Rev. Int. Mét. Num. Cálc. Dis. Ing.
Vol. **18, 4,** 475-480 (2002)

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

Explicación geométrica de una medida de forma de símplices n-dimensional

Ángel Plaza

Departamento de Matemáticas
Edificio de Matemáticas e Informática
Campus de Tarifa
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
35017 Las Palmas de Gran Canaria, España
Tel.: 34-928-45 88 27, Fax: 34-928-45 87 11
e-mail: aplaza@dma.ulpgc.es

Graham Carey

Texas Institute for Computational and Applied Mathematics (TICAM)
ASE/EM Dept., University of Texas at Austin
201 E. 24th Street, ACE 6.412, Austin, Texas 78712, EE.UU.
Tel.: 1-512-471 33 12; Fax: 1-512-471 86 94
e-mail: carey@cfdlab.ae.utexas.edu

Resumen

En este trabajo se presenta una explicación geométrica de una medida de forma para triángulos. Esto nos conduce de una manera natural a definir una medida de forma n-dimensional, basada en una medida de forma de tetraedros ya existente [6].

A GEOMETRIC EXPLANATION OF AN n-DIMENSIONAL SIMPLEX SHAPE MEASURE

Summary

In this paper we present a geometric explanation and construct a 2-D shape measure for triangles. This then leads to a generic n-dimensional simplex shape measure, based on an existing tetahedral shape measure [6].

INTRODUCCIÓN

Es bien conocido que triángulos o tetraedros casi-degenerados con ángulos obtusos muy grandes tienen malas propiedades para la aproximación de la solución o nos conducen a sistemas de ecuaciones mal condicionados[3,15]. Además, algunas técnicas de subdivisión de elementos empleadas por métodos de refinamiento adaptivo de mallas pueden generar automáticamente mallas en las cuales la forma de los elementos se deteriora con respecto a la forma de la malla inicial no refinada[12,13,6]. Este hecho hace que muchas veces tras el refinamiento automático o junto con él deban considerarse procedimientos de suavizado, redistribución de los nodos o mejora de los mallados obtenidos[10,8].

Por tanto, es importante contar con algunas medidas de forma (degeneración o no) robustas de los elementos que componen la malla, especialmente durante el proceso de refinamiento y/o mejora del mallado. En este artículo restringimos nuestra atención a los elementos simpliciales (triángulos en dos dimensiones, tetraedros en tres dimensiones), si bien cualquier elemento, polígono o poliedro, se puede descomponer en símplices.

Se pueden elegir muchos parámetros para medir la forma o la calidad de los elementos en dimensión 2 o mayor. Aquí nos referiremos a tales medidas como estimadores de forma

 ISSN: 0213–1315 Recibido: Julio 2001

de los elementos. Por ejemplo, Whitehead[17] introdujo el *grosor relativo* de un símplice S, definido por

$$\rho(S) = \frac{r(S)}{d(S)} \tag{1}$$

donde $r(S)$ es el *radio* de S (es decir, la distancia más corta desde el centroide a su frontera), y $d(S)$ es el diámetro de S (es decir, la longitud de su arista mayor). Stynes [16] usó el cociente

$$t(S) = \frac{\text{área }(S)}{d^2(S)} \tag{2}$$

en el método de bisección de triángulos. Este cociente se puede generalizar fácilmente a dimensiones mayores como

$$t(S) = \frac{\text{volumen }(S)}{d^n(S)} \tag{3}$$

donde n es la dimensión del símplice S. Otros autores [4] han usado

$$\text{ratio }(S) = \frac{\delta(S)}{R(S)} \tag{4}$$

donde $\delta(S)$ es la longitud del radio de la esferea inscrita y $R(S)$ es el radio de la esfera circunscrita. Este cociente también aparece de forma natural en teoría de la interpolación de los elementos finitos [9]. La excentricidad de un poliedro, esto es la razón entre las longitudes de la arista mayor y la menor, se puede computar para estimar la calidad de la forma[4]. Motivado por la ideas de Delaunay, el ángulo mínimo ha sido también utilizado frecuentemente como medidas de forma[12,13].

La aplicación entre un tetraedro dado y el tetraedro regular asociado se puede usar asímismo para obtener un estimador de la forma[6,8]

$$\eta(T) = \frac{3\sqrt[3]{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \tag{5}$$

donde λ_i son los autovalores de la matriz $\mathbf{A}(R,M) = (\mathbf{MR}^{-1})^t\mathbf{MR}^{-1}$ para matrices $\mathbf{M}$ y $\mathbf{R}$ asociadas con un tetraedro dado T y con un tetraedro de referencia regular que tiene el mismo volumen que T. Las columnas de $\mathbf{M}$ son vectores correspondientes a las aristas que coinciden en un vértice de T y $\mathbf{R}$ es definido del mismo modo para el tetraedro de referencia. Es interesante notar que la fórmula (5) es independiente del orden de los vértices y se puede expresar (más directamente) en función de la geometría del tetraedro como sigue

$$\eta(T) = \frac{12\ (3\ \ \text{volumen})^{2/3}}{\sum_{i=1}^{6}\ell_i^2} \tag{6}$$

donde ℓ_i denota las longitud de la arista i.

En los últimos años Bank y Xu[1] han usado la expresión

$$G(t) = \frac{4\ \text{área}\sqrt{3}}{\ell_1^2+\ell_2^2+\ell_3^2} \tag{7}$$

para medir la forma de un elemento triangular t en una malla bidimensional.

En la referencia 11 se ofrece una comparación de algunas medidas de forma de tetraedros. Se muestran diversos tests de sensibilidad a la distorsión y se hace una comparación del coste computacional que conllevan. No está en nuestro ánimo aquí comparar diversas medidas de forma de símplices en general, ni tampoco dar una teoría general sobre medidas de forma y características que deben cumplir tales medidas de forma.

El objetivo de esta nota es doble. En primer lugar, mostramos que la fórmula (7) es un caso particular de (6) para el caso bidimensional y deducimos una explicación geométrica de ella. En segundo lugar, presentamos una medida de forma de símplices n-dimensional basada en las dos últimas.

UN CASO PARTICULAR: DOS DIMENSIONES

En esta sección seguimos a Liu y Joe que en la referencia 6 estudian el problema en tres dimensiones, para desarrollar una medida para el caso bidimensional. Esto nos llevará a presentar una medida general en cualquier dimensión.

Definición 1

Para cualquier triángulo (no degenerado) $t = (t_0, t_1, t_2)$ se define la matriz 2×2 no singular $\mathbf{T} = [t_1 - t_0, t_2 - t_0]$. $\mathbf{T}$ depende del orden de los vértices de t. Para dos triángulos s y t cualesquiera definimos las matrices 2×2: $\mathbf{M}(s,t) = \mathbf{T}\mathbf{S}^{-1}$ y $\mathbf{A}(s,t) = \mathbf{M}^t(s,t)\mathbf{M}(s,t)$.$\mathbf{M}$ y $\mathbf{A}$ también dependen del orden de los vértices y $\mathbf{M}$ es la matriz que aparece en la transformación afín que lleva los puntos de s a los puntos de t de forma que

$$t_i = \mathbf{M}s_i + b,\ 0 \le i \le 2,\ b = t_0 - \mathbf{M}s_0 \tag{8}$$

Teorema 1

$$G(t) = \frac{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1 + \lambda_2} \tag{9}$$

donde λ_1 y λ_2 son los autovalores de la matriz $\mathbf{A}(r,t)$, t es cualquier triángulo y r es un triángulo regular con la misma área que t.

Demostración

Sea r el triángulo regular con la misma ŕea que t y las coordenadas de los vértices: $r_0 = (0, a\sqrt{3}/2), r_1 = (-a/2, 0)$ y $r_2 = (a/2, 0)$. Sean $\mathbf{T} = [t_1 - t_0, t_2 - t_0]$ y $\mathbf{R} = [r_1 - r_0, r_2 - r_0]$. Entonces

$$\mathbf{R} = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix},\ \mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{a\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

donde $a = (4\ \text{area}/\sqrt{3})^{1/2}$. Sea $d_{ij} = (t_j - t_i)^t(t_j - t_i)$, $0 \le i < j \le 2$. Entonces

$$\mathbf{T}^t\mathbf{T} = \begin{pmatrix} d_{01} & (d_{01} + d_{02} - d_{12})/2 \\ (d_{01} + d_{02} - d_{12})/2 & d_{02} \end{pmatrix} \tag{11}$$

De (10), (11) y sabiendo que $\mathbf{A}(r,t) = \mathbf{M}^t(r,t)\mathbf{M}(r,t) = (\mathbf{R}^{-1})^t\mathbf{T}^t\mathbf{T}\mathbf{R}^{-1}$, se tiene del mismo modo que Liu y Joe[6]

$$\mathbf{A}(r,t) = \frac{1}{3a^2}\begin{pmatrix} 3d_{12} & \# \\ \# & 2d_{01} + 2d_{02} - d_{12} \end{pmatrix} \tag{12}$$

donde # denota un valor que es irrelevante para el argumento que seguimos. Entonces

$$\lambda_1 + \lambda_2 = traza(\mathbf{A}(r,t)) = \frac{2(d_{01}+d_{02}+d_{12})}{3a^2} \tag{13}$$

Como r y t tienen la misma área, $\det(\mathbf{M}(r,t)) = \pm 1$. Así que

$$\lambda_1\lambda_2 = det(A(r,t)) = 1 \tag{14}$$

De (13), (14) y la definición de $G(t)$, se tiene finalmente que

$$G(t) = \frac{2\sqrt{\det(\mathbf{A})}}{\mathrm{traza}(\mathbf{A})} = \frac{4 \text{ área}\sqrt{3}}{\ell_1^2+\ell_2^2+\ell_3^2} \tag{15}$$

Observación

Siguiendo de nuevo la referencia 6, damos una explicación de $G(t)$. Sea O la circunferencia inscrita en el triángulo regular r y R su radio. La transformación afín $y = \mathbf{M}(r,t)x + b$ que lleva los puntos de r en los de t transforma la circunferencia O en una elipse E inscrita a t[9].

Sea $(x+b_0)^t(x+b_0) = R^2$ la ecuación de O. Entonces la ecuación de E es

$$(y+b_1)^t(\mathbf{M}^{-1}(r,t))^t\mathbf{M}^{-1}(r,t)(y+b_1) = R^2$$

Sean α, β la longitud de los semiejes de la elipse y λ_1, λ_2 los autovalores de $\mathbf{M}^t(r,t)\mathbf{M}(r,t)$. La ecuación de la elipse se puede escribir entonces en forma reducida como

$$\frac{x_1^2}{\lambda_1} + \frac{x_2^2}{\lambda_2} = R^2$$

donde (x_1, x_2) es un punto cualquiera de la elipse. Por tanto, $\alpha^2 = \lambda_1 R^2$ y $\beta^2 = \lambda_2 R^2$. Como en el caso tridimensional,[6] $\lambda_1\lambda_2 = 1$ y entonces, tenemos $R^2 = \sqrt{\alpha^2\beta^2}$. De la definición 1

$$G(t) = \frac{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1+\lambda_2}$$

Así que $G(t)$ es también en 2D el cociente de la media geométrica entre la media aritmética de α^2 y β^2. En cierto sentido se puede decir que $G(t)$ mide la forma de la elipse inscrita E y por tanto la forma de t. Como en 3D, $G(t) = 1$ si y sólo si t es regular.

EL CASO GENERAL: DIMENSIÓN n

Sea S un símplice n-dimensional en un espacio euclídeo n-dimensional. Se define

$$\theta(S) = \frac{\kappa_n \ (\text{volumen})^{2/n}}{\sum_{i=1}^{E} \ell_i^2} \tag{16}$$

donde κ_n es un coeficiente tal que $\theta(S) = 1$ si y sólo si S es regular, es decir un coeficiente de normalización, y E es el número de aristas en S. Es sabido[2] que el número de aristas de un símplice n-dimensional S es $E = \binom{n+1}{2} = n(n+1)/2$. Entonces $\theta(S)$ es una medida de forma que admite la misma interpretación que η o G. Obsérvese que cuando la dimensión crece, el coeficiente κ_n crece también y tiende a infinito, de forma que $\theta(S)$ es una medida de forma menos significativa, con menos sensibilidad, pues su rango de variación (salvo el coeficiente de normalización κ_n) es más pequeño. Sin embargo, parece más útil para medir la forma de los símplices, sobre todo cuando la triangulación generada está basada en técnicas de empaquetamiento de elipses[14].

Cuando esta nota estaba preparada para enviarse a publicar, hemos sabido que el caso bidimensional ha sido estudiado también por A. Liu y B. Joe[7] y que Anwie Liu presenta también la fórmula para el caso general n-dimensional en su Tesis [5]. El mismo autor[2] también da una expresión explícita para el coeficiente κ_n

$$\kappa_n = n\ (n+1)^{n-1/n}\ (n!)^{2/n} \tag{17}$$

CONCLUSIÓN

Esta nota presenta una medida de forma n-dimensional que corresponde para $n = 3$ y $n = 2$ con dos medidas de forma usadas en la práctica para medir la calidad de las mallas obtenidas en mallados triangulares no estructurados. Además se ha dado una explicación geométrica de la medida de forma presentada.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado en parte por el Proyecto PI1999/146 del Gobierno de Canarias y el contrato de DARPA número DABT63-96-C-0061.

REFERENCIAS

1 R.E. Bank y J. Xu, "An algorithm for coarsening unstructured meshes", *Numer. Math.*, Vol. **73**, pp. 1–36, (1996).

2 M. Berger, "*Geometry*", Springer-Verlag, (1987).

3 G.F. Carey y J.T. Oden, "*Finite elements: a second course*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1983).

4 P. Conti, N. Hitschfeld y W. Fichtner, "Ω -an octree-based mixed element grid allocator for the simulation of complex 3D device structures", *IEEE Trans. Com.-Aided Des.*, Vol. **10**, pp. 1231–1241, (1991).

5 A. Liu, "On the shape of tetrahedra from bisection", Tesis doctoral, Alberta University, (1993).

6 A. Liu y B. Joe, "On the shape of tetrahedra from bisection", *Math. Comp.*, Vol. **63**, pp. 141–154, (1994).

7 A. Liu y B. Joe, "Relationship between tetrahedron shape measures", *BIT*, Vol. **34**, pp. 268–287, (1994).

8 A. Liu y B. Joe, "Quality local refinement of tetrahedral meshes based on bisection", *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. **16**, pp. 1269–1291, (1995).

9 J.T. Oden y G.F. Carey, "*Finite elements: mathematical aspects*", Prentice Hall, (1983).

10 A. Pardhanani y G.F. Carey, "Optimization of computational grids", *Num. Meth. for Part. Diff. Equat.*, Vol. **4**, pp. 95–117, (1988).

11 V.N. Pardhasarathy, C.N. Graichen y A. F. Hathaway, "A comparison of tetrahedron shape measure", *Fin. Elem. in Anal. and Design*, Vol. **15**, pp. 255–261, (1993).

12 M.C. Rivara, "Mesh refinement based on the generalized bisection of simplices", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol **2**, pp. 604–613, (1984).

13 M.C. Rivara y C. Levin, “A 3-d refinement algorithm suitable for adaptive and multi-grid techniques”, *J. Comp. and Appl. Math.*, Vol. **8** pp. 281–290, (1992).

14 K. Shimada y D.C. Gossard, “Automatic triangular mesh generation of trimmed parametric surfaces for finite element analysis”, *Comp. Aided Goem. Des.*, Vol. **15**, pp. 199–222, (1998).

15 G. Strang and G. Fix, “*An analysis of the finite element method*”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1988).

16 M. Stynes, “On faster convergence of the bisection method for all triangles”, *Math. Comp.*, Vol. **35**, pp. 1995–1201, (1980).

17 J.H.C. Whitehead, “On C^1-complexes”, *Ann. Math.*, Vol. **41**, pp. 809–824, (1940).