

# La formulación del flujo viscoplástico y sus diversas aplicaciones prácticas por el método de los elementos finitos

Por EUGENIO OÑATE

Dr. Ing. de Caminos, M. Sc., Ph. D.

## 1. INTRODUCCION

En la mayoría de los procesos de conformado de sólidos el material está sometido a deformaciones muy altas produciéndose en él una plastificación casi inmediata, de manera que fluye como si se tratase de un fluido. Ejemplos prácticos típicos de dicho fenómeno se pueden encontrar en la mayoría de los procesos de deformación de metales, plásticos o vidrios. La importancia de un buen conocimiento del comportamiento de dichos materiales, que está en la frontera entre el de un sólido y el de un fluido se ha incrementado notablemente en los últimos años. Numerosos investigadores han realizado verdaderos esfuerzos, la mayoría de ellos a cargo de las grandes empresas de tratamiento del metal, para encontrar soluciones numéricas a muchos de esos procesos como única alternativa para reducir el coste elevado que lleva consigo el análisis experimental, prácticamente la única base existente hasta hace poco, para predecir resultados que pudieran ser utilizados con fines prácticos. El principal interés de las industrias del metal y similares se centra en el cálculo de cargas, presiones y desplazamientos durante el proceso de deformación.

Uno de los procedimientos de análisis más extensamente usado para la solución de problemas de desplazamientos en sólidos es el método de los elementos finitos [1]. Muchas de las soluciones encontradas se basan en la inclusión de las deformaciones elásticas y plásticas (análisis elastoplástico) [1]. Estos procedimientos son útiles en el contexto de cambios de geometría pequeños; pero cuando estos cambios son tan grandes que las deformaciones elásticas pierden importancia, los métodos disponibles actualmente son, o bien inaplicables, o bien muy caros en tiempo de ordenador, en particular al tratar problemas tridimensionales.

En la mayoría de los procesos de grandes deformaciones plásticas, los fenómenos de fluencia tienen lugar simultáneamente con los de plasticidad, y es imposible efectuar una separación de ambos a partir de medidas experimentales. Un

*modelo viscoplástico* es capaz de describir el comportamiento real del material de una forma más precisa. Dicho modelo no sólo es físicamente más ventajoso, sino que además conduce a soluciones numéricas más sencillas. Más aún, en el campo de pequeñas deformaciones, Zienkiewicz y Cormeau [2 y 4] y también Nguyen y Zarka [5] han demostrado que proporciona una solución económica para problemas de elastoplasticidad así como de elastofluencia.

Si las deformaciones elásticas son despreciables, como ocurre en los procesos de deformación de los materiales anteriormente citados, el modelo viscoplástico permite tratar al material como si fuese simplemente un fluido no-Newtoniano. Este procedimiento conocido comúnmente como *método del flujo viscoplástico* ha sido extensamente usado por Zienkiewicz y Godbole [6 y 7], Lee y Kobayashi [8], Jain [9], Zienkiewicz y otros [10 y 11], Oñate [12] y otros [13 y 15] para tratar problemas de grandes deformaciones plásticas en sólidos y, en particular, procesos de extrusión y laminado de metales. Otra de las más recientes aplicaciones del método ha sido para analizar procesos de deformación por embutición de planchas de metal, como los que se utilizan en las industrias de conformado de componentes para la carrocería de automóviles y similares, así como en las de fabricación de envases metálicos [11 y 12]. Aalto y Salonen [16] lo han utilizado para predecir los movimientos y tensiones que se producen en el manto y corteza de la tierra debidas a la sedimentación.

En este artículo se presentan las bases de la formulación del flujo viscoplástico, así como su tratamiento por elementos finitos. Así mismo, se presenta el tratamiento del efecto acoplado de la temperatura, de gran importancia en procesos de tratamiento de metales en caliente. Finalmente, en la última parte del trabajo se muestra cómo se puede simplificar la formulación del flujo plástico tridimensional usando las hipótesis de la teoría de láminas para analizar problemas de grandes deformaciones plásticas de planchas metálicas.

2. FORMULACION DEL FLUJO VISCOPLASTICO

2.1. El concepto de flujo viscoplastico.

Fisicamente es aparente que los fenomenos de fluencia y plasticidad no pueden tratarse por separado puesto que solo el efecto combinado es medible.

Para tratar este problema, Zienkiewicz y Cormeau [2 y 4] introdujeron un modelo bastante general de elastoviscoplasticidad capaz de reproducir resultados experimentales. En dicho modelo se tienen además de las deformaciones elásticas,  $\epsilon_{ij}^e$ ,

un conjunto de deformaciones viscoplasticas,  $\epsilon_{ij}^{vp}$ , que se caracterizan por una velocidad de deformación que es cero cuando las tensiones son menores que un cierto valor de fluencia, y presentan una velocidad de deformación finita cuando ese valor es sobrepasado. La deformación total,  $\epsilon_{ij}$ , se obtiene, pues, por:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^{vp} \quad (1)$$

Si las deformaciones elásticas son despreciables se tiene sencillamente que:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{vp} \quad (2)$$

y, por consiguiente, derivando con respecto al tiempo:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = F(\sigma_{ij}) \quad (3)$$

Es decir, la velocidad de deformación del sólido es, similarmente al caso de un fluido, una función no nula de las tensiones.

Existen varias formas de definir la velocidad de deformación viscoplastica; la más usual es la debida a Perzyna [17] como:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4)$$

donde:

$$F = F(\sigma_{ij}, T, \epsilon_{ij}) \quad (5)$$

es una descripción de una superficie de fluencia o límite:

$$Q = Q(\sigma_{ij}, T, \epsilon_{ij}) \quad (6)$$

es la descripción de un potencial plástico y  $\gamma$  es un parámetro de fluidez ( $\gamma \rightarrow \infty$  para sólidos plásticos perfectos) que puede depender de variables de estado tales como el tiempo, la temperatura, los invariantes de deformación, etc. Para asegurar

que la viscoplasticidad no se desarrolla por debajo del límite de fluencia se establece que:

$$\begin{aligned} \langle \Phi(F) \rangle &\equiv \Phi(F) & \text{si } F \geq 0 \\ \langle \Phi(F) \rangle &= 0 & \text{si } F < 0 \end{aligned} \quad (7)$$

En general,  $Q$  y  $F$  serán diferentes de lo que define un flujo no asociado, pero, en cualquier caso, la ecuación (3) se puede escribir de la forma:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \nu_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (8)$$

donde el tensor:

$$\nu = \nu(\sigma_{ij}, T, \epsilon_{ij}) \quad (9)$$

es simétrico. Las formas particulares de las relaciones anteriores fueron dadas por Zienkiewicz y Cormeau [3] para varias superficies de fluencia y potenciales.

2.2. Particularización para materiales tipo Von Mises.

La descripción más corriente del comportamiento de los metales (y otros muchos materiales) sigue las hipótesis de que las superficies potencial y de fluencia coinciden (es decir, el flujo es asociado) y son iguales al conocido criterio de fluencia de Von Mises [18], es decir:

$$F = Q = \sqrt{3} \sqrt{J_2} - \sigma_y \quad (10)$$

donde:

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad (11a)$$

$\sigma_y$  es la tensión de fluencia uniaxial y  $J_2$  es el segundo invariante de las componentes de la tensión desviadora  $s_{ij}$  definida por:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad ; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (11b)$$

En general,  $\sigma_y$  será función de la temperatura,  $T$ , y del invariante de deformación efectiva acumulado  $\bar{\epsilon}$ . Este segundo invariante puede obtenerse por integración en el tiempo de la expresión de la velocidad de deformación adecuada dada por:

$$\dot{\bar{\epsilon}} = 2 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (12)$$

Generalizando aún más, se puede hacer la tensión de fluencia función de la tensión media (o presión  $p$ ). Así, pues, si:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = -p \quad (13)$$

se puede escribir:

$$\sigma_y = \sigma_v(T, \bar{\epsilon}, \sigma_m) \quad (14)$$

Esto permite tratar condiciones de rozamiento en el caso de que se presenten. Si imponemos una proporcionalidad directa entre  $\sigma_m$  y la tensión de fluencia en una zona escribiendo:

$$\sigma_y = f \sigma_m \quad (15)$$

donde  $f$  es el coeficiente de rozamiento, el comportamiento del material así modelado se aproximará al de rozamiento puro donde las tensiones cortantes están limitadas por el producto de la tensión normal y el coeficiente de rozamiento. Insertando una capa delgada de estos elementos con dicha propiedad cerca del contorno es un método sencillo para representar el efecto de rozamiento en el contorno.

Suponiendo  $F$  y  $Q$  independientes de deformaciones, tensiones y temperaturas se puede escribir la ecuación de flujo equivalente a la ecuación (8) por:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \gamma < \Phi(\sqrt{3} \sqrt{J_2} - \sigma_y) > \frac{\sqrt{3}}{2 \sqrt{J_2}} s_{ij} \quad (16)$$

Es importante advertir que la expresión anterior implica [10]:

$$\dot{\epsilon}_{ii} = 0 \quad (17)$$

es decir, el material fluye sin cambio de volumen.

Comparando la ecuación (16) con la relación para un fluido viscoso isótropo:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} s_{ij} \quad (18)$$

en la que  $\mu$  es la constante de viscosidad, se puede encontrar de las ecuaciones (17) y (18) la expresión de la viscosidad equivalente para el flujo viscoplastico. Suponiendo para  $\Phi(F)$  una función

exponencial del tipo  $\Phi(F) = F^n$ , y operando se encuentra [10]:

$$\mu = \frac{\sigma_y + (\dot{\epsilon}/\gamma \sqrt{3})^{1/n}}{\sqrt{3} \dot{\epsilon}} \quad (19)$$

expresión que es equivalente a la de viscosidad para un fluido no Newtoniano.

En resumen, el flujo viscoplastico de un material tipo Von Mises es equivalente al flujo de un

fluido viscoso incompresible no Newtoniano con una viscosidad dada por la ecuación (19). Para un flujo plástico puro  $\gamma \rightarrow \infty$  y se tiene:

$$\mu = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3} \dot{\epsilon}} \quad (20)$$

(Adviértase que el valor de  $\mu$  tiende a  $\infty$  cuando  $\dot{\epsilon}$  tiende a cero, así, pues, en los cálculos numéricos se debe acotar el valor de  $\mu$  para valores de  $\dot{\epsilon}$  menores que un cierto límite prefijado.)

### 2.3. Analogía entre un fluido incompresible a pequeñas velocidades y un sólido elástico incompresible. Aplicación al flujo viscoplastico.

Los conceptos generales de mecánica de sólidos y de fluidos son muy similares y, por tanto, los métodos para tratar uno y otro tipo de problemas se pueden intercambiar fácilmente.

Si prescindimos de los efectos de aceleración en un fluido (flujo a pequeñas velocidades) existe una analogía completa entre las ecuaciones de equilibrio y relaciones de comportamiento para un sólido elástico y un fluido; las cantidades análogas se muestran a continuación:

$$\text{Equilibrio: } \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad (21)$$

Sólido:

$$\text{Tensión: } \sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} - \frac{2}{3} G \epsilon_{kk} \delta_{ij}$$

$$\text{Tensión media: } \sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$$

Módulo de rigidez:  $G$

Módulo de compresibilidad:  $K$

$$\text{Deformación: } \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

Invariante de deformación:  $\dot{\epsilon}_{ii}$

Corrimiento:  $\bar{u}_i$

Fuerza másica:  $b_i$

Fluido:

$$\text{Tensión: } \sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{2}{3} \mu \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} \quad (22)$$

Tensión media:  $\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$  (23)

Viscosidad:  $\mu$

Módulo de compresibilidad:  $K$

Velocidad de deformación:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (24)$$

Invariante de velocidad de deformación:  $\dot{\epsilon}_{ii}$

Velocidad:  $u_i$

Fuerza másica:  $b_i$

En ambos casos el sistema de ecuaciones debe completarse de alguna manera, pues tenemos  $i$  ecuaciones de equilibrio e  $i + 1$  variables ( $\sigma_m, \bar{u}_i$ ) o ( $\sigma_m, u_i$ ). Para ambos, sólido y fluido, el sistema se completa con la adición de la relación de comportamiento entre la deformación, o velocidad de deformación volumétrica, y la presión:

Sólido:	Fluido:
$\sigma_m = K \epsilon_{ii}$	$\frac{D \sigma_m}{D t} = K \dot{\epsilon}_{ii}$

(25a)

Por consiguiente, si se consideran materiales *compresibles* la analogía no es totalmente completa. Sin embargo, si los dos medios se tratan como *incompresibles* la analogía es completa. La condición de incompresibilidad representada por  $K \rightarrow \infty$  implica que los invariantes de deformación y de velocidad de deformación se hacen cero para el sólido y fluido, respectivamente. Esto impone condiciones análogas en los campos de corrimientos y velocidades, es decir:

Sólido incompresible:	Fluido incompresible:
$\epsilon_{ii} = 0$	$\dot{\epsilon}_{ii} = 0$

(25b)

*Esta conocida analogía permite analizar problemas de flujo incompresible a pequeñas velocidades con programas de elementos finitos escritos para resolver problemas de elasticidad incompresible.*

**Por consiguiente, los problemas de flujo viscoplastico a pequeñas velocidades, de materiales tipo Von Mises o similares, pueden tratarse en virtud de las analogías anteriores como problemas de elasticidad incompresible, sustituyendo simplemente los conceptos de corrimiento por velocidad, deformación por velocidad de deformación y módulo de rigidez por coeficiente de viscosidad no lineal.**

Así, pues, para la solución numérica de problemas de flujo viscoplastico se puede utilizar cualquier procedimiento capaz de resolver problemas de elasticidad incompresible. Si utilizamos para ello el método de los elementos finitos las ecuaciones del problema se pueden escribir en la forma discretizada clásica como:

$$\underset{\sim}{K} \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{f} \quad (26a)$$

donde  $K$  es la matriz de "rigidez" equivalente del problema de flujo,  $a$  el vector de velocidades (o corrimientos análogos) nodales y  $f$  el vector de fuerzas actuando en los nodos. Debido a la no linealidad de la viscosidad la matriz  $K$  depende del estado de deformación y la solución  $\tilde{a}$  ha de ser iterativa. El método de solución utilizado en este trabajo ha sido el de iteración directa, es decir:

$$\underset{\sim}{a}_n = \underset{\sim}{K}_{n-1}^{-1} \underset{\sim}{f} \quad (26b)$$

que si el problema está "bien condicionado" (condiciones de contorno en función de velocidades) converge rápidamente.

Por consiguiente, el esquema operativo general para abordar la solución de un problema de flujo viscoplastico incompresible por elementos finitos sería:

1. Conseguir un programa de elementos finitos para elasticidad lineal isótropa incompresible.
2. Como los corrimientos y las velocidades son análogas, la primera solución de prueba se obtiene fijando las condiciones de velocidad adecuadas en los contornos y un valor de  $\mu = \mu_0$  que defina la viscosidad en todos los puntos.
3. Las velocidades obtenidas en (2) definen una velocidad de deformación para todos los elementos, lo que nos permite, usando la ecuación (19), obtener un nuevo sistema de viscosidades,  $\mu_1$ , aplicable. Asimismo, se puede tener en cuenta ahora la dependencia de las propiedades del material con la temperatura, etc.
4. Las nuevas viscosidades obtenidas en (3) se usan de nuevo para recalcular el problema obteniéndose un nuevo conjunto de velocidades.  
Los pasos (3) y (4) se repiten hasta que se obtiene convergencia en el proceso.

Una vez obtenida convergencia, la última solución "elástica" nos proporciona la distribución de

velocidades, tensiones y reacciones en el problema de flujo.

2.4. Solución por elementos finitos.

Hemos visto en el proceso anterior que la solución "elástica" para el flujo viscoplastico tipo Von Mises ha de ser capaz de tratar la incompresibilidad. Existen muchos procedimientos para ello, que varían desde el más obvio del uso de funciones de corriente [19] hasta el uso de formas de equilibrio híbridas con principios variacionales apropiados [19], pasando por el clásico método de velocidad/presión donde se usan como variables las velocidades (o los desplazamientos análogos) y un multiplicador de Lagrange, como variable asociada que se identifica con la presión, para imponer la condición de incompresibilidad [19].

En este trabajo se ha adoptado la formulación más pragmática que parte de la expresión de velocidades (o corrimientos) general, haciendo la velocidad de deformación volumétrica aproximadamente igual a cero expresándola como cociente entre la presión media y un número muy grande (lo que en la formulación elástica análoga corresponde a tomar un módulo de compresibilidad para un valor del coeficiente de Poisson próximo a 0,5). Esta formulación es exactamente igual a la que se

obtiene expresando la energía de deformación en función de las velocidades de deformación (o deformaciones) desviadoras e imponiendo la condición de incompresibilidad por medio del método de la función de corrección [20]. Expondremos a continuación las bases esenciales del proceso de discretización y de la imposición de la incompresibilidad.

Las ecuaciones de la discretización por elementos finitos se pueden obtener a partir del principio variacional que rige el comportamiento global del sistema en equilibrio, o bien aplicando el método de los residuos ponderados a las ecuaciones de equilibrio de la partícula e integrando por partes [1]. En cualquier caso el sistema de ecuaciones resultante es el mismo y puede escribirse de la forma:

$$\int_{\Omega} \tilde{B}^T \tilde{\sigma} d\Omega = \tilde{f} \tag{27}$$

con:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= [u, v, w]^T = \sum_i \tilde{N}_i \tilde{a}_i = \tilde{N} \tilde{a} ; \\ \tilde{a}_i &= [u_i, v_i, w_i]^T \end{aligned} \tag{28}$$

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{yz} \end{pmatrix} = \tilde{L} \tilde{u} = \tilde{L} \tilde{N} \tilde{a} = \tilde{B} \tilde{a} ; \tilde{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial y} & \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial y} \end{bmatrix}^T \tag{29}$$

$$\tilde{f} = \int_{\Omega} \tilde{N}^T \tilde{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \tilde{N}^T \tilde{t} d\Gamma \tag{30}$$

En las expresiones anteriores  $\tilde{N}$  es la matriz de funciones de interpolación que describen el campo de velocidades (o corrimientos análogos) en función de los parámetros nodales  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$  son fuerzas

másicas y  $\tilde{t}$  fuerzas de superficie. Usando la condición de incompresibilidad, ecuación (25b), podemos escribir la ecuación (22) en forma matricial como:

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \dot{\epsilon} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sigma_m = \mu \tilde{D} \dot{\epsilon} + \tilde{m} \sigma_m \tag{31}$$

# FORMULACION DEL FLUJO VISCOPLASTICO Y SUS APLICACIONES PRACTICAS

Si la presión,  $\sigma_m$ , está acotada, la condición de incompresibilidad puede satisfacerse estableciendo simplemente que:

$$\dot{\epsilon}_{i,i} = m^r \dot{\epsilon} = \frac{\sigma_m}{\alpha} \simeq 0 \quad (32a)$$

donde  $\alpha$  es un número grande. De la ecuación anterior obtenemos:

$$\sigma_m = \alpha m^r \dot{\epsilon} \quad (32b)$$

y por consiguiente, sustituyendo la ecuación (32b) en la ecuación (31):

$$\sigma = \mu D \dot{\epsilon} + \alpha m m^r \dot{\epsilon} \quad (33)$$

y el número grande  $\alpha$  juega un papel análogo al módulo de compresibilidad,  $K$ , en elasticidad, para valores del coeficiente de Poisson próximos a 0,5 (no hay que olvidar que todas las ecuaciones anteriores son igualmente válidas para un sólido elástico sustituyendo simplemente  $\mu$  por  $G$  y  $\dot{\epsilon}$  por  $\epsilon$ ).

Sustituyendo la ecuación (33) en la ecuación (27) y usando la ecuación (29) se obtiene el sistema de ecuaciones final como:

$$\left[ \int B^T \mu D B d\Omega + \int B^T \alpha m m^r B d\Omega \right] a = f \quad (34)$$

que se puede escribir como:

$$[K_1 + \alpha K_2] a = f \quad (35)$$

La solución para incompresibilidad ( $\nu \rightarrow 0,5$  en elasticidad) exige  $\alpha \rightarrow \infty$  (ecuación (32a)). Obviamente a medida que el valor de  $\alpha$  aumenta la ecuación (35) tiende a:

$$K_2 a = \frac{1}{\alpha} f \rightarrow 0 \quad (36)$$

Así, pues, la condición de incompresibilidad domina la solución y en el límite sólo es posible la solución  $a = 0$ , a menos que la matriz  $K_2$  sea singular.

Esta es la dificultad esencial para resolver problemas de incompresibilidad por elementos finitos usando valores de  $\alpha$  muy grandes. Una de las for-

mas de solucionar este problema es imponer la singularidad de la matriz  $K_2$  de manera que:

$$K_2 a = 0 \quad \text{pero} \quad a \neq 0 \quad (37)$$

Evidentemente la singularidad completa de  $K_2$  sólo será necesaria en el límite cuando  $\alpha \rightarrow \infty$ . Dicha singularidad (o casi singularidad para valores de  $\alpha \simeq \infty$ ) se introduce en  $K_2$  usando órdenes

de integración numérica más bajos para calcular las integrales que aparecen en  $K_2$  (ver ecuación

(34)). Este proceso recibe el nombre de integración selectiva y ha sido usado extensamente por muchos [10, 12 y 20] para solucionar este problema. La discusión detallada de dicho proceso cae fuera de los objetivos de este artículo y no se dará aquí. Simplemente añadiremos que en los ejemplos de flujo plano que se dan en este trabajo se ha utilizado el elemento isoparamétrico Lagrangiano de nueve nodos (9L) (fig. 1) con un orden de cuadratura Gaussiana de  $3 \times 3$  para la integración de  $K_1$  y de  $2 \times 2$  para la integración de  $K_2$ .

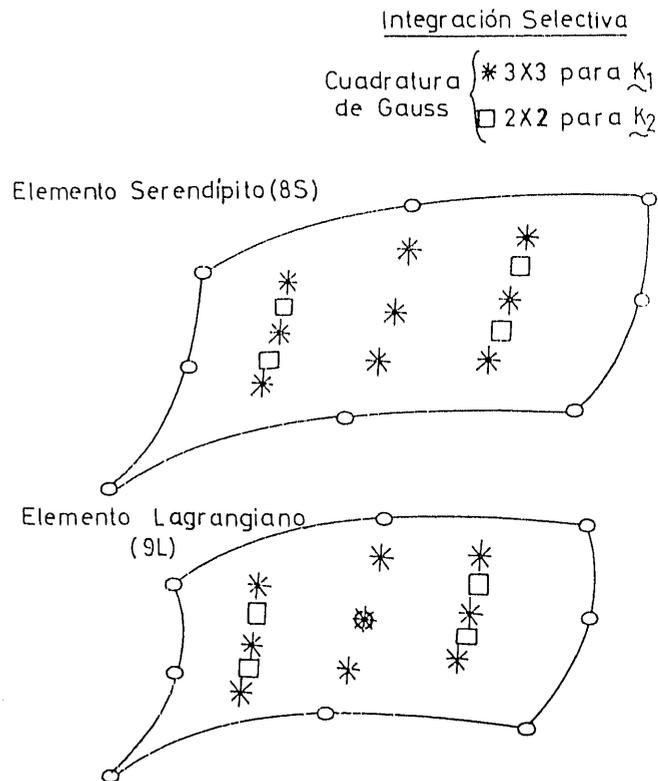
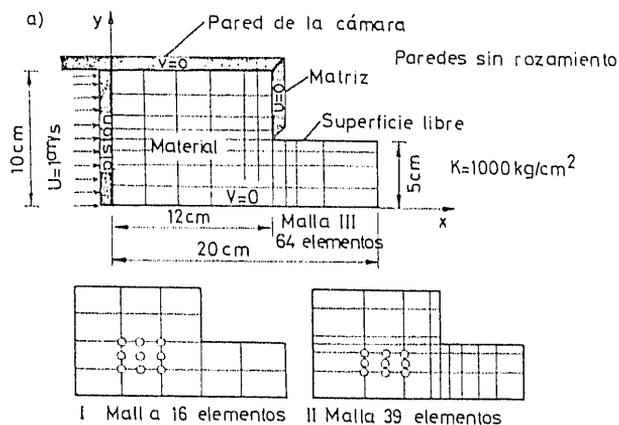


Fig. 1.—Elementos bidimensionales utilizados.

5. Ejemplo de flujo plástico puro. Extrusión plana de un metal.

El primer ejemplo escogido es un problema sencillo de extrusión plana de un metal, de comportamiento supuesto plástico puro, a través de una matriz de reducción 1:2. La geometría del problema y las tres mallas de elementos usadas se pueden ver en la figura 2-A. Las paredes de la cámara se suponen sin rozamiento. La velocidad de entrada está fijada a 1 cm/s.

En la figura 2-B se muestran la velocidad de salida y la presión de extrusión obtenidas con el elemento 9L con integración selectiva. También se muestran para comparación los resultados numéricos obtenidos con el elemento Serendípito de 8 nodos (8S) con integración selectiva (ver figura



b) Solución por líneas de deslizamiento (Johnson<sup>21</sup>) P/K=2.6

	Función de corrección (integración selectiva)	velocidad/presión	
		9L	8S
Malla I	U'	1.987	2.275
	P/K	3.367	3.91
Malla II	U'	2.094	2.178
	P/K	2.915	3.05
Malla III	U'	2.073	2.149
	P/K	2.76	3.03

P=Presión de extrusión  
U=Velocidad a la salida (x=20cm)

Fig. 2.—Extrusión plana.

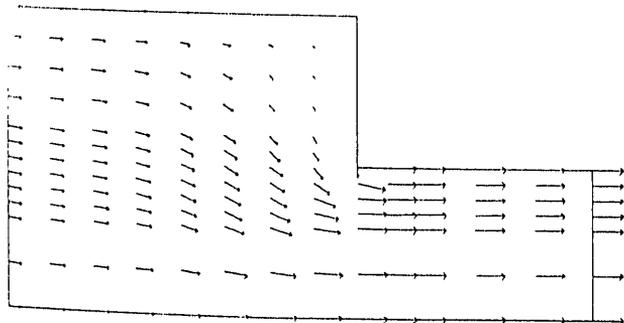


Fig. 3.—Velocidades para el elemento 9L con integración selectiva.

ra 1) con el método de velocidad/presión. Todos los resultados se comparan con la solución exacta para este sencillo problema, obtenida por líneas de deslizamiento [21]. Se observa que la mayor precisión se obtiene con el elemento 9L. El campo de velocidades se muestra en la figura 3.

Otros ejemplos dentro de esta categoría pueden encontrarse en la referencia [10].

3. ESTUDIO DEL EFECTO ACOPLADO DE LA TEMPERATURA

3.1. Ideas básicas y formulación del problema.

En general, es obvio que la hipótesis de que los procesos de conformado de sólidos, como el del ejemplo anterior, son isotérmicos no es defendible y es probable que su utilización conduzca a resultados lejos de la realidad, ya que las deformaciones son muy grandes y ocurren cambios de temperatura debidos a la existencia de fuentes de calor externas, o a la generación espontánea de calor consecuencia de la disipación energética del proceso. En dichos casos, si las propiedades del material son sensibles a la temperatura, el proceso de deformación está altamente acoplado con la ecuación de balance térmico.

La extensión de la formulación del flujo viscoplástico, descrita en el apartado 2.1, para tratar el efecto de la temperatura es sencilla. Evidentemente, si la temperatura y su relación con la tensión de fluencia son conocidas a priori, no aparecen dificultades adicionales en el proceso de iteración general pudiéndose encontrar soluciones de este tipo en numerosas referencias [22 y 23].

De mayor complejidad es el problema de considerar el acoplamiento debido a la disipación de energía que depende a su vez de los valores de la tensión de fluencia, función a su vez de la temperatura. Casi todo el trabajo realizado para producir la deformación plástica se convierte en energía de calor y hace subir la temperatura del material. Es obvio, por tanto, que el proceso de deformación debe estudiarse conjuntamente con el de desarrollo térmico.

La extensión de la formulación anterior para tratar este problema es, no obstante, sencilla y se limita sencillamente a resolver las ecuaciones de flujo, ecuación (34), conjuntamente a la del balance térmico que para flujo incompresible estacionario puede escribirse como:

$$\rho C u^T \nabla T = \nabla^T (\bar{K} \nabla T) + Q \quad (37a)$$

$$\nabla^T = [\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z] \quad (37b)$$

donde  $C$  es el calor específico a presión constante,  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\bar{K}$  es la conductividad del fluido y  $Q$  es el calor generado en el proceso de deformación que se puede escribir como:

$$Q = \frac{r}{J} \epsilon' \sigma \quad (38)$$

donde  $r$  es la fracción del trabajo de deformación que se transforma en calor y  $J$  es el equivalente mecánico del calor.

Discretizando el campo de temperaturas usando las mismas funciones de interpolación que para el de velocidades en la ecuación (28), es decir:

$$T = N T \quad ; \quad T_i = [T_i] \quad (39)$$

y siguiendo procedimientos generales de residuos ponderados de Galerkin aplicados a la ecuación (37a), se obtiene un sistema simultáneo de ecuaciones, *altamente no lineales*, para las velocidades y la temperatura. Utilizando un método de solución iterativo directo, los valores de las temperaturas y velocidades para la iteración  $n$ -ésima vienen dados por:

$$\begin{Bmatrix} a \\ \sim \\ T \\ \sim \end{Bmatrix}^n = \begin{bmatrix} K(a^{n-1}, T^{n-1}) & 0 \\ 0 & H(a^{n-1}, T^{n-1}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f \\ \sim \\ q(T^{n-1}) \\ \sim \end{Bmatrix} \quad (40)$$

Las expresiones detalladas de las distintas matrices que aparecen en la ecuación anterior pueden encontrarse en numerosas referencias [12 y 25], y no se darán aquí, simplemente advertimos que la matriz  $H$  no es simétrica y en la resolución de

la ecuación (40) se ha de utilizar un método de solución para ecuaciones no simétricas. La solución iterativa continúa hasta que se obtiene convergencia para las velocidades y temperaturas.

### 3.2. Ejemplo de flujo plástico plano acoplado con la temperatura. Distribución de la temperatura en un problema de laminado en caliente de un metal.

Los procesos de laminado en caliente son de gran importancia en metalurgia. En este ejemplo se trata de predecir la distribución de temperaturas en un proceso de laminado como el de la figura 4, donde también se muestran la malla de elementos finitos utilizada, las condiciones de contorno y las propiedades del material. La estrecha banda de elementos colocada junto al rodillo tiene la misión de reproducir condiciones de rozamiento [12]. El problema se ha estudiado para dos temperaturas diferentes a la entrada de 700 y 400 °K.

En la figura 5 se muestra la distribución de isotermas obtenidas para los dos casos. Más información sobre este ejemplo puede encontrarse en las referencias [12 y 14].

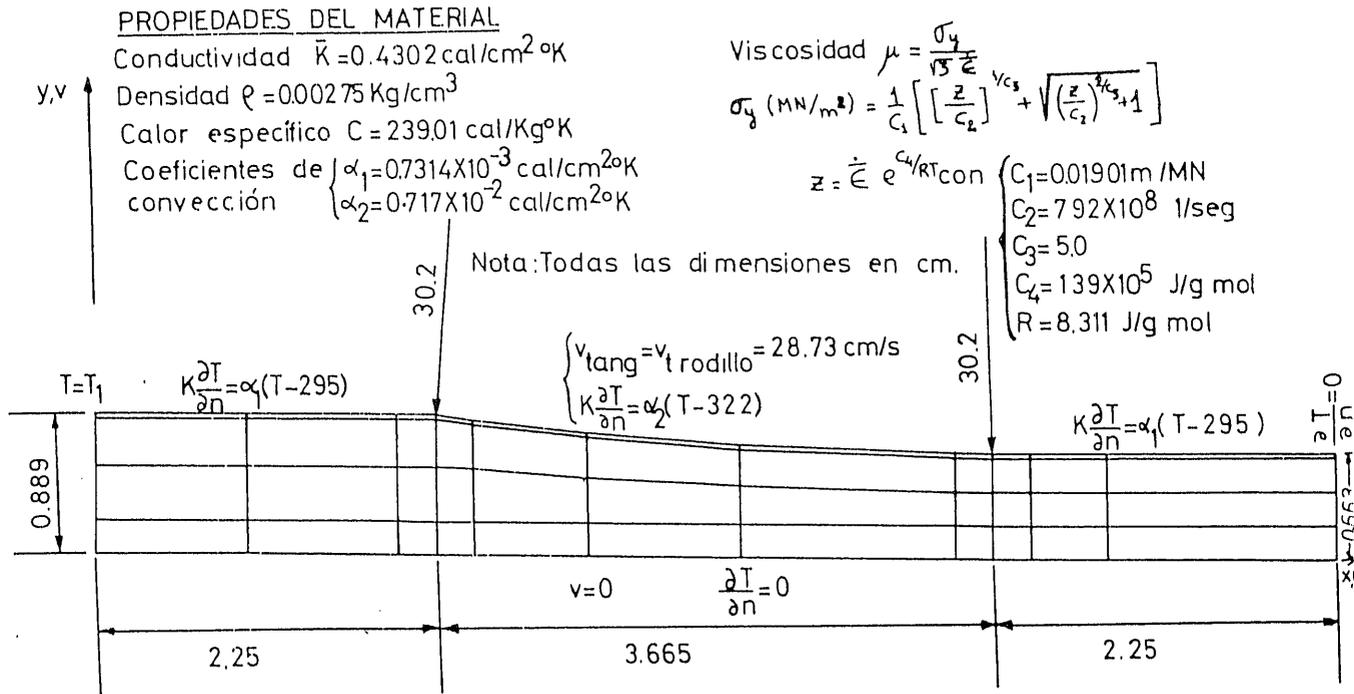


Fig. 4.—Geometría, condiciones de contorno, propiedades del material y malla de elementos finitos utilizados en el problema de laminado en caliente.

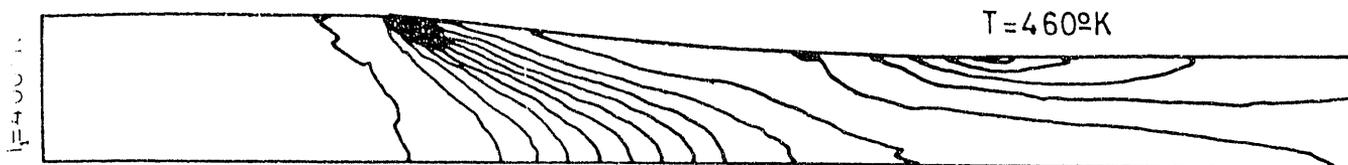


Fig. 5-A.—Isothermas a intervalos de  $\Delta T = 4^\circ \text{ K}$  para una temperatura a la entrada de  $T = 400^\circ \text{ K}$ .

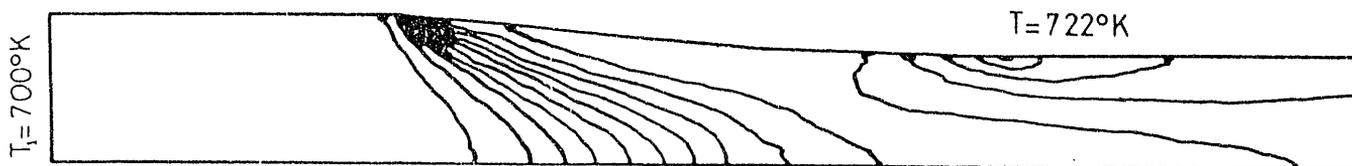


Fig. 5-B.—Isothermas a intervalos de  $\Delta T = 1.5^\circ \text{ K}$  para una temperatura a la entrada de  $T = 700^\circ \text{ K}$ .

#### 4. APLICACION DE LA FORMULACION DEL FLUJO VISCOPLASTICO AL ESTUDIO DE GRANDES DEFORMACIONES PLASTICAS DE PLANCHAS DE METAL. TEORIA DE LAMINAS VISCOSAS

##### 4.1. Analogía lámina elástica/lámina viscosa.

La analogía flujo incompresible a pequeñas velocidades/elasticidad incompresible descrita en la sección 2.3 nos ha permitido tratar problemas de flujo viscoplástico con programas de ordenador escritos para elasticidad incompresible considerando simplemente que las "constantes elásticas" son función del estado de deformación.

La teoría de láminas, como es bien conocido, es una simplificación de la elasticidad tridimensional cuando una de las dimensiones del problema (espesor) es pequeña en comparación con las del resto. Si se efectúa una simplificación análoga en las ecuaciones del flujo viscoplástico a pequeñas velocidades, se observa que la analogía anterior sigue manteniendo si los dos medios, lámina elástica y "pseudo lámina" viscosa, son incompresibles.

*Por consiguiente, la deformación plástica continua (flujo) de láminas de metal (por tanto incompresibles) puede tratarse como un problema de láminas elásticas incompresibles y se puede hacer uso directo de la teoría de láminas reemplazando directamente corrimientos por velocidades, deformaciones por velocidad de deformación y el módulo de rigidez  $G$  por la viscosidad no lineal  $\mu$ .*

Una de las principales ventajas de esta analogía es que debido a la hipótesis de tensión plana en teoría de láminas ( $\sigma_z = 0$ ) la condición de incompresibilidad no es un problema y el comportamiento incompresible de la lámina puede alcan-

zarse simplemente ajustando el espesor, en función de  $\epsilon_z$ , a medida que la solución progresa para asegurar que el volumen se mantiene constante.

Los problemas de grandes deformaciones plásticas de superficies delgadas son problemas transitorios. Para cada configuración se establece la distribución de velocidades y a partir de ésta se obtiene la nueva configuración al cabo de un incremento del tiempo  $\Delta t$ . Una vez obtenida la nueva configuración y las nuevas condiciones de contorno se vuelve a calcular el nuevo campo de velocidades y así sucesivamente. Como cada solución de velocidades comienza en una forma Euleriana a partir de la configuración deformada, se pueden seguir deformaciones muy grandes mediante un simple proceso de repetición del problema en las coordenadas de la geometría deformada.

En la mayoría de estos problemas la superficie se embute por medio de un punzón que gradualmente entra en contacto con la plancha produciéndose un efecto de rozamiento entre punzón y plancha. El tratamiento de rozamiento es complicado y no se dará aquí. Detalles al respecto pueden encontrarse en la referencia [12].

El proceso general de la solución por elementos finitos es como sigue:

(1) Escribir un programa de elementos finitos para láminas elásticas. Este programa nos sirve automáticamente para tratar "láminas viscosas" en virtud de la analogía descrita anteriormente simplemente considerando que en vez de desplazamientos, deformaciones y el módulo  $G$ , tenemos velocidades, velocidades de deformación y la viscosidad no lineal  $\mu$  respectivamente.

Los pasos (2), (3) y (4) son análogos a los descritos en el apartado 2.3 para el problema tridimensional general.

(5) Una vez que se obtiene convergencia se modifica la geometría incrementando las coordenadas nodales en  $a \Delta t$ . Asimismo, se establecen las nuevas condiciones de contorno del problema y se ajusta el espesor de la "lámina" para satisfacer la incompresibilidad.

(6) Comenzar el proceso en (2) extrapolando del último campo de velocidades obtenido.

**4.2. Particularización para problemas con simetría de revolución.**

Muchos procesos de deformación de planchas metálicas en la industria son de revolución. Entre ellos uno de los de más aplicación práctica es la embutición de envases a partir de planchas circulares con punzones esféricos o cilíndricos.

Estos procesos de revolución son más fácil de analizar con la formulación de "láminas viscosas" que el problema general. A pesar de todo la complejidad del problema es grande y sólo hasta muy recientemente han aparecido soluciones numéricas de aplicabilidad general [26 y 28].

En este apartado mostraremos cómo la "formulación de láminas viscosas de revolución" puede utilizarse con éxito para analizar estos problemas.

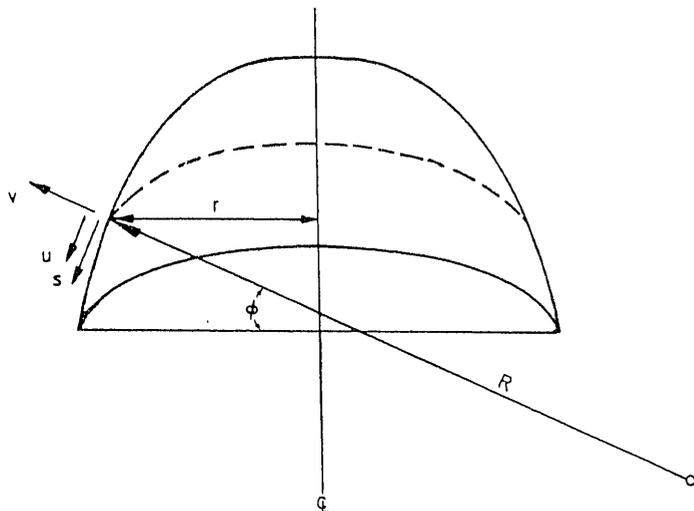


Fig. 6.—Lámina de revolución.

La base del éxito de la formulación está, similarmente a la formulación tridimensional del apartado 2.3, en la eficiencia de la formulación de láminas elásticas análogas. Aquí utilizaremos la formulación sugerida por Zienkiewicz y otros [25] para láminas de revolución analizadas con elementos rectilíneos ( $R = \infty$  en la figura 6).

El vector velocidad de deformación generalizada en un punto de la lámina viscosa análoga viene dado por [25].

$$\dot{\epsilon}^n = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_r \\ \dot{\epsilon}_\theta \\ \dot{K}_r \\ \dot{K}_\theta \\ \dot{\gamma}_{r,\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ (v \cos \phi + u \sin \phi) / r \\ \frac{\partial \beta}{\partial s} \\ \frac{\sin \phi}{r} \\ \frac{\partial v}{\partial s} - \beta \end{pmatrix} \quad (41)$$

donde  $u$ ,  $v$  y  $\beta$  son las velocidades, tangencial, normal y angular en dicho punto.

Las velocidades de deformación reales en dicho punto se obtienen haciendo la hipótesis de que las secciones planas se mantienen planas, por:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \dot{\epsilon}_r^0 + Z \dot{K}_r \\ \dot{\epsilon}_\theta &= \dot{\epsilon}_\theta^0 + Z \dot{K}_\theta \\ \dot{\gamma}_{r,\theta} &= \dot{\gamma}_{r,\theta}^0 \end{aligned} \quad (42)$$

donde  $Z$  es la coordenada del punto en la dirección del espesor.

Como se ha mencionado antes, la condición de incompresibilidad no es problema, pues una vez obtenidos  $\dot{\epsilon}_r$  y  $\dot{\epsilon}_\theta$  se puede calcular  $\dot{\epsilon}_z$  por:

$$\dot{\epsilon}_z = -(\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta) \quad (43)$$

Por tanto, en cada estado de la deformación se puede modificar el espesor de acuerdo con el valor de  $\dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}_z \Delta t$  para satisfacer la condición de volumen constante.

La relación tensión-velocidad de deformación se obtiene haciendo  $\nu = 0,5$  en la relación tensión-deformación para una lámina elástica, y sustituyendo simplemente  $G$  por  $\mu$ , por consiguiente se puede escribir [12]:

$$\sigma = [\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r,\theta}]^T = \hat{D} \dot{\epsilon} = \hat{D} [\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_\theta, \dot{\gamma}_{r,\theta}]^T \quad (44)$$

donde:

$$\hat{D} = \mu \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

y  $\mu$  se obtiene por la expresión (19) o (20).

El proceso de discretización por elementos finitos sigue los pasos habituales [1 y 25]. El elemento utilizado es el sencillo elemento lineal de los nodos (fig. 7) que tan excelentes resultados ha dado para análisis de láminas de revolución plásticas [25]. El campo de velocidades nodales se expresa por:

$$\underline{u} = [u, v, \beta] = \underline{N} \underline{a} \quad ; \quad \underline{a}_i = [u_i, v_i, \beta_i]^T \quad (46)$$

donde las funciones  $N_i$  son lineales de la forma de las de la figura 7.

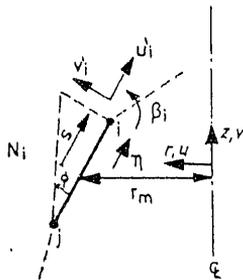


Fig. 7.—Elemento unidimensional lineal.

Minimizando la energía potencial de la "lámina" con respecto a las velocidades nodales se obtienen las ecuaciones típicas de la discretización en la forma general:

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{f} \quad (47)$$

donde:

$$K_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-h/2}^{+h/2} \underline{B}_i^T \underline{D} \underline{B}_j r L d\eta dz \quad (48)$$

don:

$$\underline{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} & 0 & 0 \\ N_i \sin \phi & N_i \cos \phi & 0 \\ r & r & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ 0 & 0 & \frac{N_i \sin \phi}{r} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial s} & -N_i \end{bmatrix}$$

y:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4z & 2z & 0 \\ 2 & 4 & 2z & 4z & 0 \\ 4z & 2z & 4z^2 & 2z^2 & 0 \\ 2z & 4z & 2z^2 & 4z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

donde  $h$  es el espesor de la "lámina".

Adviértase que debido a la dependencia de la matriz  $\underline{D}$  con la deformación, la integración con

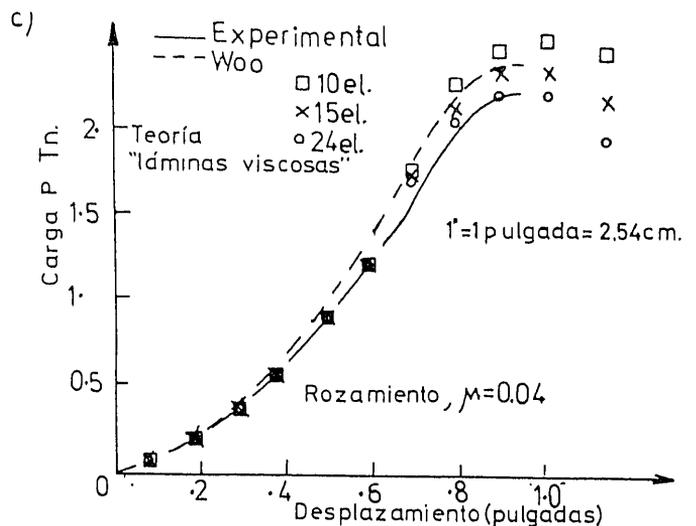
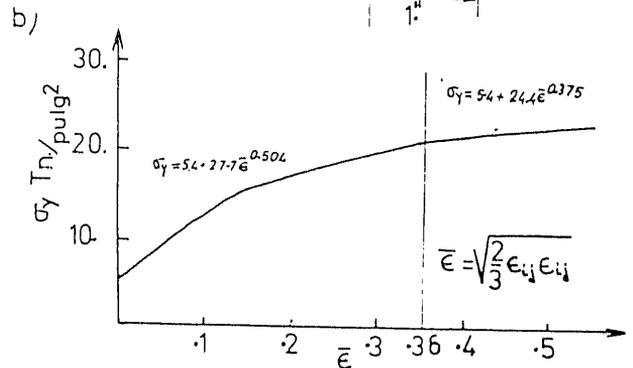
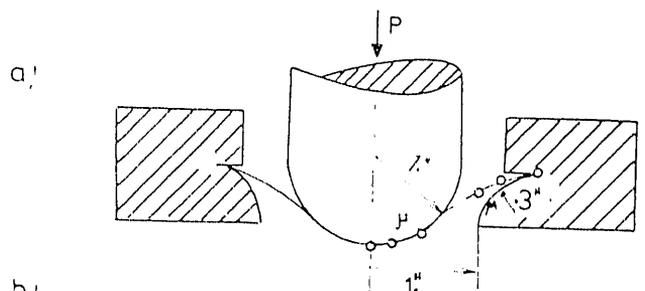


Fig. 8.—Embutición de una plancha circular empotrada con punzón semiesférico.

respecto al espesor debe efectuarse numéricamente y no explícitamente como es corriente en la teoría de láminas de revolución delgadas [25].

Debido a la no linealidad de  $K$  la solución de la ecuación (48) ha de ser iterativa. El proceso de iteración seguido ha sido el directo descrito en el apartado 2.3.

Los procesos de embutición de planchas metálicas son problemas de condiciones de contorno variables con el tiempo, es decir, la forma del nuevo contorno cambia cada vez que la geometría se modifica y nuevos puntos de la plancha entran en contacto con el punzón. El proceso no es sencillo e intervienen efectos como el de rozamiento entre plancha y punzón; asimismo, el proceso es muy sensible al incremento de tiempo que se use para obtener la geometría modificada. Por razones de espacio en este artículo no entraremos en los detalles de estos problemas cuya discusión completa puede encontrarse en las referencias [12 y 26].

4.3. Ejemplo: Embutición de una plancha circular empotrada en sus bordes, con un punzón semiesférico.

Para demostrar la aplicabilidad de la formulación hemos escogido un ejemplo sencillo de deformación por embutición de una plancha circular empotrada en sus bordes por medio de un punzón semiesférico. Este proceso es muy usado en la industria de envases como ensayo de deformabilidad de planchas y para estimar la variación de la fuerza de embutición con la deformación.

Las características geométricas del problema se muestran en la figura 8, donde también se puede ver la curva tensión-deformación del material. Se ha tenido en cuenta en los cálculos el efecto de endurecimiento por deformación ("strain hardening") del material. Asimismo, se ha incorporado el efecto del rozamiento entre plancha y punzón mediante un procedimiento iterativo bastante complejo que va imponiendo sucesivamente la condi-

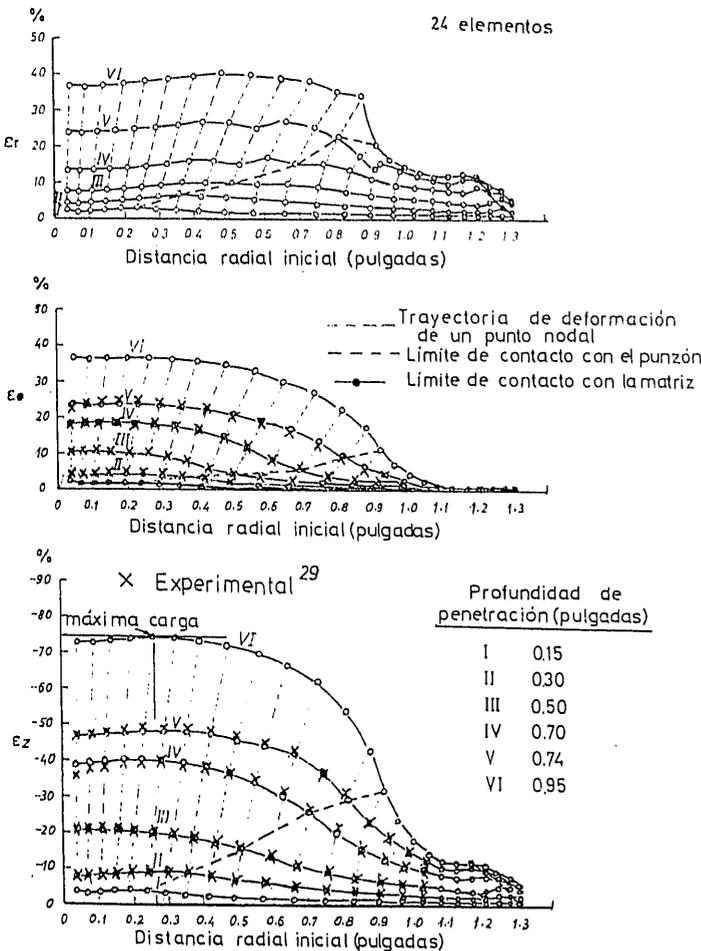


Fig. 9.—Distribución de deformaciones para  $\mu = 0,04$ .

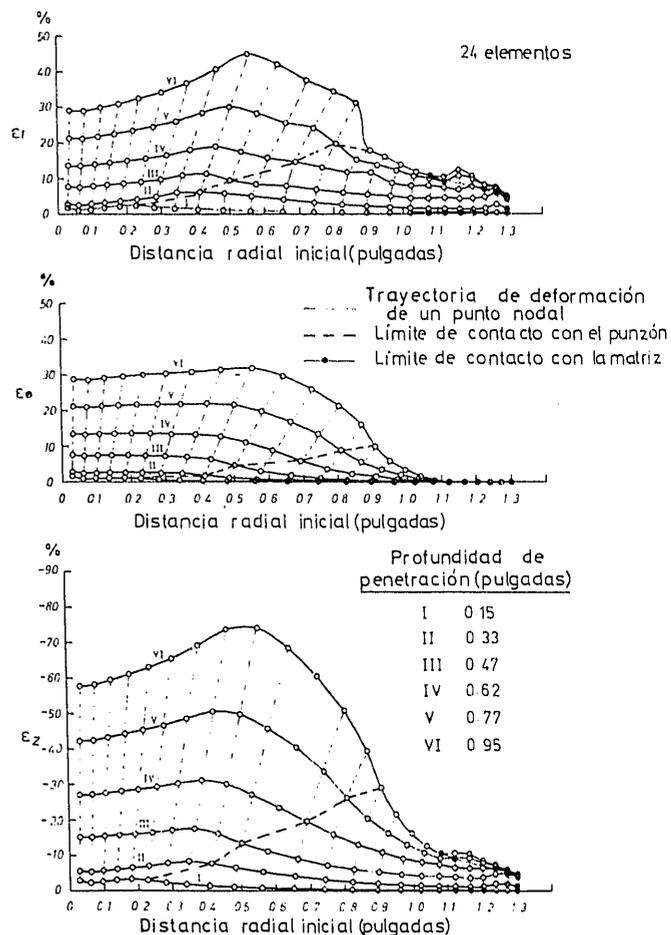


Fig. 10.—Distribución de deformaciones para  $\mu = 0,20$ .

# FORMULACION DEL FLUJO VISCOPLASTICO Y SUS APLICACIONES PRACTICAS

ón de proporcionalidad entre las reacciones en los puntos de contacto entre plancha y punzón más información en referencias [12 y 26].

En la figura 8-C se han dibujado los resultados obtenidos para la curva de carga/deformación, para un coeficiente de rozamiento igual a 0,04, con varios elementos. En la misma figura se muestra una solución experimental [29] y otra analítica obtenida por Woo [29] mediante diferencias finitas aplicadas a las ecuaciones de plasticidad. La concordancia de los resultados obtenidos con los experimentales es buena.

En las figuras 9 a 11 se muestran las distribuciones de las deformaciones circunferencial, radial y en la dirección del espesor con la penetración del punzón para los casos de coeficiente de rozamiento plancha/punzón de 0.04, 0.20 y rozamiento infinito (contacto rígido) respectivamente. Se aprecia que la distribución de deformaciones, y por consiguiente la de espesores es muy sensible al

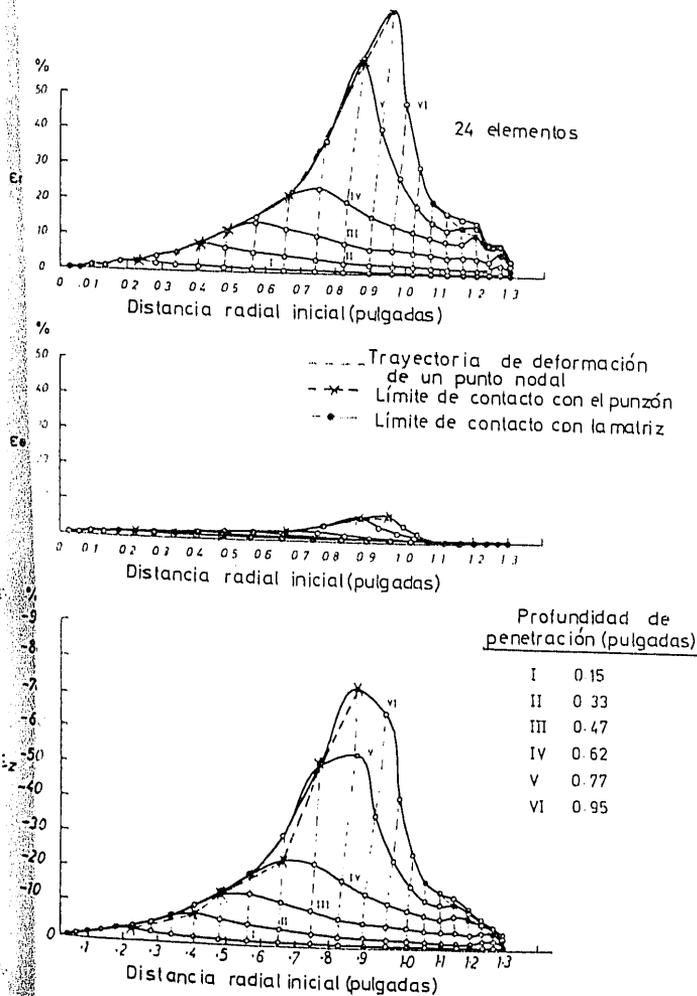


Fig. 11.—Distribución de deformaciones para  $\mu = \infty$ .

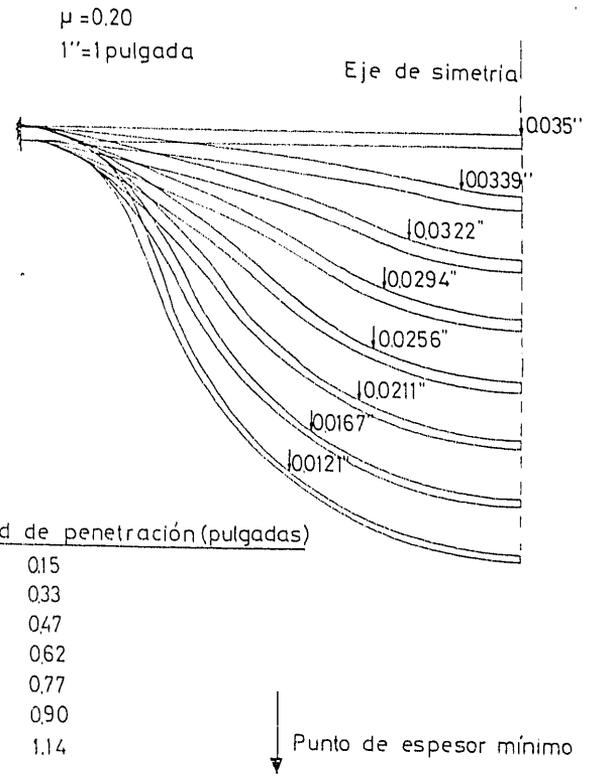
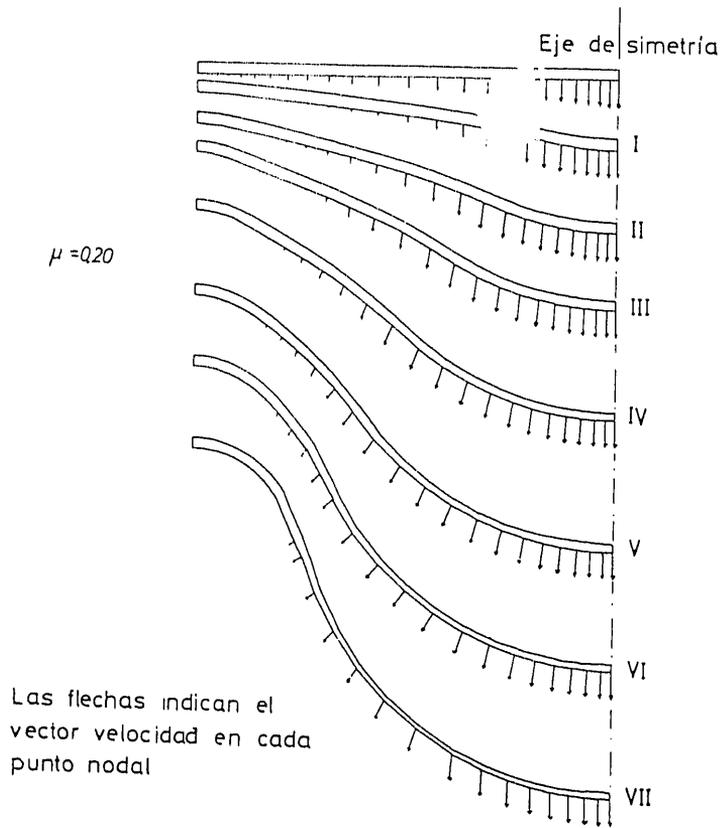


Fig. 12.—Deformada de la plancha para diferentes profundidades de penetración (24 elementos).



Las flechas indican el vector velocidad en cada punto nodal

Fig. 13.—Campo de velocidades nodales para diferentes profundidades de penetración (24 elementos).

rozamiento. Para un rozamiento de 0.04 la comparación con resultados experimentales [29] es excelente.

En la figura 12 se muestra la deformación de la plancha a diferentes penetraciones para un coeficiente de rozamiento de 0,20. Apréciase la disminución del espesor de la misma con la penetración. Finalmente, en la figura 13 se muestra el campo de velocidades nodales a las mismas profundidades de penetración para el mismo problema.

## 5. CONCLUSIONES

La formulación del flujo viscoplástico proporciona un procedimiento versátil y económico para analizar problemas de grandes deformaciones plásticas de sólidos y láminas delgadas bajo deformación continua.

Para materiales tipo Von Mises el proceso se reduce a resolver el problema elástico no lineal equivalente pudiéndose utilizar para ello cualquier programa de elementos finitos escrito para elasticidad. La inclusión de efectos térmicos o de otros tipos de no linealidades del material no presenta dificultades adicionales.

El método parece especialmente adecuado para estudiar procesos de deformación de metales como extrusión, laminado, embutición, etc., con efectos térmicos. No obstante, la formulación es completamente general y aplicable al estudio de las deformaciones de otros muchos materiales, incluso el suelo, para los que se dispongan de leyes de comportamiento similares a la ecuación (8). Debido a su relativamente reciente aparición, muchas posibilidades de este procedimiento están por investigar. Una de las más atrayentes es, sin duda, su utilización para predecir el proceso de deformación de planchas metálicas de forma arbitraria, lo que sería de gran utilidad para las industrias del automóvil o aeronáutica, estándose en la actualidad investigando sobre este tema.

## REFERENCIAS

[1] ZIENKIEWICZ, O. C.: "El método de los elementos finitos". Ed. Reverté. Barcelona, 1980.  
 [2] ZIENKIEWICZ, O. C., and CORMEAU, I. C.: "Visco-plasticity and creep in elastic solids. A unified numerical solution approach". *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 8, 1974.  
 [3] ZIENKIEWICZ, O. C., and CORMEAU, I. C.: "Visco-plasticity and plasticity. An alternative for finite element solution of material non-linearities". *Proc. Colloque Methodes Calcul Sci. Tech.*, 171-199, Iria. París, 1973.

[4] ZIENKIEWICZ, O. C., and CORMEAU, I. C.: "Viscoplasticity solution by the finite element process". *Arch. Mech.*, 24, 873-888, 1972.  
 [5] NGUYEN, Q. S., et ZARKA, J.: "Quelques methodes de resolution numerique en elastoplasticite clasique et en elasto-viscoplasticite". *Sciences et Tech. de l'armement*, 47, 407-436, 1976.  
 [6] ZIENKIEWICZ, O. C., and GODBOLE, P. N.: "Flow of plastic and visco-plastic solids with special reference to extrusion and forming processes". *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 8, 3-16, 1974.  
 [7] ZIENKIEWICZ, O. C., and GODBOLE, P. N.: "Viscous incompressible flow". *International Conference on "Finite Element Methods in Flow Problems"*. Swansea, 1974. Editors R. H. Gallagher, J. T. Oden, C. Taylor, O. C. Zienkiewicz. J. Wiley, 1975.  
 [8] LEE, C. H., and KOBAGASHI, S.: "New solutions to rigid-plastic deformation problems using a matrix method". *I. Eng. Ind. Trans. ASME*, 95, 865, 1973.  
 [9] JAIN, P. C.: "Plastic flow in solids". Ph. D. Thesis. University of Wales. Swansea, C/Ph/40/76, 1976.  
 [10] ZIENKIEWICZ, O. C.; JAIN, P. C., and OÑATE, E.: "Flow of solids during forming and extrusion: Some aspects of numerical solutions". *Int. J. Solids and Structures*. Volume 14, pp. 15-38, 1978.  
 [11] ZIENKIEWICZ, O. C., and OÑATE, E.: "Finite element solutions of some problems of metal forming using the plastic flow approach". *Proceedings del International Congress on Num. Meth. for Eng. GAMMI. Paris, noviembre 1978*.  
 [12] OÑATE, E.: "Plastic flow in metals: I. Coupled Thermal behaviour. II. Thin sheet forming". Ph. D. Thesis, Swansea, diciembre 1978.  
 [13] GOON, G. Y.; POLUCHIN, P. I.; POLUCHIN, W. P., and PRUDCOWSKY, B. A.: "The plastic deformations of metals". *Metallurgica. Moscow (Russian)*, 1968.  
 [14] CORNFIELD, G. C., and JOHNSON, R. H.: "Theoretical predictions of plastic flow in hot rolling including the effect of various temperature distributions". *J. Iron and Steel Institute*, 211, 567-573, 1973.  
 [15] DUNHAM, R. S.: "On application of the finite element method to limit analysis. Computational methods in non linear mechanics". *International Conference on Computational Methods in Non Linear Mechanics*. Texas, 1974.  
 [16] AALTO, J., and SALONEN, E.: "Determination of movements in earth crush by the finite element method". *Internal report Academy of Finland. Research Council for the Technical Science. Finlandia*, 1976.  
 [17] PERZYNA, P.: "Fundamental problems in visco-plasticity". *Recent advances in applied mechanics*, Chap. pages 243-377. Academic Press. New York, 1966.  
 [18] MISES, R. VON: "Mechanik der plastischem Formanderung von Kristallen". *Z. ang. Math. Mech.*, 8, 161, 1923.  
 [19] GODBOLE, P. N.: "Plastic and viscoplastic flow as a special behaviour of non Newtonian fluids". Ph. D. Thesis. University College of Swansea, mayo 1974.  
 [20] ZIENKIEWICZ, O. C., and GODBOLE, P. N.: "A penalty function approach to problems of plastic flow of metals with large surface deformation". *J. Strain Analysis*, 1, No. 3, 180-185, I. Mech. E. 1975.

# FORMULACION DEL FLUJO VISCOPLASTICO Y SUS APLICACIONES PRACTICAS

- 1] JOHNSON, W.: "Extrusion through square dies of large reduction". Journal of Mech. and Phys. of Solids, 4, pages 191-198, 1956.
- 2] BISHOP, J. F. N.: "An approximate method for determining the temperature reached in steady state notion of plane strain". Quat. Journal of Mech. and App. Maths., 9, p. 236, 1956.
- 23] PRICE, J. W. H., and ALEXANDER, J. M.: "The finite element analysis of two high temperature metal deformation processes". 2nd Int. Symp. Finite El. in Flow Problems Santa Margherita, Ligure (Italia), 715-728, junio 1976.
- 24] HEINRICH, J. C.; OÑATE, E., and ZIENKIEWICZ, O. C.: "Finite element solutions of complex thermal flow in metals". Proceedings Int. Conf. on Num. Meth. in Thermal Problems. Swansea, julio 1979.
- 25] ZIENKIEWICZ, O. C.; BAUER, J.; MORGAN, K., and OÑATE, E.: "A simple and efficient element for axisymmetric shells". Int. J. Num. Meth. Eng., 2, 1545-1558, 1977.
- 26] OÑATE, E., and ZIENKIEWICZ, O. C.: "Plastic flow of thin shells". IDDRG Conference, Warwick Univ. April 1978.
- 27] WANG, N. M.: "Large plastic deformation of a circular sheet caused by punch stretching". J. Appl. Mech., 37, 431, 1970.
- 28] WANG, N. M., and BUDIANSKY, B.: "Analysis of sheet metal stamping by a finite element method". J. Appl. Mech., 1978.
- 29] WOO, D. M.: "The stretch-forming test". The Engineer, 220, 876, november 1965.

T: Temperatura.

$\bar{\epsilon}$ : Invariante de deformación efectiva.

$J_2$ : Segundo invariante de las componentes de las tensiones desviadoras.

$\sigma_y$ : Tensión de fluencia.

$s_{ij}$ : Tensión desviadora.

$\sigma_{m, p}$ : Tensión media, presión.

f: Coeficiente de rozamiento.

$\mu$ : Viscosidad.

G: Módulo de rigidez.

K: Módulo de compresibilidad.

$b_i$ : Fuerza másica en dirección i.

K: Matriz de rigidez.

$\sim$  a: Vector de parámetros nodales.

$\sim$  f: Vector de fuerzas nodales equivalentes.

$\sim$  N: Matriz de funciones de forma.

$\sim$  L: Operador de deformaciones.

$\sim$  B: Matriz de deformaciones.

$\sim$  D: Matriz que relaciona tensión y velocidad de deformación.

$\sim$  m: Matriz de incompresibilidad.

$\sim$   $\alpha$ : Parámetro de incompresibilidad.

$\rho, C, K$ : Densidad, calor específico, conductividad.

Q: Calor generado por trabajo de deformación.

H: Matriz de rigidez térmica.

$\dot{\epsilon}^0$ : Vector de velocidad de deformación generalizada en una lámina de revolución.

$\wedge$  D: Matriz que relaciona tensiones y deformaciones totales en una lámina viscosa de revolución.

h: Espesor de la lámina de revolución.

## NOMENCLATURA

$\bar{u}_i (u_i)$ : Corrimiento en dirección i (o velocidades).

$\epsilon_{ij}$ : Tensor de deformación (total).

$\epsilon'_{ij}$ : Tensor de deformación elástica.

$\epsilon''_{ij}$ : Tensor de deformaciones viscoplásticas.

$\cdot$ : Indica derivada con respecto al tiempo.

$\gamma$ : Parámetro de fluidez.

F: Superficie de fluencia.

Q: Superficie potencial.

$\sigma_{ij}$ : Tensor de tensiones.