

Simulación de la fractura del hormigón en modo mixto

Jaime C. Gálvez

ETS Ingenieros de Caminos, Universidad de Castilla–La Mancha
Av. Camilo José Cela s/n, 13071 Ciudad Real, España
Tel.: 34-926-29 54 22/29 53 90, Fax: 34-926-29 53 91
e-mail: jgalvez@ccp-cr.uclm.es

David A. Cendón

ETS Ingenieros de Caminos
Universidad Politécnica de Madrid
Ciudad Universitaria, 28040 Madrid, España
Tel.: 34-91-336 66 79, Fax: 34-91-336 66 80
e-mail: david@mater.upm.es

Resumen

Este trabajo presenta un procedimiento de cálculo numérico para simular la fractura de materiales cuasifrágiles bajo tensiones de tracción y tensiones tangenciales (modo mixto I y II). Predice la trayectoria de la grieta o grietas. El modelo de rotura se basa en las hipótesis del modelo de la fisura cohesiva discreta, desarrollado para la rotura bajo solicitaciones de tracción (modo I). Establece el crecimiento de la grieta mediante la definición de una superficie de rotura similar a la superficie de plastificación en plasticidad clásica y emplea la formulación de la plasticidad computacional no asociada. El modelo se ha incorporado a un código de elementos finitos comercial y se ha contrastado experimentalmente. Se presentan las predicciones de los ensayos de fractura en modo mixto de vigas de hormigón de varios tamaños desarrollados por los autores y de los ensayos desarrollados por Arrea e Ingraffea. Además se han simulado los resultados experimentales de una nueva geometría de ensayos de fractura en modo mixto: probetas compactas entalladas solicitadas a compresión asimétrica. En todos los casos se ha obtenido un buen ajuste y una adecuada convergencia numérica.

MODELLING OF MIXED MODE FRACTURE OF CONCRETE

Summary

This paper presents a numerical procedure for mixed mode fracture of quasibrittle materials. It predices the crack path. The procedure is based on the cohesive crack approach, developed for mode I fracture. The crack growth is based on the definition of a cracking surface, similar to a yield surface in classical plasticity. The computational non associated plasticity formulation is used to solve the problem. The procedure has been incorporated into a commercial finite element code and experimentally contrasted. Numerical results agree quite well with two experimental sets of mixed mode fracture of concrete beams; one from Arrea and Ingraffea and other from a *nonproportional* loading by the authors. Another new sets of experimental fracture results have been modeled: the double-edge notched specimens.

INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años se ha realizado un importante esfuerzo encaminado a desarrollar modelos para simular la rotura de materiales *cuasi-frágiles* como el hormigón, mortero, roca o ladrillo, empleados en estructuras de edificación y obra civil. Tradicionalmente los métodos numéricos basados en el *método de los elementos finitos* se han clasificado en dos grandes grupos:¹ procedimientos basados en la “fisura distribuida” y procedimientos basados en la “fisura discreta”, aunque comienza a hablarse de un tercer procedimiento denominado de “celosía”.²

La aproximación mediante fisura distribuida representa la fisura como un conjunto de infinitas grietas paralelas con apertura infinitesimal distribuidas dentro del elemento finito.³ Las grietas son incorporadas en la malla fija de elementos finitos mediante la reducción de la rigidez y resistencia del material. Las leyes constitutivas habitualmente empleadas son no lineales y presentan *ablandamiento* en la relación tensión-deformación. Este planteamiento fue inicialmente desarrollado por,^{4,5,6,7,8,9} con posterioridad se han presentado modelos más elaborados.^{10,11}

El ablandamiento de la curva tensión-deformación introduce algunas dificultades en el análisis. El sistema puede estar mal condicionado,^{12,13,14} pueden aparecer inestabilidades en la localización de las bandas de concentración de deformaciones o dependencias espúreas de la malla de elementos finitos.³ Algunas veces estas dificultades se solventan añadiendo al modelo una condición matemática.^{15,16,17} Otras estrategias las constituyen los modelos continuos no locales,^{18,19} los modelos de gradiente²⁰ o los modelos micropolares continuos.²¹ Todos estos modelos solucionan problemas particulares, pero ninguno da una solución global del problema.

El modelo de fisura discreta es preferido cuando en la estructura existe una sola grieta o un conjunto finito de ellas. El modelo de fisura cohesiva fue desarrollado por Hillerborg y sus colaboradores²² para reproducir la fractura en modo I del hormigón y los materiales cuasifrágiles. El modelo se ha extendido a fractura en modo mixto (modos I y II) y se ha incorporado a algunos códigos de elementos finitos,^{23,24,25,26} así como a códigos de elementos de contorno.²⁷ Existen algunas dificultades asociadas al empleo de estos códigos. Una de ellas es la necesidad de incorporar propiedades del material difíciles de medir experimentalmente. Al no disponer de datos experimentales se estiman sin tener una idea ajustada de su influencia en el resultado final, ya que no existe un estudio sistemático de la sensibilidad del modelo a estas variables. Esta dificultad se ve agravada por la amplia dispersión experimental que presentan los resultados experimentales disponibles, de modo que variaciones importantes de las propiedades del material permiten que los resultados encajen dentro de la amplia envolvente experimental. Este aspecto es especialmente llamativo en lo que se refiere a la trayectoria de la grietas. Por esta razón los autores²⁸ desarrollaron un conjunto de ensayos de vigas solicitadas a flexión en tres y cuatro puntos, bajo cargas proporcionales y *no proporcionales*, que permitieron obtener varias familias de trayectorias de grietas. Los ensayos se realizaron con tres tamaños de viga homotéticos y presentaron una dispersión experimental muy baja. En nuestra opinión constituyen un exigente banco de pruebas para modelos de fractura en modo mixto, complementario a otros resultados disponibles. Los modelos de cálculo deben reproducir trayectorias de grietas muy distintas y un conjunto de registros de carga y desplazamiento de varios puntos de control para tres tamaños distintos de probeta.

Este trabajo presenta un procedimiento de cálculo para reproducir la fractura en modo mixto (modos I y II) de materiales cuasifrágiles basado en la fisura discreta cohesiva. El procedimiento predice la trayectoria de la grieta y el comportamiento de la estructura a medida que la grieta se propaga. El modelo se basa en la formulación de la plasticidad clásica.

En ensayos previos^{28,29} se ha mostrado que los materiales cuasifrágiles bajo un *modo mixto global* de sollicitación presentan un *modo mixto local* importante cuando la grieta arranca desde la entalla, pero cuando la grieta crece de forma estable bajo un *modo mixto global* de sollicitación el crecimiento se hace bajo un *modo I local* predominante, es decir, gobernado por las tracciones en la dirección normal a los labios de la grieta. Este aspecto es importante y permite formular modelos de fractura en modo mixto de materiales cuasifrágiles basados fundamentalmente en propiedades obtenidas a partir de ensayos normalizados: resistencia a tracción, resistencia a compresión, módulo de elasticidad y energía de fractura. Otros parámetros dependientes del modo II de fractura, como son la energía de fractura en modo II, pueden ser estimados dentro de su rango de variación sin que apenas modifiquen los resultados. Esto permite un cambio sustancial en el planteamiento de los modelos de fractura en modo mixto para este tipo de materiales. Con el planteamiento presentado los modelos se calibran mediante ensayos normalizados, distintos a los ensayos en modo mixto y previos a ellos, de modo que los modelos realmente *predicen* los resultados experimentales en modo mixto y puede hablarse con propiedad de modelos *predictivos*. Hasta ahora, de modo general, los modelos se calibraban con los propios ensayos de fractura en modo mixto, de modo que los modelos reproducían los resultados a posteriori a partir de los datos medidos en los propios ensayos, pudiendo hablarse de modelos *postdictivos*.

El modelo presentado se contrasta con los resultados experimentales de fractura en modo mixto desarrollados por los autores²⁸ y con los desarrollados por Arrea e Ingraffea³⁰ con vigas entalladas. El modelo se ha calibrado mediante ensayos normalizados y predice correctamente las trayectorias de grieta y los registros carga-desplazamiento de varios puntos de control en las probetas para probetas de tres tamaños. Además, el modelo se ha contrastado con los resultados experimentales de una nueva geometría de probeta, la probeta compacta con doble entalla solicitada a compresión asimétrica.^{31,32,33,34} En todos los casos la predicción numérica fue buena.

LA FISURA COHESIVA

El modelo de la *fisura cohesiva*, desarrollado por Hillerborg y sus colaboradores,²² se ha empleado con éxito en el estudio la fractura de los materiales pétreos.^{35,36} Se trata de un modelo sencillo y de claro significado físico. Una exposición detallada del modelo la presentan Bazant y Planas.³ La *curva de ablandamiento* $\sigma = f(w)$ es el elemento fundamental de este modelo. Esta curva es una propiedad del material y relaciona la tensión σ que actúa entre los labios de la grieta con la abertura w de la grieta una vez que se ha alcanzado la resistencia a tracción del hormigón. El modelo fue desarrollado por Hillerborg para fractura en modo I, en la que la tensión σ es normal a los labios de la grieta.

La definición de la curva de ablandamiento requiere, como mínimo, dos parámetros: la resistencia a tracción del hormigón f_{t0} y la energía específica de fractura G_F . La resistencia a tracción del hormigón es la tensión de tracción a la que una grieta es creada y comienza a abrirse ($f(0) = f_{t0}$). La energía específica de fractura G_F es la energía necesaria para generar una unidad de superficie de grieta completamente abierta en el hormigón. De este modo, el área encerrada bajo la curva de ablandamiento en un diagrama tensión-apertura de grieta es la energía específica de fractura. Ambos parámetros se miden experimentalmente mediante ensayos normalizados.^{37,38} La Figura 1 presenta el esquema de una fisura cohesiva en modo I y la curva de ablandamiento correspondiente.

Desde la formulación del modelo de la fisura cohesiva se han propuesto diferentes aproximaciones a la curva de ablandamiento experimental. Las curvas bilineales son aceptadas como la aproximación más razonable, aunque no hay acuerdo acerca de la posición exacta de el punto de intersección de las dos rectas. A fin evitar problemas en la intersección se han propuesto curvas más suaves, como las exponenciales^{39,40,41} y polinómicas,⁴² entre

otras. La Figura 2 compara distintas propuestas de curva de ablandamiento con la misma resistencia a tracción del hormigón f_{t0} y la misma energía específica de fractura G_F .

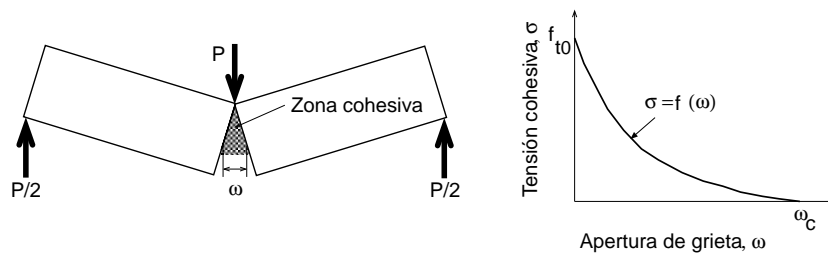


Figura 1. Fisura cohesiva y curva de ablandamiento de fractura en modo I del hormigón

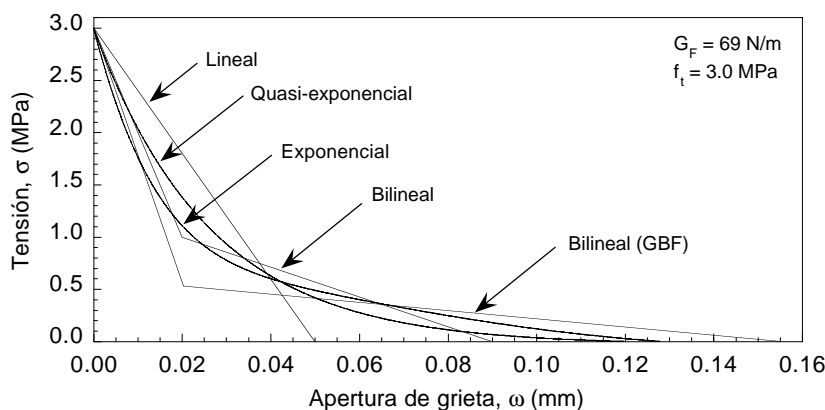


Figura 2. Distintas curvas de ablandamiento empleadas en el hormigón

LA FISURA COHESIVA EN MODO MIXTO

Al extender el modelo de la fisura cohesiva de modo I a modo mixto (modos I y II) distinguimos dos etapas: 1) determinación de la dirección de propagación de la grieta a medida que se propaga, es decir, su trayectoria a lo largo de todo el ensayo, y 2) introducción del modelo de fisura cohesiva en modo mixto (tensiones de tracción y tangenciales) en la trayectoria de la grieta. En este trabajo las dos etapas se realizan mediante dos cálculos computacionales consecutivos y distintos.

Predicción de la trayectoria de la grieta

En anteriores trabajos^{28,29} se ha mostrado que la predicción de la trayectoria proporcionada por la mecánica de la fractura elástica lineal constituye una buena aproximación de la trayectoria de la grieta en materiales cuasifrágiles como el hormigón y los morteros, incluso con trayectorias de grieta de pequeño radio de curvatura. En este trabajo se emplea el criterio de la *máxima tensión tangencial*, enunciado por Erdogan y Sih,⁴³ que postula que la grieta crece radialmente a la punta de la grieta en la dirección normal a la máxima tensión $\sigma_{\theta\theta}$. Información detallada sobre este criterio es presentada por Broek.⁴⁴ Para el cálculo de las trayectorias de grieta se empleó el código de elementos finitos FRANC2D.⁴⁵

La adopción de este criterio asume que la propagación de la grieta se produce bajo un modo I local predominante. Este aspecto ha sido verificado en materiales frágiles mediante

el cálculo por elementos finitos de los valores de los factores de intensidad de tensiones K_I y K_{II} en la punta de la grieta a medida que esta se propaga, pudiéndose comprobar que K_{II} es muy pequeño en comparación con K_I .^{29,46} Este aspecto ha sido puesto de manifiesto por Mahajan y Ravi-Chandar.⁴⁷

Superficie de rotura en modo mixto

Los materiales cuasifrágiles, como el hormigón y el mortero, no agotan su resistencia una vez que han alcanzado una tensión igual a su resistencia. La Figura 3 muestra una grieta en un material de este tipo. De izquierda a derecha distinguimos tres zonas: 1) zona completamente rota, abierta y sin posibilidad de transmitir tensiones entre los labios de la grieta, 2) *zona en proceso de fractura*, el material ha alcanzado tensiones iguales a su resistencia y se ha roto, pero mantiene capacidad de transmitir tensiones normales y tangenciales entre los labios de la grieta a través de puentes de material sano y la imbricación entre los áridos y 3) zona sana, en la que el material no ha sido solicitado por tensiones superiores a su resistencia. El modelo de la fisura cohesiva para modo I recoge este comportamiento a través de la curva de ablandamiento de la tensión normal a los labios de la grieta σ (Figura 1).

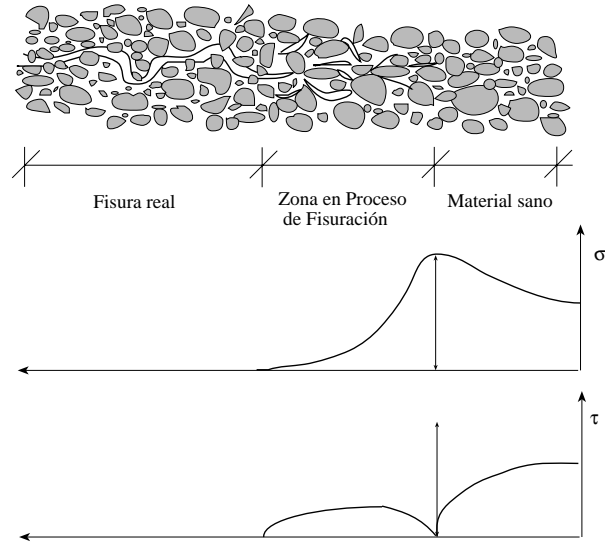


Figura 3. Evolución de la zona en proceso de fractura y perfil de tensiones bajo condiciones de rotura en modo mixto

Cuando la sollicitación es una combinación de tensión normal σ y tensión tangencial τ es necesario contemplar su interacción al estudiar el crecimiento y propagación de la grieta. Se asume que la grieta progresa cuando la combinación de tensión normal a los labios de la grieta σ y la tensión tangente τ alcanza una *superficie de rotura* $F(\sigma, \tau) = 0$, que juega un papel similar a la *superficie de plastificación* en plasticidad clásica. En este trabajo se adopta la siguiente expresión hiperbólica de superficie de rotura¹⁴

$$F = \tau^2 - 2c \tan \phi_f (f_t - \sigma) - \tan^2 \phi_f (\sigma^2 - f_t^2) \quad (1)$$

donde c es la cohesión, ϕ_f es ángulo de fricción y f_t la resistencia a tracción.

De acuerdo con el planteamiento de la fisura cohesiva,²² la superficie de rotura debe evolucionar a medida que la grieta se abre. Es decir, un punto de la grieta situado en la

zona en proceso de fractura disminuye su capacidad resistente a medida que aumenta la distancia relativa entre los labios de la grieta. La evolución de la superficie de rotura se hace a través de las curvas de ablandamiento de la resistencia a tracción en la dirección normal a los labios de la grieta f_t y de la cohesión c .

Se define el vector de tracción \mathbf{t} constituido por las componentes de la tensión normal a los labios de la grieta σ y la tensión tangencial τ

$$\mathbf{t} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t} \quad (2)$$

donde \vec{n} y \vec{t} son los vectores unitarios en la dirección normal y tangencial a los labios de la grieta.

Se define el vector de incremento de desplazamiento inelástico entre los labios de la grieta $\dot{\mathbf{u}}^i$ constituido por las componentes del incremento de desplazamiento inelástico relativo en la dirección normal a los labios de la grieta \dot{u}_n^i y en la dirección tangente \dot{u}_t^i

$$\dot{\mathbf{u}}^i = \dot{u}_n^i \vec{n} + \dot{u}_t^i \vec{t} \quad (3)$$

Este vector $\dot{\mathbf{u}}^i$ se obtiene por descomposición del vector incremento de desplazamiento relativo entre los labios de la grieta $\dot{\mathbf{u}}$ en una parte elástica $\dot{\mathbf{u}}^e$ y una parte inelástica $\dot{\mathbf{u}}^i$. Se adopta como variable para definir las curvas de ablandamiento de la resistencia a tracción en la dirección normal a los labios de la grieta f_t y de la cohesión c , el parámetro u^{ieff} , que es la integral del módulo del incremento de los desplazamientos inelásticos a lo largo del proceso de rotura. El vector incremental de tracciones $\dot{\mathbf{t}}$ se obtiene a partir del incremento de desplazamientos elásticos $\dot{\mathbf{u}}^e$, como sigue

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^e + \dot{\mathbf{u}}^i \quad (4)$$

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{E} \dot{\mathbf{u}}^e \quad (5)$$

$$\dot{u}^{ieff} = \|\dot{\mathbf{u}}^i\| = \left(\dot{u}_n^i{}^2 + \dot{u}_t^i{}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

$$u^{ieff} = \int \dot{u}^{ieff} dt \quad (7)$$

donde \mathbf{E} es el tensor elástico y \dot{u}_n^i y \dot{u}_t^i son las componentes normal y tangencial de los incrementos de desplazamiento inelástico relativo entre los labios de la grieta.

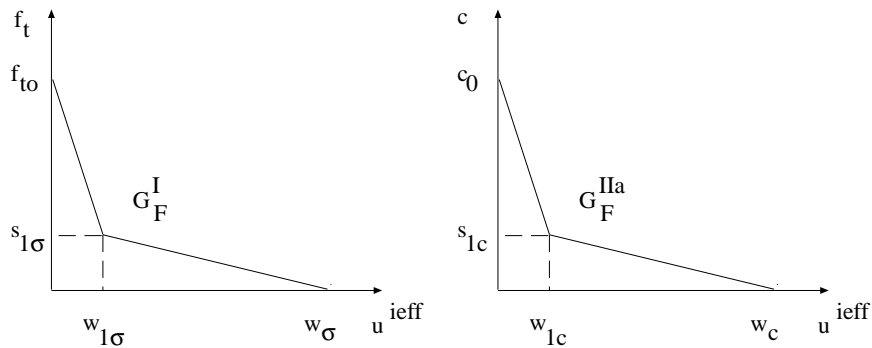


Figura 4. Curvas de ablandamiento: a) resistencia a tracción, f_t , b) cohesión c

De este modo la resistencia a tracción y la cohesión se expresan como funciones del parámetro u^{ieff} : $f_t = f_t(u^{ieff})$ y $c = c(u^{ieff})$. La Figura 4 muestra las curvas de ablandamiento bilineales empleadas en este trabajo. En ellas G_F^I y G_F^{IIa} son la energía

específica de fractura en modos I y IIa (modo II bajo elevado confinamiento normal); $s_{1\sigma}$, $\omega_{1\sigma}$, s_{1c} y ω_{1c} son las coordenadas del codo en las curvas de ablandamiento. Se asume que el ángulo de fricción ϕ_f no varía a lo largo del proceso de rotura.

La Figura 5 muestra la superficie de rotura y su evolución para distintos estados de fisuración a medida que evoluciona el parámetro u^{ieff} . Se observa que bajo una sollicitación en modo I ($\tau = 0$), la ecuación (1) pasa a ser

$$F = 2c \tan \phi_f (f_t - \sigma) + \tan^2 \phi_f (\sigma^2 - f_t^2) = (f_t - \sigma) \{2c \tan \phi_f - \tan^2 \phi_f (f_t + \sigma)\} = 0 \quad (8)$$

y eligiendo sólo la solución con sentido físico

$$f_t - \sigma = 0 \quad (9)$$

que es la expresión de la fisura cohesiva desarrollada por Hillerborg.²²

En la Figura 5 se observa también que cuando el deterioro es grande, $f_t = 0$ y $c = 0$, la ecuación de la superficie se transforma en un rozamiento de Coulomb con coeficiente de rozamiento $\mu = \tan \phi_f$.

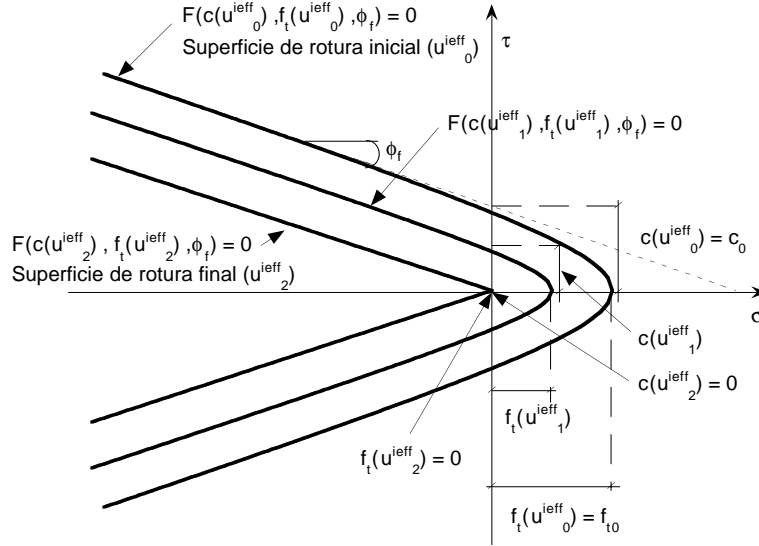


Figura 5. Superficie de rotura y su evolución

Dilatancia

Para completar el modelo se necesita conocer cómo evolucionan los desplazamientos plásticos en la zona en proceso de fractura. En los materiales cohesivo-friccionales, como el hormigón y el mortero, las tensiones tangenciales a los labios de la grieta, además de provocar el deslizamiento relativo entre los labios de la grieta, inducen una apertura normal a la grieta. Este fenómeno se denomina *dilatancia* y se debe a que las irregularidades de la superficie de rotura impiden el deslizamiento relativo de los labios de la grieta si esta no se abre a la vez. La dilatancia determina la relación entre los incrementos de desplazamientos normales y tangenciales

$$\tan \phi_d = \frac{\dot{u}_n^i}{\dot{u}_t^i} \quad (10)$$

En plasticidad tradicional, la expresión que establece la dirección de las deformaciones inelásticas se denomina *regla de flujo* y es normal en cada punto al potencial plástico ($Q = \text{cte}$). En este caso la función potencial no coincide con la superficie de rotura ($F = 0$) y se habla de *plasticidad no asociada*. La regla de flujo adopta la siguiente expresión

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (11)$$

donde $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ es el incremento de deformación plástica, $\dot{\lambda}$ es una constante positiva denominada *multiplicador plástico*, Q es la función potencial y σ_{ij} es la componente ij de las tensiones. La expresión análoga para nuestro problema, expresada en incrementos de desplazamientos, es

$$\dot{\mathbf{u}}^i = \dot{\lambda} \frac{\partial Q(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} = \dot{\lambda} \mathbf{b} \quad (12)$$

donde $\dot{\mathbf{u}}^i$ es el vector incremento de desplazamientos inelásticos y \mathbf{b} el vector de dirección perpendicular a la función potencial, que es la dirección de retorno a la superficie de rotura. La superficie de potencial, $Q = \text{cte}$, forma el ángulo ϕ_d , denominado *ángulo de dilatancia*, con el eje de abscisas en el espacio de las tensiones (Figura 6). El ángulo ϕ_d también varía con el parámetro u^{ieff} , de modo que decrece a medida que aumenta la apertura de grieta. De acuerdo con²³ se ha adoptado una ley de variación lineal

$$\phi_d = \begin{cases} \phi_{d,\max} \left(1 - \frac{u^{ieff}}{u_{\text{cri,dil}}}\right) & \forall u^{ieff} < u_{\text{cri,dil}} \\ 0 & \forall u^{ieff} > u_{\text{cri,dil}} \end{cases}$$

donde $\phi_{d,\max}$ es el valor inicial del ángulo de dilatancia, y $u_{\text{cri,dil}}$ es el desplazamiento relativo crítico tras el que la intercara no presenta dilatancia.

En los casos en los que predomina la tensión de tracción σ sobre la tensión tangencial τ no puede definirse el retorno a la superficie de rotura según la dirección normal a la función potencial ($Q = \text{cte}$). En este caso se adopta la dirección de retorno al vértice de coordenadas $\sigma = 0$ y $\tau = 0$. De este modo el espacio de tensiones queda dividido en dos zonas, según la dirección de retorno plástico que se adopte. La Figura 6 presenta de forma gráfica este razonamiento.

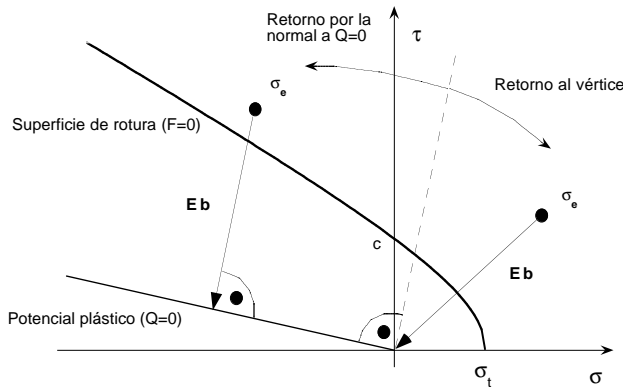


Figura 6. Dirección del corrector inelástico en su retorno a la superficie de rotura

En el espacio de las tensiones, el desplazamiento a partir de un punto de la superficie de rotura se puede expresar del siguiente modo

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{E}\dot{\mathbf{u}}^e = \mathbf{E}(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\lambda}\mathbf{b}) \quad (13)$$

donde \mathbf{E} es el tensor elástico, $\mathbf{E}\dot{\mathbf{u}}$ es el predictor de tensiones y $\mathbf{E}\dot{\lambda}\mathbf{b}$ es el corrector inelástico.

Integración de las ecuaciones

De acuerdo con el planteamiento de la plasticidad computacional, el procedimiento de propagación de la grieta se hace forma incremental. Sea el paso n en el que se conoce el estado de tensiones \mathbf{t}_n y el valor del parámetro que controla las curvas de ablandamiento u_n^{ieff} . Supongamos que en este paso n la grieta se propaga, y por tanto nos encontramos sobre la superficie de rotura y se cumple su ecuación $F(\mathbf{t}_n, u_n^{ieff}) = 0$.

Se establece un incremento de desplazamientos relativos entre los labios de la grieta $\Delta\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n$ y es necesario calcular el nuevo estado de tensiones \mathbf{t}_{n+1} del modo que sigue

$$\mathbf{t}_e = \mathbf{t}_n + \mathbf{E}\Delta\mathbf{u}_n \quad (14)$$

donde \mathbf{t}_e es el nuevo estado de tensiones, obtenido a partir de un *predictor elástico*, exterior a la superficie de rotura. Como en este paso $n+1$ se debe cumplir la ecuación de la superficie de rotura, $F(\mathbf{t}_{n+1}, u_{n+1}^{ieff}) = 0$, el valor del estado de tensiones, \mathbf{t}_{n+1} , se obtiene a partir de \mathbf{t}_e mediante la aplicación de un *corrector inelástico*

$$\mathbf{t}_{n+1} = \mathbf{t}_e - \Delta\lambda_n \mathbf{E}\mathbf{b}_n \quad (15)$$

donde $\Delta\lambda_n \mathbf{E}\mathbf{b}_n$ es el corrector inelástico, \mathbf{E} es el tensor elástico y $\mathbf{E}\mathbf{b}_n$ el vector de dirección de retorno a la superficie de rotura, perpendicular a la superficie de potencial ($Q = \text{cte}$). El valor de $\Delta\lambda_n$ se obtiene al imponer la condición de rotura en el paso $n+1$

$$F(\mathbf{t}_{n+1}, u_n^{ieff}) = F(\mathbf{t}_e - \Delta\lambda_n \mathbf{E}\mathbf{b}_n, u_n^{ieff}) = 0 \quad (16)$$

que expresado en función de la resistencia a tracción y la cohesión

$$F(\mathbf{t}_{n+1}, c_n, f_{tn}) = 0 \quad (17)$$

donde f_{tn} y c_n son los valores de la resistencia a tracción y la cohesión en el paso n . Se actualizan las variables empleadas en el proceso

$$\begin{aligned} \Delta u_n^{ieff} &= \|\Delta\mathbf{u}_n^i\| = \Delta\lambda_n \|\mathbf{b}_n\| \\ u_{n+1}^{ieff} &= u_n^{ieff} + \Delta u_n^{ieff} \\ f_{tn+1} &= f_t(u_{n+1}^{ieff}) \\ c_{n+1} &= c(u_{n+1}^{ieff}) \\ \phi_{dn+1} &= \phi_d(u_{n+1}^{ieff}) \\ \mathbf{b}_{n+1} &= \mathbf{b}(u_{n+1}^{ieff}) \end{aligned} \quad (18)$$

Debe tenerse en cuenta que los valores de la resistencia a tracción f_t , la cohesión c , la dirección de retorno $\mathbf{E}\mathbf{b}$ y el ángulo de dilatancia ϕ_d , empleados en la ecuación (16) son los correspondientes al paso n , es decir, no están actualizados al paso $n+1$. Esto se debe a que el valor de la variable u^{ieff} se obtiene una vez conocido el valor del incremento del

multiplicador plástico $\Delta\lambda$. Por esta razón debe seguirse un proceso iterativo en el que con el nuevo valor de u^{ieff} se define una nueva superficie de rotura y un nuevo retorno a la misma, lo que proporciona un nuevo valor de $\Delta\lambda$ y este a su vez un nuevo valor de u^{ieff} . El proceso termina cuando el valor de la corrección plástica es inferior a un valor especificado de antemano, es decir, el valor de $\Delta\lambda$ obtenido en (16) es inferior a un cierto ϵ . La Figura 7 muestra de forma gráfica el proceso iterativo.

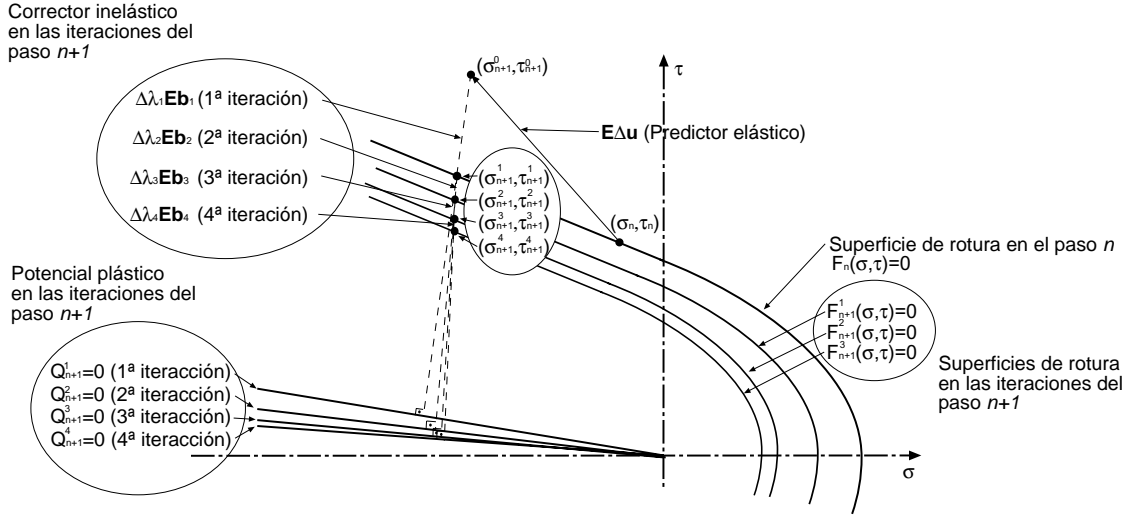


Figura 7. Interpretación geométrica del proceso iterativo de definición de la superficie de rotura y posicionamiento sobre ella al evolucionar el parámetro u^{ieff}

Incorporación a un programa de elementos finitos

El modelo presentado se ha incorporado al código de elementos finitos ABAQUS[®] mediante una subrutina de usuario. Trabajamos con el algoritmo de Newton-Raphson, y por tanto hemos de emplear la matriz de rigidez tangente.

La superficie de rotura se define con las variables \mathbf{t} y u^{ieff} , por lo que su variación se puede expresar

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} \cdot d\mathbf{t} + \frac{\partial F}{\partial u^{ieff}} du^{ieff} \quad (19)$$

al movernos sobre la superficie de rotura el gradiente debe ser nulo, y por tanto

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} \cdot d\mathbf{t} + \frac{\partial F}{\partial u^{ieff}} du^{ieff} = 0 \quad (20)$$

por otra parte, por la definición de flujo

$$du^{ieff} = d\lambda \|\mathbf{b}\| \quad (21)$$

a partir de la ecuación (13)

$$d\mathbf{t} = \mathbf{E}(d\mathbf{u} - d\lambda \mathbf{b}) \quad (22)$$

e introduciendo (21) y (22) en (20)

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} \cdot [\mathbf{E} (d\mathbf{u} - d\lambda \mathbf{b})] + \frac{\partial F}{\partial u^{ieff}} d\lambda \|\mathbf{b}\| = 0 \quad (23)$$

lo que nos permite despejar $d\lambda$

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{u}}{\frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} \cdot \mathbf{E} \mathbf{b} - \frac{\partial F}{\partial u^{ieff}} \|\mathbf{b}\|} \quad (24)$$

y sustituyendo este valor en la ecuación (22)

$$d\mathbf{t} = \left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{E} \mathbf{b} \otimes \mathbf{E}^T \frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}}}{\frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} \cdot \mathbf{E} \mathbf{b} - \frac{\partial F}{\partial u^{ieff}} \|\mathbf{b}\|} \right) d\mathbf{u} \quad (25)$$

de donde obtenemos el tensor tangente buscado

$$d\mathbf{t} = \mathbf{C}^{ep} d\mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{C}^{ep} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E} \mathbf{b} \otimes \mathbf{E}^T \frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}}}{\frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} \cdot \mathbf{E} \mathbf{b} - \frac{\partial F}{\partial u^{ieff}} \|\mathbf{b}\|} \quad (26)$$

y teniendo en cuenta que $\mathbf{b} = \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{t}}$, notamos $\mathbf{a} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}}$, con lo que la expresión (26) queda más compacta

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E} (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) \mathbf{E}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \mathbf{b} - \frac{\partial F}{\partial u^{ieff}} \|\mathbf{b}\|} \quad (27)$$

Como se puede observar no es un tensor simétrico salvo que $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, que es el caso de la plasticidad asociada.

El único valor no conocido es $\frac{\partial F}{\partial u^{ieff}}$, que se obtiene aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\partial F}{\partial u^{ieff}} = \frac{\partial F}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial u^{ieff}} + \frac{\partial F}{\partial f_t} \frac{\partial f_t}{\partial u^{ieff}} \quad (28)$$

donde f_t es la resistencia a tracción y c la cohesión, para el valor actualizado de u^{ieff} .

Para su incorporación en el código de elementos finitos ABAQUS[®] se han formulado dos elementos de intercara. Para ello se ha seguido la formulación habitual basada en el principio de los trabajos virtuales. En el apéndice se detalla la formulación. La Figura 8 presenta un esquema de los dos elementos formulados: lineal y cuadrático.

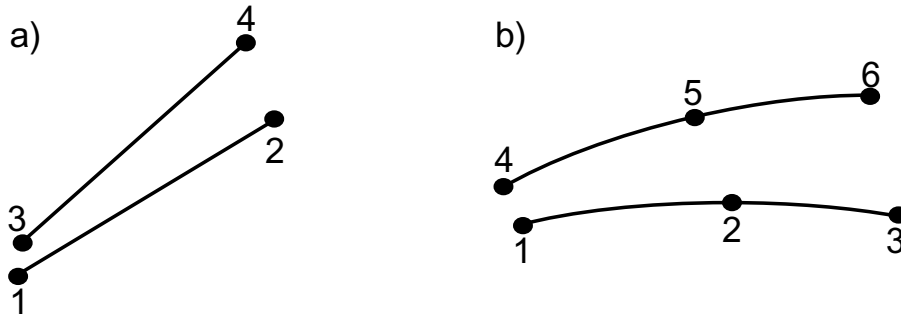


Figura 8. Elementos de intercara: a) lineal, b) cuadrático

Las Figuras 10a-c muestran la envolvente experimental y la predicción numérica de las grietas para los dos tipos de ensayo y los tres tamaños de probeta respectivamente. En todos los casos el modelo ajusta correctamente la trayectoria de la grieta dentro de la estrecha envolvente experimental. El ajuste de la predicción refuerza la hipótesis de que la trayectoria obtenida a partir de los criterios de la fractura elástica lineal es una aproximación adecuada para determinar el camino de la grieta en el hormigón.

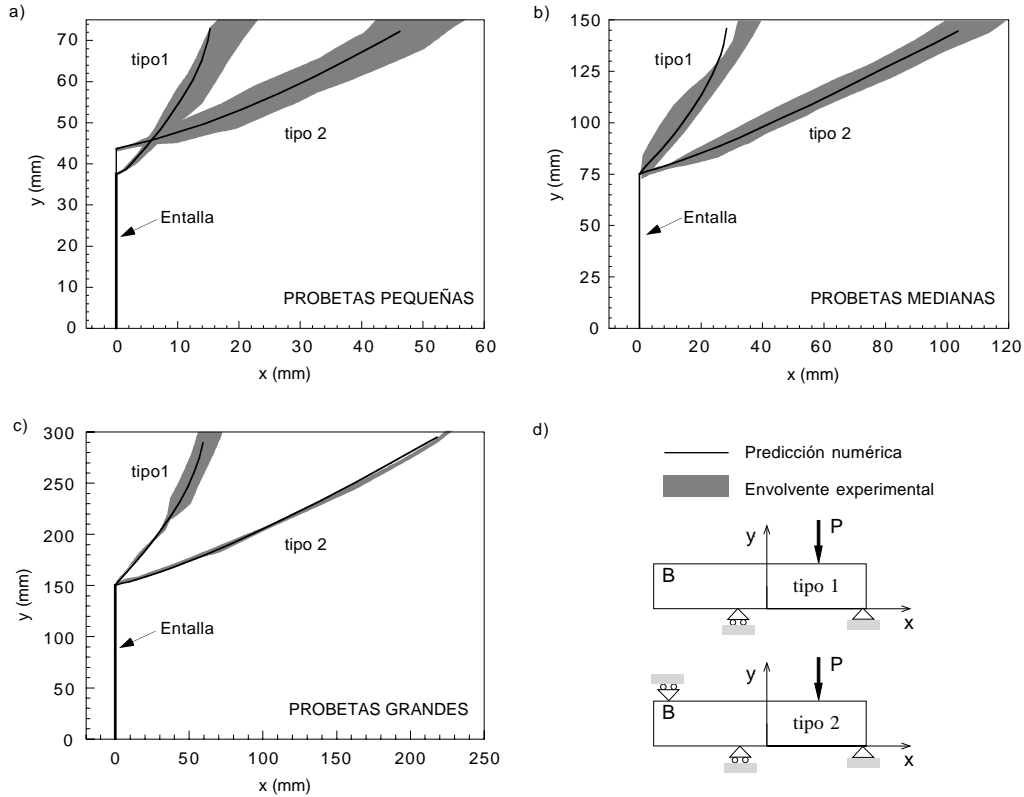


Figura 10. Envolvente experimental y predicción numérica de las trayectorias de las grietas de los ensayos de Gálvez *et al.*²⁸ a) probetas pequeñas ($D = 75$ mm), b) probetas medianas ($D = 150$ mm), probetas grandes ($D = 300$ mm), d) leyenda y ejes de referencia

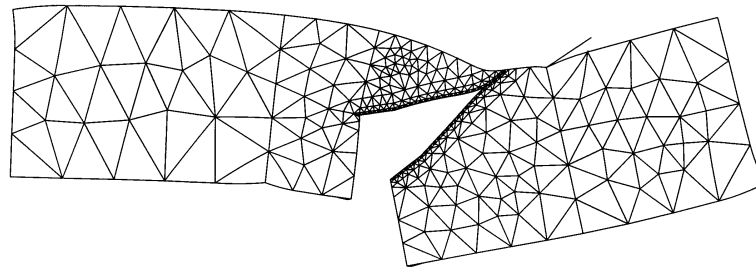


Figura 11. Malla de elementos finitos deformada correspondiente a simulación de la rotura de una probeta de tamaño medio ($D = 150$ mm) tipo 2 de los ensayos de Gálvez *et al.*²⁸

La Figura 11 muestra la malla de elementos finitos deformada correspondiente a la propagación de la grieta en las probetas de tamaño medio ($D = 150$ mm) bajo carga no proporcional (ensayo tipo 2).

La Figura 12 presenta las envolventes experimentales y la predicción numérica de los registros carga P frente al CMOD y al desplazamiento del punto de aplicación de la carga en los ensayos de *tipo 1* para los tres tamaños de probeta ensayados. La predicción numérica encaja adecuadamente en la envolvente experimental, especialmente en los registros carga P frente a CMOD. El modelo predice correctamente el “snap-back” de las curvas carga P frente al desplazamiento del punto de aplicación de la carga y converge bien hasta el final, reproduciendo correctamente la parte final de las curvas experimentales, hasta carga prácticamente nula.

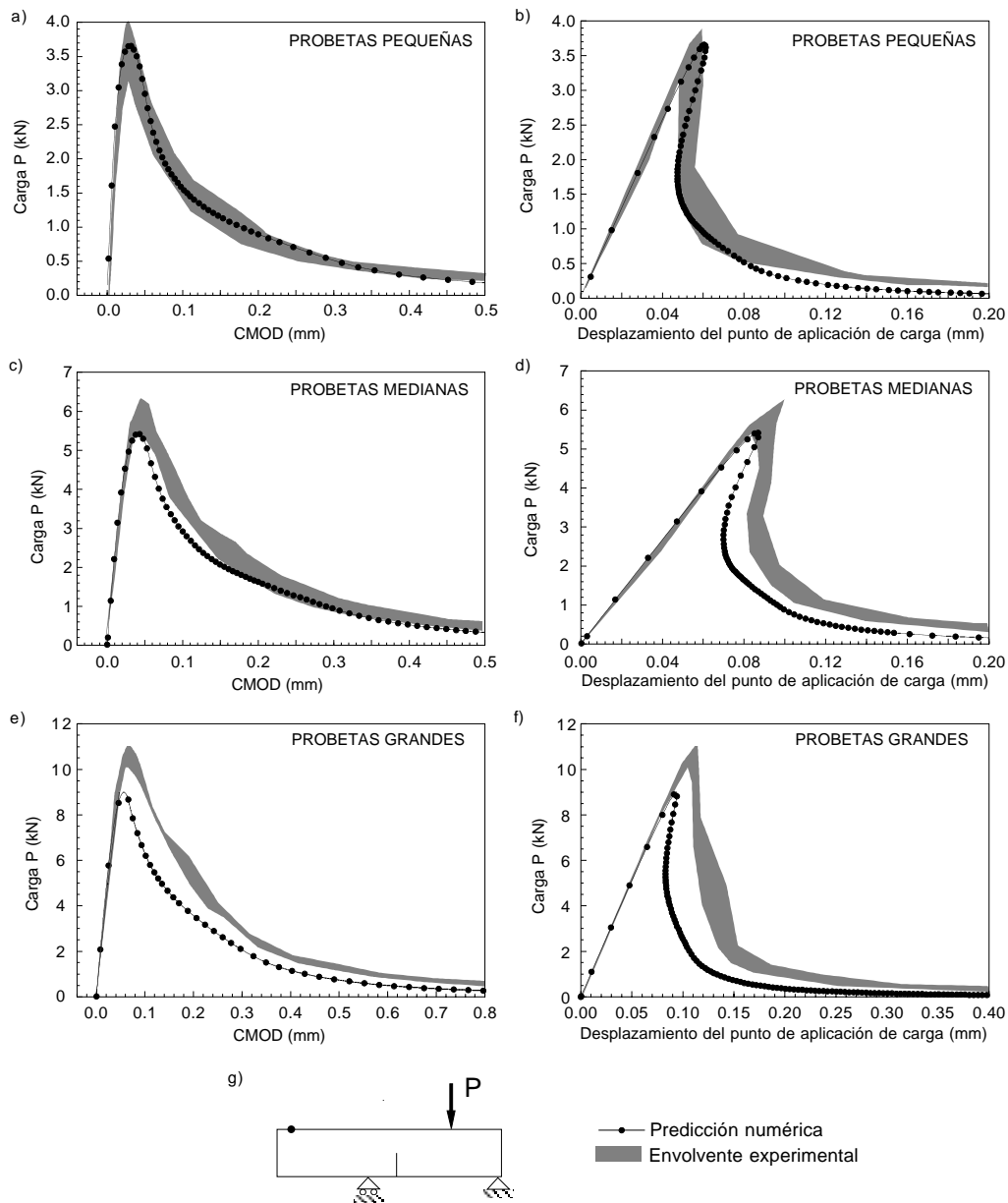


Figura 12. Envolvente experimental y predicción numérica de los ensayos *tipo 1* de Gálvez *et al.*²⁸ Tamaño pequeño ($D = 75$ mm): a) carga-CMOD, b) carga-desplazamiento. Tamaño medio ($D = 150$ mm): c) carga-CMOD, d) carga-desplazamiento. Tamaño grande ($D = 300$ mm): e) carga-CMOD, f) carga-desplazamiento, g) esquema del ensayo y leyenda

La Figura 13 presenta las envolventes experimentales y la predicción numérica de los registros carga P frente al CMOD y el desplazamiento del punto de aplicación de la carga en los ensayos de *tipo 2* para los tamaños de probeta pequeño y mediano. La predicción numérica ajusta adecuadamente con la envolvente experimental, especialmente en los registros carga P frente a CMOD. El modelo predice correctamente el “snap-back” de las curvas carga P frente al desplazamiento del punto de aplicación de la carga. La convergencia numérica no es tan buena como la presentada para las probetas de tipo 1.

Debemos destacar que la predicción realizada por el modelo se ha hecho a partir de las propiedades del material medidas en ensayos normalizados, distintos a los presentados en este apartado, y con ellas se predicen correctamente distintos registros experimentales carga P frente al CMOD y carga P frente al desplazamiento, para dos tipos de ensayo y los tres tamaños de probeta.

Hemos verificado que variaciones importantes de la cohesión, siempre que permitan definir la superficie de rotura hiperbólica de la ecuación (1) con sentido físico, afectan muy poco a los resultados numéricos presentados. Análogo comportamiento presenta la energía de fractura en modo IIa, G_F^{IIa} ; dividirla por diez o multiplicarla por cien conduce a resultados numéricos muy similares. Esto es debido a que en este tipo de ensayos la grieta se propaga de forma estable en modo I local y su crecimiento se ve poco afectado por la modificación de las variables que gobiernan el modo II, siempre que lo hagan dentro de un rango con sentido físico.

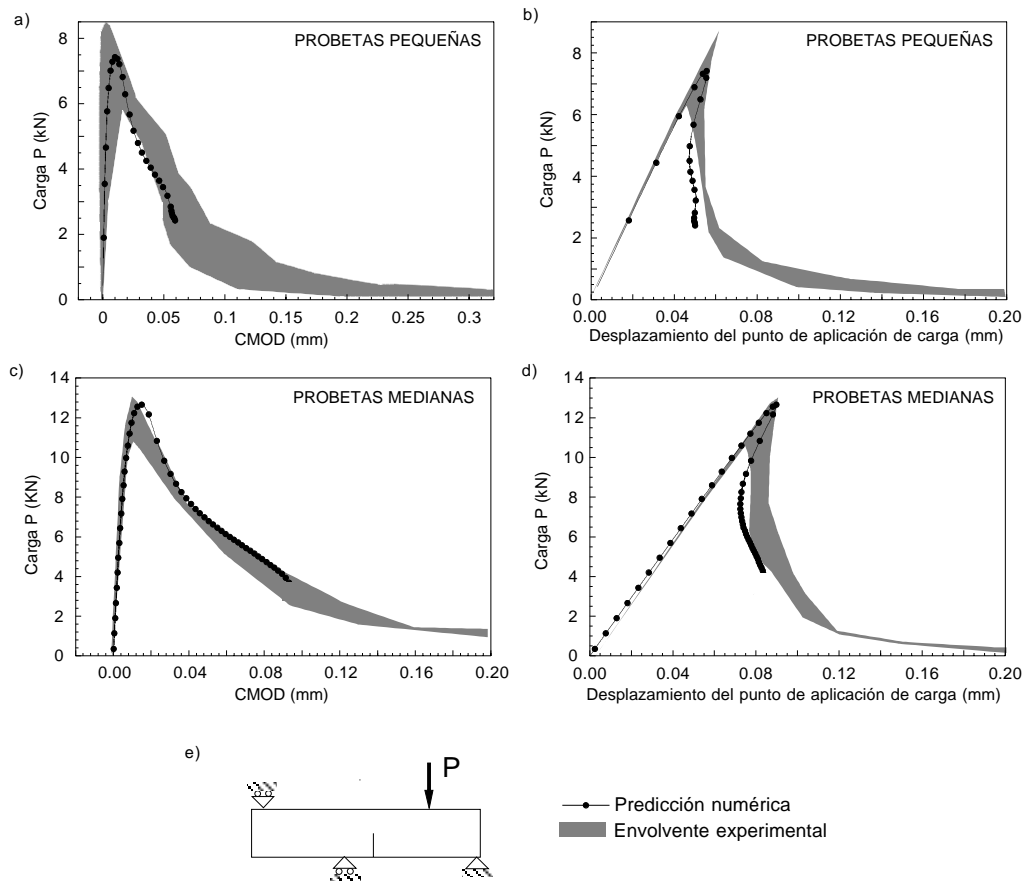


Figura 13. Envolvente experimental y predicción numérica de los ensayos *tipo 2* de Gálvez *et al.*²⁸ Tamaño pequeño ($D = 75$ mm): a) carga-CMOD, b) carga-desplazamiento. Tamaño medio ($D = 150$ mm): c) carga-CMOD, d) carga-desplazamiento, e) esquema del ensayo y leyenda

Ensayos de Arrea e Ingraffea

Los ensayos de Arrea e Ingraffea³⁰ son empleados tradicionalmente para contrastar los resultados de distintos modelos analíticos y numéricos de fractura del hormigón en modo mixto.^{24,27,29} Estos ensayos fueron pioneros en su campo, sin embargo debido al tiempo pasado, presentan algunas carencias. Las únicas propiedades medidas en los ensayos de Arrea e Ingraffea³⁰ fueron: la resistencia a compresión f_c , el módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson ν . No hay datos sobre la resistencia a tracción f_{t0} , ni sobre la energía específica de fractura G_F , que son imprescindibles para determinar la curva de ablandamiento. En este sentido Saleh y Aliabadi²⁷ verificaron su modelo de cálculo empleando los siguientes valores: $f_{t0} = 2,8$ MPa y $G_F = 100$ N/m. Xie y Gerstle,²⁴ para el mismo conjunto de ensayos, emplearon: $f_{t0} = 4,0$ MPa y $G_F = 150$ N/m. Evidentemente se trata de parámetros de fractura muy diferentes. Además el número de vigas ensayado en cada serie fue muy pequeño. Vigas de mortero (serie A): dos vigas, sólo un ensayo válido. Vigas de hormigón: serie B, tres vigas ensayadas; serie C, tres vigas ensayadas, sólo dos ensayos válidos. La envolvente experimental de los registros carga P frente al CMSD y de las trayectorias de las grietas presenta una amplia dispersión experimental. Estos inconvenientes sugieren la conveniencia de emplear un conjunto de ensayos complementarios para una validación y contrastación más ajustada y objetiva de los modelos de fractura en modo mixto de materiales cuasifrágiles.²⁹

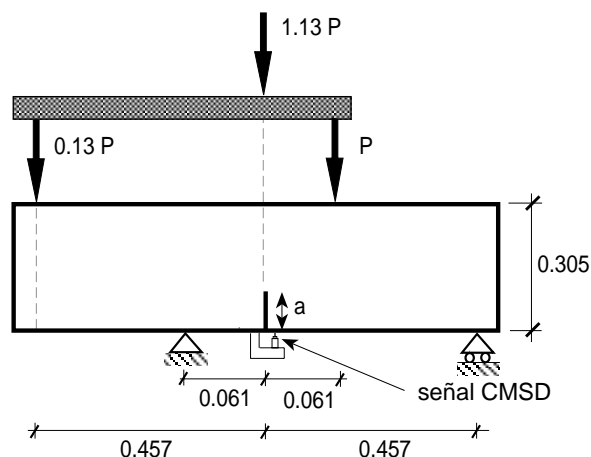


Figura 14. Geometría, fuerzas y condiciones de contorno de los ensayos de Arrea e Ingraffea³⁰

La Figura 14 muestra la geometría y disposición de los ensayos de Arrea e Ingraffea.³⁰ La profundidad de entalla a fue 70 mm para la serie A y 82,4 mm para las series B y C. El espesor de las vigas fue 102 mm para la serie A y 152 mm para las series B y C respectivamente.

Serie	$f_c^{(1)}$ [MPa]	$E^{(1)}$ [GPa]	$\nu^{(1)}$	$f_{t0}^{(2)}$ [MPa]	$G_F^{(2)}$ [N/m]
A	60,7	23,4	0,21	4,6	75
B	45,5	24,8	0,18	4,0	125
C	43,4	24,8	0,18	3,7	130

De Arrea e Ingraffea³⁰
Del Código-Modelo CEB-FIP⁵⁰

Tabla II. Propiedades mecánicas del material de los ensayos de Arrea e Ingraffea³⁰

La Tabla II muestra las propiedades del material; los valores de la resistencia a tracción del hormigón f_{t0} y de la energía específica de fractura G_F han sido estimados a partir de las propiedades presentadas por Arrea e Ingraffea³⁰ y las recomendaciones del Código Modelo CEB-FIP.⁵⁰ Los valores estimados de las otras variables fueron: $c = 5,0$ MPa, $\phi_f = 0,5$ rad, $\phi_d = 0,3$ rad y $G_F^{IIa} = \frac{4}{3}G_F^I$.

La Figura 15 muestra la envolvente experimental y la predicción numérica de las grietas para las tres series de ensayo. En todos los casos el modelo ajusta correctamente la trayectoria de la grieta dentro de la envolvente experimental.

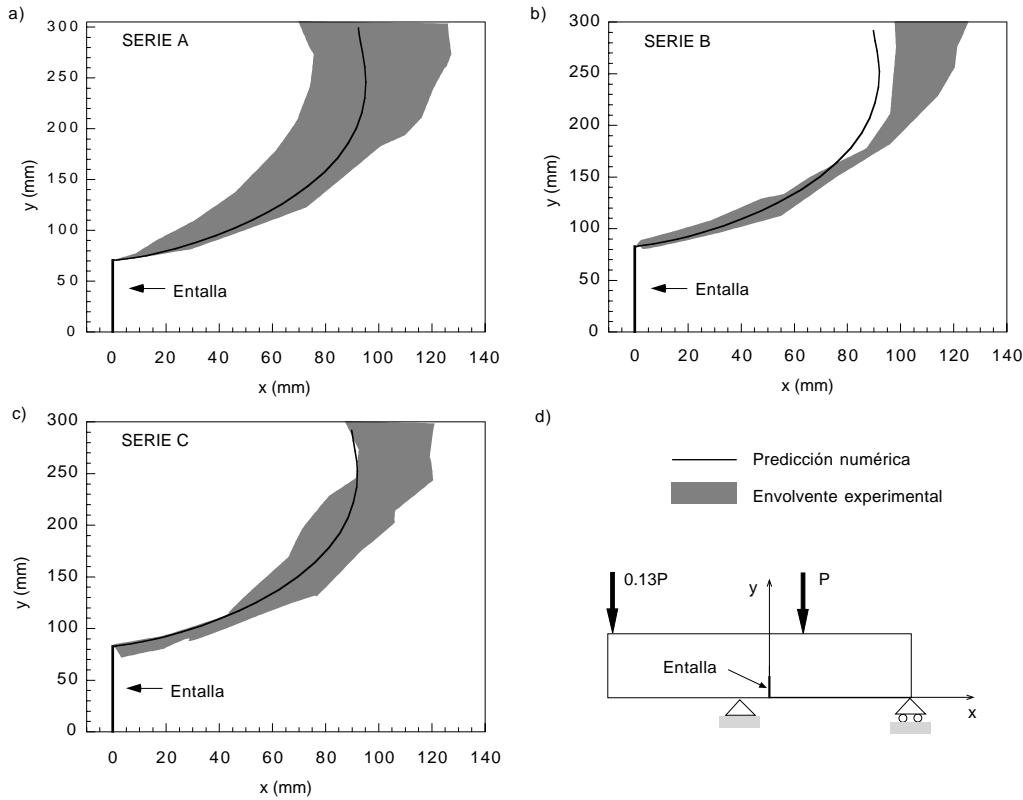


Figura 15. Envolvente experimental y predicción numérica de las trayectorias de las grietas de los ensayos de Arrea e Ingraffea.³⁰ a) serie A, b) serie B, c) serie C, d) leyenda y ejes de referencia

La Figura 16 muestra la malla de elementos finitos deformada empleada para el estudio de las vigas de la serie B de los ensayos de Arrea e Ingraffea.³⁰

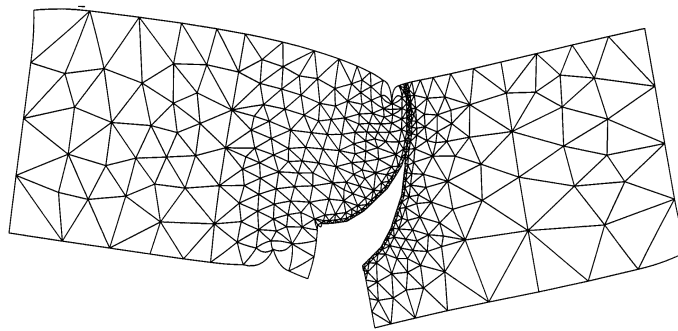


Figura 16. Malla de elementos finitos deformada correspondiente a simulación de la rotura de una viga de la serie B de los ensayos de Arrea e Ingraffea.³⁰

La Figura 17 muestra la envolvente experimental y la predicción numérica de las curvas carga P -CMSD para las tres series de vigas. El modelo predice adecuadamente los resultados experimentales.

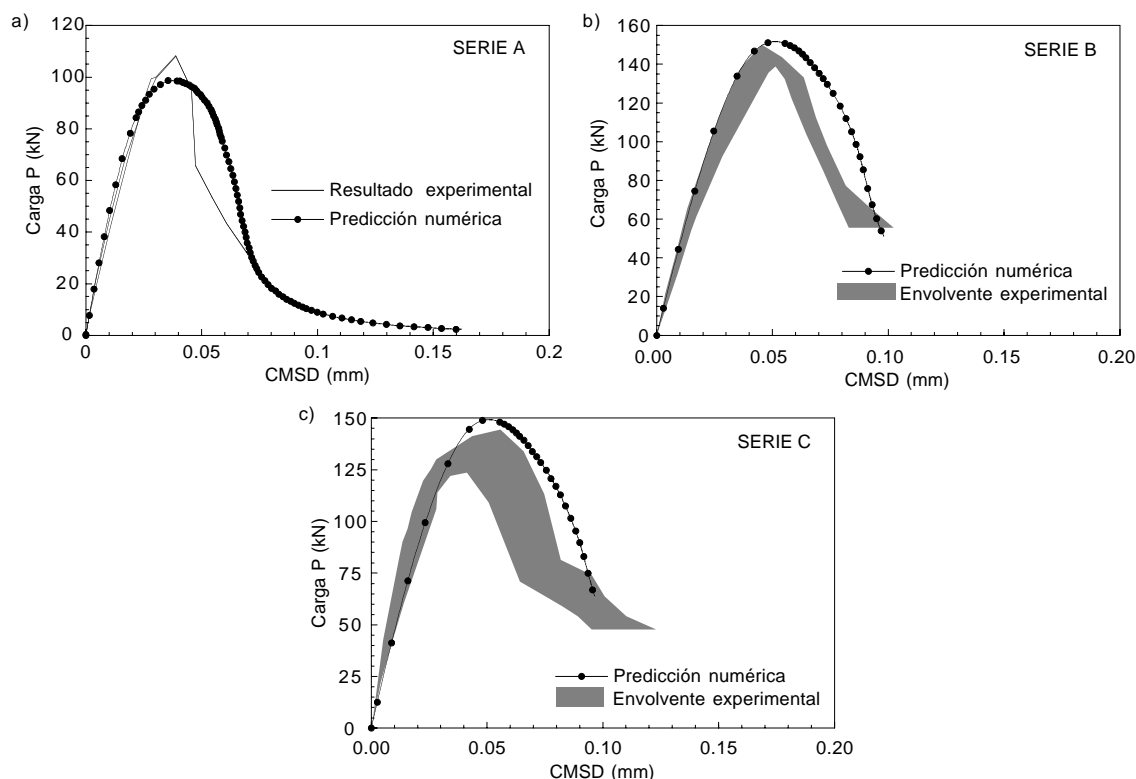


Figura 17. Envolvente experimental y predicción numérica de los ensayos de Arrea e Ingrassia.³⁰ Curvas carga P -CMSD: a) serie A, b) serie B, c) serie C

Ensayos de probetas compactas entalladas

Reinhardt y sus colaboradores^{31,32} han propuesto recientemente una geometría de probeta para el estudio de la fractura en modo II del hormigón y otros materiales. Ha sido empleada también por otros investigadores.^{33,34} Como muestra la Figura 18, se trata de una probeta compacta con doble entalla solicitada a compresión solamente en la mitad. El diseño del ensayo supone la propagación de una grieta a lo largo del ligamento bajo un modo II puro. Como se ha podido comprobar en las probetas de hormigón,^{34,52} la grieta no se propaga a lo largo del ligamento, sino que lo hace hacia la mitad descargada de la probeta bajo un modo mixto (modos I y II).

Este tipo de ensayo presenta el inconveniente de que el comportamiento a compresión del hormigón juega un papel fundamental en la modelización del ensayo, siendo la rotura a compresión el mecanismo de colapso de la probeta y no la fractura en modo mixto. No obstante, el proceso de creación y crecimiento de las grietas en modo mixto hasta la rotura por compresión de las probetas es muy adecuado para verificar un modelo de fractura en modo mixto. La modelización en detalle de la rotura por compresión del hormigón queda fuera del ámbito de la presente investigación. Para modelizar numéricamente este comportamiento se ha empleado un modelo de Drucker-Prager que incorpora el código de elementos finitos ABAQUS[®] en su librería de materiales.

En este trabajo se presentan los resultados de la modelización de los ensayos realizados por los autores³⁴ y los realizados por Cedolin y sus colaboradores,³⁴ en ambos casos con tres tamaños de probeta.

Ensayos de los autores

La Figura 18 muestra la geometría y disposición de los ensayos realizados por los autores.³⁴ Se ensayaron tres tamaños homotéticos de probeta. Las dimensiones y número de probetas ensayadas se detallan en la Tabla III. Todas las probetas fueran hormigonadas en una misma amasada. Las propiedades del material en el momento del ensayo, medidas de acuerdo con ASTM C39,⁴⁸ ASTM C496,³⁷ ASTM C469⁴⁹ y RILEM 50-FMC³⁸ fueron respectivamente: $f_c = 57$ MPa, $f_{t0} = 3,0$ MPa, $E = 38$ GPa y $G_F = 69$ N/m. Los valores estimados de las otras variables fueron: $c = 5,0$ MPa, $\phi_f = 0,5$ rad, $\phi_d = 0,4$ rad y $G_F^{IIa} = 115$ N/m.

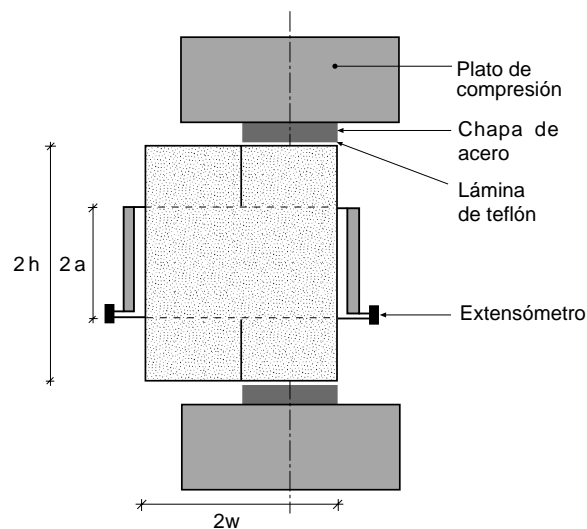


Figura 18. Geometría y disposición de los ensayos de Gálvez *et al.*³⁴

Probeta	Altura $2h$ [mm]	Base $2w$ [mm]	Ligamento $2a$ [mm]	Número de probetas
<i>H75</i>	75	56,25	37,5	3
<i>H150</i>	150	112,5	75	3
<i>H300</i>	300	225	150	3

Epsor: 50 mm

Tabla III. Dimensiones y número de probetas de los ensayos de los autores³⁴

La Figura 19 muestra las trayectorias experimentales de las grietas y la predicción numérica para los tres tamaños de probeta. Puede observarse una adecuada predicción numérica de la trayectoria de las grietas.

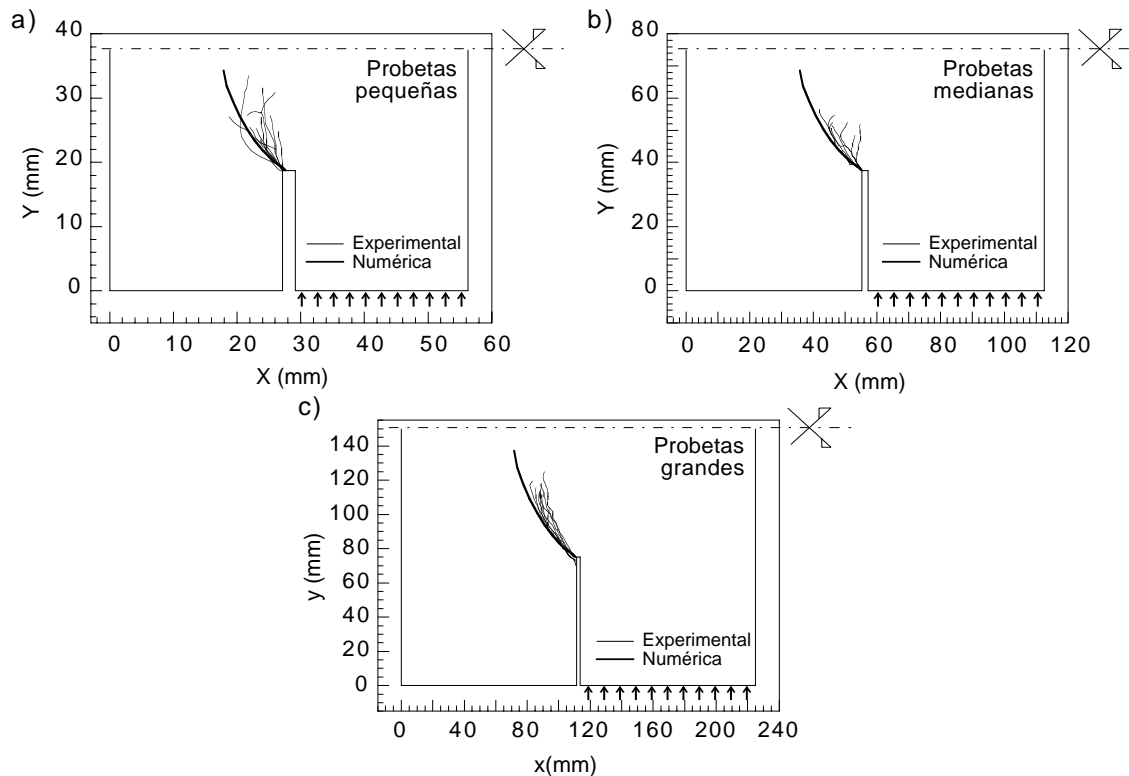


Figura 19. Trayectorias experimentales y predicción numérica de las grietas de los ensayos de los ensayos de Gálvez *et al.*³⁴: a) probetas pequeñas ($2h = 75$ mm), b) probetas medianas ($2h = 150$ mm), c) probetas grandes ($2h = 300$ mm)

Las Figuras 20a, c y e presentan las envolventes experimentales y la predicción numérica de los registros de carga aplicada frente a la lectura del extensómetro situado en la parte descargada de la probeta (extensómetro izquierdo en la Figura 18) para los tres tamaños de probeta respectivamente. La predicción numérica se ajusta bien a la envolvente experimental. Las curvas presentan una pérdida de linealidad y un marcado retroceso en la lectura del extensómetro debido a la nucleación y propagación de las grietas desde las entallas. La propagación de las grietas disminuye la tensión tangencial transferida de la mitad cargada a la mitad descargada de la probeta, lo que se traduce en una disminución del acortamiento de la parte descargada.

Las Figuras 20b, d y f presentan las envolventes experimentales y la predicción numérica de los registros de carga aplicada frente a la lectura del extensómetro situado en la parte cargada de la probeta (extensómetro derecho en la Figura 18) para los tres tamaños de probeta respectivamente. La predicción numérica se ha parado en la carga máxima. La modelización numérica del comportamiento post-pico en compresión exige un modelo más afinado que queda fuera del alcance de este trabajo. Como se puede observar la predicción numérica hasta carga máxima es ajustada.

La Figura 20 muestra que el comportamiento no lineal hasta carga máxima de la mitad de probeta cargada tiene una importancia menor en el comportamiento en fractura de la parte descargada. Este hecho confirma la hipótesis de que esta tipología de ensayo adoptada es adecuada para verificar modelos de fractura en modo mixto de materiales cuasifrágiles.

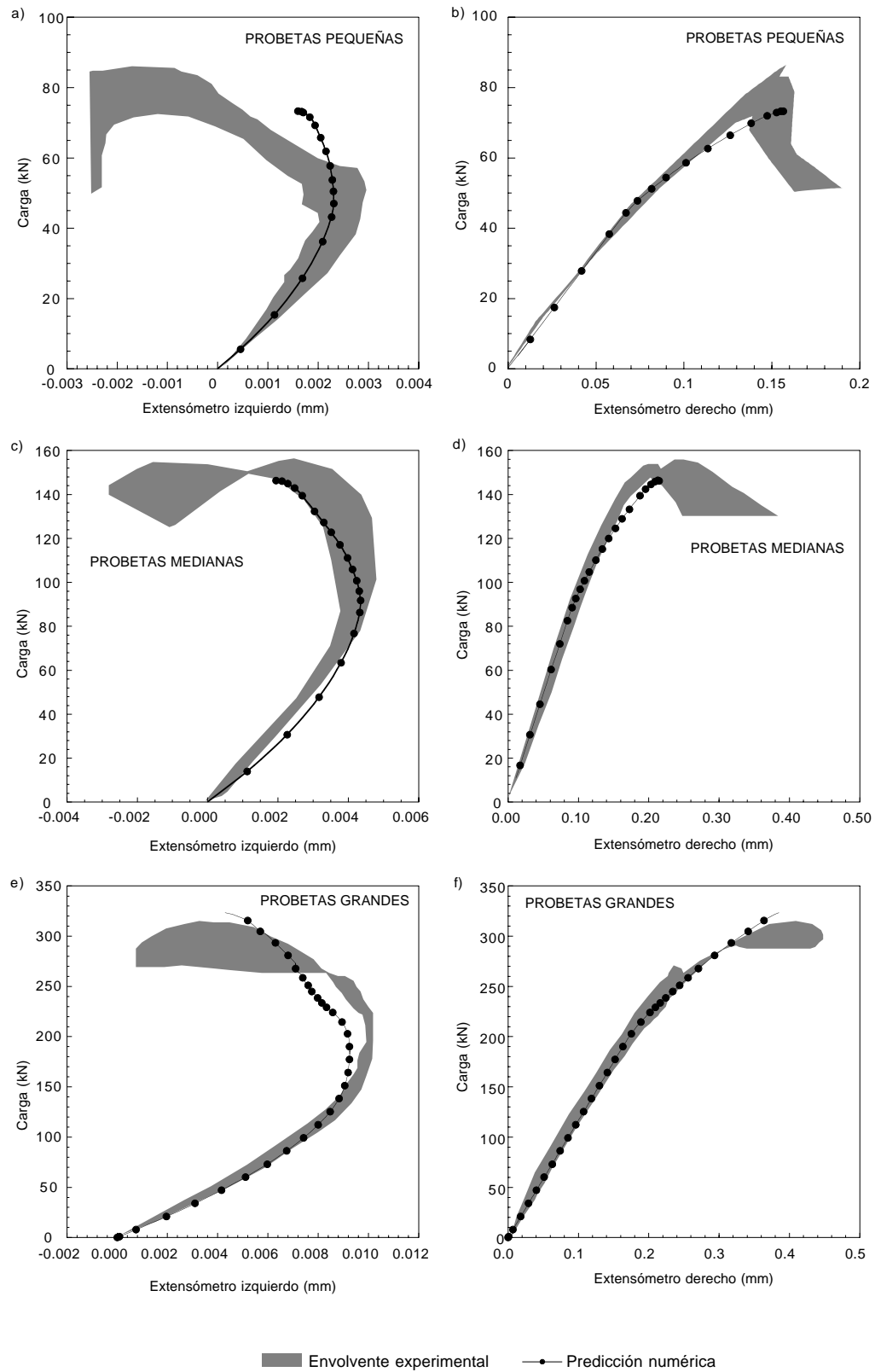


Figura 20. Envolvente experimental y predicción numérica de los ensayos de Gálvez *et al.*³⁴

Ensayos de Cedolin

La Figura 21 muestra la geometría y disposición de los ensayos realizados por Cedolin y sus colaboradores.³³ Ensayaron tres tamaños homotéticos de probeta. Las dimensiones y número de probetas ensayadas se detallan en la Tabla IV. Las propiedades empleadas en la modelización fueron: $f_{t0} = 5,0$ MPa, $E = 30$ GPa y $G_F = 80$ N/m, $c = 6,0$ MPa, $\phi_f = 0,5$ rad, $\phi_d = 0,4$ rad y $G_F^{IIa} = 96$ N/m.

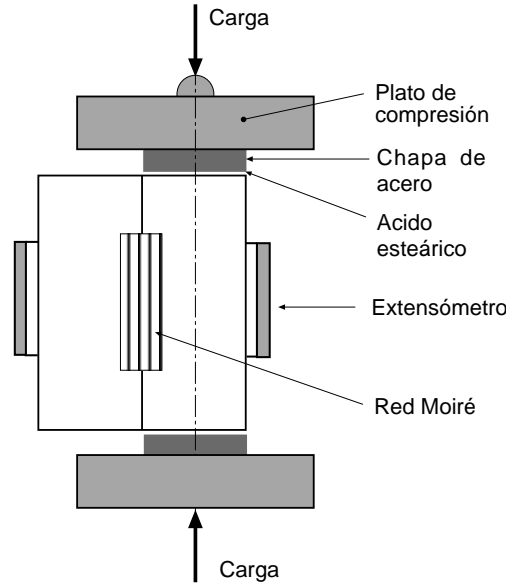


Figura 21. Geometría y disposición de los ensayos de Cedolin *et al.*³³

Probeta	Altura $2h$ [mm]	Base $2w$ [mm]	Ligamento $2a$ [mm]
<i>H60</i>	60	45	30
<i>H120</i>	120	90	60
<i>H240</i>	240	180	120

Espesor: 60 mm

Tabla IV. Dimensiones y número de probetas de los ensayos de de Cedolin *et al.*³³

La Figura 22 muestra los resultados experimentales y la predicción numérica de los registros de carga aplicada frente a la lectura de los extensómetros situados en la mitades descargada y cargada para los tres tamaños de probeta. En todos los casos la predicción numérica es ajustada a los resultados experimentales. Los comentarios relativos a la forma de las curvas y su relación con la propagación de las grietas hechos en el apartado anterior al comentar los ensayos de los autores son válidos en este apartado.

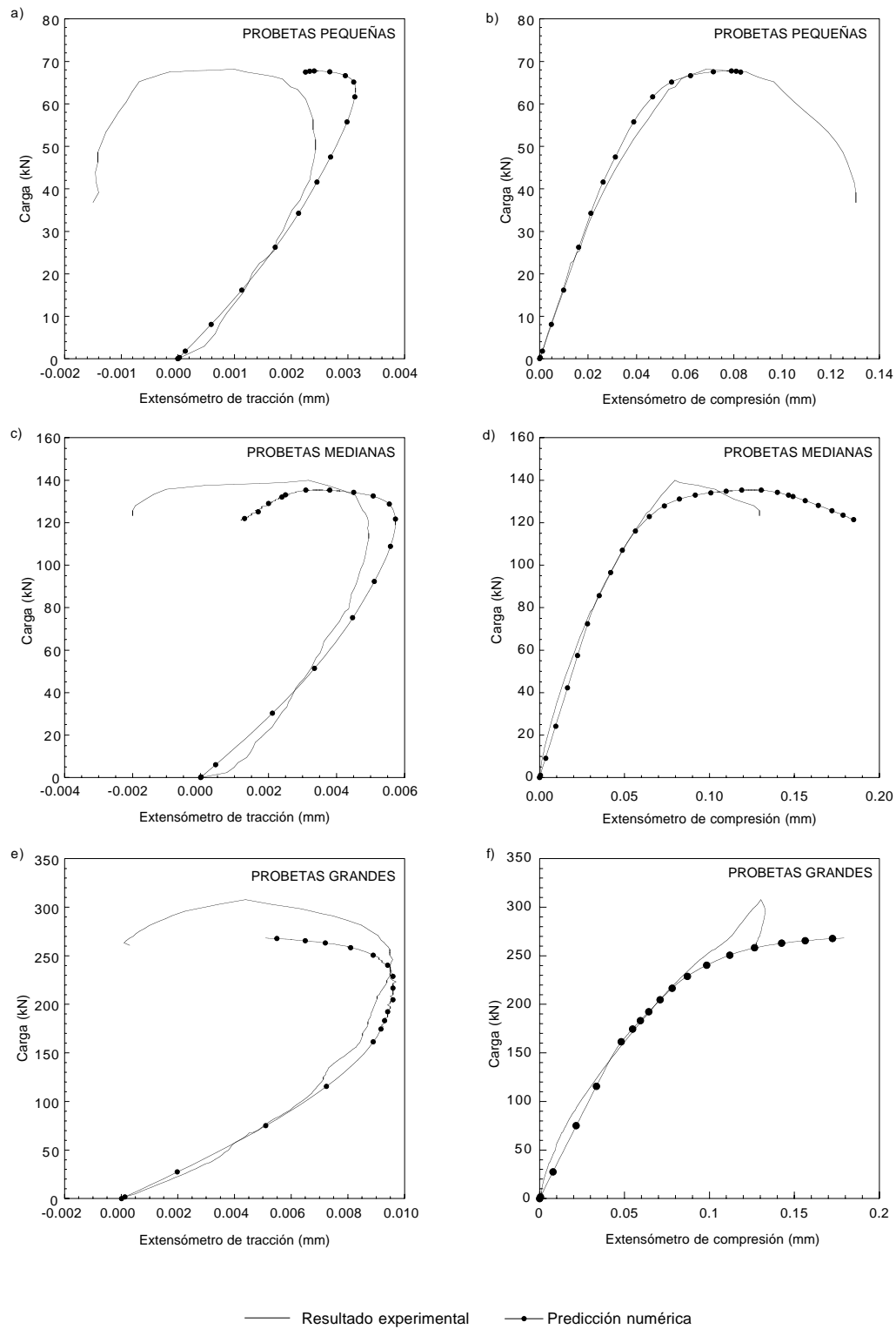


Figura 22. Envolvente experimental y predicción numérica de los ensayos de Cedolin *et al.*³³

COMENTARIOS FINALES

Se ha presentado un procedimiento de cálculo para la fractura en modo mixto de materiales cuasifrágiles. El procedimiento permite conocer la trayectoria de la grieta. El modelo constituye una extensión del modelo de la fisura cohesiva, desarrollado para fractura en modo I, a la fractura en modo mixto mediante una formulación análoga a la empleada para materiales elastoplásticos. Se ha incorporado a un programa comercial de elementos finitos mediante elementos de intercara y se ha contrastado experimentalmente con resultados experimentales de varios grupos independientes obteniéndose un buen ajuste. Además, en las predicciones hechas de los registros de carga frente al desplazamiento de diversos puntos de control en las probetas de flexión el método converge satisfactoriamente en la rama post-pico hasta valores bajos de la carga. Es importante destacar que la predicción del modelo ha sido satisfactoria para los tres tamaños de viga y probeta ensayados en modo mixto habiendo calibrado el modelo a partir de las propiedades medidas mediante ensayos normalizados, realizados previamente a los ensayos modelizados.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Ministerio de Educación y Cultura la concesión de las ayudas PB97-0579 y 1FD97-1641, así como a la Universidad de Castilla La Mancha y a la Junta de Comunidades de Castilla La Mancha la financiación parcial de este trabajo.

APÉNDICE. FORMULACIÓN DEL ELEMENTO DE INTERCARA

La formulación del elemento finito de intercara se hace a partir de la energía interna, calculada como la integral de la tensiones por las deformaciones conjugadas. En el caso de un elemento de intercara la tensión es constante para una abertura dada, por lo que se expresa

$$dW_{int} = \mathbf{u}^T \mathbf{t} dA \quad (A.1)$$

siendo $dA = e dl$, donde e es el espesor y dl el diferencial de longitud del elemento.

A partir de los desplazamientos nodales se interpolan los desplazamientos en el interior del elemento. Como se puede observar en la Figura 8, los elementos de intercara están constituidos por parejas de nodos, coincidentes dos a dos cuando elemento está sin deformar. Las funciones de forma empleadas son lineales y cuadráticas según el tipo de elemento. En problemas bidimensionales estos elementos sólo tienen la dimensión longitudinal. A continuación presentamos la formulación correspondiente al elemento lineal. Las funciones de forma son

$$N_1 = \frac{1}{2} (1 + \xi); \quad N_2 = \frac{1}{2} (1 - \xi) \quad (A.2)$$

con ξ variando entre -1 y 1 .

De acuerdo con la numeración de nodos de la Figura 8 y teniendo en cuenta que el desplazamiento relativo de las caras del elemento se calcula a partir del desplazamiento relativo de los nodos opuestos, establecemos el siguiente vector de desplazamientos nodales del elemento \mathbf{d}_{el}

$$\mathbf{d}_{el}^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4] \quad (A.3)$$

donde u_i y v_i son los desplazamientos del nodo i en las direcciones normal y tangencial a las caras del elemento.

El vector de desplazamientos relativos dentro del elemento de intercara viene dado por

$$\mathbf{u}(\xi) = \begin{bmatrix} u(\xi) \\ v(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \mathbf{d}_{el} \quad (A.4)$$

y así la matriz \mathbf{B} , según la terminología clásica, queda

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

El valor de las fuerzas internas se obtiene aplicando el teorema de los trabajos virtuales

$$\mathbf{f}_{int} = \int_l \mathbf{B}(x)^T \mathbf{t} e dl = e \int_l \mathbf{B}(x)^T \mathbf{t} dl \quad (A.6)$$

y denominando L a la longitud del elemento

$$\mathbf{f}_{int} = e \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{B}(\xi)^T \mathbf{t} d\xi \quad (A.7)$$

Una vez conocidas las fuerzas nodales se calcula la contribución de cada elemento a la matriz tangente que precisa el código de elementos finitos para aplicar el método de Newton-Raphson. Tomando incrementos en la expresión (A.7)

$$\Delta \mathbf{f}_{int} = e \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{B}(\xi)^T \Delta \mathbf{t} d\xi \quad (A.8)$$

y recordando la expresión (25)

$$\Delta \mathbf{f}_{int} = e \frac{L}{2} \left(\int_{-1}^1 \mathbf{B}(\xi)^T \mathbf{C}^{ep} \mathbf{B}(\xi) d\xi \right) \Delta \mathbf{d}_{el} \quad (A.9)$$

de donde la contribución del elemento a la matriz tangente es

$$\mathbf{K}_{el} = e \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{B}(\xi)^T \mathbf{C}^{ep} \mathbf{B}(\xi) d\xi \quad (A.10)$$

Con lo que tenemos completa la formulación del elemento para su incorporación en el código de elementos finitos.

REFERENCIAS

- 1 M. Elices y J. Planas, "Material models", *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, L. Elfgren (Ed.), Chapman and Hall, London, pp. 16–66, (1989).
- 2 E. Schlangen y J.G. Van Mier, "Mixed-mode fracture propagation: a combined numerical and experimental study", *Fracture and Damage of Concrete and Rock*, pp. 166–175, (1993).
- 3 Z.P. Bažant y J. Planas, "*Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*", CRC Press, (1998).
- 4 Y. Rashid, "Analysis of prestressed concrete pressure vessels", *Nuclear Engineering and Design*, Balkema, pp. 265–286, (1968).
- 5 V. Červenka, "Inelastic finite element analysis of reinforced concrete panels under in-plane loads", Tesis doctoral, University of Colorado, (1970).
- 6 M. Suidan y M. Schnobrich, "Finite element analysis of reinforced concrete", *Journal Structural Division*, ASCE, Vol. **99**, pp. 2109–2122, (1973).
- 7 R. Cope, P. Rao, L. Clark y P. Norris, "Modelling of reinforced concrete behaviour for finite element analysis of bridge slabs", *Numerical Methods for Non-linear Problems*, C. Taylor (Ed.), Pineridge Press, pp. 457–470, (1980).
- 8 A. Gupta y H. Akbar, "Cracking in reinforced concrete analysis", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. **110**, pp. 1735–1746, (1984).
- 9 K. Willam, E. Pramono, y S. Stur, "Fundamental issues of smeared crack models", *Proc. SEM-RILEM Int. Conf. on Fracture of Concrete and Rock*, Shah y Swartz (Eds.), SEM, pp. 192–207, (1987).
- 10 P. Nauta, "Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model", *Engng. Computations*, Vol. **2**, pp. 35–46, (1985).
- 11 J. Rots, "Computational modelling of concrete fracture", Tesis doctoral, Delft University, (1988).
- 12 R. Hill, "Bifurcation and uniqueness in non-linear mechanics continua", *Problems in Continuum Mechanics*, SIAM, pp. 155–164, (1961).
- 13 J. Mandel, "Conditions de stabilité et postulat de Drucker", *Rheology and Soil Mechanics*, IUTAM Symp., Springer Verlag, pp. 56–68, (1964).
- 14 I. Carol, P. Prat y M. López, "Normal/shear cracking model: Application to discrete crack analysis", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. **123**, pp. 765–773, (1997).
- 15 Z.P. Bažant y B. Oh, "Crack band theory for fracture of concrete", *Materials and Structures*, Vol. **16**, pp. 155–177, (1983).
- 16 K. Willam, "Experimental and computational aspects of concrete fracture", *Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, F. Damjanic *et al.* (Eds.), Pineridge Press, pp. 33–70, (1984).
- 17 J. Rots, P. Nauta, G. Kursters y J. Blaauwendraad, J., "Smeared crack approach and fracture localization in concrete", *HERON*, Vol. **30**, pp. 1–48, (1985).
- 18 Z.P. Bažant y G. Pijaudier-Cabot, "Nonlocal continuum damage, localization, stability and convergence", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. **55**, pp. 287–293, (1988).
- 19 Z.P. Bažant y J. Ožbolt, "Nonlocal microplane for fracture, damage and size effect in structures", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. **116**, pp. 2485–2504, (1990).

- 20 R. de Borst y H. Mühlhaus, "Gradient dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **35**, pp. 521–539, (1992).
- 21 P. Steinmann y K. Willam, "Finite element analysis of elastoplastic discontinuities", *Journal Structural Division*, ASCE, Vol. **120**, pp. 2428–2442, (1994).
- 22 A. Hillerborg, M. Modéer y P. Petersson, "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", *Cement and Concrete Research*, Vol. **6**, pp. 773–782, (1976).
- 23 J. Červenka, "Discrete crack modelling in concrete structures", Tesis doctoral, University of Colorado, (1994).
- 24 M. Xie y W. Gerstle, "Energy-based cohesive crack propagation modeling", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. **121**, pp. 1349–1358, (1995).
- 25 R. Reich, G. Plizari, J. Červenka y V. Saouma, "Implementation and validation of a non-linear fracture model in 2D/3D finite element code", *Numerical Models in Fracture Mechanics*, Wittmann (Ed.), Balkema, pp. 265–287, (1993).
- 26 S. Valente, "On the cohesive crack model in mixed-mode conditions", *Fracture of Brittle Disordered Materials: Concrete, Rock and Ceramics*, E & FN Spon, pp. 66–80, (1995).
- 27 A. Saleh y M. Aliabadi, "Crack growth analysis in concrete using boundary element method", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. **51**, pp. 533–545, (1995).
- 28 J.C. Gálvez, M. Elices, G.V. Guinea y J. Planas, "Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading", *International Journal of Fracture*, Vol. **94**, pp. 267–284, (1998).
- 29 D.A. Cendón, J.C. Gálvez, M. Elices y J. Planas, "Modelling the fracture of concrete under mixed loading", *International Journal of Fracture*, Vol. **103**, pp. 293–310, (2000).
- 30 M. Arrea y A. Ingraffea, *Mixed Mode Crack Propagation in Mortar and Concrete*, Report 81-13, Dpt. of Structural Engineering, Cornell University, (1982).
- 31 H.W. Reinhardt y S. Xu, "Experimental determination of K_{IIC} of normal strength concrete", *Materials and Structures*, Vol. **31**, pp. 296–302, (1998).
- 32 H.W. Reinhardt, J. Özbolt, S. Xu y A. Dinku, "Shear of structural concrete members and pure mode II testing", *Advanced Cement Based Materials*, Vol. **5**, pp. 75–85, (1997).
- 33 L. Cedolin, G. Bisi y P.A. Nardello, "Mode II fracture resistance of concrete", *Concrete Science and Engineering*, RILEM, Vol. **1**, pp. 1–9, (1999).
- 34 J.C. Gálvez, M. Elices y D.A. Cendón, "Fracture of double-edge notched specimens of concrete under compression loading", *Construction Materials: Theory and Application*, Ibidem-Verlag, Stuttgart, pp. 95–105, (2000).
- 35 Z.P. Bažant, J.K. Kim y P.A. Pfeiffer, "Non linear fracture properties from size effect tests", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. **112**, pp. 289–307, (1986).
- 36 A. Carpinteri, "Cracking of strain-softening materials", *Static and Dynamic Fracture Mechanics*, M.H. Aliabadi *et al.* (Eds.), Computational Mechanics Publications, Southampton, pp. 311–365, (1994).
- 37 ASTM C 496-96, "Standard method for splitting tensile strength of cylindrical concrete specimens", *Annual Book of ASTM Standards*, ASTM, Vol. **4.02**, pp. 266–269, (1999).

- 38 RILEM, 50-FMC Committee Fracture Mechanics of Concrete, "Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests of notched beams", *Matériaux et Constructions* Vol. **18**, pp. 285–290, (1986).
- 39 V. Gopalaratnam y S. Shah, "Softening response of plain concrete in direct tension", *Structural Journal*, ACI, Vol. **82**, pp. 310–323, (1985).
- 40 H. Cornelissen, D. Hordijk y H.W. Reinhardt, "Experimental determination of crack softening characteristics of normal weight and lightweight concrete", *HERON*, Vol. **31**, N° 2, pp. 45–56, (1986).
- 41 J. Planas y M. Elices, "Towards a measure of G_F : An analysis of experimental results", *Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete*, F.H. Wittmann (Ed.), Elsevier, pp. 381–390, (1986).
- 42 H.W. Reinhardt, "Fracture mechanics of fictitious crack propagation in concrete", *HERON*, Vol. **29**, N° 2, pp. 3–42, (1984).
- 43 F. Erdogan y G.C. Sih, "On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear", *Journal of Basic Engineering*, Vol. **85**, pp. 519–527, (1963).
- 44 D. Broek, *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, Martinus Nijhoff Pub., pp. 374–380, (1986).
- 45 FRANC2D: A Two-Dimensional Crack-Propagation Simulator, Version 2.7, P. Wawryzynek y A. Ingraffea.
- 46 J.C. Gálvez, M. Elices, G.V. Guinea y J. Planas, "Crack trajectories under mixed mode and non-proportional loading", *International Journal of Fracture*, Vol. **81**, pp. 171–193, (1996).
- 47 R.V. Mahajan y K. Ravi-Chandar, "An experimental investigation of mixed-mode fracture", *International Journal of Fracture*, Vol. **41**, pp. 235–252, (1989).
- 48 ASTM C 39-96, "Standard method for compressive strength of cylindrical concrete specimens", *Annual Book of ASTM Standards*, ASTM, Vol. **4.02**, pp. 18–22, (1999).
- 49 ASTM C 469-96, "Standard method for static modulus of elasticity and Poisson's ratio of concrete in compression", *Annual Book of ASTM Standards*, ASTM, Vol. **4.02**, pp. 241–244, (1999).
- 50 CEB-FIP, *Model Code 1990*, Lausanne, (1991).
- 51 H. Tada, P. Paris y G. Irwin, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, 2nd ed., Paris Productions Incorporated, St. Louis, p. 4.13, (1985).
- 52 M. di Prisco y L. Ferrara, "On the evaluation of mode II fracture energy in high strength concrete", *Computational Modelling of Concrete Structures*, R. de Borst, N. Bićanić, H. Mang y G. Meschke (Eds.), Balkema, pp. 409–418, (1988).