos $r_1 = r_2$. El análisis se limita al caso de curvatura meridional infinita ($r_1 = \infty$), con lo que solamente se consideran láminas cilíndricas ($\varphi = 90°$) y cónicas ($\varphi =$ variable).

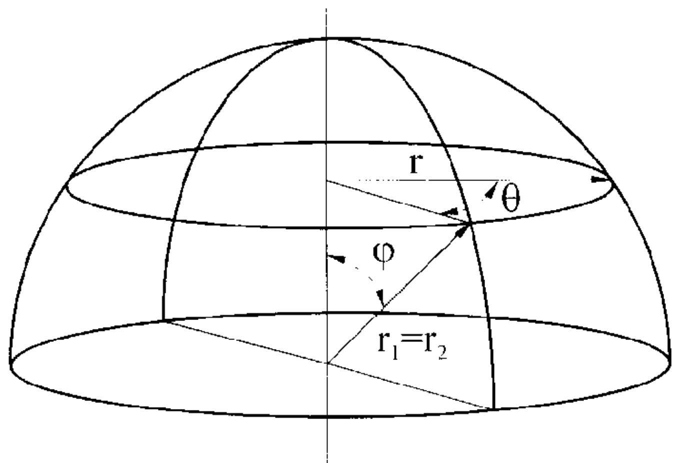

Figura 1. Lámina con simetría axial. Definición de la geometría

Ley de comportamiento del material

En la formulación escrita a continuación los subíndices s y θ se refieren a las componentes meridional y circunferencial respectivamente, mientras que z representa la coordenada normal al plano medio de la lámina.

Si se considera un material con comportamiento ortotrópico, la ley constitutiva viene dada por las siguients relaciones

$$\sigma_s = \frac{E_s}{1 - \nu_s \nu_\theta}(\varepsilon_s + \nu_s \varepsilon_\theta) \tag{4}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E_\theta}{1 - \nu_s \nu_\theta}(\varepsilon_\theta + \nu_s \varepsilon_s) \tag{5}$$

$$\tau_{sz} = G_{sz} \gamma_{sz} \tag{6}$$

Relaciones cinemáticas

Se establecen ecuaciones que relacionan desplazamientos con deformaciones en el plano medio de la lámina. Los desplazamientos se definen mediante las componentes meridional

u, circunferencial v y normal w tal y como se muestra en la Figura 2, donde se han representado valores positivos. Se acepta el modelo de desplazamientos de la Figura 3, es decir una fibra de la lámina situada a una altura z experimenta una translación global (el subíndice 0 se refiere a los desplazamientos en el plano medio de la lámina) a la que se añade otra debida a la rotación α de la normal al plano de la lámina

$$u = u_0(s) - \alpha(s)z \tag{7}$$

$$u = 0 \tag{8}$$

$$w = w_0(s) \tag{9}$$

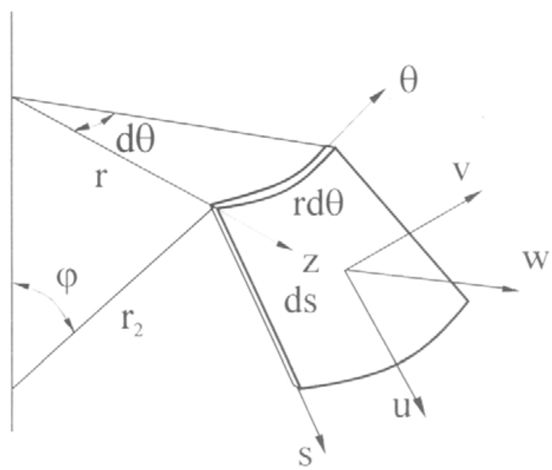

Figura 2. Definición de los desplazamientos

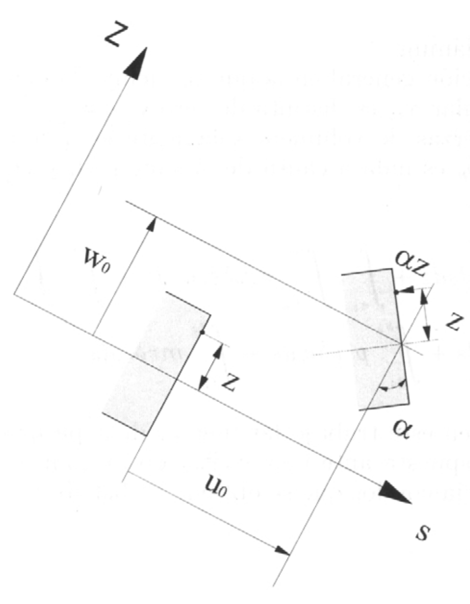

Figura 3. Modelo de desplazamientos utilizado

La deformación según el meridiano es

$$\varepsilon_s = \frac{du_0}{ds} - z\frac{d\alpha}{ds} \tag{10}$$

mientras que la deformación según la dirección circunferencial depende de u como de w

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r_2}(w_0 + u_0 \cot\varphi - \alpha z \cot\varphi) \tag{11}$$

y la deformación angular es

$$\gamma_{sz} = -\alpha + \frac{dw}{ds} \tag{12}$$

Ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio se establecen por aplicación del principio de los trabajos virtuales

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}: \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_\Omega \mathbf{X}\cdot\delta\mathbf{u} dV + \int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{X}}\cdot\delta\mathbf{u} dA \tag{13}$$

donde Ω es el dominio y $\partial\Omega$ su frontera. $\mathbf{X}$ y $\bar{\mathbf{X}}$ representan vectores que contienen las fuerzas másicas y de superficie.

Para láminas axisimétricas la integral en el volumen se puede escribir como

$$\int_\Omega dV = \int_0^{2\pi}\int_{s_1}^{s_2}\int_{-h}^{h} r\,d\theta ds dz \tag{14}$$

siendo $2h$ el espesor de la lámina.

Se plantea una formulación general en la que se incluye la deformación por cortante con lo que la deformación angular γ_{sz} es distinta de cero y $\alpha \neq \frac{dw}{ds}$.

Si se desprecian las fuerzas de volumen, solamente es necesario considerar las fuerzas de superficie p_s, p_z y m (p_θ es nula a causa de la simetría), y entonces la ecuación (14) se transforma en

$$\begin{aligned}\int_{s_1}^{s_2}\int_{-h_s}^{h_s} r\sigma_s\delta\varepsilon_s ds dz + \int_{s_1}^{s_2}\int_{-h_\theta}^{h_\theta} r\sigma_\theta\delta\varepsilon_\theta ds dz + \int_{s_1}^{s_2}\int_{-h_s}^{h_s} r\tau_{sz}\delta\gamma_{sz} ds dz = \\ = \int_{s_1}^{s_2} p_s r\delta u ds + \int_{s_1}^{s_2} p_z r\delta w ds + \int_{s_1}^{s_2} m r\delta\alpha ds\end{aligned} \tag{15}$$

Para el caso estudiado en este trabajo las fuerzas de superficie son las de inercia. Dado que se está buscando la respuesta ante una excitación armónica pura, la solución se puede calcular para cada frecuencia con los que se obtiene la distribución espacial de las variables.

Ecuaciones de campo

Se utilizan dos espesores diferentes $2h_s$ y $2h_\theta$ para permitir el tratamiento de la ortotropía. Sustituyendo las relaciones cinemáticas (19), (11) y (12) en (15), integrando esta última ecuación y escribiendo por separado las variaciones de los desplazamientos δu, δw y $\delta\alpha$, se obtienen las siguientes expresiones

$$-\frac{d}{ds}\left[r\int_{-h_s}^{h_s}\sigma_s dz\right]+\frac{r}{r_2}\cot\varphi\left[\int_{-h_\theta}^{h_\theta}\sigma_\theta dz\right]=p_s r \tag{16}$$

$$\frac{r}{r_2}\int_{-h_s}^{h_s}\sigma_\theta dz-\frac{d}{ds}\left[r\int_{-h_s}^{h_s}\tau_{sz}dz\right]=p_z r \tag{17}$$

$$-\frac{d}{ds}\left[r\int_{-h_s}^{h_s}-z\sigma_s dz\right]+\frac{r}{r_2}\cot\varphi\left[\int_{-h_\theta}^{h_\theta}-z\sigma_\theta dz\right]+r\int_{-h_s}^{h_s}\tau_{sz}dz=mr \tag{18}$$

Las fuerzas por unidad de longitud son la resultante de las tensiones. Así usando (16), (17) y (18)

$$N_s=\int_{-h_s}^{h_s}\sigma_s dz=\frac{E_sA_s}{1-\nu_s\nu_\theta}\left[\frac{du_0}{ds}+\frac{1}{r_2}\nu_s w_0+\frac{1}{r_2}\nu_s u_0\cot\varphi\right] \tag{19}$$

$$N_\theta=\int_{-h_\theta}^{h_\theta}\sigma_\theta dz=\frac{E_\theta A_\theta}{1-\nu_s\nu_\theta}\left[\frac{1}{r_2}w_0+\frac{1}{r_2}u_0\cot\varphi+\nu_\theta\frac{du_0}{ds}\right] \tag{20}$$

$$M_s=\int_{-h_s}^{h_s}-z\sigma_s dz=\frac{E_sI_s}{1-\nu_s\nu_\theta}\left[\frac{d\alpha}{ds}+\frac{1}{r_2}\nu_s\alpha\cot\varphi\right] \tag{21}$$

$$M_\theta=\int_{-h_\theta}^{h_\theta}-z\sigma_\theta dz=\frac{E_\theta I_\theta}{1-\nu_s\nu_\theta}\left[\alpha\frac{1}{r_2}\cot\varphi+\nu_\theta\frac{d\alpha}{ds}\right] \tag{22}$$

$$Q_{sz}=\int_{-h_s}^{h_s}\tau_{sz}dz=G_{sz}A_{sz}\left[\frac{dw_0}{ds}-\alpha\right] \tag{23}$$

donde A_s y A_θ son las áreas normales a las direcciones meridional y circunferencial respectivamente, I_s e I_θ los correspondientes momentos de inercia y A_{sz} el área de cortante. Todas estas características son por unidad de longitud.

Eliminando $\frac{du_0}{ds}$ de (19) y (20) y $\frac{d\alpha}{ds}$ de (21) y (22), se puede escribir la fuerza axil circunferencial N_θ y el momento flector circunferencial M_θ en función de las correspondientes magnitudes meridionales N_s y M_s

$$N_\theta=\frac{E_\theta A_\theta}{r_2}(w_0+u_0\cot\varphi)+\nu_0\frac{E_\theta A_\theta}{E_sA_s}N_s \tag{24}$$

$$M_\theta=\frac{E_\theta I_\theta}{r_2}\alpha\cot\varphi+\nu_0\frac{E_\theta I_\theta}{E_sI_s}M_s \tag{25}$$

Sustituyendo estas ecuaciones en (16), (17) y (18), se obtienen las ecuaciones de campo

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{r}\frac{d}{ds}\left[K_s r\left(\frac{du_0}{ds}+\frac{1}{r_2}\nu_s w_0+\frac{1}{r_2}\nu_s u_0\cot\varphi\right)\right]+\frac{E_\theta A_\theta}{r_2^2}\cot^2\varphi(u_0+w_0\tan\varphi)=\\&=p_s-\nu_\theta\frac{K_\theta}{K_s}\frac{\cot\varphi}{r_2}N_s\end{aligned} \tag{26}$$

$$\frac{E_\theta A_\theta}{r_2^2}(w_0 + u_0 \cot\varphi) - G_{sz}A_{sz}\left[\frac{d^2 w_0}{ds^2} - \frac{d\alpha}{ds}\right] = p_z - \nu_\theta \frac{K_\theta}{K_s}\frac{1}{r_2}N_s \tag{27}$$

$$D_s\frac{d^2\alpha}{ds^2} + D_s\frac{\nu_s}{r_2}\alpha\cot\varphi\frac{d\alpha}{ds} + G_{sz}A_{sz}\left[\frac{dw_0}{ds} - \alpha\right] = \frac{1}{r_2}\cot\varphi\left[\frac{E_\theta I_\theta}{r_2}\alpha\cot\varphi + \nu_\theta\frac{E_\theta I_\theta}{E_s A_s}M_s\right] - m \tag{28}$$

en las que se ha empleado la siguiente notación

$$K_s = \frac{E_s A_s}{1-\nu_s\nu_\theta}; \quad K_\theta = \frac{E_\theta A_\theta}{1-\nu_s\nu_\theta}; \quad D_s = \frac{E_s I_s}{1-\nu_s\nu_\theta}; \quad D_\theta = \frac{E_\theta I_\theta}{1-\nu_s\nu_\theta}$$

Aproximación de las ecuaciones de campo de láminas axisimétricas ortotrópicas mediante las de elementos monodimensionales

Las ecuaciones de campo generales dadas por las expresiones (26), (27) y (28) se particularizan para láminas axisimétricas de formas cónicas y cilíndricas y a continuación se comparan con las ecuaciones de campo de elementos monodimensionales con el fin de establecer bajo qué criterios dichas láminas pueden ser modeladas mediante vigas.

Láminas cilíndricas

El comportamiento longitudinal descrito por la ecuación (26) se puede particularizar para cilindros teniendo en cuenta que $\varphi = 90°$, y por tanto $r = r_2 = R =$ constante

$$-K_s\frac{d^2 u_0}{ds^2} = p_s\frac{\nu_s}{R}\frac{d}{ds}(K_s w_0) \tag{29}$$

La ecuación (29) coincide con la ecuación de campo para el comportamiento axil de una barra, si se desprecia el último término (acoplamiento entre el axil y el flector). Esta aproximación es válida para cilindros cortos en los cuales son importantes los efectos axisimétricos.

El comportamiento transversal se define particularizando las ecuaciones (27) y (28)

$$\frac{E_\theta A_\theta}{R^2}w - G_{sz}A_{sz}\left(\frac{d^2 w_0}{ds^2} - \frac{d\alpha}{ds}\right) = p_z - \frac{\nu_\theta}{R}\frac{K_\theta}{K_s}N_s \tag{30}$$

$$D_s\frac{d^2\alpha}{ds^2} + G_{sz}A_{sz}\left(\frac{dw_0}{ds} - \alpha\right) = -m \tag{31}$$

Las ecuaciones (30) y (31) (si se desprecia el acoplamiento con el comportamiento axil) son equivalentes a las de una viga sobre apoyo elástico de rigidez

$$k = \frac{E_\theta A_\theta}{R^2} \tag{32}$$

El momento de inercia de la viga es

$$I = \frac{I_s}{1-\nu_s\nu_\theta} \tag{33}$$

y el módulo de la elasticidad

$$E = E_s \tag{34}$$

Láminas cónicas

Para el caso de láminas cónicas se utiliza la hipótesis de Geckeler que propone considerar únicamente los términos con la derivada más alta. Es decir las ecuaciones (26), (27) y (29) se transforman en

$$-K_s\frac{d^2u_0}{ds^2}+\frac{E_\theta A_\theta}{r_2^2}\cot^2\varphi(u_0+w_0\tan\varphi)=p_s-\nu_\theta\frac{K_\theta}{K_s}\frac{\cot\varphi}{r_2}N_s+\frac{\nu_s}{r_2}\frac{dw_0}{ds} \tag{35}$$

$$\frac{E_\theta A_\theta}{r_2^2}(w_0+u_0\cot\varphi)=-G_{sz}A_{sz}\left[\frac{d^2w_0}{ds^2}-\frac{d\alpha}{ds}\right]=p_z-\nu_\theta\frac{K_\theta}{K_s}\frac{1}{r_2}N_s \tag{36}$$

$$D_s\frac{d^2\alpha}{ds^2}+G_{sz}A_{sz}\left[\frac{dw_0}{ds}-\alpha\right]=\frac{1}{r_2}\cot\varphi\left[\frac{E_\theta I_\theta}{r_2}\alpha\cot\varphi+\nu_\theta\frac{E_\theta I_\theta}{E_sA_s}M_s\right]-m \tag{37}$$

El último término de la ecuación (35) se puede despreciar si $\frac{dw_0}{ds}<\frac{d^2u_0}{ds^2}$. Se puede ver que las expresiones (35), (36) y (37) coinciden con las ecuaciones de campo de la viga excepto en el término $\frac{E_\theta A_\theta}{r_2^2}\cot^2\varphi(u_0+w_0\tan\varphi)$ en la ecuación (35) y $\frac{E_\theta A_\theta}{r_2^2}(w_0+u_0\cot\varphi)$ en la (36), que representan el acomplamiento entre los desplazamientos longitudinal y transversal, debido en esta ocasión a la inclinación de la lámina respecto al eje de simetría. Este efecto se puede representar mediante una viga sobre un apoyo elástico que actúa en la dirección normal al eje del cono. La fuerza por unidad de longitud experimentada por el apoyo elástico debido al desplazamiento w es $F=Kw\sin\varphi$ y la debida a u es $F=Ku\cos\varphi$ (Figura 4). Sumando estos dos efectos

$$F_w=-K\sin\varphi(w_0\sin\varphi+u_0\cos\varphi)=-K(u_0\sin\varphi\cos\varphi+w_0\sin^2\varphi) \tag{38}$$

$$F_s=-K\cos\varphi(w_0\sin\varphi+u_0\cos\varphi)=-K(u_0\cos^2\varphi+w_0\sin\varphi\cos\varphi) \tag{39}$$

donde w se refiere a los términos de flexión y a los axiles. Si se toma

$$K=\frac{E_\theta A_\theta}{r_2^2\sin^2\varphi} \tag{40}$$

se obtiene

$$F_w=-\frac{E_\theta A_\theta}{r_2^2}(u\cot\varphi+w) \tag{41}$$

$$F_s=-\frac{E_\theta A_\theta}{r_2^2}\cot^2\varphi(u+w\tan\varphi) \tag{42}$$

que son los términos añadidos en las ecuaciones anteriores. Nótese que en estas ecuaciones r_2 varía según el punto del cono que se esté considerando. Como además también lo hace el área transversal A_θ, el modelado por razones puramente prácticas se realiza mediante muelles puntuales.

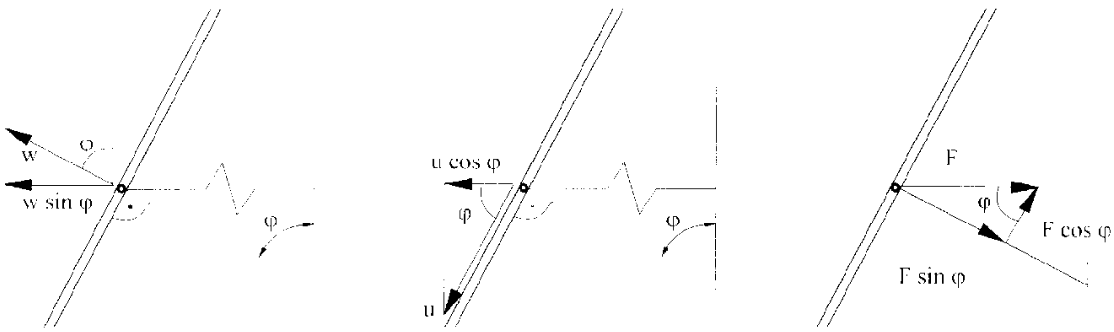

Figura 4. Modelo para láminas cónicas

EJEMPLOS

En este apartado se analizan varios ejemplos. En primer lugar se verifica que los criterios para modelar láminas axisimétricas con elementos continuos monodimensionales son correctos. Para ello se comparan los resultados obtenidos con el método propuesto basado en elementos continuos de una dimensión, con los que proporciona el método de los elementos finitos. A continuación se comprueba que la discretización exigida por las estructuras cónicas no es un problema para altas frecuencias, ya que superado un cierto valor de la frecuencia, el efecto circunferencial desaparece y las deformadas modales y frecuencias de estructuras axisimétricas coinciden con las de una estructura equivalente sin curvatura.

Validación del modelo

Se estudian dos estructuras cilíndricas y cónicas en condiciones empotrado-libre con las características geométricas y materiales indicadas en la Tabla I.

	Cilindro 1	Cilindro 2	Cono 1	Cono 2
$R_{\max}$ (m)	1	1	2	1
$R_{\min}$ (m)	1	1	1	2
Longitud (m)	1	0,2	1	0,2
Espesor (m)	1×10^{-2}	1×10^{-2}	1×10^{-2}	1×10^{-2}
ρ (kg/m^3)	2700	2700	2700	2700
E (N/m^3)	7×10^{10}	7×10^{10}	7×10^{10}	7×10^{10}
ν	0,3	0,3	0,3	0,3

Tabla I. Estructuras axisimétricas. Características geométricas y de los materiales

Las magnitudes comparadas son frecuencias de vibración y fuerzas por unidad de longitud ante cargas estáticas. En estos ejemplos el material es isotrópico, luego las características meridionales son iguales a las circunferenciales.

Para el caso de los cilindros y teniendo en cuenta que el radio es constante, las características de la viga equivalente son las siguientes

$$E = E_s = 7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

El área circunferencial es constante. Por ejemplo para $b = 1$ m de profundidad

$$A_\theta = tb = 1 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{I_s}{1 - \nu_s \nu_\theta} = \frac{1}{1 - 0,09} \times \frac{1}{12}(1 \times 10^{-2})^3 = 9,15 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$k = \frac{E_\theta A_\theta}{R^2} = \frac{7 \times 11^{10} \times 1 \times 10^{-2}}{1^2} = 7 \times 10^8 \text{ N/m}^2$$

Para los conos el modelo se realiza con una viga sobre muelles puntuales que actúan en la dirección normal al eje del cono. Tanto el valor del área y del momento de inercia como el de la rigidez de los muelles puntuales varía en función de la altura del cono, ya que la profundidad b no es constante. Los muelles se sitúan entre elemento y elemento y el valor de su constante de rigidez es

$$K = \frac{E_\theta A t b}{(r_2 \sin\varphi)^2} \frac{L_1 + L_2}{2}$$

en donde L_1 y L_2 son las longitudes de los elementos anterior y posterior al muelle y el radio es el correspondiente a la posición de dicho muelle.

Se comparan los valores de las cinco primeras frecuencias de vibración con un análisis con elementos finitos (Tabla II). Es importante resaltar que el método propuesto no calcula directamente ni las frecuencias ni los modelos de vibración. Lo que se hace es calcular la respuesta de la estructura en el dominio de la frecuencia ante una fuerza que produzca la misma deformada que la del modo del cual se quiere obtener la frecuencia. En la historia frecuencial de desplazamientos o aceleraciones aparecerá una gran amplificación en la frecuencia del modo. Este procedimiento produce más errores en el cálculo de las frecuencias que el método propiamente dicho. Como consecuencia, las ligeras discrepancias que aparecen en la Tabla II hay que atribuir fundamentalmente a dicho procedimiento. Se calculan 512 frecuencias (de 0 a 100 Hz para cilindros y de 0 a 500 Hz para conos) y el número de puntos de la transformada rápida de Fourier es 2048.

	Cilindro 1		Cilindro 2	
Modo	Propuesto-MEF	Error (%)	Propuesto-MEF	Error (%)
1	792–795	0,3	838–843	0,5
2	810–810	0,0	1572–1546	1,0
3	821–823	0,2	3804–3648	4,0
4	861–862	0,1	6743–6695	7,0
5	946–943	0,3	sin datos	–
	Cono 1		Cono 2	
Modo	Propuesto-MEF	Error (%)	Propuesto-MEF	Error (%)
1	275–286	4,0	78–82	5,0
2	320–330	3,0	109–111	1,8
3	371–379	2,0	180–180	0,1
4	422–429	1,5	305–305	0,1
5	477–483	1,2	485–484	0,2

Tabla II. Comparación de frecuencias. Estructuras axisimétricas

En la Tabla III se recoge el número de nudos y elementos utilizados en ambos modelos. Para cilindros se capturan mediante el método propuesto todas las frecuencias con un solo elemento. La discretización de elementos finitos utilizada es válida hasta un cierto número de modos, después del cual se hace necesaria una discretización más fina. Sin embargo, el método propuesto no precisa más que un elemento, lo que constituye un ahorro importante de tiempo de cálculo, sobre todo en el rango de las altas frecuencias, que es para el que ha sido concebido dicho método. Para el caso de estructuras cónicas, como se ha visto con anterioridad, se necesita una cierta discretización.

	Cilindros		Conos	
	Propuesto	MEF	Propuesto	MEF
Nodos	2	101	21	101
Elementos	1	100	20	100

Tabla III. Número de nudos y elementos. Estructuras axisimétricas

En las Figuras 5,6,7 y 8 se dibujan la fuerza axil circunferencial por unidad de longitud (cilindros) y el momento flector circunferencial por unidad de longitud (conos) en función de la longitud de la estructura normalizada a la unidad. La excitación es una carga estática radial aplicada en el extremo libre. Se ve que los resultados obtenidos con el método propuesto reproducen correctamente los de elementos finitos, especialmente para cilindros. Las diferencias que se aprecian en las estructuras cónicas son debidas a los muelles concentrados, los cuales producen saltos bruscos en la respuesta. No obstante, el comportamiento general se recoge de forma adecauda. Nótese que en las Figuras 5 y 7 (cilindro y cono 1) los efectos se amortiguan antes que en las Figuras 6 y 8 (cilindro y cono 2), lo que significa que la parte de la estructura que resulta afectada por la excitación depende de la longitud total de la estructura.

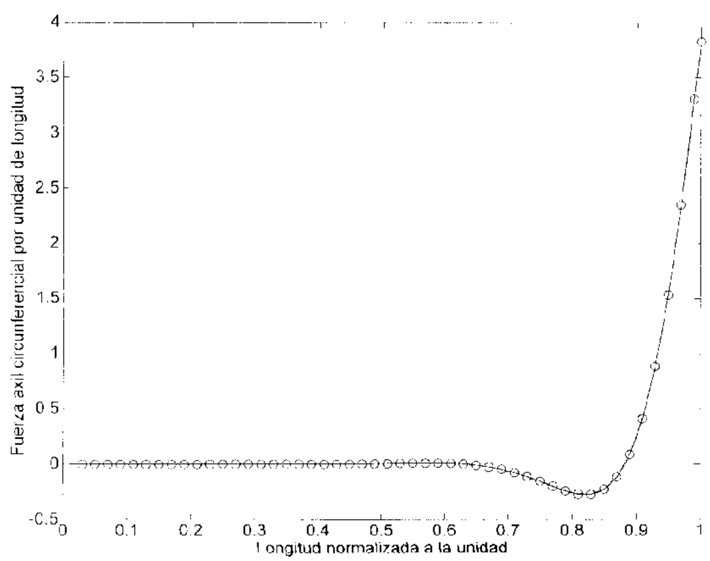

Figura 5. Cilindro 1. Fuerza axil circunferencial por unidad de longitud. Carga radial estática. MEF (línea continua). Método propuesto (círculos)

Con estos resultados se demuestra la efectividad del método en el rango de las bajas frecuencias. Dado que la solución para los elementos continuos monodimensionales es exacta, el método reproducirá el comportamiento dinámico para altas frecuencias.

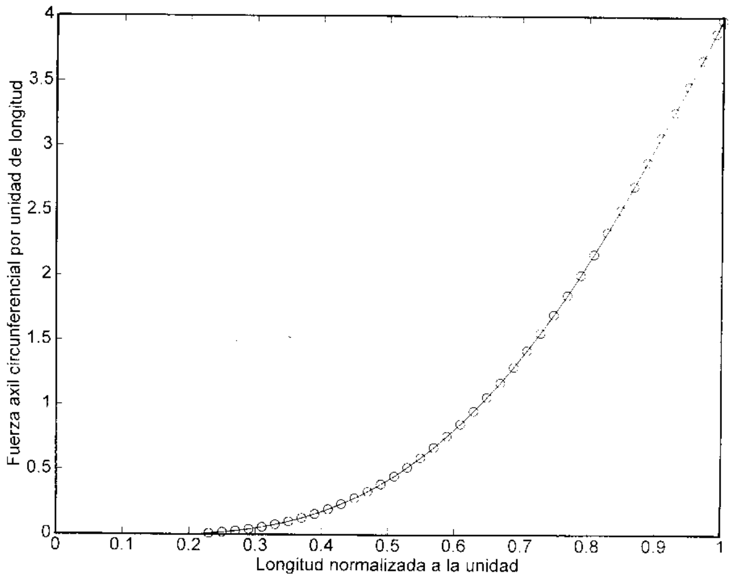

Figura 6. Cilindro 2. Fuerza axil circunferencial por unidad de longitud. Carga radial estática. MEF (línea continua). Método propuesto (círculos)

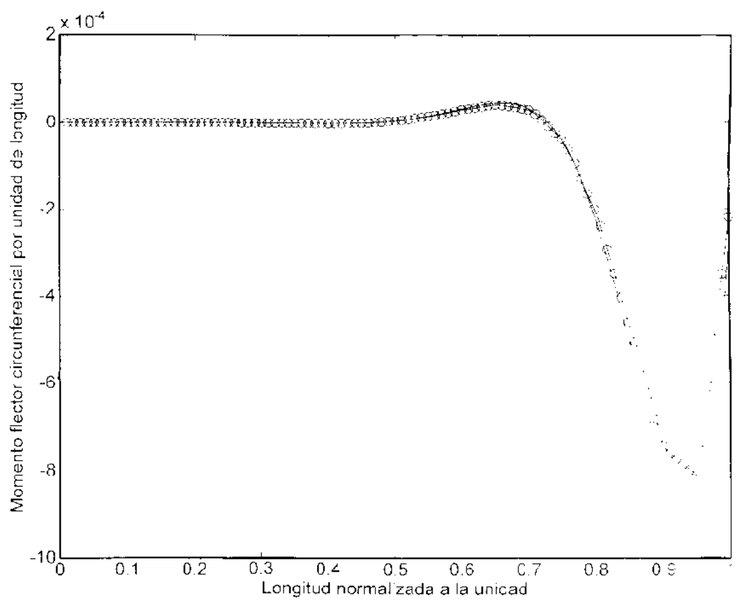

Figura 7. Cono 1. Momento flector circunferencial por unidad de longitud. Carga radial estática. MEF (línea continua). Método propuesto (círculos)

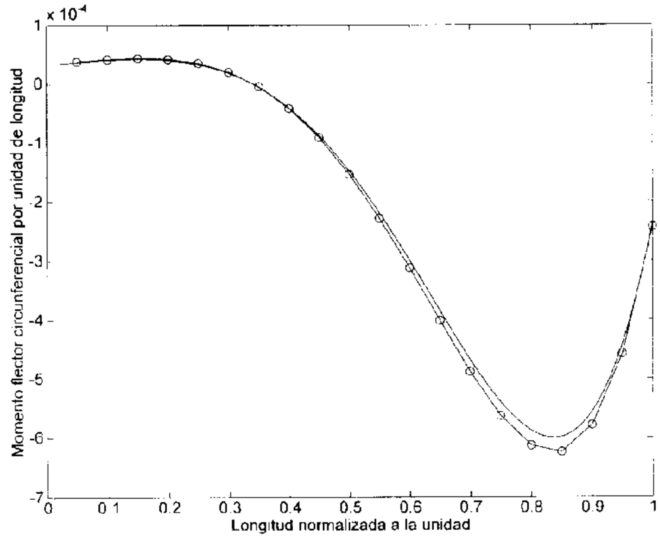

Figura 8. Cono 2. Momento flector circunferencial por unidad de longitud. Carga radial estática. MEF (línea continua). Método propuesto (círculos)

Para una estructura compleja como la del A5 VEB, el método de los elementos finitos necesita una malla muy fina que hace prohibitivo en tiempo de cálculo de ordenador su análisis. Para comprobar el modelo para altas frecuencias se podrían realizar comparaciones con resultados experimentales tal y como se ha hecho con excelentes resultados para las probetas planas del A5 VEB[7,8]. En las referencias[9,10] se recogen los trabajos relativos a los modelos axisimétricos de la estructura del A5 VEB con dos radios diferentes de curvatura ($R = 1$ m y $R = 2,7$ m). Las probetas ensayadas no son estrictamente axisimétricas, pero en una primera aproximación se pueden modelar como si lo fueran. Sin embargo, dado que en este punto del trabajo ni se ha modelado la estructura realmente ensayada ni la carga producida por el dispositivo pirotécnico, no es posible realizar comparaciones con los resultados obtenidos en los ensayos.

Influencia del radio de curvatura en los modos de vibración

Las deformadas de los modos de vibración de una viga sobre apoyo elástico coinciden con los de la propia viga, salvo los posibles modos de sólido rígido de ésta ($f = 0$ Hz) que en el caso de existir apoyo elástico, presentarán una frecuencia no nula debido a la rigidez del apoyo.

La presencia del apoyo no afecta a la forma del modo, pero incrementa el valor de la frecuencia. La frecuencia de la viga sobre apoyo elástico está relacionada con la de la viga por un factor que depende de la rigidez del apoyo y del modo considerado. Según aumenta el modo, el factor tiende a la unidad y las frecuencias a igualarse.

En este apartado se va a estudiar con un modelo axisimétrico de las dos probetas curvas de la estructura del A5 VEB, en qué momento los modelos de vigas sobre apoyo elástico y muelles puntuales presentan las mismas frecuencias que modelos constituídos por vigas sin apoyo que teóricamente coinciden con modelos axisimétricos de radio infinito.

Dicha igualdad de comportamiento dinámico significa que el efecto circunferencial deja de tener influencia a partir de una frecuencia determinada y que para fenómenos que ocurran por encima de esa frecuencia es posible representar un cilindro o un cono por un elemento tipo viga. Esta consideración es muy importante, ya que indica que la discretización del cono debe ser la necesaria para recoger el comportamiento hasta dicha frecuencia y que para valores superiores la discretización utilizada no tiene influencia.

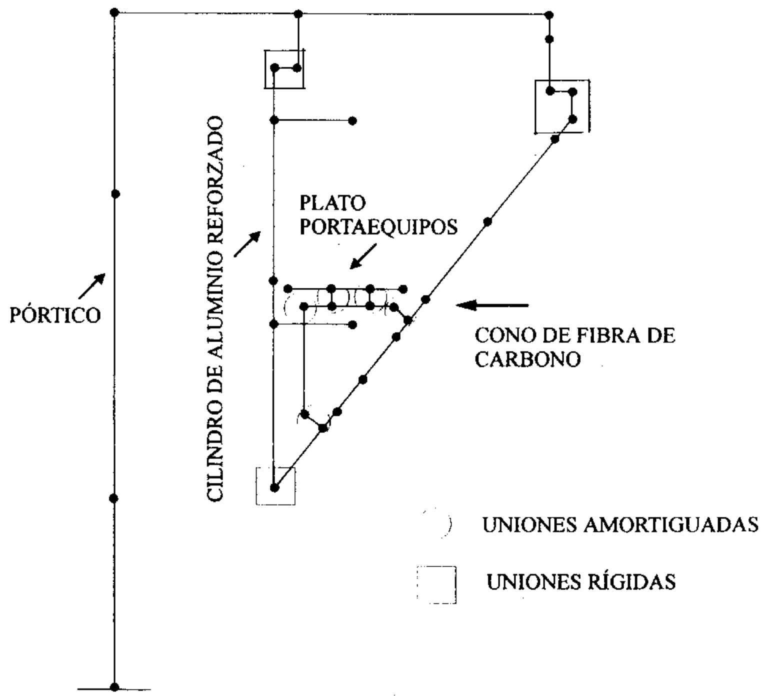

Figura 9. Modelo matemático de la estructura del A5 VEB

El estudio se ha llevado a cabo con modelos axisimétricos de la estructura A5 VEB con radios de curvatura 1 m; 2,7 m e infinito. En la Figura 9 se representa el modelo matemático del A5 VEB en su configuración de ensayo en la que se incluye el pórtico al que fue fijado la probeta mediante unas uniones de aluminio que se han denominado uniones rígidas. Para conectar el plato portaequipos al cono de fibra de carbono se utilizan uniones con material aislante para tratar de amortiguar los efecos producidos por el choque pirotécnico el cual se produce en la unión del cono y del cilindro. Para este estudio se han modelado las partes axisimétricas de la estructura, es decir el cilindro, el cono y las tres uniones rígidas y se han calculado los modos y frecuencias para los tres radios indicados. En la Figura 10 se dibuja la frecuencia natural de la estructura frente al número del modo para las tres probetas analizadas. Se puede observar que a partir de cierto valor de la frecuencia, el comportamiento dinámico axisimétrico de las dos probetas curvas es idéntico al de la plana. Esta igualdad de comportamiento se produce a 1000 Hz para la probeta de 2,7 m de radio y a 1500 Hz para la de 1 m de radio. La mayor influencia de la curvatura de la probeta pequeña se puede apreciar también en los primeros modos de vibración, los cuales no coinciden en la frecuencia ni en la deformada modal. Con una discretización suficiente para reproducir el comportamiento hasta esos valores queda asegurado el buen funcionamiento del modelo para frecuencias posteriores.

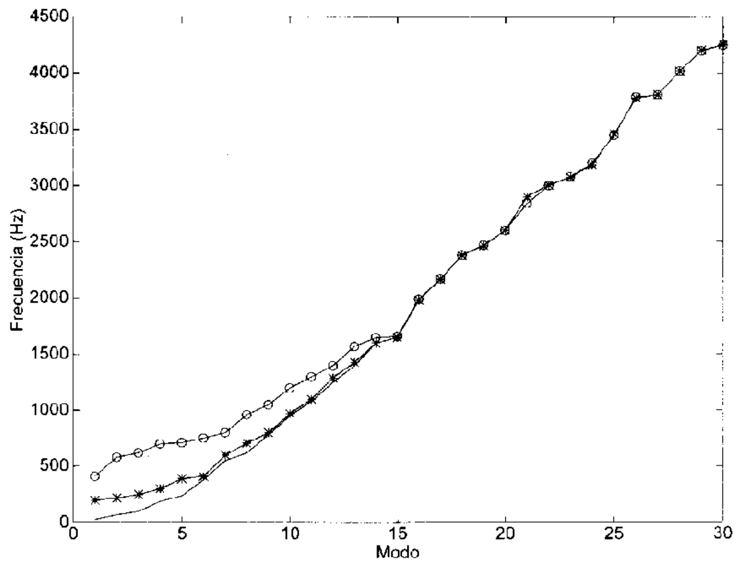

Figura 10. Influencia del radio de curvatura en los modos de vibración. Comparación entre probetas de radios 1m (círculos); 2,7 m (asteriscos) e infinitos (línea continua)

CONCLUSIONES

Se describe un método basado en elementos continuos monodimensionales para el análisis de estructuras compuestas de láminas axisimétricas ortotrópicas sometidas a excitaciones con alto contenido en frecuencia. Comparando las ecuaciones de campo de láminas axisimétricas con las de vigas sobre apoyo elástico, se pueden obtener criterios para modelar las láminas con dichos elementos continuos. La principal ventaja del método consiste en que la solución en el dominio de la frecuencia de los elementos continuos monodimensionales es conocida y exacta, y por lo tanto la discretización espacial depende solamente de cambios geométricos o del material y no del método propiamente dicho, a diferencia de otros métodos convencionales como el método de los elementos finitos. Para el caso de estructuras cónicas se necesita una cierta discretización espacial por dos motivos: el modelado se realiza mediante apoyos puntuales y el área circunferencial del cono varía con la altura. Sin embargo, se ha comprobado que superado un cierto valor de frecuencia, el efecto circunferencial desaparece y el comportamiento de una estructura axisimétrica es el mismo que el de una estructura plana equivalente. Por lo tanto la discretización es necesaria únicamente para reproducir el comportamiento hasta el valor de la frecuencia arriba mencionado.

Se han relizado algunos ejemplos de validación. Se han comparado, con respecto a resultados de elementos finitos, frecuencias de vibración y sus correspondientes deformadas modales, así como fuerzas por unidad de longitud obtenidas mediante aplicación de cargas estáticas. En todos los casos la corcondancia entre los resultados obtenidos con el método propuesto y los de referencia ha sido muy buena. Con esto se ha puesto de manifiesto la bonanza del método en el rango de las bajas frecuencias, lo que implica, dado que la solución de las ecuaciones de campo de los elementos monodimensionales es exacta, el buen funcionamiento en todo el rango de frecuencias.

REFERENCIAS

1 M. Zak, "Dynamical response to pulse excitations in large space structures, *AIAA paper*, 87-0710, (1987).

2 A.H. von Flotow, "A traveling wave approach to the dynamic analysis of large space structures, *AIAA paper*, 83-0964, (1983).

3 M.C. Huerta, V. Gómez Molinero, E. Alarcón, S. Gómez Lera y J. Molina, "Induced shock loads during the separation of the Ariane 5 VEB structure, *Proceedings of International Conference on Spacecraft Structures and Mechanical Testing*, ESA, Noordwijk, Países Bajos, (1988).

4 M.C. Huerta, "Identificación de sistemas estructurales en dinámica, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, (1989).

5 V. Kolousek, "Calcul des efforts dynamiques dans les ossatures rigides, Dunod, (1959).

6 B.A. Akesson, "PFVIABAT: A computer program for plane frame vibration analysis by an exact method, *Int. J. Meth. Engng.*, Vol. **10**, N° 6, (1976).

7 M.C. Huerta *et al.*, "Physical and mathematical modelling of wave propagation in the Ariane 5 VEB Structure, *Computer & Structure*, Vol. **37**, N° 2, pp. 199–205, (1990).

8 M.C. Huerta, E. Alarcón y S. Gómez Lera, "Mathematical modelling of pyrotechnic shock in the Ariane 5 VEB Structure, *Proceedings of International Conference on Spacecraft Structures and M echanical Testing*, ESA, Noordwijk, Países Bajos, (1991).

9 M.C. Huerta, J.J. López Cela, E. Alarcón y V. Gómez Molinero, "Theoretical simulation of the Ariane 5 VEB Structure pyrotechnic shock propagation, *1 Symposium European Ariane 5 Structure and Technologies*, Arcachon, Francia, (1993).

10 J.J. López Cela, "Propagación de ondas en estructuras laminares, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, (1993).