

Comportamento dinâmico do elemento P15N para flexão de placas

Rogério Fernandes Martins e Pedro de Almeida Areias

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Rua dos Bragas, 4050-123 Porto, Portugal
Tel.: 351-2-204 17 19, Fax: 351-2-205 91 25
e-mail: ffonseca@alf.fe.up.pt

Abílio Pinho de Jesus

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
Seção de Engenharias
5000 Vila Real, Portugal
Tel.: 351-59-320315, Fax: 351-59-320480
e-mail: ajesus@utad.pt

Joaquim Sabino Domingues

Instituto Superior de Engenharia
Departamento de Engenharia Mecânica
Rua de S. Tomé, 4200 Porto, Portugal
Tel./Fax: 351-2-834 05 23
e-mail: jsabino@dem.isep.ipp.pt

Sumário

Este artigo trata o problema da dinâmica de placas usando o elemento P15N e mostra resultados obtidos por este elemento em vários casos. Comparam-se resultados obtidos por este elemento com resultados obtidos por outros elementos de placa. Conclui-se que para os exemplos deste artigo o elemento permite a obtenção de frequências mais próximas das teóricas do que outros elementos e mostram-se algumas curvas de convergência dessas frequências.

DYNAMIC BEHAVIOUR OF THE FINITE ELEMENT P15N IN PLATE BENDING

Summary

This article deals with the problem of dynamics of plates using the finite element P15N and shows the results obtained with this element for several case studies. These results are compared with results obtained using other finite elements. The examples presented show that the element P15N yields very accurate results as it is patent by the convergence curves for frequencies included in the article.

INTRODUÇÃO

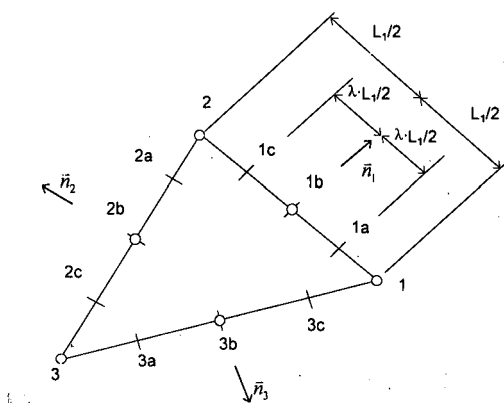
O elemento finito P15N para flexão de placas foi recentemente publicado em¹.

A designação P15N caracteriza, de certo modo, o elemento: a letra P designa “polinómio”. O elemento é deduzido a partir de um polinómio completo de grau quatro; P pode também referir-se a “patch” teste uma vez que o elemento P15N passa este teste. O número 15 indica o número de termos do polinómio que é também o número de graus de liberdade do elemento. A letra N designa derivada “normal” já que alguns graus de liberdade do elemento são rotações na normal aos lados do elemento; N indica também que o elemento é “não” conforme.

A configuração nodal do elemento está representada na Figura 1, sendo os graus de liberdade: seis deslocamentos w , nos cantos e no meio dos lados do triângulo; nove rotações $\partial w / \partial n$ na normal aos lados do elemento (três em cada lado) e localizadas nos pontos correspondentes a uma regra de integração de Gauss de três pontos.

A formulação do elemento é apresentada em detalhe na referência atrás citada, pelo que não será aqui desenvolvida. Inclui-se apenas um estudo de convergência para flexão de placas quadradas, Tabela I e Figura 2, que situa o elemento, em termos de performance, como um dos melhores elementos para flexão de placas.

Salienta-se finalmente que o elemento é de formulação relativamente simples, seguindo as regras habituais de formulação de qualquer elemento finito em termos de deslocamentos; conceptualmente a formulação não é mais difícil do que o elemento triangular de flexão constante de Morley². Na sua forma actual o elemento tem lados rectos, o que permite uma integração exacta da matriz de rigidez. A posição dos nós do elemento correspondentes às rotações na normal ao lado pode ser alterada fazendo variar o parâmetro λ indicado na Figura 1. Concluiu-se, no entanto, que os melhores resultados se obtêm para $\lambda = 0,774597$, o que corresponde a uma regra de Gauss de três pontos como atrás referido.



Variáveis nodais associadas ao elemento:

○	w
+	$\frac{\partial w}{\partial n}$
○	$w, \frac{\partial w}{\partial n}$

Figura 1. Configuração nodal do elemento

Deslocamento w no centro da placa (multiplicado por 100)									
Numero de elementos	g.d.l.	Pressão uniforme				Força pontual			
		Simplesmente apoiada		Encastrada		Simplesmente apoiada		Encastrada	
		w	D (%)	w	D (%)	w	D (%)	w	D (%)
2	24	7,07186	-0,365	2,18172	-1,314	19,5259	-3,666	9,01931	-8,015
8	73	7,10236	0,065	2,22676	0,723	20,1021	-0,823	9,65773	-1.504
18	148	7,10056	0,040	2,21780	0,318	20,1997	-0,341	9,74423	-0,622
32	249	7,09940	0,023	2,21448	0,168	20,2318	-0,183	9,77242	-0,334
50	376	7,09887	0,016	2,21304	0,103	20,2462	-0,112	9,78503	-0,206
128	913	7,09804	0,004	2,21158	0,037	20,2605	-0,041	9,79799	-0,074
Valores exactos		7,09774	0	2,21077	0	20,2689	0	9,80521	0

Tabela I. Resultados numéricos para a placa quadrada

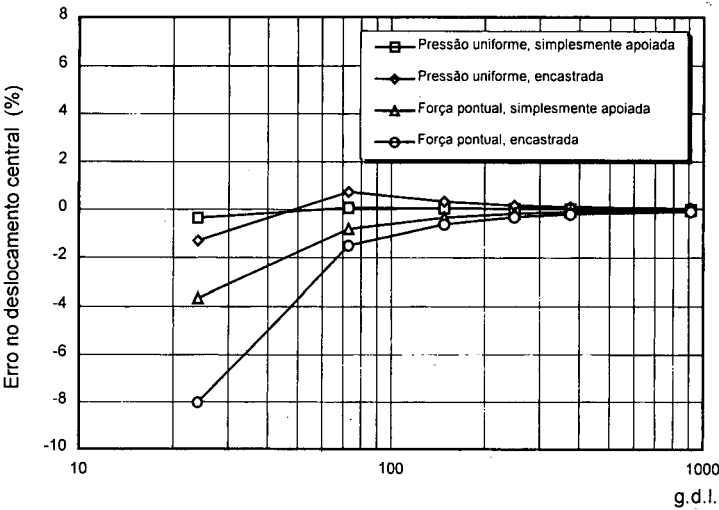


Figura 2. Convergência para placa quadrada. Resultados estáticos

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A forma parcialmente discreta das equações de equilíbrio dinâmico pode ser obtida usando o princípio dos trabalhos virtuais, escrito para o caso de interesse como

$$\int_V (\delta \epsilon)^T \sigma dV = \int_S (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{t} dS + \int_V (\delta \mathbf{u})^T (\mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}} - c \dot{\mathbf{u}}) dV \tag{1}$$

A equação (1) traduz a igualdade dos trabalhos virtuais realizados pelas forças internas e exteriormente aplicadas ao corpo, sendo $\delta \mathbf{u}$ o vector de deslocamentos virtuais, cinematicamente compatível com as condições de contorno; $\delta \epsilon$ o vector de deformação consequente de $\delta \mathbf{u}$; σ o vector de tensão, $\mathbf{t}$ o vector de forças de superfície actuantes na superfície S ; $\mathbf{b}$, $\rho \ddot{\mathbf{u}}$, e $c \dot{\mathbf{u}}$ as forças de volume, de inércia e de amortecimento viscoso, respectivamente, e ρ a massa volúmica e c o parâmetro de amortecimento.

O elemento está representado na Figura 1 onde se mostram as variáveis nodais. As variáveis nodais associadas a cada lado do triângulo podem ser agrupadas do seguinte modo

$$\mathbf{a}_j = \left\{ w_j, \left(\frac{\partial w}{\partial n_j} \right)_{ja}, w_{jb}, \left(\frac{\partial w}{\partial n_j} \right)_{jb}, \left(\frac{\partial w}{\partial n_j} \right)_{jc} \right\}^T \quad (7)$$

para os três lados ($j = 1, 2, 3$).

As funções de forma do elemento podem obter-se de um polinómio completo de 4º grau

$$w = \alpha^T \cdot \mathbf{p} \quad (8)$$

As rotações podem definir-se usando (8) tomando a seguinte forma para o lado j

$$\frac{\partial w}{\partial n_j} = \alpha^T \cdot \mathbf{Q}_j \quad (9)$$

em que o vector $\mathbf{Q}_j$ pode ser escrito como

$$\mathbf{Q}_j = \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{p}, \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{p} \right] \cdot \mathbf{n}_j \quad (10)$$

Com as equações (8) e (9) podemos definir os parâmetros nodais no lado j da seguinte forma

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{C}_j \cdot \alpha \quad (11)$$

onde

$$\mathbf{C}_j = \left[\mathbf{P}_j, \mathbf{Q}_{ja}, \mathbf{P}_{jb}, \mathbf{Q}_{jb}, \mathbf{Q}_{jc} \right]^T \quad (12)$$

Procede-se de forma análoga para os outros lados e pode agrupar-se $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3]^T \quad (13)$$

e assim as variáveis nodais do elemento podem ser escritas recorrendo a (13)

$$\mathbf{a} = \mathbf{C} \cdot \alpha \quad (14)$$

Sendo assim, resolvendo (14) para α e substituindo na equação (11) podemos explicitar as funções de forma como

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{C}^{-1} \quad (15)$$

Para facilitar a implementação em computador usou-se a seguinte notação para $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = [P_1, P_2, \dots, P_{15}]^T \quad (16)$$

em que P_i pode ser obtido à custa da fórmula

$$P_i = x^{m(i)} y^{n(i)} \quad (17)$$

com

$$\begin{cases} m(i) = 1 + \beta(i) - i \\ n(i) = \alpha(i) - \beta(i) + i \end{cases} \quad (18)$$

e

$$\begin{cases} \alpha(i) = \text{INT}\left(\frac{\sqrt{8 \cdot i - 7} - 3}{2}\right) \\ \beta(i) = \frac{(\alpha(i)+1)(\alpha(i)+4)}{2} \end{cases} \quad (19)$$

A matriz de rigidez elementar foi já obtida em¹ sendo o resultado o seguinte

$$\mathbf{K} = (\mathbf{C}^1)^T \mathbf{K}' \mathbf{C}^{-1} \quad (20)$$

onde $\mathbf{K}'$ é uma matriz auxiliar definida como

$$\mathbf{K}' = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}' d\Omega \quad (21)$$

Cada componente de K' é obtida da seguinte forma

$$k'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 d_{lk} r_{kj} r_{li} J_{ijkl} \quad (22)$$

onde d_{lk} corresponde aos coeficientes de matriz de elasticidade $\mathbf{D}$, r_{kj} e r_{li} são dados por uma tabela em¹.

O coeficiente J_{ijkl} pode ser calculado através do seguinte integral

$$J_{ijkl} = \int_{\Omega} x^{(m_{kj}+m_{li})} \cdot y^{(m_{kj}+n_{li})} \cdot d\Omega \quad (23)$$

O integral em (23) pode ser calculado usando a igualdade

$$J_{ijkl} = y_3^{m+1} (x_2^{m+1} - x_1^{m+1}) \cdot \frac{m!n!}{(m+n+2)!} \quad (24)$$

e m, n são dados por

$$\begin{cases} m = m_{kj} + m_{li} \\ n = n_{kj} + n_{li} \end{cases} \quad (25)$$

FORMA EXPLÍCITA DA MATRIZ DE MASSA ELEMENTAR

Tendo em consideração que as funções de forma $\mathbf{N}$ dependem apenas das coordenadas x e y pode escrever-se uma expressão para $\mathbf{M}$ como

$$\mathbf{M} = t \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} d\Omega \quad (26)$$

onde t é a espessura da placa, considerada constante.

Introduzindo a expressão (13) para as funções de forma em (26) resulta

$$\mathbf{M} = t \int_{\Omega} \rho \mathbf{C}^{-T} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{C}^{-1} d\Omega \quad (27)$$

As matrizes $\mathbf{C}$ são constantes. Considerando a massa volúmica ρ constante resulta, para a matriz de massa

$$\mathbf{M} = t\rho \mathbf{C}^{-T} \cdot \int_{\Omega} \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T d\Omega \cdot \mathbf{C}^{-1} = t\rho \mathbf{C}^{-T} \cdot \mathbf{M}' \cdot \mathbf{C}^{-1} \quad (28)$$

Usando a notação (17) para $\mathbf{P}$ pode determinar-se as componentes de $\mathbf{M}'$ da seguinte forma

$$\mathbf{M}'_{ij} = \int_{\Omega} P_i P_j d\Omega = \int_{\Omega} x^{m(i)+m(j)} y^{n(i)+n(j)} d\Omega \quad (29)$$

De forma semelhante a (22) pode calcular-se analiticamente (29) e obtém-se

$$\mathbf{M}'_{ij} = \int_{\Omega} P_i P_j d\Omega = y_3^{n(i)+n(j)+1} \cdot (x_2^{m(i)+m(j)+1} - x_1^{m(i)+m(j)+1}) \cdot \frac{(m(i) + m(j))! \cdot (n(i) + n(j))!}{(m(i) + m(j) + n(i) + n(j) + 2)!} \quad (30)$$

onde x_1, x_2 , e y_3 são as coordenadas locais não nulas dos vértices do elemento como considerado em¹.

A solução computacional de (4) pode realizar-se por procedimentos distintos como:

- Integração directa da equação na base física (p. ex. diferenças finitas centrais).
- O cálculo de algumas frequências e formas naturais de vibração para depois desacoplar as equações e resolver o problema analiticamente numa base nodal truncada.
- Pelo método da matriz de transição.

No segundo método, é habitual o cálculo de alguns modos naturais cujas frequências são próximas das mais importantes no espectro de carga.

No âmbito deste trabalho interessa-nos a determinação de modos naturais de vibração.

Por uma questão de análise do comportamento do elemento em dinâmica, optou-se por comparar apenas as frequências mais baixas, correspondendo a configurações com poucos nodos e em que o MEF permite obter resultados precisos.

Em regime livre, assumindo uma resposta harmónica para as variáveis nodais $\mathbf{a}(t)$, o problema pode reduzir-se à determinação de U_i e w_i tais que

$$[\mathbf{K} - w_i^2 \mathbf{M}] \cdot U_i = 0 \quad (31)$$

Para a solução não trivial temos que impor

$$\det[\mathbf{K} - w_i^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (32)$$

Chama-se a U_i forma natural de vibração de ordem i sendo w_i a frequência correspondente.

RESULTADOS NUMÉRICOS

Formas naturais de um elemento equilátero

Na Figura 4 representam-se as formas naturais de um elemento P15N livre e na Figura 3 mostra-se o seu espectro de frequências.

Os resultados foram obtidos para um elemento triangular equilátero e assim naturalmente aparecem zeros múltiplos, correspondendo a formas naturais simétricas.

Apenas as três primeiras frequências são nulas, e não existem modos espúrios encontrados em certos elementos de integração numérica reduzida.

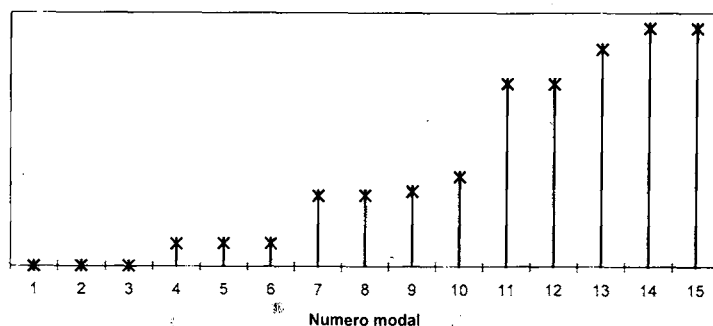


Figura 3. Elemento equilátero livre. Espectro de frequências

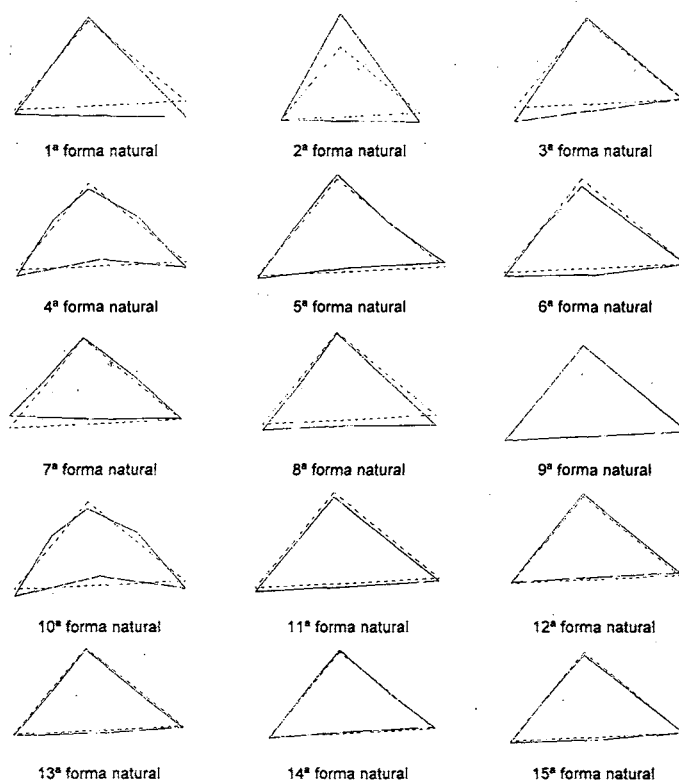


Figura 4. Formas naturais de vibração de um elemento livre

Placa rectangular simplesmente apoiada

Neste exemplo utiliza-se uma placa de dimensões $5 \times 2,5 \times 0,05\text{m}$, com $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $E = 210 \times 10^9 \text{ Pa}$ e $\nu = 0,3$. Foram usadas malhas com 8, 16, 32, 64 e 90 elementos. As Figuras 5 a 8 mostram os resultados obtidos por este e outros elementos.

O estudo de convergência para as duas primeiras frequências naturais de vibração (cujos valores teóricos são $w_1 = 154,5 \text{ rad/s}$ e $w_2 = 247,2 \text{ rad/s}$ permite verificar a boa precisão do elemento, quando comparado com outros já bem conhecidos.

A comparação com elementos de casca foi realizada subtraindo os graus de liberdade inativos para o problema de flexão de placas. Pode parecer aqui forçada a comparação com um elemento de cascas moderadamente espessas como o Ahmad. A justificação é simples: a espessura da placa está na zona de transição fina-espessa e permitiu a sua inclusão.

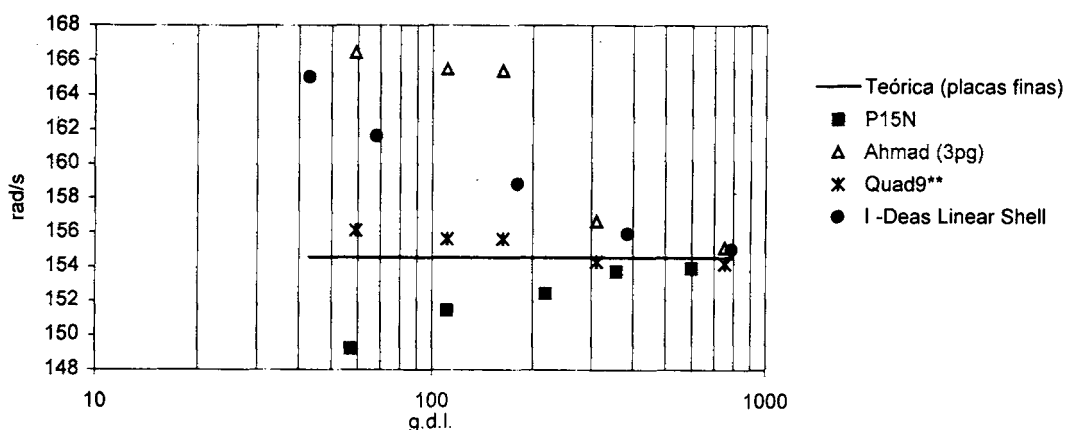


Figura 5. Placa rectangular simplesmente apoiada. Primeira frequência. Valores numéricos

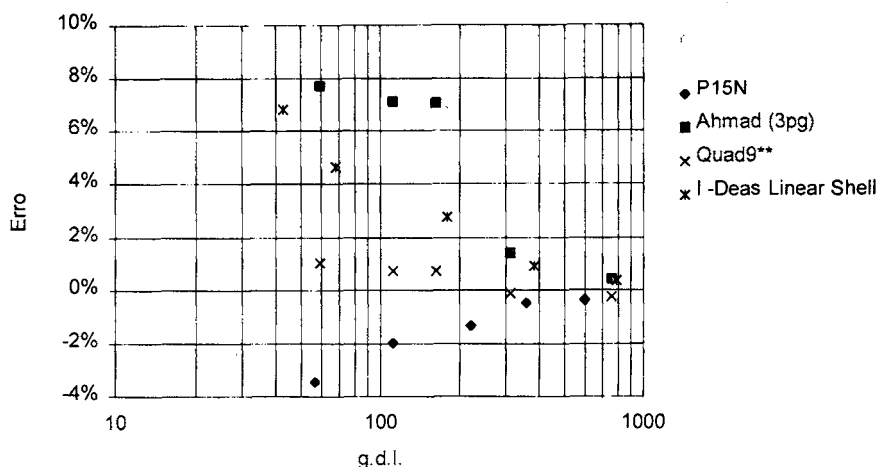


Figura 6. Placa rectangular simplesmente apoiada. Primeira frequência. Erro

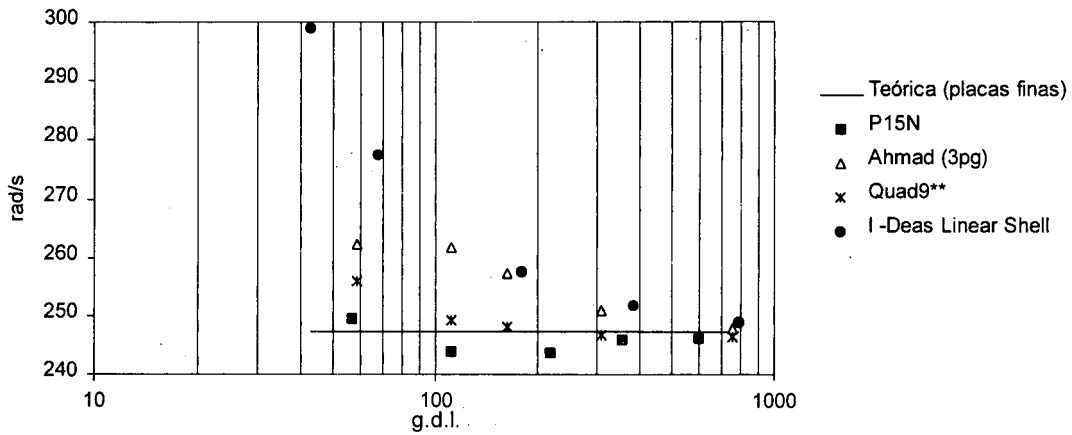


Figura 7. Placa rectangular simplesmente apoiada. Segunda frequência. Valores numéricos

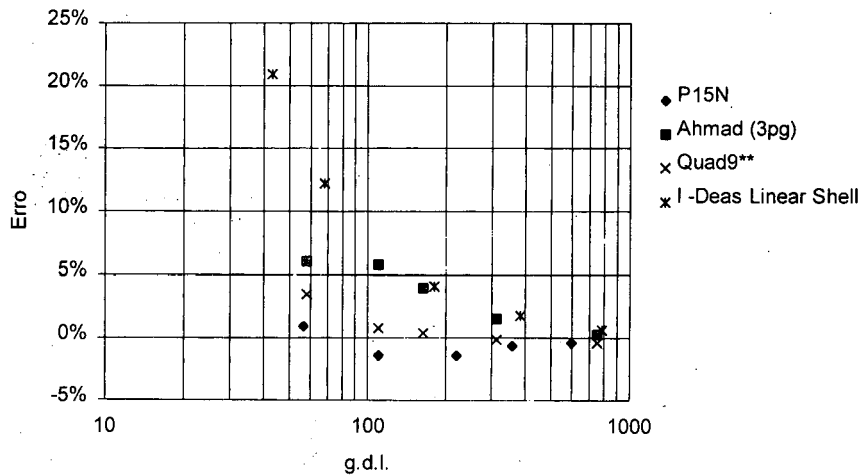


Figura 8. Placa rectangular simplesmente apoiada. Segunda frequência. Erro

Placa rectangular encastrada

Neste exemplo utiliza-se uma placa de dimensões $5 \times 3 \times 0,05\text{m}$, com $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $E = 210 \times 10^9 \text{ Pa}$ e $\nu = 0,3$, tendo sido usadas malhas de 4, 8, 16, 32, 64 e 90 elementos.

Para este caso apenas temos disponível a primeira frequência natural que pode ser escrita como

$$w_1 = K_1 \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho \cdot t \cdot a^4}} \quad (33)$$

a é a dimensão do menor lado da placa e $K_1 = 25,9$ resultando $w_1 = 225,2116 \text{ rad/s}$.

O elemento P15N permite a obtenção de resultados com erro inferior a 1% em malhas com pelo menos 16 elementos (Figura 9). O Tabela II mostra os resultados obtidos.

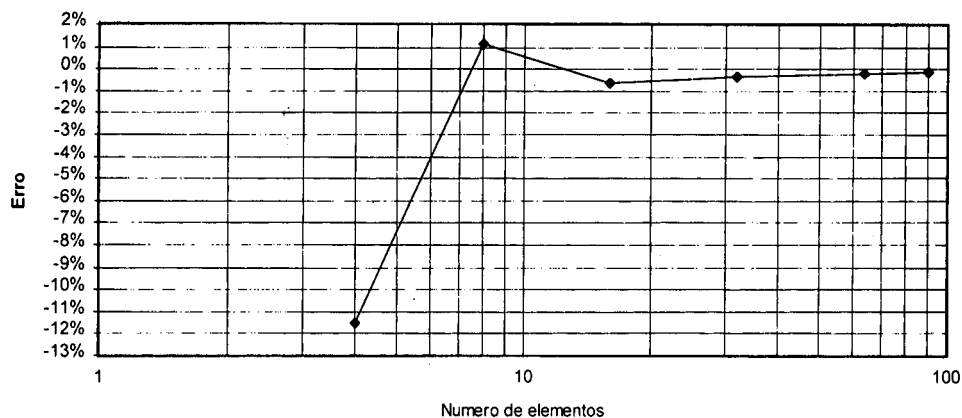


Figura 9. Placa rectangular encastrada. Primeira frequência. Convergência

Nº de elementos	w (rads/s)	ε (%)
4	199,17	11,563 %
8	227,71	1,109 %
16	223,78	0,636 %
32	224,37	0,374 %
64	224,72	0,218 %
90	224,85	0,161 %

Tabela II. Placa rectangular encastrada. Resultados numéricos e erros

Placa quadrada encastrada num lado

Neste exemplo utiliza-se uma placa de dimensões $5 \times 5 \times 0.05\text{cm}$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $E = 210 \times 10^9 \text{ Pa}$ e $\nu = 0,3$ encastrada num bordo.

No Tabela III e Figura 10 comparam-se os valores das primeiras 5 frequências naturais de vibração calculadas pelo método de Ritz em⁶ e os valores experimentais de⁶ com os valores obtidos pelo elemento P15N.

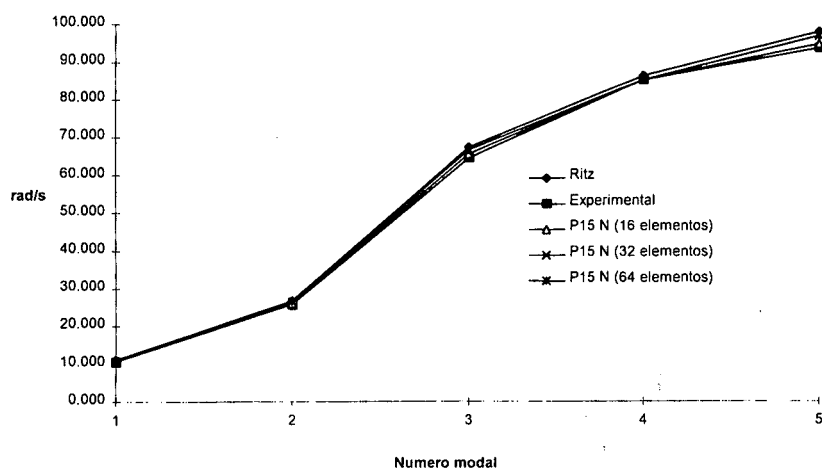


Figura 10. Placa quadrada encastrada num lado. Comparação de resultados

N. nodal	w_n (rad/s)				
	Ritz	Experimental	P15N (16 elementos)	P15N (32 elementos)	P15N (64 elementos)
1	10,937	10,549	10,848	10,865	10,863
2	26,755	25,857	26,245	26,543	26,564
3	67,115	64,329	65,479	66,353	66,454
4	85,960	84,989	85,043	84,994	85,039
5	97,573	93,128	94,185	96,340	96,502

Tabela III. Placa encastrada num lado. Resultados

Placa em forma de paralelogramo encastrada num lado

A Figura 11a mostra a forma e as condições de ligação ao exterior de uma placa usada em⁶. A placa possui propriedades do material e espessura idênticos aos usados nos exemplos anteriores.

A comparação com os valores obtidos pelo elemento P15N é feita no Tabela IV.

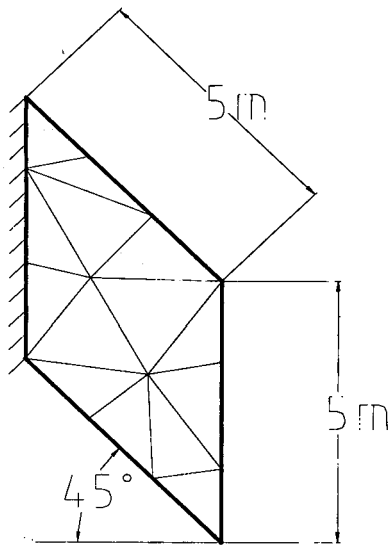


Figura 11a. Placa em forma de paralelogramo

N. nodal	w_n (rad/s)		
	Ritz	Experimental	P15N (14 elementos)
1	15,088	13,335	13,798
2	43,042	34,653	35,243

Tabela IV. Placa em forma de paralelogramo. Resultados

Placa circular encastrada

Neste exemplo utiliza-se uma placa de dimensões $r = 2,5$ m e $t = 0,05$ m, $\rho = 7850$ kg/m³, $E = 210 \times 10^9$ Pa e $\nu = 0,3$.

Para estes casos apenas temos disponíveis as quatro primeiras frequências naturais que podem ser calculadas como

$$w_n = K_n \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho \cdot t \cdot a^4}} \quad (34)$$

em que K_n é um parâmetro tabelado³. Os valores obtidos encontram-se tabelados no Tabela V. Neste caso a qualidade dos resultados é inferior devido à falta de precisão na representação do contorno da placa, uma limitação provocada pelo facto de, nesta fase, o elemento estar apenas formulado para lados rectos.

w_n (rad/s)			
P15N (12 el.)	ε (%)	P15N (36 el.)	ε (%)
143,650	12,47 %	134,770	5,52 %
321,910	20,70 %	278,810	4,54 %
491,530	12,48 %	458,830	5,00 %
545,960	9,55 %	524,900	5,33 %

Tabela V. Placa circular encastrada. Resultados numéricos e erros

Influência do parâmetro λ nos resultados

Na Figura 11b são apresentados os erros relativos para as 3 primeiras frequências naturais da placa rectangular simplesmente apoiada de 16 elementos, em função do parâmetro λ e conclui-se para $\lambda \in [0,7; 0,9]$ os resultados possuem um erro mínimo, facto aliás já comentado em¹ para análise estática.

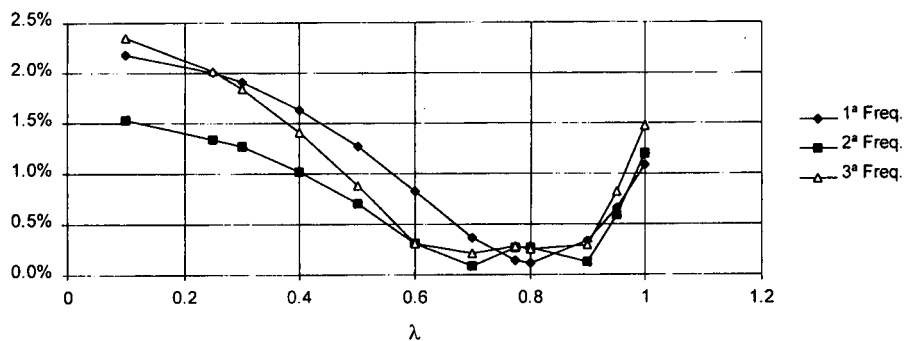


Figura 11b. Placa simplesmente apoiada com 16 elementos. Influência do parâmetro λ . Erro

CONCLUSÕES

O elemento finito P15N foi tratado na análise de vibrações de flexão em diversos tipos de placas. Foi formulada a matriz de massa do elemento e feitas comparações com resultados experimentais e numéricos de diversas fontes. Conclui-se que, também neste tipo de análise, o elemento P15N apresenta bons resultados e curvas de convergência muito favoráveis.

Em placas de lados curvos os resultados são de qualidade inferior devido à falta de precisão na representação do contorno da placa, uma vez que, nesta fase, o elemento está apenas formulado para lados rectos.

REFERÊNCIAS

- 1 R.A.F. Martins e J. Sabino, "A simple and efficient triangular element for plate bending", *Engineering Computations*, Vol. 14, N° 8, pp. 883-900, (1997).
- 2 L.S.D. Morley, "On the constant moment plate bending triangle", *Journal of Strain Analysis*, Vol. 6, pp. 20-24, (1971).
- 3 W.C. Young, "Roark's formulas for stress and strain", 6th Edition, McGraw-Hill International Editions, (1989).
- 4 O.C. Zienkiewicz e R.L. Taylor, "The finite element method", 4th Edition, Vol. 2, "Solid and fluid mechanics dynamics and non-linearity, McGraw-Hill International Book Company, (1991).
- 5 H. Pina, "Métodos Numéricos", McGraw-Hill de Portugal Lda, (1995).
- 6 M.V. Barton, "Vibration of rectangular and skew cantilever plates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, pp. 129-134, (1951).
- 7 H.C. Huang, "Static and dynamic analyses of plates and shells, theory, software and applications", Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, (1989).