Vol. 17, 1, 99–112 (2001)

Revista Internacional de
Métodos Numéricos para
Cálculo y Diseño en Ingeniería

Empleo de elementos junta en el análisis lineal de fractura. Aplicación al estudio de la fractura en modo mixto

Víctor Óscar García Álvarez, Ravindra Gettu e Ignacio Carol

ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona
Jordi Girona 1-3, 08034 Barcelona, España
Tel.: 34-93-401 7354, Fax: 34-93-401 1036
e-mail: Ravindra.Gettu@upc.es

Resumen

En este artículo se va a presentar la aplicación de los elementos junta al análisis de la propagación de la fisura. El estudio se va a limitar a la realización de un análisis lineal de la fractura aplicando la Mecánica Elástica Lineal de Fractura, dejando para futuras publicaciones la exposición de desarrollos no lineales.
En este trabajo, la propagación de la fisura se ha estudiado en vigas a flexotracción por tres puntos con la entalla excéntrica. Esta configuración de ensayo ha sido desarrollada para estudiar la propagación de la fisura en modo mixto (modo I + modo II) a partir de la entalla. En este artículo se analiza si la propagación de la fisura es realmente en modo mixto y cuál es la importancia del modo I y del modo II.

USE OF INTERFACE ELEMENTS IN CRACK LINEAR ANALYSIS. APPLICATION TO LINEAR ANALYSIS OF MIXED MODE CRACKING

Summary

The paper presents an application of interface elements to the study of cracking. The study focusses on the crack analysis through linear elastic fracture mechanics, and future papers will deal with non-linear analyses. Here, crack propagation in three-point bend beams with eccentric notch has been studied. This test set up has been developed for studying crack propagation in mixed mode (mode I + mode II). In this paper, it is analysed whether crack propagation is really in mixed mode and the importance of mode I and mode II is evaluated.

INTRODUCCIÓN

Al estudiar el comportamiento mecánico de un material del tipo del hormigón, la roca o la cerámica, los cuales reciben el nombre de materiales cuasifrágiles, es importante considerar la propagación de las fisuras y defectos existentes en el material. Consecuentemente, el primer paso es la aplicación de la Mecánica Elástica Lineal de Fractura (en inglés, Linear Elastic Fracture Mechanics o LEFM), cuyo campo de aplicación es el estudio de la propagación de las fisuras en los sólidos.

 ISSN: 0213–1315 Recibido: Enero 2000

En este artículo se va a estudiar la aplicación de los elementos junta al análisis lineal de la fractura en modo mixto. Para ello se va a analizar la evolución de los factores de intensidad de tensiones en modo I y en modo II a medida que aumenta la longitud de la fisura empleando, como ya se ha realizado en otros trabajos[1,2]. El presente estudio consiste en un análisis a posteriori, esto es, una vez conocido el camino de la fisura (el cual se obtiene a partir de ensayos), de resultados obtenidos de ensayos de vigas de hormigón y metacrilato realizados a flexotracción mediante la aplicación de una carga central (en inglés three-point bending o TPB). Esta configuración ha sido empleada en diversos trabajo de investigación[3]. Por tanto, es de interés estudiar, como aplicación práctica de este trabajo, si en este tipo de ensayo la fisuración que se produce es en modo mixto.

Para el estudio del modo mixto aplicando la LEFM se pueden emplear diversos métodos, tanto analíticos como numéricos, aunque sólo los casos simples se pueden resolver de forma analítica. Los métodos numéricos se pueden dividir en grandes rasgos en dos grupos que son los modelos de fisura distribuida ("smeared crack models") y los modelos de fisura discreta ("discrete crack models"), cuyas definiciones se pueden consultar en diversos trabajos publicados[4].

La elección de una u otra familia de modelos depende del problema a analizar. Así, en problemas donde normalmente sólo una o un pequeño número de fisuras es analizado (como el análisis aquí considerado), es adecuado emplear un método dentro del grupo de los modelos de fisura discreta. En cambio, cuando se analiza un número grande de fisuras o microfisuras el coste computacional y dificultades numéricas asociadas al remallado pueden ser grandes obstáculos para emplear un modelo de fisura discreta. En este caso se elige un modelo de fisura difusa.

En consecuencia, para la realización del estudio arriba presentado, este trabajo consta de dos partes: propuesta de aplicación de los elementos junta en el análisis lineal de la fractura y estudio de la fisuración de la viga TPB con entalla excéntrica. A su vez, la primera parte del trabajo se divide en dos, que son: un breve repaso de la LEFM y exposición de cómo se emplea en este trabajo el Método de Extensión Virtual de la Fisura en la obtención de la energía de fractura y los factores de intensidad de tensiones en modo I y II.

Análisis de la propagación de fisuración según la Mecánica de Fractura Elástica Lineal

La Mecánica de Fractura Elástica Lineal consiste en estudiar el inicio y la propagación de fisuras suponiendo un comportamiento elástico lineal del sólido. Según este planteamiento, se obtiene un punto singular del campo de tensiones en la punta de la fisura, con todas las componentes infinitas no nulas de las tensiones.

La singularidad imposibilita de aplicación de criterios basados en estados límites de tensión en el análisis de la fisuración. Por lo tanto, los criterios de propagación de fisuras en LEFM se basan en conceptos energéticos en vez de tensionales, siguiendo la propuesta de Griffith en 1920, a partir de los cálculos de Inglis. El criterio básico consiste en que la tasa de energía disipada debido al crecimiento de la fisura G ha de ser igual o mayor que la energía de fractura G_c del material para que la fisura progrese una unidad de área

$$G \leq G_c \tag{1}$$

Posteriormente, Irwin[5] volvió a plantear el problema en términos tensionales a partir del trabajo de Westergaard, definiendo una variable denominada factor de intensidad de tensiones (FIT), cuyo símbolo normalmente es la letra K, la cual es una medida de la concentración de tensiones que se produce en la punta de la fisura. Mediante el desarrollo adecuado se llega a que

$$K^2 = EG \tag{2}$$

para el caso de tensión plana, donde E es el módulo de deformación.

El criterio de Griffith (1) en términos del factor de intensidad de tensiones postula que la fisura se propaga si el FIT es igual o superior al factor de intensidad de tensiones crítico o la tenacidad del material K_c, la cual está relacionada con la energía de fractura G_c mediante la ecuación

$$K_c^2 = EG_c \tag{3}$$

En consecuencia, la expresión del criterio de Griffith en términos del FIT es

$$K \geq K_c \tag{4}$$

En condiciones de desplazamiento constante, G se define como[6]

$$bG = -\left.\frac{dU}{da}\right|_u \tag{5}$$

siendo u el desplazamiento, b el ancho de la probeta, a la longitud de la fisura y U la energía potencial del sistema (energía total en condiciones isoentrópicas).

En condiciones de carga constante, G se define como

$$bG = -\left.\frac{d\prod}{da}\right|_P \tag{6}$$

siendo P la carga aplicada y $\prod$ la energía libre de Gibbs, en el caso de condiciones isotermas o la entalpía en el caso de condiciones isoentrópicas (energía complementaria del sistema estructura-cargas).

Dentro del marco de la LEFM se puede obtener de la literatura un número de soluciones del factor de intensidad de tensiones K para los tres modos básicos de fractura para geometrías o estados de carga sencillos[7]. Si la geometría o el estado de carga es más complicado se ha de recurrir a procedimientos numéricos. Estos procedimientos se pueden clasificar en dos grupos[8] según el método utilizado para obtener el K o G:

- Mediante la distribución de tensiones alrededor de la punta de la fisura[9].
- A partir de consideraciones energéticas globales del cuerpo en estudio, esto es, a partir de la variación de la energía potencial al aumentar la longitud de la fisura[10].

Los procedimientos en el primer grupo presentan el inconveniente que la evaluación del estado de tensiones en la zona próxima a la singularidad está sujeta a los errores de discretización propios del Método de los Elementos Finitos[8], los cuales pueden ser disminuidos por la utilización de mallas refinadas o elementos especiales que tengan en cuenta la singularidad de la punta de la fisura, como el "quarter-point crack tip element"[11].

En este trabajo se ha optado por el segundo grupo, ya que con una malla sencilla y empleando elementos finitos clásicos, para la discretización del continuo, se pueden obtener buenos resultados. En particular, se ha optado por emplear el método de la extensión virtual de la fisura (MEVF), propuesto por Hellen[8]. La forma en que se ha implementado el MEVF consiste en calcular la variación de la energía potencial al incrementar una pequeña cantidad la longitud de la fisura en la dirección de la propagación.

Considerando la Figura 1, en la que se representa la zona, del cuerpo analizado, alrededor de la punta de la fisura (nodo), se puede explicar los pasos del método empleado. Suponiendo que la fisura progresa siguiendo la arista $\overline{m(m+2)}$, se cambian las conectividades de la malla de forma que la arista $\overline{m(m+2)}$ se divide en dos aristas: $\overline{m_i(m+2)}$ y $\overline{m_j(m+2)}$, modificando así la frontera de la malla y desconectando los elementos i y j. A partir del cambio de energía potencial que se produce debido a la progresión de la fisura (de punto m

a $m+2$), se puede obtener G mediante la expresión diferencial mostrada en la ec. (5). Esta ecuación se puede sustituir por la expresión incremental en diferencias centradas

$$G\Big|_{\frac{a_1+a_2}{2}} = \frac{1}{b}\frac{\Delta U}{\Delta a} \tag{7}$$

siendo $\Delta a = a_2 - a_1$, a_2 longitud final de la fisura en un incremento (hasta el punto $m+2$), a_1 longitud inicial de la fisura en el mismo incremento (hasta el punto m), ΔU la variación de energía potencial al incrementarse la longitud de la fisura en Δa.

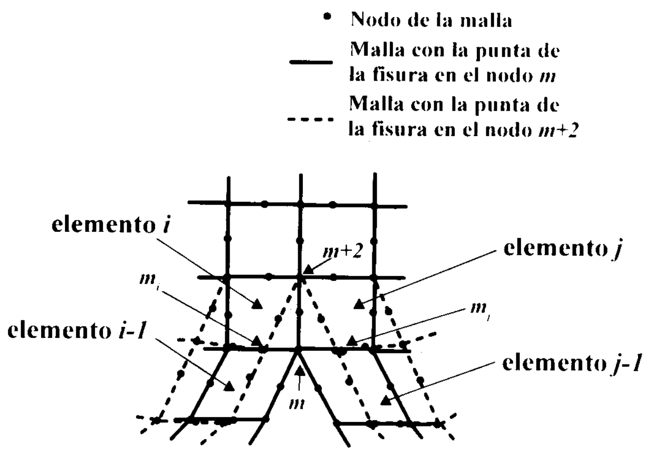

Figura 1. Procedimiento de cálculo implementado

Suponiendo que la propagación de la fisura se provoca mediante la aplicación de una única carga concentrada P, la energía potencial es

$$U = \frac{1}{2}Pu \tag{8}$$

siendo u el desplazamiento del punto de aplicación de la carga. Si durante el proceso de crecimiento de la fisura la carga P se mantiene constante, se llega a que

$$G\Big|_{\frac{a_1+a_2}{2}} = \frac{1}{2b}\frac{U_2 - U_1}{a_2 - a_1} = \frac{1}{2b}\frac{P(u_2 - u_1)}{a_2 - a_1} \tag{9}$$

Para obtener los valores de u_1 y u_2, correspondientes a los desplazamientos del punto de aplicación de la carga para las longitudes de fisura igual a a_1 y a_2, respectivamente, se procede a un cálculo lineal mediante el Método de los Elementos Finitos para cada longitud de fisura.

Análisis del modo mixto de fractura

En el caso de modo mixto de fractura, compuesto por los modos I y II, como en el caso aquí considerado (i.e., problema bidimensional sin torsión), la relación entre G y los FIT en modo I y en modo II se puede expresar como

$$K^2 = EG = K_I^2 + K_{II}^2 \tag{10}$$

Para obtener el valor de K_I y K_{II} a partir del valor de G se necesita otra ecuación, la cual se ha de disponer de un criterio adicional relacionado con la dirección de la propagación de fisura.

En el marco del LEFM se han propuesto principalmente cuatro criterios que permiten estudiar la propagación de fractura en modo mixto. Estos criterios, en un análisis a priori de la fisuración, permiten obtener el ángulo en que se va a propagar la fisura y la energía que se va a disipar, conocidos los FIT en modo I (K_I) y en modo II (K_{II}). En cambio, en un análisis a posteriori, lo que se conoce es la cantidad de energía disipada durante la fisuración y el ángulo en que progresa. De esta forma, aplicando uno de los criterios de propagación de fractura, se podrá obtener los K_I y K_{II}. Los cuatro criterios son:

a) Criterio de la tensión circunferencial máxima

Este criterio establece que la dirección de propagación de la fisura, definida por el ángulo θ entre la dirección previa a la propagación y la nueva, corresponde a la dirección perpendicular a la máxima tensión circunferencial σ_θ [12]

$$K_I \sin\theta + K_{II}(3\cos\theta - 1) = 0 \tag{11}$$

b) Criterio de la densidad mínima de energía de deformación Este criterio establece que la fisura se propaga a lo largo de la dirección en la cual la densidad de energía de deformación es mínima[13]. La función a minimizar es

$$S(\theta) = c_{11}K_I^2 + 2c_{12}K_I K_{II} + c_{22}K_{II}^2 \tag{12}$$

donde

$$c_{11} = \frac{1}{16\mu}(1+\cos\theta)(k-\cos\theta)$$

$$c_{12} = \frac{1}{16\mu}\sin\theta(2\cos\theta - k + 1)$$

$$c_{22} = \frac{1}{16\mu}(1-\cos\theta)(k+1)(1+\cos\theta)(3\cos\theta - 1)$$

siendo μ el módulo de corte, $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ y ν el coeficiente de Poisson.

c) Criterio de la máxima disipación de energía

Este criterio establece que la propagación de la fisura es en la dirección en que la disipación de energía sea máxima y consiste en maximizar la siguiente función[14]

$$G(\theta) = \frac{4}{E}\left(\frac{1}{3}+\cos^2\theta\right)^2 \left[\frac{1-\frac{\theta}{\pi}}{1+\frac{\theta}{\pi}}\right]^{\left(\frac{\theta}{\pi}\right)} [(1+3\cos^2\theta)K_I^2 + 8\sin\theta\cos\theta K_I K_{II} + (9-5\cos^\theta)K_{II}^2] \tag{13}$$

d) Criterio basado en la descomposición de desplazamientos

Este criterio, el cual ya se ha empleado por otros autores[15−17], supone que el cociente entre los FIT de modo I y modo II es igual a la razón entre la apertura de la fisura (COD, del inglés “crack opening displacement”) y el deslizamiento relativo entre las caras de la fisura (CSD, del inglés “crack slip displacement”), expresado mediante la ecuación

$$\frac{COD}{CSD} = \frac{K_I}{K_{II}} \tag{14}$$

Los desplazamientos COD y CSD han de ser medidos lo más próximo posible a la punta de la fisura.

Utilización de elementos junta para el análisis de vigas con entallas

Diversos tipos de ensayos han sido utilizados para estudiar la fisuración en modo mixto en materiales cuasifrágiles, como el hormigón. Entre estas tipologías, la viga TPB con entalla excéntrica (Figura 2) se destaca por la sencillez de configuración. El objeto de disponer que la entalla sea excéntrica es inducir la fisuración no plana, ya que en el ensayo TPB, sólo en el caso de que la fisura no sea plana la fisuración puede ser en modo mixto. En este trabajo se va a analizar si efectivamente se produce la fisuración en modo mixto y cuál es la importancia del modo II en la fisuración. Para ello se van a modelar el comportamiento de probetas ensayadas en el laboratorio, discretizando el camino de fisura (obtenido en los ensayos) mediante elementos junta y empleando un análisis por el método de elementos finitos, suponiendo que el comportamiento sigue la LEFM.

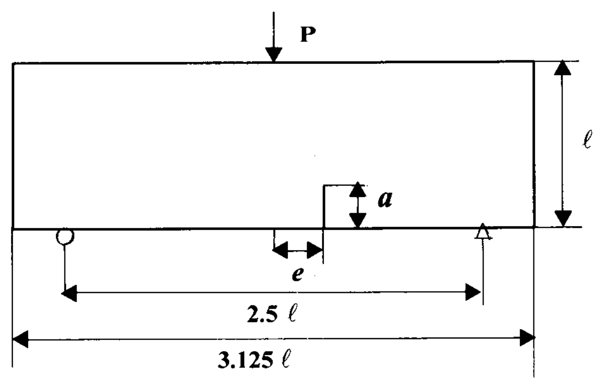

Figura 2. Viga TPB con entalla excéntrica (excentricidad e)

Discretización del medio continuo

Para la discretización del continuo, se han empleado elementos triangulares cuadráticos. Una de las principales cualidades de los elementos triangulares es que sus funciones de forma son polinomios completos, mientras que las funciones de forma de los cuadriláteros tienen términos adicionales[18]. Debido a esta completitud de las funciones se evita la aparición de modos de deformación espurios[19], aunque según Rots[20] este efecto no es importante. Otra ventaja de estos elementos reside en que las técnicas de generación automática de mallas más eficientes (generadores de mallas no estructurados) se comenzaron a desarrollar para estos elementos[21,22].

Discretización de la fisura

Con la metodología aquí empleada hay dos posibles formas de considerar la fisura dentro de la malla de cálculo: suponer que la fisura forma parte de la frontera, lo cual conlleva que cada vez que la fisura se incrementa se han de cambiar las conectividades, o suponer que el camino de la fisura está discretizada por elementos junta o “interface elements”, los cuales, por ser el camino conocido, se insertan en la malla desde el principio. Debido a que el cambiar las conectividades en cada incremento de la fisura aumenta de forma muy importante el tiempo de procesado, se ha optado por discretizar la fisura mediante elementos junta.

Sobre la aplicación de las juntas al estudio de la fisuración de materiales cuasifrágiles existen diversos trabajos en la literatura[2,20,23,24]. El tipo de elemento empleado en el presente análisis es un elemento junta integrado numéricamente[25], de anchura nula, mostrado en la

Figura 3. Los elementos junta son cuadráticos (de seis nodos) debido a la compatibilidad con los elementos de continuo que los rodean. Un detalle importante de este tipo de elementos es el esquema de integración que se emplea. En los elementos junta, cuando se emplea la usual cuadratura de Gauss, pueden aparecer oscilaciones en los valores de las tensiones en el elemento, las cuales no aparecen o son menores si se emplea una cuadratura del tipo Newton-Cotes[26].

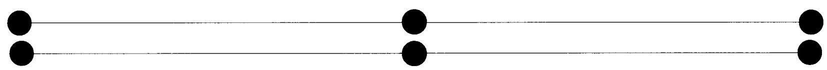

Figura 3. Elemento junta integrado numéricamente

Otro factor que puede provocar oscilaciones en el perfil de tensiones del elemento es que su rigidez normal (cociente entre la tensión normal al eje de la junta y la apertura de la misma) y tangencial (cociente entre la tensión tangencial y el deslizamiento entre las caras de la junta) tengan valores muy grandes en comparación con el módulo de deformación del continuo[20,23,25]. Sin embargo, debido a que los K se obtienen a partir de consideraciones energéticas y no a partir de la distribución de tensiones en la punta, la elección de rigideces de junta altas no afecta a los resultados obtenidos en el presente análisis.

El cálculo de G empleando elementos junta

La implementación del MEVF, formulado en las páginas anteriores, aplicando los elementos junta consiste en hacer nula la rigidez del elemento junta que pasa a formar parte de la fisura. Consecuentemente, las variables que aparecen en la ec. (9) son: a_1 coordenada del nodo inferior del elemento en el que se anula la rigidez, a_2 coordenada del nodo superior del elemento anteriormente mencionado, u_1 desplazamiento del nodo en el que está aplicada la carga en el caso en el que la fisura tiene longitud a_1 (en consecuencia, en este caso aún no se ha anulado la rigidez del elemento junta considerado) y u_2 desplazamiento en el caso en el que la fisura tiene longitud a_2. En el cálculo de u_2 el elemento junta considerado tiene rigidez nula.

MODELACIÓN DE RESULTADOS EXPERIMENTALES Y ANÁLISIS

Detalles experimentales

Se han ensayado dos series de probetas, denominadas H1 y H2, fabricadas con hormigón convencional con la geometría mostrada en la Figura 2 (vigas TPB con entalla excéntrica). Cada serie constaba de seis probetas por tamaño (cantos d iguales a 80, 160 y 320 mm y ancho b igual a 50 mm); tres probetas por tamaño fueron ensayadas con la excentricidad de la entalla e igual a $0,25\ell$ y otras tres con $e = 0,125\ell$, donde ℓ es la distancia entre apoyos. También se ha ensayado una serie de probetas (compuesta por cuatro probetas) de metacrilato, denominada M, con canto igual a 80 mm y ancho igual a 25 mm. De estas probetas se han ensayado dos para cada una de las excentricidades empleadas con el hormigón. Las longitudes iniciales de fisura para las series H1 y M son igual a 0,275 veces el canto y para la serie H2 son igual a 0,25 veces el canto. Las entallas se realizaron cortando las probetas mediante un disco de diamante en el caso del hormigón y con sierra de cinta metálica en el caso del metacrilato.

La serie H1 fue fabricada con un hormigón de resistencia media a compresión igual a 23,6 MPa y las probetas fueron ensayadas a la edad de 30 días y la serie H2 con un hormigón de resistencia media a compresión de 29,9 MPa y las probetas ensayadas a la edad de 730 días.

Se realizaron los ensayos en una prensa servohidráulica controlado en lazo cerrado, aplicando una velocidad constante de apertura de fisura. Se han medido la carga mediante una célula de carga y la apertura de fisura mediante un extensómetro "clip gage" colocado en la boca de la entalla. Una vez realizado el ensayo se dibujó el camino de fisura para el análisis posterior. Se muestran más detalles de los ensayos y el resto de los resultados en la Tabla I y en la referencia[2].

Análisis de resultados experimentales

Se ha analizado la viga TPB en tensión plana tomando el canto $d = 1$, la carga $P = 1$ (estos parámetros son unitarios y no se especifican las unidades ya que el cálculo es lineal). En la Figura 4 se muestran los caminos medios obtenidos en la serie H1 para cada excentricidad. Se ha discretizado el camino medio de la fisura mediante elementos junta y el continuo mediante una malla de elementos triangulares generada automáticamente. En la Figura 5, se representan las mallas utilizadas en los cálculos de la serie H1.

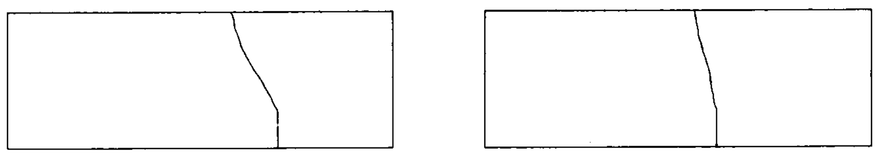

Figura 4. Caminos de las fisuras de la serie H1, para las excentricidades iguales a 0,25 y 0,125 veces el canto respectivamente

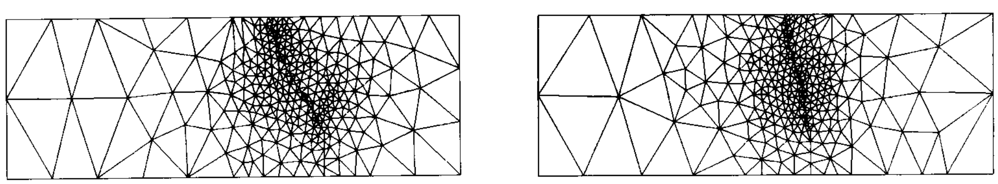

Figura 5. Mallas empleadas en las vigas representativas de la serie H1 con excentricidades iguales a 0,25 y 0,125 veces el canto respectivamente

Los parámetros mecánicos empleados son $E = 1$ y las rigideces normal y tangencial de los elementos junta (K_n y K_t respectivamente) igual a 10^{12} cuando la junta no pertenece a la fisura y nulas cuando pertenece.

En la Tabla I se muestran las cargas obtenidas en los ensayos y la energía de fractura G_c obtenida para cada tamaño ensayado a partir de la carga pico, empleando la energía de fractura adimensional para la entalla inicial o g^2. Donde g se define como

$$g = \frac{EG}{\sigma^2 \pi a} \tag{15}$$

donde para la viga TPB aquí analizada $\sigma = \frac{3PS}{2l^2 b}$ con $S = 2,5\ell$, $P = 1$, $b = 1$, $\ell = 1$ y G obtenida del análisis lineal aplicando la ec. (9). G_c se obtiene a partir de la ec. (15) tomando $G = G_c$, P igual a la carga pico (mostrada en la Tabla I), b igual a 50 mm en el caso de hormigón y 25 mm en el caso de metacrilato (ancho de las vigas ensayadas, como ya se ha mencionado), l igual al canto de las vigas (mostrados en la citada tabla). También se muestra el valor del módulo de deformación E, el cual se ha obtenido a partir de ensayos a flexotracción sobre probetas de las series aquí ensayadas, pero con excentricidad nula, cuyos resultados se han mostrado en otros trabajos[2]. En esta tabla se muestran además, a efectos de comparar, los resultados para excentricidad nula de las series H1 y H2 citados anteriormente.

Serie	E (GPa)	e/l	g	Cargas pico (kN)			G_c (J/m^2)		
ℓ (mm)				80	160	320	80	160	320
H1	18,8	0	0,96	2,43	3,54	5,60	18,3	19,4	24,3
		0,125	0,75	2,27	4,29	6,47	13,6	24,2	27,6
		0,25	0,38	3,46	5,51	9,15	16,5	20,9	28,8
H2	33,8	0	0,94	3,83	5,73	10,25	22,5	25,2	40,3
		0,125	0,68	3,76	6,37	9,38	17,5	25,1	27,2
		0,25	0,32	5,13	8,54	12,62	15,9	22,1	24,1
M	2,7	0,125	0,83	3,46			982		
		0,25	0,48	4,61			1005		

Tabla I

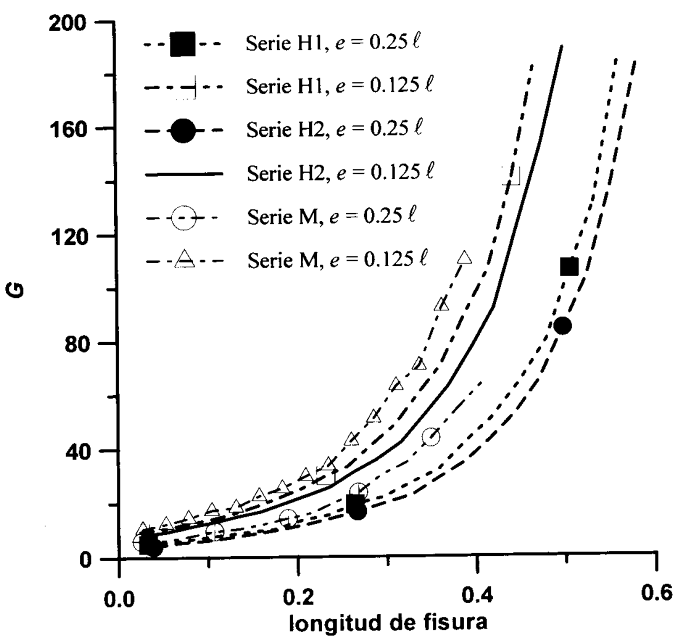

Figura 6. Variación de G con la longitud de la fisura

Del análisis realizado se han obtenido diversos resultados dignos de mención. En primer lugar se ha de mencionar que tanto en la Tabla I como en la Figura 6, se observa que en todos los casos para igual longitud de entalla o fisura, es mayor la disipación de energía a menor excentricidad. La disminución de G y g al aumentar la excentricidad explica que a mayor excentricidad la carga pico aumente. En la Tabla I también se muestran los valores de G_c, los cuales no muestran ninguna tendencia clara con respecto a la excentricidad, aunque esto puede ser debido a la dispersión de las cargas pico.

En la Figura 7 se observa que K_I no varía apreciablemente con el criterio escogido para estudiar el modo mixto de fractura. Otro detalle interesante que se observa en la Figura 8 es que el criterio de tensión circunferencial máxima y el criterio de la densidad mínima de energía de deformación prácticamente coinciden en el valor y la forma de evolución del K_{II} con la fisura. En todos los casos se observa que el valor del K_{II} es pequeño para longitudes relativas de fisura menores que 0,7.

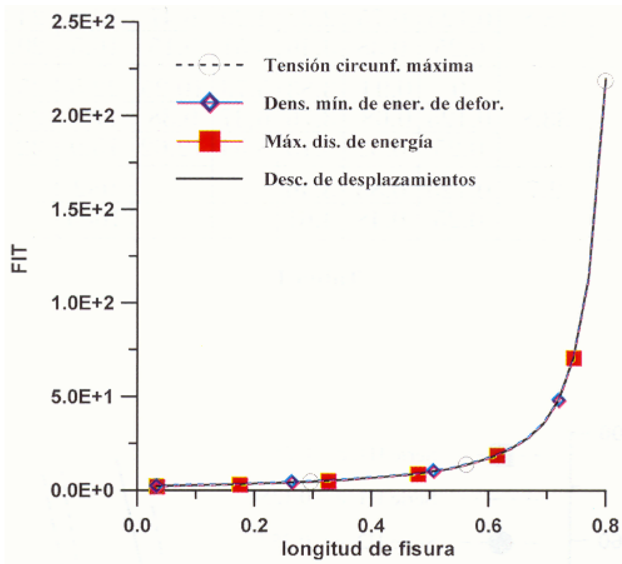

Figura 7. Evolución del FIT en modo I con la longitud de fisura para la serie H1 y $e = 0,25l$

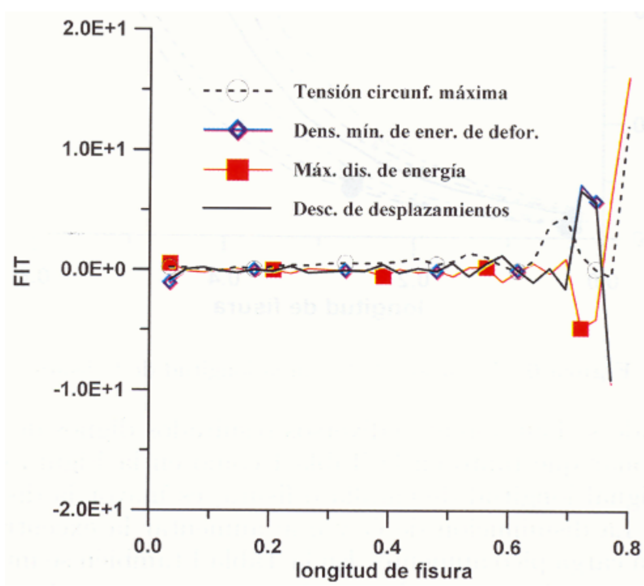

Figura 8. Evolución del FIT en modo II con la longitud de fisura para la serie H1 y $e = 0,25l$

En las Figuras 9-12 se muestra la evolución del cociente K_{II}/K_I con la longitud de la fisura para cada criterio. En todos los casos, a excepción del criterio basado en la descomposición de desplazamientos (Figura 12), se observa que sólo en el inicio de la fisuración el valor de K_{II} es comparable con K_I. Para estos tres criterios, como era de esperar, el K_{II} en las probetas de hormigón aumenta para mayores excentricidades de la entalla. En el caso del metacrilato, en cambio, no se observa que K_{II} aumente con la excentricidad. Debido a que actualmente se dispone de muy pocos ensayos, no se pueden sacar conclusiones que vayan contra el resto de los resultados observados.

La diferencia que se observa entre el criterio basado en la descomposición de desplazamientos y el resto de los criterios se puede deber a que en este criterio la relación K_{II}/K_I es equivalente a la relación CSD/COD, la cual sólo aproxima en primer orden la relación entre los factores de intensidad de tensiones para modo I y modo II, por lo que no es una aproximación adecuada para longitudes de fisura pequeñas.

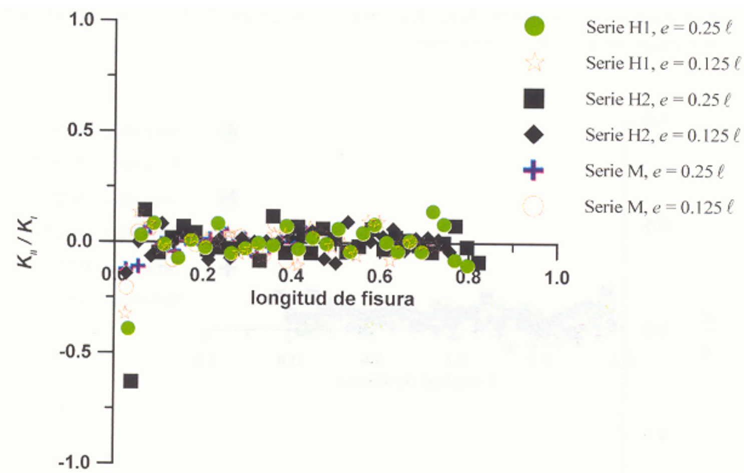

Figura 9. Evolución del cociente K_{II}/K_I con la longitud de la fisura en el criterio de la tensión circunferencial máxima

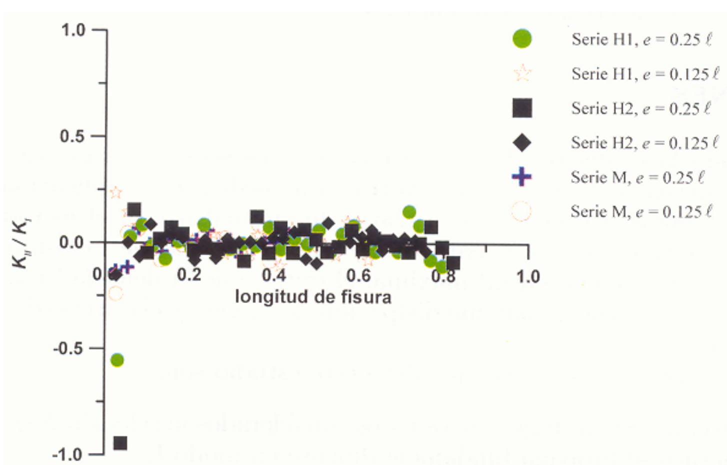

Figura 10. Evolución del cociente K_{II}/K_I con la longitud de la fisura en el criterio de la densidad mínima de energía de deformación

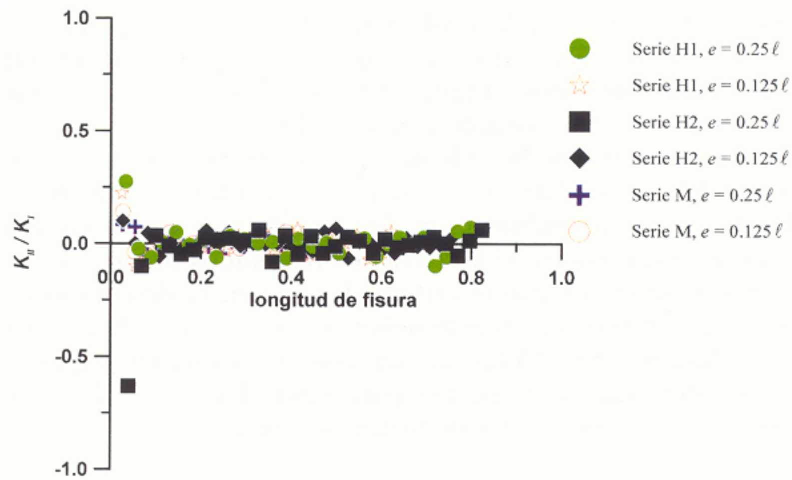

Figura 11. Evolución del cociente K_{II}/K_I con la longitud de la fisura en el criterio de la máxima disipación de energía

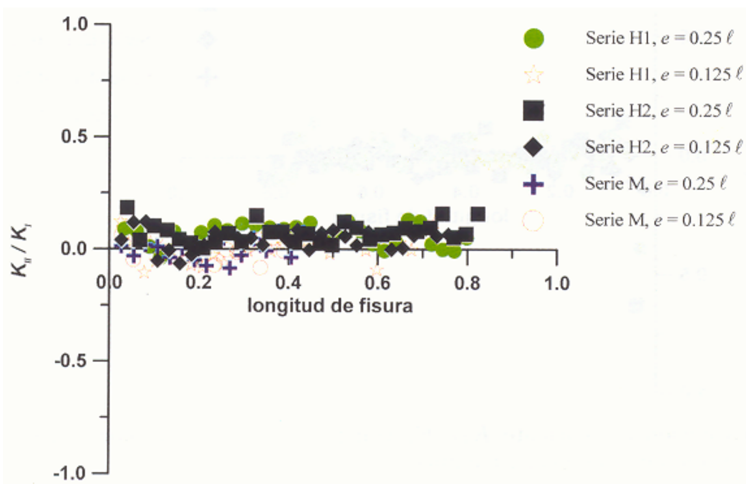

Figura 12. Evolución del cociente K_{II}/K_I con la longitud de la fisura en el criterio de descomposición de desplazamientos

CONCLUSIONES

Se ha estudiado la evolución de la fisuración de dos series de vigas de hormigón y de una serie de metacrilato ensayadas a flexotracción mediante la aplicación de una carga central (TPB) con entallas excéntricas, a través de un análisis por el método de elementos finitos empleando elementos junta para discretizar el camino de la fisura, aplicando los criterios de la tensión circunferencial máxima, el criterio de la densidad mínima de energía de deformación, el criterio de la máxima disipación de energía y el criterio de descomposición de desplazamientos.

Las principales conclusiones a las que llega este estudio son:

- Los cuatro criterios predicen que en los casos considerados la relación K_{II}/K_I es pequeña, esto es, la fractura se propaga fundamentalmente en modo I.
- Según los criterios de la tensión circunferencial máxima, de la densidad mínima de energía de deformación y de la máxima disipación de energía resulta que la fisura se inicia en modo mixto ($K_{II} \approx K_I$).

- En los resultados obtenidos mediante estos tres criterios en el caso del hormigón se observa que el modo II aumenta, como era de esperar, con la excentricidad de la entalla. En el caso del metacrilato, no se pueden obtener conclusiones por disponer de pocos ensayos.
- Los resultados de la evaluación de K_I para los cuatro criterios son equivalentes.
- Los resultados de la evaluación de K_{II} mediante el criterio de descomposición de desplazamientos son ligeramente diferentes de la de los otros tres criterios.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el soporte brindado por los proyectos de investigación financiados a través de la CICYT (MAT96-0967) y la DGES (PB96-0500).

REFERENCIAS

1 Z.K. Guo, A.S. Kobayashi y N.M. Hawkins, "Mixed modes I and II concrete fracture: An experimental analysis", *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. **61**, pp. 815–821, (1994).

2 V.O. García Ávarez, "Estudio de la fractura en modo mixto de los materiales cuasifrágiles: Aplicación al hormigón convencional y al hormigón de alta resistencia", Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, (1997).

3 Y.S. Jenq y S.P. Shah, "Mixed-mode fracture of concrete", *Int. J. Fracture*, Vol. **38**, pp. 123–142, (1988).

4 J. Oliver, "Modelado de la fisuración en estructuras de hormigón", N° 15, Monografías CIMNE, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona (1993).

5 G.R. Irwin, "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate", *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. **24**, pp. 361–364, (1957).

6 Z.P. Bažant y J. Planas, "*Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*", CRC Press, Boca Raton, USA, (1998).

7 Y. Murakami, S. Aoki, H. Miyata, K. Tohgo, N. Hasabe, N. Miyazaki, M. Toya, Y. Itho, H. Terada y R. Yuuki, "*Stress Intensity Factors Handbook*", Pergamon Press, Oxford, UK, (1987).

8 T.K. Hellen, "On the method of virtual crack extensions", *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. **9**, pp. 187–207, (1975).

9 J.R. Rice y D.M. Tracey, "Computational fracture mechanics", en "*Numerical and computer methods in structural mechanics*, pp. 585–623, Academic Press, New York, USA, (1973).

10 T.K. Hellen, "A novel approach to crack-tip singularity solutions", *Computers and Structures*, Vol. **22**, pp. 743–747, (1986).

11 A.R. Ingraffea y C. Manu, "Stress-intensity factor computation in three dimensions with quarter-point elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **5**, pp. 1427–1445, (1980).

12 F. Erdogan y G.C. Sih, "On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear", *J. Basic Engng.*, Vol. **85**, pp. 519–527, (1963).

13 G.C. Sih, "Strain energy density factor applied to mixed-mode crack problems", *International Journal of Fracture*, Vol. **10**, pp. 305–321, (1974).

14 M.A. Hussain, S.L. Pu y J.H. Underwood, "Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II", *Fracture Analysis*, ASTM STP 560, pp. 2–28, (1974).

15 H. Ishikawa, "A finite element analysis of stress intensity factors for combined tensile and shear loading by only a virtual crack extension", *Int. J. Fracture*, Vol. **16**, (1980).

16 G. Sha, "On the virtual crack extension technique for stress intensity factors and energy release rate calculation for mixed fracture modes", *Int. J. Fracture*, Vol. **25**, (1984).

17 J.L. Sousa, L.F Martha, P.A. Wawrzynek y A.R. Ingraffea, "Simulation of non-planar crack propagation in three-dimensional structures in concrete and rock", en "*Fracture of concrete and rock: Recent developments*", S.P. Shah *et al.*, (Eds), Elsevier Applied Science, pp. 5–17, (1989).

18 O.C. Zienkiewicz y K. Morgan, "Finite elements and approximations", John Wiley & Sons, New York, USA, (1983).

19 P.G. Bergan, "Some aspects of interpolation and integration in nonlinear finite element analysis of reinforced concrete structures", en "*Computer-aided analysis and design of concrete structures*", pp. 3–17, editado por F. Damjanic, H. Hinton, D. Owen, N. Bicanic y S. Simovic, Pineridge Press, (1984).

20 J.G. Rots, "Computational modelling of concrete fracture", Ph. D. thesis, Delft University of Technology, Delft, Holanda, (1988).

21 P. Löhner y P. Parikh, "Generation of three dimensional unstructured grids by the advancing-front method", *Int. J. Num. Methods in Fluids*, Vol. **8**, pp. 1135–1199, (1988).

22 V.O. García Álvarez, F. Collado y A. Sánchez Arcilla, "Algoritmo de generación de mallas triangulares para dominios planos convexos", N. 9, Monografías CIMNE, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, (1991).

23 V.O. García Álvarez, I. Carol y R. Gettu, "Numerical simulation of fracture in concrete using joint elements", *Anales de Mecánica de Fractura*, Vol. **11**, pp. 75–80, (1994).

24 I. Carol, P.C. Prat y C. López, "Normal/shear cracking model: application to discrete crack analysis", *J. Engng. Mech. ASCE*, Vol. **123**, 8, pp. 1–9, (1997).

25 J.C.J. Schellekens, "Interface elements in finite element analysis", Technical report 25-2-90-5-17, Technische Universiteit Delft, Delft, Holanda, (1990).

26 A. Gens, I. Carol y E.E. Alonso, "An interface element formulation for the analysis of soil-reinforcement interaction", *Computers and Geotechnics*, Vol. **7**, pp. 133–151, (1988).