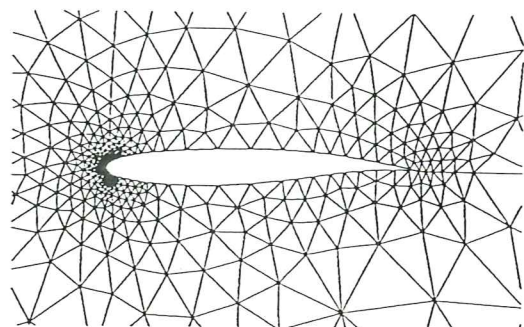
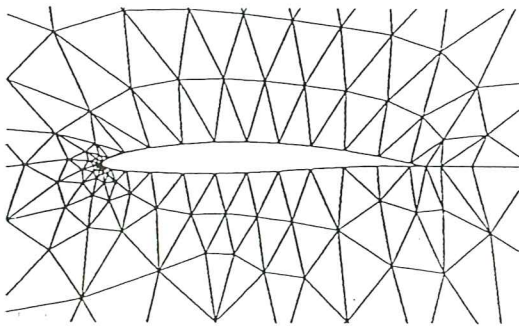


# Utilisation de Maillages Adaptatifs Dans un Processus d'optimisation de Formes en Aérodynamique

G. Bugeda

D. Joannas

E. Oñate



# **Utilisation de Maillages Adaptatifs Dans un Processus d'optimisation de Formes en Aérodynamique**

**G. Bugeda  
D. Joannas  
E. Oñate**

**Publicación CIMNE Nº 34, Mayo 1993**

**Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería  
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España**

# Utilisation de maillages adaptatifs dans un processus d'optimisation de formes en aérodynamique

G. BUGEDA, D. JOANNAS, E. ONATE

*CIMNE*

*Modulo c1 campus norte U.P.C., Gran Capitan S/N - 08034 Barcelone (Espagne)*

April 29, 1993

## 1 Introduction

L'objet de ce rapport est de présenter l'approche choisie par le CIMNE afin d'optimiser des formes, dans le cadre des équations du potentiel incompressible portant. Plus précisément, nous nous intéresserons ici à étudier l'influence de la partie " maillage adaptatif " sur la convergence globale d'un problème d'optimisation de formes.

Les formes à optimiser sont des profils d'ailes d'avions (dimension 2). L'approche retenue utilise une paramétrisation des formes considérées par des B-splines. Chaque domaine de calcul est alors discrétisé à l'aide d'un algorithme de maillage classique appelé méthode frontale avancée. Afin de définir à l'avance la taille des éléments de la future triangulation et dans un soucis d'adaptation du maillage, on utilise un estimateur d'erreur pour la solution des équations du potentiel incompressible (c'est l'influence de la précision requise pour cet estimateur, sur la convergence globale du processus, que nous étudierons). Enfin, on écrit le problème de reconstruction sous la forme d'un problème de minimisation, résolu par une méthode de quasi-Newton où le gradient de la fonctionnelle à minimiser est calculé exactement.

## 2 Les équations d'état

On cherche  $\alpha$  et  $\Phi$  qui vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta\Phi = 0 \text{ dans } \Omega - \Sigma, \\ \Phi|_{\Sigma^+} - \Phi|_{\Sigma^-} = \alpha, \\ \|\nabla\Phi(P^+)\|^2 = \|\nabla\Phi(P^-)\|^2, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n}|_{\partial\Omega} = g, \\ \Phi(P) = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

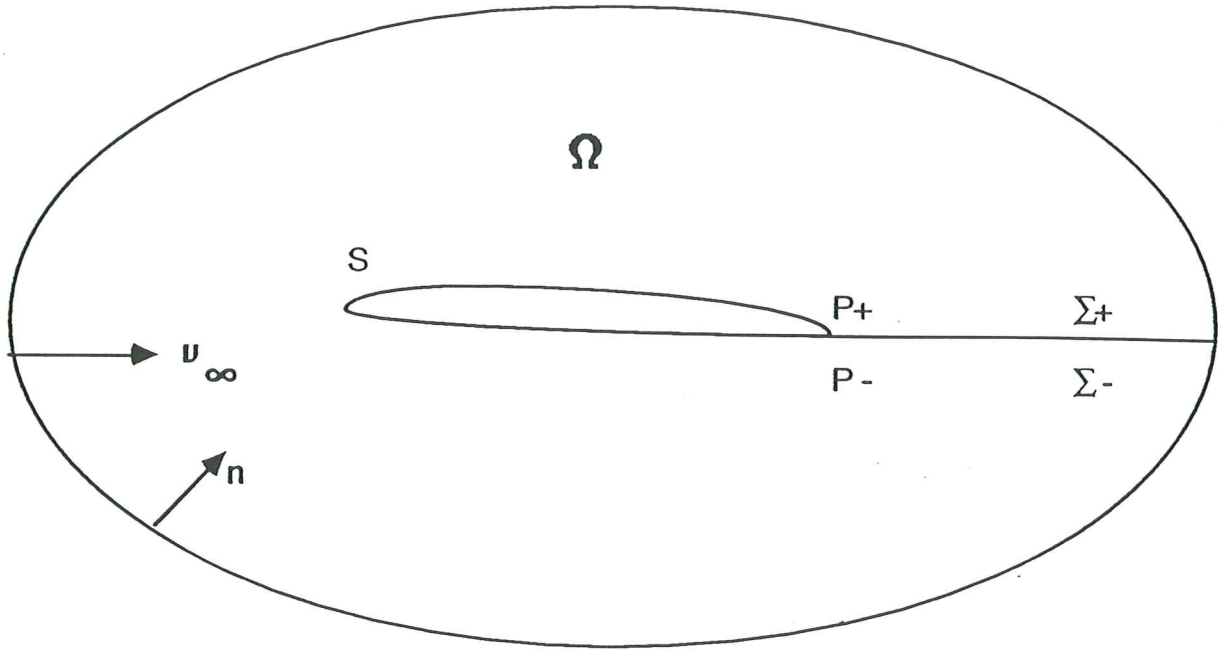


Figure 1: Définition de  $\Omega$  et de  $\Sigma$

où

$$\begin{cases} g = u_\infty \cdot n \text{ sur } \Gamma_\infty, \\ g = 0 \text{ sur } S. \end{cases} \quad (2)$$

**Remarque :**

L'équation  $\|\nabla\Phi(P^+)\|^2 = \|\nabla\Phi(P^-)\|^2$  qui traduit l'égalité des pressions en  $P$  est appelée "équation de Joukowski".

**Méthode de résolution :**

Pour résoudre le système (1) on procède de la façon suivante :

- on résoud un "potentiel continu" :

On cherche  $\Phi_0$  qui vérifie :

$$\begin{cases} -\Delta\Phi_0 = 0 \text{ dans } \Omega - \Sigma, \\ \Phi_0|_{\Sigma^+} - \Phi_0|_{\Sigma^-} = 0, \\ \frac{\partial\Phi_0}{\partial n^+}|_{\Sigma^+} + \frac{\partial\Phi_0}{\partial n^-}|_{\Sigma^-} = 0, \\ \frac{\partial\Phi_0}{\partial n}|_{\partial\Omega} = g, \\ \Phi_0(P) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

avec  $g$  défini dans (2).

- on résoud un “ potentiel discontinu avec saut unité ” :  
On cherche  $\Phi_1$  qui vérifie :

$$\begin{cases} -\Delta\Phi_1 = 0 \text{ dans } \Omega - \Sigma_1, \\ \Phi_1|_{\Sigma_1^+} - \Phi_1|_{\Sigma_1^-} = 1, \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n^+}|_{\Sigma_1^+} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial n^-}|_{\Sigma_1^-} = 0, \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \\ \Phi_1(P) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

$(\alpha, \Phi)$  solution de (1) peut alors s'écrire :

$$\Phi = \Phi_0 + \alpha\Phi_1, \quad (5)$$

avec  $\Phi_0$  solution de (3),  $\Phi_1$  solution de (4) et  $\alpha$  tel qu'il vérifie l'équation de Joukowski.  
Pour trouver  $\alpha$  on cherche un zéro de la fonction

$$F(\alpha) = \|\nabla\Phi(P^+)\|^2 - \|\nabla\Phi(P^-)\|^2,$$

à l'aide d'un algorithme de Newton initialisé par  $\alpha^0 = 0$ .

Ces équations seront résolues, après avoir été mises sous leur forme faible (voir [D. JOANNAS 1992]), à l'aide d'une méthode d'éléments finis pour des maillages non structurés.

### 3 Paramétrisation

La forme considérée sera paramétrisée par une courbe B-spline. Soient  $(M_i)_{i=0\dots n-1}$  les points de contrôle de cette courbe B-spline, on aura :

$$S(t) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i B_{i,3}(t), \quad (6)$$

où  $(B_{i,3})_i$  sont des fonctions B-splines cubiques (cf [J.J. RISLER 1991]).

Les variables de contrôle du problème de reconstruction seront alors soit les coordonnées des points  $(M_i)_i$  définis plus haut, soit celles de points de la forme par lesquels passeront les courbes B-spline.

### 4 Remaillage

L'algorithme de remaillage utilisé est une méthode de génération de maillage dite “méthode frontale avancée”, qui construit des “fronts de points” successifs à partir d'une discrétisation des frontières du domaine considéré, jusqu'à l'obtention d'une triangulation complète de ce domaine. Cet algorithme se sert d'un “premier maillage”, qui peut être grossier et ne pas bien prendre en compte les frontières. A chaque élément de ce maillage on associe une taille arbitraire qui, une fois interpolée, permettra de raffiner plus ou moins la triangulation partout dans le domaine.

Dans le processus de reconstruction, et pour un domaine correspondant à l'itéré numéro  $n$ , le “premier maillage” est celui généré à l'itération  $n-1$ , modifié après prise en compte du nouveau profil considéré. De même, les tailles qui lui sont associées sont calculées à

partir d'une estimation de l'erreur commise sur la solution des équations d'état obtenue à l'itération  $n - 1$ .

Cette méthode permet donc de mailler les domaines successifs, en adaptant les triangulations correspondantes afin d'obtenir une bonne précision lors de la résolution des équations d'état.

On pourra trouver le détail de cette méthode dans [G. BUGEDA, E. ONATE, J. MIQUEL 1991].

## 5 L'estimation d'erreur pour les équations d'état

L'erreur commise sur  $\Phi$ , solution des équations d'état, va être approximée par un estimateur d'erreur dû à Zienkiewicz et Zhu que nous allons décrire.

### Notations

On rappelle que  $\Omega$  est le domaine sur lequel s'effectue le calcul.

Soit  $\hat{\Phi}$  l'approximation de  $\Phi$  par une méthode d'éléments finis.

On pose :

$$e = \Phi - \hat{\Phi}, \quad (7)$$

$$v = \nabla\Phi \text{ et } \hat{v} = \nabla\hat{\Phi}. \quad (8)$$

Soit  $N$  le vecteur composé des fonctions de base de l'élément fini.

Soit  $B$  la matrice des dérivées partielles de ces fonctions de base.

On peut alors écrire :

$$\hat{\Phi} = Na, \quad (9)$$

et

$$\hat{v} = B\hat{\Phi}. \quad (10)$$

On va s'attacher à approximer la norme de  $e$  définie par :

$$\|e\|^2 = \int_{\Omega} eB^t B e \, d\Omega, \quad (11)$$

qu'on peut aussi écrire :

$$\|e\|^2 = \int_{\Omega} (v - \hat{v})^t (v - \hat{v}) \, d\Omega, \quad (12)$$

Dans cette dernière expression, Zienkiewicz et Zhu suggèrent de remplacer  $v$  par  $v^*$  défini comme suit :

$$\begin{cases} v^* = N^t \bar{v}, \\ \bar{v} = M^{-1} q, \\ M = \int_{\Omega} N N^t \, d\Omega, \\ q = \int_{\Omega} N \hat{v}^t \, d\Omega, \end{cases} \quad (13)$$

si bien qu'il est possible de calculer une estimation de l'erreur pour chaque triangle  $T$  de la triangulation de  $\Omega$  notée  $\epsilon_T$  avec

$$\epsilon_T^2 = \int_T (v^* - \hat{v})^t (v^* - \hat{v}) \, d\Omega, \quad (14)$$

Lorsque dans la section “ résultats ”, on voudra une **précision relative** de  $x$  pour cent sur la solution des équations d'état, on voudra en fait vérifier la relation :

$$\frac{\|e\|^2}{\|e\|^2 + \|\hat{\Phi}\|^2} < \left(\frac{x}{100}\right)^2 \quad (15)$$

Puis lors du remaillage, les tailles requises pour chaque élément de la triangulation seront calculées de sorte qu'on ait pour chaque triangle  $T$  :

$$\frac{\epsilon_T^2}{T} = cste \quad (16)$$

## 6 Calcul du gradient

Le problème de reconstruction d'un profil peut s'écrire sous la forme d'un problème de minimisation : soit  $s$  le vecteur de dimension  $N$  des variables de contrôle, on cherche  $s$  qui vérifie le

$$\min_{s \in \mathbb{R}^N} J(s), \quad (17)$$

avec

$$J(s) = \|Cp - Cp^{obj}\|^2, \quad (18)$$

où les  $Cp$  sont les coefficients de pressions sur le profil paramétrisé par  $s$  et  $Cp^{obj}$  ceux correspondant au profil objectif.

### Remarque :

pour un écoulement potentiel incompressible on a :

$$Cp = \frac{\|u_\infty\|^2 - \|u\|^2}{\|u_\infty\|^2} \quad (19)$$

Le calcul du gradient de la fonctionnelle  $J(s)$  va faire intervenir les dérivées des points formant le profil par rapport aux points de contrôle d'une B-spline, qu'on obtiendra analytiquement dans le cas général. De même, on obtiendra les dérivées des points du maillage par rapport aux points du profil en utilisant les formules “ pseudo analytiques ” données par l'algorithme de remaillage. Enfin, grâce aux dérivées précédentes, on pourra calculer celles des  $(\hat{\Phi}_i)_{i=0,1}$  par rapport à  $s$  ; par définition de  $\hat{\Phi}_i$  et pour tout  $i$  on a :

$$\frac{\partial \hat{\Phi}_i}{\partial s} = N \frac{\partial a_i}{\partial s}. \quad (20)$$

Or,  $a_i$  est solution du système linéaire

$$K a_i = f_i, \quad (21)$$

si bien que

$$\frac{\partial a_i}{\partial s} = K^{-1} \left( \frac{\partial f_i}{\partial s} - \frac{\partial K}{\partial s} a \right). \quad (22)$$

Ainsi, on a  $N$  systèmes linéaires à résoudre afin d'obtenir toutes les dérivées partielles de  $\hat{\Phi}_i$ . Cependant, en factorisant une fois pour toutes la matrice  $K$  (factorisation LDU), cela revient à ne faire que  $N$  “ descentes-remontées ”.

## 7 Algorithme de quasi-Newton

Afin de résoudre le problème (17) on utilisera une méthode de quasi-Newton. L'algorithme présenté est l'algorithme BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno).

**Notations :**

$J : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonctionnelle à minimiser.

$(B_i)_i$  sont des matrices qui approcheront le hessien de  $J$  au cours des itérations de la méthode.

Si on cherche  $\bar{x}$  qui réalise le minimum de  $J$ , l'algorithme BFGS s'écrit de la façon suivante :

Choisir  $x_0$  (première estimation de  $\bar{x}$ ),  
calculer  $g_0$  le gradient de  $J$  en  $x_0$ ,  
 $B_0 \leftarrow I$  ( $I$  : matrice identité dans  $\mathbb{R}^N$ ),  
 $d_0 \leftarrow -g_0$ ,  
 $n \leftarrow 0$ .

Répéter :

$$\left[ \begin{array}{l} \text{trouver } \rho_n \text{ qui réalise le } \min_{\rho \in \mathbb{R}^+} J(x_n + \rho d_n), \\ x_{n+1} \leftarrow x_n + \rho_n d_n, \\ \text{calculer } g_{n+1} \text{ (le gradient de } J \text{ en } x_{n+1}), \\ \\ B_{n+1} \leftarrow B_n + \frac{1}{(g_n, d_n)} g_n g_n^t + \frac{1}{\rho_n (g_{n+1} - g_n, d_n)} (g_{n+1} - g_n)(g_{n+1} - g_n)^t \\ \\ d_{n+1} \leftarrow -B_{n+1}^{-1} g_{n+1}, \\ n \leftarrow n + 1, \\ \text{Test de convergence.} \end{array} \right. \quad (23)$$

## 8 Résultats

On a voulu étudier l'influence de deux paramètres sur la convergence d'un problème d'optimisation de formes :

- la précision requise sur la solution des équations d'état.
- le choix de l'élément fini : élément fini P1 ou P2.

Pour effectuer cette étude, on a choisi de comparer les courbes de convergence obtenues en résolvant le cas-test T4 du workshop organisé à la fin du projet BRITE EURAM AREA5 (contrat numéro AERO-0026C, proposal 1082). Ce cas-test consiste à reconstruire un profil KORN à partir d'un profil NACA64A410.

Soient  $F$  la fonction coût considérée,  $C_p(S)$  la distribution des coefficients de pression calculée autour du profil  $S$  et  $C_p^{obj}$  la distribution des coefficients de pression autour du profil objectif (le profil KORN), on a :

$$F(S) = \int_S (C_p(S) - C_p^{obj})^2 dS \quad (24)$$

Dans la figure 2 on présente les résultats obtenus pour différentes précisions (exprimées en pourcentage) sur la solution des équations d'état résolues en utilisant l'élément fini P2



ELEMENTS DE 6 NOEUDS ; DIFFERENTES PRECISIONS

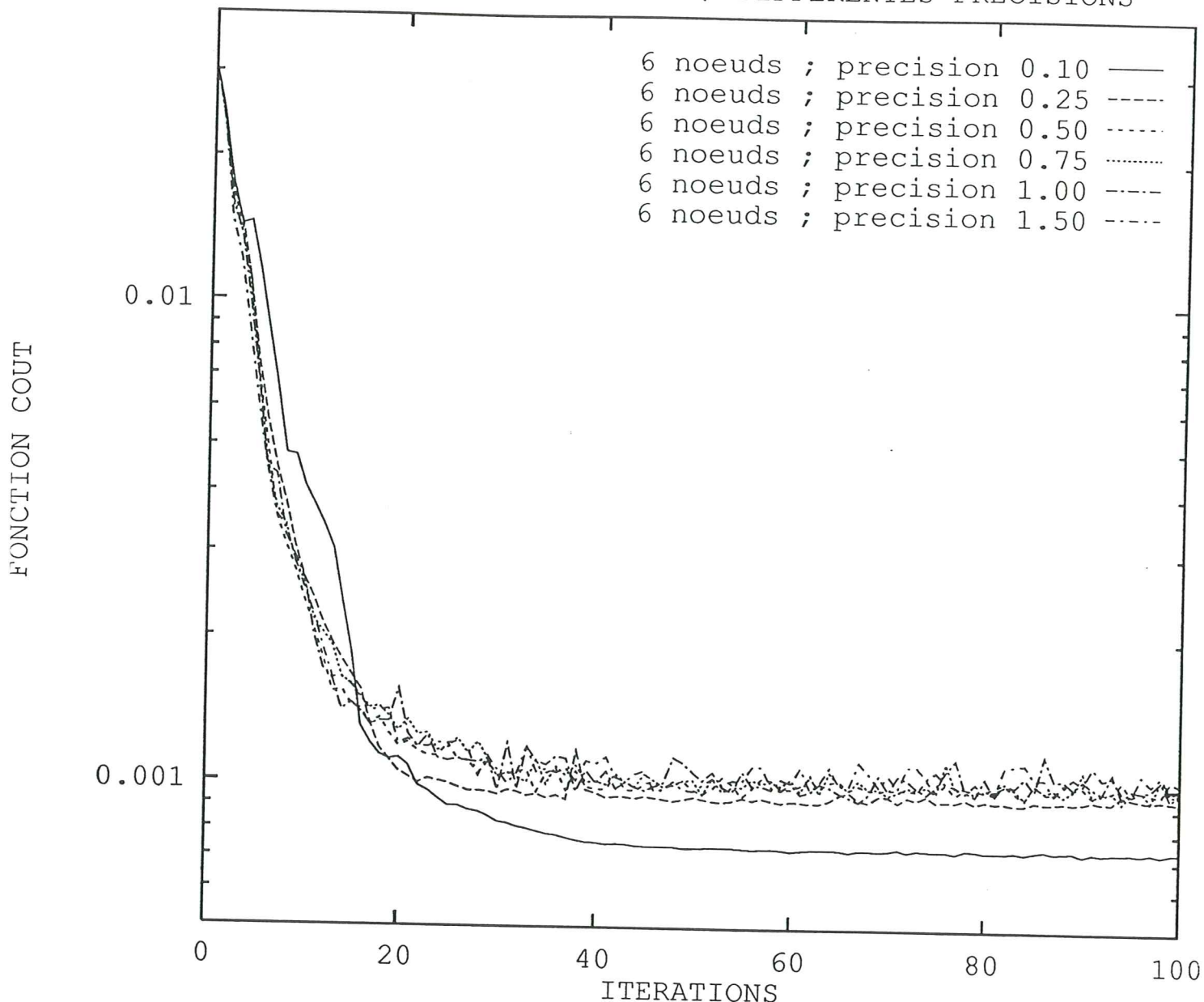


Figure 2: Courbes de convergence ; Eléments de 6 noeuds

(triangles avec 6 noeuds, fonctions de base quadratiques).

Dans la figure 3, on présente le temps de calcul nécessaire (sur une station de travail **Silicon Graphics INDIGO R-4000** qui possède 48 Mbytes de mémoire vive) pour effectuer 100 itérations de l'algorithme (BFGS) en considérant différentes précisions. On peut constater, en tenant compte des courbes de convergences de la figure 2, que pour accroître de manière significative la convergence du processus d'optimisation de formes on doit supporter un temps de calcul qui devient vite prohibitif. A contrario, on peut obtenir très rapidement (1 heure) une solution de relativement bonne qualité, en utilisant des précisions de l'ordre de 1 pour cent. On pourrait donc repartir d'une telle solution, en recommençant le processus avec une plus grande précision sur les équations d'état et minimiser ainsi la durée totale d'un processus d'optimisation de formes.

Dans la figure 4, on fait apparaître le nombre d'éléments générés à chaque itération

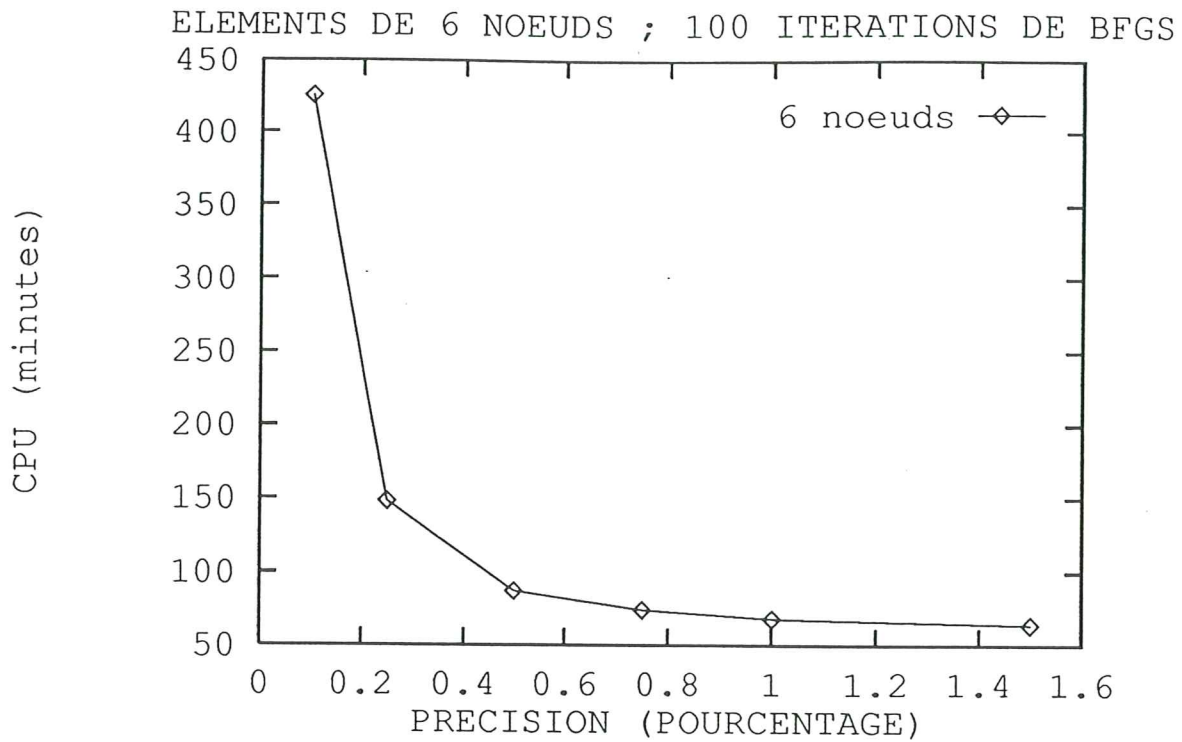


Figure 3: Temps de calcul ; 6 noeuds ; différentes précisions

du processus, en considérant différentes précisions. On voit alors immédiatement la corrélation qu'il y a entre la précision requise sur les équations d'état et le nombre d'éléments générés à chaque itération, ce qui explique les temps de calcul obtenus dans la figure 3.

Enfin, dans la figure 5, on présente la comparaison entre une résolution utilisant l'élément fini P2 et 3 approches utilisant l'élément fini P1 (triangles munis de 3 noeuds ; fonctions de base linéaires) mais différentes précisions sur les équations d'état.

On espérait pouvoir utiliser cet élément fini avec des précisions plus grandes que pour l'élément fini P2 et ainsi diminuer le coût du processus d'optimisation de formes. Mais, pour une précision de 2 pour cent, 100 itérations nécessitent 3h20 de calcul pour une "convergence" médiocre à comparer aux 2h43 nécessaires lorsqu'on utilise l'élément fini P2 et une précision de 0.25 pour cent.

On peut quand même constater que le logiciel a, pour l'instant, un problème de convergence lorsqu'on utilise l'élément fini P1, qu'on s'attachera à résoudre dans un futur proche.

Pour avoir une idée des profils obtenus après une reconstruction, on présente dans la figure 6 le profil initial (NACA64A410) et final (reconstruction d'un profil KORN) de notre processus avec les maillages correspondants. Ce résultat a été obtenu en utilisant un élément fini P2 et une précision relative de 0.1 pour cent.

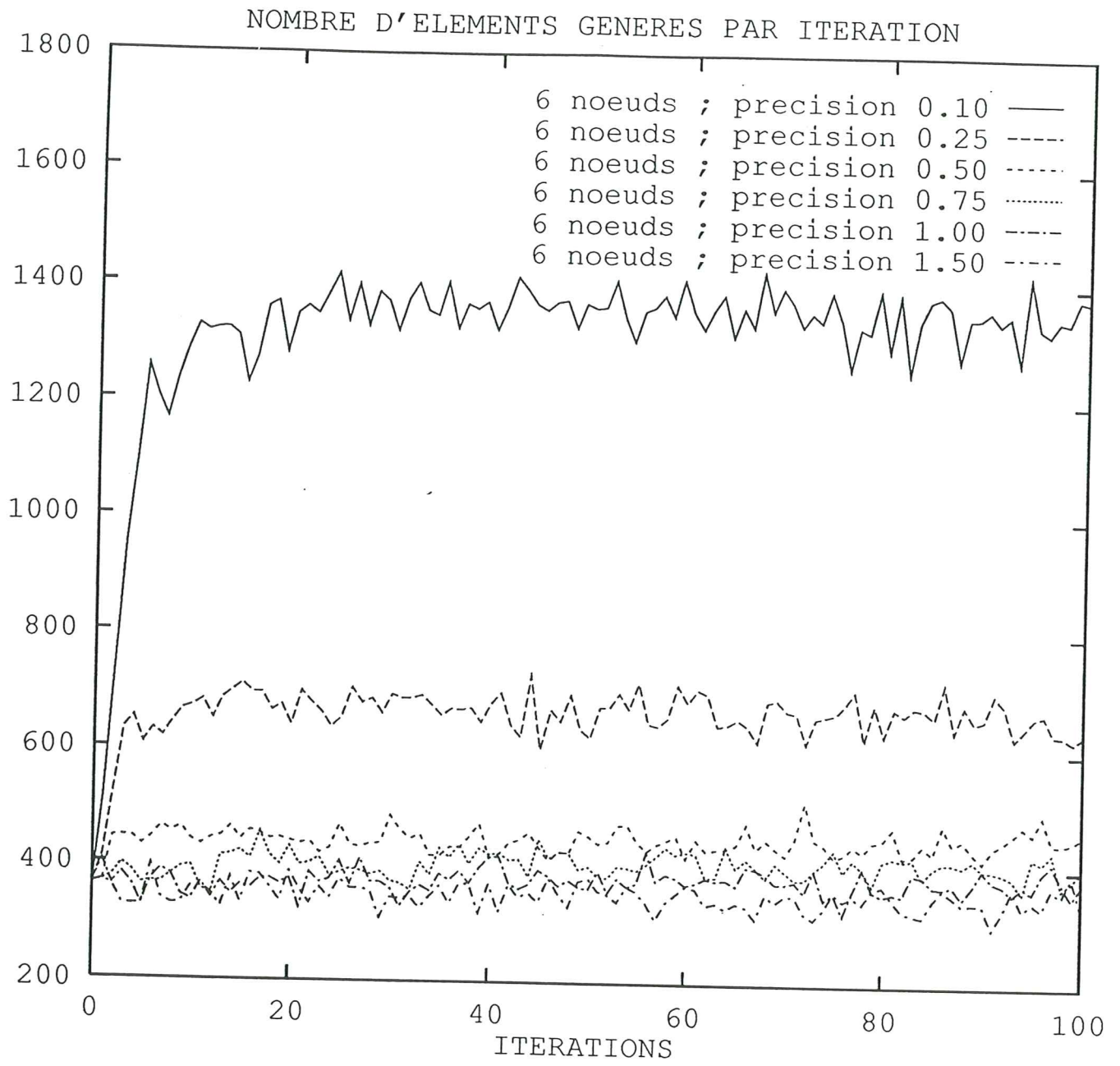


Figure 4: Nombre d'éléments générés ; Eléments de 6 noeuds

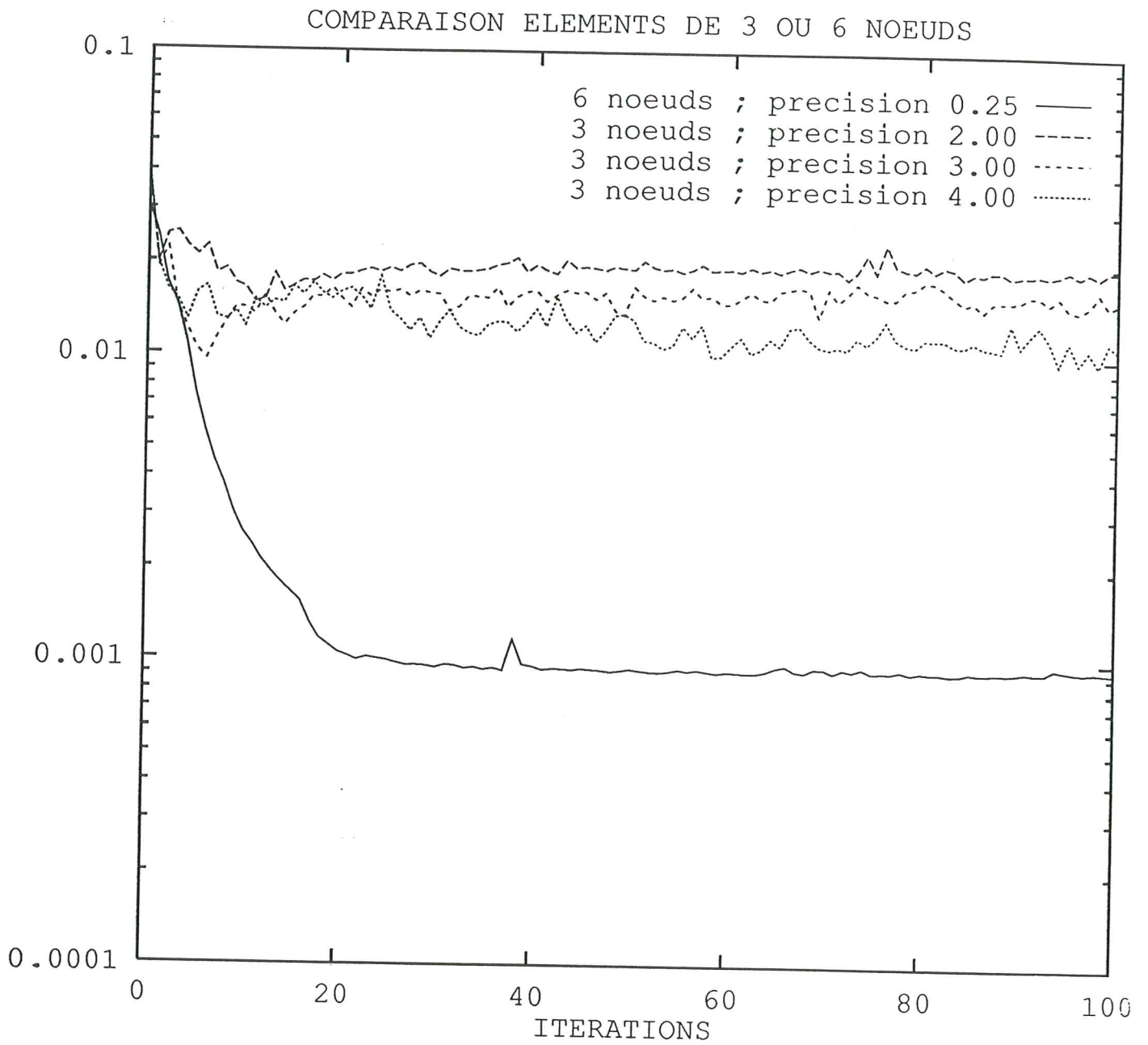


Figure 5: Comparaisons 3 noeuds/6 noeuds

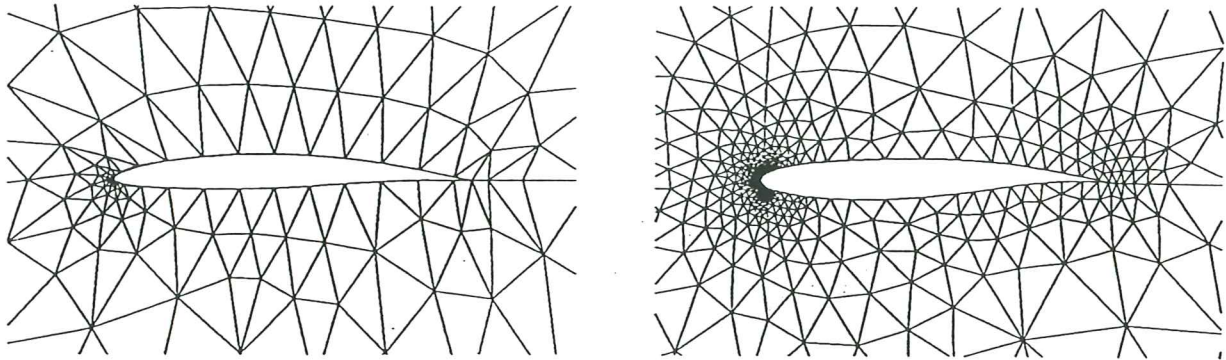


Figure 6: Profil initial NACA64A410 / Profil final, reconstruction d'un KORN

## 9 Conclusions

Grâce à cette étude, on dispose maintenant d'une bonne connaissance des précisions nécessaires à une convergence efficace, des temps de calcul et même de la mémoire requis lors d'un processus d'optimisation de formes. En utilisant notamment une précision relative de 1 pour cent au lieu de 0.1 pour cent (qu'on avait pris l'habitude d'employer), on réduit le temps de calcul d'un facteur 7 lors de la reconstruction d'un profil KORN.

On va donc maintenant être à même de traiter de manière efficace le problème de reconstruction d'un bi-corps. En effet, pour ce problème plus complexe, la mise au point était rendue particulièrement délicate à cause de l'utilisation de trop grandes précisions : les problèmes demandaient plus de mémoire que n'en pouvaient fournir nos stations de travail, si bien qu'on devait exécuter notre programme sur un ordinateur Convex. Il fallait alors une centaine d'heures de calcul pour effectuer une centaine d'itérations de l'algorithme BFGS...

D'autre part, si notre programme a un léger problème lorsqu'on utilise l'élément fini P1, on a cependant pu tester sa bonne robustesse lors des cas de calcul effectués.

## BIBLIOGRAPHIE

- [BUGEDA G., ONATE E., MIQUEL J. 1991]  
BRITE EURAM AREA 5  
Optimum design in aerodynamics  
contract number AERO-0026C, proposal number 1082  
June 90 - June 91  
Mid-Term report
- [GILL P.E., MURRAY W., WRIGHT M.H. 1981]  
Practical optimisation  
Academic press 1981
- [JOANNAS D. 1992]  
Optimisation de formes en aérodynamique  
Thèse de l'Université de Saint-Etienne 1992
- [RISLER J.J. 1991]  
Méthodes mathématiques pour la C.A.O.  
Masson 1991
- [ ZHU J.Z., ZIENKIEWICZ O.C. 1988]  
Adaptive techniques in the finite element method  
Comm. Appl. Numer. Methods, 4, 197-204, 1988
- [ZIENKIEWICZ O.C., ZHU J.Z. 1987]  
A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis  
Int. Num. Meth. Engrg., 24, 337-357, 1987
- [ZIENKIEWICZ O.C., ZHU J.Z., LIU I.C., MORGAN K., PERAIRE J. 1988]  
Error estimates and adaptivity from elasticity to high speed compressible flow  
J.R. Whiteman ed., MAFELAP 87, 483-512, Academic Press, New York, 1988
- [ZIENKIEWICZ O.C., ZHU J.Z., GONG N.G. 1989]  
Effective and practical h-p version adaptive analysis procedures for the finite element method  
Internat. J. Numer. Methods Engrg., 28, 879-891, 1989
- [ZIENKIEWICZ O.C., ZHU J.Z. 1990]  
The three R's of engineering analysis and error estimation and adaptivity  
Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg, 82, 95-113, 1990