

RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

POUR LES FLUIDES COMPRESSIBLES

par Roger Peyret* et Henri Viviani**

1 - GENERALITES

Nous nous proposons d'exposer et de discuter les divers problèmes que pose le calcul d'écoulements visqueux compressibles par résolution numérique des équations de Navier-Stokes, dans le cadre des applications à l'aérodynamique. Auparavant, nous ferons un bref rappel sur les équations de Navier-Stokes et sur les problèmes d'aérodynamique dont l'étude théorique requiert la résolution de ces équations.

Notre exposé sera limité à l'étude des écoulements compressibles ; c'est effectivement une restriction dans la mesure où des différences notables existent dans les méthodes numériques entre le cas incompressible et le cas compressible, le premier cas ne pouvant pas être systématiquement traité comme un cas particulier du second.

La Mécanique des milieux continus ainsi que la théorie cinétique des gaz conduisent aux équations générales de conservation pour la masse, la quantité de mouvement et l'énergie, que nous écrivons dans un repère absolu, en formulation Eulérienne :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) + \operatorname{div}(\rho \vec{u} \vec{u} - \underline{\underline{\sigma}}) = \vec{f}_e \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \operatorname{div}(\rho E \vec{u} - \vec{u} \sigma^* + \vec{q}) = \vec{f}_e \cdot \vec{u} \quad (3)$$

Dans ces équations, t est le temps, ρ la masse volumique, \vec{u} la vitesse du fluide dans le repère considéré, E l'énergie totale volumique ($E = e + \frac{1}{2} \vec{u}^2$, où e est l'énergie interne), $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes, \vec{q} la densité de flux de chaleur, et \vec{f}_e la densité volumique de force extérieure.

La formulation Lagrangienne est aussi utilisée dans certaines méthodes numériques, mais en général pour des problèmes différents des problèmes d'aérodynamique envisagés ici ; cette formulation et les méthodes numériques qui l'utilisent ne seront pas discutées dans cet exposé.

Les forces extérieures, comme la pesanteur, sont habituellement négligeables en aérodynamique, et \vec{f}_e sera pris nul par la suite.

* CNRS, Institut de Mécanique théorique et appliquée, Université PARIS VI ;
collaborateur extérieur de l'ONERA.

** Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA)
92320 Chatillon.

Les équations (1) à (3) doivent être complétées par des lois de comportement pour le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ et pour la densité de flux de chaleur \vec{q} , ainsi que par des lois d'état pour les variables thermodynamiques.

Un grand nombre de fluides usuels, dont l'air et l'eau, vérifient avec une précision suffisante et dans un domaine assez large de conditions (sur lesquelles nous reviendrons), d'une part la loi de Fourier pour la conduction de la chaleur :

$$\vec{q} = -k \text{ grad } T \quad (4)$$

où T est la température absolue, et d'autre part la loi de Newton (ou loi de Navier-Stokes) pour le tenseur des contraintes :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= -p \underline{I} + \underline{\tau} \\ \underline{\tau} &= \lambda \text{ div } \vec{u} \underline{I} + \mu \text{ def } \vec{u} \end{aligned} \quad (5)$$

où p est la pression, \underline{I} le tenseur unité et $\text{def } \vec{u}$ le tenseur des vitesses de déformation ($\text{def } \vec{u} = \text{grad } \vec{u} + (\text{grad } \vec{u})^*$).

Le système des équations (1) à (5) constitue les équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible ; celles-ci se caractérisent donc par les lois de comportement (4) et (5), lois définissant les fluides dits Newtoniens.

Les coefficients de conductivité thermique k , et les deux coefficients de viscosité λ , μ , dépendent de l'état thermodynamique local. Dans les conditions habituelles, ils ne dépendent que de la température (si celle-ci n'est pas trop élevée) :

$$k = k(T), \quad \lambda = \lambda(T), \quad \mu = \mu(T) \quad (6)$$

On montre que la deuxième loi de la thermodynamique impose les conditions suivantes sur λ et μ :

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \mu \geq 0 \quad (7)$$

En l'absence de phénomènes de relaxation interne, on admet la relation de Stokes :

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad (8)$$

Il faut adjoindre à ces équations les lois d'état ; nous nous plaçons dans le cas simple, mais suffisant pour la suite de cet exposé, d'un gaz dont l'état thermodynamique local ne dépend que de deux variables comme p et e ; on peut donc exprimer la pression et la température en fonction de ces deux variables :

$$p = p(e, \rho), \quad T = T(e, \rho) \quad (9)$$

Un cas particulier important est celui du gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes, pour lequel on a :

$$p = (\gamma - 1) \rho e, \quad e = c_v T \quad (10)$$

où $\gamma = c_p / c_v$ et c_p et c_v sont les chaleurs spécifiques.

Le système des équations (1) à (6) et (9) est alors fermé, en ce sens qu'il y a autant d'équations que d'inconnues. Pour faire apparaître la nature de ces équations, explicitons les dérivées d'espace d'ordre le plus élevé (2ème ordre), en écrivant en outre l'équation de l'énergie en fonction de la variable T ; on obtient, pour l'équation de quantité de mouvement :

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} + \text{grad } p = \lambda'(T) \text{div} \vec{u} \text{ grad } T + \mu'(T) \text{grad } T \text{ def } \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad} (\text{div} \vec{u}) + \mu \Delta \vec{u} \quad (11)$$

et pour l'équation de l'énergie :

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} + \rho \text{div} \vec{u} T = \Phi + k'(T) \text{grad}^2 T + k \Delta T \quad (12)$$

où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad}$ est la dérivée particulaire, et où Φ est la fonction de dissipation :

$$\Phi = \underline{\underline{\tau}} \cdot \text{grad} \vec{u} = \lambda (\text{div} \vec{u})^2 + \frac{1}{2} \mu (\text{def} \vec{u}) \cdot (\text{def} \vec{u})$$

Les conditions (7) assurent que Φ n'est jamais négatif. Notons que le premier membre de (12) s'écrit encore $\rho T \frac{DS}{Dt}$, où S est l'entropie spécifique.

La nature parabolique par rapport au temps des équations de quantité de mouvement (pour l'inconnue \vec{u}) et de l'équation de l'énergie (pour l'inconnue T) apparaît clairement sur les formes (11) et (12) de ces équations. On peut vérifier, pour l'équation (11), que l'opérateur $\mathcal{L} \vec{u} = (\lambda + \mu) \text{grad} (\text{div} \vec{u}) + \mu \Delta \vec{u}$ est elliptique sauf si $\lambda + 2\mu = 0$ mais ce cas est exclu par les conditions (7).

L'équation de continuité (1), qui s'écrit encore :

$$\frac{D}{Dt} (\text{Log } \rho) + \text{div} \vec{u} = 0 \quad (13)$$

est du premier ordre ; considérée comme une équation pour ρ , ses courbes caractéristiques de base sont les trajectoires des particules fluides.

Les données des variables (ρ, \vec{u}, T) à un instant initial (données initiales du problème de Cauchy) permettent de déterminer l'évolution ultérieure du fluide, à des instants voisins, puisque le système (11) à (13) fournit explicitement les dérivées de ces variables par rapport au temps. Mais il ne semble pas qu'il existe de résultats mathématiques rigoureux concernant les conditions aux limites à imposer pour assurer l'existence et l'unicité de la solution aux instants ultérieurs.

La nature parabolique des équations de quantité de mouvement et de l'énergie (considérées séparément), conduit à s'imposer, sur toute frontière, une condition sur \vec{u} (en fait une condition scalaire pour chaque composante) et une condition sur T . L'équation de continuité (13), où l'on considère \vec{u} comme connu, indique qu'on ne doit s'imposer une condition sur ρ que si le fluide entre dans le domaine de calcul par cette frontière.

Pour une paroi matérielle imperméable, et un écoulement non raréfié, l'expérience montre que la vitesse relative du fluide par rapport à la paroi est nulle, et que le fluide et la paroi ont la même température ; en général on considère l'une des deux conditions suivantes pour T ; ou bien la température de la paroi est connue, ou bien le flux de chaleur à travers la paroi est nul (paroi adiabatique).

Ces conditions tombent en défaut lorsque le degré de raréfaction de l'écoulement dépasse une certaine valeur et provoque alors un glissement et un saut de température du gaz à la paroi ; ce cas du régime dit de glissement est rappelé au paragraphe 2.

Les conditions à imposer sur une frontière non matérielle (située à distance finie ou non) font appel à l'interprétation physique du problème. Un cas fréquemment considéré en aérodynamique est celui d'un obstacle fini placé dans un écoulement illimité ; les conditions d'un écoulement uniforme donné sont alors imposées à l'infini.

2 - VALIDITE ET INTERET DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES EN AERODYNAMIQUE

2.1 - Validité

La théorie cinétique des gaz (par ex. [1], [2]) permet de rétablir les expressions (4) et (5) de \vec{q} et de σ dans l'hypothèse où le degré local de raréfaction est faible ; ce degré de raréfaction n'est pas lié à la valeur même de la densité, mais il se mesure par le rapport du libre parcours moyen des molécules $\bar{\lambda}$ à une longueur l caractérisant les gradients locaux des grandeurs macroscopiques, au point considéré. Ce rapport est le nombre de Knudsen local, Kn_l :

$$Kn_l = \frac{\bar{\lambda}}{l} \quad (14)$$

Compte tenu de la relation qui existe entre $\bar{\lambda}$, μ , ρ et la vitesse du son a :

$$\mu = \sqrt{\frac{2}{\pi \delta}} \rho a \bar{\lambda}$$

le nombre de Knudsen s'exprime aussi comme le rapport du nombre de Mach local ($M = u/a$) au nombre de Reynolds local basé sur l ($Re_l = \rho u l / \mu$) :

$$Kn_l = \sqrt{\frac{\pi \delta}{2}} \frac{M}{Re_l} \quad (15)$$

On peut caractériser approximativement le domaine de validité des équations de Navier-Stokes par la condition (par ex. [3]) :

$$Kn_l < 10^{-1}$$

Pour $Kn_l > 10^{-1}$, les lois de comportement (4) et (5) ne sont en principe plus valables, et il faut faire appel à la théorie cinétique des gaz fondée sur l'équation de Boltzmann. On distingue le régime de transition (approximativement, pour $10^{-1} < Kn_l < 10$) où l'équation complète de Boltzmann doit être utilisée, et le régime moléculaire libre ($Kn_l > 10$) où les collisions des molécules entre elles peuvent être négligées. Les comparaisons calcul-expérience ont montré que les équations de Navier-Stokes donnent des résultats valables dans un domaine de valeurs de Kn_l plus étendu que la théorie ne le laisse prévoir, c'est-à-dire débordant sur le régime de transition ; les deux exemples

classiques sont la structure de l'onde de choc et l'écoulement près du bord d'attaque d'une plaque plane (voir par ex. [1], [4], [5]).

Des effets de raréfaction interviennent en outre dans le comportement d'un gaz au contact avec une paroi solide. Il existe en effet, au voisinage d'une paroi, une zone dite couche de Knudsen, dont l'épaisseur est de l'ordre de $\bar{\lambda}$, et où l'écoulement doit être calculé à partir de l'équation de Boltzmann. L'influence de ces effets de raréfaction à la paroi sur l'écoulement à l'extérieur, supposé décrit par les équations de Navier-Stokes, peut être représentée simplement par une modification des conditions à la paroi consistant en une vitesse tangentielle relative du gaz à la paroi non nulle (vitesse de glissement) et en une différence de température entre le gaz et la paroi (saut de température). Le régime, dit de glissement, où ces conditions interviennent, peut être approximativement caractérisé par les conditions :

$$10^{-2} < Kn_\ell < 10^{-1}$$

où Kn_ℓ est caractéristique de l'écoulement juste à l'extérieur de la couche de Knudsen. Les conditions de glissement s'écrivent :

$$u_g = c_1 \bar{\lambda} \frac{\partial u}{\partial n} + c_2 \alpha \bar{\lambda} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial s} \quad (16)$$

$$T_g - T_p = c_3 \frac{\bar{\lambda}}{Pr} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (Pr = \frac{\mu C_p}{k}, \text{ nombre de Prandtl}) \quad (17)$$

où $\partial/\partial n$ est la dérivée normale à la paroi, et $\partial/\partial s$ la dérivée tangentielle ; u est la composante tangentielle relative de la vitesse qui prend la valeur u_g à la paroi, T_g est la température du gaz et T_p celle de la paroi ; c_1 , c_2 et c_3 sont des constantes sans dimension qui dépendent des lois d'interaction des molécules avec la paroi. En fait u_g et T_g ne sont pas la vitesse et la température exactes du gaz à la paroi car l'écart entre la solution des équations de Navier-Stokes et celle de l'équation de Boltzmann n'est pas négligeable dans la couche de Knudsen (par définition du régime de glissement), et les conditions (16) et (17) traduisent seulement le raccord entre la solution "Navier-Stokes" pour l'extérieur de cette couche et la solution "Boltzmann" pour l'intérieur. Cependant il est important de noter que le flux de chaleur et le frottement à la paroi fournis par la solution "Navier-Stokes" sont exacts au même ordre que l'est cette solution à l'extérieur de la couche de Knudsen.

Dans le cas d'un écoulement à grand nombre de Reynolds, où il existe une couche limite à la paroi, la longueur caractéristique ℓ dans la couche limite est l'épaisseur δ de celle-ci ; si L est une dimension caractéristique globale de l'écoulement, et Re_L le nombre de Reynolds basé sur cette longueur, on a :

$$Re_\ell \sim \sqrt{Re_L}$$

(du moins tant que le nombre de Mach M_0 à la frontière de la couche limite n'est pas trop grand), et le régime de glissement correspond approximativement (sans tenir compte d'effets de température) à :

$$10^{-2} < \frac{M_0}{\sqrt{Re_L}} < 10^{-1}$$

Notons finalement que si $Kn_\ell \leq 10^{-2}$, c'est-à-dire soit $M_0/Re_L < 10^{-2}$ si Re_L n'est pas grand, soit $M_0/\sqrt{Re_L} < 10^{-2}$ si Re_L est grand, les effets de glissement et de saut

de température deviennent négligeables ; on a affaire alors au régime d'écoulement improprement qualifié de "continu".

2.2 - Intérêt

La brève discussion qui précède montre que les équations de Navier-Stokes sont valables dans un très large domaine de nombre de Mach et de nombre de Reynolds, comportant le régime dit continu et le régime de glissement, et débordant même en pratique sur le régime de transition.

Ce domaine recouvre donc toutes les applications de l'aérodynamique à l'aéronautique (avions, engins) et une grande partie des applications de l'aérodynamique à l'astronautique (problème de la rentrée dans l'atmosphère d'un satellite, d'une navette spatiale). Le régime de transition et le régime moléculaire libre n'interviennent qu'à des altitudes très élevées intéressant des engins satellisés ou commençant leur rentrée dans l'atmosphère ; dans le cas d'objets très petits (météorites) ces régimes d'écoulement peuvent persister à des altitudes plus faibles.

En ce qui concerne l'utilisation des équations de Navier-Stokes pour l'étude théorique de problèmes d'aérodynamique, il convient de distinguer deux cas selon que le nombre de Reynolds Re_L caractéristique de l'écoulement est grand ou non.

Dans le premier cas, qui recouvre une grande partie des applications, les méthodes de calcul d'usage courant sont basées sur les approximations de fluide parfait ou de couche limite, et les équations de Navier-Stokes ne sont réellement nécessaires que pour décrire l'écoulement dans certaines zones où ces deux approximations tombent en défaut ; mais il faut noter que l'existence de telles zones est la règle plutôt que l'exception, et que ces zones jouent un rôle souvent important dans la détermination de l'ensemble de l'écoulement. Quelques exemples d'écoulements à grand nombre de Reynolds comportant de telles zones "Navier-Stokes" sont représentés schématiquement sur la figure 1.

On pourrait donc penser que la résolution des équations de Navier-Stokes, pour les écoulements à grand nombre de Reynolds, ne présente d'intérêt que dans ces zones très limitées et non pour l'ensemble de l'écoulement. Ce point de vue est sans doute justifié actuellement compte tenu des coûts des calculs et des possibilités des ordinateurs, mais il ne le restera probablement pas dans une perspective à long terme. En effet, l'utilisation des équations de Navier-Stokes pour l'ensemble de l'écoulement présente l'avantage essentiel d'éliminer les problèmes posés par le couplage, qu'il faut assurer au cours du calcul, entre une zone "Navier-Stokes" et l'extérieur (zone "fluide parfait" ou zone "couche limite") ; ces problèmes qui mettent en cause la convergence du calcul, peuvent être difficiles à résoudre pour les raisons suivantes : d'une part l'existence, la position et l'étendue d'une zone Navier-Stokes ne sont pas nécessairement connues en avance (cas d'un décollement sur une paroi lisse), alors qu'elles sont révélées par le calcul complet à partir des équations de Navier-Stokes ; d'autre part, l'écoulement à l'extérieur de cette zone peut être très sensible au couplage avec cette zone, et la convergence du calcul peut être difficile à obtenir.

Nous n'avons pas encore fait la distinction, pourtant essentielle en pratique, entre écoulements laminaires et écoulements turbulents. La structure de la turbulence fait intervenir des échelles de temps et d'espace très petites, mais qui ne mettent pas en cause la validité des équations de Navier-Stokes.

Cependant la détermination de cette structure dans un écoulement, par résolution numérique des équations de Navier-Stokes instationnaires, est hors de portée des ordinateurs actuels les plus puissants. Des tentatives ont été faites pour l'étude numérique locale de la turbulence, mais le calcul effectif d'écoulements turbulents (c'est-à-dire de leur structure moyenne dans le temps) doit faire appel à des modèles de turbulence à caractère empirique et dont la validité ne peut être appréciée que par comparaison avec l'expérience. On trouvera une revue récente des modèles de turbulence dans le livre de Launder et Spalding [6]. La discussion de ce problème très vaste et complexe sort du cadre de cet exposé ; signalons seulement que des modèles de turbulence associés aux équations de Navier-Stokes ont

été mis en oeuvre surtout pour les écoulements incompressibles, et qu'il y a encore peu d'études analogues publiées dans le cas compressible [7].

Les méthodes numériques que nous discutons plus loin ont toutes été utilisées pour le calcul d'écoulements laminaires ; la transposition de ces méthodes pour le traitement des équations de Navier-Stokes avec un modèle de turbulence ne devrait pas soulever de difficultés de principe, bien qu'en pratique la structure des couches visqueuses turbulentes puisse exiger des modifications assez importantes (en particulier pour le maillage).

Le deuxième cas à considérer est celui où le nombre de Reynolds n'est plus assez grand pour que la théorie classique de la couche limite s'applique, même si l'on peut encore distinguer dans l'écoulement des zones visqueuses et des zones de fluide parfait, car ces zones sont alors fortement couplées. Si le nombre de Reynolds est assez faible, les effets dissipatifs interviennent dans tout l'écoulement.

Ce deuxième cas, où l'écoulement est toujours laminaire, se rencontre dans les problèmes de rentrée dans l'atmosphère (il faut alors tenir compte des effets dits de gaz réel : réactions chimiques, ionisation ...); les exemples classiques sont ceux du corps émoussé ou du bord d'attaque d'une plaque plane en écoulement hypersonique. Ce deuxième cas se rencontre aussi dans les écoulements à des vitesses modérées autour d'objets de faibles dimensions tels que des sondes de mesure (tube Pitot, fil chaud...) utilisés en soufflerie.

Notons, pour conclure ce paragraphe, que c'est essentiellement le cas des nombres de Reynolds faibles ou modérés qui a jusqu'ici fait l'objet d'études numériques à partir des équations de Navier-Stokes ; le cas des grands nombres de Reynolds est évidemment beaucoup plus difficile, mais les études qui lui sont consacrées pourraient se développer rapidement dans un proche avenir.

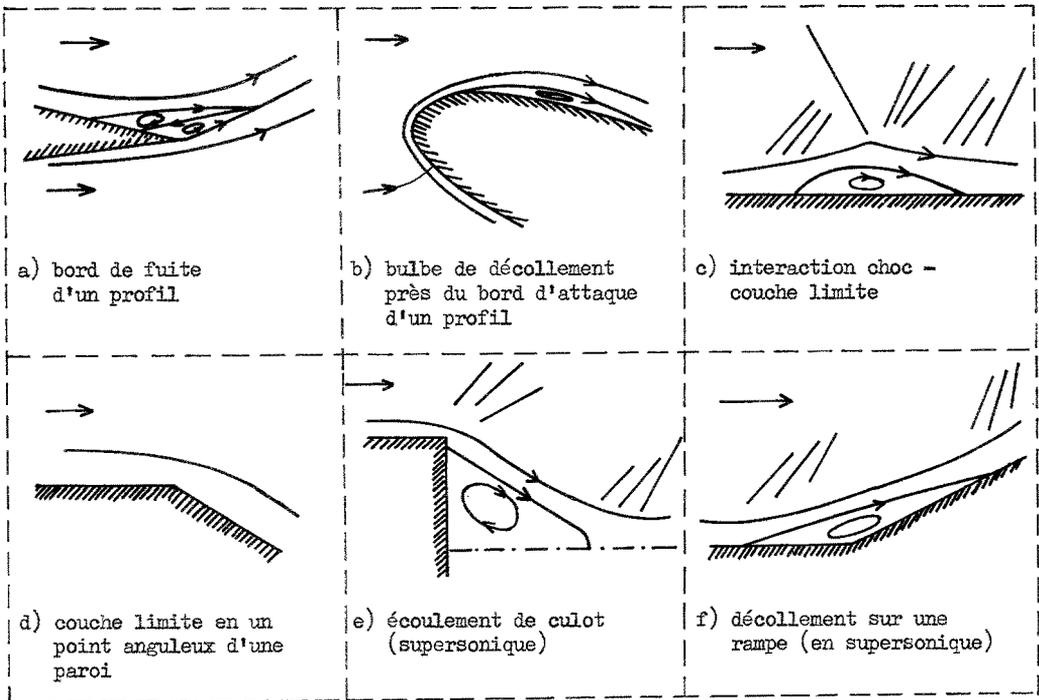


Fig. 1 - Ecoulements à grand nombre de Reynolds avec zones "Navier-Stokes"

3 - PROBLEMES TRAITES

En exceptant les calculs relatifs aux équations instationnaires à une dimension d'espace [8] - [13], on trouve, depuis 1965, un nombre relativement important de calculs d'écoulements bidimensionnels. En général, ces travaux considèrent des géométries simples ou, lorsque la géométrie de l'obstacle est compliquée, seulement une partie limitée de l'écoulement (bord d'attaque, culot ...).

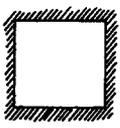
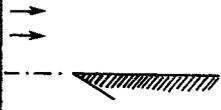
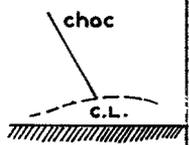
Très rares sont encore les calculs complets d'écoulement autour d'un obstacle fini ; toutes les difficultés liées à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes se trouvent, en effet, rassemblées dans le cas d'un écoulement autour d'un obstacle fini.

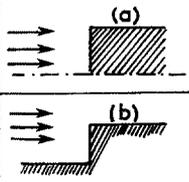
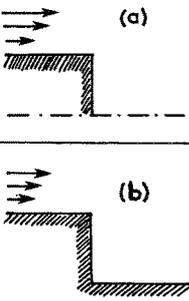
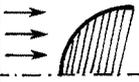
On trouvera dans les références [14], [15] et [16] une discussion de certains problèmes liés à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes.

Le tableau qui suit présente un certain nombre d'études, classées selon la configuration géométrique traitée.

Dans la première colonne sont indiqués les types de problèmes et les auteurs - (les numéros se réfèrent à la bibliographie), les schémas utilisés sont brièvement mentionnés dans la seconde colonne avec indication d'un numéro de formule si ce schéma est décrit dans le paragraphe suivant. Enfin, on a représenté schématiquement dans la dernière colonne la géométrie du problème.

TABLEAU I

PROBLEMES ET AUTEURS	METHODES	GEOMETRIES
<u>CAVITE</u> [17] BRALLOVSKAYA (1965) [19] POLEZHAEV (1967)	2 pas (15) directions alternées	
<u>PLAQUE PLANE</u> [19] THOMMEN (1966) [20] KURZROCK - MATES (1966) [21] BUTLER (1967) [22] TRULIO - WALITT - NILES (1970) [23] CHENG - CHEN (1973) [5] TANNEHILL - MOHLING - RAKICH (1973)	2 pas (27) décentré / explicite "PIC" - "FLIC" "AFTON" 2 pas (35) 2 pas (30)	
<u>PLAQUE PLANE : INTERACTION</u> <u>ONDE DE CHOC - COUCHE LIMITE</u> [24] SKOGLUND - COLE - STAIANO (1968) [25] MAC CORMACK (1971)	{ Lax-Wendroff et Viscosité artificielle (Rusanov) 2 pas (30)	

PROBLEMES ET AUTEURS	METHODES	GEOMETRIE
<u>ANGLE DE DETENTE</u> [26] BRALLOVSKAYA (1967)	2 pas (25)	
<u>ANGLE DE COMPRESSION</u> [27] CARTER (1973)	2 pas (25)	
<u>MARCHE "AMONT"</u> [19] THOMMEN (1966) (a) [22] TRULIO - WALITT - NILES (1970) (b) [28] GOODRICH - LAMB - BERTIN (1972) (a)	2 pas (27) "AFTON" Viscosité artificielle (Rusanov)	
<u>MARCHE "AVAL"</u> [29] MICHENKOV (1969) (a) [30] ALLEN - CHENG (1970) (a) [31] ROACHE - MUELLER (1970) (a,b) [32] ROACHE - (1970) (a,b) [33] ROSS - CHENG (1971) (a) [34] BRALLOVSKAYA (1971) (a) [35] ROSS - CHENG (1972) (a) [28] GOODRICH - LAMB - BERTIN (1972) (a, b)	2 pas (27) 2 pas (35) Décentré/Dufort-Frankel Décentré/Dufort-Frankel 2 pas (35) 2 pas (25) 2 pas (35) viscosité artificielle (Rusanov)	
<u>CAVITE OUVERTE</u> [32] ROACHE (1970)	Décentré/Dufort-Frankel	
<u>MARCHE "AMONT-AVAL"</u> [36] PALUMBO - RUBIN (1972) [28] GOODRICH - LAMB - BERTIN (1972)	2 pas (32) Viscosité artificielle (Rusanov)	
<u>CERCLE "AMONT"</u> [37] MORETTI - SALAS (1969)	Type Lax-Wendroff 1 pas	

PROBLEMES ET AUTEURS	METHODES	GEOMETRIES
<u>PARABOLE "AMONT"</u> [38] PEYRET - VIVIANI (1972)	Semi-implicite (33)	
<u>CERCLE "AMONT-AVAL"</u> [39] SCALA - GORDON (1968) [40] SCALA - GORDON (1970) [41] KITCHENS (1973) [56] TRULIO - WALITT - LIU (1970)	Explicite - Implicite (22) Explicite - Implicite (22) Explicite - Implicite (22) "AFTON"	
<u>OBSTACLE PARABOLIQUE FINI</u> [42] PEYRET - VIVIANI (1973)	Semi-implicite (33)	
<u>SPHERE "AMONT"</u> [43] MOLODZOV (1969) [44] MOLODZOV - TOLSTYKH (1969) [45] PAVLOV (1969) [46] VICTORIA - WIDHOPF (1972)	Relations intégrales Relations intégrales 2 pas (25) Leap frog./Dufort-Frankel	
<u>SPHERE - CONE "AMONT"</u> [47] MAGNUS - GALLAHER (1967)	2 pas	
<u>ELLIPSOIDE "AMONT"</u> [45] PAVLOV (1969)	2 pas (25)	
<u>SPHERE "AMONT-AVAL"</u> [48] PAVLOV (1968) [40] SCALA - GORDON (1970)	2 pas (25) Explicite - Implicite (22)	

Il n'est pas possible, dans le cadre de cet exposé, de décrire, en détails, les conditions d'écoulement. Disons simplement que les nombres de Mach sont, en général, supersoniques ou hypersoniques, que les nombres de Reynolds varient entre 10 et 10^4 , que les parois sont ou bien à température donnée, ou bien adiabatiques. Signalons aussi que pour certains calculs d'écoulements hypersoniques des conditions de glissement (17), (18) ont été utilisées.

4 - SCHEMAS AUX DIFFERENCES FINIES

Les équations de Navier-Stokes (1) - (5) adimensionnées s'écrivent sous forme conservative, dans le cas bidimensionnel :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \varepsilon \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) \quad (19a)$$

où ε est l'inverse du nombre de Reynolds, et où (x, y) peuvent être des coordonnées curvilignes quelconques. Dans le cas où (x, y) sont des coordonnées cartésiennes, le "vecteur" W a pour éléments $(\rho, \rho u, \rho v, \rho E)$, où u et v sont les composantes de la vitesse \vec{u} . Les "vecteurs" F et G sont fonctions de W , alors que F_1 et G_1 sont fonctions de W et de ses dérivées premières.

Toutes les méthodes de calcul, à l'exception de celle utilisée en [43], [44] qui est une méthode de relations intégrales, sont des méthodes aux différences finies.

Les écoulements étudiés sont, pour la plupart, stationnaires et, pour obtenir cette solution stationnaire deux types de procédés sont employés :

- (1) la résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires au moyen d'un schéma consistant (avec ou sans condition) avec ces équations instationnaires ; la solution stationnaire recherchée est obtenue à la limite $t \rightarrow \infty$,
- (2) la résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires au moyen d'un schéma non consistant, le schéma devenant consistant aux équations stationnaires à la limite $t \rightarrow \infty$ seulement. Dans ce cas on peut interpréter la méthode comme un procédé itératif de résolution des équations aux différences discrétisant les équations de Navier-Stokes stationnaires :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \varepsilon \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) \quad (19b)$$

Le processus itératif est alors directement inspiré de la forme instationnaire (19a).

En poursuivant dans cette direction on peut alors chercher à remplacer le vecteur W par un autre vecteur W^* qui conduira à une convergence plus rapide vers l'état stationnaire, du fait soit de la structure mathématique du système pseudo-instationnaire ainsi formé :

$$\frac{\partial W^*}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \varepsilon \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) \quad (20)$$

soit des propriétés de stabilité du schéma correspondant.

Nous présentons ci-après quelques-uns des schémas utilisés pour la résolution des équations de Navier-Stokes, représentatifs des deux procédés mentionnés plus haut, en considérant pour cela l'équation modèle scalaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [f(u)] = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (21)$$

On introduit les notations $A(u) = \frac{df}{du}$; $u(i \Delta x, n \Delta t) = u_i^n$; $f(u_i^n) = f_i^n$; $f(\tilde{u}_i^n) = \tilde{f}_i^n$; $\sigma = \Delta t / \Delta x$; $\nu = \varepsilon \Delta t / \Delta x^2$.

Les critères de stabilité se référeront au cas linéaire pour lequel $A = \text{const.}$

4.1 - Schémas consistants avec les équations instationnaires

4.1.1 - Schémas à 1 pas

(a) - SCALA - GORDON [39]

Les points $(n+1, i)$ sont divisés en points "explicites" $(2i-1)$ et points "implicites" $(2i)$; le rôle des points $(2i-1), (2i)$ est échangé au pas de temps suivant. Le schéma s'écrit :

$$u_{2i-1}^{n+1} = u_{2i-1}^n - \frac{\sigma}{2} \left[\left(A_{2i-1}^n + |A_{2i-1}^n| \right) \left(u_{2i-1}^n - u_{2i-2}^n \right) + \left(A_{2i-1}^n - |A_{2i-1}^n| \right) \left(u_{2i}^n - u_{2i-1}^n \right) \right] + \nu \left[u_{2i-2}^n - 2u_{2i-1}^n + u_{2i}^n \right] \quad (22a)$$

$$\equiv u_{2i-1}^n + \left[Q(u_{2i-1}^n) \right] u_{2i-1}^n$$

$$u_{2i}^{n+1} = u_{2i}^n + \left[Q(u_{2i}^{n+1}) \right] u_{2i}^{n+1} \quad (22b)$$

- Consistance : $\sigma = o(1)$,- Précision état stationnaire : $O(\Delta x)$,- Stabilité : $\sigma = o(1)$.- Nota : Ce schéma nécessite de procéder à un calcul itératif pour les points implicites $2i$.(b)-VICTORIA - WIDHOFF [46]

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - \sigma \left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n \right) + 2\nu \left[u_{i+1}^n - \left(u_i^{n+1} + u_i^{n-1} \right) + u_{i-1}^n \right] \quad (23)$$

- Consistance : $\varepsilon\sigma = o(1)$,- Précision état stationnaire : $O(\Delta x^2)$.

- Stabilité :

$$|A| \sigma \leq 1 \quad (24)$$

4.1.2 - Schémas à 2 pas

(a)-BRALLOVSKAYA [17]

$$\tilde{u}_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\sigma}{2} \left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n \right) + \nu \left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n \right) \quad (25a)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\sigma}{2} (\tilde{f}_{i+1}^{n+1} - \tilde{f}_{i-1}^{n+1}) + \nu (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (25b)$$

- Consistance : sans condition ; précision $O(\Delta t + \Delta x^2)$.
- Précision état stationnaire : $O(\Delta x^2)$.
- Stabilité :

$$\Delta t \leq \text{Min} \left\{ \frac{\Delta x^2}{4\varepsilon}, \frac{\Delta x}{|A|} \right\} \quad (26)$$

(b) - THOMSEN [19]

$$\tilde{u}_{i \pm 1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_{i \pm 1}^n + u_i^n) \mp \frac{\sigma}{2} (f_{i \pm 1}^n - f_i^n) \quad (27a)$$

$$+ \frac{\nu}{4} \left[(u_{i \pm 2}^n - 2u_{i \pm 1}^n + u_i^n) + (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \right]$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \sigma (\tilde{f}_{i+1/2}^{n+1/2} - \tilde{f}_{i-1/2}^{n+1/2}) + \nu (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (27b)$$

- Consistance sans condition, précision $O(\varepsilon \Delta t + \Delta x^2)$.
- Précision état stationnaire : $O(\Delta x^2)$.
- Stabilité :

$$A^2 \sigma^2 + 2\nu \leq 1 \quad (28)$$

(c) - MAC CORMACK [25]

$$\tilde{u}_i^{n+1} = u_i^n - \sigma (f_{i+1}^n - f_i^n) + \nu (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (29a)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\sigma}{2} \left[(f_{i+1}^n - f_i^n) + (\tilde{f}_i^{n+1} - \tilde{f}_{i-1}^{n+1}) \right] \quad (29b)$$

$$+ \frac{\nu}{2} \left[(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + (\tilde{u}_{i+1}^{n+1} - 2\tilde{u}_i^{n+1} + \tilde{u}_{i-1}^{n+1}) \right]$$

- Consistance sans condition ; précision $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$,
- Précision état stationnaire : $O(\Delta x^2)$,

- Stabilité [5] :

$$\begin{aligned} A^2 \sigma^2 - 4 \nu^2 + 2 \nu > 0 & \quad \text{si} \quad A^2 \sigma^2 - 3 \nu^2 \leq 0 \\ A^2 \sigma^2 - 4 \nu^2 + 2 \nu \leq 1 & \quad \text{si} \quad A^2 \sigma^2 - 3 \nu^2 > 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Nota : On obtient une variante de ce schéma en approchant $\partial f / \partial x$ par $(f_i^n - f_{i-1}^n) / \Delta x$ au premier pas et par $[f_i^n - f_{i-1}^n + \tilde{f}_{i+1}^{n+1} - \tilde{f}_i^{n+1}] / (2 \Delta x)$ au second pas.

(a) PALUMBO - RUBIN [36]

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i \pm 1/2}^{n+1} = & \frac{1}{2} (u_{i \pm 1}^n + u_i^n) \mp \sigma (f_{i \pm 1}^n - f_i^n) \\ & + \frac{\nu}{2} \left[(u_{i \pm 2}^n - 2 u_{i \pm 1}^n + u_i^n) + (u_{i+1}^n - 2 u_i^n + u_{i-1}^n) \right] \end{aligned} \quad (31a)$$

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = & u_i^n - \frac{\sigma}{2} \left[\frac{1}{2} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + (\tilde{f}_{i+1/2}^{n+1} - \tilde{f}_{i-1/2}^{n+1}) \right] \\ & + \frac{\nu}{4} (u_{i+2}^n - 2 u_i^n + u_{i-2}^n) \end{aligned} \quad (31b)$$

- Consistance sans condition ; précision $O(\epsilon \Delta t + \Delta x^2)$,

- Précision état stationnaire : $O(\Delta x^2)$

- Stabilité : "critère numérique" seulement (voir fig. 4).

4.2 - Schémas non consistants avec les équations instationnaires

4.2.1 - Schéma à 1 pas (PEYREF - VIVIANI [38])

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\sigma}{2} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^{n+1}) + \nu (u_{i+1}^n - 2 u_i^n + u_{i-1}^{n+1}) \quad (32)$$

- Précision état stationnaire : $O(\Delta x^2)$,

- Stabilité :

$$\frac{1}{2} |A| \sigma + \nu \leq 1 \quad (33)$$

4.2.2 - Schéma à 2 pas (ALLEN - CHENG [30])

$$\tilde{u}_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\sigma}{2} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + \nu (u_{i+1}^n - 2 \tilde{u}_i^{n+1} + u_{i-1}^n) \quad (34a)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\sigma}{2} (\tilde{f}_{i+1}^{n+1} - \tilde{f}_{i-1}^{n+1}) + \nu (\tilde{u}_{i+1}^{n+1} - 2 u_i^{n+1} + \tilde{u}_{i-1}^{n+1}) \quad (34b)$$

-Précision état stationnaire : $O(\Delta x^2)$

-Stabilité :

$$|A| \sigma \leq 1 \quad (35)$$

4.2.3 - Remarque sur les schémas non consistants (cas linéaire)

Pour les schémas non consistants, il est intéressant de voir quelle équation on résout effectivement. On obtient cette équation à partir du schéma en effectuant des développements de Taylor limités aux premiers termes significatifs. Plaçons-nous dans le cas linéaire où $A(u) = A = \text{const.}$, l'équation discrétisée par les schémas (32) et (34) est de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + K \left(A \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (36)$$

avec

$$K = \left[1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(\varepsilon + A \frac{\Delta x}{2} \right) \right]^{-1} \quad \text{pour (32)} \quad (37)$$

$$K = \left[1 + 4\varepsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right] \left[1 + 2\varepsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right]^{-2} \quad \text{pour (34)} \quad (38)$$

(a) - Cas du schéma (32)

Si la condition de stabilité (33) est satisfaite, la formule (37) montre que $K > 1$ si $A > 0$ et, dans le cas $A < 0$, $K > 1$ si $|A|\Delta x < 2\varepsilon$, $0 < K < 1$ si $|A|\Delta x > 2\varepsilon$ [si $A < 0$, il faudrait changer le rôle de $i+1$ et $i-1$ en ce qui concerne les indices n , $n+1$, pour obtenir $K > 1$ sans autre condition que (33)]. Lorsque $K > 1$, la convergence vers l'état stationnaire est plus rapide que celle qu'on aurait avec une discrétisation consistante. En fait, toujours dans ce cas $A = \text{const.}$, le schéma (32) n'est autre que l'application à l'équation,

$$\frac{A}{2\Delta x} (u_{i+1} - u_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{\Delta x^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) = 0 \quad (39)$$

de la méthode des relaxations successives ("SOR") avec $\omega = 2\varepsilon \Delta t / \Delta x^2$ comme paramètre de relaxation. On peut alors démontrer que le processus converge lorsque $0 < \omega^* < 2$ où $\omega^* = \omega (1 + |A| \frac{\Delta x}{2\varepsilon})$.

(b) - Cas du schéma (34)

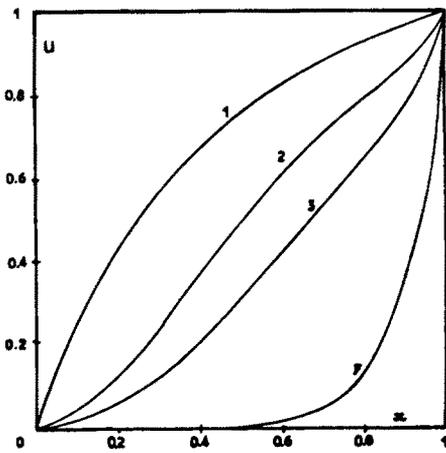
La formule (38) montre qu'ici K est toujours inférieur à 1. Le critère (35) implique $\Delta t \leq \eta \frac{\Delta x}{|A|}$ avec $0 < \eta \leq 1$; on obtient alors :

$$K = |A| \Delta x \frac{|A|\Delta x + 4\varepsilon\eta}{(|A|\Delta x + 2\varepsilon\eta)^2} \quad (40)$$

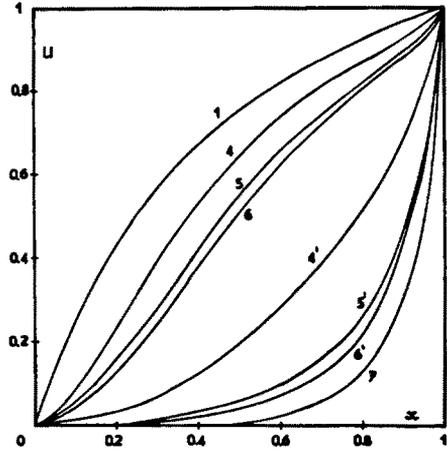
si $\varepsilon = O(1)$, $K = O(\Delta x)$, d'où une convergence très lente vers l'état stationnaire ; cependant si $\varepsilon \rightarrow 0$, alors $K \rightarrow 1$. Ainsi, avec ce schéma (34), la convergence est moins rapide qu'avec une discrétisation consistante ; mais cette lenteur relative est contrebalancée par le fait que, grâce aux bonnes propriétés de stabilité, le calcul peut être effectué avec des Δt assez grands - du moins tant que ε n'est pas très petit.

On mentionnera, en anticipant un peu (§ 4.3) que le critère (35) est trop restrictif de sorte que le calcul peut être conduit avec de très grandes valeurs de Δt , mais la valeur de K s'en trouve réduite d'autant.

Pour illustrer cette discussion consacrée aux propriétés de convergence vers l'état stationnaire nous avons porté sur les figures 2 et 3 les résultats d'une application numérique relative à (21) avec $A = 1$, $\epsilon = 0,1$ menée à partir des schémas (29), (32) et (34) dans le cas où $\Delta x = 0,02$. L'état initial est représenté par la courbe (1). La figure 2 illustre les résultats obtenus au bout d'un même temps $t = 0,364$. La figure 3 compare les résultats à un nombre de pas de temps N fixé. On notera que (32) donne l'état stationnaire avec une erreur de l'ordre de 10^{-3} dès la 50ème itération. Les courbes (5), (6) correspondent à des calculs effectués avec (34) dans les cas $\Delta t = 0,02$ et $\Delta t \geq 0,4$ (pour $\Delta t \geq 0,4$ on obtient les mêmes résultats au terme d'un nombre fixé de cycles de temps quel que soit Δt).



1 - état initial



7 - état stationnaire

courbe	2	3	4	4'	5	6	5'	6'	7
schéma	(34)	(29)	(29)	(29)	(34)	(34)	(34)	(34)	(32)
N	100	200	50	250	50	50	250	250	50
Δt	$3,64 \cdot 10^{-3}$	$1,82 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	0,02	$\geq 0,4$	0,02	$\geq 0,4$	$3,64 \cdot 10^{-3}$

Fig. 2 - Comparaison de schémas sur l'équation modèle - Résultats à $t = 0,364$.

Fig. 3 - Comparaison de schémas sur l'équation modèle - Résultats à $N = 50$ et à $N = 250$.

4.3 - Stabilité

Il faut noter que, même dans le cas simple de l'équation linéaire considérée ici, la détermination rigoureuse du critère de stabilité n'est pas chose aisée. Ainsi certains critères [Eq. (26), (35)] sont trop restrictifs, d'autres [Eq. (30)] pas assez. On a procédé à une étude numérique du facteur d'amplification pour déterminer le critère exact. La figure 4 représente les domaines de stabilité dans le plan $(\epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, |A| \frac{\Delta x}{\epsilon})$.

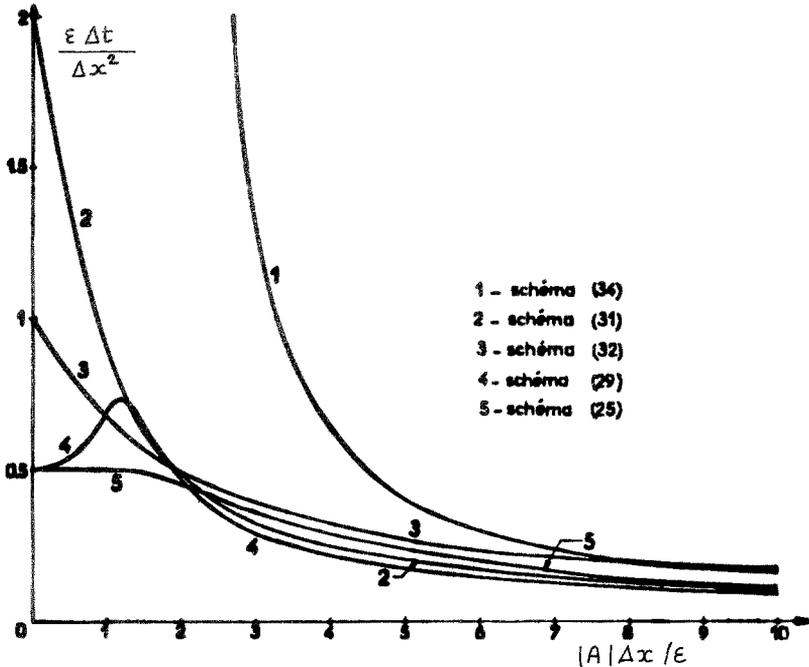


Fig. 4 - Courbes de stabilité de différents schémas pour l'équation modèle.

Si le critère de stabilité dépend de ε , alors il lui correspond, dans le cas des équations de Navier-Stokes, un critère du type $\Delta t \approx \rho Re \Delta x^2$ où Re est le nombre de Reynolds. Dans les zones où ρ est très faible, en particulier dans la région du culot (fig. 1 - e) ceci conduit à un Δt si petit que le temps de calcul peut devenir prohibitif [49]. On voit là l'intérêt soit de travailler avec un schéma stable sans critère de ce genre soit de substituer au vecteur W de l'équation (19a) un vecteur W^* , de sorte que, pour le système obtenu (20) le critère de stabilité ne dépende plus de ρ . En [42] on a choisi W^* de la forme (ρ, u, v, T) .

4.4 - Remarque sur le calcul des points voisins d'une limite

Considérons le calcul de u_1^{n+1} en un point voisin d'une limite $i = 0$ où $u = u_0$ est donné. Dans le cas des schémas à 2 pas calculant les valeurs intermédiaires aux mêmes points que les valeurs définitives, le calcul de u_1^{n+1} implique celui d'une valeur intermédiaire \tilde{u}_0^{n+1} au point frontière à partir du schéma lui-même (décentré correctement). Si l'on utilise la condition limite, c'est-à-dire si l'on pose $\tilde{u}_0^{n+1} = u_0$, on fait une erreur qui, selon les schémas, tend ou non vers zéro quand $\Delta t \rightarrow \infty$.

5 - CONDITIONS AUX LIMITES -

On peut distinguer deux types de frontière : des parois matérielles et des frontières sans réalité physique introduites pour limiter le domaine de calcul. Dans la plupart des cas l'obstacle considéré est placé dans un fluide d'étendue infinie et les conditions doivent être imposées à l'infini. Ceci est évidemment impossible, à moins de faire des transformations de coordonnées ramenant l'infini à distance finie. En général, on limite

arbitrairement le domaine de calcul et l'on cherche à imposer des conditions compatibles avec le problème considéré.

5.1 - Conditions sur une paroi (cas d'une paroi régulière)

L'écriture des conditions pour la vitesse et la température (§ 1 et 2) ne conduit à aucune difficulté, mais il reste une grandeur thermodynamique inconnue à la paroi (la pression ou la masse volumique). La pression intervient effectivement, par l'intermédiaire de sa dérivée transversale à la paroi, lors du calcul de la quantité de mouvement sur la première ligne voisine de la paroi. Il faut donc, ou bien calculer cette grandeur thermodynamique ou bien trouver un procédé qui évite d'en avoir réellement besoin.

Les techniques seront différentes selon que l'obstacle est une ligne du maillage ou que l'obstacle n'appartient pas au maillage (nous supposons ici que toutes les inconnues sont définies aux mêmes points).

5.1.1 - La paroi est une ligne du maillage

(a) La détermination de la masse volumique ρ_P à la paroi \mathcal{P} par discrétisation de l'équation de continuité écrite sur cette paroi (dans le cas où $\vec{u} = 0$ sur \mathcal{P})

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V)}{\partial \eta} = 0 \quad (41)$$

(V vitesse normale à \mathcal{P} , η coordonnée transversale à \mathcal{P}) nécessite d'approcher $\frac{\partial (\rho V)}{\partial \eta}$ par une différence décentrée. L'utilisation d'un tel procédé est fort délicate et il semble que, si elle peut se concevoir moyennant certaines précautions pour une paroi de compression ou de faible détente, elle ne convienne pas pour l'écoulement de culot dans lequel cas on obtient rapidement des densités négatives [30], [42]. Cependant, dans le cas de l'écoulement au nez d'un obstacle émoussé, une discrétisation de (41) a été utilisée avec succès en [46]. Cette équation est discrétisée à partir du schéma (23), soit :

$$\rho_P^{n+1} = \rho_P^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \left[(\rho V)_1^n - (\rho V)_0^n \right] \quad (42)$$

et la quantité $(\rho V)_0^n$ (cf. fig. 5)

est déterminée par une extrapolation dans l'espace et le temps :

$$\begin{aligned} (\rho V)_0^n &= 2 (\rho V)_P^{n-1} - (\rho V)_1^{n-2} \\ &= -(\rho V)_1^{n-2} \end{aligned} \quad (43)$$

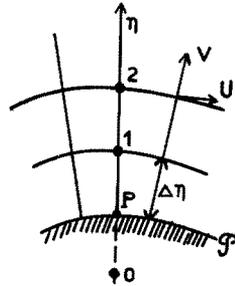


Figure 5

Cette méthode revient à approcher :

$$\left(\frac{\partial (\rho V)}{\partial \eta} \right)_P^{n-1} \text{ par l'expression } \frac{1}{\Delta \eta} \left\{ \frac{1}{2} \left[(\rho V)_1^n + (\rho V)_1^{n-2} \right] - (\rho V)_P^{n-1} \right\} .$$

(b) En [36], la technique suivante est proposée pour le calcul de la pression p_P sur \mathcal{P} : un développement de Taylor donne :

$$p_P^{n+1} = p_1^{n+1} - \Delta \eta \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_P^{n+1} + \dots \quad (44)$$

puis $(\partial p / \partial \eta)_P^{n+1}$ est calculé à partir de l'équation de quantité de mouvement normale écrite en P . Ceci nécessite d'approcher les dérivées de la vitesse en P , qui interviennent dans cette équation, par des différences décentrées.

(c) Certains auteurs déterminent ρ_P par extrapolation parabolique (par exemple [5], [27]).

(d) Dans le cas de l'écoulement sur un obstacle parabolique [38], [42], les deux méthodes suivantes ont été appliquées. Comme on l'a dit, la connaissance de p sur l'obstacle n'est, en fait, nécessaire que lors du calcul de la vitesse transversale V au point 1 (fig. 5).

Le premier procédé consiste à ne pas calculer V_1^{n+1} à partir de l'équation de quantité de mouvement correspondante, mais à partir de la condition stationnaire $(\partial V / \partial \eta)_P = 0$ déduite de l'équation de continuité stationnaire en P , d'où par discrétisation décentrée :

$$V_1^{n+1} = \frac{1}{4} (3 V_P^{n+1} + V_2^{n+1}) = \frac{1}{4} V_2^{n+1} \quad (45)$$

Le second procédé consiste simplement à approcher le gradient $(\partial p / \partial \eta)$ au point 1 par une différence décentrée avancée.

5.1.2 - La paroi n'est pas une ligne du maillage

Dans les travaux [30], [31], [32], la paroi n'est pas une ligne du maillage mais est placée à mi-distance entre deux lignes (fig. 6). On obtient ρ_P par extrapolation linéaire :

$$\rho_P^{n+1} = \frac{2}{2} \rho_1^{n+1} - \frac{1}{2} \rho_2^{n+1} \quad (46)$$

Cependant, avec un tel maillage il faut décentrer correctement les différences qui interviennent lors du calcul du point 1. En particulier si ce point 1 est voisin du culot, il est important [30] d'approcher les dérivées du type $(\partial \varphi / \partial \eta)_1$ avec

$$\varphi = \rho V, \rho V^2, \rho V U, \rho V E$$

par une différence précise au second ordre :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)_1 \approx \frac{1}{3 \Delta \eta} (\varphi_2 - 3 \varphi_1 - 4 \varphi_P) \quad (47)$$

Une discrétisation au premier ordre, par exemple :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)_1 \approx \frac{1}{\Delta \eta} \left[\frac{1}{2} (\varphi_2 + \varphi_1) - \varphi_P \right] \quad (48)$$

conduit à une sous-estimation de ρ_1 et $(\rho V)_1$, d'où l'apparition de valeurs négatives de la masse volumique.

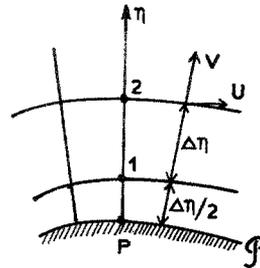


Figure 6

5.2 - Voisinage d'un coin

La présence d'angles convexes crée toujours des difficultés dans les calculs numériques. Dans le cas de l'écoulement compressible au voisinage d'un angle droit par exemple, la détente est si forte que les variations des quantités sont comparables en ordre de grandeur à celles qu'on aurait dans un choc. On conçoit que les résultats au voisinage d'un angle convexe soient difficile à obtenir correctement. Dans une telle situation il serait souhaitable de considérer une solution asymptotique valable au voisinage de l'angle qu'on raccorderait à une solution extérieure numérique selon la technique utilisée en [50] dans le cas incompressible.

5.2.1 - Le coin C est un point du maillage

Les techniques exposées précédemment qui nécessitaient l'utilisation des dérivées de la vitesse à la paroi ne sont plus justifiées car ces dérivées ne sont pas définies en C. On peut, à la rigueur, considérer les points 1 et 2 (fig. 7) comme des limites de points 1' et 2' lorsque la distance δ qui les sépare respectivement de ces points tend vers zéro, et appliquer en 1 et 2 les procédés utilisés plus haut [36].

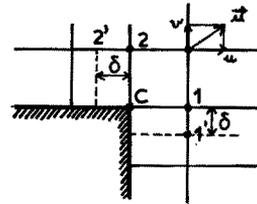


Figure 7

En [42], on a préféré calculer les vitesses u en 1 et v en 2 non à partir des équations de Navier-Stokes mais à partir d'interpolations faisant intervenir les quatre points voisins.

5.2.2 - Le point C n'est pas un point du maillage

Si le point C n'appartient pas au maillage [30], [32], le traitement des points 1, P_1 , 2, P_2 (figure 8) s'effectue comme précédemment (§ 5.1.2). Il suffit, lors du calcul au point O, de modifier les différences approchant les dérivées croisées de la vitesse.

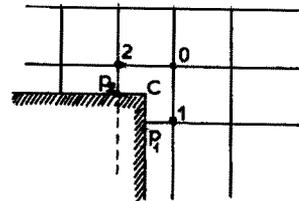


figure 8

5.3 - Frontières du domaine de calcul

Lorsqu'on considère un obstacle placé dans un volume infini de fluide, ce dernier est dans un état uniforme à l'infini. Pour écrire correctement ces conditions on peut introduire une transformation de coordonnées ramenant l'infini à distance finie [29], [41]. Plus généralement on limite arbitrairement le domaine de calcul (fig. 9).

Sur la frontière amont HG on impose les conditions de l'écoulement uniforme à l'infini.

A l'aval, il faut prendre soin à placer la limite EF suffisamment loin du culot DC pour que les conditions artificielles qu'on y écrira, aient une influence négligeable sur le calcul. Les inconnues en EF sont déterminées en général par extrapolation dans l'espace ou dans l'espace et le temps [46]. L'effet de la position de EF a été étudié en [33], [41].

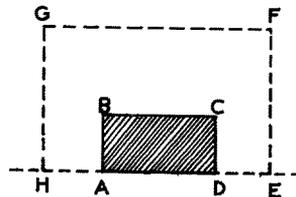


figure 9

Sur la limite latérale GF, on peut aussi, dans certains cas, utiliser des extrapolations. Une technique d'inspiration analogue, consistant à écrire des conditions d'onde simple, s'est révélée très efficace [27], [30], [32], [34], du moins tant que le choc ne coupe pas GF. On considère les caractéristiques C^+ inclinées positivement issues des points du maillage situés sur la ligne $G'F'$ adjacente à GF (fig. 10).

En supposant ces caractéristiques rectilignes (régime d'onde simple) on obtient leur intersection avec GF. Les grandeurs de l'écoulement restent constantes sur ces caractéristiques : on en déduit, par interpolation, les inconnues aux noeuds du maillage sur GF. L'application de cette technique suppose que GF est assez loin de l'obstacle pour que les effets dissipatifs y soient négligeables.

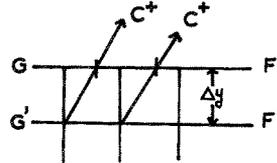


Figure 10

Enfin, la frontière comporte éventuellement des axes de symétrie tels que HA, DE sur lesquels l'écriture de conditions de symétrie ne pose pas de problèmes.

6 - TRAITEMENT DES CHOCS

Tant que le nombre de Reynolds est assez faible pour que le choc ait une structure représentable à l'échelle du maillage, tous les schémas proposés permettront d'obtenir la structure de cette couche de choc. En fait, lorsque le nombre de Reynolds croît, l'épaisseur du choc devient très petite par rapport aux échelles des gradients de l'écoulement et l'on ne s'intéresse pas, en général à la structure réelle de l'onde de choc. Sur le plan numérique, les problèmes posés alors par la présence de chocs sont les mêmes qu'en fluide parfait.

Dans le cas de la dynamique des gaz non dissipatifs on dispose de deux types de méthodes qui ont chacun leurs avantages et leurs inconvénients : le "shock-capturing" et le "shock-fitting".

Les méthodes de "shock-capturing" sont basées sur une discrétisation des équations mises sous forme conservative [50] et le choc se calcule comme un point courant. L'immense avantage de cette méthode est de ne pas obliger à faire de traitement particulier pour le choc ; par contre, ce dernier n'est plus une discontinuité (toujours dans le cas d'un fluide non dissipatif), il est étalé sur 2 à 3 points de discrétisation et il apparaît souvent des oscillations parasites derrière le choc [52], [53].

Les schémas (27), (30) et (32) sont des extensions directes au cas des fluides visqueux de schémas éprouvés en dynamique des gaz non dissipatifs.

Toujours dans cette catégorie d'algorithmes qui traitent les points chocs comme des points courants il faut citer les méthodes de viscosité artificielle du type Von Neumann - Richtmyer, par exemple la méthode de Rusanov [52] étendue au cas visqueux en [24] et [28].

Le procédé de "shock-fitting" est basé sur un traitement particulier du choc, considéré comme une ligne de discontinuité. Il faut alors introduire une inconnue supplémentaire qui est l'équation du choc. La vitesse du choc ainsi que les sauts à travers celui-ci sont déterminés grâce aux relations de Rankine - Hugoniot et à une équation supplémentaire obtenue à partir des équations du mouvement, par exemple une relation de compatibilité le long d'une caractéristique convenablement choisie [37], [53], [54].

L'avantage d'une telle méthode est évidemment de donner des chocs qui sont réellement des discontinuités et d'éviter l'apparition d'oscillations parasites. Mais le procédé est difficile à appliquer en toute généralité.

Ce procédé pourrait être utilisé même dans le cas où la dissipation n'est pas assez

faible pour qu'on puisse assimiler la couche de choc à une discontinuité. Il faudrait alors considérer des relations de Rankine-Hugoniot modifiées pour tenir compte de la structure du choc [55].

7 - PRECISION ET TEMPS DE CALCUL

Pour terminer cet exposé, il convient de dire quelques mots des problèmes techniques de précision et de temps de calcul, problèmes liés à la puissance et à la rapidité des ordinateurs.

Les calculs d'écoulements de fluide visqueux compressible sont coûteux en temps machine pour plusieurs raisons : nombre et complexité algébrique des équations, convergence vers l'état stationnaire d'autant plus lente que le nombre de Reynolds est grand, existence de zones à forts gradients dont la représentation nécessite un maillage très fin...

Dans le cas des grands nombres de Reynolds, s'il n'est pas nécessaire de chercher à calculer la structure exacte du choc, par contre il est indispensable que l'écoulement dans la couche limite au voisinage d'une paroi soit correctement représenté. Il faut alors raffiner fortement le maillage dans cette zone, ce qui peut entraîner des difficultés compte tenu de l'épaisseur (de l'ordre de $Re^{-1/2}$) de cette couche limite. En fait, il est nécessaire de diminuer le pas d'espace seulement dans la direction transversale à la couche limite. Pour pallier aux inconvénients liés à la disparité des pas d'espace (le pas de temps Δt est déterminé par le plus petit des pas d'espace), une méthode à pas fractionnaires a été proposée en [25].

Parmi les méthodes couramment employées pour tenter de résoudre ces difficultés on peut citer :

- (a) Transformations de coordonnées choisies de façon qu'à des points équidistants dans le plan de calcul correspondent, dans le plan physique, des points très rapprochés dans les zones à forts gradients et relativement espacés ailleurs.
- (b) Calculs par étapes successives (dans le temps) avec des maillages de plus en plus fins.
- (c) Division du domaine de calcul en régions de maillages différents ; il convient dans ce cas d'effectuer des raccordements aux frontières.

Ces difficultés font que les applications traitées jusqu'ici sont, comme on l'a vu, limitées à des écoulements bidimensionnels et à des géométries relativement simples. Les progrès auxquels on peut s'attendre en ce qui concerne les ordinateurs permettront d'une part de rendre de telles applications beaucoup plus courantes et d'autre part de mettre en oeuvre les méthodes de résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour des écoulements tridimensionnels et dans des configurations géométriques plus complexes.

Remerciements : les auteurs tiennent à remercier J.F. Sageau dont l'aide pour les applications numériques présentées sur les figures 2 à 4 leur a été très précieuse.

R E F E R E N C E S

- [1] GUIRAUD J.P. - XIII Int. Congress of Theor. and Appl. Mech. - Moscou, U.R.S.S. (21 - 26 Août 1972).
- [2] KOGAN M.N. - Annual Review of Fluid Mech. - vol. 5, 383 - 404 (1973).
- [3] SCHAAF S.A. - Handbuch der Physik - vol. VIII/2, 591 - 624 (1963).
- [4] TALBOT L. - ARS J. 32, 1009 - 1016 (1962).
- [5] TANNEHILL J.C., MOHLING R.A. and RAKICH J.V. - AIAA paper n° 73-200 (1973).
- [6] LAUNDER B.E. and SPALDING D.B. - Mathematical Models of Turbulence - Academic Press (1972).
- [7] KIRKPATRICK J.R. and WALKER W.F. - J. of Comput. Phys. - 10, 185 - 201 (1972).
- [8] FILLER L. and LUDLOFF H. - Math. of Comput. - 15, 261 - 274 (1961).
- [9] CROCCO L. - AIAA J. - 10, 1824 - 1837 (1965).
- [10] SCALA S.M. and GORDON P. - Phys. of Fluids - 9, 1158 - 1166 (1966).
- [11] POLEZHAEV V.I. - Fluid Dynamics - 1, 21 - 27 (1966).
- [12] RUBIN E.L. and BURSTEIN S.Z. - J. Comput. Phys. - 2, 172 - 196 (1967).
- [13] TAYLOR T.D. - Computers and Fluids - 1, 3 - 18 (1972).
- [14] CHENG S.I. - AIAA J. - 8, 2115 - 2122 (1970).
- [15] WIRZ H.J. and SMOLDEREN J.J. - AGARD Lecture Series N° 64 (1964).
- [16] ROACHE P.J. - Computational Fluid Dynamics- Hermosa Publ. Albuquerque (1972).
- [17] BRAILOVSKAYA I. Yu. - Soviet. Phys. Dokl. - 10, 107 - 110 (1965).
- [18] POLEZHAEV V.I. - Fluid Dynamics - 2, 70 - 74 (1967).
- [19] THOMEN H.U. - Z.A.M.P. - 17, 369 - 384 -(1966).
- [20] KURZROCK J.W. and MATES R.E. - AIAA paper - n° 66 - 30 (1966).
- [21] BUTLER T.D. - Phys. of Fluids - 10, 1205 - 1215 (1967).
- [22] TRULIO J.G., WALITT L. and NILES W.J. - NASA CR - 1466 (Fév. 1970).
- [23] CHENG S.I. and CHEN J.H. - Lecture Notes in Phys. - 18, 92 - 99 (1973).
- [24] SKOGLUND V.J., COLE J.K. and STAIANO E.F. - Sandia Lab. report - SC-CR-67-2679 (Août 1967) ; voir aussi Proc. 1968 Heat Transfer and Fluid Mech Inst. - 152 - 173, Stanford Univ. Press (1968).
- [25] MAC CORMACK R.W. - Lecture notes in Phys. - 8, 151 - 163 (1971).
- [26] BRAILOVSKAYA I.Yu. - Fluid Dynamics - 2, 49 - 55 (1967).
- [27] CARTER J.E. - Lecture Notes in Phys. - 19, 69 - 78 (1973).

- [28] GOODRICH W.D., LAMB J.P. and BERTIN J.J. - ASME, paper - n° 72 - FE - 7 (1972).
- [29] MICHENKOV V.M. - Proc. 1st Conf. Numer. Meth. Fluid Dynamics, Novossibirsk 1969, vol. 1, 67 - 82.
- [30] ALLEN J.S. and CHENG S.I. - Phys. of Fluids - 13, 37 - 52 (1970).
- [31] ROACHE P.J. and MUELLER T.J. - AIAA J. - 8, 530 - 538 (1970).
- [32] ROACHE P.J. - Ph. D. Thesis - Univ. Notre-Dame, Indiana, 1968.
- [33] ROSS B.B. and CHENG S.I. - Lecture Notes in Phys. - 8, 164-169 (1971).
- [34] BRAILOVSKAYA I.Yu., - Soviet Phys. Dokl. - 16, 197 - 199 (1971).
- [35] ROSS B.B. and CHENG S.I. - AIAA paper - N° 72 - 115 (1972).
- [36] PALUMBO D.J. and RUBIN E.L. - J. Comput. Phys. - 9, 466 - 495 (1972).
- [37] MORETTI G. and SALAS M.D. - AIAA paper - N° 69 - 130 (1969).
- [38] PEYRET R. et VIVIAND H. - La Recherche Aérospatiale - 1972,3, 123 - 131 (1972).
- [39] SCALA S.M. and GORDON P. - AIAA J. - 6, 815-822 (1968).
- [40] SCALA S.M. and GORDON P. - Proc. 1969 Symp. Viscous Interaction Phenom. Supers. Hypers. Flow, Univ. of Dayton Press - 319-392 (1970).
- [41] KITCHENS C.W.Jr., - Lecture Notes in Phys. - 18, 120-129 (1973).
- [42] PEYRET R. et VIVIAND H. - Lecture Notes in Phys. - 19, 222 - 229 (1973).
- [43] MOLODYZOV V.K. - USSR Comput. Math. and math. Phys. - 9, 320 - 329 (1969)
- [44] MOLODYZOV V.K. and TOLSTYKH A.I. - Proc. 1st Conf. Numer. Meth. Fluid Dynamics, Novossibirsk 1969 - vol. 1, 37 - 54.
- [45] PAVLOV B.M. - ibid. p. 55 - 66.
- [46] VICTORIA K.J. and WIDHOPF G.F. - Lecture Notes in Phys. - 19, 254 - 267 (1973).
- [47] MAGNUS R.J. and GALLAHER W.H. - AGARD Conf. Proc. N° 60, 30 - 33 (1967, publ. 1970)
- [48] PAVLOV B.M. - Fluid Dynamics - 3, 88 - 90 (1968).
- [49] THOMMEN H.U. and MAGNUS R.J. - AGARD Conf. Proc. n° 4 - 181 - 205, 1966.
- [50] LADEVEZE J. et PEYRET R. - J. Mécanique (à paraître).
- [51] LAX P.D. - Comm. Pure Appl. Math. - 7, 159 - 193 (1954).
- [52] RUSANOV V.V., - Zh. Vych. Mat. i mat. Fiz. - 1, 304 - 320 (1961).
- [53] MORETTI G. and ABBETT M. - AIAA J. - 4, 2136 - 2141 (1966).
- [54] MORETTI G. and PANDOLFI M. - Computers and Fluids - 1, 19 - 36 (1973).

- [55] GERMAIN P. et GUIRAUD J.P. - J. Math. Pures Appl. - 45, 311 - 358 (1966).
- [56] TRULIO J.G., WALITT L. and LIU C.Y. - Proc. 1969, Symp. Viscous Interaction Phenom. Supers. Hypers. Flow - Univ. of Dayton, 393 - 425 (1970).