

# Dinámica Poblacional del SIDA en México de 1983 a 2012: un estudio retrospectivo y prospectivo.

M. G. García Reyna, L. A. Ramírez Hernández\* y J. Martínez Ortiz\*

\*Docente-Investigador en la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas.

Diciembre, 2015

## Resumen

La epidemiología del SIDA es peculiar pues solo hay tres posibles estados: susceptible, infectado y muerto; a diferencia de otras infecciones donde se puede presentar también las fases de immune, y hay una posible transición entre los estados infectado y susceptible. Ello junto con la esperanza de vida actual de una persona infectada en tratamiento, genera una dinámica acumulativa de casos. Esta peculiaridad sugiere ya un comportamiento sigmoidal no simétrico (Modelo de Gompertz). En este trabajo se establecen similitudes y diferencias significativas del comportamiento de la epidemia de SIDA en los últimos treinta años considerando diferentes escenarios: caso Nacional, Estatal (Zacatecas), diferenciado por sexo, por edad y por forma de contagio; haciendo comparativos de los parámetros de los ajustes tipo Gompertz, en cada contexto.

## 1 Introducción

Desde la antigüedad se han tratado de estudiar las epidemias. Se han ideado diferentes explicaciones para comprender las causas de difusión de una enfermedad y combatirla eficazmente. La aplicación de las matemáticas a este problema ha ayudado al entendimiento de este tipo de fenómenos, además de que permite realizar pronósticos, evaluación de políticas de control y monitoreo.

De los primeros modelos matemáticos de los que se tiene registro es la aportación del matemático y médico francés Daniel Bernoulli, quien en 1760 presentó un tratado sobre la epidemia de peste que azotaba Europa en aquella época [Esteva J. et al., 1991]. Con el paso del tiempo se generaron diferentes modelos para pronosticar la evolución de epidemias, uno de esos modelos es el de Gompertz.

En 1895 el matemático inglés Benjamín Gompertz propuso un modelo para describir procesos de crecimiento [Gompertz, 1825]; desde entonces la ecuación de Gompertz ha sido paradigmática

para la descripción de crecimiento tumoral y el empleo para terapias [Laird, 1964, Norton, 2005]. La versatilidad de la ecuación de Gompertz ha permitido ser empleada en la descripción de comportamiento de poblaciones de bacterias [Annadurai et al., 2000], y VIH [Hirimoto et al., 1997]. En general, los parámetros de dicha ecuación son ajustadas empíricamente de acuerdo a los datos de campo del proceso que se describe, sin embargo, aún sigue siendo una incógnita la naturaleza física de las mismas [Izquierdo, et al., 2013]. Algunos trabajos han propuesto un carácter dual, fractal y estocástico, de la ecuación de Gompertz [Waliszewski et al., 2003, Izquierdo et al., 2008].

La ecuación diferencial de Gompertz viene dada por la expresión

$$\frac{dN(t)}{dt} = \beta N(t) \ln \left( \frac{K}{N(t)} \right)$$

Donde  $N(t)$  denota el tamaño de la población,  $\beta$  y  $K$ , los parámetros biológicos que corresponden, respectivamente, a la tasa intrínseca de crecimiento de modelo y la capacidad de carga. La

tasa de crecimiento del modelo está definida como:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \beta \ln\left(\frac{K}{N(t)}\right)$$

Esto significa que la tasa de crecimiento es de orden logarítmico, a diferencia de otros modelos clásicos de crecimiento como los son el logístico o de Verhulst, de Bertalanfly y de Malthus. La capacidad de carga  $K$  denota el tamaño máximo que la población puede alcanzar.

Es posible hallar las soluciones de la ecuación de Gompertz pueden ser halladas de forma explícita y éstas tiene la forma  $N(t) = Ke^{-\alpha e^{-\beta t}}$ , donde el parámetro  $\alpha$  es un número real. Este parámetro resulta de la integración de la ecuación. Obsérvese que si  $N(0) = n_0$ , entonces  $\alpha = \ln\left(\frac{K}{n_0}\right)$ .

El objetivo de este trabajo es establecer, a través del modelo de Gompertz, diferencias y similitudes en el comportamiento de la epidemia del SIDA de 1983 a 2012 para el caso nacional, para el Estado de Zacatecas, por sexo, edad y vía de contagio.

El Síndrome de Inmunodeficiencia Adquirida (SIDA) es la fase final de la enfermedad producida por el virus de Inmunodeficiencia Humana (VIH). Hacia 1981 en los Estados Unidos de América fueron dados a conocer los primeros diagnósticos de SIDA en el mundo, y desde entonces se ha convertido en una de las más peligrosas epidemias que se hayan conocido.

En México en primer diagnóstico notificado del virus tuvo lugar en 1983. El VIH provenía de Estados Unidos de América, consecuencia de la migración de mexicanos. En 1985, la enfermedad en nuestro país tuvo en un inicio un crecimiento exponencial, colocándonos en el lugar 13 de casos de infectados a nivel mundial y tercero en el continente americano, lo que alertó a los servicios de salud de nuestro país.

A la fecha la epidemia del VIH/SIDA ha cobrado la vida de unas 36 millones personas en el mundo, se calculó que en 2012 murieron 1.6 millones de personas debido a esta enfermedad (Córdova et al., 2009). Se sabe, de acuerdo a los

registros de casos de SIDA, que un 94.1 % de casos se originaron por vía sexual, 3.8 % por vía sanguínea (incluye transfusiones de sangre, usuarios de drogas intravenosas y exposición ocupacional), 2.1 % corresponde a vía perinatal.

Los antecedentes mencionados señalan que nos enfrentamos a un problema de gran envergadura y cualquier esfuerzo para entender la dinámica de la epidemia aunado a trabajos de carácter epidemiológicos que permiten tener control de la misma, redundará en tener eficientes políticas de salud, como tratamiento, monitoreo y control de los pacientes con VIH.

## 2 Descripción del Método

### 2.1. Obtención de datos

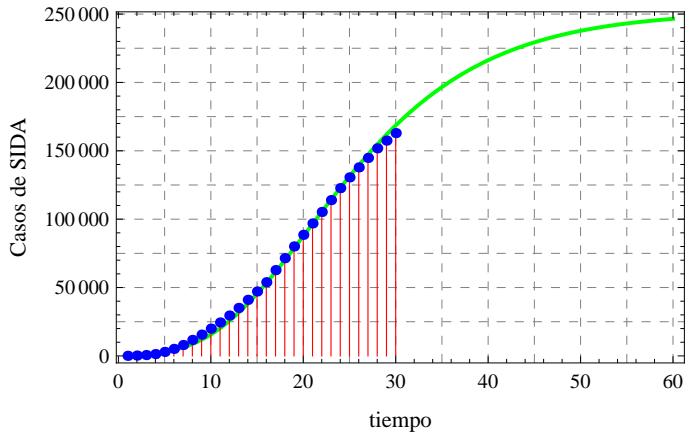
Se utilizaron los ajustes tipo Gompertz, para la epidemia de SIDA, construidos en diferentes escenarios: nivel nacional, por sexo, por forma de contagio y a nivel estatal. Las tablas de datos fueron recabadas del sitio web de CENSIDA y en los Servicios de Salud de Zacatecas.

El primer análisis que se realizó fue el caso nacional. Se consideraron los casos de SIDA diagnosticados por año, y se construyó la columna de acumulados. En la figura 1 se muestra la tabla, así como el ajuste de la Curva de Gompertz para los casos acumulados, tanto en forma gráfica como la expresión analítica. Se muestran además las medidas estadísticas que validan el modelo.

El segundo análisis que se realizó, fue estudiar el comportamiento de la epidemia en la población joven (15-24 años) a nivel nacional, que es donde se da mayor prevalencia. En la figura 2 se muestran los casos diagnosticados por año y el respectivo acumulado. Se hizo diferenciación por sexo.

Nuevamente, se hizo el ajuste de curvas tipo Gompertz con buenos resultados. En la figura 3 se muestran los gráficos de los datos (punteado) y la curva que mejor se ajustó; del lado izquierdo hombres y del derecho mujeres. Bajo cada curva se da la expresión del modelo y las medidas estadísticas de bondad de ajuste.

| Año  | Casos diagnosticados por año | Casos diagnosticados acumulados |
|------|------------------------------|---------------------------------|
| 1983 | 67                           | 67                              |
| 1984 | 194                          | 261                             |
| 1985 | 366                          | 627                             |
| 1986 | 709                          | 1336                            |
| 1987 | 1596                         | 2932                            |
| 1988 | 2196                         | 5128                            |
| 1989 | 2848                         | 7976                            |
| 1990 | 3711                         | 11687                           |
| 1991 | 3882                         | 15569                           |
| 1992 | 4370                         | 19939                           |
| 1993 | 4522                         | 24461                           |
| 1994 | 5067                         | 29528                           |
| 1995 | 5571                         | 35099                           |
| 1996 | 5913                         | 41012                           |
| 1997 | 6123                         | 47135                           |
| 1998 | 6762                         | 53897                           |
| 1999 | 8870                         | 62767                           |
| 2000 | 8700                         | 71467                           |
| 2001 | 8608                         | 80075                           |
| 2002 | 8479                         | 88554                           |
| 2003 | 8347                         | 96901                           |
| 2004 | 8379                         | 105280                          |
| 2005 | 8667                         | 113947                          |
| 2006 | 8768                         | 122715                          |
| 2007 | 7860                         | 130575                          |
| 2008 | 7295                         | 137575                          |
| 2009 | 6924                         | 144794                          |
| 2010 | 7041                         | 151835                          |
| 2011 | 5627                         | 157462                          |
| 2012 | 5483                         | 162945                          |



$$N(t) = 252,020.7427e^{7.3010e^{-0.0966t}}$$

Error cuadrático 13.88

Error cuadrático medio 0.49

Correlación r=0.996

**Figura 1:** Casos de SIDA en México de 1983 a 2012, reportados y acumulado. En grafica se muestran los datos acumulados (punteado) y la curva de Gompertz ajustada. Debajo de ésta la ecuación de la curva, los errores cuadrático y cuadrático medio, y la correlación.

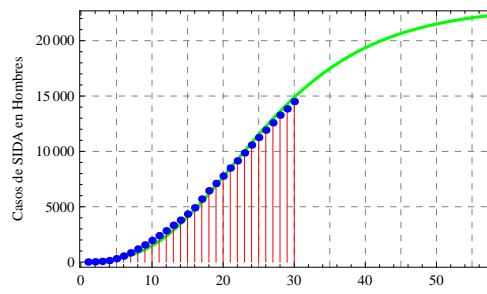
| HOMBRES 15-24 AÑOS |                              |                          |
|--------------------|------------------------------|--------------------------|
| Año                | Casos de SIDA diagnosticados | Casos de SIDA acumulados |
| 1983               | 7                            | 7                        |
| 1984               | 19                           | 26                       |
| 1985               | 38                           | 64                       |
| 1986               | 74                           | 138                      |
| 1987               | 171                          | 309                      |
| 1988               | 236                          | 545                      |
| 1989               | 295                          | 840                      |
| 1990               | 343                          | 1183                     |
| 1991               | 369                          | 1552                     |
| 1992               | 400                          | 1952                     |
| 1993               | 434                          | 2386                     |
| 1994               | 444                          | 2830                     |
| 1995               | 493                          | 3323                     |
| 1996               | 467                          | 3790                     |
| 1997               | 552                          | 4342                     |
| 1998               | 566                          | 4908                     |
| 1999               | 788                          | 5696                     |
| 2000               | 750                          | 6446                     |
| 2001               | 659                          | 7105                     |
| 2002               | 664                          | 7769                     |
| 2003               | 728                          | 8497                     |
| 2004               | 650                          | 9147                     |
| 2005               | 712                          | 9859                     |
| 2006               | 717                          | 10576                    |
| 2007               | 680                          | 11256                    |
| 2008               | 667                          | 11923                    |
| 2009               | 660                          | 12583                    |
| 2010               | 691                          | 13274                    |
| 2011               | 569                          | 13843                    |
| 2012               | 658                          | 14501                    |

(a) Hombres

| MUJERES 15-24 AÑOS |                              |                          |
|--------------------|------------------------------|--------------------------|
| Año                | Casos de SIDA diagnosticados | Casos de SIDA acumulados |
| 1983               | 0                            | 0                        |
| 1984               | 2                            | 2                        |
| 1985               | 3                            | 5                        |
| 1986               | 12                           | 17                       |
| 1987               | 40                           | 57                       |
| 1988               | 38                           | 95                       |
| 1989               | 59                           | 154                      |
| 1990               | 64                           | 218                      |
| 1991               | 75                           | 293                      |
| 1992               | 111                          | 404                      |
| 1993               | 90                           | 494                      |
| 1994               | 87                           | 581                      |
| 1995               | 124                          | 705                      |
| 1996               | 134                          | 839                      |
| 1997               | 149                          | 988                      |
| 1998               | 191                          | 1179                     |
| 1999               | 202                          | 1381                     |
| 2000               | 262                          | 1643                     |
| 2001               | 253                          | 1896                     |
| 2002               | 262                          | 2158                     |
| 2003               | 271                          | 2429                     |
| 2004               | 279                          | 2708                     |
| 2005               | 254                          | 2962                     |
| 2006               | 285                          | 3247                     |
| 2007               | 280                          | 3527                     |
| 2008               | 242                          | 3769                     |
| 2009               | 212                          | 3981                     |
| 2010               | 204                          | 4185                     |
| 2011               | 161                          | 4346                     |
| 2012               | 182                          | 4528                     |

(b) Mujeres

**Figura 2:** Casos de SIDA en población de jóvenes (15-24 años) en México de 1983 a 2012, reportados y acumulado.

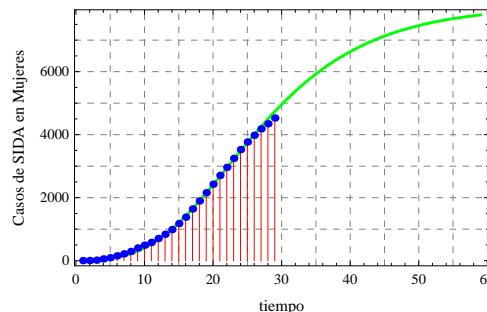


$$(a) N(t) = 23,066.1746e^{-6.8857e^{-0.0918t}}$$

Error cuadrático 20.53 %

Error cuadrático medio 0.73 %

Correlación r=0.99462



$$(b) N(t) = 8,079.639e^{-7.4397e^{-0.09078t}}$$

Error cuadrático 13.24 %

Error cuadrático medio 0.49 %

Correlación r=0.99606

**Figura 3:** Las graficas muestran los datos acumulados (punteado) y la curva de Gompertz ajustada; 3(a):hombres, 3(b):mujeres.

Un tercer análisis, aún en el contexto nacional, consistió en estudiar el comportamiento de la epidemia por forma de contagio. Se analizaron dos: vía sexual y vía perinatal. La transmisión por vía sanguínea presenta un patrón diferente al tener dos variantes: contagio por transfusión

y contagio por uso de drogas. En el primer caso, no hay reportes de contagio desde el 2005, por lo que no representa ya un problema de interés. En el segundo caso, existe ambigüedad en la clasificación de los casos reportados de contagio por esta vía, dado que usualmente se presentan situaciones de riesgo de contagio sexual, acompañando a éste tipo. En la figura 4 se muestran los datos considerados, el número de diagnósticos por año, y el acumulado.

| Vía Sexual |                              |                          |
|------------|------------------------------|--------------------------|
| Año        | Casos de SIDA diagnosticados | Casos de SIDA acumulados |
| 1983       | 55                           | 55                       |
| 1984       | 91                           | 146                      |
| 1985       | 240                          | 386                      |
| 1986       | 491                          | 877                      |
| 1987       | 1094                         | 1971                     |
| 1988       | 1439                         | 3410                     |
| 1989       | 1787                         | 5197                     |
| 1990       | 1704                         | 6901                     |
| 1991       | 2044                         | 8945                     |
| 1992       | 2515                         | 11460                    |
| 1993       | 2578                         | 14038                    |
| 1994       | 3022                         | 17060                    |
| 1995       | 2960                         | 20020                    |
| 1996       | 2916                         | 22936                    |
| 1997       | 3397                         | 26333                    |
| 1998       | 2751                         | 29084                    |
| 1999       | 3261                         | 32345                    |
| 2000       | 4026                         | 36371                    |
| 2001       | 4951                         | 41322                    |
| 2002       | 5239                         | 46561                    |
| 2003       | 5692                         | 52253                    |
| 2004       | 5882                         | 58135                    |
| 2005       | 6468                         | 64603                    |
| 2006       | 6521                         | 71124                    |
| 2007       | 6696                         | 77820                    |
| 2008       | 6288                         | 84108                    |
| 2009       | 6087                         | 90195                    |
| 2010       | 6280                         | 96475                    |
| 2011       | 5138                         | 101613                   |
| 2012       | 5227                         | 106840                   |

(a) Vía Sexual

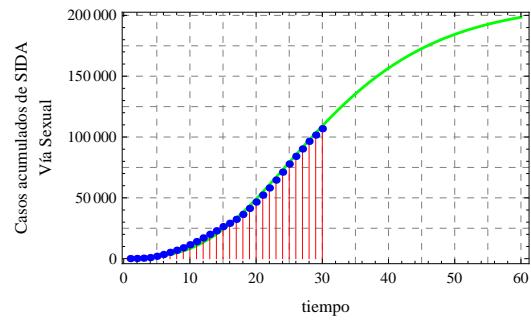
| Vía Perinatal |                              |                          |
|---------------|------------------------------|--------------------------|
| Año           | Casos de SIDA diagnosticados | Casos de SIDA acumulados |
| 1983          | 0                            | 0                        |
| 1984          | 0                            | 0                        |
| 1985          | 0                            | 0                        |
| 1986          | 6                            | 6                        |
| 1987          | 23                           | 29                       |
| 1988          | 41                           | 70                       |
| 1989          | 39                           | 109                      |
| 1990          | 39                           | 148                      |
| 1991          | 50                           | 198                      |
| 1992          | 47                           | 245                      |
| 1993          | 64                           | 309                      |
| 1994          | 71                           | 380                      |
| 1995          | 56                           | 436                      |
| 1996          | 75                           | 511                      |
| 1997          | 89                           | 600                      |
| 1998          | 69                           | 669                      |
| 1999          | 92                           | 761                      |
| 2000          | 105                          | 866                      |
| 2001          | 127                          | 993                      |
| 2002          | 164                          | 1157                     |
| 2003          | 168                          | 1325                     |
| 2004          | 147                          | 1472                     |
| 2005          | 158                          | 1630                     |
| 2006          | 152                          | 1782                     |
| 2007          | 152                          | 1934                     |
| 2008          | 110                          | 2044                     |
| 2009          | 115                          | 2159                     |
| 2010          | 103                          | 2262                     |
| 2011          | 64                           | 2326                     |
| 2012          | 67                           | 2393                     |

(b) Vía Perinatal

**Figura 4:** Casos de SIDA, por vía de contagio, en México de 1983 a 2012, reportados y acumulado.

Al realizar el ajuste, nuevamente el comportamiento sigmoidal se hace presente. En la figura 5 se presentan las gráficas de datos (puntueado) y el ajuste de Gompertz (curva). Debajo de cada curva se da la expresión analítica de los modelos, así como las medidas estadísticas de bondad de ajuste.

Finalmente, se realizó el análisis para el caso específico del Estado de Zacatecas, la metodología fue la misma. Se analizaron los casos reportados desde la llegada del síndrome, 1986, y hasta el 2012. Nuevamente, al construir la tabla con los datos acumulados, se presenta un comportamiento tipo sigmoidal, de Gompertz. En la figura 6 se presentan los datos usados (SSZ, 2013), la gráfica con los datos acumulados por año y la curva



(a) Vía Sexual

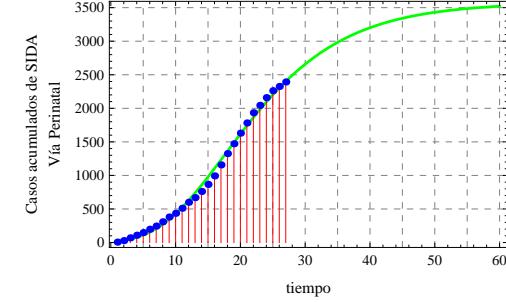
Vía Perinatal

$$N(t) = 210,857.1214e^{-7.1608e^{-0.0795t}}$$

Error cuadrático 18.2 %

Error cuadrático medio 0.65 %

Correlación  $r=0.99365$



$$(b) N(t) = 3,575.6279e^{-5.66817e^{-0.09385t}}$$

Error cuadrático 13.02 %

Error cuadrático medio 0.52 %

Correlación  $r=0.99592$

**Figura 5:** Casos de SIDA por vía de contagio, en México de 1983 a 2012, reportados y acumulado.

de Gompertz que mejor se ajustó, así como los indicadores estadísticos.

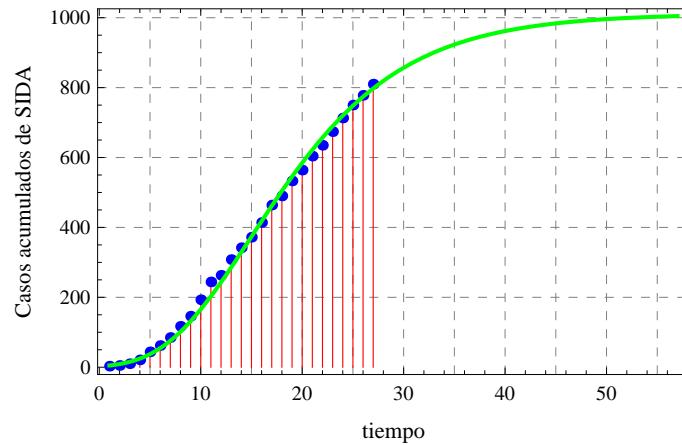
### 3 Análisis de resultados

Es posible hacer un análisis comparativo, por sectores, del comportamiento de la epidemia, únicamente considerando los valores que toman los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de los respectivos modelos de Gompertz ajustados. Si se analiza la ecuación diferencial de Gompertz, resulta sencillo determinar el punto en el que ocurre el cambio de concavidad, éste ocurre cuando la segunda derivada se anula, esto es:

$$K\alpha\beta^2e^{-\alpha e^{-\beta t}-\beta t}[\alpha e^{-\beta t}-1] = 0$$

esto ocurre solamente cuando  $\alpha = e^{\beta t}$ . Esto es, el punto de inflexión depende tanto del valor de  $\beta$ , como del valor de  $\alpha$ . De donde  $\alpha > 0$  siempre; además, si  $\alpha$  es grande, el punto de inflexión ocurre en tiempos cada vez posteriores. En lo que

| Zacatecas |                              |                          |
|-----------|------------------------------|--------------------------|
| Año       | Casos de SIDA diagnosticados | Casos de SIDA acumulados |
| 1986      | 3                            | 3                        |
| 1987      | 2                            | 5                        |
| 1988      | 5                            | 10                       |
| 1989      | 11                           | 21                       |
| 1990      | 23                           | 44                       |
| 1991      | 18                           | 62                       |
| 1992      | 23                           | 85                       |
| 1993      | 32                           | 117                      |
| 1994      | 29                           | 146                      |
| 1995      | 47                           | 193                      |
| 1996      | 51                           | 244                      |
| 1997      | 19                           | 263                      |
| 1998      | 45                           | 308                      |
| 1999      | 34                           | 342                      |
| 2000      | 30                           | 372                      |
| 2001      | 42                           | 414                      |
| 2002      | 50                           | 464                      |
| 2003      | 26                           | 490                      |
| 2004      | 43                           | 533                      |
| 2005      | 31                           | 564                      |
| 2006      | 40                           | 604                      |
| 2007      | 31                           | 635                      |
| 2008      | 39                           | 674                      |
| 2009      | 39                           | 713                      |
| 2010      | 37                           | 750                      |
| 2011      | 28                           | 778                      |
| 2012      | 32                           | 810                      |



$$N(t) = 1,011.2008e^{-5.9921e^{-0.119624t}}$$

Error cuadrático 10.44

Error cuadrático medio 0.41

Correlación r=0.9978

**Figura 6:** Tabla de diagnósticos de SIDA por año en el estado de Zacatecas de 1986 al 2012. En la gráfica se muestran los datos acumulados (punteado), así como el ajuste de Gompertz (curva continua) y la ecuación e indicadores estadísticos de la bondad de ajuste.

se refiere al parámetro  $\beta$ , se observa que, dado que  $t = \frac{\ln \alpha}{\beta}$ , ocurren dos situaciones, entre más pequeño es el valor de  $\beta$ , entonces el punto de inflexión ocurre en tiempo posterior; sin embargo, hay una proporcionalidad directa entre el valor máximo esperado para la primera derivada de la curva de Gompertz (que en este caso coincide con los datos reportados por año, no acumulado).

## 4 Conclusiones

La epidemia a nivel Nacional, en jóvenes hombres o mujeres, tiene un valor de  $\beta$  similar (0.09662, 0.0918 y 0.09078, respectivamente), pero valores diferentes de  $\alpha$  (7.3010, 6.8857 y 7.4397, respectivamente), siendo el menor el caso de hombres, lo que nos indica que el punto de inflexión, y por lo tanto la estabilización, se dará antes. Cuando se hace el comparativo, ahora tomando las vías de contagio, observamos que la vía sexual presenta un parámetro  $\alpha$  significativamente mayor al de la transmisión por la vía perinatal (7.1608 y 5.6681, respectivamente). Esto se interpreta como una estabilización más lenta. Sin embargo es un valor similar a los obtenidos en el caso Nacional y al de mujeres jóvenes. Para el parámetro  $\beta$ , se

tiene disparidad de nuevo, la vía sexual toma un valor menor en una centésima (0.07953 y 0.09385). La interpretación de ésta es que se espera un valor máximo mayor, es decir, un pico más alto en el reporte anual de casos.

Al analizar el caso particular del Estado de Zacatecas, en comparación con el caso Nacional, se observa que se tiene un valor menor de  $\alpha$  (5.9921 y 7.3010), comparable solo con el del caso perinatal Nacional. Esto nos indica una estabilización más temprana. Al analizar el caso del parámetro  $\beta$ , ocurre que éste es el mayor de todas las situaciones (0.1196), lo que causa un retraso en la estabilización, pero que se ve compensado con un valor máximo esperado relativamente pequeño.

## 5 Comentarios finales

El análisis aquí presentado, habilita una nueva forma de hacer estimaciones comparativas en diferentes escenarios de la epidemia. Esta forma de hacer comparativos es una herramienta objetiva medible, y deja de lado la ambigüedad que pudiera presentarse en un comparativo basado solo en proporcionalidad de poblaciones.

## Referencias

- [1] Annadurai G., Rajesh Babu, S., Srinivasamoorthy V. R., "Development of mathematical models (logistic, Gompertz and Richards models) describing the growth pattern of *Pseudomonas putida* (NICN 2174)", *Bio-process Engineering* 23, pp. 607-612, (2000).
- [2] CENSIDA, "Vigilancia Epidemiológica de casos de VIH/SIDA en México Registro Nacional de casos de SIDA", CENSIDA 2013, consulta realizada el 01 de agosto de 2013. Dirección de internet  
[http://www.censida.salud.gob.mx/.](http://www.censida.salud.gob.mx/)
- [3] Córdova Villalobos J. A., Ponce de León Rosales S., Valdespino, J. L. "25 años de SIDA en México. Logros, desaciertos y retos". México: Instituto Nacional de Salud Pública, (2009).
- [4] Esteva L., Hernández J., Gómez G., Zapata M., "Matemáticas y epidemiología", Ciencias, 24, pp. 57-62, (1991).
- [5] Faustino Sánchez J. L., "Matemáticas para las Ciencias Naturales", Sociedad Matemática Mexicana, México, (1998).
- [6] Gompertz, B., "On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies", *Philosophical Transactions of the Royal Society London* 36, p. 513, (1825).
- [7] Hirimoto K., Hofuku I., Oshima K., "Population dynamics of HIV positive by application of a locally modified Gompertz curve: a case study for Japan", *Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications*, 30, 2, pp. 985-993, (1997).
- [8] Izquierdo-Kulich E., Regalado O. Nieto-Villar M. J. "Origen fractal de la Ecuación de Gompertz", *Revista Cubana de Física.*, 30, pp. 26-27, (2013).
- [9] Izquierdo-Kulich E., Nieto-Villar J. M., E. Izquierdo and J. M. Nieto-Villar, "Morphogenesis of the Tumour Patterns" *Mathematical Biosciences and Engineering* 5, pp. 299-313, (2008).
- [10] Katsuhisa H. y Ichiro Hofuku, K. O., "Population Dynamics of HIV Positive by application of a locally modified Gompertz curve: a case study for Japan", *Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications*, Vol. 30, No. 2, pp 985-993, 1997.
- [11] Laird A. K. "Dynamics of tumour growth", *British journal of cancer* 18, pp. 490-502, (1964).
- [12] Norton L, "Conceptual and practical implications of breast tissue geometry: toward a more effective, less toxic therapy", *Oncologist* 10, pp.370-380, (2005).
- [13] P. Waliszewski P., Konerski J., "The Gompertzian curve reveals fractal properties of tumor growth" , *Chaos, Solitons and Fractals*, 16, pp. 665-674, (2003).
- [14] Servicios de Salud del Estado de Zacatecas, Datos Históricos y Estadísticos del Programa Estatal de VIH/SIDA/ITS, (2013).