

Dinámica Poblacional del SIDA en México de 1983 a 2012: un estudio retrospectivo y prospectivo.

M. G. García Reyna, L. A. Ramírez Hernández* y J. Martínez Ortiz*

*Docente-Investigador en la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas.

Diciembre, 2015

Resumen

La epidemiología del SIDA es peculiar pues solo hay tres posibles estados: susceptible, infectado y muerto; a diferencia de otras infecciones donde se puede presentar también las fases de inmune, y hay una posible transición entre los estados infectado y susceptible. Ello junto con la esperanza de vida actual de una persona infectada en tratamiento, genera una dinámica acumulativa de casos. Esta peculiaridad sugiere ya un comportamiento sigmoideal no simétrico (Modelo de Gompertz). En este trabajo se establecen similitudes y diferencias significativas del comportamiento de la epidemia de SIDA en los últimos treinta años considerando diferentes escenarios: caso Nacional, Estatal (Zacatecas), diferenciado por sexo, por edad y por forma de contagio; haciendo comparativos de los parámetros de los ajustes tipo Gompertz, en cada contexto.

1 Introducción

Desde la antigüedad se han tratado de estudiar las epidemias. Se han ideado diferentes explicaciones para comprender las causas de difusión de una enfermedad y combatirla eficazmente. La aplicación de las matemáticas a este problema ha ayudado al entendimiento de este tipo de fenómenos, además de que permite realizar pronósticos, evaluación de políticas de control y monitoreo.

De los primeros modelos matemáticos de los que se tiene registro es la aportación del matemático y médico francés Daniel Bernoulli, quien en 1760 presentó un tratado sobre la epidemia de peste que azotaba Europa en aquella época [Esteva J. et al., 1991]. Con el paso del tiempo se generaron diferentes modelos para pronosticar la evolución de epidemias, uno de esos modelos es el de Gompertz.

En 1895 el matemático inglés Benjamín Gompertz propuso un modelo para describir procesos de crecimiento [Gompertz, 1825]; desde entonces la ecuación de Gompertz ha sido paradigmática

para la descripción de crecimiento tumoral y el empleo para terapias [Laird, 1964, Norton, 2005]. La versatilidad de la ecuación de Gompertz ha permitido ser empleada en la descripción de comportamiento de poblaciones de bacterias [Annadurai et al., 2000], y VIH [Hirimoto et al., 1997]. En general, los parámetros de dicha ecuación son ajustadas empíricamente de acuerdo a los datos de campo del proceso que se describe, sin embargo, aún sigue siendo una incógnita la naturaleza física de las mismas [Izquierdo, et al., 2013]. Algunos trabajos han propuesto un carácter dual, fractal y estocástico, de la ecuación de Gompertz [Waliszewski et al., 2003, Izquierdo et al., 2008].

La ecuación diferencial de Gompertz viene dada por la expresión

$$\frac{dN(t)}{dt} = \beta N(t) \ln \left(\frac{K}{N(t)} \right)$$

Donde $N(t)$ denota el tamaño de la población, β y K , los parámetros biológicos que corresponden, respectivamente, a la tasa intrínseca de crecimiento de modelo y la capacidad de carga. La

tasa de crecimiento del modelo está definida como:

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = \beta \ln \left(\frac{K}{N(t)} \right)$$

Esto significa que la tasa de crecimiento es de orden logarítmico, a diferencia de otros modelos clásicos de crecimiento como los son el logístico o de Verhulst, de Bertalanffy y de Malthus. La capacidad de carga K denota el tamaño máximo que la población puede alcanzar.

Es posible hallar las soluciones de la ecuación de Gompertz pueden ser halladas de forma explícita y éstas tiene la forma $N(t) = Ke^{-ae^{-\beta t}}$, donde el parámetro α es un número real. Este parámetro resulta de la integración de la ecuación. Obsérvese que si $N(0) = n_0$, entonces $\alpha = \ln \left(\frac{K}{n_0} \right)$.

El objetivo de este trabajo es establecer, a través del modelo de Gompertz, diferencias y similitudes en el comportamiento de la epidemia del SIDA de 1983 a 2012 para el caso nacional, para el Estado de Zacatecas, por sexo, edad y vía de contagio.

El Síndrome de Inmunodeficiencia Adquirida (SIDA) es la fase final de la enfermedad producida por el virus de Inmunodeficiencia Humana (VIH). Hacia 1981 en los Estados Unidos de América fueron dados a conocer los primeros diagnósticos de SIDA en el mundo, y desde entonces se ha convertido en una de las más peligrosas epidemias que se hayan conocido.

En México en primer diagnóstico notificado del virus tuvo lugar en 1983. El VIH provenía de Estados Unidos de América, consecuencia de la migración de mexicanos. En 1985, la enfermedad en nuestro país tuvo en un inicio un crecimiento exponencial, colocándonos en el lugar 13 de casos de infectados a nivel mundial y tercero en el continente americano, lo que alertó a los servicios de salud de nuestro país.

A la fecha la epidemia del VIH/SIDA ha cobrado la vida de unas 36 millones personas en el mundo, se calculó que en 2012 murieron 1.6 millones de personas debido a esta enfermedad (Córdova et al., 2009). Se sabe, de acuerdo a los

registros de casos de SIDA, que un 94.1 % de casos se originaron por vía sexual, 3.8 % por vía sanguínea (incluye transfusiones de sangre, usuarios de drogas intravenosas y exposición ocupacional), 2.1 % corresponde a vía perinatal.

Los antecedentes mencionados señalan que nos enfrentamos a un problema de gran envergadura y cualquier esfuerzo para entender la dinámica de la epidemia aunado a trabajos de carácter epidemiológicos que permiten tener control de la misma, redundará en tener eficientes políticas de salud, como tratamiento, monitoreo y control de los pacientes con VIH.

2 Descripción del Método

2.1. Obtención de datos

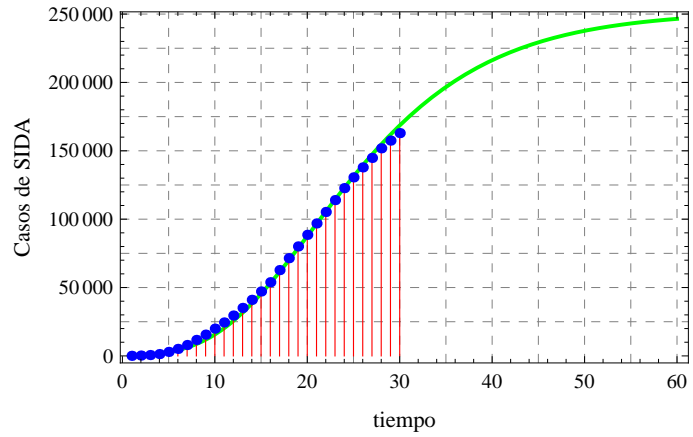
Se utilizaron los ajustes tipo Gompertz, para la epidemia de SIDA, construidos en diferentes escenarios: nivel nacional, por sexo, por forma de contagio y a nivel estatal. Las tablas de datos fueron recabadas del sitio web de CENSIDA y en los Servicios de Salud de Zacatecas.

El primer análisis que se realizó fue el caso nacional. Se consideraron los casos de SIDA diagnosticados por año, y se construyó la columna de acumulados. En la figura 1 se muestra la tabla, así como el ajuste de la Curva de Gompertz para los casos acumulados, tanto en forma gráfica como la expresión analítica. Se muestran además las medidas estadísticas que validan el modelo.

El segundo análisis que se realizó, fue estudiar el comportamiento de la epidemia en la población joven (15-24 años) a nivel nacional, que es donde se da mayor prevalencia. En la figura 2 se muestran los casos diagnosticados por año y el respectivo acumulado. Se hizo diferenciación por sexo.

Nuevamente, se hizo el ajuste de curvas tipo Gompertz con buenos resultados. En la figura 3 se muestran los gráficos de los datos (punteado) y la curva que mejor se ajustó; del lado izquierdo hombres y del derecho mujeres. Bajo cada curva se da la expresión del modelo y las medidas estadísticas de bondad de ajuste.

Año	Casos diagnosticados por año	Casos diagnosticados acumulados
1983	67	67
1984	194	261
1985	366	627
1986	709	1336
1987	1596	2932
1988	2196	5128
1989	2848	7976
1990	3711	11687
1991	3882	15569
1992	4370	19939
1993	4522	24461
1994	5067	29528
1995	5571	35099
1996	5913	41012
1997	6123	47135
1998	6762	53897
1999	8870	62767
2000	8700	71467
2001	8608	80075
2002	8479	88554
2003	8347	96901
2004	8379	105280
2005	8667	113947
2006	8768	122715
2007	7860	130575
2008	7295	137575
2009	6924	144794
2010	7041	151835
2011	5627	157462
2012	5483	162945



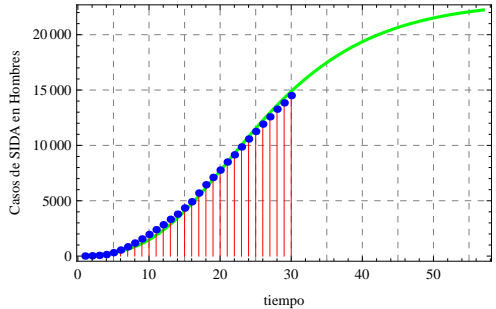
$$N(t) = 252,020.7427e^{7.3010e^{-0.0966t}}$$

Error cuadrático 13.88
 Error cuadrático medio 0.49
 Correlación r=0.996

Figura 1: Casos de SIDA en México de 1983 a 2012, reportados y acumulado. En grafica se muestran los datos acumulados (punteado) y la curva de Gompertz ajustada. Debajo de ésta la ecuación de la curva, los errores cuadrático y cuadrático medio, y la correlación.

HOMBRES 15-24 AÑOS		
Año	Casos de SIDA diagnosticados	Casos de SIDA acumulados
1983	7	7
1984	19	26
1985	38	64
1986	74	138
1987	171	309
1988	236	545
1989	295	840
1990	343	1183
1991	369	1552
1992	400	1952
1993	434	2386
1994	444	2830
1995	493	3323
1996	467	3790
1997	552	4342
1998	566	4908
1999	788	5696
2000	750	6446
2001	659	7105
2002	664	7769
2003	728	8497
2004	650	9147
2005	712	9859
2006	717	10576
2007	680	11256
2008	667	11923
2009	660	12583
2010	691	13274
2011	569	13843
2012	658	14501

MUJERES 15-24 AÑOS		
Año	Casos de SIDA diagnosticados	Casos de SIDA acumulados
1983	0	0
1984	2	2
1985	3	5
1986	12	17
1987	40	57
1988	38	95
1989	59	154
1990	64	218
1991	75	293
1992	111	404
1993	90	494
1994	87	581
1995	124	705
1996	134	839
1997	149	988
1998	191	1179
1999	202	1381
2000	262	1643
2001	253	1896
2002	262	2158
2003	271	2429
2004	279	2708
2005	254	2962
2006	285	3247
2007	280	3527
2008	242	3769
2009	212	3981
2010	204	4185
2011	161	4346
2012	182	4528

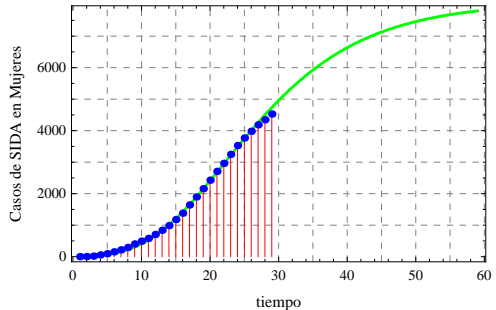


(a) $N(t) = 23,066.1746e^{-6.8857e^{-0.0918t}}$
 Error cuadrático 20.53 %
 Error cuadrático medio 0.73 %
 Correlación r=0.99462

(a) Hombres

(b) Mujeres

Figura 2: Casos de SIDA en población de jóvenes (15-24 años) en México de 1983 a 2012, reportados y acumulado.



(b) $N(t) = 8,079.639e^{-7.4397e^{-0.09078t}}$
 Error cuadrático 13.24 %
 Error cuadrático medio 0.49 %
 Correlación r=0.99606

Figura 3: Las graficas muestran los datos acumulados (punteado) y la curva de Gompertz ajustada; 3(a):hombres, 3(b):mujeres.

Un tercer análisis, aún en el contexto nacional, consistió en estudiar el comportamiento de la epidemia por forma de contagio. Se analizaron dos: vía sexual y vía perinatal. La transmisión por vía sanguínea presenta un patrón diferente al tener dos variantes: contagio por transfusión

y contagio por uso de drogas. En el primer caso, no hay reportes de contagio desde el 2005, por lo que no representa ya un problema de interés. En el segundo caso, existe ambigüedad en la clasificación de los casos reportados de contagio por esta vía, dado que usualmente se presentan situaciones de riesgo de contagio sexual, acompañando a éste tipo. En la figura 4 se muestran los datos considerados, el número de diagnósticos por año, y el acumulado.

Vía Sexual			Vía Perinatal		
Año	Casos de SIDA diagnosticados	Casos de SIDA acumulados	Año	Casos de SIDA diagnosticados	Casos de SIDA acumulados
1983	55	55	1983	0	0
1984	91	146	1984	0	0
1985	240	386	1985	0	0
1986	491	877	1986	6	6
1987	1094	1971	1987	23	29
1988	1439	3410	1988	41	70
1989	1787	5197	1989	39	109
1990	1704	6901	1990	39	148
1991	2044	8945	1991	50	198
1992	2515	11460	1992	47	245
1993	2578	14038	1993	64	309
1994	3022	17060	1994	71	380
1995	2960	20020	1995	56	436
1996	2916	22936	1996	75	511
1997	3397	26333	1997	89	600
1998	2751	29084	1998	69	669
1999	3261	32345	1999	92	761
2000	4026	36371	2000	105	866
2001	4951	41322	2001	127	993
2002	5239	46561	2002	164	1157
2003	5692	52253	2003	168	1325
2004	5882	58135	2004	147	1472
2005	6468	64603	2005	158	1630
2006	6521	71124	2006	152	1782
2007	6696	77820	2007	152	1934
2008	6288	84108	2008	110	2044
2009	6087	90195	2009	115	2159
2010	6280	96475	2010	103	2262
2011	5138	101613	2011	64	2326
2012	5227	106840	2012	67	2393

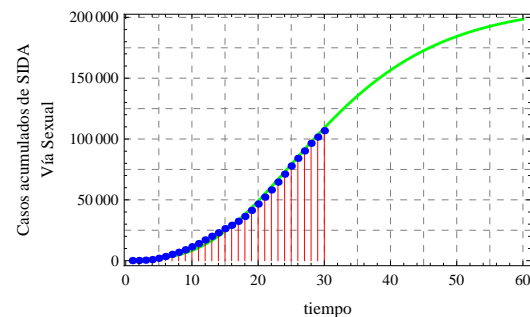
(a) Vía Sexual

(b) Vía Perinatal

Figura 4: Casos de SIDA, por vía de contagio, en México de 1983 a 2012, reportados y acumulado.

Al realizar el ajuste, nuevamente el comportamiento sigmoidal se hace presente. En la figura 5 se presentan las gráficas de datos (punteado) y el ajuste de Gompertz (curva). Debajo de cada curva se da la expresión analítica de los modelos, así como las medidas estadísticas de bondad de ajuste.

Finalmente, se realizó el análisis para el caso específico del Estado de Zacatecas, la metodología fue la misma. Se analizaron los casos reportados desde la llegada del síndrome, 1986, y hasta el 2012. Nuevamente, al construir la tabla con los datos acumulados, se presenta un comportamiento tipo sigmoidal, de Gompertz. En la figura 6 se presentan los datos usados (SSZ, 2013), la gráfica con los datos acumulados por año y la curva



(a) Vía Sexual

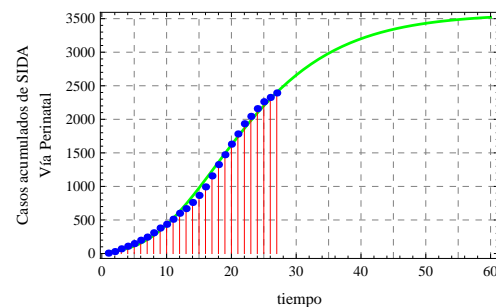
Vía Perinatal

$$N(t) = 210,857.1214e^{-7.1608e^{-0.0795t}}$$

Error cuadrático 18.2 %

Error cuadrático medio 0.65 %

Correlación $r=0.99365$



$$(b) N(t) = 3,575.6279e^{-5.66817e^{-0.09385t}}$$

Error cuadrático 13.02 %

Error cuadrático medio 0.52 %

Correlación $r=0.99592$

Figura 5: Casos de SIDA por vía de contagio, en México de 1983 a 2012, reportados y acumulado.

de Gompertz que mejor se ajustó, así como los indicadores estadísticos.

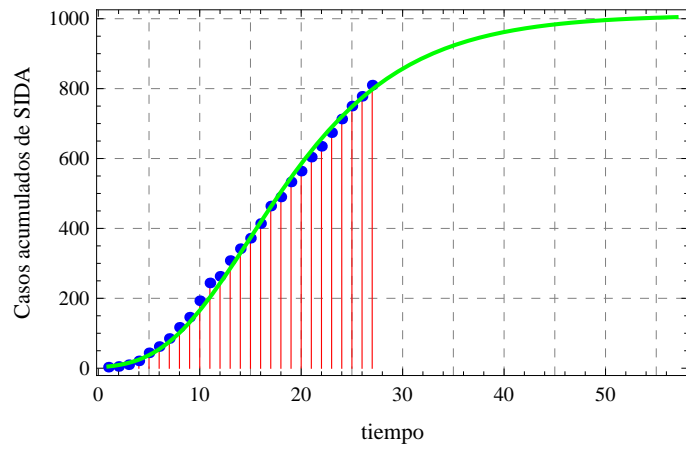
3 Análisis de resultados

Es posible hacer un análisis comparativo, por sectores, del comportamiento de la epidemia, únicamente considerando los valores que toman los parámetros α y β de los respectivos modelos de Gompertz ajustados. Si se analiza la ecuación diferencial de Gompertz, resulta sencillo determinar el punto en el que ocurre el cambio de concavidad, éste ocurre cuando la segunda derivada se anula, esto es:

$$K\alpha\beta^2e^{-\alpha e^{-\beta t}-\beta t}[\alpha e^{-\beta t} - 1] = 0$$

esto ocurre solamente cuando $\alpha = e^{\beta t}$. Esto es, el punto de inflexión depende tanto del valor de β , como del valor de α . De donde $\alpha > 0$ siempre; además, si α es grande, el punto de inflexión ocurre en tiempos cada vez posteriores. En lo que

Zacatecas		
Año	Casos de SIDA diagnosticados	Casos de SIDA acumulados
1986	3	3
1987	2	5
1988	5	10
1989	11	21
1990	23	44
1991	18	62
1992	23	85
1993	32	117
1994	29	146
1995	47	193
1996	51	244
1997	19	263
1998	45	308
1999	34	342
2000	30	372
2001	42	414
2002	50	464
2003	26	490
2004	43	533
2005	31	564
2006	40	604
2007	31	635
2008	39	674
2009	39	713
2010	37	750
2011	28	778
2012	32	810



$$N(t) = 1,011.2008e^{-5.9921e^{-0.119624t}}$$

Error cuadrático 10.44
Error cuadrático medio 0.41
Correlación $r=0.9978$

Figura 6: Tabla de diagnósticos de SIDA por año en el estado de Zacatecas de 1986 al 2012. En la gráfica se muestran los datos acumulados (punteado), así como el ajuste de Gompertz (curva continua) y la ecuación e indicadores estadísticos de la bondad de ajuste.

se refiere al parámetro β , se observa que, dado que $t = \frac{\ln \alpha}{\beta}$, ocurren dos situaciones, entre más pequeño es el valor de β , entonces el punto de inflexión ocurre en tiempo posterior; sin embargo, hay una proporcionalidad directa entre el valor máximo esperado para la primer derivada de la curva de Gompertz (que en este caso coincide con los datos reportados por año, no acumulado).

4 Conclusiones

La epidemia a nivel Nacional, en jóvenes hombres o mujeres, tiene un valor de β similar (0.09662, 0.0918 y 0.09078, respectivamente), pero valores diferentes de α (7.3010, 6.8857 y 7.4397, respectivamente), siendo el menor el caso de hombres, lo que nos indica que el punto de inflexión, y por lo tanto la estabilización, se dará antes. Cuando se hace el comparativo, ahora tomando las vías de contagio, observamos que la vía sexual presenta un parámetro α significativamente mayor al de la transmisión por la vía perinatal (7.1608 y 5.6681, respectivamente). Esto se interpreta como una estabilización más lenta. Sin embargo es un valor similar a los obtenidos en el caso Nacional y al de mujeres jóvenes. Para el parámetro β , se

tiene disparidad de nuevo, la vía sexual toma un valor menor en una centésima (0.07953 y 0.09385). La interpretación de ésta es que se espera un valor máximo mayor, es decir, un pico más alto en el reporte anual de casos.

Al analizar el caso particular del Estado de Zacatecas, en comparación con el caso Nacional, se observa que se tiene un valor menor de α (5.9921 y 7.3010), comparable solo con el del caso perinatal Nacional. Esto nos indica una estabilización más temprana. Al analizar el caso del parámetro β , ocurre que éste es el mayor de todas las situaciones (0.1196), lo que causa un retraso en la estabilización, pero que se ve compensado con un valor máximo esperado relativamente pequeño.

5 Comentarios finales

El análisis aquí presentado, habilita una nueva forma de hacer estimaciones comparativas en diferentes escenarios de la epidemia. Esta forma de hacer comparativos es una herramienta objetiva medible, y deja de lado la ambigüedad que pudiera presentarse en un comparativo basado solo en proporcionalidad de poblaciones.

Referencias

- [1] Annadurai G., Rajesh Babu, S., Srinivasamoorthy V. R., "Development of mathematical models (logistic, Gompertz and Richards models) describing the growth pattern of *Pseudomonas putida* (NICN 2174)", *Bio-process Engineering* 23, pp. 607-612, (2000).
- [2] CENSIDA, "Vigilancia Epidemiológica de casos de VIH/SIDA en México Registro Nacional de casos de SIDA", CENSIDA 2013, consulta realizada el 01 de agosto de 2013. Dirección de internet <http://www.censida.salud.gob.mx/>.
- [3] Córdova Villalobos J. A., Ponce de León Rosales S., Valdespino, J. L. "25 años de SIDA en México. Logros, desaciertos y retos". México: Instituto Nacional de Salud Pública, (2009).
- [4] Esteva L., Hernández J., Gómez G., Zapata M., "Matemáticas y epidemiología", *Ciencias*, 24, pp. 57-62, (1991).
- [5] Faustino Sánchez J. L., "Matemáticas para las Ciencias Naturales", Sociedad Matemática Mexicana, México, (1998).
- [6] Gompertz, B., "On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies", *Philosophical Transactions of the Royal Society London* 36, p. 513, (1825).
- [7] Hirimoto K., Hofuku I., Oshima K., "Population dynamics of HIV positive by application of a locally modified Gompertz curve: a case study for Japan", *Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications*, 30, 2, pp. 985-993, (1997).
- [8] Izquierdo-Kulich E., Regalado O. Nieto-Villar M. J. "Origen fractal de la Ecuación de Gompertz", *Revista Cubana de Física.*, 30, pp. 26-27, (2013).
- [9] Izquierdo-Kulich E., Nieto-Villar J. M., E. Izquierdo and J. M. Nieto-Villar, "Morphogenesis of the Tumour Patterns" *Mathematical Biosciences and Engineering* 5, pp. 299-313, (2008).
- [10] Katsuhisa H. y Ichiro Hofuku, K. O., "Population Dynamics of HIV Positive by application of a locally modified Gompertz curve: a case study for Japan", *Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications*, Vol. 30, No. 2, pp 985-993, 1997.
- [11] Laird A. K. "Dynamics of tumour growth", *British journal of cancer* 18, pp. 490-502, (1964).
- [12] Norton L, "Conceptual and practical implications of breast tissue geometry: toward a more effective, less toxic therapy", *Oncologist* 10, pp.370-380, (2005).
- [13] P. Waliszewski P., Konerski J., "The Gompertzian curve reveals fractal properties of tumor growth", *Chaos, Solitons and Fractals*, 16, pp. 665-674, (2003).
- [14] Servicios de Salud del Estado de Zacatecas, Datos Históricos y Estadísticos del Programa Estatal de VIH/SIDA/ITS, (2013).