

PROCEDIMIENTOS PARA LA GENERACIÓN DE MALLAS TRIDIMENSIONALES DE ELEMENTOS FINITOS

MARCELO JAVIER VÉNERE

*Centro Atómico Bariloche-CNEA
8400 Bariloche
Argentina*

RESUMEN

En el presente trabajo se presenta un sistema computacional orientado a la generación de mallas no estructuradas para geometrías tridimensionales de gran complejidad. Se describen con cierto detalle las distintas etapas en el proceso de generación: descripción de la geometría utilizando un sistema de CAD, especificación de la discretización deseada, generación de la malla de superficie, generación de la malla de volumen y aplicación de procesos para mejorar la malla obtenida. En cada caso se presentan brevemente las técnicas utilizadas y se mencionan los pros y contras de las mismas. Finalmente se discuten diferentes posibilidades de utilizar técnicas adaptivas que permitan reducir o evitar el costo de realizar una nueva discretización.

SUMMARY

In this work a computational system for the construction of non-structured finite element meshes for three-dimensional domains is presented. The different steps involved in the process are described including: geometry description using a standard CAD system, specification of the desired discretization, surface and volume mesh generation and the application of some mesh-improvement methods. Finally, a discussion on different approaches for the use of adaptive techniques are included.

INTRODUCCIÓN

El modelado numérico se está transformando en una herramienta imprescindible en varias áreas de la ingeniería; sin embargo, el empleo de las mismas sigue siendo bastante técnico y requiere de usuarios con cierto grado de especialización, en particular en aquellas situaciones que no pueden reducirse a problemas uni- o bi-dimensionales. El principal obstáculo en estos casos suele ser la etapa de discretización de la geometría, que se ha transformado en un verdadero cuello de botella para aquellos que precisan realizar modelados numéricos en problemas tridimensionales de interés tecnológico.

Recibido: Enero 1995

Estos hechos han sido sin duda los impulsores de los recientes desarrollos en las áreas de generación automática de mallas no estructuradas por un lado y adaptividad por el otro. Gracias a las primeras se han ampliado notablemente las posibilidades de generación en geometrías complejas y se disminuyó en igual medida el esfuerzo para obtener una primera malla. Las técnicas adaptivas, en cambio, permiten automatizar la detección de zonas de la malla en las que la discretización es inadecuada y la corrigen, evitando que el usuario tenga que regenerarla.

En la Figura 1 se muestran en rasgos generales las distintas etapas presentes en un modelado numérico. El proceso comienza con la descripción geométrica del modelo, la cual normalmente se realiza utilizando un sistema de CAD (*Computer Aided Design*). Luego se define la discretización y se genera la malla de elementos finitos. Si se utiliza algún método de generación automática de mallas no estructuradas, esta etapa suele estar dividida en dos partes: la generación de la superficie por un lado y del volumen por el otro. A continuación se definen las propiedades y condiciones de contorno y posteriormente se realiza el cálculo. Finalmente se analizan los resultados y se verifica que la solución haya convergido. En caso contrario será necesario redefinir la discretización, preferentemente en forma adaptiva.

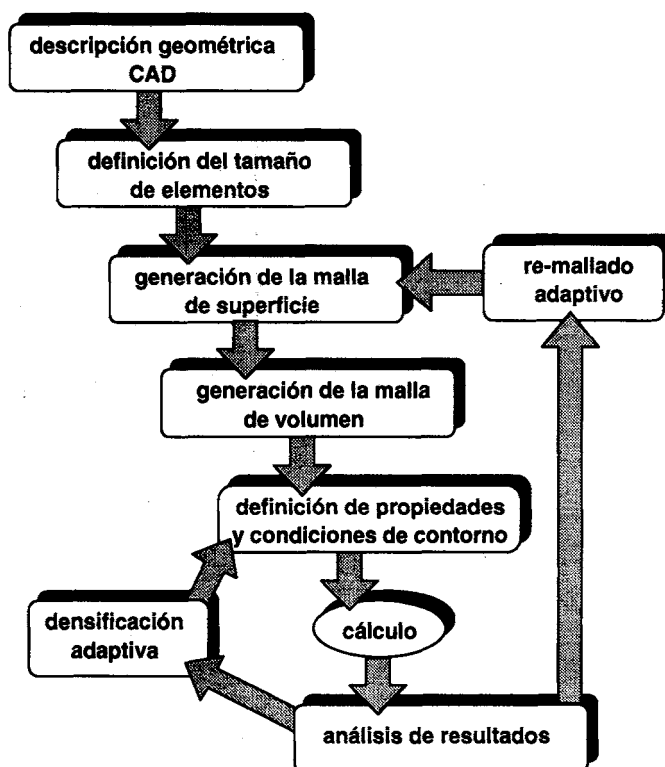


Figura 1. Etapas en el proceso de modelado numérico

En el presente trabajo se presenta un sistema computacional que permite realizar, con distinto grado de automatización, tanto la preparación inicial de datos, como el

ajuste de la discretización mediante un proceso adaptivo. En primer lugar se describe con cierto detalle la serie de pasos que deben darse para obtener una discretización inicial del modelo, incluyéndose los problemas y dificultades más frecuentes que aparecen en este proceso. Las técnicas de generación empleadas han sido presentadas en forma breve incluyéndose las referencias para el caso de que el lector quiera información más detallada. A continuación se incluyen algunos ejemplos que corresponden a la resolución de diferentes problemas de aplicación. Finalmente se discuten distintas posibilidades de emplear técnicas adaptivas y se presenta un ejemplo donde se utilizó un método de densificación local.

DESCRIPCIÓN DE LA GEOMETRÍA

El primer paso que debe darse en el proceso de generación de mallas, es introducir en alguna forma la descripción de la geometría. Afortunadamente es cada vez más frecuente el empleo de sistemas de CAD entre los diseñadores de componentes, por lo que es muy probable que el usuario de métodos numéricos reciba buena parte de este trabajo ya hecho. Sin embargo, sólo muy excepcionalmente los recibirá en la forma precisa como los requiere su sistema de generación de mallas, ya que el diseñador sólo está interesado en obtener una imagen de su modelo y no se preocupa por remover las partes que no pertenecen a la pieza pero que no se ven, o mantener compatibilidad entre la cantidad de segmentos utilizados para describir dos superficies adyacentes, o incluso que no exista un contacto preciso entre las mismas (Figura 2). En nuestra experiencia particular estos problemas se resuelven desde dentro del sistema de CAD y suele ser el trabajo que requiere mayores esfuerzos por parte del usuario. Sin duda, crear herramientas que permitan automatizar esta etapa es una tarea de gran importancia en el desarrollo de todo sistema de generación de mallas tridimensionales.

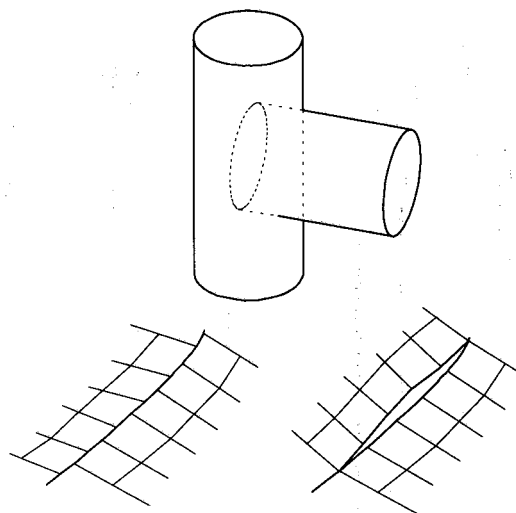


Figura 2. Problemas frecuentes en la descripción geométrica proveniente de un sistema de CAD

Existen dos formas bien diferenciadas de trabajar con objetos tridimensionales en un sistema de CAD: a través del modelado de sólidos o del modelado de superficies. En el primer caso se trabaja con una biblioteca de sólidos simples (esfera, cono, caja, cilindro, etc.) y pueden realizarse todo tipo de operaciones booleanas con los mismos. Si bien la gran mayoría de los componentes mecánicos pueden construirse de esta forma, existen casos en que esta metodología no puede aplicarse (vehículos aerodinámicos por ejemplo). Las principales ventajas de la misma son la simplicidad con que se define la geometría y la facilidad para automatizar la interfaz con el sistema de generación de mallas. Por otro lado, el modelado con superficies permite una completa generalidad en la geometría a construir, pero exige una precisa descripción de cada pedazo (*patch*) de la superficie, lo que en muchos casos puede resultar muy engorroso. Un buen ejemplo de ello puede verse en la Figura 3: con modelado de sólidos sólo fue necesario definir los dos cilindros y hacer una unión de los mismos; en cambio, con el modelado de superficies hay que definir cinco *patches*, dos de los cuales tienen un lado muy difícil de determinar (la intersección).

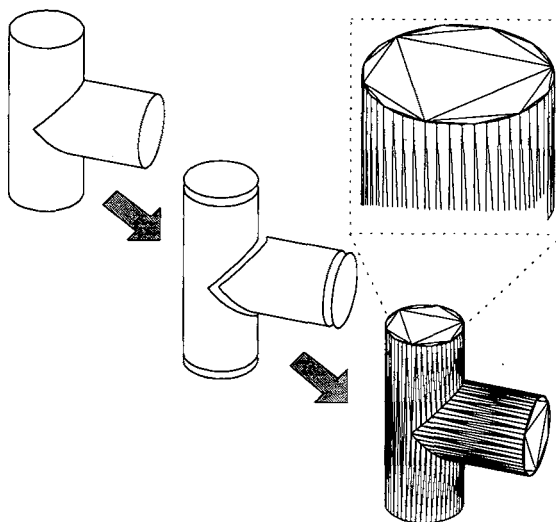


Figura 3. Descripción correcta de la geometría

Independientemente de la forma en que se haya generado la geometría, la información que un sistema de CAD puede entregar como dato para el generador de mallas de superficie es por un lado el conjunto de *patches*, cada uno de los cuales es descrito como una grilla de $M \times N$ o directamente como una triangulación, y por el otro las curvas de intersección de estos *patches*. En nuestro caso, el generador de mallas requiere que la frontera entre los *patches* no presente discontinuidades (ver ampliación en la Figura 3), es decir, que no deben quedar vértices sobre lados de elementos. En esta forma no es preciso que el CAD dé la información de las curvas intersección, pero se introduce una exigencia mayor a esta etapa, ya que cada *patch* debe terminar donde comienza el otro.

ESPECIFICACIÓN DEL TAMAÑO DE LOS ELEMENTOS

Al generar una malla de elementos finitos, ya sea de superficie o de volumen, es preciso especificar el tamaño de los elementos en cada punto del espacio. La metodología más aceptada para ello es definir una función *diámetro del elemento* $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ en un número finito de puntos y extenderla a todo el dominio mediante interpolación.

Para realizar esta interpolación utilizamos el método sugerido en¹. La idea es en primer lugar generar la malla Delaunay del conjunto de puntos en que se especificó la función $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, la que deberá incluir estrictamente el dominio de interés (normalmente será necesario agregar ocho puntos que sean vértices de una caja que englobe al dominio). Una vez disponible esta *malla base*, para calcular el valor de la función h en un punto arbitrario se busca cuál es el tetraedro que contiene el punto en cuestión y se interpola linealmente dentro del mismo.

Este procedimiento resulta especialmente adecuado para hacer re-mallados adaptivos. En estos casos, en base a un indicador del error en cada elemento se puede calcular un tamaño deseado h_e y adjudicarlo al centroide del elemento; la *malla base* que se genera con estos puntos tendrá entonces tantos nodos como elementos tenga la red original. En estas situaciones es importante que la búsqueda del tetraedro que contiene el punto sea muy eficiente, siendo inaceptable una búsqueda secuencial sobre todos los elementos de la malla (costo $O(N)$ por búsqueda). Dado que la malla base es convexa por construcción, es posible realizar una búsqueda direccional² reduciendo el costo a $O(N^{1/3})$. En nuestra implementación obtuvimos tiempos de búsqueda prácticamente constantes (rigurosamente el costo computacional es $O(\log(N))$), independientemente del tamaño de la malla base, gracias a una clasificación con un *oc-tree* de dicha malla².

GENERACIÓN DE LA MALLA DE SUPERFICIE

Como se mencionó anteriormente, con un sistema de CAD puede generarse la descripción de la geometría en forma de una serie de *patches* triangularizados. La unión de los mismos es una triangulación válida de la superficie del dominio, que en teoría podría utilizarse para un cálculo o como punto de partida para generar una malla de volumen. Sin embargo, como se puede ver en el ejemplo de la Figura 3 o en el de la Figura 5, esto en la práctica no es aplicable. Los dos problemas que se presentan son la inadecuada discretización, que no se ajusta a la función *diámetro del elemento* $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ especificada y la inaceptable calidad de los elementos.

Para transformar esa malla en una que se ajuste a los requerimientos del método de elementos finitos, como la que se muestra en la Figura 5, utilizamos la técnica presentada en³. La misma está basada en tres tipos de modificaciones locales:

1. Inserción de nodos dividiendo las aristas de elementos con tamaño mayor que el especificado $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$.
2. Colapso de las aristas con tamaño mucho menor que el especificado. Se remueven en esta forma dos nodos y dos elementos y se agrega un nuevo nodo.
3. Cambio de diagonales entre triángulos vecinos en los casos que resulta posible y conveniente.

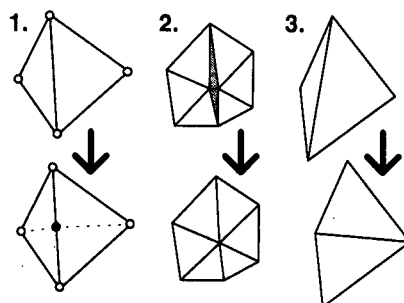


Figura 4. Modificaciones locales para transformar la triangulación

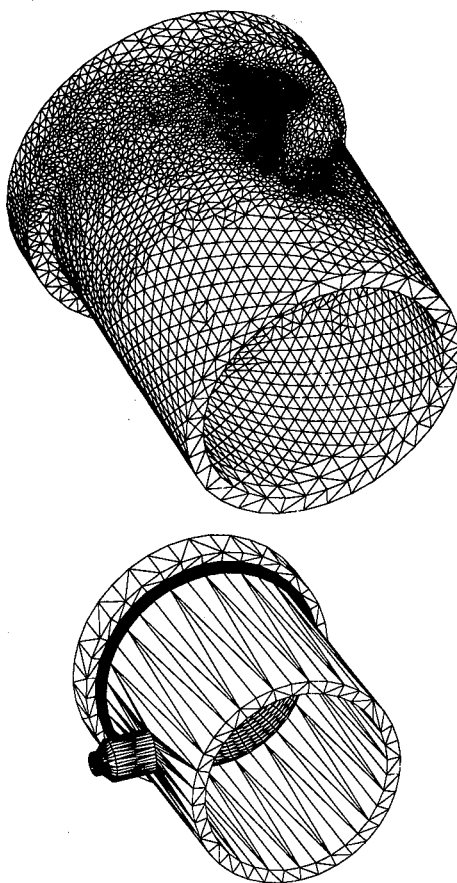


Figura 5. Descripción de la geometría y malla de elementos finitos para un recipiente de presión

Con la primera operación se consigue agregar nodos en las zonas poco densificadas, mientras que la segunda es la operación inversa. El cambio de diagonales se utiliza para optimizar la calidad de los elementos.

Debido a que se está trabajando sobre una superficie y no sobre un plano, es necesario tomar una serie de consideraciones adicionales para evitar modificaciones inaceptables de la geometría. Por un lado, se debe restringir el cambio de diagonales a los casos en que los dos triángulos son pseudocoplanares y, por el otro, al generarse un nuevo nodo, el mismo debe ser proyectado sobre la superficie original del dominio.

Esta técnica está obviamente restringida a elementos del tipo triangulares y produce en general mallas no-estructuradas. Gracias a ello permite obtener discretizaciones con fuertes diferencias de densificación garantizando buena calidad de elementos (obsérvese el ejemplo de la Figura 5), lo que la hace apta para su utilización en un contexto adaptivo. Otro atractivo de este método es su bajo costo computacional, que permite trabajar en forma interactiva aun en equipos tipo PC.

GENERACIÓN DE LA MALLA DE VOLUMEN

Existen en la actualidad varios métodos para la generación automática de mallas tridimensionales no estructuradas. Ajustándonos a lo que puede verse en la literatura, los que se presentan como más exitosos son los basados en teselaciones Delaunay^{4,5,6}, el método Frontal^{7,8,9,10} y los de oc-trees modificados¹¹. Realizar una descripción precisa de los mismos sería demasiado extenso, por ello sólo incluimos aquí algunas de nuestras experiencias con los dos primeros y discutimos los problemas que se presentan cuando se trabaja en geometrías complejas o con mallas grandes (centenares de miles de elementos).

En general estas técnicas requieren como única información de entrada la especificación del tamaño de elemento deseado en todo punto del espacio y una triangulación de la superficie de la pieza (esta debe estar formada por triángulos de buena calidad y que se ajusten al tamaño de elemento especificado). A partir de esta, se genera la discretización del volumen sin intervención del usuario.

El método Delaunay es posiblemente el más utilizado para generar mallas tridimensionales. En general se recurre al algoritmo propuesto simultáneamente por Watson y Bower en el año 1981, para obtener la teselación de Delaunay de un conjunto de puntos dado. Estos puntos pueden ser generados a medida que se los incorpora a la malla o en un paso previo. En nuestra implementación se utilizó este último método (la descripción detallada del mismo puede verse en¹²). Una vez generada esta teselación es preciso recuperar la frontera del dominio, ya que la triangulación original de la superficie no necesariamente existirá como caras de los tetraedros generados. Este es el punto más delicado de este método, ya que generalmente produce algunos elementos de muy mala calidad sobre la frontera. Este algoritmo tiene un costo computacional relativamente bajo, pudiendo generar mallas de centenares de miles de elementos en pocos minutos de una workstation tipo SUN IPX.

En lo que respecta al método Frontal, su principal virtud es la forma natural de generar los puntos interiores, lo que no sólo permite obtener mejores discretizaciones,

sino también la posibilidad de utilizar *stretching*, es decir, un estiramiento de los elementos en una dirección dada. Esto resulta especialmente atractivo en problemas con discontinuidades, como aquellos en que aparecen ondas de choque. Por otro lado, este método tiene un costo computacional importante y su implementación de forma de obtener un costo $O(N)$ resulta muy compleja. En¹³ se describe este algoritmo y se analizan algunos problemas que deben tenerse en cuenta para obtener una implementación robusta.

PROCEDIMIENTOS PARA MEJORAR LA CALIDAD DE LA MALLA

Una falencia común a todos los métodos de generación de mallas tridimensionales es el producir algunos elementos muy distorsionados, llegando incluso a volumen nulo o negativo. Si bien estos pueden ser muy pocos, aceptarlos en la malla va a deteriorar el condicionamiento del sistema de ecuaciones resultante. Es preciso por ello realizar una especie de pos-procesamiento a las mallas obtenidas con los métodos mencionados en el punto anterior. En nuestro caso hemos utilizado dos procesos diferentes: movimiento de los nodos libres y cambios de estructura de la malla.

En el primer caso, los nodos libres (en general todos los interiores) son desplazados de forma de optimizar una cierta función calidad de los tetraedros que concurren al mismo. En este proceso se debe introducir la restricción de que al mover el nodo no se produce ninguna superposición de volumen, o mejor aún, mover el nodo sólo si la nueva configuración está en una mejor situación que la anterior. En esta forma, la nueva malla que se obtiene siempre será mejor que la original. Este método se describe en detalle en¹⁴.

En el segundo caso se analizan una serie de cambios de estructura y, si son convenientes (la calidad de los nuevos elementos es mejor que la de los originales), se los realiza. El equivalente en 2D a este proceso sería el cambio de diagonales entre triángulos vecinos.

Ambos métodos en combinación producen excelentes resultados, por lo que ya forman parte casi obligatoria en nuestro proceso de generación de mallas.

EJEMPLOS

Incluimos a continuación algunos ejemplos que permiten dar una idea de las posibilidades de este sistema para generar una primera discretización.

Ejemplo 1: Boquilla y tapa de recipiente de presión (Figura 5)

En este ejemplo se muestra un recipiente sometido a presión interna que corresponde a un componente de la Planta Industrial de Agua Pesada Arroyito (PIAP) de la CNEA-Argentina. En este caso interesaba realizar un análisis del estado de tensiones entre la boquilla y la tapa, por lo que se realizó una densificación elevada en esa zona. La malla de volumen fue generada con el método Frontal y contiene 69105 tetraedros y 18049 nodos.

Ejemplo 2: Tapa de recipiente de presión

Éste es otro ejemplo de una malla para realizar un análisis tridimensional del estado de tensiones en un recipiente de presión. En este caso se trata de la tapa de una torre que tiene una serie de orificios no simétricos y también pertenece a la PIAP. En la Figura 6 se muestra la superficie de la malla generada incluyendo una vista del interior del dominio y un corte de la malla de volumen. La misma fue generada con el método Frontal y tiene 120401 tetraedros y 27385 nodos. El peor ángulo entre caras tiene 166° y entre aristas 148° . Los ángulos mínimos son de 10° .

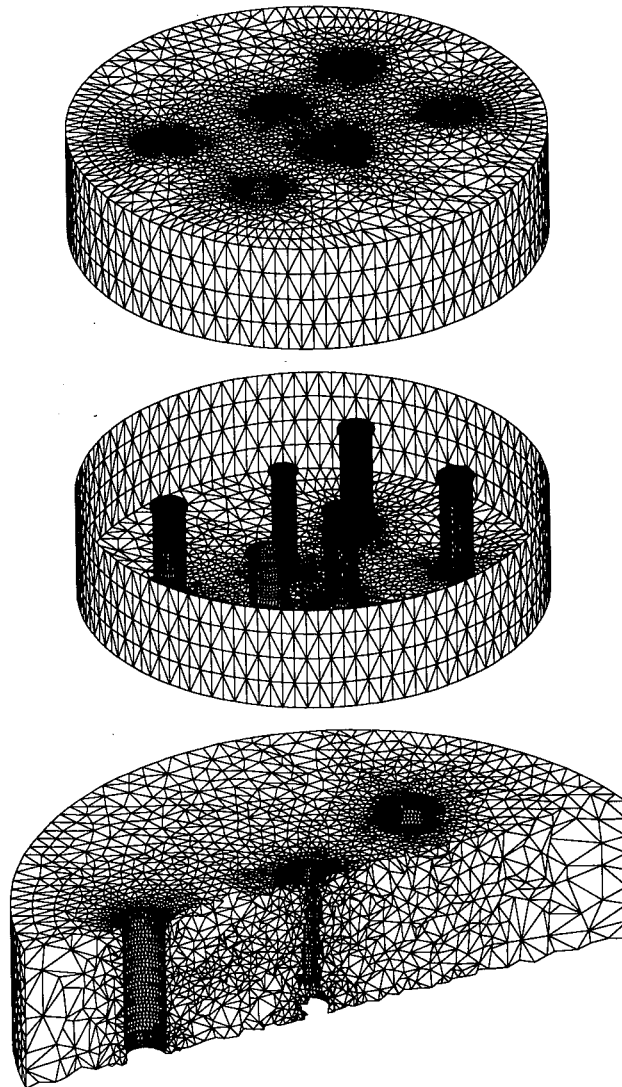


Figura 6. Malla correspondiente a la tapa de un recipiente de presión

Ejemplo 3: Configuración de velas en un velero de competición

En este caso se deseaba estudiar las prestaciones de diferentes configuraciones de velas en un velero de competición. La Figura 7 muestra la malla de superficie generada para una de estas configuraciones. La malla de volumen fue construida con la técnica de Delaunay y está formada por 22953 nodos y 127743 tetraedros. El peor ángulo entre caras tiene 176° y entre aristas 170° .

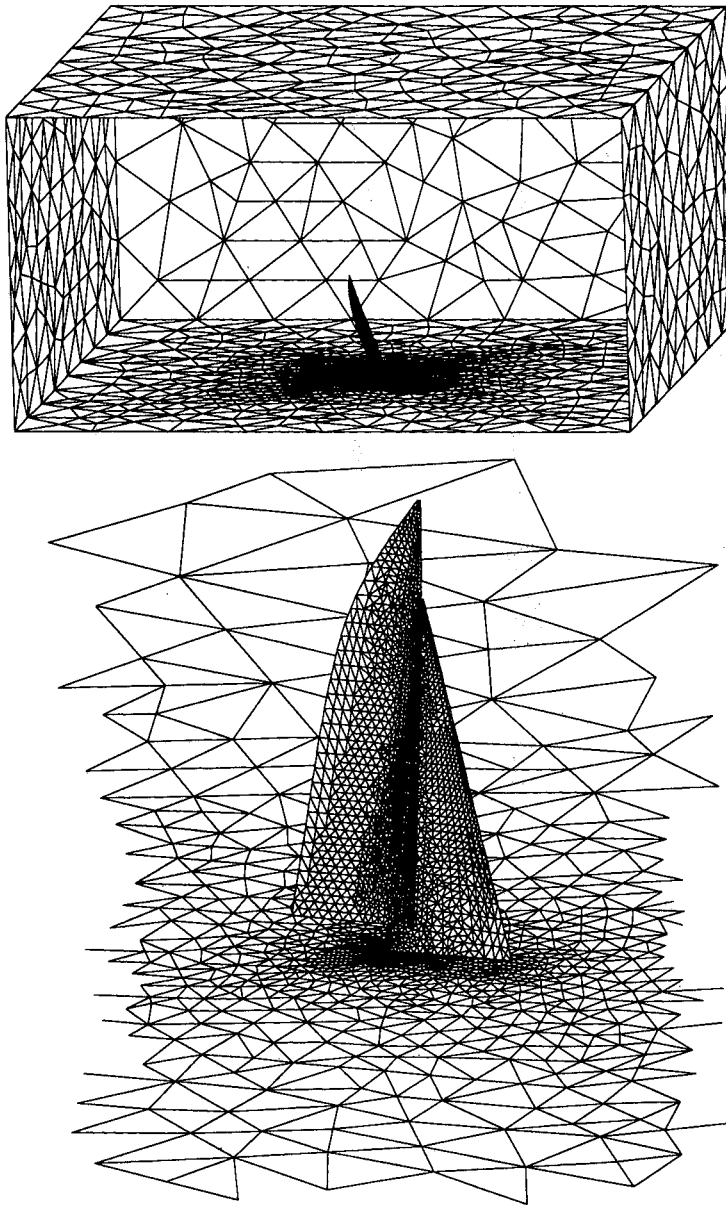


Figura 7. Configuración de velas de un velero de competición

Ejemplo 4: Quilla de un velero de competición

La Figura 8 muestra la malla de superficie de la quilla del velero del ejemplo anterior. Este caso presentaba el condicionamiento de definir correctamente el borde de ataque debiendo mantenerse el número de elementos en el orden de 250000. Se utilizó también la técnica Delaunay obteniéndose una malla con 256675 tetraedros y 48276 nodos. Los peores ángulos entre caras y aristas fueron de 168° y 160° respectivamente.

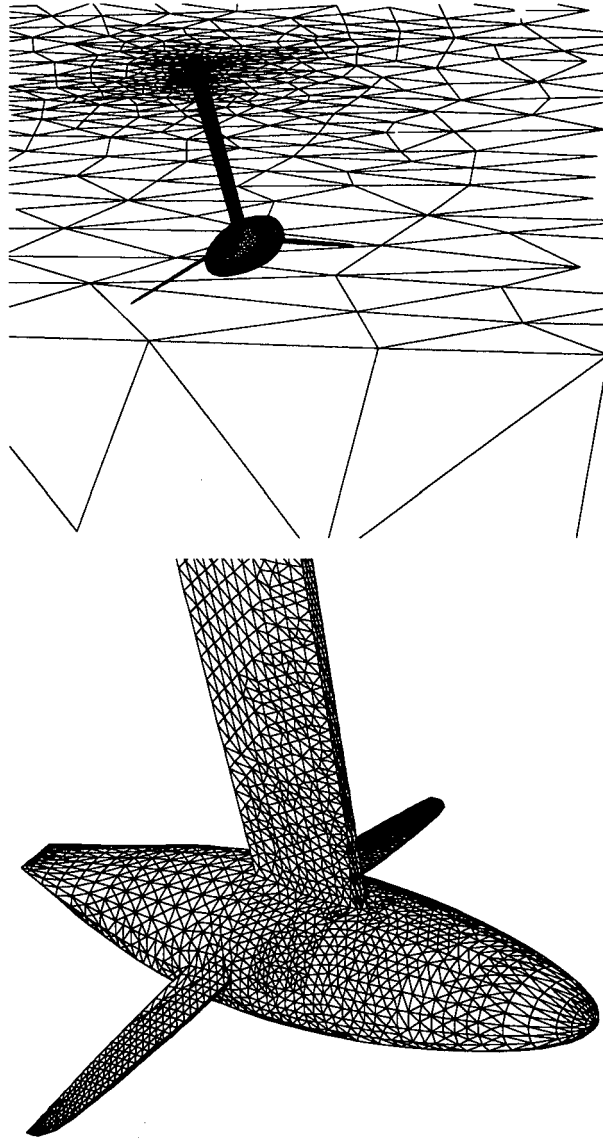


Figura 8. Quilla de un velero de competición. Malla de la superficie

PROCESOS ADAPTIVOS

Una vez hecho el cálculo se debe realizar un análisis de la solución para verificar que la misma haya convergido; en caso contrario será necesario realizar un nuevo cálculo con otra discretización. Para poder realizar este análisis en forma automática, es preciso contar con un estimador de error que nos indique cuáles elementos son demasiado grandes y cuáles demasiado pequeños. Una vez que se dispone de este indicador del error, la nueva discretización puede hacerse en dos formas bien diferenciadas (Figura 1): a) regeneración de la malla o b) modificación de la malla ya generada.

En el primer caso, la malla ya generada se descarta y se comienza el proceso nuevamente desde la etapa de generación de la malla de superficie, pero ahora, en lugar de especificar el tamaño de los elementos manualmente, se utiliza el indicador de error. En general basta con una o dos iteraciones de este proceso para obtener la discretización adecuada para el problema.

En el segundo caso existen dos alternativas: desplazamiento de los nodos interiores e inserción de nuevos nodos y elementos. La primera opción suele estar limitada a desplazamientos relativamente pequeños, ya que de lo contrario se producen elementos con volumen negativo. Con la segunda, en cambio, hemos obtenido resultados muy alentadores. Este método está basado en el agregado de nuevos nodos mediante la división de elementos por su arista más larga. En primer lugar se dividen en esta forma aquellos elementos que el estimador de error indicó como demasiado grandes. Con ello es posible que queden elementos con nodos en el medio de sus aristas (los vecinos a los divididos). Para eliminarlos, en segundo lugar, se dividen también por su arista más larga a aquellos elementos no-conformes. Este último proceso se repite hasta que no quede ningún elemento de este tipo.

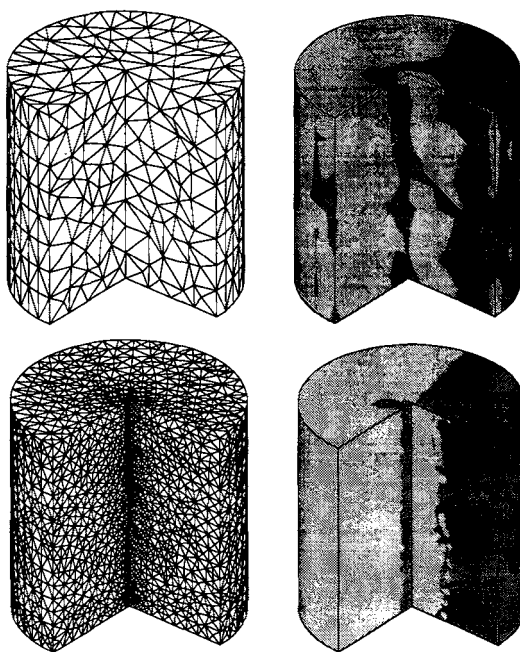


Figura 9. Generación adaptiva mediante división de elementos

Este algoritmo permite generar nuevas mallas cada vez más densificadas con un costo computacional muy bajo y, en nuestra experiencia, no deteriora sensiblemente la calidad de los elementos. Implementando una interfaz que permita recolocar las propiedades materiales y condiciones de contorno, es posible realizar el proceso de densificación adaptiva en forma totalmente automática. En la Figura 9 se muestra un ejemplo donde se deseaba determinar qué zonas estaban en tracción y cuáles en compresión. Para obtener una buena convergencia de la solución se realizaron diez procesos de este tipo.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo es en realidad producto del esfuerzo de un equipo en el que han participado tanto investigadores de la División Mecánica Computacional del Centro Atómico Bariloche, CNEA-Argentina, como del Laboratorio Nacional de Computación Científica (LNCC) del CNPq-Brasil. Fue de fundamental importancia para ello el soporte recibido por CONICET a través del PID-BID N° 40, del Convenio Bilateral entre CNPq-Brasil y CONICET-Argentina, "Proyecto Argentino-Brasileño en Mecánica Computacional", y del RAHE-Brasil a través proyecto RIP-PROCOM.

También deseo agradecer el apoyo recibido por el CIMNE a través del Prof. Oñate, que nos ha permitido difundir nuestro trabajo y verificar nuestros programas con problemas de envergadura.

REFERENCIAS

1. E.A. Dari y M.J. Vénere, "Visualización de campos en 2D y 3D a partir de su valor en un número finito de puntos", *Congreso de la AATN*, Buenos Aires (1990).
2. E.A. Dari y M.J. Vénere, "Algoritmos eficientes para la búsqueda del elemento de una red que contiene un punto dado", *Mecánica Computacional*, Vol. 10, pp. 455-464, (1990).
3. M.J. Vénere and D.L. Arnica, "Surface Finite Element Mesh Generation", *4th International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics*, England, (1994).
4. T.J. Baker, "Three Dimensional Mesh Generation by Triangulation of Arbitrary Points Sets", *Proceedings AIAA 8th Computational Fluid Dynamics Conference, HI, AIAA*, paper 87-1124, Honolulu, (1987).
5. T.J. Baker, "Developments and Trends in Three Dimensional Mesh Generation", *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 5, pp. 275-304, (1989).
6. M.J. Vénere y E.A. Dari, "Análisis comparativo de algoritmos para obtener triangulaciones Delaunay", *Mecánica Computacional*, Vol. 10, pp. 491-506, (1990).
7. S.H. Lo, "A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 1403-1426, (1985).
8. J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan and O.C. Zienkiewicz, "Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations" *Journal of Comp. Physics*, Vol. 72, pp. 449-466, (1987).
9. J. Peraire and J. Peiró, "Adaptive Remeshing for Three-Dimensional Compressible Flow Computations" *Journal of Comp. Physics*, Vol. 103, (1991).

10. J. Peiró, "A Finite Element Procedure for the Solution of the Euler Equations on Unstructured Meshes", Ph.D. Thesis, Dept. Civil Engng., Univ. College of Swansea (1989).
11. W.J. Schroeder and M.S. Shephard, "A Combined Octree/Delaunay Method for Fully Automatic 3D Mesh Generation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **29**, pp. 37-55, (1990).
12. E.A. Dari y M.J. Vénere, "A Node Placement Method for 2D Automatic Mesh Generation", *Latin American Research*, Vol. **21**, pp. 275-282, (1991).
13. E.A. Dari y M.J. Vénere, "Generación de mallas tridimensionales de elementos finitos utilizando el método Frontal", *Mecánica Computacional*, Vol. **14**, pp. 512-519, (1994).
14. E.A. Dari y G. Buscaglia, "Mesh Optimization: How to Obtain Good Unstructured 3D Finite Element Meshes with not so Good Mesh Generators", to be published in *Journal of Structural Optimization*.