

Un Método de Elementos Finitos para Análisis Hidrodinámico de Estructuras Navales

Julio García Espinosa
Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra
Honorio Sierra Cano

Monografía CIMNE Nº-59, Diciembre 2000

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA
Edificio C1, Campus Norte UPC
Gran Capitán s/n
08034 Barcelona, España

Primera edición Diciembre 2000

**UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISIS
HIDRODINÁMICO DE ESTRUCTURAS NAVALES**

Monografía CIMNE M59

© Los autores

ISBN: 84-89925-75-5

Depósito legal: B-52789-2000

Índice General

Introducción	xii
0.1 El Proyecto del Buque	xii
0.2 La Resistencia al Avance del Buque	xiii
0.3 Sobre el Desarrollo de los Métodos CFD	xiv
0.4 Los Códigos CFD en el Proyecto del Buque	xvi
0.4.1 Los Ensayos en Canal de Experiencias	xvii
0.4.2 Los CFD como Herramienta de Diseño	xxii
0.5 Objetivos del Presente Trabajo	xxv
0.5.1 Organización del Presente Trabajo	xxvi
1 Las Ecuaciones de Navier Stokes	1
1.1 Introducción	1
1.2 Las Ecuaciones de Navier Stokes para Flujo Incompresible	1
1.2.1 Las Ecuaciones de Euler	3
1.2.2 Aproximación por el método de Galerkin	4
1.2.3 La Restricción de Incompresibilidad	5
1.2.4 La Problemática de la Convección	6
1.2.5 Existencia y unicidad de solución	7
1.3 Conclusiones	8
2 El Problema de la Superficie Libre	9
2.1 Introducción	9
2.2 La Condición de Contorno de Superficie Libre	11
2.2.1 Formulación <i>ALE</i> de la Superficie Libre	14
2.2.2 Forma Simplificada de las Ecuaciones de Superficie Libre	15
2.2.3 Condición de Superficie Libre para Buques Lentos	16
2.2.4 Ecuación de Superficie Libre Lineal	17
2.2.5 Métodos Iterativos para la Resolución del Problema de Superficie Libre no Lineal	19
2.2.6 Comentarios sobre la Integración de la Ecuación de Superficie Libre	24
2.3 El Problema de Convección Difusión	25
2.3.1 El Problema Unidimensional de Convección Difusión	27

2.3.2	El Método de Cálculo Finitesimal	33
2.3.3	El Problema Multidimensional de Convección Difusión	36
2.3.4	Aplicación del Método de los Elementos Finitos al Problema Es- tabilizado	41
2.3.5	Determinación de las Longitudes Características	43
2.3.6	Esquemas Estabilizados de Mayor Orden	50
2.3.7	Esquemas Estabilizados en el Tiempo	51
2.4	El Problema de Convección Pura	53
2.5	El Método de Estabilización de Dawson	57
2.6	Extensión del Método <i>CF</i> a otros Problemas de Mecánica de Fluidos	60
2.7	Ejemplos	61
2.7.1	Ejemplo 1	61
2.7.2	Ejemplo 2	63
2.7.3	Ejemplo 3	65
2.8	Conclusiones	66
3	Ecuaciones de Navier Stokes Estabilizadas.	
	El Método de Pasos Fraccionados	69
3.1	Introducción	69
3.2	Formulación Estabilizada de las Ecuaciones de Navier Stokes	71
3.3	Formulación <i>ALE</i> de las Ecuaciones de Navier Stokes	74
3.4	El Algoritmo de Pasos Fraccionados Semi Implícito	77
3.4.1	Aplicación a las Ecuaciones de Navier Stokes Estabilizadas me- diante Cálculo Finitesimal	80
3.4.2	Discretización del Problema usando el Método de los Elementos Finitos	82
3.4.3	Determinación de las Longitudes Características	89
3.4.4	El Fenómeno de la Turbulencia	92
3.5	Ejemplos	104
3.5.1	Ejemplo 1	104
3.5.2	Ejemplo 2	106
3.5.3	Ejemplo 3	113
3.6	Conclusiones	114
4	Un Algoritmo para la Deformación de Mallas de Elementos Finitos	117
4.1	Introducción	117
4.2	Un Algoritmo para la Deformación Uniforme de Mallas	118
4.3	Asignación de las Propiedades Mecánicas	119
4.4	Un Algoritmo para la Deformación Uniforme de Mallas	120
4.5	Aplicación a Cuerpos Semisumergidos	121
4.6	Un Algoritmo Iterativo para la Deformación de Mallas de Elementos Finitos	126
4.7	Ejemplos	128

4.7.1	Ejemplo 1	128
4.7.2	Ejemplo 2	129
4.7.3	Ejemplo 3	129
4.8	Conclusiones	132
5	Un Método para Análisis Hidrodinámico de Buques	137
5.1	Introducción	137
5.2	Un Método Estabilizado para Análisis Hidrodinámico de Buques	138
5.2.1	Cálculo del Incremento de Tiempo	147
5.2.2	Solución con Incremento de Tiempo Local	149
5.2.3	La Condición de Superficie Libre sobre Referencias no Planas	151
5.2.4	Condición Absorbente para la Superficie Libre	151
5.2.5	La Problemática de las Popas de Espejo	154
5.3	Un Generador de Olas Numérico	157
5.4	Ejemplos	159
5.4.1	Ejemplo 1	160
5.4.2	Ejemplo 2	173
5.4.3	Ejemplo 3	177
5.4.4	Ejemplo 4	180
5.4.5	Ejemplo 5	191
5.4.6	Ejemplo 6	191
5.4.7	Ejemplo 7	194
6	Conclusiones	199
A	Los Métodos de Elementos de Contorno	211
A.0.8	El Método de Hess y Smith	213
A.0.9	La Condición de Superficie Libre	215
B	El Método de Galerkin Aplicado a la Ecuación de Convección Difusión	217
C	Ecuación de Convección Difusión que Resuelve el Método de Galerkin	222
D	Estudio de la Ecuación Unidimensional Modificada de Convección Difusión	226
E	Ecuación de Convección Difusión Modificada Óptima	233
F	La Condición de Superficie Libre de Dawson	237
G	La Ecuación de Balance de Masa Estabilizada	243
H	Condición de Contorno Estabilizada para la Ecuación de Convección Difusión	246

I	Balance Estabilizado de Cantidad de Movimiento en el Contorno	249
J	Derivación de las Ecuaciones de Navier Stokes estabilizadas	254
K	Balance de Masa Cerca de un Contorno tipo Dirichlet	261
L	Un Procedimiento para el Cálculo de los Parámetros de Estabilización	264
	Notación	267

Índice de Figuras

1	Esquema de un sistema de medición de la resistencia al avance en el ensayo de remolque en aguas tranquilas.	xvii
2	Esquema de un sistema óptico de medición de perfiles de olas en un canal de ensayos.	xix
3	Esquema de un sistema óptico de medición de estelas en un canal de ensayos.	xx
4	Ensayo de un modelo en tanque de olas.	xx
5	Ensayo de maniobrabilidad con modelo en un lago.	xxi
6	Ensayo de una hélice en tanque de cavitación.	xxii
7	Ciclo de diseño de un buque asistido por herramientas <i>CFD</i>	xxiii
2.1	Esquema de la disposición de las superficies η y η_{ref}	22
2.2	Problema de convección difusión unidimensional.	27
2.3	Balance en un dominio finito AB.	28
2.4	Gráfico de $\varphi(x)$ para $l = 10$, $d = 1$	30
2.5	Dominio de balance para el problema bidimensional de convección difusión.	37
2.6	Descomposición vectorial de \mathbf{h}	47
2.7	Ejemplo 1. Problema bidimensional de convección difusión con condiciones de contorno tipo Dirichlet no uniformes. La malla utilizada para el cálculo es no estructurada y tiene 812 triángulos lineales.	62
2.8	Resultado de contornos de φ obtenidos aplicando el método clásico de Galerkin al ejemplo 2 (izquierda). A la derecha puede verse la solución del mismo problema aplicando el método <i>CF</i>	62
2.9	Comparación de los resultados obtenidos para el ejemplo 1 utilizando la metodología <i>CF</i> y <i>SUPG</i>	63
2.10	Ejemplo 2. Problema bidimensional de convección difusión con condiciones de contorno tipo Dirichlet y Neumann. La malla utilizada para el cálculo es estructurada y tiene 800 triángulos lineales.	64
2.11	Resultado de contornos de φ obtenidos aplicando al ejemplo 2, el método clásico de Galerkin (izquierda) y el método <i>CF</i> (derecha).	64
2.12	Comparación de los resultados obtenidos para el ejemplo 2 utilizando la metodología <i>CF</i> y <i>SUPG</i>	65

2.13	Ejemplo 3. Problema bidimensional de convección difusión no homogéneo con condiciones de contorno tipo Dirichlet. La malla utilizada para el cálculo es estructurada y tiene 800 triángulos lineales.	66
2.14	Resultado de contornos de φ obtenidos aplicando al ejemplo 3, el método clásico de Galerkin (izquierda) y el método CF (derecha).	67
2.15	Gráfica de la solución del ejemplo 3 en un corte diagonal del dominio. .	67
3.1	Dominio de balance finito (tetraedro elemental).	72
3.2	Descomposición vectorial del vector \mathbf{h}_{m_i}	90
3.3	Distribución de velocidad típica para una capa límite turbulenta. . . .	101
3.4	Simplificación del problema para la condición de contorno para la ley de pared.	103
3.5	Flujo en una cavidad. Definición del problema.	105
3.6	Malla de contorno utilizada para el flujo en cavidad.	105
3.7	Vectores de velocidad y líneas de corriente del flujo en una cavidad. . .	106
3.8	Contornos de velocidad, sobre un corte diametral, del flujo en una cavidad (componente horizontal a la izquierda y vertical a la derecha). . . .	107
3.9	Distribución de velocidad (componentes 0_x y 0_y) sobre la línea media horizontal del plano diametral en el flujo en una cavidad.	107
3.10	Distribución de la presión la línea media horizontal del plano diametral en el flujo en una cavidad.	108
3.11	Definición geométrica del problema del análisis de un perfil NACA 0012.	108
3.12	Malla tipo utilizada en el análisis del perfil NACA 0012.	109
3.13	Comparación de los valores experimentales y numéricos de la distribución de v^2/v_∞^2 en el perfil NACA 0012 con un ángulo de ataque de 0° . .	110
3.14	Distribución de presión en torno al perfil NACA 0012 (ángulo de ataque 5° , $R_n \rightarrow \infty$).	111
3.15	Vectores de velocidad sobre el perfil NACA 0012 (ángulo de ataque 5° , $\mu = 0$).	111
3.16	Distribución de presión en torno al perfil NACA 0012 (ángulo de ataque 5° , $R_n = 10^6$).	112
3.17	Comparación de los resultados numéricos y experimentales de empuje dinámico obtenidos en el análisis del perfil NACA 0012 ($R_n \rightarrow \infty$). . .	112
3.18	Geometría utilizada en el análisis del flujo ante un escalón.	113
3.19	Malla de contorno utilizada en el análisis del flujo sobre un escalón. . .	113
3.20	Distribución de la componente 0_x de la velocidad en el análisis del flujo ante un escalón.	114
3.21	Trazado de líneas de corriente del flujo ante un escalón. Se incluye detalle de la recirculación en la zona cercana al escalón.	115
3.22	Detalle del resultado sobre el plano diametral del análisis del flujo ante un escalón.	115

4.1	Deformación del volumen de análisis debido al movimiento de los contornos.	118
4.2	Problema de un cuerpo semisumergido.	122
4.3	Esquema del algoritmo de proyección de mallas superficiales.	123
4.4	Método para evaluar la deformación de la línea de flotación.	125
4.5	Definición CAD del problema de una esfera móvil sumergida enfrentada a una corriente uniforme.	128
4.6	Posición de la esfera y la malla en diferentes instantes de tiempo (de izquierda a derecha y de arriba a abajo $t = 0.47$, $t = 0.94$, $t = 1.83$, $t = 3.16$).	129
4.7	Evolución del módulo de la velocidad con el movimiento de la esfera en diferentes instantes de tiempo (de izquierda a derecha y de arriba a abajo $t = .47$, $t = .92$, $t = 1.10$, $t = 1.32$, $t = 1.67$, $t = 2.01$, $t = 2.43$, $t = 4.83$, $t = 6.16$, $t = 8.18$, $t = 12.35$, $t = 15.65$).	130
4.8	Deformación de la superficie libre amplificada 10 veces en los instantes de tiempo $t_1 = 0.47s$ y $t_2 = 3.16s$	131
4.9	Evolución del movimiento de la esfera con el tiempo.	131
4.10	Definición CAD del problema de una esfera que cae libremente en un cilindro vertical lleno de líquido.	132
4.11	Evolución de la caída de la esfera en la proleta. Se muestran los contornos del módulo de la deformación de la malla.	133
4.12	Contornos del módulo de la velocidad en diferentes instantes de la caída de la esfera.	134
4.13	Evolución de la velocidad de caída de la esfera comparada con la velocidad experimental (1.95 m/s).	134
4.14	Definición CAD utilizada para el problema de un cilindro vertical enfrentado a una corriente uniforme.	135
4.15	Contornos del módulo de la velocidad sobre la superficie libre del problema del cilindro vertical para $t = 10.5s$	135
4.16	Contornos del módulo de la deformación de la malla sobre el contorno, en el problema del cilindro vertical, para $t = 10.5s$	136
5.1	Definición del problema de análisis de flujo fluido alrededor de un buque.	138
5.2	Esquema general del algoritmo de resolución del problema.	140
5.3	Disposición esquemática de las zonas donde se impone el amortiguamiento en la superficie libre.	153
5.4	Esquemas de los posibles regímenes de flujo que pueden aparecer en una popa de espejo.	155
5.5	Diferentes zonas que se presentan en la superficie libre con popas de espejo.	156
5.6	Situación de la zona donde es necesario prescribir η en los flujos con popa de espejo.	156
5.7	Efecto de una perturbación fija sobre la superficie libre.	157
5.8	Efecto de una perturbación móvil sobre la superficie libre.	158

5.9	Esquema de un generador de olas numérico, consistente en la imposición de una presión oscilatoria sobre la superficie libre.	159
5.10	Geometría utilizada en el análisis del modelo de la serie 60 con $C_b = 0.6$	160
5.11	Mapa de olas (arriba) y de velocidades (abajo) sobre la superficie libre, resultado del análisis del buque de la serie 60 ($F_n = 0.316$)	161
5.12	Comparación de los resultados del perfil de olas sobre el casco del buque de la serie 60 ($F_n = 0.316$)	162
5.13	Comparación de los resultados del perfil de olas en un corte a una distancia $y/L_{pp} = 0.0755$ del plano de crujía, en el análisis del buque de la serie 60 ($F_n = 0.316$).	162
5.14	Comparación de los resultados del perfil de olas en un corte a una distancia $y/L_{pp} = 0.2067$ del plano de crujía, en el análisis del buque de la serie 60 ($F_n = 0.316$).	163
5.15	Instantáneas del proceso de convergencia de la solución de las olas creadas por el modelo de la serie 60 ($F_n = 0.316$).	164
5.16	Gráfica del coeficiente de resistencia por formación de olas del modelo de la serie 60. Los resultados numéricos, obtenidos con una malla de 27000 nodos, se comparan con los extraídos de los experimentos según las recomendaciones de la <i>ITTC</i>	164
5.17	Gráfica del coeficiente de resistencia por formación de olas del modelo de la serie 60. Los resultados numéricos, obtenidos con una malla de 95000 nodos, se comparan con los extraídos de los experimentos según las recomendaciones de la <i>ITTC</i>	165
5.18	Mapa de olas del buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 1.3 \cdot 10^9$ y $F_n = 0.316$	166
5.19	Líneas de corriente en torno a la popa del buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 1.3 \cdot 10^9$ y $F_n = 0.316$	166
5.20	Perspectiva de las líneas de corriente en torno a la popa del buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 1.3 \cdot 10^9$ y $F_n = 0.316$	166
5.21	Líneas de corriente en torno al buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 1.3 \cdot 10^9$ y $F_n = 0.316$	167
5.22	Contornos del módulo de la velocidad sobre la superficie libre del buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 1.3 \cdot 10^9$ y $F_n = 0.316$	167
5.23	Contornos de la componente según Ox de la velocidad del buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 1.3 \cdot 10^9$ y $F_n = 0.316$	168
5.24	Mapa de olas del buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 10^9$ y $F_n = 0.238$	169
5.25	Líneas de corriente en torno al buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 10^9$ y $F_n = 0.238$	169
5.26	Contornos del módulo de la velocidad en torno al buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 10^9$ y $F_n = 0.238$	170

5.27	Contornos de presión en torno al buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 10^9$ y $F_n = 0.238$. La superficie libre transparente permite ver las líneas de corriente trazadas en torno al buque.	170
5.28	Contornos de la componente según Ox de la velocidad en torno al buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 6.5 \cdot 10^8$ y $F_n = 0.16$	171
5.29	Contornos de presión en torno al buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Se han trazado diferentes líneas de corriente sobre el casco. Análisis para $R_n = 6.5 \cdot 10^8$ y $F_n = 0.16$	172
5.30	Geometría utilizada en el análisis de la carena HSDF04.	174
5.31	Comparación de los resultados del perfil de olas en un corte a una distancia $y/L_{pp} = 0.505$ del plano de crujía, en el análisis de la carena HSDF04 ($F_n = 0.45$).	175
5.32	Comparación de los resultados del perfil de olas en un corte a una distancia $y/L_{pp} = 0.60$ del plano de crujía, en el análisis de la carena HSDF04 ($F_n = 0.45$).	175
5.33	Mapa de olas resultado del análisis de la carena HSDF04 ($F_n = 0.45$)	176
5.34	Isocontornos de altura de olas, resultado del análisis de la carena HSDF04 ($F_n = 0.45$)	176
5.35	Curva de resistencia por formación de olas de la fragata. Se indica en rayado la zona donde experimentalmente se observó que el espejo comenzaba a estar mojado.	177
5.36	Contornos de velocidad sobre la carena HSDF04 para $F_n = 0.45$	178
5.37	Trazado de líneas de corriente en torno al casco de la fragata ($F_n = 0.4$).	178
5.38	Trazado de líneas de corriente en torno al bulbo de la fragata ($F_n = 0.4$).	179
5.39	Definición geométrica (CAD) de un submarino y malla de superficie utilizada en el análisis.	179
5.40	Análisis de la firma de presión del submarino. Líneas isobaras en diferentes instantes de tiempo.	180
5.41	Diferentes imágenes del análisis de la firma rádar de un submarino en situación de ataque.	181
5.42	Definición geométrica del modelo Wigley.	181
5.43	Mapa de olas (arriba) y de velocidades (abajo) sobre la superficie libre, resultado del análisis del modelo Wigley ($F_n = 0.266$).	182
5.44	Mapa de olas (arriba) y de velocidades (abajo) sobre la superficie libre, resultado del análisis del modelo Wigley ($F_n = 0.316$).	183
5.45	Mapa de olas (arriba) y de velocidades (abajo) sobre la superficie libre, resultado del análisis del modelo Wigley ($F_n = 0.452$).	184
5.46	Mapa de olas resultado del análisis del modelo Wigley (trincado).	186
5.47	Contornos del módulo de velocidad sobre la obra viva y la superficie libre del modelo Wigley (trincado).	186
5.48	Deformación de la malla del modelo Wigley (libre) en las cercanías del casco.	187

5.49	Malla de la superficie mojada resultante del análisis del modelo <i>Wigley</i> (libre).	187
5.50	Contornos del módulo de velocidad sobre la superficie libre del modelo <i>Wigley</i> (libre).	188
5.51	Mapa de olas resultado del análisis del modelo <i>Wigley</i> (libre). La altura se ha amplificado por un factor de 4.	188
5.52	Contornos del módulo de velocidad sobre la obra viva y la superficie libre del modelo <i>Wigley</i> (libre). También puede verse el trazado de algunas líneas de corriente.	189
5.53	Contornos de presión resultado del análisis del modelo <i>Wigley</i> (libre). En la imagen, la superficie libre se transparenta, dejando a la vista la obra viva y algunas líneas de corriente trazadas.	190
5.54	Comparación de los perfiles de ola obtenidos en el análisis numérico (con modelo trincado y libre) con los experimentales disponibles.	190
5.55	Definición geométrica del modelo <i>Snowdrift</i>	191
5.56	Imágenes de la evolución de la ola regular generada (a).	192
5.57	Imágenes de la evolución de la ola regular generada (b).	192
5.58	Definición <i>CAD</i> de un timón perteneciente a un velero de competición.	193
5.59	Malla utilizada en el análisis de un timón.	193
5.60	Contornos de velocidad (componente horizontal) sobre el timón, en las caras de presión (izquierda) y de succión (derecha).	194
5.61	Contornos de presión sobre la pala de un timón, correspondientes a la cara de presión (izquierda) y de succión (derecha).	195
5.62	Contornos de velocidad (componente vertical) sobre la pala de un timón. Adicionalmente se presentan los mismos contornos sobre un plano de corte oblicuo.	195
5.63	Definición geométrica del problema de análisis fluidodinámico del sistema compuesto por unas velas génova y mayor.	196
5.64	Detalle de la malla utilizada en el análisis de las velas génova y mayor.	197
5.65	Distribución de presión sobre las velas. Vista lateral.	197
5.66	Trazado de líneas de corriente en el análisis de las velas génova y mayor. Vista lateral.	198
5.67	Distribución de la velocidad (componente según Ox) sobre las velas. Vista frontal.	198
A.1	Esquema general de funcionamiento de un código de elementos de contorno con superficie libre.	212
A.2	Sistema de ejes locales en cada cuadrilátero.	214
B.1	Solución de la ecuación unidimensional de convección difusión mediante el método de Galerkin. En las gráficas a) y d) se ha representado φ_i en función del parámetro γ . En las gráficas b) y c) se presentan las zonas estables e inestables, respectivamente, de la solución.	220

B.2	Error cometido en la solución de la ecuación unidimensional de convección difusión mediante el método de Galerkin.	221
C.1	Gráfica de la variación de la función K con γ	225
D.1	Solución de la ecuación de convección difusión modificada con $\alpha = 1.01 - \frac{1}{\gamma}$. (gráficos a) y b)). En los gráficos c) y d) se representa el error cometido en la aproximación utilizando la solución analítica de la ecuación original.	230
D.2	Solución de la ecuación de convección difusión modificada con $\alpha = -1.01 - \frac{1}{\gamma}$ (gráficos a) y b)). En los gráficos c) y d) se representa el error cometido en la aproximación utilizando la solución analítica de la ecuación original.	231
D.3	Solución de la ecuación de convección difusión modificada con $\alpha = \coth(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$	231
D.4	Comparación de las curvas de α críticos y óptimo.	232
E.1	Gráfica de $\alpha = \coth(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$	236
F.1	Esquema de evaluación de la fórmula de <i>upwind</i> de Dawson con cuatro puntos.	241
H.1	Balance de flujos en un dominio triangular DEF	247
I.1	Balance de flujos en un dominio triangular DEF , contiguo a un contorno tipo Neumann.	250
J.1	Dominio rectangular donde se considera el balance de fuerzas.	255
J.2	Dominio de balance de cantidad de movimiento. En la derecha se representa el balance en la dirección vertical y a la izquierda el correspondiente a la dirección horizontal.	256
J.3	Dominio sobre el que se calcula el balance de masa.	258
K.1	Dominio de balance cerca de un contorno tipo Dirichlet.	262

Introducción

En este capítulo introductorio se definen las líneas básicas del trabajo que se presentará a lo largo del texto. Para ello, en primer lugar, se hará un recorrido sobre los métodos tradicionales para el diseño de buques. Se describirán sucintamente los procedimientos operativos de ensayo en un canal de experiencias y se discutirán sus problemáticas y limitaciones, así como las posibilidades de utilizar metodologías alternativas basadas en herramientas numéricas.

0.1 El Proyecto del Buque

Los detalles del proyecto de un buque o de su contrato de construcción difieren de un barco a otro aunque sean de una misma serie. Sin embargo, dicho contrato de construcción incluye habitualmente los requisitos de peso muerto y velocidad en unas ciertas condiciones de mar. En dichas condiciones, el buque, avanzando a velocidad uniforme, está sujeto a sollicitaciones de varios tipos. La resistencia al avance en la velocidad de servicio determina la potencia de la planta propulsora, y por lo tanto el consumo de combustible, uno de los factores de influencia determinante en la economía en servicio del buque. La minimización de la resistencia al avance y en consecuencia de la potencia propulsora, así como el asegurar que la planta propulsora sea capaz de entregar una potencia suficiente para cumplir los citados requisitos son, por lo tanto, una de las funciones más importantes de la oficina de proyectos y aspectos de importancia crucial en el diseño del buque.

La resistencia total viene determinada por la acción de las fuerzas hidrodinámicas que dependen de una serie de contribuciones individuales [Rav96] entre las que se pueden incluir las siguientes: la resistencia del casco desnudo, la resistencia de los apéndices, las pérdidas de la maquinaria y de los ejes, el rendimiento propulsivo, el ensuciamiento del casco y el entorno medioambiental. De las anteriores, la contribución más importante se debe a la resistencia del casco desnudo que depende principalmente de las formas del buque. La optimización de las formas del buque, en el sentido de minimización de la resistencia al avance, es un problema de gran complejidad, no sólo por las muchas limitaciones prácticas impuestas por las especificaciones del proyecto (dimensiones principales, peso muerto, capacidad de carga, costes de construcción,...) y otros requisitos como los criterios de estabilidad, comportamiento en la mar y maniobrabilidad, sino también por la dificultad de determinar un coste operacional mínimo,

dadas las diferentes condiciones de explotación que se pueden dar. En efecto, la optimización planteada es difícilmente aplicable en la práctica, debido a la dificultad para cuantificar el efecto de todos los parámetros involucrados, y cómo no, por la limitación del tiempo de diseño que impone la realidad. Por esta razón el problema se suele abordar de manera simplificada.

La simplificación más usual para abordar el objetivo propuesto es considerar por separado el comportamiento del buque en aguas tranquilas y su respuesta en olas.

La optimización hidrodinámica de las formas del casco para los buques mercantes típicos se dirige principalmente a la minimización de la potencia requerida en aguas tranquilas, que es en la práctica un límite inferior de la potencia propulsora. Es habitual suponer que el estado de la mar actúa incrementando la resistencia al avance. Este procedimiento lleva a un grado de acercamiento suficiente al diseño óptimo en condiciones de operación, y de paso asegura que se alcance la velocidad mínima contractual en aguas tranquilas.

0.2 La Resistencia al Avance del Buque

Como se ha señalado en el apartado anterior, la resistencia al avance del buque en aguas tranquilas es un aspecto de vital importancia práctica. Es habitual suponer que esta compuesta por una serie de contribuciones aditivas, entre las que se pueden nombrar:

- La resistencia viscosa, asociada con la generación de la capa límite y la estela [Alá72].
- La resistencia por formación de olas, debida a la generación de las ondas de gravedad en la superficie del mar [Rav96].
- La resistencia al avance debida a la fricción del aire con casco y superestructura.
- La resistencia por apéndices, debida, tanto a su propia resistencia, como a su influencia sobre la resistencia de la carena desnuda.
- Otros tipos de resistencia [LB97] que aparecen en casos especiales como la resistencia debida a la formación de *spray*, la resistencia por olas rompientes o la resistencia inducida debida a fenómenos de sustentación dinámica.

En la mayoría de los buques mercantes la componente de resistencia viscosa es la más importante. Su variación es aproximadamente cuadrática con la velocidad del buque, y es conocida su gran dependencia con el coeficiente de prismático¹ del buque. Sin embargo, fenómenos locales de separación de flujo, pueden causar incrementos drásticos en la resistencia viscosa.

¹Proporción entre el volumen del buque y el del prisma de sección igual a la maestra del buque en el cual se inscribe.

La componente de la resistencia debida a la formación de olas varía en los casos prácticos entre un 10% y un 70% de la resistencia total de un buque en aguas tranquilas[Rav96]. Mientras que para velocidades bajas esta resistencia es prácticamente nula, se eleva drásticamente al aumentar la velocidad. Además, igual que ocurre con la componente viscosa, depende de manera importante del coeficiente prismático. Pero, quizá el aspecto más significativo de esta componente, y el que le confiere mayor importancia es su capacidad de experimentar importantes variaciones ante relativamente pequeñas modificaciones de las formas del buque.

Es evidente que la capacidad de predecir la resistencia total del buque, discriminando la variación de la componente por formación de olas, ante variaciones de las formas, así como la localización de fenómenos de separación de flujo, es un aspecto de gran importancia, a la hora de posibilitar su reducción en la fase de diseño.

Tradicionalmente, el Ingeniero Naval ha mirado los ensayos hidrodinámicos con modelos como el mejor medio para conocer la resistencia al avance. El remolque del modelo a la velocidad a escala produce un mapa de olas que es geoméricamente similar al del buque real y permite que la componente de resistencia por formación de olas sea escalada directamente desde la medición en el ensayo de remolque[Pér89].

Respecto al resto de componentes de la resistencia al avance, y en particular la resistencia viscosa, la problemática es mayor pues no existen técnicas directas que permitan el escalado de los resultados experimentales.

Por otra parte, la modificación del diseño al objeto de reducir la resistencia al avance requiere de la intuición y experiencia del ingeniero naval, más que de la ciencia. Esta aproximación puede complementarse con el análisis estadístico de los datos experimentales y el apoyo de teorías muy simples. Los métodos semiempíricos así desarrollados son útiles en la predicción de las características de las formas, pero sólo tienen en cuenta una serie de parámetros básicos del buque, por lo que su utilidad en el diseño queda ciertamente restringida [GPVC98].

0.3 Sobre el Desarrollo de los Métodos CFD

Desde un punto de vista matemático, el movimiento de un fluido alrededor de un buque es conocido desde el siglo pasado, aunque las ecuaciones que gobiernan el fenómeno en aquellos casos que tienen un interés práctico no pueden ser abordados de una forma analítica. Sin embargo, ya a finales del siglo pasado aparecen las primeras referencias sobre el cálculo aproximado de la resistencia por formación de olas en buques [Mic98]. Pero, aún durante el presente siglo, este problema ha seguido desafiando a matemáticos e hidrodinámicos.

Tradicionalmente, la teoría de formación de olas se ha basado en dos enfoques: uno basado en la expansión sistemática, considerando pequeña la relación *amplitud / longitud de ola* [Sto47] y otro basado en la suposición de una relación *profundidad / longitud de ola* pequeña [Bou71] [Ray].

En el presente, gracias al desarrollo de los cálculos fluido dinámicos por ordenador

(computational fluid dynamics) en adelante *CFD*, las ecuaciones que gobiernan el problema pueden resolverse de forma aproximada por algoritmos numéricos proporcionando información sobre los movimientos y la resistencia al avance del buque en las etapas de diseño. Una revisión de los métodos numéricos en flujos con superficie libre puede encontrarse en [Weh73].

Actualmente, los métodos de elementos de contorno o de singularidades son la base de la mayoría de los algoritmos numéricos para la predicción del mapa de olas ideal de buques avanzando con velocidad uniforme. Estos esquemas numéricos pueden clasificarse en dos categorías, dependiendo de la elección de la singularidad utilizada en la superficie libre, base del método. La primera clase de esquemas usa manantiales de Kelvin como singularidad elemental. La ventaja de estos métodos es que el campo de velocidades generado satisface la condición de superficie libre de Kelvin, eliminando así la integración sobre ella (y su discretización) y que la condición de radiación se satisface de manera natural. Estos esquemas tienen en contra la imposibilidad de incluir efectos no lineales en la formación de las olas.

La segunda clase de esquemas usa fuentes de Rankine, distribuidas sobre la superficie libre, como singularidad elemental. El más conocido de estos esquemas fue presentado originalmente por Dawson [Daw77] y está basado en el método de Hess y Smith [HS64b] [HS64a] para la resolución del flujo alrededor de un cuerpo sumergido, usando una distribución de fuentes sobre los paneles que discretizan el casco. Este método ha sido y es ampliamente aplicado para la predicción de la resistencia por formación de olas. Códigos comerciales tan conocidos como DAWSON, RAPID [Rav92] [Rav96], SPLASH [Ros95] [TS92] [TSL93a] o SHIPFLOW [LRB⁺98] pertenecen a este tipo. Frente a su sencillez y robustez, estos métodos tienen el gran inconveniente de la importante dependencia de la solución de parámetros como el tamaño del dominio y de la discretización. Por otra parte, sus principios básicos se encuentran en la denominada teoría de buques lentos, que restringe su utilización a un rango de números de Froude (F_n). Una pequeña introducción a la teoría que sustenta estos métodos puede encontrarse en el apéndice A. Por otra parte, una revisión de este tipo de métodos puede encontrarse en [Rav96] y se incluirá una pequeña muestra en el capítulo 2 del presente trabajo.

En los últimos años, el gran crecimiento de la capacidad de cálculo junto con el desarrollo de los modelos numéricos para la solución de las ecuaciones de Euler ($R_n \rightarrow \infty$) y Navier-Stokes ha permitido pensar en un enfoque más realista del problema de predicción de la resistencia al avance de buques. Sin embargo, pese a los esfuerzos por desarrollar metodologías en este sentido, la falta de cualidades como la fiabilidad y robustez, junto con las limitaciones prácticas que presenta la complejidad de las metodologías, no han permitido la aparición de ningún código comercial capaz de resolver el problema así planteado.

Por otra parte, la aparición relativamente reciente de herramientas de diseño basadas en estos métodos, se enfrentan a un importante desafío. La información a disposición de los proyectistas gracias a estas técnicas es diferente a la obtenida en la práctica tradicional del proyecto de un buque. Esta información requiere una nueva *filosofía de*

*proyecto*², al considerar, por ejemplo, la optimización de las formas de un buque (ver por ejemplo [GPVC98] [PSS96] [LRB⁺98] [JL96]).

0.4 Los Códigos CFD en el Proyecto del Buque

La incertidumbre asociada con la determinación de las componentes de la resistencia al avance del buque requiere que su cálculo se realice con sumo cuidado a fin de obtener una especificación final de la planta propulsora acorde a las exigencias del buque, en otras palabras, su optimización para la especificada velocidad de servicio. Este cálculo debe asegurar al astillero constructor con un cierto grado de seguridad que cumplirá los requisitos del armador a la vez que se ha minimizado el tamaño de la planta propulsora y su coste.

Como ya se ha mencionado, los ensayos hidrodinámicos con modelos son actualmente la herramienta básica de la que dispone el arquitecto naval para conocer las características hidrodinámicas del buque. Sin embargo, existen en la práctica dos limitaciones al uso generalizado de ensayos con modelos como ayuda al diseño. Por una parte, el relativamente elevado coste de estos, que provoca sea inviable su utilización en muchos casos prácticos de presupuesto modesto. Y por otra, la gran dificultad de definir un proceso sistemático de optimización del diseño a partir de los datos suministrados por los canales de experiencias.

Por estas razones se han desarrollado diversas técnicas que permiten reducir al mínimo la realización de ensayos experimentales, bien utilizando bases de datos de ensayos con modelos para extrapolar los resultados a un caso concreto, bien utilizando los resultados experimentales de un casco base e inferir la influencia de las posibles variaciones.

Junto con estas técnicas, las herramientas *CFD* permiten al proyectista investigar una gran serie de opciones de diseño en los primeras fases del proyecto antes de que se inicie la fase de construcción, ayudando principalmente a definir ese ciclo de optimización del diseño de formas, del que, lamentablemente carecen la mayoría de los diseños en ingeniería naval.

Resumiendo, es normal en muchos proyectos, que los ensayos experimentales se realicen en la etapa final del desarrollo del proyecto para confirmar las estimaciones realizadas a lo largo del mismo. Este proceso de confirmación del proyecto final mediante ensayos hidrodinámicos seguirá existiendo durante los próximos tiempos. Sin embargo, los códigos *CFD* comienzan a cobrar gran importancia en algunas oficinas técnicas y en general en proyectos que, por su pequeña envergadura, no pueden apoyarse en la experimentación tradicional, recurriendo a los beneficios de la más económica *experimentación numérica*.

Por otra parte, los ensayos en canal de experiencias son una base vital para el desarrollo de herramientas *CFD*, permitiendo comprobar su validez [PSS97] [LRB⁺98] y siendo base para la aparición de nuevas teorías para describir diferentes fenomenologías.

² Asociada a la definición de un ciclo de optimización del diseño basado en herramientas *CFD*.

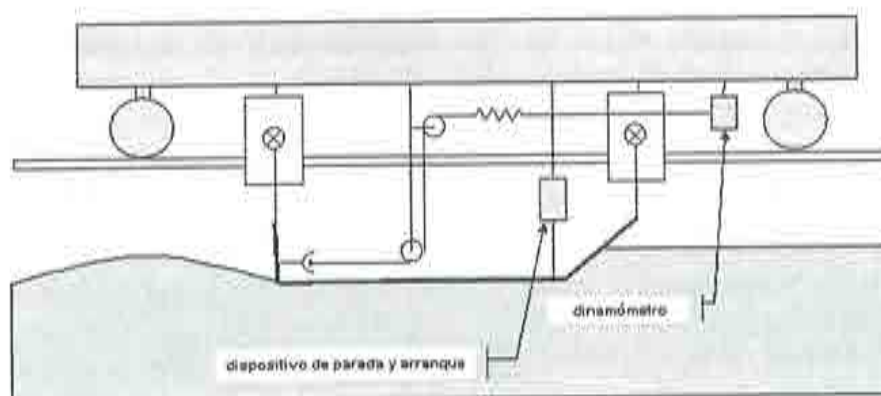


Figura 1: Esquema de un sistema de medición de la resistencia al avance en el ensayo de remolque en aguas tranquilas.

0.4.1 Los Ensayos en Canal de Experiencias

Por todas las razones expuestas en la discusión anterior, se considera de interés para la presente exposición, introducir brevemente los diferentes tipos de ensayos experimentales con modelos, teniendo como objetivo, tanto presentar sus capacidades y limitaciones para el diseño de buques, en comparación con la metodología basada en procedimientos numéricos, como tener en consideración las posibilidades de estos ensayos en la validación de herramientas *CFD*.

El Ensayo de Remolque

Como ya se ha mencionado, un aspecto primordial del proyecto del buque es el dimensionamiento de la planta propulsora, predecir su potencia para desarrollar una determinada velocidad o ejercer un determinado tiro en el caso de los buques pesqueros o remolcadores. Tradicionalmente, los ensayos en canal han constituido la única vía disponible para permitir al proyectista determinar los anteriores parámetros.

Realmente, la idea de realizar ensayos con modelos de buques no es nueva. Así, Leonardo da Vinci llevó a cabo una serie de ensayos con tres modelos de diferentes, para valorar el efecto de diferentes distribuciones de desplazamiento en proa y popa.

Durante muchos años, diversos investigadores como Samuel Fortrey o Benjamin Franklin hicieron ensayos con modelos utilizando el arrastre por gravedad. Pero no fue hasta 1871, cuando William Froude utilizó el que puede considerarse el primer canal de ensayos, precursor de los tanques de remolque existentes hoy en día[PA92].

La principal misión de los ensayos de remolque en aguas tranquilas es la determinación de la resistencia de la carena al avance. En la figura 1 puede verse un esquema típico de un sistema actual de medición de la resistencia al avance en el ensayo de remolque en aguas tranquilas.

Lamentablemente la imposibilidad práctica de llevar a cabo ensayos experimentales

a escala, perfectamente semejantes a los del buque real³, obliga a cometer un importante error en la reproducción de los efectos que dependen del número de Reynolds R_n . Como es bien sabido existen diversos procedimientos, basados en la experiencia acumulada, y con un cierto origen teórico que permiten obtener la resistencia al avance del buque en función de los valores obtenidos en la escala del modelo.

Para ello, se ha de suponer que las diversas componentes de la resistencia al avance, dependientes de diferentes parámetros adimensionales, son aditivas [LB97] [Rav96] [Pér89]. El primer paso necesario, es separar la componente de la resistencia dependiente de R_n del resto, para ello son necesarios diversos artificios, ampliamente conocidos, cuya discusión puede encontrarse en [Pér89].

La base teórica del proceso está en asimilar la resistencia, denominada de fricción⁴ del barco, a la de una placa plana de superficie igual que la mojada del buque. Dado que, para la placa plana sumergida existe una fórmula empírica, que permite obtener el coeficiente adimensional de resistencia en función⁵ de R_n , la extrapolación de su valor en el barco a partir de los datos del modelo, se puede reducir a una simple corrección de esa fórmula. Esta corrección se basa en parámetro que se suele denominar *factor de forma*.

Se hace evidente, que el proceso mencionado basa todo su valor en la experiencia acumulada de años, más que en las evidencias teóricas que plantea. De ahí la importancia que, en los canales de experiencias, tiene la manera de proceder específica para la determinación de la resistencia total⁶.

Por otra parte, del ensayo de remolque en aguas tranquilas puede obtenerse otro tipo de información de interés para el arquitecto naval. La medición de los perfiles de olas, complementa los valores del factor de forma obtenidos por las técnicas de extrapolación clásicas ya mencionadas, ya que a partir de ellos existen diversas técnicas muy fiables que permiten determinar este parámetro de forma exacta. Además, el análisis del mapa de olas permite inferir datos generales sobre las características de las formas en relación con la resistencia por formación de olas [LRB⁺98] [LB97]. En la figura 2 se presenta un esquema típico de una instalación de medición óptica de perfiles de olas en un canal de ensayos.

Además, la medición del campo de estelas del modelo, puede dar una idea clara de la bondad de las formas, en lo referente a la resistencia viscosa, y puede ser de gran interés para determinar la calidad de las formas en lo que a la conformación de la popa

³Lo cual obligaría a que fueran iguales tanto el número de R_n como el número de Froude F_n , en el modelo a escala y en el buque real.

⁴Que es la componente de la resistencia total que depende de R_n .

⁵Según las recomendaciones de la ITTC (ver kimmgw2.kimm.re.kr/ITTC/), el coeficiente de resistencia de fricción en la placa plana sumergida, está dado por,

$$C_f = \frac{0.075}{(\log_{10} R_n - 2)^2}$$

⁶Aunque el esquema general es común a todos los canales de experiencias, cada uno debe corregir ciertos errores sistemáticos en sus procedimientos.

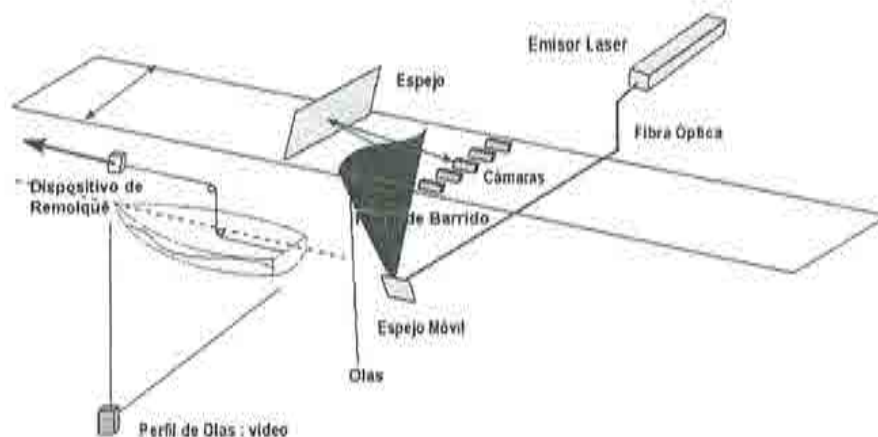


Figura 2: Esquema de un sistema óptico de medición de perfiles de olas en un canal de ensayos.

y a su interacción con el propulsor se refiere. En la figura 3 se presenta un esquema típico de una instalación de medición de campos de velocidades de estelas en un canal de experiencias hidrodinámicas.

Hay que añadir que los ensayos en canal de remolque, pueden completarse con análisis del propulsor aislado y del modelo en autopropulsión. Evidentemente, al igual que en el caso anterior, la imposibilidad de realizar un ensayo semejante al de escala real, junto con la gran dificultad de extrapolación de los resultados al buque⁷, provocan que su interés práctico sea muy limitado.

Además, existen canales de remolque que incluyen generadores de olas, lo que permite determinar las características anteriormente reseñadas ante la acción de las olas, así como realizar ensayos para evaluar el comportamiento en la mar del buque. En muchos casos estos canales de remolque multipropósito han desaparecido con la llegada de tanques especializados en el ensayo en olas.

El Ensayo en Canal de Olas

Como ya se ha mencionado, la aparición de tanques para el ensayo de modelos a escala en olas (ver figura 4), permiten el estudio del comportamiento del buque en situaciones de mar concretas. Estas situaciones pueden ser definidas por los requisitos de operatividad del buque, o incluso por situaciones críticas de avería.

Lamentablemente, la complejidad de los fenómenos que se desarrollan en estas simulaciones complica de manera importante la extrapolación de estos resultados a la

⁷ Aún mayor que en el caso anterior, pues en el ensayo del propulsor, aparecen fenómenos como la cavitación que no está gobernada por los ya mencionados R_n y F_n . Además, la interacción entre los diferentes fenómenos puede tomar gran importancia, no siendo justificable la suposición de adición de las componentes de la resistencia total.

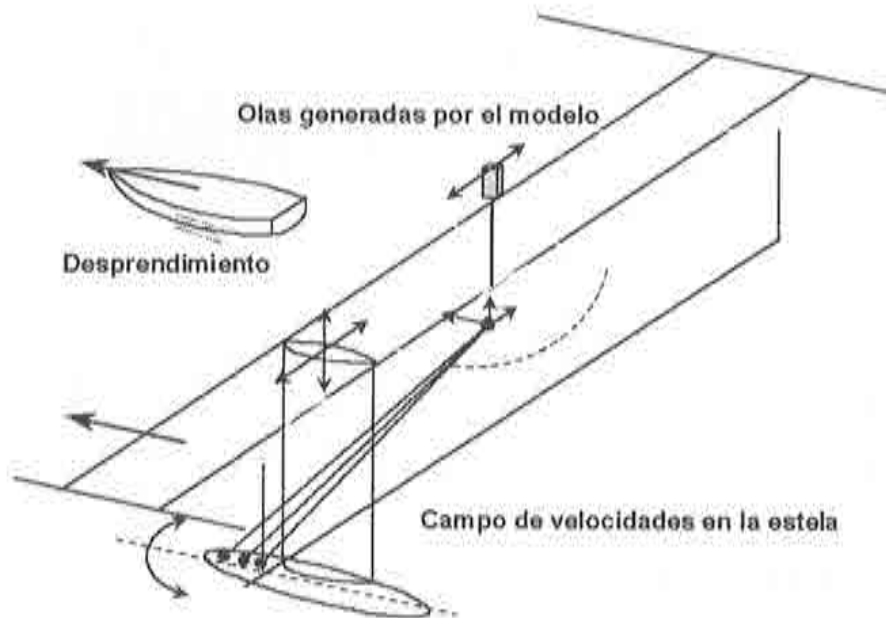


Figura 3: Esquema de un sistema óptico de medición de estelas en un canal de ensayos



Figura 4: Ensayo de un modelo en tanque de olas.



Figura 5: Ensayo de maniobrabilidad con modelo en un lago.

realidad. Sin embargo, en muchos casos prácticos, puede suponerse despreciable el efecto que los fenómenos viscosos introducen en el problema, permitiendo, bajo este supuesto, la extrapolación directa de los resultados. En otros casos, el análisis de los resultados sólo puede hacerse desde un punto de vista cualitativo.

El Ensayo de Maniobrabilidad

Los ensayos de maniobrabilidad, son una posibilidad aparecida más recientemente en el mundo experimental. La disponibilidad de sistemas electrónicos ligeros de posicionamiento y gobierno a distancia, han posibilitado el desarrollo⁸ de este tipo de ensayos, que pueden realizarse en lagos naturales (ver figura 5).

El principal objetivo de este ensayo es, obviamente, valorar las capacidades de maniobra del buque. Lamentablemente, difícilmente pueden extrapolarse los resultados de este tipo de ensayos al buque real, por lo que su valoración ha de ser cualitativa.

El Ensayo en Tunel de Cavitación

Por último se ha de hacer mención a otro tipo de ensayo clásico. El denominado ensayo en túnel de cavitación (ver figura 6). Este ensayo tiene por objetivo valorar el comportamiento de las hélices. Lamentablemente, como hemos comentado con anterioridad, difícilmente puede extraerse información cuantitativa, en la escala del buque, de este tipo de ensayos, más aún cuando gran parte de la fenomenología del proceso se debe a la interacción con el casco y timón, resuelta sólo parcialmente en este tipo de ensayos [Pér89].

Aunque, se ha de tener en cuenta que la información suministrada por este tipo de ensayos es vital para entender los distintos fenómenos que se desarrollan ante el propulsor.

⁸ Es evidente la limitación física, para este tipo de ensayos, de un canal convencional, dado que las maniobras requerían de un tanque de grandes dimensiones.

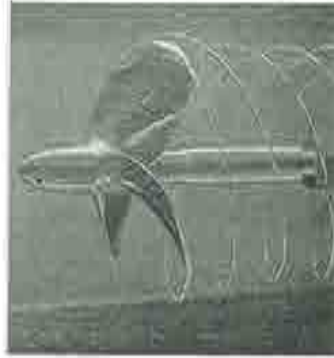


Figura 6: Ensayo de una hélice en tanque de cavitación.

0.4.2 Los CFD como Herramienta de Diseño

En la práctica, la utilización de herramientas como los CFD se convierte hoy en día en una necesidad para aquellos proyectos en donde las exigencias tecnológicas adquieren una significativa importancia[LRB⁺98]. En [GPVC98] se pone de manifiesto la necesidad de esta contribución en el diseño de buques de crucero y pasaje, donde la velocidad y la confortabilidad exigen una cuidada elección de formas.

Las herramientas CFD pueden proporcionar significativas contribuciones en el conjunto del proceso de proyecto desde los estudios iniciales conceptuales hasta el proyecto detallado como queda reflejado en la figura 7.

Armado con esta información, el proyectista puede utilizar los CFD para realizar estudios de optimización y afinar el proyecto para una serie de características del comportamiento del buque y atributos del casco. En la tradicional espiral del proyecto que se presenta en la figura 7, se indican aquellas actuaciones en donde se considera que los cálculos con *CFD* están en disposición de ayudar a los métodos normalmente establecidos y aceptados.

Desafortunadamente, para la mayoría de los ingenieros navales estas herramientas se presentan aún lejanas desde el punto de vista práctico, en parte por su complejidad de manejo, que requiere en ocasiones verdaderos especialistas en el tema y en parte por el desconocimiento que se tiene de los fenómenos que se están simulando⁹.

Como ya se ha mencionado con anterioridad, el uso de los *CFD* en el proyecto de un buque requiere del proyectista una nueva *filosofía de proyecto* cuando se está considerando la optimización de sus formas. Los proyectistas experimentados son capaces de intuir la influencia de ciertas modificaciones locales del casco en la resistencia del buque pero, no se dispone de medios para juzgar los efectos de innovaciones en las formas.

Las herramientas *CFD* permiten evaluar estas modificaciones a partir de los resultados de los cálculos realizados; las variables calculadas son diferentes de las obtenidas

⁹Y de la manera en que se realiza esa simulación.

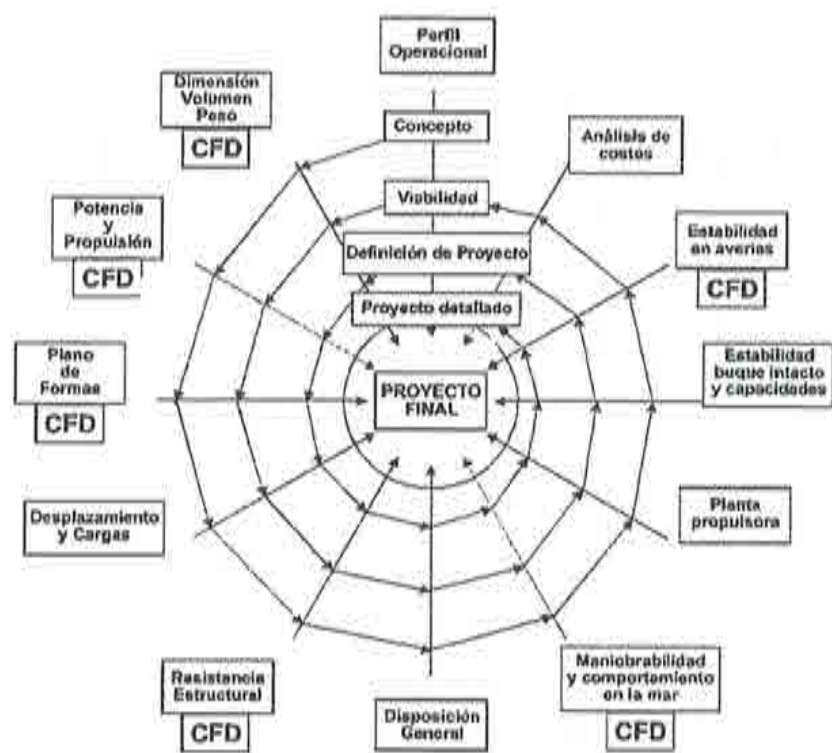


Figura 7: Ciclo de diseño de un buque asistido por herramientas *CFD*.

en los ensayos experimentales y su significado físico debe considerarse con cuidado y, en muchos casos¹⁰, no en términos absolutos. La mayor mejora que los *CFD* pueden introducir en el proceso del proyecto de un buque es la de permitir la evaluación y comparación de diferentes formas de la carena sin necesidad de ensayarlas. Aunque para la evaluación final del comportamiento del casco continúa siendo útil recurrir al uso del tradicional canal de ensayos, la mayor parte de los refinamientos del casco se pueden realizar merced a estas herramientas numéricas.

Los análisis *CFD* permiten determinar la distribución de los campos de velocidades y presión en todo el dominio de análisis. Campos tan costosos de precisar experimentalmente como la distribución de estelas, las líneas de corriente sobre el casco o los perfiles de olas, son resultados inmediatos de un análisis *CFD*. Se hace evidente que esta información difiere sensiblemente de las magnitudes que se obtienen en la práctica tradicional de los canales de ensayo.

Debido a la gran cantidad de resultados que se pueden obtener de un análisis *CFD*, se debe hacer un gran esfuerzo para conseguir una exposición inteligible de las cantidades calculadas y en este campo la representación gráfica de datos es una ayuda fundamental para un mejor uso de las herramientas *CFD*. El mapa de la distribución del coeficiente de presión C_p , del vector velocidad, la representación en tres dimensiones del tren de olas calculado y los perfiles de ola en el casco son los parámetros locales que se pueden utilizar para la evaluación de un casco *ensayado numéricamente*. Junto con estas cantidades locales, es posible conocer los valores integrales de la resistencia por formación de olas, la resistencia viscosa, la fuerza de arfada y el momento de trimado en función de la velocidad.

Una vez que se visualizan los resultados, el proyectista necesita conocer cómo usarlos. El criterio que se aplica para los diagramas del coeficiente de resistencia es bastante obvio; la mejor carena es aquella que presenta el menor coeficiente. Pero este criterio basado en la experiencia tradicional es muy restrictivo. Efectivamente, dado que tras el análisis *CFD* disponemos de una gran cantidad de información, no disponible en la práctica habitual, puede ser de interés considerar otros valores calculados para evaluar comparativamente la calidad de las formas de los buques, y no comprometerse exclusivamente en la fiabilidad de un único parámetro global. Las curvas de isonivel del coeficiente C_p , el mapa de estelas, la distribución de las líneas de corriente cerca del casco y la predicción del perfil de las olas constituyen los principales parámetros locales cuyo examen puede dar elementos razonables para juzgar la bondad de las formas y guiar el proceso de optimización.

Realmente, la presencia de un marcado gradiente positivo a lo largo de las líneas de corriente calculadas implica, cuando coincide con valores positivos de C_p , que la capa límite del fluido viscoso aumenta rápidamente en correspondencia a este gradiente positivo local. Un alto gradiente positivo a popa del buque puede indicar un peligro de separación y en cualquier caso, señal que el casco utiliza una gran cantidad de energía en acelerar la capa límite. Un análisis de las líneas de corriente sobre el casco puede

¹⁰A semejanza de lo que ocurre en muchos tipos de ensayos experimentales de los referidos anteriormente.

apoyar tales suposiciones.

No se pretende presentar aquí un curso de optimización de formas mediante cálculos de *CFD* sino simplemente dar ideas generales sobre los nuevos criterios que el proyectista debe interpretar para la mejora hidrodinámica de las formas.

Por último, al objeto de plantear esta nueva filosofía de diseño de buques, imaginemos las etapas ideales de un ciclo de optimización de formas basado en los métodos actuales para diseño de cascos y apéndices, que se concretaría en las siguientes etapas:

1. Definición del rango de velocidades y condiciones de operación.
2. Definición de la forma del casco y apéndices preliminar utilizando métodos empíricos o simples modelos hidrodinámicos basados en la teoría de potencial.
3. Construcción de un prototipo a escala.
4. Análisis experimental del comportamiento hidrodinámico del prototipo en canales de ensayo.
5. Escalado de los resultados del modelo a la geometría real del barco.
6. Análisis de los resultados, redefinición de las formas del casco y apéndices y repetición de las etapas 3 a 6 hasta que se alcanzan las especificaciones deseadas del comportamiento del barco.

Es evidente que este es un proceso difícil y caro¹¹, que generalmente no es suficiente para alcanzar un comportamiento óptimo en crucero¹² definido por el máximo nivel de eficiencia hidrodinámica, caracterizada principalmente por una velocidad determinada y por unos requisitos de estabilidad.

Sin embargo este ciclo es posible en la práctica si sustituimos la evaluación experimental por el uso de herramientas *CFD*. Evidentemente esta sustitución requiere de la definición de unos ciertos criterios de optimización [PSS96] y el desarrollo de una metodología auxiliar que permita definir ese análisis de resultados y la posterior redefinición de las formas.

0.5 Objetivos del Presente Trabajo

La meta general que se pretende en el presente trabajo es el desarrollo de una metodología numérica para ayuda al diseño hidrodinámico de barcos. Esta metodología permitirá predecir la distribución (espacial y temporal) de velocidades y presiones, y por consiguiente las fuerzas ejercidas por el agua sobre el casco de un barco en diferentes configuraciones de navegación. De esta manera se podrá simular el proceso dinámico de interacción buque/agua o bien predecir la posición de equilibrio dinámico del buque en

¹¹Inviabile en la práctica.

¹²Debido principalmente a las dificultades en el proceso de escalado.

la situación definida. La metodología resultante, será especialmente adecuada para el diseño óptimo de carenas de buques, configurando una suerte de *canal de experiencias virtual* que podrá ser aplicado al análisis de una gran variedad de problemas dentro y fuera del ámbito naval.

Como ya se ha comentado el presente proyecto surgió con la vocación de ser una herramienta útil para profesionales del diseño en ingeniería naval. Por esta razón sus objetivos están ligados a las necesidades de un posible usuario final con un perfil de arquitecto naval.

0.5.1 Organización del Presente Trabajo

La organización del presente trabajo será como sigue. En el siguiente capítulo se presentarán las ecuaciones que gobiernan el problema de mecánica de fluidos (ecuaciones de Navier Stokes) y se hará un breve análisis de las diferentes problemáticas que aparecen en su resolución. En el capítulo 2 se estudia la ecuación de superficie libre. Este estudio nos llevará a un análisis profundo de la ecuación de convección difusión y su problemática de estabilidad. En el capítulo 3 se aborda el esquema elegido para la resolución de las ecuaciones de Navier Stokes y su formulación utilizando el método de los elementos finitos. Se hará también una importante discusión sobre las diversas condiciones de contorno aplicables. El capítulo 4 se dedicará a la descripción del algoritmo utilizado para el movimiento de la malla de elementos finitos, necesario para tener en cuenta la deformación del volumen de control durante el proceso de resolución del problema. En el capítulo 5 se presentará el algoritmo completo de resolución del problema y se comentarán diversos aspectos y problemáticas particulares.

A lo largo de cada capítulo se presentarán y discutirán diversos ejemplos académicos, mientras que en el último capítulo se incluirán una serie de aplicaciones prácticas, incluyendo diversas geometrías de buques reales. También se discutirán los resultados obtenidos, comparándolos con los experimentales disponibles en cada caso.

Por último, se presentarán las conclusiones del trabajo y discutirá el porcentaje de cumplimiento de los objetivos planteados inicialmente.

Capítulo 1

Las Ecuaciones de Navier Stokes

En este capítulo se presentan las ecuaciones que describen el comportamiento de un fluido incompresible en régimen laminar (ecuaciones de Navier-Stokes) para posteriormente plantear su resolución mediante el método de los elementos finitos utilizando el procedimiento clásico de Galerkin. Esto nos permitirá hacer una breve discusión de las inestabilidades que aparecen al realizar dicho procedimiento. Del mismo modo, se introducirán sucintamente los procedimientos básicos de estabilización de las ecuaciones.

1.1 Introducción

La resolución mediante el método de los elementos finitos, utilizando el procedimiento clásico de Galerkin, de las ecuaciones de Navier-Stokes presenta ciertos problemas numéricos, cuyo análisis y discusión será el principal objetivo de este capítulo. Las dificultades numéricas mencionadas se producen principalmente por dos factores: la restricción de incompresibilidad que obliga a que los espacios de elementos finitos sean compatibles, es decir que cumplan con la condición de Babuška-Brezzi (*BB* en lo siguiente) [BD88] [Bab71] [Cod92] y el predominio de las fuerzas inerciales (convección) sobre las asociadas a la viscosidad (difusión) [Cod93a] [HB79].

1.2 Las Ecuaciones de Navier Stokes para Flujo Incompresible

Trataremos de representar el comportamiento de un fluido en un volumen de control Ω . Su velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ puede ser descrita por medio de una función vectorial de la posición \mathbf{x} , dentro del volumen Ω y en el instante t entre $[0, \infty)$. La descripción dinámica del problema incompresible (densidad ρ constante) se completa con el campo de presiones $p = p(\mathbf{x}, t)$. De esta manera las ecuaciones de Navier Stokes, que rigen el flujo de un fluido *newtoniano* incompresible, se escriben como,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}' + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega \times (0, t) \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, t) \quad (1.2)$$

Donde $\underline{\underline{\tau}}' = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{v})$ es la parte desviadora (excluyendo el término isotrópico de presión) del tensor de tensiones para fluidos newtonianos incompresibles y $\underline{\underline{\varepsilon}}(\cdot)$ el operador gradiente simétrico definido por $\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{a}) + (\nabla \mathbf{a})^t]$. En la ecuación (1.1) anterior se ha denominado $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ al campo de fuerzas volumétricas¹.

Las anteriores ecuaciones deben completarse con el siguiente conjunto de condiciones de contorno e iniciales compatibles,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_c(\mathbf{x}, t) \quad \text{en } \Gamma_D \times (0, t) \\ \mathbf{n} \underline{\underline{\tau}} &= \mathbf{t}_c \quad \text{en } \Gamma_N \times (0, t) \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= v_n(\mathbf{x}, t), \mathbf{n} \underline{\underline{\tau}} \mathbf{s} = \sigma(\mathbf{x}, t) \quad \text{en } \Gamma_M \times (0, t) \\ p &= p_c(\mathbf{x}, t) \quad \text{en } \Gamma_P \times (0, t) \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \times \{0\} \\ p(\mathbf{x}, 0) &= p_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \times \{0\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Donde $\Gamma := \partial\Omega$ es el contorno del dominio de análisis, que ha sido dividido en las siguientes partes, según el tipo de condición de contorno que sobre él se impongan, en:

Γ_D : parte de Γ donde se prescribe el campo de velocidades a \mathbf{v}_c (contorno tipo Dirichlet).

Γ_N : parte de Γ donde se prescriben las tracciones a \mathbf{t}_c (contorno tipo Neumann).

Γ_M : parte de Γ donde se prescribe la velocidad normal a v_n y la componente tangencial de la fuerza σ (contorno tipo Neumann).

Γ_P : parte de Γ donde se prescribe el campo de presiones a p_c (contorno tipo Dirichlet)

Se cumple que $\Gamma = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_M \cup \Gamma_P}$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\Gamma_D \cap \Gamma_M = \emptyset$, $\Gamma_D \cap \Gamma_P = \emptyset$, $\Gamma_M \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\Gamma_N \cap \Gamma_P = \emptyset$ y $\Gamma_M \cap \Gamma_P = \emptyset$. Se ha denominado \mathbf{n} al vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$, mientras que \mathbf{s} es un vector unitario genérico tangente a Γ_M y $\underline{\underline{\tau}}$

¹En muchas ocasiones, cuando el campo de fuerzas volumétricas se debe a la acción de la gravedad, es habitual agrupar este término con el de la presión. A la variable resultante se la denomina presión dinámica p , que se define por [LYO98],

$$p = p + g(z - z_0)$$

Donde g es la constante de aceleración de la gravedad, supuesta en la dirección Oz negativa, y $(z - z_0)$ es la distancia vertical a una referencia genérica z_0 .

es el campo de tensiones típico para fluidos newtonianos incompresibles² definido por la siguiente ecuación constitutiva:

$$\underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}' = -p\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{v}) \quad (1.4)$$

Donde $\underline{\underline{I}}$ es el tensor identidad.

1.2.1 Las Ecuaciones de Euler

Los problemas con viscosidad nula ($R_n \rightarrow \infty$) presentan soluciones con aplicación en muchos casos prácticos. En concreto en el campo de la hidrodinámica naval, la solución no viscosa da como resultado un mapa de olas muy parecido al real, apoyando la teoría clásica que suponía la independencia de los fenómenos de formación de olas de la viscosidad. Además esta solución es la única vía directa que permite calcular la resistencia por formación de olas, medida fundamental para el diseño en hidrodinámica naval. Por otra parte, numerosos investigadores han observado que la solución numérica del mapa de olas obtenido con viscosidad aparece con un exceso de difusión, a diferencia de las buenas correlaciones experimentos-resultados numéricos obtenidos con códigos no viscosos³ [VCZ99] [LYOI96] [LRB⁺98].

Se suelen denominar ecuaciones de Euler a las ecuaciones de Navier Stokes sobre las que se han anulado los términos viscosos. Siguiendo la notación del apartado anterior, el planteamiento de este problema sería como sigue:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{b} \quad \text{en } \Omega \times (0, t) \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, t) \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_c(\mathbf{x}, t) \quad \text{en } \Gamma_D \times (0, t) \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{v}_n(\mathbf{x}, t) \quad \text{en } \Gamma_N \times (0, t) \\ p &= p_c(\mathbf{x}, t) \quad \text{en } \Gamma_P \times (0, t) \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \times \{0\} \\ p(\mathbf{x}, 0) &= p_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \times \{0\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

²Su forma general es, en notación de índices,

$$\tau_{ij}' = 2\mu \left(\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) - \frac{1}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \zeta \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

donde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ y ζ es un parámetro conocido como segunda viscosidad.

³Además hay que tener en cuenta que muchos problemas en hidrodinámica naval tienen valores característicos de $R_n \sim 10^9$, con lo cual, la suposición $R_n \rightarrow \infty$ no parece tan descabellada.

Como se ha comentado con anterioridad, la solución no viscosa de problemas donde los términos viscosos son relativamente pequeños (como ocurre en la mayoría de los casos prácticos en hidrodinámica naval) guarda mucha similitud con la realidad. Pero el efecto de la viscosidad, incluso para muy altos números de Reynolds (definido como $R_n := \frac{vL\rho}{\mu}$, donde v , L son la velocidad y una longitud característica del problema, respectivamente) introduce cambios muy importantes en las ecuaciones, y en la realidad puede dar lugar a flujos que nada tienen que ver con los que se encuentran en el límite $R_n \rightarrow \infty$. La condición de contorno de no deslizamiento es en este caso física y puede ser impuesta sobre las paredes, dado que las derivadas de segundo orden, presentes ahora en las ecuaciones permiten la existencia de una capa límite. Este efecto es de una importancia capital, siendo el germen del fenómeno de la turbulencia.

1.2.2 Aproximación por el método de Galerkin

La forma débil o variacional del sistema de ecuaciones (1.1)-(1.2) aplicando el método de Galerkin (ver [Cod92], [Sot97]) se puede escribir como sigue:

Encontrar $\mathbf{v} \in \Psi_s$ y $p \in \Phi_s$ tal que,

$$\begin{aligned} \rho \int_{\Omega} \psi \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\Omega + \rho \int_{\Omega} [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] \cdot \psi d\Omega + \int_{\Omega} 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}(\mathbf{v}) : \underline{\underline{\epsilon}}(\psi) d\Omega - \\ - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \psi) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \psi d\Omega + \\ \int_{\Gamma_N} \mathbf{t}_e \cdot \psi d\Omega + \int_{\Gamma_M} (\sigma \cdot \mathbf{s}) \cdot \psi d\Omega \quad \forall \psi \in \Psi_t \\ \int_{\Omega} \phi (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\Omega = 0 \quad \forall \phi \in \Phi_t \\ (\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0), \psi) = (\mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \psi) \quad \forall \psi \in \Psi_t \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde los espacios funcionales [Cod92], de acuerdo con las condiciones de contorno (1.3) son:

$$\begin{aligned} \Psi_t &: = \left\{ \chi \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)^N] \mid \right. \\ &\quad \left. \chi|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}, \chi|_{\Gamma_M} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, t \in (0, T) \right\} \\ \Psi_s &: = \left\{ \chi \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)^N] \mid \right. \\ &\quad \left. \chi|_{\Gamma_D} = \mathbf{v}_e, \chi|_{\Gamma_M} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{n}, t \in (0, T) \right\} \\ \Phi_t &: = \{ \chi \in [L^2(0, T), L^2(\Omega)] \mid \chi|_{\Gamma_P} = 0 \} \\ \Phi_s &: = \{ \chi \in [L^2(0, T), L^2(\Omega)] \mid \chi|_{\Gamma_P} = p_e \} \end{aligned}$$

Donde N es la dimensión espacial del problema. Por otra parte, es evidente que, para la determinación de la presión, se debe cumplir que $\Gamma_P \cup \Gamma_N \neq \emptyset$.

Para la discretización en el espacio las ecuaciones (1.8) anteriores, se han de definir los subespacios funcionales $\Psi_{h_t} \subset \Psi_t$, $\Psi_{h_s} \subset \Psi_s$, $\Phi_{h_t} \subset \Phi_t$ y $\Phi_{h_s} \subset \Phi_s$, asociados a una partición⁴ de elementos finitos $\{\Omega^e\}$ del dominio espacial Ω . En este caso el problema discreto se plantea como sigue:

Encontrar $\mathbf{v}_h \in \Psi_{h_s}$ y $p_h \in \Phi_{h_s}$ tal que,

$$\begin{aligned} \rho_h \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial t} d\Omega + \rho \int_{\Omega} [(\mathbf{v}_h \cdot \nabla) \mathbf{v}_h] \cdot \psi_h d\Omega + \int_{\Omega} 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}(\mathbf{v}_h) : \underline{\underline{\epsilon}}(\psi_h) d\Omega - \\ - \int_{\Omega} p_h (\nabla \cdot \psi_h) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \psi_h d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t}_c \cdot \psi_h d\Omega + \int_{\Gamma_M} (\sigma \cdot \mathbf{s}) \cdot \psi_h d\Omega \quad \forall \psi_h \in \Psi_{h_t} \\ \int_{\Omega} \phi_h (\nabla \cdot \mathbf{v}_h) d\Omega = 0 \quad \forall \phi_h \in \Phi_{h_t} \\ (\mathbf{v}_h(\mathbf{x}, 0), \psi_h) = (\mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \psi_h) \quad \forall \psi_h \in \Psi_{h_t} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Como ya se ha comentado anteriormente, existen principalmente dos dificultades numéricas para la resolución del sistema (1.9). La primera de ellas se refiere a la introducción de la restricción $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ en las ecuaciones, que en general obliga a la elección de espacios de interpolación (Ψ_{h_t} , Ψ_{h_s} , Φ_{h_t} y Φ_{h_s}) que permitan cumplir la denominada condición de Babuška-Brezzi [BD88] [Cod92], en adelante BB.

La segunda dificultad se presenta cuando el término de convección de la ecuación de balance de cantidad de movimiento (1.1) es importante respecto al término que introduce la viscosidad (lo cual ocurre para R_n altos). Cuando esto ocurre, el sistema de ecuaciones (1.9), resultante de aplicar el método de Galerkin añade viscosidades negativas, proporcionales al valor de R_n [Sot97].

A continuación, se estudiarán con un mayor detenimiento las problemáticas enunciadas.

1.2.3 La Restricción de Incompresibilidad

Como se ha mencionado ya, la introducción de la restricción de compresibilidad del flujo en las ecuaciones de Navier Stokes tiene como resultado efectos muy importantes. Estos efectos se derivan principalmente del hecho de que el campo de velocidades puede tomarse como única incógnita del problema de Navier Stokes, para ser posteriormente corregido con un campo de presiones derivado de él. En efecto, la presión en la formulación incompresible de las ecuaciones de Navier Stokes (1.1)-(1.2), no es ya una variable termodinámica, sino que es una cantidad que establece el equilibrio de fuerzas en cada volumen elemental. De hecho, si tomamos el rotacional de (1.1), podemos eliminar la presión de la ecuación de balance de cantidad de movimiento. En ese caso podríamos calcular un campo de velocidades que cumpliera la condición de balance

⁴Es decir cumple que $\Omega = \cup \Omega^e$ y $\Omega^e \cap \Omega^{e'} = \emptyset$ si $e \neq e'$.

de cantidad de movimiento, y posteriormente corregirlo con un campo de presiones que nos permitiera cumplir la condición de incompresibilidad, que se podría calcular tomando la divergencia de (1.1) e imponiendo (1.2).

Como se verá posteriormente, es posible demostrar la existencia y unicidad del problema estacionario asociado al sistema (1.9), en determinadas circunstancias, supuesto el cumplimiento de la denominada condición *BB* [BD88]. Esta condición puede plantearse como, [Cod92],

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \Psi_h - \{0\}} \frac{\int_{\Omega} \phi_h (\nabla \cdot \mathbf{v}_h) d\Omega}{\|\mathbf{v}_h\|_{H^1}} \geq K_b \|\phi_h\|_{L^2} \quad \forall \phi_h \in \Phi_h \quad (1.10)$$

Donde Ψ_h , Φ_h , son los espacios de elementos finitos conformes asociados a la partición $\{\Omega^e\}$ del dominio espacial Ω .

La condición (1.10) supone una restricción a la elección de los espacios de interpolación de elementos finitos Ψ_h , Φ_h . En general, esta condición no permite que la interpolación de los espacios de velocidad y presión sea del mismo orden [Sot97]. Las parejas de espacios de interpolación que cumplen la condición (1.10) se denominan *div-estables*.

En la práctica, existen metodologías que permiten utilizar igual interpolación para los espacios de velocidad y presión, mediante la modificación de la forma variacional (1.9). Entre estas metodologías, quizá la más conocida es la denominada *GLS* (*Galerkin Least/Squares*) [HFH89]. Otra posibilidad, quizá menos conocida, es la de modificar la forma del sistema (1.9), mediante el desacoplamiento en la ecuación de balance de cantidad de movimiento del efecto de la presión. De esta forma, la presión jugaría, precisamente ese papel de corrección que le otorgábamos anteriormente. Esta metodología, denominada *Método de Pasos Fraccionados* (*Fractional Step Method*) [Cho67] [VCZ97] será estudiada detenidamente a lo largo del capítulo 3 del presente trabajo, donde se expondrán las importantes ventajas que su forma semi implícita reporta para los objetivos de este proyecto.

1.2.4 La Problemática de la Convección

La problemática que presenta la aparición de términos convectivos dominantes es conocida, desde el principio del desarrollo de los métodos numéricos en diversos campos [RG96]. Si los términos convectivos predominan sobre los términos viscosos o difusivos, hecho que se produce para altos números de Reynolds, la solución numérica clásica del método de los elementos finitos (el denominado procedimiento de Galerkin) falla y aparecen oscilaciones en todo el dominio. Las mencionadas oscilaciones desaparecen con el uso de mallas muy finas, impensables desde el punto de vista práctico.

Desde un punto de vista físico, el sistema de ecuaciones resultante de aplicar el método de Galerkin añade viscosidades negativas proporcionales a R_n , provocando un mala estabilidad del problema y la aparición de oscilaciones.

Este problema es característico pues, de las ecuaciones que incorporan términos importantes proporcionales a las derivadas primeras de las variables, por lo que esta

dificultad se extiende a muchas ramas de la mecánica de medios continuos. En particular, nos encontraremos estos problemas en el estudio de la condición de superficie libre (capítulo 2), que será tomada como base para el estudio de métodos generales de estabilización de la convección.

Diversos autores han presentado procedimientos para resolver este inconveniente, entre ellas destacan los métodos clásicos de evaluación contracorriente de las derivadas (*upwind*) y la familia de métodos tipo *Petrov Galerkin* [KNZH80] [Hir90] [Rav96] [Cod93a] [HU96], y los más recientes *Characteristic Galerkin* [ZC95] [ZMS⁺95] [VCZ97], *SUPG* (*Streamline Upwind / Petrov Galerkin*) [BH82] [HHJ94] [Cod93a] [HU96] y *GLS* (*Galerkin Least Squares*) [HFH89] [Sot97]. Todos los métodos anteriores se basan en la adición de cierta cantidad de difusión numérica a las ecuaciones básicas, diferenciándose entre ellos en las bases conceptuales sobre las cuales se diseña esa adición.

A pesar de todo, ninguno de los métodos anteriores, permite tener control sobre las oscilaciones que se producen en presencia de altos gradientes de las variables (capas límite o choques). Estas oscilaciones suelen ser localizadas y no tienden a propagarse en problemas lineales, pero en problemas muy no lineales (como se comportan las ecuaciones de Navier Stokes en muchos casos) pueden provocar inestabilidades globales.

En el capítulo 2 se estudiará en profundidad esta problemática, tomando como base la ecuación de convección difusión y se diseñará una metodología de general aplicación que permite eliminar toda la problemática asociada a los términos convectivos.

1.2.5 Existencia y unicidad de solución

Hemos planteado anteriormente el problema discreto (1.9), correspondiente a la forma variacional (1.8) de las ecuaciones de Navier Stokes (1.1)-(1.2). Ahora nos ocuparemos de discutir la existencia y unicidad de la solución del problema así planteado.

Para ello, ha de suponerse que se cumple la condición (1.10), por la adecuada elección de los espacios de elementos finitos. Si consideramos el sistema de ecuaciones estacionario, correspondiente a (1.9), dado por,

$$\begin{aligned}
 & \rho \int_{\Omega} [(\mathbf{v}_h \cdot \nabla) \mathbf{v}_h] \cdot \psi_h \, d\Omega + \int_{\Omega} 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}(\mathbf{v}_h) : \underline{\underline{\epsilon}}(\psi_h) \, d\Omega - \int_{\Omega} p_h (\nabla \cdot \psi_h) \, d\Omega = \\
 & = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \psi_h \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t}_c \cdot \psi_h \, d\Omega + \int_{\Gamma_M} (\sigma \cdot \mathbf{s}) \cdot \psi_h \, d\Omega \quad \forall \psi_h \in \Psi_{hi} \\
 & \int_{\Omega} \phi_h (\nabla \cdot \mathbf{v}_h) \, d\Omega = 0 \quad \forall \phi_h \in \Phi_{hi} \\
 & (\mathbf{v}_h(\mathbf{x}, 0), \psi_h) = (\mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \psi_h) \quad \forall \psi_h \in \Psi_{hi}
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

En este caso, puede demostrarse la existencia y unicidad de la solución del problema estacionario (1.11), siempre que se cumpla [Cod92],

$$\chi = \frac{N_c N_l}{K_a^2} < 1 \tag{1.12}$$

siendo N_c , N_l las constantes de continuidad de las formas correspondientes al término convectivo e independiente, respectivamente, de la ecuación de cantidad de movimiento del sistema (1.11) que pueden definirse como [Cod92],

$$\begin{aligned} N_c &= \sup \frac{\rho \int_{\Omega} [(\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{v}_h] \cdot \mathbf{w}_h \, d\Omega}{\|\mathbf{u}_h\|_{H^1} \|\mathbf{v}_h\|_{H^1} \|\mathbf{w}_h\|_{H^1}} \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \in H_0^1(\Omega) \\ N_l &= \sup \frac{\int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_h \, d\Omega}{\|\mathbf{u}_h\|_{H^1}} \quad \forall \mathbf{u}_h \in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad (1.13)$$

y K_a es la constante de estabilidad de la forma correspondiente al término difusivo de la ecuación de cantidad de movimiento del sistema (1.11), que cumple,

$$\int_{\Omega} 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}(\mathbf{u}_h) : \underline{\underline{\epsilon}}(\mathbf{u}_h) \, d\Omega \geq K_a \|\mathbf{u}_h\|_{H^1}^2 \quad \forall \mathbf{u}_h \in H_0^1(\Omega) \quad (1.14)$$

De esta última definición puede comprobarse que la condición (1.12) es restrictiva y no se cumple para valores elevados de R_n . Como se discutirá posteriormente en el capítulo 3, para valores moderados de R_n , en la realidad experimental pueden encontrarse soluciones no estacionarias e incluso varias soluciones, cuya aparición depende de las condiciones iniciales que se planteen. Este aspecto se considerará posteriormente en el capítulo 3, al tratar de la turbulencia.

1.3 Conclusiones

En el presente capítulo se han discutido las principales inestabilidades numéricas asociadas a la resolución de las ecuaciones de Navier Stokes por el procedimiento clásico de Galerkin.

La primera de ellas se refiere a la introducción de la imposición de incompresibilidad en las ecuaciones de Navier Stokes. Esta condición obliga, en general, a la elección de espacios de interpolación que permitan cumplir la condición BB , aunque existen metodologías que, mediante la modificación de la forma variacional, permiten usar igual interpolación para los espacios de velocidad y presión.

La segunda dificultad se presenta cuando el término de convección de la ecuación de balance de cantidad de movimiento es importante respecto al término que introduce la viscosidad (lo cual ocurre para R_n altos).

Por otra parte, es posible demostrar la existencia y unicidad de la solución estacionaria de la forma variacional de las ecuaciones de Navier Stokes. Sin embargo, la solución única sólo existirá para valores pequeños de R_n . Para valores moderados, la experiencia demuestra que pueden existir soluciones no estacionarias, e incluso varias soluciones, dependiendo de las condiciones iniciales.

Capítulo 2

El Problema de la Superficie Libre

El presente capítulo se dedicará al estudio de la ecuación de superficie libre. En primer lugar se hará un recorrido sobre las distintas formas que hasta la fecha se han utilizado para su resolución y se discutirán los principales problemas que se plantean. La problemática que se trata de resolver nos llevará a un profundo estudio de la ecuación de convección difusión. A través del análisis de este problema, se hará una presentación de la técnica de cálculo finitesimal (CF) desarrollada para la estabilización de los problemas de transporte por convección y que en capítulos posteriores será utilizada para la estabilización del algoritmo numérico para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes. En último lugar se presentan varios ejemplos básicos de aplicación de las técnicas presentadas.

2.1 Introducción

Como ya se ha comentado con anterioridad, la determinación de la resistencia debida a la formación de olas es de gran importancia. Su importancia relativa en la resistencia total (que puede llegar a valores en torno al 70%), así como su gran dependencia con las formas del buque, han hecho que numerosos trabajos se llevaran a cabo al objeto de desarrollar un método efectivo para su determinación. El método de los elementos de contorno, para la resolución de las ecuaciones del flujo potencial, es la base de la mayoría de los algoritmos numéricos desarrollados en los últimos años, aunque muy recientemente han comenzado a aparecer códigos que resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes mediante esquemas de proyección o de pseudocompresibilidad [Cod92] [CVZ97] [LYOI96] [GO99] [HMJ93] [LRB⁺98].

Independientemente de las ecuaciones de la dinámica de fluidos resueltas por diferentes métodos numéricos, la condición de superficie libre, debido a su especial complejidad, que podrá apreciarse en detalle en el desarrollo del presente capítulo, ha sido tratada de muy diversas formas. Tanto la solución de la ecuación completa como de varias linealizaciones han sido consideradas por diversos autores [Daw77] [LRB⁺98] [FMJ93] [Rav96] [Yeu82] [D'E97]. La mayoría de los esquemas propuestos resuelven el problema en un dominio fijo, considerando una superficie de referencia. Sólo en los úl-

timos años han comenzado a aparecer esquemas que resuelven el problema en dominios móviles [Rav92] [MC98] [LYO98].

Pero además, la solución de la ecuación de superficie libre por los métodos clásicos de integración de ecuaciones diferenciales, presenta una problemática, no por estudiada, resuelta. Nos referimos a lo que en la literatura al respecto se conoce por imposición de la condición de radiación [Daw77] [Let93] [D'E97] [Rav96]. La condición de radiación establece el carácter de la solución en el infinito, y en concreto especifica que la superficie libre debe permanecer imperturbada aguas arriba del barco y lejos de él. La necesidad de imponer esta condición se justifica en la teoría lineal clásica, por el hecho comprobable de que el planteamiento del problema de mecánica de fluidos dado por la ecuación de conservación de la masa¹ más las condiciones de contorno de superficie libre dinámica y cinemática, conducen a un *problema hidrodinámico incompletamente formulado* [Rav96]. Efectivamente, puede demostrarse como, en ese caso, el sistema de ecuaciones no determina unívocamente el flujo alrededor del buque. De hecho puede comprobarse como el sistema así planteado admite soluciones simétricas respecto a un plano perpendicular al sentido de avance del buque [D'E97, pp. 35-38].

Evidentemente, este tipo de justificaciones no sirven para el problema *no lineal* que pretendemos abordar. Sin embargo, el correcto planteamiento del problema de Navier-Stokes, tal y como se ha presentado en el capítulo anterior, puede ser demostrado bajo ciertas condiciones [GR86].

Sin embargo, a lo largo de este capítulo estudiaremos el fenómeno de inestabilidades asociadas a la resolución de la ecuación cinemática de superficie libre, cuya naturaleza es ciertamente la misma que la que se presenta en los problemas lineales antes comentados. De hecho, demostraremos como, tanto en el caso lineal como en el no lineal el operador discreto de transporte por convección (ecuación cinemática de superficie libre) es inestable. De esta forma al intentar resolver la ecuación de superficie libre nos encontramos con oscilaciones no físicas en todo el dominio de análisis. Cabe señalar que, la inestabilidad por si sola no provoca la aparición de estas *olas espurias*, sino que se requiere la presencia de algún foco de perturbación. En muchos casos, esta perturbación se produce por la imposición de condiciones de contorno inadecuadas. El hecho es que el operador de convección discreto permite que las oscilaciones producidas en el contorno se propaguen de manera no física aguas arriba en forma de olas espurias. Sin embargo, esta no es la única causa de la aparición de estas olas, fenómenos naturales de capas límite o altos gradientes de las variables pueden producir el mismo efecto.

Este nuevo enfoque del problema permitirá entrar en detalle en su naturaleza y diseñar un esquema de solución general para este tipo de problemas. Cabe señalar que el enfoque que se planteará es perfectamente general, aplicable tanto a los problemas lineales como no lineales, y de hecho, la metodología para su resolución, puede ser extendida a problemas de distinta naturaleza. En resumen, no hablaremos de la necesidad de imposición de la condición de radiación del problema, sino de la *inestabilidad intrínseca* del operador discreto de convección.

¹En el planteamiento del problema del flujo no viscoso e irrotacional, sólo es necesario resolver la ecuación de incompresibilidad, dado que las incógnitas del problema se reducen al campo de potencial.

Por otra parte conviene insistir en el hecho de que la inestabilidad de este operador necesita una perturbación para manifestarse, como la presencia de altos gradientes de las variables o condiciones de contorno inadecuadas. A este respecto en [D'E97] se muestra una metodología para el problema que permite imponer condiciones de contorno absorbentes, esto es, que son capaces de no perturbar la solución, y permiten resolver el problema sin necesidad de modificar el operador de superficie libre.

Respecto a la inestabilidad del operador discreto de transporte convectivo, el modo más clásico de evitar este problema fue propuesto por Dawson [Daw77], quien usó un esquema de cuatro puntos aguas arriba para evaluar la derivada que aparece en la ecuación de superficie libre. La utilización de este tipo de esquemas es, probablemente, la principal razón por la cual la mayoría de los códigos que predicen la resistencia por formación de olas en buques utilizan mallas estructuradas [Rav96]. Otro esquema muy utilizado por diversos autores se reduce a introducir una difusión de cuarto orden en la ecuación de superficie libre [LYO98] [MC98]. En todo caso, es muy escaso el número de publicaciones en las que se dan explicaciones claras de la acción de estos esquemas en la resolución (ver por ejemplo [Let93]), y en todo caso no existe una justificación teórica con base física que sustente la aplicación de estas metodologías. En el presente trabajo, se plantea como objetivo comprender toda la problemática inherente a la resolución de la ecuación de superficie libre. Por ello, y dado que, matemáticamente, se describe la condición cinemática de superficie libre como una ecuación de convección pura, se hará un estudio profundo de este tipo de ecuaciones. A raíz de este estudio se podrá derivar un procedimiento consistente² de estabilización, a la vez que obtener un mejor entendimiento de las razones físicas y matemáticas en las cuales se basan los métodos de estabilización existentes. Por otra parte, la metodología que se desarrollará, permitirá tener más control sobre la cantidad de difusión añadida en la ecuación de superficie libre, eliminando la amortiguación excesiva de muchos de los esquemas utilizados. En nuestro caso este aspecto es vital, pues el problema que pretendemos resolver es de naturaleza oscilatoria (olas), por lo que la solución a la inestabilidad de las ecuaciones, no puede ser una simple adición de difusión, pues esto amortiguaría tanto las oscilaciones espurias como las físicas.

2.2 La Condición de Contorno de Superficie Libre

La condición de contorno de superficie libre no puede expresarse matemáticamente con una ecuación sino con un conjunto de ellas que se presentan a continuación.

En general, la condición de contorno (denominada dinámica) de una superficie libre obliga a la continuidad de la velocidad y las tensiones a través de la superficie [RG96]. Para nuestro análisis esta condición puede expresarse como la relación entre el cambio en las tensiones de los fluidos y la tensión superficial del contorno, es decir,

²Esto es, la solución de la ecuación diferencial original, es solución del problema estabilizado.

$$\underline{\underline{\tau_G}}\mathbf{n} - \underline{\underline{\tau_A}}\mathbf{n} = \beta \left(\frac{1}{R_1 + R_2} \right) \mathbf{n} \quad \text{en} \quad \Gamma_\eta \quad (2.1)$$

Donde $\underline{\underline{\tau_G}}$ es el tensor de tensiones del agua y $\underline{\underline{\tau_A}}$ el del aire, \mathbf{n} es la normal a la superficie libre, β es la tensión superficial y R_1, R_2 son los radios de curvatura principales de la superficie y Γ_η es el contorno sobre el que se aplica la condición.

Si consideramos que el aire está en reposo, manteniendo una presión constante p_o sobre la superficie libre, y despreciamos además, los efectos de la viscosidad en este medio, podemos obtener una primera versión simplificada de la ecuación (2.1),

$$\underline{\underline{\tau_G}}\mathbf{n} + p_o\mathbf{n} = \beta \left(\frac{1}{R_1 + R_2} \right) \mathbf{n} \quad \text{en} \quad \Gamma_\eta \quad (2.2)$$

Por último, si despreciamos todos los efectos viscosos sobre la superficie libre, lo cual es equivalente a suponer³ que $R_n \rightarrow \infty$, la ecuación (2.2), degenera en la simple imposición de que la presión sobre la superficie libre debe ser la atmosférica⁴.

$$p = p_o \quad \text{en} \quad \Gamma_\eta \quad (2.3)$$

La ecuación (2.3) es la condición que consideraremos en el presente trabajo, suponiendo despreciables, en primera aproximación, los efectos de la viscosidad en el fenómeno de superficie libre, en los problemas prácticos de hidrodinámica naval [Daw77] [HMJ93] [LYOI96].

En todo lo anterior, se puede tomar sin pérdida de generalidad, $p_o = 0$.

Por otra parte, la descripción del movimiento de la superficie libre se hace a través de la llamada condición cinemática de la superficie libre. Esta expresa la condición de superficie material (o de corriente) de este contorno. Si describimos la posición de la superficie libre en un instante dado, en la forma clásica, a partir de la relación siguiente,

$$F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0 \quad (2.4)$$

donde $\eta(x, y, t)$ es la función que define la elevación de un punto de coordenadas x, y de la superficie libre en un instante dado y $F(x, y, z, t)$ es la función implícita que

³Valores normales de R_n en hidrodinámica naval son del orden de $10^7 - 10^9$.

⁴Una versión más exacta, incluyendo los efectos de la viscosidad, puede obtenerse directamente de la tercera componente de la condición dinámica de superficie libre como

$$p = p_o - \tau_{G_{ww}} - \beta \left(\frac{1}{R_1 + R_2} \right) \quad \text{en} \quad \Gamma_\eta$$

donde se ha supuesto que $\mathbf{n} \simeq (0, 0, -1)$.

define la superficie. De esta manera, podremos expresar la condición cinemática de superficie libre como,

$$\frac{DF(\mathbf{x}, t)}{Dt} = 0 \quad (2.5)$$

Donde $\frac{DF}{Dt}$ es la derivada material o sustancial de la función F . Esta derivada se interpreta sencillamente si se introduce el concepto de dominio material Ω_λ , cuyas coordenadas $\lambda(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ son las etiquetas o identificadores de las partículas (descritas, por ejemplo, por su posición en el instante $t = 0$). La versión euleriana de esa misma ecuación (2.5) puede obtenerse a partir del campo de posiciones instantáneas de las partículas del fluido $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda, t)$.

$$\frac{DF(\mathbf{x}(\lambda, t), t)}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_i} \left[\frac{\partial x_i}{\partial t} \right]_\lambda = 0 \implies \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F = 0 \quad (2.6)$$

Teniendo en cuenta la definición de la superficie F , la ecuación (2.6) puede simplificarse y resulta como sigue,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \eta = w \implies \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} - w = 0 \quad \text{en } z = \eta \quad (2.7)$$

Donde $\tilde{\mathbf{v}} = (u, v)$, $\tilde{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ representan el vector velocidad y el operador gradiente bidimensionales.

Del mismo modo se puede escribir la ecuación (2.7) anterior en su forma estacionaria como,

$$w = \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \eta \quad \text{en } z = \eta \quad (2.8)$$

Hay que hacer notar, como ya se ha mencionado en la introducción, que tradicionalmente se defendía que la condición de superficie libre requiere la aplicación de una imposición adicional conocida como ecuación de radiación [Rav96] [Daw77] [D'E97]. No obstante, el enfoque que se hará en este trabajo, justificará que tal condición de radiación no es una condición necesaria⁵, en el caso general. El problema que se trata de resolver imponiendo esta condición se refiere en realidad a la inestabilidad del problema discreto y es inherente al tipo de ecuación que se intenta resolver, como se verá posteriormente en este mismo capítulo.

Por otra parte, conviene hacer notar que la descripción de la superficie libre hecha en (2.5) sólo permite que esté unívocamente definida en η , dados un par x, y , y por lo tanto fenómenos como olas rompientes no pueden ser reproducidos.

⁵ Hay que señalar que en el problema de flujo no viscoso e irrotacional, la formulación incompleta del problema exige de una condición adicional, de ahí la aparición de esta ecuación de radiación. Tal necesidad proviene de las simplificaciones hechas en el problema, no de la naturaleza física del mismo.

2.2.1 Formulación ALE de la Superficie Libre

Es bien conocido, que existen dos formas clásicas de representar las ecuaciones de los medios continuos: la representación Lagrangiana y la Euleriana. La primera basa la descripción del movimiento en un seguimiento de las partículas del medio, mientras que la segunda basa la descripción en la posición respecto a un sistema de referencia.

Tradicionalmente, las ecuaciones de dinámica de fluidos se han descrito con formulación euleriana, mientras que la descripción lagrangiana del movimiento quedaba restringida a su uso en mecánica de estructuras. Esto se debe a las ventajas relativas que ofrecen una y otra formulación. Con el objetivo de cubrir ese hueco creado entre los dominios fluido y estructural, se desarrolló una descripción mixta, o mejor arbitraria, denominada ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian).

Estas formulaciones se desarrollaron primero en el contexto de los métodos de diferencias finitas [HAC74] y más tarde fueron incorporados al mundo del método de los elementos finitos [HLZ81] [FKT99] [Don82] [OG99] [GO99].

La idea básica de esta formulación es incorporar un dominio de referencia adicional que denominaremos Ω_ξ y cuyas coordenadas de referencia están dadas por el vector $\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Este dominio de referencia podría ser, por ejemplo, el que describe el movimiento de la malla de elementos finitos. De la misma manera denominaremos Ω_λ al dominio material, cuyas coordenadas $\lambda(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ son las etiquetas de las partículas (descritas, por ejemplo, por su posición en $t = 0$). Por último tendremos el dominio espacial común Ω_x de coordenadas $x(x_1, x_2, x_3)$. Es evidente que existen las funciones de transformación de coordenadas $\xi(x, t)$, $x(\xi, t)$, $\xi(\lambda, t)$, $\lambda(\xi, t)$, $\lambda(x, t)$ y $x(\lambda, t)$.

Podemos entonces expresar la derivada material de una cantidad χ , como,

$$\frac{D\chi(x, t)}{Dt} = \left[\frac{\partial \chi(x(\xi, t), t)}{\partial t} \right]_\lambda = \left[\frac{\partial \chi(x, t)}{\partial t} \right]_x + \frac{\partial \chi(\xi, t)}{\partial \xi_i} \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right]_\lambda \quad (2.9)$$

La relación (2.9) anterior se suele denominar *ecuación fundamental ALE* [WR98]. Expresa la derivada material de una cantidad χ donde la derivada temporal se ha calculado respecto a un sistema de referencia x y las derivadas espaciales en un sistema de referencia ξ . Las cantidades $\left[\frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right]_\lambda$ se denominan *velocidades convectivas ALE*. En el caso en que el dominio de referencia Ω_ξ describa el movimiento de la malla de elementos finitos, se cumple que $\left[\frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right]_\lambda = v_i - v_i^m$, donde v^m (v_i^m) es la velocidad de deformación de la malla.

Si aplicamos la relación (2.9) a la ecuación (2.5), se obtiene la versión ALE de la condición cinemática de superficie libre siguiente,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\tilde{v} - \tilde{v}^m) \cdot \tilde{\nabla} \eta = w - w^m \quad \text{en } z = \eta \quad (2.10)$$

Donde, evidentemente, $v^m = [u^m, v^m, w^m]$ y $\tilde{v}^m = [u^m, v^m]$.

2.2.2 Forma Simplificada de las Ecuaciones de Superficie Libre

Las ecuaciones anteriores (2.3), (2.7) y (2.8) representan un contorno no lineal en las incógnitas η y \mathbf{v} . Además las condiciones deben imponerse sobre un contorno desconocido a priori. Esto hace evidente la complejidad del presente problema. Por esta razón, en la gran mayoría de los algoritmos numéricos desarrollados hasta la fecha se consideran simplificaciones de esta condición de contorno. A continuación presentaremos algunas de las más conocidas simplificaciones aplicables a la ecuación (2.8) estacionaria de superficie libre. Es común a todas estas simplificaciones suponer que el efecto de la viscosidad en la cercanía de la superficie libre es despreciable. Si además consideramos que el movimiento, en esa zona del fluido, es irrotacional, la ecuación de Bernoulli puede ser usada cerca de la superficie libre, esto es,

$$\frac{p_o}{\rho} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + g\eta = C \quad (2.11)$$

Donde C es un valor constante a lo largo de una línea de corriente (que se puede obtener, en general, por comparación con las condiciones aguas arriba) y se ha denominado p_o a la presión sobre la superficie libre. Si se supone que la presión sobre la superficie libre es constante, el término $\frac{p_o}{\rho}$ se puede incorporar a la constante C , quedando la ecuación (2.11) anterior, tras despejar η , como,

$$\eta = \frac{1}{g} \left[C - \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right] \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) anterior, relaciona a través de η , las condiciones dinámica y cinemática de la superficie libre. De esta manera, considerando por simplicidad el problema estacionario, puede sustituirse la ecuación (2.12) en la ecuación (2.8) dando,

$$2gw + \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\nabla} |\mathbf{v}|^2 = 0 \quad \text{en } z = \eta \quad (2.13)$$

En la ecuación (2.13) anterior se pueden apreciar claramente los dos tipos de no linealidades que están incluidas en el problema. La primera se refiere al término $\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\nabla} |\mathbf{v}|^2$ que es una no linealidad clásica que incluye términos de tercer orden en las velocidades. Por otra parte el desconocimiento a priori de la posición de la superficie libre η es una no linealidad típica de los problemas de contorno móvil.

La resolución del problema planteado ha llevado al desarrollo de numerosos esquemas. A continuación haremos un recorrido por los más significativos.

Por otra parte, cabe señalar que, las simplificaciones que se presentan a continuación han sido desarrolladas para problemas de flujo potencial, y por tanto lineal. Es por ello que suponen se cumple la aditividad de las componentes de la solución.

2.2.3 Condición de Superficie Libre para Buques Lentos

La resolución del problema de superficie libre choca, en primer lugar, con la gran dificultad que plantea el problema de contorno móvil, que es la necesidad de deformar el dominio de análisis. Esto requiere la aplicación de técnicas de movimiento de malla o remallado, que añaden un coste adicional al cálculo. De ahí que la primera simplificación que se puede llevar a cabo, a partir del planteamiento de la ecuación (2.13), es la de su aplicación sobre una superficie de referencia η_{ref} (en general plana y muy a menudo la inicial en calma). De esta manera podemos escribir una nueva versión de la ecuación (2.13), como:

$$2gw + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} |\mathbf{v}|^2 = 0 \quad \text{en } z = \eta_{ref} \quad (2.14)$$

Una forma muy conocida de simplificación de la ecuación de superficie libre se basa en suponer que el flujo con olas sólo supone una pequeña variación del flujo sin ellas (el conocido tradicionalmente como flujo de modelo doble sumergido). Esta suposición se cumple para pequeños números de Froude, y esta es la razón por la que esta forma de abordar el problema es conocida como teoría de los buques lentos. Teniendo en cuenta esta suposición, el potencial de velocidades, y por lo tanto la velocidad, se descompone en dos partes aditivas. La componente debida al doble modelo sumergido y la componente de perturbación debida a las olas generadas.

$$\mathbf{v}(x, y, z) \simeq \mathbf{v}^*(x, y, z) + \mathbf{v}'(x, y, z) \quad (2.15)$$

Donde \mathbf{v}^* es la velocidad correspondiente al doble modelo sumergido y \mathbf{v}' es la velocidad de perturbación, por lo cual podemos escribir que $|\mathbf{v}^*| \gg |\mathbf{v}'|$. En este caso podemos escribir la ecuación (2.14) como,

$$2gw + [(\tilde{\mathbf{v}}^* + \tilde{\mathbf{v}}') \cdot \tilde{\nabla}] |\mathbf{v}^* + \mathbf{v}'|^2 = 0 \quad \text{en } z = \eta_{ref} \quad (2.16)$$

Si operamos los términos de la anterior ecuación, podemos escribir que,

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{v}}^* \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{v}^{*2} + \tilde{\mathbf{v}}' \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{v}^{*2} + 2\tilde{\mathbf{v}}^* \cdot \tilde{\nabla} (\tilde{\mathbf{v}}' \cdot \mathbf{v}^*) + \\ & + \tilde{\mathbf{v}}^* \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{v}'^2 + \tilde{\mathbf{v}}' \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{v}'^2 + 2\tilde{\mathbf{v}}' \cdot \tilde{\nabla} (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}^*) = -2gw \quad \text{en } z = \eta_{ref} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Si se resuelve el problema del doble modelo sumergido en primer lugar, el término \mathbf{v}^* es conocido, por lo tanto los tres términos subrayados del primer miembro de la anterior ecuación son lineales, mientras que los tres restantes son no lineales, y para su simplificación se pueden seguir diversos criterios [Rav96], [BT75]. En efecto, muchos autores han derivado formas lineales y no lineales simplificadas, a partir de la ecuación (2.17). Una discusión sobre ellas puede encontrarse en [Rav96].

Por último hay que mencionar que, en muchas ocasiones, la condición de superficie libre para buques lentos se encuentra en la forma,

$$2gw + 2|\mathbf{v}| \left(u \frac{\partial}{\partial x} |\mathbf{v}^\times + \mathbf{v}'| + v \frac{\partial}{\partial y} |\mathbf{v}^\times + \mathbf{v}'| \right) = 0 \quad \text{en } z = \eta_{ref} \quad (2.18)$$

que se puede derivar inmediatamente de (2.17).

2.2.4 Ecuación de Superficie Libre Lineal

Bajo este epígrafe, presentaremos dos de las más conocidas formas lineales de la condición de superficie libre estacionaria. Ambas parten de la aplicación de la simplificación (2.14), es decir, las condiciones se deben aplicar sobre una superficie libre de referencia.

- Condición de Superficie Libre de Kelvin

La forma más simple de linealización de la ecuación de superficie libre se basa en suponer que toda la perturbación que causa la presencia del buque sobre la corriente uniforme es pequeña. De esta manera y suponiendo que la solución (dado que esta solución se aplica al flujo potencial, y por lo tanto lineal) es aditiva de sus componentes, se tiene que,

$$\mathbf{v}(x, y, z) \simeq \mathbf{v}_\infty x + \mathbf{v}'(x, y, z) \quad (2.19)$$

Donde $\mathbf{v}_\infty = (u_\infty, 0, 0)$ es la velocidad no perturbada (que se supone lleva la dirección del eje Ox) y \mathbf{v}' es la velocidad de perturbación. Evidentemente, la aplicación de esta linealización supone que se cumple que $|\mathbf{v}'| \ll |\mathbf{v}_\infty|$. En este caso podemos escribir que:

$$v^2 = |u_\infty + u', v', w'|^2 = [u_\infty + u']^2 + v'^2 + w'^2 \simeq u_\infty^2 + 2u_\infty u' \quad (2.20)$$

Además, hay que tener en cuenta que, dada la suposición hecha en este caso, se cumple que,

$$w = w' \quad (2.21)$$

De este modo, sustituyendo las relaciones (2.20) y (2.21) en la ecuación (2.14), queda como sigue,

$$2gw' + (u_\infty + u') \frac{\partial}{\partial x} (u_\infty^2 + 2u_\infty u') + (v_\infty + v') \frac{\partial}{\partial y} (u_\infty^2 + 2u_\infty u') = 0 \quad (2.22)$$

De donde, operando y despreciando los términos de segundo orden en \mathbf{v}' , se obtiene la forma de la ecuación de superficie libre de Kelvin:

$$gw' + u_\infty^2 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (2.23)$$

• Condición de Superficie Libre de Dawson

Dawson [Daw77] presentó en 1977 uno de los primeros, y probablemente el más conocido de los algoritmos numéricos basado en el método de elementos de contorno para resolver el problema de flujo potencial con superficie libre. Su propuesta de resolución del problema de flujo tridimensional de superficie libre se basaba en el acoplamiento de un algoritmo de resolución para el problema del modelo doble sumergido mediante en el algoritmo de Hess y Smith [HS64b] [HS64a] [GSP98] con un método de resolución del problema con superficie libre basado en la teoría de los buques lentos presentada anteriormente en las ecuaciones (2.15) a (2.18).

Como se muestra en el apéndice F, la forma linealizada de la ecuación de superficie libre dada por Dawson tiene la forma,

$$gw + \frac{\partial}{\partial l} \left(\mathbf{v}^{\times 2} |\mathbf{v}| \right) = 2\mathbf{v}^{\times} \cdot \left(|\mathbf{v}^{\times}| \frac{\partial \mathbf{v}^{\times}}{\partial l} \right) \quad \text{en } z = \eta_{ref} \quad (2.24)$$

Donde se ha denominado $\mathbf{l} = \frac{\mathbf{v}^{\times}}{|\mathbf{v}^{\times}|}$ (vector unitario en la dirección de la velocidad de doble modelo sumergido).

Como puede apreciarse la ecuación (2.24) tiene grandes ventajas en su implementación, las cuales son, en gran medida, causa de su éxito. La posibilidad de cálculo de las derivadas según líneas de corriente, correspondientes a la solución de doble modelo sumergido (cuya dirección, evidentemente, está dada por $\mathbf{l} = \frac{\mathbf{v}^{\times}}{|\mathbf{v}^{\times}|}$), facilita su determinación utilizando el método de diferencias finitas. De esta manera, el algoritmo de solución se plantea de la siguiente forma:

- ⇒
1. Resolver el problema de doble modelo sumergido, obteniendo así el campo de velocidades $\mathbf{v}^{\times} = (u^{\times}, v^{\times}, w^{\times})$.
 2. A partir de la solución anterior se pueden evaluar las derivadas respecto de la dirección dada por $\mathbf{l} = \frac{\mathbf{v}^{\times}}{|\mathbf{v}^{\times}|}$. Así se puede resolver de nuevo el problema, pero imponiendo en este caso la condición (2.24), y obteniendo así el campo de velocidades solución del problema $\mathbf{v} = (u, v, w)$.

Para facilitar la implementación del algoritmo, en el método original los paneles de la superficie libre se disponían en *tiras* aproximadamente alineadas con el flujo del modelo doble sumergido. De esta manera, las derivadas que aparecen podían ser calculadas directamente usando diferencias finitas sobre los puntos de colocación de sucesivos paneles de la misma *tira*.

Pero, probablemente, el aspecto que ha hecho más famoso al método de Dawson fue la forma de estabilización de la ecuación de convección, aspecto que será tratado posteriormente en este capítulo, y es discutido en el apéndice F.

2.2.5 Métodos Iterativos para la Resolución del Problema de Superficie Libre no Lineal

Junto a los ampliamente utilizados, en multitud de códigos desarrollados en los últimos años [Daw77] [Rav96] [PSS96], algoritmos basados en las diferentes variantes de la condición linealizada y cuasi linealizada de superficie libre, discutidas en la sección anterior, han aparecido en la última década formulaciones que incluyen algoritmos de resolución de la condición no lineal. A continuación, haremos una revisión de los principales esquemas que se han desarrollado en este ámbito.

Para la discusión que se presenta en este apartado se tomará la condición de superficie libre estacionaria. La versión transitoria puede ser derivada de manera sencilla a partir de los esquemas presentados.

- Método de Bernoulli

Quizá el más simple de los algoritmos para la resolución iterativa de las ecuaciones no lineales de superficie libre es el basado en imponer como condición de contorno en el fluido la condición cinemática (2.8) basada en la superficie libre η_{i-1} calculada en la iteración anterior.

$$w_i - \tilde{\mathbf{v}}_i \cdot \tilde{\nabla} \eta_{i-1} = 0 \quad \text{en} \quad z = \eta_{i-1} \quad (2.25)$$

Si partimos de una posición de la superficie libre $\eta = \eta_0$, en general la solución sin olas, la relación anterior permite calcular la nueva posición de la superficie libre a partir de la ecuación de Bernoulli (2.12). En resumen, el proceso iterativo resultante está dado por:

- ⇒
1. Se parte de una solución $\eta = \eta_0$.
 2. Se resuelve el problema de mecánica de fluidos en el dominio Ω , imponiendo como condición de contorno de superficie libre,

$$2w_i g + \tilde{\mathbf{v}}_i \cdot \tilde{\nabla} |\mathbf{v}_{i-1}|^2 = 0 \quad \text{en} \quad z = \eta_{i-1} \quad (2.26)$$

3. Por último se calcula la nueva posición de la superficie libre $z = \eta_i$ utilizando la ecuación (2.12).
4. El bucle se cierra volviendo al paso 2.

La versión transitoria de este método es difícilmente utilizable en la práctica, dado que la ecuación (2.12) se complica en este caso, apareciendo el término $\frac{\partial \phi}{\partial t}$, donde ϕ es el campo del potencial de velocidades⁶, definido por $\mathbf{v} = \nabla \phi$.

⁶ Hay que recordar que la justificación de la ecuación de Bernoulli requiere que el fluido sea no viscoso e irrotacional, por lo que existe una función potencial de velocidades.

Hay que señalar que este método tiene un rango de convergencia muy limitado. Esto es debido al efecto que el valor de la aceleración de la gravedad g , tiene en la ecuación (2.26). Valores muy pequeños de g , provocan cambios muy grandes en el segundo término de la ecuación (2.26), mientras que valores muy grandes de g crean importantes variaciones en la superficie libre, entre iteraciones sucesivas.

Respecto a la imposición de la condición dinámica de superficie libre, ésta se lleva a cabo a través de sustitución de la ecuación de Bernouilli (2.12) en (2.26). Esto es equivalente a imponerla a través de la (2.33), que se presentará posteriormente en esta sección.

• Método de Pseudoconcentración

Un método muy conocido para la resolución del presente problema es el llamado método de pseudoconcentración [Sot97], también conocido como método del volumen de fluido. Esta técnica ha sido utilizada extensamente para el seguimiento de superficies de interfase entre fluidos. La característica de poder resolver problemas con superficies libres en volúmenes fijos, lo hace especialmente adecuado para este tipo de situaciones. Este método consiste en transportar en un volumen fijo Ω una función de pseudoconcentración $\eta(x, y, z)$ que cumple $\frac{\partial \eta}{\partial z} = -1$. De esta manera la ecuación de transporte equivalente a (2.8) queda como,

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \eta = 0 \quad \text{en } z = \Omega \quad (2.27)$$

La ecuación (2.27) se resuelve cada iteración usando el valor de \mathbf{v} que se obtiene de resolver el problema del fluido. De esta manera el algoritmo queda como,

$$-w_{i-1} + u_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial x} + v_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial y} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.28)$$

Este método de solución tiene como ventaja su simplicidad, ya que permite resolver un problema con contornos móviles utilizando una malla fija. Desafortunadamente, la precisión del método en la captura del frente no es óptima, y en general obliga a utilizar mallas muy finas. Por otra parte el esquema presentado sólo impone la condición cinemática de superficie libre, por lo que requiere que de alguna manera se imponga la condición dinámica sobre el fluido. Este es un problema de difícil solución, y que por lo general es obviado, o burdamente simplificado, en los algoritmos que utilizan esta técnica.

El algoritmo de resolución del problema, en este caso, podría ser el siguiente:

- ⇒
1. Se parte de una solución $\eta = \eta_0$.
 2. Se resuelve el problema de mecánica de fluidos en el dominio Ω , tomando como interfase entre fluidos, la superficie $z = \eta_{i-1}$.

3. Se calcula la nueva posición de la superficie libre $z = \eta_i$ utilizando para ello la ecuación (2.28).
4. El bucle se cierra volviendo al paso 2.

En el caso transitorio la ecuación (2.28) puede escribirse como,

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} + u_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial x} + v_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial y} = w_{i-1} \quad \text{en } \Omega \quad (2.29)$$

Por lo que el algoritmo de resolución del problema transitorio, podría ser el siguiente:

- ⇒
1. Se parte de una solución $\eta = \eta_0$.
 2. Se resuelve el problema de mecánica de fluidos en el dominio Ω , tomando como interfase entre fluidos, la superficie $z = \eta_{i-1}$.
 3. Se calcula la nueva posición de la superficie libre $z = \eta_i$ utilizando para ello la ecuación (2.29).
 4. El bucle se cierra volviendo al paso 2.

• Método de Transpiración

Se puede entender este método como una versión mejorada del algoritmo de pseudo-concentración anterior, dado que se resuelve la misma ecuación (2.28) pero sólo sobre $z = \eta_{i-1}$, e imponiendo además, sobre esta misma superficie, la condición dinámica (2.3). Esto obliga a que la superficie $z = \eta_{i-1}$ se actualice a la posición $z = \eta_i$ en cada paso de tiempo. De esta manera el algoritmo de resolución del problema podría ser el siguiente:

- ⇒
1. Se parte de una solución $\eta = \eta_0$.
 2. Se resuelve el problema de mecánica de fluidos en el dominio Ω , imponiendo en la superficie libre $z = \eta_{i-1}$ la condición dinámica dada por (2.3).
 3. Se calcula la nueva posición de la superficie libre $z = \eta_i$ resolviendo para ello la siguiente ecuación,

$$-w_{i-1} + u_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial x} + v_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial y} = 0 \quad \text{en } z = \eta_{i-1} \quad (2.30)$$

4. Se actualiza el dominio fluido Ω , teniendo en cuenta la nueva posición de la superficie libre.
5. El bucle se cierra volviendo al paso 2.

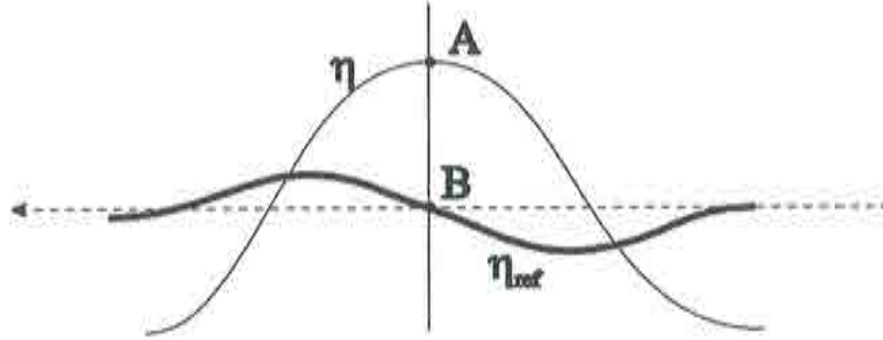


Figura 2.1: Esquema de la disposición de las superficies η y η_{ref} .

El nombre del método proviene del hecho de que se permita en cada paso de tiempo que exista un flujo a través de la superficie libre, dado que sólo en la solución final del problema se cumplirá la condición $u_i \frac{\partial \eta_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial \eta_i}{\partial y} = w_i$ en $z = \eta_i$ que indica que la superficie $z = \eta_i$ es superficie fluida.

Se hace evidente que el algoritmo presentado tiene una gran complejidad para su implementación, debido a la necesidad de actualizar la malla en cada paso de tiempo. Por ello se han desarrollado versiones simplificadas del método de transpiración, que eliminan este inconveniente.

Supongamos ahora que la superficie $z = \eta$ representa una pequeña perturbación respecto a una superficie de referencia dada por $z = \eta_{ref}$. En ese caso podemos suponer que la velocidad $\mathbf{v} = (u_i, v_i, w_i)$ sobre $z = \eta_{ref}$ es aproximadamente igual que sobre $z = \eta$. Así la ecuación (2.30) se puede escribir de manera simplificada como,

$$-w_{i-1} + u_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial x} + v_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial y} = 0 \quad \text{en } z = \eta_{ref} \quad (2.31)$$

Por otra parte, la nueva condición dinámica de superficie libre puede obtenerse de la aplicación de la ecuación de Bernoulli (2.11). De su aplicación sobre un punto A en la superficie $z = \eta$ y uno B sobre $z = \eta_{ref}$, siendo B la proyección según Oz de A (ver figura 2.1), se obtiene,

$$\begin{aligned} g\eta + \frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2} (u_A^2 + v_A^2 + w_A^2) &= C_A \\ g\eta_{ref} + \frac{p_B}{\rho} + \frac{1}{2} (u_B^2 + v_B^2 + w_B^2) &= C_B \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dado que $p_A = p_0$, y tomando en consideración las suposiciones anteriores, hechas sobre la velocidad, se deduce que $\mathbf{v}_A = (u_A, v_A, w_A) = \mathbf{v}_B = (u_B, v_B, w_B)$, y teniendo en cuenta además, que las constantes C_A, C_B coinciden, dado que en el infinito aguas arriba $C_A = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\infty^2 = C_B$, se tiene que,

$$p_B = p_0 + \rho g (\eta - \eta_{ref}) \quad (2.33)$$

Que se puede considerar una versión de la ecuación (2.3) aplicable sobre la superficie de referencia.

De esta forma el algoritmo de resolución del problema, basado en una superficie de referencia η_{ref} , podría ser el siguiente:

- ⇒
1. Se parte de una solución $\eta = \eta_0$.
 2. Se resuelve el problema de mecánica de fluidos en el dominio Ω , imponiendo en la superficie libre $z = \eta_{i-1}$ la condición dinámica dada por (2.33).
 3. Se calcula la nueva posición de la superficie libre $z = \eta_i$ utilizando para ello la ecuación (2.31).
 4. El bucle se cierra volviendo al paso 2.

Por último, se presenta la versión para problemas transitorios del método de transpiración presentado. El algoritmo en este caso, estará dado por,

- ⇒
1. Se parte de una solución $\eta = \eta_0$.
 2. Se resuelve el problema de mecánica de fluidos en el dominio Ω , imponiendo en la superficie libre $z = \eta_{i-1}$ la condición dinámica dada por (2.3).
 3. Se calcula la nueva posición de la superficie libre $z = \eta_i$ utilizando para ello la ecuación siguiente, obtenida a partir de la (2.7),

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} + u_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial x} + v_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial y} = w_{i-1} \quad \text{en} \quad z = \eta_{i-1} \quad (2.34)$$

4. Se actualiza el dominio fluido Ω , teniendo en cuenta la nueva posición de la superficie libre.
5. El bucle se cierra volviendo al paso 2.

Y considerando su implementación simplificada, quedaría como sigue,

- ⇒
1. Se parte de una solución $\eta = \eta_0$.
 2. Se resuelve el problema de mecánica de fluidos en el dominio Ω , imponiendo en la superficie libre $z = \eta_{i-1}$ la condición dinámica dada por (2.33).
 3. Se calcula la nueva posición de la superficie libre $z = \eta_i$ utilizando para ello la ecuación siguiente,

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} + u_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial x} + v_{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial y} = w_{i-1} \quad \text{en} \quad z = \eta_{ref} \quad (2.35)$$

4. El bucle se cierra volviendo al paso 2.

Conviene señalar que la ecuación (2.33) ha sido obtenida a partir de la ecuación de Bernoulli estacionaria, por lo que su aplicación a un problema no estacionario pasa por suponer que $\frac{\partial \phi_A}{\partial t} = \frac{\partial \phi_B}{\partial t}$ (ver figura 2.1). Siendo ϕ la función potencial de velocidades, que se define por $\mathbf{v} = \nabla \phi$, una vez supuesto el movimiento irrotacional del fluido no viscoso.

2.2.6 Comentarios sobre la Integración de la Ecuación de Superficie Libre

Conviene recordar llegado a este punto que la ecuación de Bernoulli, no es una ecuación diferente de las utilizadas para describir el problema de mecánica de fluidos, sino que proviene de simplificar la ecuación de balance de cantidad de movimiento en el caso en el que el movimiento del fluido es irrotacional y no viscoso. Por lo tanto, su aplicación supone una simplificación adicional a la necesaria para derivar la ecuación (2.3); la irrotacionalidad del movimiento. Este hecho puede derivar en problemas de estabilidad del método, sobre todo en zonas donde el movimiento del fluido está lejos de ser irrotacional, como en zonas de la popa del buque donde la turbulencia está plenamente desarrollada.

Por otra parte, es conveniente añadir, que ninguno de los métodos presentados, a excepción del método de transpiración, impone (o lo hacen de forma simplificada a través de la condición de Bernoulli) la ecuación dinámica de superficie libre. Esto puede representar serios problemas de estabilidad, si no se fijan otro tipo de restricciones al problema. Por esta razón, escaparse de las formulaciones clásicas de pequeñas perturbaciones o de la teoría de buques lentos puede presentar grandes problemas en la práctica.

Por otra parte, hay que añadir que existe una versión mejorada de la ecuación (2.8), apta para ser aplicada sobre $z = \eta_{ref}$. Esta forma se obtiene a partir del desarrollo en serie de Taylor, a partir de $z = \eta_{ref}$ y según la dirección Oz , de la velocidad (ver [IOS99]). Esta forma es la siguiente,

$$\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \eta = w + \frac{\partial w}{\partial z} (\eta - \eta_{ref}) \quad \text{en } z = \eta_{ref} \quad (2.36)$$

Si se tiene en cuenta la incompresibilidad del flujo, la ecuación anterior puede escribirse como,

$$\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\mathbf{v}} \eta) - \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\mathbf{v}} \eta_{ref}) = w \quad \text{en } z = \eta_{ref} \quad (2.37)$$

Aunque la ecuación (2.37), sigue siendo una forma simplificada de la (2.8), el hecho de ser una aproximación de mayor orden, le confiere mayor exactitud.

El pequeño recorrido efectuado, a través de los métodos existentes para la resolución de las ecuaciones de superficie libre, nos permite sacar conclusiones que afectan a la elección de la metodología adecuada para resolver el problema planteado para el presente trabajo. En este sentido, se puede ser concluyente. La única formulación que permite resolver el problema con una condición de superficie libre apta para una amplia gama de números de Froude es el método de transpiración. Este método permite resolver el problema imponiendo las condiciones de contorno (2.3) y (2.8) de una manera natural y exacta. Sin embargo, es evidente su complejidad frente a otros métodos, lo cual por sí sólo es una gran limitación que se ha tenido que superar a lo largo del desarrollo del presente trabajo.

2.3 El Problema de Convección Difusión

A lo largo de la sección anterior se han presentado diferentes formas de la condición de contorno de superficie libre. En el presente apartado estudiaremos una característica común a todas ellas: su *carácter convectivo*. Con ese término nos queremos referir tanto a su descripción matemática, como a su comportamiento numérico (ver [OGI97d] [Cod93b] [Oña98a]).

Consideremos la ecuación de convección difusión clásica siguiente [LMTS96] [RG96],

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - v(\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi + \nabla \cdot [\underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla \varphi] + Q = 0 \quad (2.38)$$

Donde v es coeficiente de convección, \mathbf{v} la velocidad, $\underline{\mathbf{K}}$ es la matriz de difusión, Q representa un término de fuente y φ es el campo incógnita del problema. Se muestra evidente que la ecuación anterior coincide con la (2.8), tomando $\underline{\mathbf{K}} = \underline{\mathbf{0}}$ y $v = 1$, e identificando Q con w y φ con η . Dicho de otro modo, la condición cinemática de superficie libre se expresa matemáticamente como una ecuación de convección pura. En este apartado nos dedicaremos al estudio de la dificultad de la solución numérica de este tipo de ecuaciones y presentaremos una metodología general aplicable para su determinación.

La problemática que presenta la resolución de este tipo de ecuaciones es ampliamente conocida. Ya se ha mencionado anteriormente el hecho de que la aproximación típica basada en el Método de los Elementos Finitos de Galerkin aplicada a la ecuación de convección difusión (2.38) presenta inestabilidades para valores moderados y altos del término de convección [Cod93a] [Cod93b] [FFH92] [HB79] [Oña98a] [OGI97a] [GO99]. Este fenómeno se aprecia igualmente en la resolución de esta ecuación por otros métodos de integración como Diferencias Finitas [Hir90] [Daw77] [Rav96], Volúmenes Finitos [Hir90] [IO94] [MC98] o Puntos Finitos [OIZ+97] [GOS+98].

Los métodos tradicionales para eliminar las oscilaciones espurias resultantes están basados en la adición de algún tipo de difusión estabilizadora al problema adicional (normalmente denominada *difusión artificial*). Esta difusión, aparentemente no física, juega dos papeles principales en la resolución de este tipo de ecuaciones. En primer

lugar contrarresta el carácter infradifusivo de la mayoría de los esquemas de integración y en segundo estabiliza la solución numérica en la cercanía de altos gradientes de la variable transportada mediante el suavizado de la solución.

Se cree conveniente remarcar, llegado a este punto, la diferente naturaleza de los dos problemas que encontraremos en la resolución de la ecuación de convección difusión⁷. En primer lugar la inestabilidad inherente a la forma discreta clásica del operador de convección y en segundo lugar la existencia de focos de perturbación en el problema. La inestabilidad, por si sola, no tiene por qué producir problemas. De hecho muchos problemas de la forma (2.38) podrían resolverse utilizando, por ejemplo, las formulaciones clásicas del Método de Elementos Finitos. Sin embargo, la existencia de focos de perturbación (en general gradientes altos de las variables) actúa como un *generador de olas* en la resolución, mientras que el carácter inestable de la solución permite que estas oscilaciones se propaguen por todo el dominio. Si, al contrario, hemos eliminado la inestabilidad de la ecuación de convección, estas oscilaciones no se transmiten y quedan localizadas en la zona de la perturbación. Cabe señalar que, en problemas lineales esta localización de las oscilaciones es cierta, pero en problemas no lineales puede no ser así.

Podríamos simplificar el problema exponiendo que la inestabilidad de la forma discreta de la ecuación (2.38), hace que el operador correspondiente sea *ciego* a las oscilaciones espurias, permitiendo su propagación. Esta ceguera se suele entender en el ámbito de los métodos numéricos en hidrodinámica naval como una simetría del operador que le permite que se transmitan las olas que se propagan tanto corriente arriba como corriente abajo. La solución del problema estaría entonces en perturbar el operador de manera que fuera asimétrico, en el sentido de que no permitiera la propagación de olas aguas arriba. En efecto, el método más clásico de estabilización de la ecuación de convección difusión, conocido como método de *upwind* (o contra corriente) se basa en calcular las derivadas primeras descentradas y en avance [Daw77] [Rav96] [IOS99] [PSS96]. Del mismo modo, puede entenderse que el resto de métodos de estabilización desarrollados, provocan una perturbación en el operador de convección discreto.

Aunque en los últimos años se ha dedicado un gran esfuerzo al desarrollo y justificación de procedimientos de estabilización, la mayoría de los métodos existentes están basados en justificaciones heurísticas. En efecto, aunque la derivación de estos métodos de estabilización y sus correspondientes parámetros está clara en algunos problemas simples unidimensionales, su determinación en la mayoría de los casos prácticos se muestra imposible (ver [Cod96][Cod93a] para una revisión de los métodos existentes).

En este apartado haremos una exposición clara de las causas de la inestabilidad del problema numérico, y presentaremos algunos de los métodos clásicos de estabilización, para acabar con la presentación de un nuevo método de estabilización basado en el concepto de balance (o equilibrio) de flujos sobre un dominio finito. Esta nueva visión del problema, que denominaremos *Cálculo Finitesimal* (en inglés *Finite Increment Calculus*), en adelante *CF*, posibilita una nueva interpretación de los términos

⁷Que, naturalmente, se trasladan al problema de superficie libre.

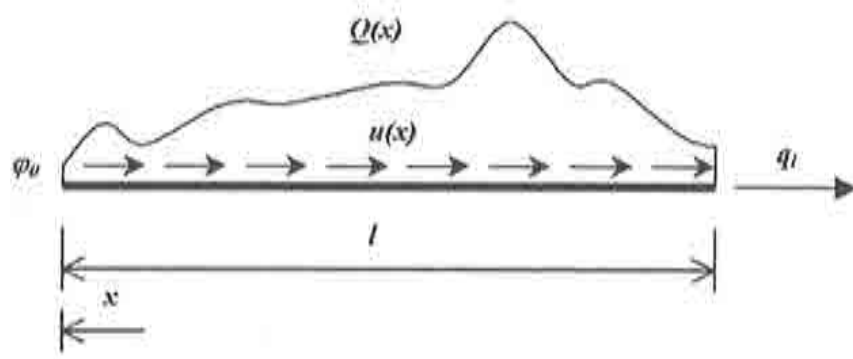


Figura 2.2: Problema de convección difusión unidimensional.

de estabilización como contribución intrínseca y natural a las ecuaciones diferenciales originales, en lugar del concepto de corrección a nivel discreto como es entendido por la mayoría de los métodos utilizados. Además, se puede comprobar que la mayoría de los métodos de estabilización desarrollados hasta la fecha, desde los más rudimentarios, como son la adición directa de difusión, la evaluación contracorriente (*upwind*) y *Petrov-Galerkin* [KNZH80] [Hir90] [Rav96] [Cod93a] [HU96], hasta los más elaborados, como *Streamline Upwind / Petrov Galerkin (SUPG)* [BH82] [HHJ94] [Cod93a] [HU96], *Characteristic Galerkin* [ZC95] [ZMS⁺95] [VCZ97], *Galerkin Least Squares (GLS)* [HFH89] [Sot97] [Cod93a], etc. pueden ser derivados como casos particulares de la formulación general *CF* [Oña98a] [OGI97b] [OGI97d] [OGI97a] y así interpretados en una manera más física (ver [Cod96] para una comparación entre los más conocidos métodos de estabilización existentes).

2.3.1 El Problema Unidimensional de Convección Difusión

El análisis de la ecuación (2.38) es complejo y es conveniente comenzar nuestro estudio con problemas más simples que nos permitan comprender los fenómenos que hemos comentado.

Consideremos el problema de convección difusión en un dominio unidimensional Ω de longitud l . El esquema del problema se muestra en la figura 2.2. Si dividimos el dominio de análisis en diferentes segmentos y tomamos uno de ellos AB de longitud d (ver figura 2.3) sobre el que el balance de flujos debe satisfacerse, podemos escribir, desarrollando las funciones en A en términos de sus valores en B , utilizando una serie de Taylor de 2º orden, que,

$$\begin{aligned} q_A &= q(x_B - d) = q(x_B) - d \left[\frac{dq}{dx} \right]_B + O(d^2) \\ [u\varphi]_A &= [u\varphi](x_B - d) = [u\varphi]_B - d \left[\frac{d(u\varphi)}{dx} \right]_B + O(d^2) \end{aligned} \quad (2.39)$$

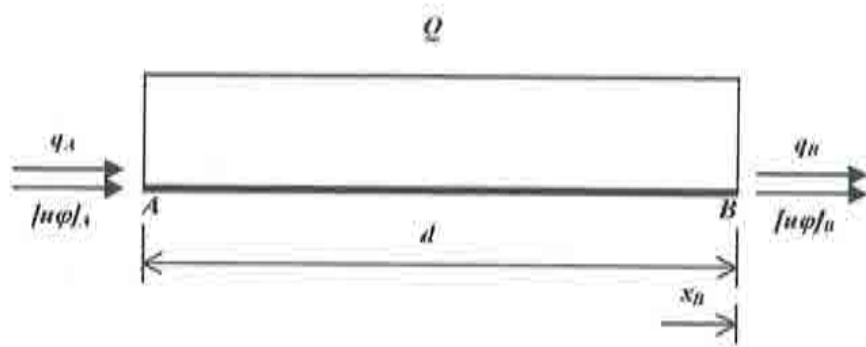


Figura 2.3: Balance en un dominio finito AB.

Donde $u = u(x)$ es una función genérica conocida con el significado físico de velocidad, q puede ser entendido como la tasa de energía transmitida por difusión y $[u\varphi]$ sería su equivalente por convección [HU96], mientras que φ es la variable transportada.

El balance de flujos entre los puntos A y B puede escribirse como:

$$\sum \text{Flujos} = [\text{Flujo en A}] - [\text{Flujo en B}] + \int_{AB} Q(x)dx = 0 \quad (2.40)$$

o bien, suponiendo que $Q(x)$ es aproximadamente constante en el segmento,

$$[q(x_B - d) + v[u\varphi](x_B - d)] - [q(x_B) + v[u\varphi](x_B)] + Qd = 0 \quad (2.41)$$

En (2.40) y (2.41) se ha denominado $Q(x)$ a una fuente distribuida sobre dominio de análisis y v es el coeficiente de transmisión por convección que se supone constante.

Sustituyendo la ecuación (2.39) en (2.41) y teniendo en cuenta que el punto B es arbitrario y por ejemplo $x_B = x$, obtenemos, tras simplificar,

$$-v \frac{d[u\varphi]}{dx} - \frac{dq}{dx} + Q = 0 \quad (2.42)$$

La ley de Fourier [HU96] relaciona la tasa de energía transmitida por difusión con la variación de φ mediante,

$$q = -k \frac{d\varphi}{dx} \quad (2.43)$$

Y finalmente, sustituyendo la ecuación (2.43) anterior, en (2.42) se obtiene la forma convencional de la ecuación de convección difusión.

$$-v \frac{d[u\rho]}{dx} + \frac{d}{dx} \left[k \frac{d\varphi}{dx} \right] + Q = 0 \quad (2.44)$$

En el caso transitorio, la forma de la ecuación puede obtenerse planteando de nuevo la ley de conservación:

$$\sum \text{Flujos} = [\text{Flujo en } A] - [\text{Flujo en } B] + \int_{AB} Q(x)dx = v \frac{d}{dt} \int_{AB} \varphi(x)dx \quad (2.45)$$

Si, al igual que en el caso anterior, hacemos $x_B = x$, podemos obtener, tras simplificar,

$$v \frac{d\varphi}{dt} + v \frac{d[u\rho]}{dx} - \frac{d}{dx} \left[k \frac{d\varphi}{dx} \right] - Q = 0 \quad (2.46)$$

Donde se ha supuesto, como es habitual, que φ y Q son constantes en el dominio de balance AB , y por lo tanto se cumple que

$$\int_{AB} \varphi(x)dx = d\varphi \text{ y } \int_{AB} Q(x)dx = dQ$$

Haciendo una analogía con el problema de transmisión de calor [HU96], en las ecuaciones (2.39)-(2.46) pueden interpretarse $\varphi(x)$ y $u(x)$ como el campo de temperaturas y velocidades, respectivamente. Q y k representarían una fuente de calor y la conductividad térmica del material, y $v = \rho c$, donde ρ es la densidad del material y c su calor específico.

Resolución por el Método Clásico de los Elementos Finitos

La problemática que plantea la resolución de la ecuación de transporte por convección, mediante la formulación clásica de elementos finitos, se puede entender, de manera clara, a través del estudio del problema unidimensional, estacionario y homogéneo de convección-difusión con condiciones de contorno de tipo Dirichlet, definido como:

Encontrar una función $\varphi = \varphi(x)$ tal que,

$$\begin{aligned} u \frac{d\varphi}{dx} - k \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= 0 \quad \text{en } 0 < x < l \\ \varphi(0) &= \varphi_0, \quad \varphi(l) = \varphi_l \end{aligned} \quad (2.47)$$

Donde $k > 0$ y u son constantes y φ_0, φ_l son los valores prescritos de φ en el contorno ($\varphi_0 \neq \varphi_l$). Como puede apreciarse, la ecuación (2.47) puede derivarse fácilmente a partir de la (2.46) tomando $Q = 0$, $v = 1$ y u, k constantes.

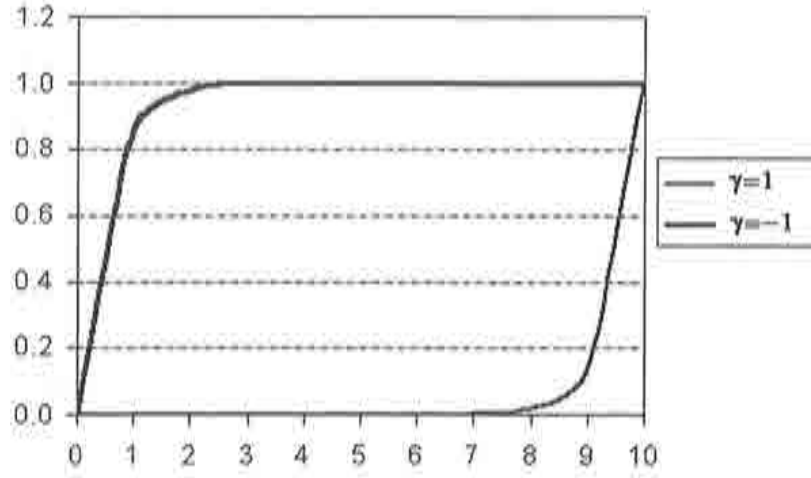


Figura 2.4: Gráfico de $\varphi(x)$ para $l = 10$, $d = 1$.

Consideremos una partición uniforme del intervalo $[0, l]$ dada por $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = l$ donde, evidentemente, $x_{m+1} - x_m = d$ ($m = 0, N-1$).

Por conveniencia para la discusión posterior, escribamos la ecuación (2.47) en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \gamma \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= 0 \quad \text{en } 0 < x < l \\ \varphi(0) &= \varphi_0, \quad \varphi(l) = \varphi_l \end{aligned} \quad (2.48)$$

Donde γ es el denominado *número de Péclet elemental* definido como $\gamma := \frac{ud}{2k}$. Este número adimensional da una idea de la importancia relativa de la convección frente a la difusión. Podemos decir que la convección será dominante cuando $|\gamma|$ sea grande y que dominan los efectos de la difusión para valores pequeños de $|\gamma|$.

La solución analítica de (2.48) es,

$$\varphi(x) = \varphi_0 - (\varphi_0 - \varphi_l) \left(\frac{1 - e^{\frac{2\gamma x}{d}}}{1 - e^{\frac{2\gamma l}{d}}} \right) \quad (2.49)$$

Como se aprecia en la figura 2.4, la función (2.49) tiene importantes gradientes de φ cerca de $x = l$ para valores de $\gamma > 1$ (velocidad positiva) y cerca de $x = 0$ para valores de $\gamma < 1$ (velocidad negativa). De este simple análisis pueden anticiparse problemas numéricos si se pretende aproximar la solución tomando unos pocos puntos de interpolación.

Si la ecuación (2.48) se resuelve mediante el método clásico de Galerkin, usando elementos lineales, se obtiene la siguiente ecuación en diferencias (ver apéndice B),

$$(1 - \gamma)\varphi(x_{i+1}) - 2\varphi(x_i) + (\gamma + 1)\varphi(x_{i-1}) = 0 \quad \text{con } i = 1, N - 1 \quad (2.50)$$

Como puede comprobarse, la misma ecuación (2.50) se obtiene si, para la discretización de la ecuación (2.48), se utilizan diferencias finitas con un esquema centrado (ver apéndice B).

Como se demuestra en el apéndice C, la solución nodalmente exacta en el entorno de un punto x_i , del esquema (2.50) corresponde a una ecuación modificada de la (2.48) original, dada por,

$$\gamma \frac{d\varphi(x_i)}{dx} - \frac{d}{2}(1 - K) \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} = 0 \quad (2.51)$$

Con $K = -\frac{1}{2\gamma^2} [\cosh(2\gamma) - \gamma \sinh(2\gamma) - 1]$, que resulta en una difusión negativa en la ecuación (2.51) para valores de $\gamma > 1.3657$. De lo anterior, se deduce que el error de truncamiento del esquema (2.50) es $E_T = \frac{h}{2} K(\gamma) \left[\frac{d^2\varphi}{dx^2} \right]_i$.

Por otra parte, la ecuación en diferencias (2.50) puede resolverse analíticamente (ver apéndice B), obteniéndose como solución,

$$\varphi(x_i) = C_1 + C_2 \left[\frac{(1 + \gamma)}{(1 - \gamma)} \right]^i \quad (2.52)$$

que como puede comprobarse, debido a la forma del cociente, es oscilatoria para cualquier $|\gamma| > 1$.

Concluyendo, la solución numérica clásica de la ecuación de convección difusión unidimensional (2.47) tiene una forma dada por (2.52) que muestra un carácter oscilatorio irreal para valores de $|\gamma| > 1$. Este carácter es inherente al proceso de discretización llevado a cabo, y podemos pensar en dos tipos de soluciones,

1. Diseñar métodos de discretización más apropiados para la resolución del problema, como es el caso del método de *upwind*, *SUPG* o *GLS*.
2. Modificar la forma de la ecuación diferencial, para que el proceso de discretización clásico ofrezca como solución la correspondiente al problema original, como es el caso de la adición directa de difusión o el método *CF*.

Cabe insistir en que las problemáticas aquí expuestas no son exclusivas de la resolución por elementos finitos o por diferencias finitas, sino que aparecen en otros métodos de resolución de ecuaciones diferenciales como el método de los volúmenes finitos [FMJ93] [MC98] [HMJ93] y el de los puntos finitos [GOS⁺98] [OIZ⁺97].

En este sentido, las dificultades aquí planteadas son directamente trasladables a todas las metodologías desarrolladas hasta la fecha para la resolución del problema de formación de olas del buque.

Estabilización de la Ecuación de Convección Difusión

Como ya se ha mencionado en el apartado anterior, la mayoría de los métodos numéricos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales aplicados a la ecuación de convección difusión, resuelven en realidad una ecuación modificada infradifusiva y no la original. Esto da lugar a inestabilidades numéricas que se aprecian en forma de oscilaciones.

De la discusión anterior, parece obvio, que la solución a la problemática encontrada pasa por la adición de una determinada cantidad de difusión adicional. En efecto, la característica común de la mayoría de los métodos de estabilización desarrollados, es la adición de difusión artificial, con el fin de contrarrestar los efectos indeseables de la discretización.

Una revisión de estos métodos puede encontrarse en [Cod96] [Cod93a] [HU96], pero aquí veremos las ideas básicas que los sustentan.

La idea de añadir difusión a las ecuaciones que se resuelven no es nueva, sino que ya en los años 50 aparecen referencias en el ámbito del método de diferencias finitas [New76]. Originalmente esta difusión era añadida mediante la evaluación de las derivadas primeras descentradas contracorriente (en la dirección opuesta al flujo), los conocidos métodos de *upwind*⁸.

Pero investiguemos un poco en las posibilidades de la adición de difusión a la ecuación original.

Planteemos, en lugar de la ecuación (2.48), una versión modificada de la misma,

$$\begin{aligned} \gamma \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d}{2} (1 + \alpha\gamma) \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= 0 \quad \text{en } 0 < x < l \\ \varphi(0) &= \varphi_0, \quad \varphi(l) = \varphi_l \end{aligned} \quad (2.53)$$

Si al igual que en el caso anterior, aplicamos el método de Galerkin a la ecuación (2.53) (ver apéndice B), se obtiene la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} (1 + \gamma(\alpha - 1))\varphi(x_{i+1}) - 2(1 + \alpha\gamma)\varphi(x_i) + (1 + \gamma(1 + \alpha))\varphi(x_{i-1}) &= 0 \\ \text{con } i &= 1, N - 1 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Como puede comprobarse, la misma ecuación (2.54) se obtiene si para la discretización de la ecuación (2.53) se utilizan diferencias finitas con un esquema centrado (ver apéndice D).

En el apéndice E se demuestra que el error de truncamiento de la ecuación (2.54) es,

$$E_T = \frac{d}{4\gamma^2} [(1 + \alpha\gamma) [\cosh(2\gamma) - 1] - \gamma \sinh(2\gamma)] \quad (2.55)$$

⁸Evidentemente, la evaluación de una derivada primera en avance puede considerarse una adición de difusión, ya que $\frac{d\varphi(x-h)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} - \frac{d}{2} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + O(d^2)$.

Donde, imponiendo como condición para la determinación de α que el error de truncamiento sea nulo, se obtiene de (2.55),

$$\alpha = \coth(\gamma) - \frac{1}{\gamma} \quad (2.56)$$

Es decir, es posible conseguir que la solución numérica de la ecuación (2.53) coincida nodalmente con la solución analítica de la ecuación (2.48) original, tomando $\alpha = \coth(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$ en (2.53). Esta modificación consiste en la adición de cierta cantidad de difusión, en concreto se añade un término de la forma $\frac{\alpha\gamma d}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2}$. Conviene sin embargo señalar que, la ecuación (2.54) puede ser derivada de diversas formas. Entre ellas destaca la modificación de las funciones de forma utilizadas para obtener la forma débil del término convectivo origen de los métodos tipo *Petrov-Galerkin* [BH82] [FFH92] [Cod93a] [Cod96].

Por otra parte, puede comprobarse que la solución analítica de (2.54), es de la forma (ver apéndice D),

$$\varphi_i = C_1 + C_2 \left[\frac{1 + \alpha\gamma + \gamma}{1 + \alpha\gamma - \gamma} \right]^i \quad (2.57)$$

de donde puede deducirse, que la solución es no oscilatoria para valores $\alpha > 1 - \frac{1}{\gamma}$ y $\alpha < -1 - \frac{1}{\gamma}$.

2.3.2 El Método de Cálculo Finitesimal

Acabamos de ver como en el caso del problema de convección difusión homogéneo y unidimensional (2.47), las inestabilidades que aparecen en la solución numérica clásica pueden justificarse por el error de truncamiento producido por el proceso mismo de discretización. Además hemos encontrado que este error de truncamiento tiene forma de difusión negativa para cualquier valor del número de Péclet. Esta demostración práctica provocó en el pasado la aparición de diversos métodos apoyados en la adición de difusión para corregir los efectos indeseables del proceso normal de discretización. Sin embargo, estos métodos sólo tienen su apoyo en el estudio de problemas unidimensionales, de los cuales se conoce solución analítica y difícilmente pueden extenderse a problemas más complejos. Por lo tanto, de lo visto en anteriores secciones no debe sacarse la conclusión de que la adición apropiada de difusión solucionará los problemas de estabilidad del método, sino que, de un modo más general, la modificación adecuada de la ecuación diferencial de convección difusión (2.48), puede resultar en una solución nodalmente exacta, con la aplicación de las técnicas clásicas de resolución de ecuaciones diferenciales, y en concreto, mediante el método de los elementos finitos utilizando el procedimiento clásico de Galerkin. A continuación presentaremos un método que se basa precisamente en mejorar la ecuación diferencial del problema, para poder ser

utilizada en un contexto discreto; este es el denominado *Método de Cálculo Finitesimal* (CF).

Volvamos a retomar el esquema del problema de convección difusión en un dominio unidimensional de longitud l , mostrado en la (2.2). Si dividimos, como anteriormente, el dominio de análisis en diferentes segmentos⁹ y tomamos uno de ellos AB de longitud h (ver figura 2.3) sobre el que el balance de flujos debe satisfacerse, podemos desarrollar las funciones en el punto A en términos de sus valores en B . Si suponemos que el término de transporte convectivo tiene una importante variación sobre el segmento AB , será conveniente utilizar para este desarrollo una serie de Taylor de mayor orden (3^{er} orden en este caso),

$$[u\varphi]_A = [u\varphi](x_B - h) = [u\varphi]_B - h \left[\frac{d(u\varphi)}{dx} \right]_B + \frac{h^2}{2} \left[\frac{d^2(u\varphi)}{dx^2} \right]_B - O(h^3) \quad (2.58)$$

El balance de flujos entre los puntos A y B puede escribirse como en (2.41), y sustituyendo en ella las relaciones (2.59), (2.39) y (2.43), puede obtenerse,

$$-v \frac{d[u\varphi]}{dx} + v \frac{h}{2} \frac{d^2[u\varphi]}{dx^2} - \frac{dq}{dx} + Q = 0 \quad (2.59)$$

Donde al igual que en (2.42) teniendo en cuenta que el punto B es arbitrario, se ha tomado $x_B = x$. Si en (2.59) aplicamos la ley de Fourier (2.43) y suponemos por simplicidad que u es constante y $v = 1$, se obtiene,

$$-u \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d}{dx} \left[\left(k + \frac{uh}{2} \right) \frac{d\varphi}{dx} \right] + Q = 0 \quad (2.60)$$

Como se puede apreciar el efecto de incluir términos de mayor orden en la aproximación del término convectivo (2.58), introduce naturalmente una difusión adicional $\frac{uh}{2}$ en la ecuación (2.60) que gobierna el problema. El valor¹⁰ h en (2.58)-(2.60) debe entenderse como una medida de la longitud del segmento AB sobre el que se aplica el balance de flujos, que no tiene porqué coincidir con la longitud de los elementos en los que se discretiza el dominio unidimensional. De hecho, la longitud de este segmento es una variable libre, por lo que para su determinación se pueden imponer diversas condiciones, como la estabilidad o la exactitud de la solución del problema (2.60).

Otro enfoque del problema nos podría llevar a imponer como condición para la determinación de h , que se cumpliera,

⁹ Este proceso no tiene porqué coincidir con la discretización posterior para la aplicación del método de integración. De hecho esta discretización sólo se hace a nivel conceptual y es equivalente a la utilizada en la derivación clásica de la ecuaciones diferenciales. Ahí toma sentido el nombre de *Cálculo Finitesimal* por oposición al tradicional *Cálculo Infinitesimal*.

¹⁰ El parámetro h se suele denominar *longitud característica* y puede escribirse en la forma $h = 2\hat{t}u$, donde \hat{t} se denomina, en la literatura al respecto, *tiempo intrínseco*. Se hace notar que \hat{t} es el tiempo en el que una partícula recorre una distancia $\frac{h}{2}$ a una velocidad u .

$$[u\varphi]_A = [u\varphi](x_B - h) = [u\varphi]_B - h \left[\frac{d(u\varphi)}{dx} \right]_B + \frac{h^2}{2} \left[\frac{d^2(u\varphi)}{dx^2} \right]_B \quad (2.61)$$

Que es el planteamiento de un problema de minimización de residuos. Efectivamente, basado en esta idea se ha desarrollado un método para la determinación del valor de¹¹ h que permite obtener mediante un esquema iterativo un valor óptimo de este parámetro, asegurando la estabilidad de la solución y una cuasi-exactitud nodal [Oña96] [OGI97a] [OGI97c] [OJI98]. Una introducción a este método se incluye en el apéndice L.

La versión estabilizada de la ecuación transitoria (2.46) se puede derivar sencillamente con los criterios dados, obteniéndose,

$$\frac{d\varphi}{dt} + u \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d}{dx} \left[\left(k + \frac{uh}{2} \right) \frac{d\varphi}{dx} \right] = Q \quad (2.62)$$

Para u constante y $v = 1$.

Generalización del Proceso de Estabilización

Supongamos ahora que los cambios, sobre el dominio de balance AB , tanto en los términos convectivo como en el difusivo son tan importantes que es necesaria una expansión de orden superior en ambos,

$$q_A = q(x_B - h) = q(x_B) - h \left[\frac{dq}{dx} \right]_B + \frac{h^2}{2} \left[\frac{d^2q}{dx^2} \right]_B - O(h^3) \quad (2.63)$$

$$[u\varphi]_A = [u\varphi](x_B - h) = [u\varphi]_B - h \left[\frac{d(u\varphi)}{dx} \right]_B + \frac{h^2}{2} \left[\frac{d^2(u\varphi)}{dx^2} \right]_B - O(h^3)$$

De la misma manera se considera que la fuente $Q(x)$ varía linealmente sobre el dominio AB y pues, despreciando los términos de orden $O(h^3)$, se tiene,

$$\int_{AB} Q(x) dx = \frac{h}{2} [Q(x) + Q(x - h)] = hQ(x) - \frac{h^2}{2} \frac{dQ}{dx} \quad (2.64)$$

Sustituyendo entonces las relaciones (2.63) y (2.64) en la ecuación de balance (2.41) y aplicando la ley de Fourier (2.43), se tiene,

$$-u \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d}{dx} \left[k \frac{d\varphi}{dx} \right] + Q - \frac{h}{2} \frac{d}{dx} \left[-u \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d}{dx} \left[k \frac{d\varphi}{dx} \right] + Q \right] = 0 \quad (2.65)$$

¹¹El parámetro h es común encontrarlo en la literatura al respecto en la forma $h = \alpha l^{(e)}$ donde $l^{(e)}$ es la dimensión característica de los elementos de la malla (su longitud en problema unidimensionales). La determinación del valor óptimo de h o \hat{h} , será equivalente a encontrar un valor óptimo de α .

Donde, si denominamos,

$$r = -u \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d}{dx} \left[k \frac{d\varphi}{dx} \right] + Q \quad (2.66)$$

Podemos escribir (2.65) en una forma más compacta, como,

$$r - \frac{h}{2} \frac{dr}{dx} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \quad (2.67)$$

Del mismo modo, podemos hallar una versión estabilizada de la ecuación transitoria, si consideramos que,

$$\int_{AB} \varphi(x) dx = \frac{h}{2} [\varphi(x) + \varphi(x-h)] = h\varphi(x) - \frac{h^2}{2} \frac{d\varphi}{dx} + O(h^3) \quad (2.68)$$

y despreciamos los términos de orden $O(h^3)$, obtenemos a partir de (2.45),

$$\begin{aligned} \bar{r} - \frac{h}{2} \frac{d\bar{r}}{dx} &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times [0, T] \\ \bar{r} &= -\frac{d\varphi}{dt} - u \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d}{dx} \left[k \frac{d\varphi}{dx} \right] + Q \end{aligned} \quad (2.69)$$

Es importante hacer notar que las ecuaciones (2.67) y (2.69) son *consistentes* con la forma original (2.42) y (2.46), respectivamente, dado que la solución $r(x) = 0$ ($\bar{r}(x) = 0$) cumple ambas.

Las condiciones de contorno aplicables a las ecuaciones (2.67) y (2.69) serán discutidas en los siguientes apartados.

2.3.3 El Problema Multidimensional de Convección Difusión

Ahora extenderemos los conceptos vistos en la sección anterior a la solución del problema estacionario bidimensional de convección difusión definido como sigue,

Encontrar una función $\varphi = \varphi(x)$ tal que,

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\nabla}) \varphi - \bar{\nabla} \cdot [\underline{\mathbf{K}} \cdot \bar{\nabla} \varphi] &= Q \quad \text{en} \quad \Omega \\ \varphi &= g \quad \text{en} \quad \Gamma_D \\ \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{K}} \cdot \bar{\nabla} \varphi &= q_D \quad \text{en} \quad \Gamma_{N_D} \\ \mathbf{n} \cdot [\bar{\mathbf{v}} \varphi - \underline{\mathbf{K}} \cdot \bar{\nabla} \varphi] &= q_T \quad \text{en} \quad \Gamma_{N_T} \end{aligned} \quad (2.70)$$

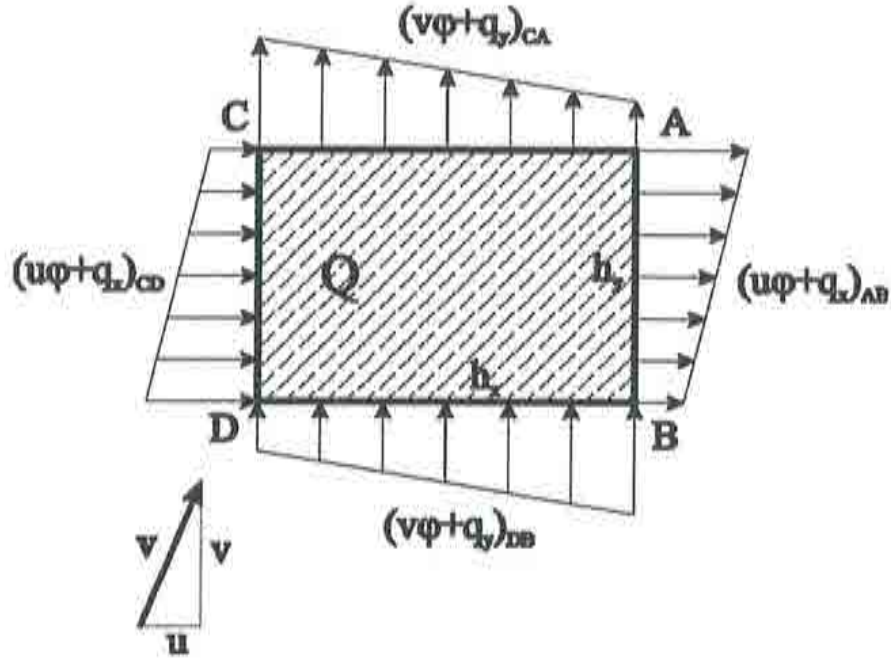


Figura 2.5: Dominio de balance para el problema bidimensional de convección difusión.

Donde, al igual que en (2.38), $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = (u, v)$ la velocidad, $\underline{\mathbf{K}} = \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x})$ es la matriz de difusión, $Q = Q(\mathbf{x})$ representa un término de fuente, $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ es el campo incógnita del problema y $g = g(\mathbf{x})$ son los valores prescritos de φ en la parte del contorno (Γ_D) donde se prescriben las condiciones tipo Dirichlet. Del mismo modo $q_D = q_D(\mathbf{x})$ son los valores prescritos del flujo difusivo en Γ_{N_D} y $q_T = q_T(\mathbf{x})$ las imposiciones sobre el flujo total en Γ_{N_T} . Se cumple que $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_{N_D} \cup \Gamma_{N_T}$.

Se hace notar el paralelismo de la anterior ecuación (2.70) con la forma de la condición cinemática de superficie libre (2.8).

Si consideramos un dominio de balance $ABCD$ (ver figura 2.5) rectangular, podemos escribir las ecuaciones de balance para los flujos horizontales y verticales,

$$\begin{aligned} \sum \text{Flujos horizontales} &= \frac{1}{2} [FH(x_C, y_C) + FH(x_D, y_D)] h_y - \\ &\quad - \frac{1}{2} [FH(x_A, y_A) + FH(x_B, y_B)] h_y \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} \sum \text{Flujos verticales} &= \frac{1}{2} [FV(x_B, y_B) + FV(x_D, y_D)] h_x - \\ &\quad - \frac{1}{2} [FV(x_A, y_A) + FV(x_C, y_C)] h_x \end{aligned} \quad (2.72)$$

Donde se ha denominado $FH(x_I, y_I)$ y $FV(x_I, y_I)$ a los flujos horizontales y verticales, respectivamente, en el punto (x_I, y_I) .

Podemos escribir las ecuaciones (2.71) y (2.72) en la siguiente forma más conveniente, si referimos todos los valores al punto A,

$$\begin{aligned} \sum \text{Flujos horizontales} &= \frac{1}{2} [FH(x - h_x, y) + FH(x - h_x, y - h_y)] h_y - \\ &\quad - \frac{1}{2} [FH(x, y) + FH(x, y - h_y)] h_y \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \sum \text{Flujos verticales} &= \frac{1}{2} [FV(x, y - h_y) + FV(x - h_x, y - h_y)] h_x - \\ &\quad - \frac{1}{2} [FV(x, y) + FV(x - h_x, y)] h_x \end{aligned} \quad (2.74)$$

Por otra parte, es evidente que se pueden obtener las siguientes expansiones en serie de Taylor,

$$\begin{aligned} FH(x - h_x, y) &= FH(x, y) - h_x \frac{dFH}{dx} + \frac{h_x^2}{2} \frac{d^2 FH}{dx^2} - 0(h_x^3) \\ FH(x, y - h_y) &= FH(x, y) - h_y \frac{dFH}{dy} + \frac{h_y^2}{2} \frac{d^2 FH}{dy^2} - 0(h_y^3) \\ FH(x - h_x, y - h_y) &= FH(x, y) - h_x \frac{dFH}{dx} + \frac{h_x^2}{2} \frac{d^2 FH}{dx^2} - \\ &\quad - h_y \frac{dFH}{dy} + \frac{h_y^2}{2} \frac{d^2 FH}{dy^2} + h_x h_y \frac{d^2 FH}{dx dy} - 0(h_x^3, h_y^3) \\ FV(x - h_x, y) &= FV(x, y) - h_x \frac{dFV}{dx} + \frac{h_x^2}{2} \frac{d^2 FV}{dx^2} - 0(h_x^3) \\ FV(x, y - h_y) &= FV(x, y) - h_y \frac{dFV}{dy} + \frac{h_y^2}{2} \frac{d^2 FV}{dy^2} - 0(h_y^3) \\ FV(x - h_x, y - h_y) &= FV(x, y) - h_x \frac{dFV}{dx} + \frac{h_x^2}{2} \frac{d^2 FV}{dx^2} - \\ &\quad - h_y \frac{dFV}{dy} + \frac{h_y^2}{2} \frac{d^2 FV}{dy^2} + h_x h_y \frac{d^2 FV}{dx dy} - 0(h_x^3, h_y^3) \end{aligned} \quad (2.75)$$

Sustituyendo los desarrollos (2.75) anteriores, en las ecuaciones (2.73) y (2.74), se obtiene, si se desprecian los términos de orden $0(h^3)$,

$$\begin{aligned} \sum \text{Flujos horizontales} &= -h_x h_y \frac{dFH}{dx} + \\ &\quad + \frac{h_y h_x^2}{2} \frac{d^2 FH}{dx^2} + h_x h_y^2 \frac{d^2 FH}{dx dy} \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \sum \text{Flujos verticales} &= -h_x h_y \frac{dFV}{dy} + \\ &\quad + \frac{h_x h_y^2}{2} \frac{d^2 FV}{dy^2} + h_y h_x^2 \frac{d^2 FV}{dx dy} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Evidentemente el balance de las fuentes, suponiendo que su distribución es lineal en el dominio $ABCD$, está dado por,

$$\begin{aligned}
\sum \text{Fuentes} &= Q \left(\frac{1}{4} (x_A + x_B + x_C + x_D), \frac{1}{4} (y_A + y_B + y_C + y_D) \right) h_x h_y = \\
&= Q \left(x - \frac{h}{2}, y - \frac{h}{2} \right) h_x h_y = \\
&= \left[Q(x, y) - \frac{h_x}{2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{h_y}{2} \frac{\partial Q}{\partial y} \right] h_x h_y
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Donde, de la misma manera, se han despreciado los términos de orden $0(h^3)$.

De este modo, podemos escribir la ecuación de balance global en el dominio $ABCD$ como,

$$\sum \text{Flujos horizontales} + \sum \text{Flujos verticales} + \sum \text{Fuentes} = 0 \tag{2.79}$$

Si además, tenemos en cuenta que $FV(x, y) = u\varphi + q_x$ y $FH(x, y) = v\varphi + q_y$ y sustituyendo en (2.79) las relaciones (2.76)-(2.78), se obtiene, tras algunas simplificaciones,

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{v}\varphi) + \bar{\nabla} \cdot \bar{q} - Q - \frac{1}{2} (\bar{h} \cdot \bar{\nabla}) [\bar{\nabla} \cdot (\bar{v}\varphi) + \bar{\nabla} \cdot \bar{q} - Q] = 0 \tag{2.80}$$

Donde si despreciamos los términos de las derivadas de la velocidad, tenemos que,

$$(\bar{v} \cdot \bar{\nabla}) \varphi + \bar{\nabla} \cdot \bar{q} - Q - \frac{1}{2} (\bar{h} \cdot \bar{\nabla}) [(\bar{v} \cdot \bar{\nabla}) \varphi + \bar{\nabla} \cdot \bar{q} - Q] = 0 \tag{2.81}$$

Donde se ha denominado, $\bar{q} = (q_x, q_y)$ y $\bar{h} = (h_x, h_y)$.

La ley de Fourier [HU96] en problemas bidimensionales, toma la forma,

$$\bar{q} = -\underline{\underline{K}} \cdot \bar{\nabla} \varphi \tag{2.82}$$

siendo $\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$ la matriz de difusión bidimensional. Sustituyendo (2.82) en (2.81) obtenemos la forma de la ecuación bidimensional de convección difusión estabilizada,

$$\begin{aligned}
r - \frac{1}{2} (\bar{h} \cdot \bar{\nabla}) r &= 0 \quad \text{en } \Omega \\
r &= (\bar{v} \cdot \bar{\nabla}) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\underline{K}} \cdot \bar{\nabla} \varphi) - Q
\end{aligned} \tag{2.83}$$

De igual manera podemos obtener la versión transitoria de la ecuación (2.83) anterior. En este caso, la ecuación de balance global en el dominio $ABCD$ puede escribirse como,

$$\begin{aligned} \sum \text{Flujos horizontales} + \sum \text{Flujos verticales} + \\ + \sum \text{Fuentes} = \frac{d}{dt} \iint_{ABCD} \varphi(x) dx \end{aligned} \quad (2.84)$$

Por otra parte, si suponemos lineal la variación de $\varphi(x)$ en el dominio $ABCD$, podemos escribir que,

$$\begin{aligned} \iint_{ABCD} \varphi(x) dx &= \varphi \left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} \right) h_x h_y = \\ &= \varphi \left(x - \frac{h}{2}, y - \frac{h}{2} \right) h_x h_y = \\ &= \left[\varphi(x, y) - \frac{h_x}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{h_y}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] h_x h_y \end{aligned} \quad (2.85)$$

Y sustituyendo las ecuaciones (2.76), (2.77), (2.78) y (2.85) en (2.84), tenemos, tras simplificar,

$$\begin{aligned} \bar{r} - \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{h}} \cdot \bar{\nabla}) \bar{r} &= 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \\ \bar{r} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\nabla}) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\mathbf{K}} \cdot \bar{\nabla} \varphi) - Q \end{aligned} \quad (2.86)$$

Se hace evidente que la extensión de las formas estabilizadas de la ecuación de convección difusión a problemas tridimensionales es inmediata, se puede comprobar de manera sencilla que en este caso las ecuaciones quedan como sigue,

$$\begin{aligned} r - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) r &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ r &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla \varphi) - Q \end{aligned} \quad (2.87)$$

en el caso estacionario, y,

$$\begin{aligned} \bar{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \bar{r} &= 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \\ \bar{r} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla \varphi) - Q \end{aligned} \quad (2.88)$$

en el caso del problema transitorio.

Donde, en ambos casos se ha tomado¹² $\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z)$.

Al objeto de ser consistentes en el planteamiento, es necesario señalar que también las condiciones de contorno del problema deben ser modificadas. En el apéndice H se demuestra que la ecuación de balance de flujo en el contorno resulta en unas condiciones tipo Neumann modificadas en la forma,

$$-\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla \varphi - q_D - \frac{1}{2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) r = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_{ND} \quad (2.89)$$

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{v} \varphi - \underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla \varphi] - q_T - \frac{1}{2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) r = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_{NT} \quad (2.90)$$

Que deben sustituir, en el planteamiento estabilizado, a las incluidas en (2.70).

2.3.4 Aplicación del Método de los Elementos Finitos al Problema Estabilizado

La ecuación de convección difusión estabilizada dada en (2.87) (y en (2.88) en su forma transitoria) ha sido obtenida a partir del concepto físico de balance en un dominio finito. Por lo que esta forma debe entenderse como una ecuación diferencial de mayor orden, que puede ser utilizada para resolver el problema planteado mediante cualquiera de las técnicas de integración de ecuaciones diferenciales.

El problema estabilizado que hemos planteado, se define como sigue¹³,

Encontrar una función $\varphi = \varphi(x)$ tal que,

$$r - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) r = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \quad (2.91)$$

$$\varphi = g \quad \text{en} \quad \Gamma_D$$

$$-\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla \varphi - q_D - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} r = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_{ND}$$

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{v} \varphi - \underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla \varphi] - q_T - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} r = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_{NT}$$

con $r = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla \varphi) - Q$.

La forma débil de la ecuación (2.91) es,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\psi (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi - \nabla \psi \cdot (\underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla \varphi)] d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{h} \psi) [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla \varphi)] d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \psi Q d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{h} \psi) Q d\Omega - \int_{\Gamma_{ND}} \psi q_D d\Gamma - \int_{\Gamma_{NT}} \psi q_T d\Gamma \end{aligned} \quad (2.92)$$

¹²Se suele denominar a $\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z)$ vector de longitudes características.

¹³Comparar con la formulación típica dada en (2.70).

donde $\psi \in \Psi$, siendo Ψ el espacio de las funciones de forma, definido por

$$\Psi := \{\psi \in H^1(\Omega) \mid \psi = 0 \text{ en } \Gamma_D\}$$

Del mismo modo la solución φ pertenecerá al espacio Φ de funciones de prueba, definido por

$$\Phi := \{\varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi = g \text{ en } \Gamma_D\}$$

La ecuación (2.92) se ha obtenido integrando¹⁴ por partes el término difusivo y el de estabilización, para posteriormente imponer las condiciones de contorno de Neumann.

Si en la ecuación (2.92) tomamos¹⁵ $\mathbf{h} = 2\hat{t}\mathbf{v}$, y despreciamos los términos que incluyen las derivadas de \mathbf{h} , tenemos,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\psi (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi - \nabla \psi \cdot (\underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla \varphi)] d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \hat{t} (\mathbf{v} \cdot \nabla \psi) [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla \varphi)] d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \psi Q d\Omega + \int_{\Omega} \hat{t} (\mathbf{v} \cdot \nabla \psi) Q d\Omega - \int_{\Gamma_{ND}} \psi q_D d\Gamma - \int_{\Gamma_{NT}} \psi q_T d\Gamma \end{aligned} \quad (2.93)$$

donde podemos reconocer la forma clásica del método *Streamline Upwind / Petrov Galerkin (SUPG)*. Como se aprecia, se ha obtenido esta expresión, haciendo que el vector \mathbf{h} tome la dirección de la velocidad, lo cual evidentemente es un caso particular del método *CF* más general. Lo mismo puede deducirse para varios de los métodos de estabilización más conocidos, cuya expresión se puede derivar de restricciones a la forma general dada en (2.92). En [Oña96] [Oña98b] se discute detalladamente este aspecto.

Por último, sólo llamar la atención sobre el segundo término de la ecuación (2.93) anterior. Este puede escribirse en la forma,

$$\int_{\Omega} \hat{t} |\mathbf{v}|^2 \nabla \psi \cdot \left(\frac{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \cdot \nabla \varphi d\Omega + \int_{\Omega} \hat{t} (\mathbf{v} \cdot \nabla \psi) [\nabla \cdot (\underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla \varphi)] d\Omega \quad (2.94)$$

Donde, mirando el primer término, puede observarse el aspecto más relevante del método *SUPG*; la adición de una difusión de valor $\hat{t} |\mathbf{v}|^2$ según las líneas de corriente. Por lo que, volviendo a la ecuación original (2.92), la elección en ella de $\mathbf{h} = 2\hat{t}\mathbf{v}$ (en la dirección de \mathbf{v}), produce la adición de una difusión $\hat{t} |\mathbf{v}|^2$ según la velocidad.

¹⁴ Hay que señalar que, para llegar a esta forma, en este caso no es necesario hacer la suposición $r = 0$ en Γ como ocurre en el caso de los métodos *SUPG* o *GLS*, pues estos efectos son corregidos por la forma estabilizada de las condiciones de contorno tipo Neumann.

¹⁵ Donde \hat{t} es el denominado *tiempo intrínseco*.

2.3.5 Determinación de las Longitudes Características

En los anteriores apartados hemos presentado el *método de cálculo finitesimal* (CF) como base para la derivación de esquemas estabilizados, en particular, de la ecuación de convección-difusión. Este método da una explicación para la mayoría de los esquemas propuestos para este mismo fin, muchos de los cuales fueron presentados de manera heurística, sin ninguna base física.

Es importante ahondar en el hecho de que el método planteado es consistente, es decir φ , solución del problema continuo estabilizado (2.91), también es solución del problema original (2.70). Puesto que, dada la solución única φ_1 del problema (2.91) debe cumplir¹⁶ $r = 0$ y a la inversa, si φ_2 es solución de (2.70) entonces $r = 0$ y se cumple (2.91).

Sin embargo, para completar el esquema estable aún nos queda por abordar una cuestión básica. La determinación de las longitudes características. Aparentemente, la justificación del método puede indicar una relación de estos parámetros con el tamaño de los elementos en la discretización, pero como se ha comprobado, la relación entre ambos depende sustancialmente del problema particular. En concreto, el número de Péclet parece tener mucha influencia en el valor óptimo de estos parámetros.

Aunque se ha llevado a cabo un importante trabajo para la obtención de un algoritmo iterativo que permita obtener la distribución óptima de las longitudes características en un problema concreto [Oña96] [OGI97d] [OGI97b] [OGI98] [OJI98] [OGI97a] el alto coste computacional que esto requiere, lo hace inviable para ser aplicado en el ámbito de este proyecto. Una introducción a esta metodología se presenta en el apéndice L.

Se hace patente pues, la necesidad de completar el esquema con una elección adecuada del vector \mathbf{h} . La simple elección hecha en (2.93) de¹⁷ $\mathbf{h} = 2\hat{t}\mathbf{v}$ no es suficiente. Efectivamente, la solución que ofrece el método SUPG, es óptima o casi-óptima, para soluciones suficientemente *suaves* [HMM86] [HFH89], sin embargo, no se puede afirmar lo mismo en cercanía de capas límites o, en general, en presencia de altos gradientes. Por este hecho, en ciertos problemas, pueden aparecer oscilaciones localizadas, que en algunos casos impiden la convergencia, sobre todo en problemas muy no lineales. Sin embargo, del estudio de los resultados sobre la convergencia del método SUPG, pueden sacarse conclusiones de interés para nuestra discusión. Planteemos en primer lugar la resolución del problema siguiente,

Encontrar una función $\varphi = \varphi(x)$ tal que,

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi - k \Delta \varphi &= Q \quad \text{en } \Omega \\ \varphi &= g \quad \text{en } \Gamma_D \\ \mathbf{n} \cdot k \cdot \nabla \varphi &= q_D \quad \text{en } \Gamma_{N_D} \\ \mathbf{n} \cdot [\underline{\mathbf{y}} \varphi + k \cdot \nabla \varphi] &= q_T \quad \text{en } \Gamma_{N_T} \end{aligned} \tag{2.95}$$

¹⁶Pues, evidentemente, esta es solución del problema estabilizado.

¹⁷donde \hat{t} puede ser obtenido basandose en criterios de estabilidad (ver [HMM86]).

donde por simplicidad se ha tomado $\underline{\mathbf{K}} = k\underline{\mathbf{I}}$. Si aplicamos para la resolución del sistema (2.95) el método *SUPG* definido por (2.93), el planteamiento del problema queda como sigue,

Encontrar $\varphi_h \in \Phi_h \subset \Phi := \{\chi \in H^1(\Omega) | \chi = g \text{ en } \Gamma_D\}$ tal que $\forall \psi \in \Psi_h$, se cumple que,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\psi (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi_h + k (\nabla \psi \cdot \nabla \varphi_h)] d\Omega + \\ & + \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \hat{t}(\mathbf{v} \cdot \nabla \psi) [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi_h - k \Delta \varphi_h] d\Omega = \int_{\Omega} \psi Q d\Omega + \\ & + \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \hat{t}(\mathbf{v} \cdot \nabla \psi) Q d\Omega - \int_{\Gamma_{ND}} \psi q_D d\Gamma - \int_{\Gamma_{NT}} \psi q_T d\Gamma \end{aligned} \quad (2.96)$$

donde $\psi \in \Psi_h \subset \Psi := \{\chi \in H^1(\Omega) | \chi = 0 \text{ en } \Gamma_D\}$ y Ψ_h, Φ_h son espacios de elementos finitos formados por polinomios de grado m . En (2.96) se ha denominado Ω^e al dominio correspondiente al elemento e .

En (2.96), las segundas integrales de ambos miembros (términos de estabilización) son calculadas sólo en el interior de los elementos¹⁸. Esto se debe a que a las funciones de forma ψ no se les exige continuidad en las derivadas primeras¹⁹, y por ello el término $k \Delta \varphi_h$ no está definido en el contorno de los elementos. Hay que hacer notar, que estos términos desaparecen si se utilizan elementos de primer orden, pero no en el caso general. Por otra parte, tal y como se ha hecho en (2.96), es normal escribir todo el término de estabilización en esa forma, no sólo aquella parte que involucra derivadas segundas. Aunque esto no es estrictamente necesario, esta forma de calcular las integrales de los términos de estabilización es ampliamente usada en la práctica [HFH89] [Cod93a] [Sot97] [Oña96] [FFH92] [ZT94a] [VCZ97]. Por otra parte, dado que el vector de longitudes características $\mathbf{h} = \hat{t}\mathbf{v}$, se suele evaluar en el centroide de los elementos, suponiendo que es constante en su interior, en (2.96) se han eliminado los términos que involucran derivadas de \mathbf{h} .

Con el planteamiento del problema hecho en (2.96), se puede demostrar [Cod93a,

¹⁸Si N_i es una función continua en un dominio Ω y M es discontinua entre elementos y pues $\frac{dM}{dx_i}$ no esta definida en los lados de los elementos, se puede demostrar que, en un sentido distribucional [Oña98b, pp. 18-19],

$$\int_{\Omega} N_i \frac{dM}{dx_i} d\Omega = - \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \frac{dN_i}{dx_i} M d\Omega + \int_{\partial\Omega} N_i M n_i d(\partial\Omega)$$

Siendo n_i la normal en el contorno $\partial\Omega$.

¹⁹Continuidad C^0 .

pp. 1.10-14] [HFH89] que, si tomamos $\hat{t} = \frac{\alpha^e(\gamma)h^e}{2|v|}$, siendo,

$$\alpha^e(\gamma) = \begin{cases} \kappa_1 & \text{si } \gamma \rightarrow \infty \\ \kappa_2\gamma & \text{si } \gamma \rightarrow 0 \end{cases}$$

donde κ_1, κ_2 son constantes genéricas dependientes del problema concreto, se cumple que,

$$\|\varphi - \varphi_h\|_{SUPG}^2 \leq Ch^{2l}$$

$$2l = \begin{cases} 2m & \text{si } \gamma \rightarrow \infty \\ 2m+1 & \text{si } \gamma \rightarrow 0 \end{cases}$$

Siendo φ , *suficientemente suave*, la solución del problema continuo, mientras que φ_h lo es del problema definido en (2.96). La norma $\|\cdot\|_{SUPG}$ es la utilizada para demostrar la estabilidad de la forma asociada al primer miembro de (2.96) (ver [Cod93a, pp. 1.10-14] [HFH89, pp. 178-183]). Como se aprecia, el método es casi óptimo (el error de interpolación es de orden $m+1$).

Desafortunadamente, la restricción de suavidad, de la solución del problema continuo, es una exigencia demasiado dura en la práctica. La aparición de gradientes importantes de las variables, por la presencia de capas límites o efecto de los contornos, por ejemplo, no permite que el resultado anterior sea aplicable²⁰. De hecho, el problema se debe a que el estimador $\|\cdot\|_{SUPG}$ no es puntual²¹, lo cual se traduce en la práctica en que, aún habiendo convergencia global, localmente podemos encontrar oscilaciones.

En nuestra búsqueda de un método estable, podemos hallar otra justificación de la naturaleza de esas oscilaciones, en la falta de monotonía del método SUPG. En problemas no estacionarios, un esquema numérico que evite oscilaciones localizadas debe ser monótono o preservar monotonía [Cod93a, pp. 1.10-14]. Un método numérico se dice que es monótono si la solución numérica en cada paso de tiempo mantiene el signo del instante anterior para cada nodo de la malla espacial. De la misma manera se dice que un esquema preserva monotonía si mantiene la de los datos iniciales. Existe una importante limitación práctica al diseño de un método numérico de alto orden de exactitud, con propiedades de monotonía. El teorema de Godunov [LeV90] establece que un método lineal, que preserve monotonía, como máximo es de primer orden de exactitud. Por lo tanto, la única manera de diseñar un método que pueda tener mayor precisión en la zona donde la solución es suave y evite las oscilaciones, allí donde la solución tiene importantes gradientes, es pensar en un algoritmo no lineal. Es decir, un esquema numérico que dependa de la solución numérica.

²⁰En realidad, el resultado anterior es aplicable, aún en esos casos, lejos de las zonas con gradientes importantes.

²¹Un estimador puntual estaría basado en la norma $\|f(x)\|_{L_\infty(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$

La convergencia puntual y uniforme de la ecuación de convección difusión está ligada al cumplimiento del principio del máximo discreto (*PMD*, ver [Cod93a] [Sot97]). Este principio establece que la solución de la ecuación de convección difusión tiene su máximo en el contorno cuando el término de fuente es mayor o igual que cero. Es evidente, que la solución continua cumple con este principio. Su estudio en el caso discreto concluye con el hecho de que el cumplimiento de este principio asegura monotonía y estabilidad uniforme del algoritmo numérico.

El análisis de este principio permite llegar a la conclusión de que, en general, es imposible cumplir el *PMD* con la formulación *SUPG* [Cod93a, pp. 3.14-15]. Por otra parte el análisis de diferentes casos prácticos [Cod93a, pp. 3.11-15] permite comprobar que mientras la adición de difusión según las líneas de corriente no asegura la estabilidad de la solución, ésta se puede hallar con el añadido de difusión homogénea de la forma $\frac{1}{2}\alpha^e h |\mathbf{v}_{||}|$ siendo $\alpha^e(\gamma_{||}) = \kappa_3 - \frac{1}{\gamma_{||}}$, con κ_3 una constante genérica dependiente del problema, $\mathbf{v}_{||} = \frac{\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi_h}{|\nabla \varphi_h|^2} \nabla \varphi_h$ y $\gamma_{||} = \frac{|\mathbf{v}_{||}|}{2k}$.

De todo lo anterior, podemos sacar las siguientes conclusiones,

1. Del análisis del método *SUPG*: Este método es cuasi óptimo si $\alpha^e(\gamma) = \begin{cases} \kappa_1 & \text{si } \gamma \rightarrow \infty \\ \kappa_2 & \text{si } \gamma \rightarrow 0 \end{cases}$ pero requiere que la solución del problema continuo, φ , sea suave. Por otra parte si en la solución no hay importantes gradientes, el método *SUPG* es el más apto.
2. Del teorema de Godunov: Un método numérico que preserve monotonía y sea de orden mayor que uno debe ser no lineal, esto es depender de su solución. Debemos desarrollar un método no lineal.
3. Del análisis del *PMD*: La simple adición de difusión según las líneas de corriente (*SUPG*) no es suficiente para que se cumpla. Sin embargo, la adición de difusión homogénea del tipo $\frac{1}{2}\alpha^e h |\mathbf{v}_{||}|$ siendo $\alpha^e(\gamma_{||}) = \kappa_3 - \frac{1}{\gamma_{||}}$, es suficiente para el cumplimiento del *PMD* en varios casos estudiados. Parece que en determinadas circunstancias es necesario añadir difusión homogénea al problema para asegurar su estabilidad.

A partir de las anteriores conclusiones es posible establecer una forma básica para el vector de longitudes características. En primer lugar vamos a escribir el vector \mathbf{h} en una forma más apropiada (ver figura 3.2), basada en la siguiente descomposición^{22,23},

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \mathbf{h}^* + \mathbf{h}_{\nabla \varphi} + \mathbf{h}_s \\ \mathbf{h}^* &= \kappa_1 \mathbf{v}, \quad \mathbf{h}_{\nabla \varphi} = \kappa_2 \nabla \varphi_h, \quad \mathbf{h}_s = \kappa_3 \mathbf{s} \end{aligned} \tag{2.97}$$

Basándonos en la anterior descomposición (2.97), y despreciando el término residual $\kappa_3 \mathbf{s}$, podemos escribir que,

²²Si $\nabla \varphi // \mathbf{v}$ entonces $\mathbf{h} = \kappa_1 \mathbf{v} + \kappa_3 \mathbf{s}$.

²³En el caso bidimensional la descomposición queda como $\tilde{\mathbf{h}} = \kappa_1 \tilde{\mathbf{v}} + \kappa_2 \tilde{\nabla} \varphi$.

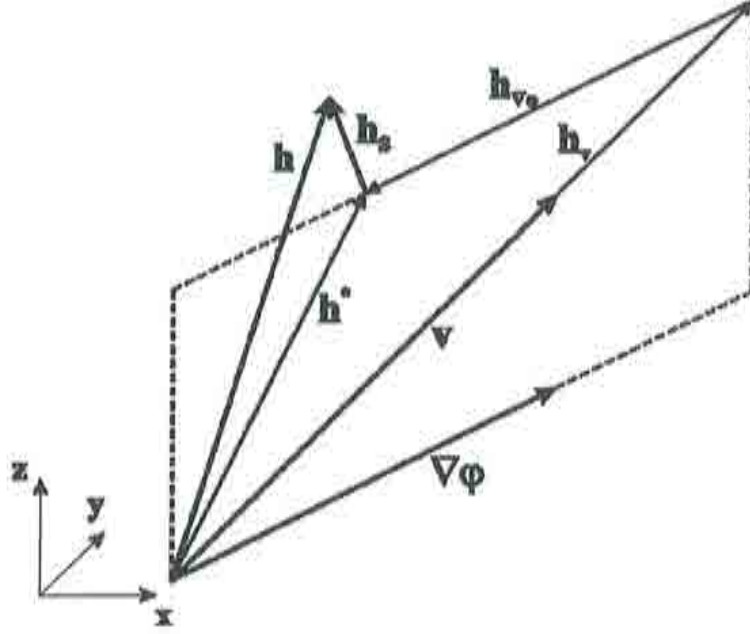


Figura 2.6: Descomposición vectorial de \mathbf{h} .

$$\mathbf{h} = \alpha' h^e \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} + \beta' h^e \frac{\mathbf{v}_r}{|\mathbf{v}_r|} \quad (2.98)$$

Siendo h^e es una medida del tamaño del elemento²⁴ y \mathbf{v}_r se define por,

$$\mathbf{v}_r = \frac{\mathbf{r}(\varphi_h)}{|\nabla\varphi_h|^2} \nabla\varphi_h \quad (2.99)$$

La forma (3.64) de descomposición del vector \mathbf{h} cumple varias de los requisitos que nos habíamos fijado para la determinación del parámetro de estabilización. Para verlo en detalle, sustituyamos la anterior descomposición (3.64) en la ecuación estabilizada original (2.91). Esto resulta en,

$$r - \frac{h^e}{2|\mathbf{v}|} \alpha' (\mathbf{v} \cdot \nabla) r + \frac{h^e}{2|\mathbf{v}_r|} \beta' (\mathbf{v}_r \cdot \nabla) r = 0 \quad (2.100)$$

Como se aprecia, la ecuación escrita en esa forma incorpora un término $\frac{h^e}{2|\mathbf{v}|} \alpha' (\mathbf{v} \cdot \nabla) r$ equivalente al de la formulación *SUPG*. La incorporación de este término permitirá al

²⁴El índice e indica que su valor será elemental, aunque evidentemente, esto es una simplificación. Para su cálculo pueden utilizarse, por ejemplo las recomendaciones presentadas en [Sot97].

esquema recoger todas las propiedades de convergencia que se han demostrado para el método *SUPG*. Gracias a la descomposición hecha en (3.64), se ha incorporado un término de la forma $\frac{h^e}{2|\mathbf{v}_r|} \beta'(\mathbf{v}_r \cdot \nabla) r$ cuyas propiedades se estudian en [Cod93a] y cuya derivación se apoya en el método de estabilización propuesto en [GDdC88]. Como se verá, esta expresión incorpora en la forma débil del problema un término equivalente a una difusión homogénea, lo cual, como vimos, era deseable para cumplir con el *PMD*. Hay que señalar además que, este sumando toma la forma de los métodos denominados de captura de discontinuidades [HM86] [Cod93a] [Sot97], y debe añadir al esquema las propiedades de estabilidad ante gradientes elevados de la variable φ que requeríamos. Cabe señalar, haciendo referencia al mencionado teorema de Godunov, que el esquema desarrollado es no lineal, pues en el tercer término \mathbf{v}_r depende de la solución del problema.

El último aspecto que debemos considerar es la definición de las funciones α', β' . Para ello, emplearemos las deducciones presentadas anteriormente, según esto, se deben cumplir las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \alpha'(\gamma) &= \begin{cases} \kappa_1 & \text{si } |\gamma| \rightarrow \infty \\ \kappa_2 \gamma & \text{si } \gamma \rightarrow 0 \end{cases} \\ \beta'(\gamma_{||}) &= \kappa_3 - \frac{1}{\gamma_{||}} \end{aligned} \quad (2.101)$$

Pero además es interesante, que seamos capaces de recuperar la forma óptima del método *SUPG*, en aquellas zonas del dominio donde la solución sea suave²⁵. Para deducir una forma de conseguirlo, revisemos los términos que este método de estabilización añade a la forma clásica de Galerkin. Estos son,

$$\begin{aligned} T.E. &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \alpha' \frac{h}{2|\mathbf{v}|} (\mathbf{v} \cdot \nabla \psi) r(\varphi_h) d\Omega + \\ &+ \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \beta' \frac{h}{2|\mathbf{v}_r|} \frac{r^2(\varphi_h)}{|\nabla \varphi_h|^2} \nabla \varphi_h \cdot \nabla \psi d\Omega \end{aligned} \quad (2.102)$$

Como ya se ha comentado, hay que observar que, mientras el primer término continúa siendo igual al que teníamos antes, con la formulación basada en el método *SUPG*, tenemos un término adicional, equivalente al que tendríamos con una difusión homogénea. De nuevo, para la obtención de (2.102) se han despreciado los términos que involucran derivadas de \mathbf{h} . Esto puede hacerse aceptando que \mathbf{h} es constante en el interior de los elementos.

Los términos de estabilización de (2.102) pueden reescribirse, haciendo uso de (2.99), como,

²⁵Pues ya conocemos el hecho de su estabilidad y cuasi óptima convergencia en este caso.

$$\begin{aligned}
T.E. &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \alpha' \frac{h}{2} \nabla \psi \cdot \frac{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \cdot \nabla \varphi_h \, d\Omega + \\
&+ \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \beta' \frac{h}{2} \frac{r^2(\varphi_h)}{|\nabla \varphi_h|^2} \nabla \varphi_h \cdot \nabla \psi \, d\Omega
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Donde, para simplificar la exposición, se han eliminado aquellos términos que no tienen forma de difusión. Como ya se ha mencionado, el primero de los términos de (2.103) es una difusión según las líneas de corriente, descrita por el tensor $\underline{\underline{K}}_{LC} = \alpha''(\gamma) \frac{h}{2} \frac{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, mientras que el segundo es una difusión homogénea dada por²⁶ $\underline{\underline{K}}_H = \beta'(\gamma_{||}) \frac{h}{2} \frac{|\mathbf{r}(\varphi_h)|}{|\nabla \varphi_h|} \mathbf{I}$. Al objeto de simplificar la notación, escribiremos los tensores anteriores en la forma,

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{K}}_{LC} &= k_1 \frac{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}, \quad k_1 = \alpha'(\gamma) \frac{h}{2} |\mathbf{v}| \\
\underline{\underline{K}}_H &= k_2 \mathbf{I}, \quad k_2 = \beta'(\gamma_{||}) \frac{h}{2} \frac{|\mathbf{r}(\varphi_h)|}{|\nabla \varphi_h|}
\end{aligned} \tag{2.104}$$

De esta forma [VCZ97] [VCZ99], podemos escribir una versión alternativa de (2.103), que cumple el requisito de recuperar la forma de *SUPG* ante soluciones suaves, como,

$$\begin{aligned}
T.E. &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \langle k_1 - k_2 \rangle \nabla \psi \cdot \left(\frac{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \cdot \nabla \varphi_h \, d\Omega + \\
&+ \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} k_2 (\nabla \varphi_h \cdot \nabla \psi) \, d\Omega
\end{aligned} \tag{2.105}$$

Donde $\langle a_1, a_2 \rangle = \max(0, a_1 - a_2)$. Como puede comprobarse, los términos de (2.105) recuperan la forma de *SUPG* en el caso en que $k_2 = 0$.

Resumiendo, si aplicamos para la resolución del sistema (2.95) el método *CF*, con la definición del vector \mathbf{h} dada en (3.64), el planteamiento del problema queda como sigue,

Encontrar $\varphi_h \in \Phi_h \subset \Phi := \{\chi \in H^1(\Omega) \mid \chi = g \text{ en } \Gamma_D\}$ tal que $\forall \psi \in \Psi_h$, se cumple que,

²⁶ Hay que hacer notar que, como se observa por la forma de $\underline{\underline{K}}_H$, la difusión que añade este tensor es siempre positiva, evitando así los problemas de métodos alternativos.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [\psi (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi_h + k (\nabla \psi \cdot \nabla \varphi_h)] d\Omega + \\
& + \underbrace{\sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \langle k_1 - k_2 \rangle \nabla \psi \cdot \left(\frac{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \cdot \nabla \varphi_h d\Omega}_{(2.106)} + \underbrace{\sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} k_2 (\nabla \varphi_h \cdot \nabla \psi) d\Omega -}_{(2.106)} \\
& - \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \frac{\langle k_1 - k_2 \rangle}{|\mathbf{v}|^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla \psi) k \Delta \varphi_h = \int_{\Omega} \psi Q d\Omega + \\
& + \underbrace{\sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \frac{\langle k_1 - k_2 \rangle}{|\mathbf{v}|^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla \psi) Q d\Omega}_{(2.106)} - \int_{\Gamma_{ND}} \psi q_D d\Gamma - \int_{\Gamma_{NT}} \psi q_T d\Gamma
\end{aligned}$$

Donde los términos subrayados corresponden a la modificación de la forma original de Galerkin.

A continuación presentamos una tabla extraída de [Cod93a] [Sot97] y que, basados en experimentación numérica y las aproximaciones obtenidas por estudios de estabilidad del problema, dan unas formas apropiadas para la determinación de los coeficientes α' , β' .

$$\begin{array}{ll}
\alpha'(\gamma) & |\gamma| > 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma}{3} \quad |\gamma| \leq 3 \\ 1 \quad |\gamma| > 3 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma}{6} \quad |\gamma| \leq 3 \\ \frac{\gamma}{2} \quad |\gamma| > 3 \end{array} \right\} \\
\alpha'(\gamma) & |\gamma| \leq 1 \quad \frac{\gamma}{3} \quad \frac{\gamma}{9} \\
\beta'(\gamma_{||}) & \max\left(0, 0.7 - \frac{1}{\gamma_{||}}\right) \quad \max\left(0, 0.35 - \frac{1}{\gamma_{||}}\right)
\end{array} \quad (2.107)$$

Donde m es el grado de los polinomios empleados en la aproximación.

Por último, conviene añadir que la forma final del método de estabilización, dada en (2.106) conserva todas las propiedades del algoritmo basado en *SUPG* y adquiere propiedades adicionales de convergencia, un resumen de las cuales puede encontrarse en [Cod93a].

2.3.6 Esquemas Estabilizados de Mayor Orden

Siguiendo los procedimientos presentados anteriormente en este capítulo, pueden derivarse esquemas estabilizados de mayor orden [Oña96]. Otra alternativa sería la aplicación de desarrollos en serie de Taylor multidimensionales a las ecuaciones diferenciales ordinarias. Pero, de otra forma, se pueden obtener, de manera simple, esquemas estabilizados de alto orden, mediante la metodología que presentaremos a continuación.

Recuperemos la forma estabilizada dada en (2.92).

$$r - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) r = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.108)$$

$$r = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla \varphi) - Q$$

Si al esquema (2.108) anterior, que puede considerarse, una ecuación de balance mejorada, le aplicamos directamente las técnicas presentadas en este capítulo, podemos llegar a,

$$r_2 - \frac{1}{2} (\mathbf{h}_2 \cdot \nabla) r_2 = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.109)$$

$$r_2 = r - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) r$$

Donde se hace notar que, evidentemente, \mathbf{h} no tiene por qué coincidir con \mathbf{h}_2 , dado que son parámetros de estabilización de ecuaciones diferentes.

Si sustituimos (2.108) en (2.109), tenemos²⁷,

$$r - \left[\frac{1}{2} (\mathbf{h}' \cdot \nabla) - \frac{1}{4} (\mathbf{h}_2 \cdot \nabla) (\mathbf{h} \cdot \nabla) \right] r = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.110)$$

Es importante señalar que la forma débil de la ecuación anterior recuerda mucho a la obtenida con la aplicación de métodos como *Galerkin Least Squares (GLS)* [HFH89] [Cod96] [Sot97] o *Subgrid Scale* [Hug95]. De hecho la apropiada selección de los valores de \mathbf{h}, \mathbf{h}_2 permitiría que fueran reproducidos exactamente [Oña98a].

El proceso definido por las ecuaciones (2.109) se puede utilizar recursivamente para derivar esquemas de ordenes superiores.

2.3.7 Esquemas Estabilizados en el Tiempo

El método *CF* presentado, permite adicionalmente, la construcción de esquemas estabilizados de mayor orden en el tiempo. Para ello, si escribimos el balance de flujos, no sólo para un dominio espacial Ω^A sino para el dominio espacio temporal $\Omega^A \times [t, t + \delta]$, siendo δ un incremento de tiempo finito arbitrario, la ecuación de balance global puede escribirse como,

$$\int_t^{t+\delta} \int_{\Omega^A} \left[\sum \text{Flujos} + \sum \text{Fuentes} \right] dx dt = \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega^A} d\varphi(x) dx dt \quad (2.111)$$

El primer término de la izquierda de la ecuación (2.111) anterior puede escribirse como,

²⁷ Llamando $\mathbf{h}' = \mathbf{h} + \mathbf{h}_2$.

$$\begin{aligned}
& \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega^A} \left[\sum \text{Flujos} + \sum \text{Fuentes} \right] dx dt \simeq \\
& \simeq \int_{\Omega^A} \frac{\delta}{2} \left[\left[\bar{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \bar{r} \right]^t + \left[\bar{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \bar{r} \right]^{t+\delta} \right] dx \simeq \\
& \simeq \int_{\Omega^A} \delta \left[\left[\bar{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \bar{r} \right]^t + \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \bar{r} \right]^t \right] dx
\end{aligned} \tag{2.112}$$

donde \bar{r} tiene el significado usual dado en (2.86).

Por otra parte, el término de la derecha de la ecuación (2.111) puede escribirse como,

$$\int_t^{t+\delta} \int_{\Omega^A} d\varphi(x) dx dt = \int_{\Omega^A} (\varphi^{t+\delta} - \varphi^t) dx = \int_{\Omega^A} \delta \left(\frac{\partial \varphi^t}{\partial t} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 \varphi^t}{\partial t^2} \right) dx \tag{2.113}$$

De igualar (2.112) y (2.113) y teniendo en cuenta que Ω^A es un dominio genérico²⁸, se tiene,

$$\bar{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \bar{r} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \bar{r} \right] = 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \tag{2.114}$$

de donde si eliminamos los términos de mayor orden se simplifica en la forma,

$$\bar{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \bar{r} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \tag{2.115}$$

La ecuación (2.115) se puede utilizar para derivar diferentes esquemas de integración, en los cuales el parámetro δ juega un papel crucial²⁹. A modo de ejemplo, si se discretiza la ecuación (2.115) en el tiempo usando un esquema centrado explícito y se toma $\delta = \Delta t$, se tiene,

$$\begin{aligned}
& \frac{\varphi^{t+\Delta t} - \varphi^t}{\Delta t} + r^t - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) r^t + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\varphi^{t+\Delta t} - 2\varphi^t + \varphi^{t-\Delta t}}{\Delta t^2} \right] = 0 \\
& \text{en } \Omega \times [0, T]
\end{aligned} \tag{2.116}$$

donde para obtener (2.116) se han despreciado los términos de las derivadas espaciales de $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Simplificando la ecuación anterior, nos resulta la forma,

$$\frac{\frac{3}{2}\varphi^{t+\Delta t} - 2\varphi^t + \frac{1}{2}\varphi^{t-\Delta t}}{\Delta t} + r^t - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) r^t = 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \tag{2.117}$$

que es un esquema de integración temporal de φ de segundo orden.

²⁸y del mismo modo t es un instante genérico.

²⁹Por su carácter general, denominaremos a esta ecuación, ecuación *fundamental* del cálculo finitesimal.

2.4 El Problema de Convección Pura

En las secciones anteriores hemos estudiado el problema de convección difusión hallando que, en el caso homogéneo unidimensional, las inestabilidades que aparecen en la solución numérica clásica pueden justificarse por el error de truncamiento producido por el proceso mismo de discretización. Además hemos encontrado que este error de truncamiento tiene forma de difusión negativa para cualquier valor del número de Péclet.

Por otra parte, un análisis de la ecuación de balance del mismo problema nos ha permitido diseñar un método de estabilización de aplicación general (CF). Una de las características básicas de este método es la adición de difusión según una dirección genérica. Pero su propiedad más interesante es la consistencia, esto es, la solución del problema diferencial estabilizado es solución del problema original.

Ahora, hemos de volver al punto de partida de este análisis; la ecuación cinemática de superficie libre. Esta condición, como ya hemos mencionado, toma la forma del problema de convección pura siguiente,

Encontrar $\varphi = \varphi(x)$ tal que,

$$\begin{aligned} w &= \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \eta \quad \text{en } z = \eta \\ \eta &= g \quad \text{en } \Gamma_{D_\eta} \end{aligned} \quad (2.118)$$

Como puede apreciarse tras comparar el problema (2.118) anterior con el (2.70), el límite de convección pura $\gamma \rightarrow \infty$ tiene unas propiedades particulares, sobre todo en lo referente a las condiciones de contorno, que conviene conocer. En primer lugar, la ecuación (2.118) anterior es de primer orden, por lo que si nos fijamos en el problema unidimensional, sólo admite una condición de contorno. Por otra parte la imposición de condiciones de contorno de flujo prescrito hecha en (2.70) queda limitada en este caso a la prescripción del flujo convectivo,

$$\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \eta = q \quad \text{en } \Gamma_{N_\eta}$$

pero su aplicación carece de sentido físico en el caso de su aplicación a los problemas de superficie libre.

Antes de continuar, hagamos un pequeño estudio sobre el problema unidimensional siguiente,

Encontrar $\varphi = \varphi(x)$ tal que,

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= 0 \quad \text{en } 0 < x < l \\ \varphi(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.119)$$

Dividimos a continuación el intervalo $[0, l]$ en N elementos iguales, siendo $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = l$ donde, $x_{m+1} - x_m = d$ ($m = 0, N-1$). Si discretizamos el

problema anterior, utilizando el método de los elementos finitos o diferencias finitas centradas, obtenemos,

$$\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_{i-1}) = 0 \quad \text{con } i = 1, N-1 \quad (2.120)$$

La ecuación característica de la anterior es $\lambda^2 - 1 = 0$ cuyas raíces son, $\lambda = \pm 1$. Por lo que la solución genérica de (2.120) puede escribirse como,

$$\varphi_i = C_1 + C_2(-1)^i \quad (2.121)$$

Cuyo carácter oscilatorio es claro³⁰. Por otra parte es evidente que es necesaria una condición adicional a la del problema planteado, ya que el problema discreto es de segundo orden, lo cual es, por sí sólo, una inconsistencia.

Por otra parte, estos problemas se trasladan al caso general de la ecuación no homogénea,

$$\frac{d\varphi}{dx} = e(x) \quad \text{en } 0 < x < l \quad (2.122)$$

Su forma discreta utilizando el mismo procedimiento anterior será,

$$\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_{i-1}) = e(\dots, x_{i+1}, x_i, x_{i-1}, \dots) \quad \text{con } i = 1, N-1 \quad (2.123)$$

cuya solución será, evidentemente, de la forma,

$$\varphi_i = C_1 + C_2(-1)^i + E(i) \quad (2.124)$$

donde $E(i)$ es una solución particular de la ecuación (2.123).

La aplicación de unas condiciones de contorno deseables (como las sugeridas en [D'E97] [Daw77], $\varphi_0 = 0$ y $\varphi_1 = 0$, que impone a nivel discreto $\frac{d\varphi_0}{dx} = 0$) da como resultado,

$$\varphi_i = -\frac{E(1) + E(0)}{2} + (-1)^i \frac{E(1) - E(0)}{2} + E(i) \quad (2.125)$$

Que mantiene su carácter oscilatorio siempre que $E(1) \neq E(0)$.

Este comportamiento de la ecuación puede deducirse del análisis hecho en (2.39)-(2.69). La aplicación directa del método de estabilización *CF* sobre la ecuación (2.119) resulta en,

³⁰Se hace notar que la ecuación anterior puede obtenerse del mismo análisis del caso con difusión haciendo $\gamma \rightarrow \infty$.

$$r - \frac{h}{2} \frac{dr}{dx} = 0 \quad \text{en} \quad 0 < x < l \quad (2.126)$$

$$r = \frac{d\varphi}{dx}$$

Si aplicamos la ecuación (2.56) para deducir la longitud característica h óptima, la ecuación (2.126) anterior queda como,

$$\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i) = 0 \quad \text{con} \quad i = 1, N-1 \quad (2.127)$$

La ecuación característica de la anterior es $\lambda = 1$. Por lo que la solución genérica de (2.120) puede escribirse como,

$$\varphi_i = C_1 \quad (2.128)$$

Que evidentemente es la solución nodalmente exacta de la ecuación (2.119) original y es además consistente con sus condiciones de contorno³¹. Podemos concluir de este sencillo análisis que, en el límite $\gamma \rightarrow \infty$, los resultados obtenidos en los apartados anteriores para la ecuación de convección difusión, son perfectamente válidos, haciendo la adecuada modificación de las condiciones de contorno.

Por otra parte, y aún cuando la mayoría de ellas pueden derivarse directamente de las conclusiones hechas sobre la ecuación de convección difusión, en [HFH89] se demuestran las propiedades de convergencia y estabilidad de los método de estabilización tipo *SUPG* para el caso concreto de convección.

La estabilización utilizando el método *CF* requiere como punto de partida una ecuación de conservación. En el caso de la condición de superficie libre, este balance está dado por (2.5), que expresa que la superficie libre es un contorno material, esto es que las partículas fluidas ni entran ni salen de él.

Recuperemos la forma estabilizada dada en (2.92), y apliquémosla a la ecuación de superficie libre (2.8), para dar,

$$r - \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{h}} \cdot \bar{\nabla}) r = 0 \quad \text{en} \quad z = \eta \quad (2.129)$$

$$r = \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\nabla} \eta - w$$

O en su forma transitoria, basada en (2.7) y (2.115),

$$\bar{r} - \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{h}} \cdot \bar{\nabla}) \bar{r} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = 0 \quad \text{en} \quad z = \eta \quad (2.130)$$

$$\bar{r} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\nabla} \eta - w$$

³¹ Aunque, como es lógico, no admite las condiciones de contorno fijadas en el problema de convección difusión.

Si aplicamos para la resolución del sistema (2.129) la metodología expuesta en (2.106) y (3.68), el problema se plantea como

Encontrar $\eta \in \Phi_h$, tal que $\forall \psi \in \Psi_h$, se cumple que³²,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \psi \left(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \right) \eta d\Omega + \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \langle k_1 - k_2 \rangle \tilde{\nabla} \psi \cdot \left(\frac{\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}}{|\tilde{\mathbf{v}}|^2} \right) \cdot \tilde{\nabla} \eta d\Omega + \\ & + \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} k_2 \left(\tilde{\nabla} \eta \cdot \tilde{\nabla} \psi \right) d\Omega = \int_{\Omega} \psi w d\Omega + \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \frac{\langle k_1 - k_2 \rangle}{|\tilde{\mathbf{v}}|^2} \left(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \psi \right) w d\Omega \end{aligned} \quad (2.131)$$

Donde los términos subrayados añaden la necesaria estabilización al método y k_1 , k_2 son los dados en (3.67) y (3.68).

La forma transitoria del sistema anterior, que se obtiene a partir de (2.130), es,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \psi \varphi^{t+\Delta t} d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{4}{3} \psi \varphi^t - \frac{1}{3} \psi \varphi^{t-\Delta t} \right] d\Omega + \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \psi w d\Omega - \\ & - \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \psi \left(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \right) \eta d\Omega + \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} \frac{\langle k_1 - k_2 \rangle}{|\tilde{\mathbf{v}}|^2} \left(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \psi \right) w d\Omega - \\ & \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} k_2 \left(\tilde{\nabla} \eta \cdot \tilde{\nabla} \psi \right) d\Omega - \\ & - \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} \langle k_1 - k_2 \rangle \tilde{\nabla} \psi \cdot \left(\frac{\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}}{|\tilde{\mathbf{v}}|^2} \right) \cdot \tilde{\nabla} \eta d\Omega \end{aligned} \quad (2.132)$$

donde se ha utilizado la forma simplificada dada en (2.117).

Por último añadir que el método *CF* transforma la ecuación de convección pura en una de convección difusión. Esta última debe considerarse como una versión mejorada (de mayor orden de aproximación) que la original, pero continúa siendo una ecuación diferencial que representa el mismo problema. Por lo tanto, todo el estudio hecho a lo largo del presente capítulo, sobre la ecuación de convección difusión, es plenamente aplicable en este caso.

³²En este caso, el método estabilizado, tiene como condición de contorno natural,

$$\frac{h}{2|\mathbf{v}|} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} r = 0 \quad \text{en } \Gamma_N$$

Lo cual, evidentemente, cumple la solución del problema $r = 0$.

2.5 El Método de Estabilización de Dawson

Ya hemos presentado, anteriormente en este capítulo, la forma linealizada de la ecuación de superficie libre que fue propuesta en [Daw77] por Dawson. Pero sin duda, el aspecto más destacado de este método, es la forma de estabilizar la ecuación de superficie libre.

Se ha comentado anteriormente que el cálculo de las derivadas primeras descendidas en contracorriente (*upwind*) introduce en las ecuaciones una difusión numérica que puede corregir las inestabilidades asociadas a la ecuación de convección-difusión. El problema de los métodos de este tipo es que la adición de difusión no puede ser controlada fácilmente, por lo que la solución depende significativamente de parámetros como el tamaño de la malla.

El procedimiento de Dawson, si bien tiene características de los métodos de evaluación en avance, es ligeramente diferente. La derivada primera que aparece en la ecuación (2.24) es evaluada mediante una fórmula de deducción casi mágica y de resultados sorprendentes. Cabe señalar, que en el artículo original, esta fórmula no tiene ninguna justificación teórica y la recomendación de Dawson proviene de una selección usando la técnica de prueba y error.

La propuesta consiste en usar un operador de cuatro puntos en avance, el cual debe eliminar los errores de segundo y cuarto orden, pero no de tercero. De esta manera, la derivada según una dirección l de la función $f(x)$ puede escribirse como (ver apéndice F),

$$\left(\frac{df}{dl}\right)_{Dawson} = \frac{10f_i - 15f_{i-1} + 6f_{i-2} - f_{i-3}}{6h} \quad (2.133)$$

Que es la mencionada fórmula de cuatro puntos, cuya evaluación, estabiliza de manera notable la ecuación (2.24). En efecto, la evaluación del término $\frac{\partial}{\partial l} (\mathbf{v} \times^2 |\mathbf{v}|)$, de la ecuación (2.24), mediante (2.133), permite obtener resultados muy aceptables, no apareciendo efectos de amortiguación significativos, en los casos analizados en [Daw77]. Sin embargo, un estudio profundo del operador (2.24) muestra que su rango de funcionamiento óptimo está limitado a un intervalo de³³ F_n y que su efectividad se ve afectada de manera importante por el tamaño de la malla (ver [Let93]). Se hace notar, por otra parte, que la necesidad de evaluar la ecuación (2.24), con tres puntos corriente arriba, limita casi exclusivamente su utilización a mallas estructuradas.

En la referencia [IOS99] se analiza en profundidad la fórmula (2.133), y se presenta una forma de escribirla, basada en esquemas centrados. Por otra parte en la referencias [Rav96, pp 89-91] [Let93] se discuten varias alternativas a la formulación de Dawson, para la resolución de la ecuación de superficie libre, sin embargo ninguna de ellas parece tener propiedades suficientemente atractivas.

Efectivamente, la fórmula propuesta por Dawson no es única y sus propiedades para la estabilización de la ecuación de superficie libre son notables, pero limitados.

³³En concreto parece fallar notablemente [Let93] para altos F_n .

Además, estas limitaciones son comunes a todos los esquemas similares estudiados en [Let93], por lo que difícilmente podrá derivarse una forma general aplicable a diferentes problemas basada en la fórmula (2.133).

Un aspecto destacable es la posibilidad de demostrar la equivalencia de la metodología de Dawson con el algoritmo *CF* aquí presentado. En efecto, a partir de la propuesta original de Dawson [Daw77], en [Let93] se derivaron esquemas generales para la estabilización de la superficie libre. Además en la misma referencia se estudian las propiedades de amortiguamiento y estabilidad de diversos operadores. Pero veamos cual es el modo de proceder, para obtener estos esquemas.

El desarrollo en serie de Taylor de una función f sobre $x + mh$, puede escribirse como,

$$f(x + mh) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(mh)^n}{n!} f^{(n)}(x) \quad (2.134)$$

Por otra parte, podemos escribir un operador de diferencias genérico, para la derivada primera, como,

$$f'(x) = \frac{1}{h} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_n f(x + mh) \quad (2.135)$$

donde w_n son los coeficientes apropiados, definitorios del operador. Si sustituimos (2.134) en (2.135), e invertimos el orden de los sumatorios resulta,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n h^{n-1} \frac{d^n f}{dx^n}(x) \quad (2.136)$$

donde se ha denominado,

$$e_n = \frac{1}{n!} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^n w_n \quad (2.137)$$

Evidentemente, para obtener el operador $f'(x)$ óptimo, nos gustaría tener $e_1 = 1$ y $e_i = 0$, para $i \neq 1$, de manera que coincidieran el operador y su derivada (operador exacto). Desafortunadamente eso requiere un infinito número de $w_n \neq 0$. La metodología propuesta se limita a tomar un número N de w_n diferentes de cero, e imponer las condiciones requeridas sobre los valores de e_n . Esto conduce a un sistema lineal de tamaño $N \times N$ (para más detalles ver [Let93]). El método de Dawson original se puede obtener haciendo $e_0 = 0$, $e_1 = 1$, $e_2 = 0$ y $e_4 = 0$.

En buena lógica, todos los operadores que construyamos tendrán $e_0 = 0$ y $e_1 = 1$, por lo que el operador (2.136), puede escribirse como,

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} e_n h^{n-1} \frac{d^n f}{dx^n}(x) \quad (2.138)$$

Si partimos de la ecuación cinemática de superficie libre unidimensional ³⁴ siguiente,

$$u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w \quad (2.139)$$

Entonces, siguiendo la metodología expuesta, la forma general de la ecuación discreta estabilizada, sería, sustituyendo (2.138) en (2.139),

$$u \frac{\partial \eta}{\partial x} + u \sum_{n=2}^{\infty} e_n h^{n-1} \frac{\partial^n \eta}{\partial x^n} = w \quad (2.140)$$

Por otra parte, en este caso es sencillo obtener la forma genérica del método *CF* de alto orden. Esta puede derivarse del desarrollo en serie de los términos de la ecuación de balance unidimensional. El resultado es equivalente a la aplicación del desarrollo en serie de Taylor al residuo de la ecuación (2.139), y está dado por,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha h)^n}{n!} r^{(n)}(x) = 0 \quad (2.141)$$

$$r = u \frac{\partial \eta}{\partial x} - w$$

De donde, si despreciamos las variaciones en u y w , se tiene,

$$u \frac{\partial \eta}{\partial x} + u \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\alpha h)^n}{n!} \eta^{(n)}(x) = w \quad (2.142)$$

Que, como se puede apreciar, toma la misma forma que (2.140). De este hecho pueden sacarse varias conclusiones,

1. El método de estabilización de Dawson puede derivarse de la aplicación de las técnicas *CF*. Lo cual permite dar una base teórica al primero.

³⁴o de convección pura, según se quiera denominar.

2. El método *CF* debe considerarse como una forma más general del método de Dawson, que le añade propiedades de las que este carece, entre ellas la de consistencia.
3. De las conclusiones que se obtienen en el estudio de diversos operadores tipo Dawson [Let93], se concluyen sus deficientes propiedades estabilizantes para un amplio rango de problemas. Al contrario, el método *CF* se presenta como una alternativa interesante para ser aplicada a una amplia variedad de problemas. Por otra parte, las propiedades del operador del método *CF* lo hacen muy adecuado para su uso con mallas no estructuradas.

2.6 Extensión del Método *CF* a otros Problemas de Mecánica de Fluidos

El enfoque físico en el que se basa el método de *cálculo finitesimal* presentado en este capítulo, permite que sea fácilmente extendido a otros problemas. Hasta ahora nos hemos fijado en el problema de convección difusión, pero como ya se ha comentado anteriormente, su única limitación es la existencia de una ecuación de balance.

Por ello una primera aplicación de interés es su extensión a las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles. Efectivamente, es inmediato plantear el problema estabilizado, basado en el método *CF*, de las ecuaciones de flujo incompresible. De hecho su carácter de ecuaciones de balance de masa y balance de cantidad de movimiento, las hace idóneas para la aplicación del método.

Si suponemos, al igual que anteriormente, que el dominio de balance, para cada una de estas ecuaciones, es finito y representamos la variación de masa y cantidad de movimiento, utilizando expansiones en serie de Taylor de mayor orden, que las usadas en la teoría infinitesimal clásica, podemos encontrar las ecuaciones estabilizadas, sólo retomando la ecuación fundamental del *cálculo finitesimal* (2.115) y aplicándola a los residuos de las ecuaciones de balance. Esto resulta en,

Balance de Cantidad de Movimiento

$$r_{m_i} - \frac{1}{2} \mathbf{h}_{m_i} \cdot \nabla r_{m_i} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(r_{m_i} - \frac{1}{2} \mathbf{h}_{m_i} \cdot \nabla r_{m_i} \right) = 0 \quad i = 1, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (2.143)$$

Balance de Masa

$$r_d - \frac{1}{2} \mathbf{h}_d \cdot \nabla r_d + \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(r_d - \frac{1}{2} \mathbf{h}_d \cdot \nabla r_d \right) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.144)$$

donde

$$\mathbf{r}_m = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}' + \nabla p - \mathbf{f} \quad (2.145)$$

$$r_d = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.146)$$

y $\mathbf{h}_m, \mathbf{h}_d$, son los vectores de longitudes características asociados al problema.

Una obtención detallada de las ecuaciones (3.1)-(3.4) puede encontrarse en el apéndice J, para el caso bidimensional.

Estas ecuaciones serán usadas como base para el desarrollo del método de resolución del problema de mecánica de fluidos. Este aspecto será considerado en el siguiente capítulo.

2.7 Ejemplos

A continuación se presentan varios ejemplos de aplicación del método de estabilización *CF*. Los problemas elegidos en este caso son tests clásicos de la resolución del problema de convección difusión, para números de Péclet (γ) elevados, por lo que pueden considerarse similares a la resolución de la ecuación de convección pura.

Los problemas de aplicación práctica del método a las ecuaciones del flujo fluido y la superficie libre se presentarán en los siguientes capítulos.

Aquí se presentan ejemplos de resolución del sistema (2.70) basados en el método (2.106).

2.7.1 Ejemplo 1

El primer ejemplo que se presenta corresponde a la resolución del problema de convección difusión (2.70) en un dominio cuadrado de lado unidad definido por $\Omega := \left\{ \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\}$, y con,

$$\underline{\mathbf{K}} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos[\text{atan}(2)] \\ -\sin[\text{atan}(2)] \end{bmatrix}, Q(x, y) = 0$$

Las condiciones de contorno del problema están dadas por,

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 100 & \text{si } (x, y) \in \Gamma_1 \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin \Gamma_1 \end{cases}$$

$$\Gamma_1 := \left\{ \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \times \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

El problema se resuelve por medio de una malla de elementos finitos formada por 812 triángulos lineales. Un esquema del problema puede verse en la figura 2.7.

En la parte izquierda de la figura 2.8 se muestra la solución obtenida utilizando el método típico de Galerkin. Como se aprecia, la solución es completamente inestable, apareciendo oscilaciones en todo el dominio de análisis. Esta solución se puede comparar con la obtenida utilizando la metodología *CF* (ver parte derecha de la figura 2.8). Puede verse que la solución es casi óptima en este caso, apareciendo sólo pequeños restos de inestabilidad en zonas muy localizadas. También puede compararse esta solución

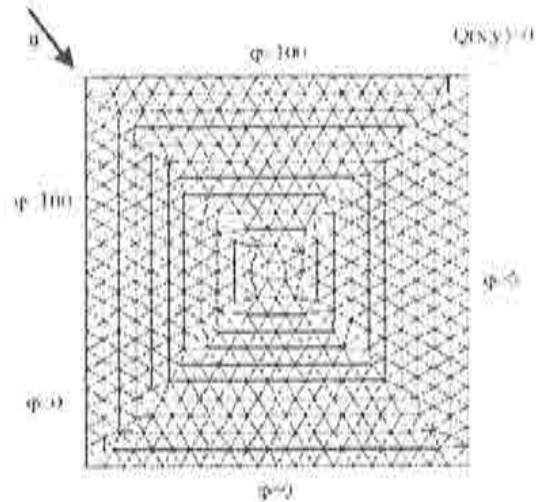


Figura 2.7: Ejemplo 1. Problema bidimensional de convección difusión con condiciones de contorno tipo Dirichlet no uniformes. La malla utilizada para el cálculo es no estructurada y tiene 812 triángulos lineales.

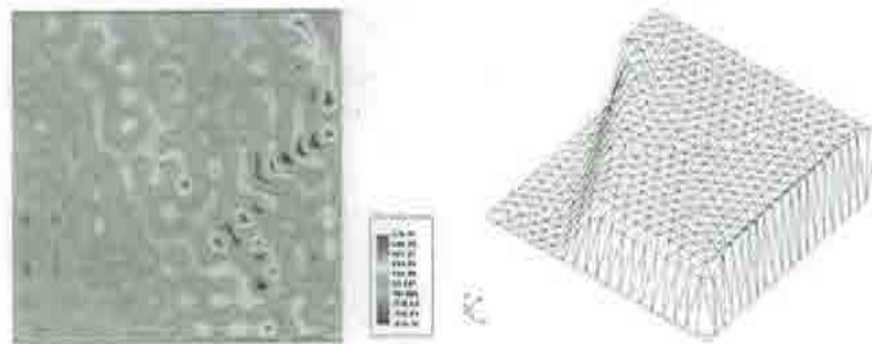


Figura 2.8: Resultado de contornos de φ obtenidos aplicando el método clásico de Galerkin al ejemplo 2 (izquierda). A la derecha puede verse la solución del mismo problema aplicando el método *CF*.

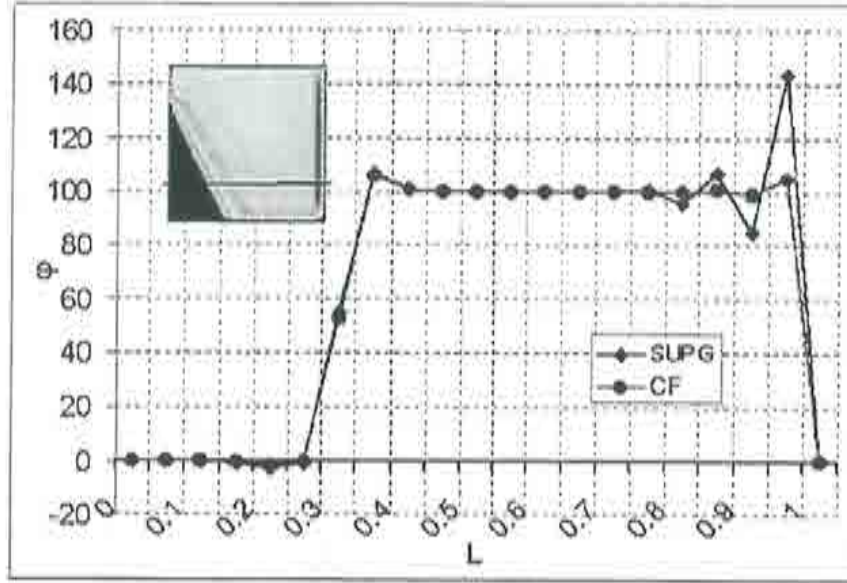


Figura 2.9: Comparación de los resultados obtenidos para el ejemplo 1 utilizando la metodología *CF* y *SUPG*.

con la obtenida aplicando técnicas tipo *SUPG* (ver figura 2.9). Como puede apreciarse, la utilización de método *SUPG* en este caso, resulta en una solución con importantes restos de inestabilidad cerca de las zonas con gradientes altos de φ .

2.7.2 Ejemplo 2

A continuación presentamos un ejemplo extensión del problema unidimensional (2.47) al caso bidimensional. El problema se resuelve en este caso en un dominio cuadrado de lado unidad definido por $W := \{[0, 1[\times]0, 1[\}$ y se utiliza para ello una malla estructurada de 800 elementos triangulares lineales. El resto de características está dado por,

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = 10^{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, Q(x, y) = 0$$

Las condiciones de contorno del problema son:

$$\begin{array}{lll} \varphi(x, y) = 0 & \text{en} & x = 0, y = 0 \\ \varphi(x, y) = 100 & \text{en} & x = 1 \\ q_n = 0 & \text{en} & y = 1 \end{array}$$

Un esquema del problema planteado puede verse en la figura 2.10.

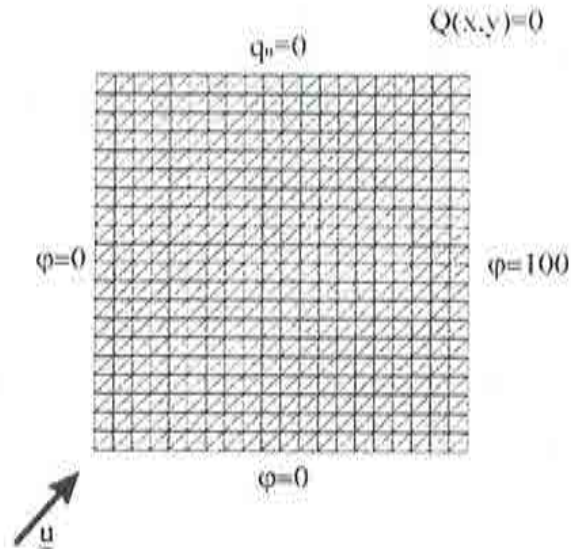


Figura 2.10: Ejemplo 2. Problema bidimensional de convección difusión con condiciones de contorno tipo Dirichlet y Neumann. La malla utilizada para el cálculo es estructurada y tiene 800 triángulos lineales.



Figura 2.11: Resultado de contornos de φ obtenidos aplicando al ejemplo 2, el método clásico de Galerkin (izquierda) y el método CF (derecha).

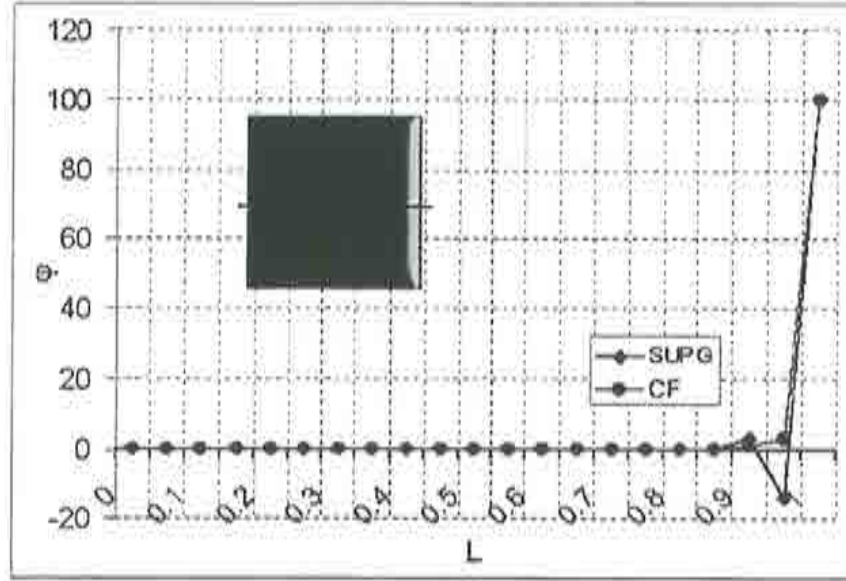


Figura 2.12: Comparación de los resultados obtenidos para el ejemplo 2 utilizando la metodología *CF* y *SUPG*.

En la parte izquierda de la figura 2.11 se muestra la solución obtenida utilizando el método típico de Galerkin. Como se aprecia, la solución es completamente inestable, apareciendo oscilaciones en todo el dominio de análisis. Esta solución se puede comparar con la obtenida utilizando la metodología *CF* (ver parte derecha de la figura 2.11). Puede observarse que la solución es casi óptima en este caso, apareciendo sólo pequeños restos de inestabilidad en zonas muy localizadas, que coinciden con cambios bruscos de las condiciones de contorno. También puede compararse esta solución con la obtenida aplicando técnicas tipo *SUPG* (ver figura 2.12). Como puede apreciarse, la utilización de método *SUPG* en este caso, al igual que antes, resulta en una solución con importantes restos de inestabilidad cerca del contorno.

2.7.3 Ejemplo 3

El último ejemplo que se presenta corresponde a la resolución del problema de convección-difusión (2.70) en un dominio cuadrado de lado unidad con,

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, Q(x, y) = 5$$

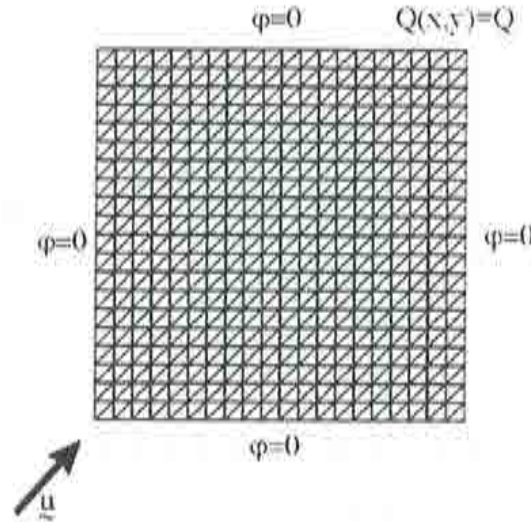


Figura 2.13: Ejemplo 3. Problema bidimensional de convección-difusión no homogéneo con condiciones de contorno tipo Dirichlet. La malla utilizada para el cálculo es estructurada y tiene 800 triángulos lineales.

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 100 & \text{si } (x, y) \in \Gamma_1 \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin \Gamma_1 \end{cases}$$

$$\Gamma_1 := \left\{ \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \times \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

En los contornos se impone la condición tipo Dirichlet $\varphi = 0$ (sobre todo el contorno). El dominio se discretiza con una malla estructurada de elementos formada por 800 triángulos lineales. El problema está representado en la figura 2.13.

En la parte izquierda de la figura 2.14 se muestra la solución obtenida utilizando el método típico de Galerkin. Como se aprecia, la solución es completamente inestable, apareciendo oscilaciones en todo el dominio de análisis. Esta solución se puede comparar con la obtenida utilizando la metodología *CF* (a la derecha de la figura 2.14). La solución es óptima en este caso, no observándose restos de inestabilidad. Esta característica puede también observarse en la gráfica 2.15 donde se muestra la variación de la solución en un corte diagonal del dominio.

2.8 Conclusiones

En este capítulo hemos abordado el problema de estabilidad que presenta la ecuación cinemática de superficie libre para su resolución mediante los métodos clásicos de integración de ecuaciones diferenciales. Esto ha llevado a la necesidad de hacer un análisis profundo de los problemas numéricos que subyacen a la inestabilidad.

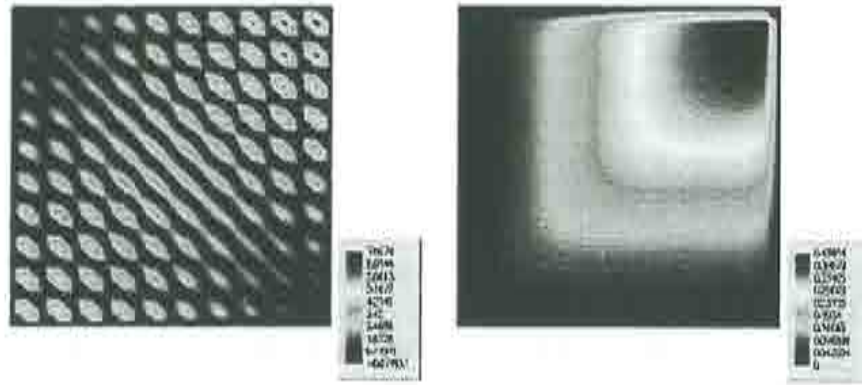


Figura 2.14: Resultado de contornos de φ obtenidos aplicando al ejemplo 3, el método clásico de Galerkin (izquierda) y el método CF (derecha).

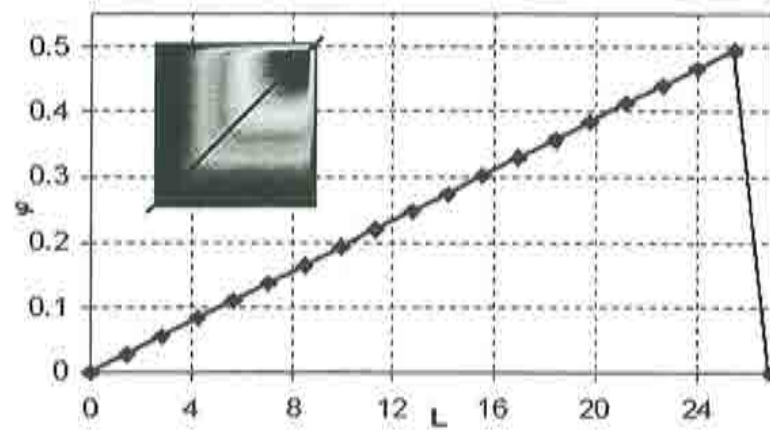


Figura 2.15: Gráfica de la solución del ejemplo 3 en un corte diagonal del dominio.

Posteriormente se ha presentado una metodología basada en un análisis finito del problema de balance (de ahí su nombre, *cálculo finitesimal*), que permite conseguir una nueva forma consistente de las ecuaciones diferenciales originales. Esta algorítmica tiene unas propiedades de consistencia, estabilidad y exactitud que la hacen especialmente adecuada para la resolución de este tipo de problemas y puede ser usada para la derivación de esquemas discretos estabilizados de aplicación, no sólo en el método de los elementos finitos, sino también en otros como diferencias finitas o puntos finitos.

El método es de aplicación general y es especialmente adecuado para su uso en mallas no estructuradas.

También se ha discutido la manera de calcular los parámetros de estabilización. La necesidad de evitar el alto coste computacional de los métodos iterativos desarrollados para la determinación de sus valores óptimos ha hecho necesario definir unos criterios básicos para su elección. Estos criterios están basados en un estudio de estabilidad del método. Por último se ha dado forma a estos parámetros, basándonos en estudios teóricos y experimentos numéricos.

Una vez discutido el método de estabilización se ha aplicado a la resolución de la ecuación cinemática de superficie libre y se ha comparado con otras metodologías existentes en el campo de la hidrodinámica naval.

Por último se ha presentado una extensión del método para su aplicación en problemas de balance genéricos, y en concreto para las ecuaciones de Navier Stokes.

Capítulo 3

Ecuaciones de Navier Stokes Estabilizadas. El Método de Pasos Fraccionados

En el capítulo anterior se presentó el método denominado Cálculo Finitesimal (CF) aplicado a la estabilización de la ecuación de convección difusión y se expusieron las posibilidades de generalización del método CF a otro tipo de problemas. En el presente capítulo se aplicará este método de estabilización a las ecuaciones de Navier Stokes. A continuación se planteará un procedimiento de resolución de las mencionadas ecuaciones, que presenta grandes ventajas frente a otros, para los objetivos del proyecto. El procedimiento mencionado se apoyará en el método de los elementos finitos y el algoritmo de pasos fraccionados semi implícito para la discretización y resolución de las ecuaciones. Durante el desarrollo del capítulo se expondrán las modificaciones para tener en cuenta el movimiento de la malla de elementos finitos mediante técnicas ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian). Se incluye una discusión sobre las condiciones de contorno aplicables, así como otros conceptos relacionados como la turbulencia. En último lugar se presentan varios ejemplos básicos de aplicación de las ecuaciones mencionadas.

3.1 Introducción

En los capítulos anteriores se han discutido las inestabilidades asociadas a la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes utilizando el método estándar de Galerkin. Como ya se mencionó, estas inestabilidades son de dos tipos, unas asociadas al carácter convectivo de la ecuación de balance de cantidad de movimiento y otras debidas a la imposición de la incompresibilidad del fluido, que pone limitaciones a la elección del espacio de interpolación de los campos de velocidad y presión.

En los últimos años ha existido una intensa búsqueda de la solución a estos problemas. Desde el uso de interpolaciones velocidad-presión que satisficieran la condición

BB, junto al uso de metodologías tipo *upwind*, hasta el más reciente basado en la técnica de *Galerkin Least/Squares* que permite utilizar interpolación de igual orden en velocidad y presión, evitando la restricción *BB*, gracias a la adición de un término proporcional al laplaciano de la presión en la ecuación de balance de masa.

Del mismo modo, otros métodos como *Characteristic Galerkin*, *Variational Multi-scale* o *Residual-Free Bubbles* permiten corregir total o parcialmente los problemas de inestabilidad que plantea la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Los métodos mencionados, aún habiendo recibido un importante respaldo matemático y práctico, no cuentan con la suficiente base física tras ellos. Además, la mayoría de ellos pierden estabilidad en presencia de gradientes elevados de las variables, deficiencia que es usualmente corregida mediante la adición de nuevos términos de estabilización (términos de captura de discontinuidades) a la formulación previamente establecida¹.

En este trabajo se presenta un enfoque mucho más físico y simple, basado en la técnica de *Cálculo Finitesimal (CF)* presentada en el capítulo anterior. Esta técnica se basa en retener términos de mayor orden en las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y de masa. Es importante señalar que la estabilización de estas ecuaciones se produce a nivel de la ecuación diferencial, y esta misma forma es aplicable a cualquier método de integración de ecuaciones diferenciales (*Elementos finitos* [ZT94a] [ZT94b] [Oña98b] [GPVC98], *Volúmenes Finitos* [HMJ93] [MC98], *Diferencias Finitas* [Hir90], *Puntos Finitos* [OIOT96] [OSI00], etc.). Al contrario, muchos de los métodos antes mencionados han sido desarrollados exclusivamente para su aplicación en uno u otro procedimiento.

Posteriormente nos ocuparemos del algoritmo utilizado para la discretización temporal y resolución espacial. Este es el denominado algoritmo semi implícito de pasos fraccionados que presenta varias ventajas para el presente proyecto. Por una parte permite la utilización de igual interpolación para los campos de presión y velocidad, evitando la condición *BB*, y por otra presenta una menor necesidad de almacenamiento de memoria que en otros casos, dado que sólo es necesario invertir un sistema de ecuaciones de una incógnita por nodo (presión) frente a las cuatro incógnitas por nodo (velocidad y presión) de otros métodos más convencionales. Por otra parte, la imposición de la presión en gran parte del dominio, en los problemas con superficie libre, hace que este algoritmo gane velocidad frente a otros. Además, hay que añadir que el sistema de ecuaciones resultante corresponde a una matriz simétrica muy bien condicionada, por lo que no representa ningún problema su inversión.

Cabe señalar que muchas de las propiedades de estabilización que añade naturalmente el algoritmo de pasos fraccionados, pueden ser conseguidas con la utilización de la técnica *CF* aplicada a otros métodos de integración de las ecuaciones de Navier Stokes. Sin embargo, el algoritmo de pasos fraccionados presenta todavía importantes ventajas en lo referente a necesidades de recursos.

¹Este aspecto, ya ha sido comentado en el capítulo 2 en referencia a la ecuación de convección difusión.

3.2 Formulación Estabilizada de las Ecuaciones de Navier Stokes

Consideraremos el movimiento de un fluido viscoso incompresible alrededor de un cuerpo, tal como se presentó en el capítulo 1. Como es conocido, estas ecuaciones son resultado de la aplicación de las leyes clásicas de conservación de masa y cantidad de movimiento sobre un dominio de control infinitesimal. Por otra parte, según la metodología de *CF* presentada en el capítulo 2, si suponemos que el dominio de control tiene dimensiones finitas (ver figura 3.1), y representamos la variación de la masa y la cantidad de movimiento utilizando una expansión en serie de Taylor, de un orden superior a la usada en la teoría de cálculo infinitesimal clásica, podemos encontrar las siguientes expresiones que configuran la forma estabilizada de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema planteado (ver apéndice J),

Balance de Cantidad de Movimiento

$$\underline{r_{m_i}} - \frac{1}{2} \underline{h_{m_i}} \cdot \nabla r_{m_i} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(r_{m_i} - \frac{1}{2} \underline{h_{m_i}} \cdot \nabla r_{m_i} \right) = 0 \quad i = 1, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.1)$$

Balance de Masa

$$\underline{r_d} - \frac{1}{2} \underline{h_d} \nabla r_d + \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(r_d - \frac{1}{2} \underline{h_d} \nabla r_d \right) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (3.2)$$

donde

$$\underline{r_m} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \nabla p - \mathbf{f} \quad (3.3)$$

$$\underline{r_d} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.4)$$

Los términos subrayados en las ecuaciones (3.1) y (3.2) introducen la necesaria estabilización para la solución numérica, tal y como se presenta en el capítulo anterior.

Las distancias $\underline{h_m}$ ($\underline{h_{m_i}}$) y $\underline{h_d}$ ($\underline{h_{d_i}}$) son las denominadas longitudes características. Como se ha discutido en el capítulo 2, esas cantidades tienen un carácter geométrico y están relacionadas con las dimensiones de los dominios finitos donde se imponen los balances de cantidad de movimiento y masa, respectivamente (ver figura 3.1). Del mismo modo, el parámetro δ es un tiempo característico del proceso y controla la estabilización temporal de las ecuaciones (3.1) y (3.2). El resto de la notación utilizada en las ecuaciones anteriores ya fue explicada en el capítulo 1.

Hay que hacer notar que para $\underline{h_m} \rightarrow 0$, $\underline{h_d} \rightarrow 0$ y $\delta \rightarrow 0$ se recupera la forma original de las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y masa. Por simplicidad en la exposición siguiente se tomará $\delta = 0$.

Conviene añadir que, por conveniencia para la discusión siguiente, se empleará la notación de índices, siendo v_i , f_i las i -ésimas componentes de los vectores velocidad y de

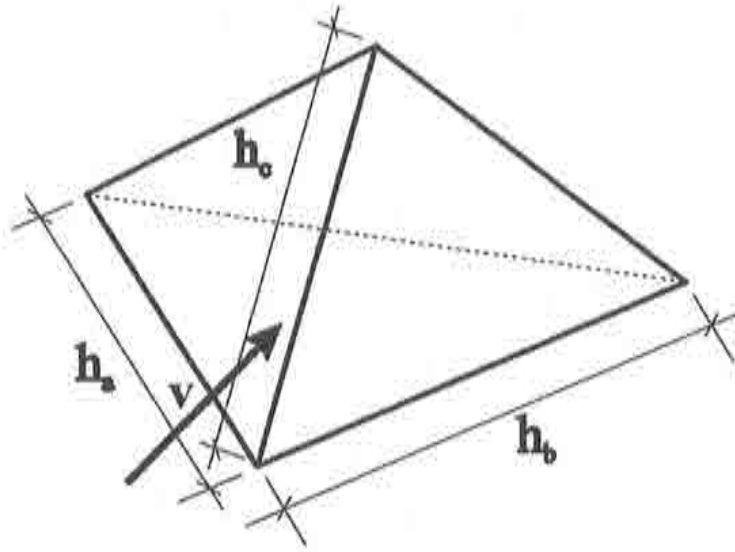


Figura 3.1: Dominio de balance finito (tetraedro elemental).

fuerzas de volumen y τ'_{ij} las componentes de la parte desviadora del tensor de esfuerzos para fluidos newtonianos². De la misma manera h_{mij} es la componente i, j del tensor de longitudes características de la ecuación de balance de cantidad de movimiento (\underline{h}_m). Como es obvio, los índices variables son sólo los últimos subíndices, así, por ejemplo en h_{mij} i, j no m . También indicar que a partir de ahora se aplicará la convención de Einstein de suma para los índices repetidos en productos y derivadas. Así, por ejemplo, $h_{dj} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} = \sum_j h_{dj} \frac{\partial r_d}{\partial x_j}$. La convención anteriormente mencionada sólo se aplicará a los

índices i, j y k , al no ser que se indique expresamente lo contrario. Para no perder claridad en la explicación, se presentan a continuación las ecuaciones (3.1) y (3.2) anteriores con la nueva notación,

Balance de Cantidad de Movimiento

$$r_{mi} - \frac{1}{2} h_{mij} \frac{\partial r_{mi}}{\partial x_j} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.5)$$

Balance de Masa

$$r_d - \frac{1}{2} h_{dj} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.6)$$

donde

$$^2 \tau'_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})$$

$$r_{m_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \quad (3.7)$$

$$r_d = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad (3.8)$$

En la ecuación (3.5) no se debe sumar en el índice i , pero sí en el j .

Más detalles sobre la obtención de las ecuaciones (3.1) a (3.8) pueden encontrarse en [Oña98b].

Evidentemente, las anteriores ecuaciones (3.5) y (3.8) deben completarse con un conjunto de condiciones de contorno e iniciales (ver capítulo 1). Como puede comprobarse parte de estas condiciones de contorno han sido modificadas (estabilizadas) siguiendo la técnica *CF* presentada en el capítulo 2.

$$v_i = v_{ci}(\mathbf{x}, t) \quad \text{en} \quad \Gamma_D \times (0, t) \quad (3.9)$$

$$n_j \tau_{ij} = t_{ci} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} n_j r'_{m_i} \quad (\text{no suma en } i) \quad \text{en} \quad \Gamma_N \times (0, t) \quad (3.10)$$

$$v_i n_i = v_{ci}(\mathbf{x}, t) n_i - \frac{1}{2} h_{d_i} n_i r_d ;$$

$$n_j \tau_{ij} s_i = \sigma(\mathbf{x}, t) - e_i s_i \quad \text{en} \quad \Gamma_M \times (0, t) \quad (3.11)$$

$$p = p_c(\mathbf{x}, t) \quad \text{en} \quad \Gamma_P \times (0, t) \quad (3.12)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{en} \quad \Omega \times \{0\} \quad (3.13)$$

$$p(\mathbf{x}, 0) = p_0(\mathbf{x}) \quad \text{en} \quad \Omega \times (0, t) \quad (3.14)$$

Donde $\Gamma := \partial\Omega$ es el contorno del dominio de análisis, que ha sido dividido en las siguientes partes, según el tipo de condición de contorno que sobre él se impongan en:

Γ_D : parte de Γ donde se prescribe el campo de velocidades a \mathbf{v}_c (contorno tipo Dirichlet).

Γ_N : parte de Γ donde se prescriben las tensiones a t_c (contorno tipo Neumann).

Γ_M : parte de Γ donde se prescribe la velocidad normal a v_n y la componente tangencial de la tracción σ (contorno tipo Neumann). Se ha llamado $e_i = \frac{1}{2} h_{m_{ij}} n_j r_{m_i}$ (no se suma en i).

Γ_P : parte de Γ donde se prescribe el campo de presiones a p_c (contorno tipo Dirichlet).

Se cumple que $\Gamma = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_M \cup \Gamma_P}$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\Gamma_D \cap \Gamma_M = \emptyset$, $\Gamma_D \cap \Gamma_P = \emptyset$, $\Gamma_M \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\Gamma_N \cap \Gamma_P = \emptyset$ y $\Gamma_M \cap \Gamma_P = \emptyset$.

En lo anterior se ha denominado $\mathbf{n} := (n_1, n_2, n_3)$ al vector normal exterior a $\partial\Omega$. Mientras que $\mathbf{s} := (s_1, s_2, s_3)$ es un vector unitario genérico, paralelo a Γ_M , y en particular con la dirección de la proyección de la velocidad sobre Γ_M .

En las ecuaciones (3.9)-(3.14) se han subrayado los términos de estabilización obtenidos gracias a la aplicación de las técnicas de *CF*. La justificación de la aparición de estos términos se puede encontrar en los apéndices I y K.

Una forma más conveniente de la ecuación (3.6) puede obtenerse expresando las componentes del vector de longitudes características de la ecuación de balance de masa como,

$$h_{d_j} = -2t_{d_j}v_j \quad (\text{no suma en } j) \quad (3.15)$$

donde t_{d_j} se denomina "tiempo intrínseco". Bajo esta suposición y usando la ecuación (3.6), la forma del termino de estabilización del balance de masa puede escribirse (ver apéndice G) como,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - t_{d_i} \frac{\partial r'_{m_i}}{\partial x_i} &= 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \\ r'_{m_i} &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \end{aligned} \quad (3.16)$$

Donde, como puede apreciarse se ha renombrado $r_d = \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$.

Por otra parte, en el mismo apéndice G, se muestra la siguiente expresión alternativa a la prescripción de la velocidad normal en el contorno (3.10),

$$v_i n_i = v_n(x, t) n_i + \frac{t_{d_i} n_i r'_{m_i}}{\rho} \quad \text{en } \Gamma_{D_n} \times (0, t) \quad (3.17)$$

Ya se ha comentado anteriormente que, las ecuaciones (3.5)-(3.9) son el punto de partida para la obtención de diversos métodos numéricos estabilizados para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible. Hay que señalar que la obtención de las ecuaciones estabilizadas ha sido hecha a nivel del planteamiento diferencial, por lo que el proceso de discretización puede ser llevado a cabo con cualquiera de los métodos disponibles. En nuestro caso, las ecuaciones diferenciales presentadas, serán integradas utilizando el método de los elementos finitos. El procedimiento elegido para ello es conocido como algoritmo de pasos fraccionados, aunque puede comprobarse que diversos métodos de elementos finitos estabilizados estándar, que permiten interpolaciones de igual orden para velocidad y presión pueden obtenerse a partir de la forma modificada de las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y de masa presentadas anteriormente [Oña98b]. Adicionalmente, a partir de las ecuaciones (3.5)-(3.9) pueden obtenerse algoritmos que estabilizan el carácter convectivo de los términos de transporte de la ecuación de balance de cantidad de movimiento [GOS+98] [OG99] [GO99].

3.3 Formulación *ALE* de las Ecuaciones de Navier Stokes

A estas alturas de la exposición, ha debido quedar clara la gran complejidad del problema que nos planteamos resolver. Sin embargo, uno de los puntos más críticos del

algoritmo aun no ha sido introducido, sino de forma preliminar. Este se refiere al movimiento de los contornos del dominio de análisis. Efectivamente el cambio de forma del dominio Ω involucra varias dificultades que se irán discutiendo a medida que avance esta presentación. En primer lugar, fijémonos en las ecuaciones (3.1)-(3.9). Estas han sido planteadas sin tener en cuenta el efecto del movimiento de los nodos de la malla. Es evidente que se requiere un planteamiento especial de estas ecuaciones para poder ser utilizado en este caso.

Es bien conocido, y ya se ha introducido en el capítulo 2, que existen dos formas clásicas de representar las ecuaciones de Navier-Stokes: la representación Lagrangiana y la Euleriana. La primera basa la descripción del movimiento en un seguimiento de las partículas del fluido, mientras que la segunda basa la descripción en la posición respecto a un sistema de referencia.

Tradicionalmente, las ecuaciones de dinámica de fluidos se han descrito con formulación euleriana (y así lo hemos hecho aquí) debido a las ventajas que tradicionalmente se la presumía. Sin embargo, en nuestro caso, necesitaremos trabajar en un sistema de referencia arbitrario, en particular en el definido por el movimiento de la malla de elementos finitos. La formulación que describe el movimiento en este caso se denomina *ALE* (Arbitrary Lagrangian Eulerian).

Este tipo de formulaciones arbitrarias provienen del contexto de los métodos de diferencias finitas [HAC74] y más recientemente han sido incorporados al mundo del método de los elementos finitos [HLZ81] [FKT99] [Don82] [OG99] [GO99], principalmente para su aplicación en problemas de interacción fluido estructura.

Como ya se ha comentado en el capítulo anterior, la idea básica de esta formulación es incorporar un dominio de referencia adicional que denominaremos Ω_ξ y cuyas coordenadas de referencia están dadas por el vector $\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Este dominio de referencia podría ser, por ejemplo, el que describe el movimiento de la malla de elementos finitos. De la misma manera denominaremos Ω_λ al dominio material, cuyas coordenadas $\lambda(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ son las etiquetas de las partículas (descritas, por ejemplo, por su posición en $t = 0$). Por último tendremos el dominio espacial común Ω_x de coordenadas $x(x_1, x_2, x_3)$. Es evidente que existen las funciones de transformación de coordenadas $\xi(x, t)$, $x(\xi, t)$, $\xi(\lambda, t)$, $\lambda(\xi, t)$, $\lambda(x, t)$ y $x(\lambda, t)$.

Podemos entonces expresar la derivada material o sustancial $(\frac{D}{Dt})$ de una cantidad χ , como,

$$\frac{D\chi(x, t)}{Dt} = \left[\frac{\partial \chi(x(\xi, t), t)}{\partial t} \right]_\lambda = \left[\frac{\partial \chi(x, t)}{\partial t} \right]_x + \frac{\partial \chi(\xi, t)}{\partial \xi_i} \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right]_\lambda \quad (3.18)$$

La relación (3.18) anterior se suele denominar *ecuación fundamental ALE* [WR98]. Expresa la derivada material de una cantidad χ donde la derivada temporal se ha calculado respecto a un sistema de referencia x y las derivadas espaciales en un sistema de referencia ξ . Las cantidades $\left[\frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right]_\lambda$ se denominan *velocidades convectivas ALE*. En el caso en que el dominio de referencia Ω_ξ describa el movimiento de la malla, se cumple que $\left[\frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right]_\lambda = v_i - v_i^m$, donde $\mathbf{v}^m(v_1^m, v_2^m, v_3^m)$ es la velocidad de deformación de la malla.

Al objeto de aplicar lo aquí expuesto a las ecuaciones del flujo fluido, consideremos las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso incompresible, siguientes [RG96],

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_i}{Dt} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} &= f_i \quad \text{en } \Omega \times (0, t) \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

La forma anterior es la descripción lagrangiana clásica de las ecuaciones de Navier Stokes. Si aplicamos la relación (3.18) en las anteriores (3.19), obtenemos,

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} \right]_{\mathbf{x}} + \left[(v_j - v_j^m) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \right]_{\boldsymbol{\xi}} &= 0 \\ \left[\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right]_{\boldsymbol{\xi}} &= 0 \\ &\text{en } \Omega_{\boldsymbol{\xi}} \times (0, t) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Estas ecuaciones (3.20) son directamente aplicables a nuestro problema, pues nos permiten calcular todas las cantidades en un sistema de referencia $\Omega_{\boldsymbol{\xi}}$, definido por el movimiento de la malla, excepto para las derivadas de la velocidad que son calculadas en el sistema de referencia original $\Omega_{\mathbf{x}}$. Imaginemos que nuestra simulación fuera tal que los nodos de la malla se movieran, avanzando de acuerdo a su velocidad de deformación. Entonces su comportamiento sería exactamente igual que el de las partículas del fluido, y diríamos que nuestra simulación del fluido es lagrangiana. En caso contrario, si nuestra simulación fuera tal que los nodos de la malla permanecieran quietos, el proceso de resolución seguiría un esquema euleriano típico. Es evidente que el sistema (3.20), sólo plantea una generalización de las formulaciones lagrangianas y eulerianas clásicas, permitiendo la posibilidad de contemplar el problema (3.5)-(3.9) respecto de un sistema de referencia arbitrario.

Por otra parte, podemos escribir las ecuaciones estabilizadas (3.5)-(3.8) en forma ALE, sustituyendo la relación (3.18) en (3.5), obteniendo la siguiente forma,

Balance de Cantidad de Movimiento

$$r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.21)$$

Balance de Masa

$$r_d - \frac{1}{2} h_{d_j} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.22)$$

donde

$$r_{m_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + (v_j - v_j^m) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \quad (3.23)$$

$$r_d = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad (3.24)$$

3.4 El Algoritmo de Pasos Fraccionados Semi Implícito

A continuación, se presenta un algoritmo de pasos fraccionados semi implícito, para la resolución de las ecuaciones (3.5)-(3.8) por el método de elementos finitos.

Como se ha mencionado ya en los capítulos anteriores, la introducción de la restricción de compresibilidad del flujo en las ecuaciones de Navier Stokes tiene como resultado efectos muy importantes. Estos efectos se derivan principalmente del hecho de que el campo de velocidades puede tomarse como única incógnita del problema, para ser posteriormente corregido con un campo de presiones derivado de él. En efecto, la presión en la formulación incompresible de las ecuaciones de Navier Stokes, no es ya una variable termodinámica, sino que es una cantidad que establece el equilibrio de fuerzas en cada volumen elemental. De hecho si tomamos el rotacional de (3.3), podemos eliminar la presión de la ecuación de balance de cantidad de movimiento. En ese caso podríamos calcular un campo de velocidades que cumpliera la condición de balance de cantidad de movimiento, y posteriormente corregirlo con un campo de presiones que nos permitiera cumplir la condición de incompresibilidad (que se podría calcular tomando la divergencia de (3.3)).

Por otra parte, la existencia y unicidad de la solución³ de las ecuaciones de Navier Stokes queda demostrada⁴, bajo el cumplimiento de la condición *BB* [Bab71] [Cod93b] [Sot97], tal y como se presentó en el capítulo 1. Esta condición obliga a que los espacios de elementos finitos para la interpolación de la velocidad y la presión sean compatibles [Bab71].

En la práctica, y en el contexto del método de los elementos finitos, existen dos posibilidades para evitar los indeseables resultados de esta inestabilidad. La solución más clásica consiste en utilizar interpolaciones mixtas velocidad presión que verifiquen *BB*. Junto a ésta, existe la posibilidad de modificar la forma variacional típica, resultante de la aplicación del método de Galerkin al problema fuerte (3.1)-(3.4), de manera que la restricción *BB* desaparezca. Dentro de este segundo tipo se encuentran metodologías que, como *GLS* [HF87] [HFH89] [BD88] han ganado mucha popularidad en los últimos años⁵. Un importante grupo de soluciones dentro de esta aproximación lo constituyen

³Tanto del problema continuo como del discreto.

⁴Para moderados valores de R_n .

⁵Ya se ha mencionado que la aplicación de las técnicas *CF* con la adecuada elección de los parámetros permite construir metodologías de este tipo.

los denominados métodos de pasos fraccionados [Cho67] [VCZ99].

Básicamente, han sido desarrollados dos diferentes procedimientos que se agrupan bajo la misma denominación de métodos de pasos fraccionados. Un primer procedimiento estaría basado en la idea de separar los efectos de los términos de transporte por convección de los viscosos. De esta forma sería posible separar, por ejemplo, el tratamiento de los términos convectivos de los efectos de la capa límite. Pero, quizá el más conocido de estos algoritmos, y al que, en lo siguiente, nos referiremos exclusivamente bajo la denominación de método de pasos fraccionados, se debe a A.J. Chorin [Cho67], quien propuso fraccionar la ecuación de balance de cantidad de movimiento, eliminando el término del gradiente de la presión. La idea es resolver una ecuación de balance de cantidad de movimiento aproximada, resolver luego la ecuación de balance de masa y por último corregir la cantidad de movimiento. Este último paso puede interpretarse también como una proyección de la solución sobre el espacio de velocidad con divergencia nula, por lo que el algoritmo se denomina a veces de proyección. El objetivo principal que se perseguía con este fraccionamiento era precisamente la estabilización de la presión. A la vez, se consiguió el beneficio adicional de poder utilizar espacios de interpolación iguales para velocidad y presión. Una revisión de esta metodología y su extensión a diferentes tipos de problemas puede encontrarse en [VCZ99] [VCZ97].

De las diversas variantes que admite el método de pasos fraccionados estudiaremos el denominado algoritmo semi implícito. Este algoritmo resuelve de manera explícita los pasos correspondientes a la resolución aproximada de la ecuación de balance de cantidad de movimiento y su posterior corrección, mientras que es implícito el cálculo del campo de presiones. De hecho, dado que las características de esta algorítmica son especialmente apropiadas para el problema que pretendemos resolver, esta ha sido la elegida para la resolución de las ecuaciones de Navier Stokes en este trabajo. Las ventajas principales, frente a otras metodologías, se pueden resumir en:

- La posibilidad de resolver la ecuación de balance de cantidad de movimiento independientemente de la restricción de incompresibilidad, permite desarrollar un esquema semi implícito de manera que, en cada paso de tiempo sólo haya que invertir una matriz de un sistema (tipo Poisson) con un grado de libertad por nodo (la presión), ahorrando una considerable cantidad de memoria.
- El esquema semi implícito es además especialmente adecuado a nuestro caso, dado que la existencia de una superficie libre hace que la presión esté prescrita sobre gran parte del dominio, permitiendo que la inversión de la matriz del sistema sea muy rápida.
- Los dos aspectos considerados con anterioridad indican que el sistema resultante tiene unas características óptimas para su inversión, siendo simétrico y muy bien condicionado.
- Aunque, como ya se ha mencionado, de la aplicación del método CF^6 (ecuaciones

⁶con la adecuada elección de los parámetros de estabilización.

(3.5)-(3.17)) pueden derivarse esquemas de resolución de las ecuaciones de Navier Stokes (3.1)-(3.4), que permiten igual interpolación de los espacios de velocidad y presión, el uso de este algoritmo, que por si sólo tiene este efecto, permite evitar el cálculo de parte de los términos de las ecuaciones (3.5)-(3.17), ahorrando tiempo de procesamiento.

Simplificando, las anteriores consideraciones se pueden resumir en una frase; el método de pasos fraccionados semi implícito requiere comparativamente menos recursos (tiempo de procesamiento y memoria) que otros algoritmos de resolución de las ecuaciones de Navier Stokes.

A continuación, extendaremos la metodología⁷, presentada en [Cho67] [VCZ99], para la resolución de las ecuaciones de Navier Stokes (3.5)-(3.17) estabilizadas con las técnicas *CF*. Pero en primer lugar, para simplificar la exposición, nos detendremos a derivar el esquema para la resolución de las ecuaciones de Navier Stokes clásicas (ya presentadas en el capítulo 1), dadas por,

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.26)$$

En primer lugar consideremos la ecuación (3.25). Esta puede discretizarse en el tiempo, de forma explícita, como,

$$\rho \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} + \rho v_j^n \frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}^n}{\partial x_j} + \frac{\partial p^n}{\partial x_i} - f_i^n = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.27)$$

Donde, evidentemente, se ha llamado Δt al incremento de tiempo y los superíndices n y $^{n+1}$ indican que el término correspondiente es evaluado en los instantes de tiempo n y $n+1$ respectivamente.

Como ya se ha mencionado, la idea básica del método de pasos fraccionados es dividir la ecuación anterior como sigue,

$$\rho \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} + \rho v_j^n \frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}^n}{\partial x_j} + f_i^n = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.28)$$

$$v_i^{n+1} = v_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.29)$$

Es decir, se elimina el término del gradiente de presión de la ecuación de balance de cantidad de movimiento para obtener una predicción de la velocidad (v_i^*), que luego es corregida tras calcular la presión.

⁷en su versión semi implícita.

Cabe señalar que la suma de las ecuaciones (3.28) y (3.29) da como resultado la ecuación de balance de cantidad de movimiento (3.25) original.

La ecuación de balance de masa (3.26) nos permitirá calcular el campo de presión de manera tal, que se cumpla la condición de divergencia nula. Si discretizamos la ecuación (3.26) en la siguiente forma,

$$\frac{\partial v_i^{n+1}}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.30)$$

y sustituimos la ecuación (3.30) en (3.29), tenemos que,

$$\Delta t \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.31)$$

De esta manera el algoritmo se define por los siguientes pasos,

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & v_i^* = v_i^n + \frac{\Delta t}{\rho} \left(\rho v_j^n \frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + f_i^n \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \\ 2^\circ \quad & \Delta t \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \\ 3^\circ \quad & v_i^{n+1} = v_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \end{aligned} \quad (3.32)$$

Es decir, por cada paso de tiempo se resolverían tres sistemas de ecuaciones, dos de ellos explícitos (1° y 3°) que involucran los grados de libertad de la velocidad v_i y la velocidad fraccionaria v_i^* , y uno implícito⁸ (2°) que permite calcular el campo de presiones.

Es evidente que la solución mediante el método de elementos finitos clásico del paso 1° presenta los inconvenientes ya discutidos en el capítulo 2, de inestabilidad por convección. Esto hace patente que el algoritmo (3.32) requiere para su solución de alguno de los métodos de estabilización de la convección existentes, los cuales ya fueron discutidos en el capítulo 2.

3.4.1 Aplicación a las Ecuaciones de Navier Stokes Estabilizadas mediante Cálculo Finitesimal

A continuación aplicaremos el esquema semi implícito anterior a las ecuaciones (3.5)-(3.9), que representan la forma del problema de Navier Stokes estabilizado con la técnica CF.

La ecuación (3.5) puede discretizarse en el tiempo, de forma explícita, como

⁸Este paso implícito se presenta como un problema tipo Poisson.

$$\rho \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} + \rho \frac{\partial (v_j^n v_i^n)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + \frac{\partial p^n}{\partial x_i} - f_i^n - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}^n}{\partial x_j} = 0 \quad (3.33)$$

$$r_{m_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega$$

Al igual que en el caso anterior, podemos dividir la ecuación anterior como sigue,

$$\rho \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} + \rho \frac{\partial (v_j^n v_i^n)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + f_i^n - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}^n}{\partial x_j} = 0 \quad (3.34)$$

$$v_i^{n+1} = v_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.35)$$

Es decir, se elimina el término del gradiente de presión de la ecuación de balance de cantidad de movimiento, pero, sin embargo, el término correspondiente se mantiene en la estabilización de la ecuación (3.34).

Cabe señalar que, al igual que en el caso anterior, la suma de las ecuaciones (3.34) y (3.35) da como resultado la ecuación estabilizada discreta de balance de cantidad de movimiento (3.33) original.

La ecuación de balance de masa nos permitirá calcular el campo de presión de manera tal, que se cumpla la condición de divergencia nula. Si discretizamos la ecuación (3.6) en la siguiente forma,

$$\rho \frac{\partial v_i^{n+1}}{\partial x_i} - t_{d_i}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \frac{\partial v_i^n}{\partial t} + \rho v_j^n \frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} - f_i^n \right) = 0 \quad (3.36)$$

$$i = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega$$

y sustituimos la ecuación (3.36) en (3.35), se tiene que,

$$(\Delta t + t_{d_i}) \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} - t_{d_i}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \frac{\partial v_i^n}{\partial t} + \rho v_j^n \frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} - f_i^n \right) \quad (3.37)$$

Si tomamos $t_{d_i} = \delta_d$, la ecuación (3.37) anterior se simplifica y queda como sigue,

$$(\Delta t + \delta_d) \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \rho \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} - \delta_d^n \frac{\partial r_{m_i}^n}{\partial x_i} \quad (3.38)$$

Donde se ha denominado,

$$r_{m_i}^n = \left(\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} - f_i \right)^n \quad (3.39)$$

Conviene señalar que, la mera estabilización de la convección (ver [VCZ99] [Oña98b]) realizada sobre el algoritmo de pasos fraccionados estándar (3.32), desprecia la contribución de los términos que son afectados por el factor δ_d ($\delta_d = 0$) en la ecuación (3.38). Se puede comprobar que estos términos introducen un efecto de estabilización adicional que mejora la solución numérica, esto se hace aún más evidente cuando los valores de Δt son pequeños.

La precisión de las ecuaciones presentadas depende del tamaño del incremento de tiempo que debe satisfacer en todo caso los criterios de estabilidad de la solución acoplada.

Como resumen se presentan a continuación las tres ecuaciones (pasos) que resuelven el problema de Navier Stokes, basado en las técnicas presentadas.

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad v_i^* &= v_i^n + \frac{\Delta t}{\rho} \left(\rho \frac{\partial (v_i v_j)^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + f_i^n - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}^n}{\partial x_j} \right) & \text{en } \Omega \\ 2^\circ \quad (\Delta t + \delta_d) \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} &= \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} - \delta_d^n \frac{\partial r_{m_i}^n}{\partial x_i} & \text{en } \Omega \\ 3^\circ \quad v_i^{n+1} &= v_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} & \text{en } \Omega \end{aligned} \quad (3.40)$$

con $i, j = 1, 2, 3$.

3.4.2 Discretización del Problema usando el Método de los Elementos Finitos

En el presente apartado abordaremos la discretización en el espacio de las ecuaciones del método de pasos fraccionados semi implícito presentado anteriormente.

En primer lugar, obtengamos la forma débil de las ecuaciones (3.40), aplicando el método de Galerkin. A partir de lo expuesto de manera general en el capítulo 1, podemos definir el problema como:

Encontrar $\mathbf{v} \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)^N]$ y $p \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)]$, cumpliendo que $\mathbf{v}|_{\Gamma_D} = \mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}|_{\Gamma_M} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{n}$, $p|_{\Gamma_P} = p_e$, tal que,

Ecuación de la Cantidad de Movimiento Fraccionaria

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \psi_i \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} d\Omega &= - \int_{\Omega} \rho \psi_i \frac{\partial (v_i v_j)^n}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \tau_{ij}^n d\Omega - \int_{\Omega} \psi_i f_i^n d\Omega - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial (h_{m_{ij}}^n \psi_i)}{\partial x_j} r_{m_i}^n d\Omega + \int_{\Gamma} \psi_i n_j^n \tau_{ij}^n d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \psi_i h_{m_{ij}}^n n_j^n r_{m_i}^n d\Gamma \\ &\quad \forall \psi \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)^N] \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ecuación de Continuidad

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial [\psi (\Delta t + \delta_d^n)]}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Gamma} (\Delta t + \delta_d^n) \psi n_i^n \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Gamma = \\ = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \psi}{\partial x_i} v_i^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial (\delta_d^n \psi)}{\partial x_i} r_{m_i}^m d\Omega + \int_{\Gamma} \delta_d^n \psi n_i^n r_{m_i}^m d\Gamma - \\ - \int_{\Gamma} \rho \psi v_i^* n_i^n d\Gamma \quad \forall \psi \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)] \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ecuación de Momento o de proyección

$$\int_{\Omega} \psi_i v_i^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} \psi_i v_i^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{\rho} \psi_i \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega \quad \forall \psi \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)^N] \quad (3.43)$$

En lo anterior se ha llamado ψ_i a la i -ésima componente de la función de test ($i = 1, N$) y N el número de dimensión del problema. Por otra parte se debe cumplir $\Gamma_P \cup \Gamma_N \neq \emptyset$ para que el campo de presiones esté determinado.

Al igual que hicimos en el capítulo 1, para la discretización en el espacio de las ecuaciones (3.41)-(3.43) anteriores, se ha de definir el subespacio funcional⁹ $\Psi_h \subset [L^2(0, T), H^1(\Omega)^N]$, asociado a una partición¹⁰ de elementos finitos $\{\Omega^e\}$ del dominio espacial Ω . De esta forma el problema discreto se plantea como sigue:

Encontrar $\mathbf{v} \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)^N]$ y $p \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)]$, cumpliendo que $\mathbf{v}|_{\Gamma_D} = \mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}|_{\Gamma_M} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{n}$, $p|_{\Gamma_P} = p_e$, tal que,

Ecuación de la Cantidad de Movimiento Fraccionaria

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} d\Omega = - \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{\partial (v_i v_j)^n}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{ij}^m d\Omega - \int_{\Omega} \psi_{h_i} f_i^n d\Omega - \\ - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial (h_{m_{ij}}^n \psi_{h_i})}{\partial x_j} \tau_{m_i}^n d\Omega + \int_{\Gamma} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^m d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \psi_{h_i} h_{m_{ij}}^n n_j^n \tau_{m_i}^n d\Gamma \\ \forall \psi_h \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)^N] \end{aligned} \quad (3.44)$$

⁹y $\Psi_h \subset [L^2(0, T), H^1(\Omega)]$, de manera que se denomina $\Psi_h := (\Psi_{h_1}, \Psi_{h_2}, \Psi_{h_3})$.

¹⁰Es decir cumple que $\Omega = \cup \Omega^e$ y $\Omega^e \cap \Omega^{e'} = \emptyset$ si $e \neq e'$.

Ecuación de Continuidad

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{\partial [\psi_{h_i} (\Delta t + \delta_d^n)]}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Gamma} (\Delta t + \delta_d^n) \psi_{h_i} n_i^n \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Gamma = \\
= \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_i} v_i^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial (\delta_d^n \psi_{h_i})}{\partial x_i} r_{m_i}'' d\Omega + \\
+ \int_{\Gamma} \delta_d^n \psi_{h_i} n_i^n r_{m_i}'' d\Gamma - \int_{\Gamma} \rho \psi_{h_i} v_i^* n_i^n d\Gamma \\
\forall \psi_h \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)]
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Ecuación de Momento o de proyección

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \psi_{h_i} v_i^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} \psi_{h_i} v_i^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{\rho} \psi_{h_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega \\
\forall \psi_h \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)^N]
\end{aligned} \tag{3.46}$$

A continuación estudiaremos el sistema (5.27)-(3.46), en lo referente a las condiciones de contorno del problema dadas en (3.9)-(3.14).

En primer lugar consideremos la ecuación del momento fraccionario (5.27). En ella los términos $\int_{\Gamma} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}'' d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \psi_{h_i} h_{m_{ij}}^n n_j^n r_{m_i}'' d\Gamma$ pueden dividirse en la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}'' d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \psi_{h_i} h_{m_{ij}}^n n_j^n r_{m_i}'' d\Gamma = \\
= \int_{\Gamma_F} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}'' d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \psi_{h_i} (t_i + p n_i^n) d\Gamma + \\
+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_F} \psi_{h_i} h_{m_{ij}}^n n_j^n r_{m_i}'' d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} \psi_{h_i} h_{m_{ij}}^n n_j^n r_{m_i}'' d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Donde se ha hecho uso de la definición del vector de tracción, dada por,

$$t_i^n = -p^n n_i + \tau_{ij}'' n_j = \tau_{ij}'' n_j \tag{3.48}$$

Si además tenemos en cuenta las condiciones de contorno dadas en (3.9)-(3.14), se puede escribir la relación (3.47) anterior como,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}'' d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \psi_{h_i} h_{m_{ij}}^n n_j^n r_{m_i}'' d\Omega = \\
= \int_{\Gamma_F} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}'' d\Omega + \int_{\Gamma_N} \psi_{h_i} (t_{ci} + p n_i^n) d\Omega + \\
+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_F} \psi_{h_i} h_{m_{ij}}^n n_j^n r_{m_i}'' d\Omega
\end{aligned} \tag{3.49}$$

De esta forma podemos imponer la tracción a t_{ci} en el contorno Γ_N y tener la posibilidad de incorporar un contorno abierto Γ_F (ver [Sot97] [VCZ97]). En el contorno Γ_F no se impone en absoluto ninguna condición de contorno, lo cual permite que la solución se independice del lugar donde se corta la malla de elementos finitos [Sot97] [VCZ97].

Por otra parte es normal suponer que $\mathbf{h}_{m_i} = 0$ en Γ_F , por lo que la ecuación (5.27) puede escribirse como sigue,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} d\Omega = & - \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{\partial (v_i v_j)^n}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{ij}^n d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} \psi_{h_i} f_i^n d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial (h_{m_{ij}}^n \psi_{h_i})}{\partial x_j} \tau_{m_i}^n d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_F} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^n d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \psi_{h_i} (t_{ci}^n + p n_i^n) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.50)$$

Si nos ocupamos de la ecuación de balance de masa (3.45), y tenemos en cuenta que tal y como se demuestra en el apéndice K, la condición de contorno que expresa el balance de masa en un dominio finito, está dada por,

$$v_i n_i = v_{ci}(\mathbf{x}, t) n_i + \frac{t_{di}}{\rho} n_i r'_{m_i} \quad \text{en} \quad \Gamma_D \times (0, t)$$

y teniendo en cuenta, además, la definición de v_i^* dada en (3.34) y (3.35), se puede escribir,

$$v_{ci}^{n+1} n_i^n = v_i^* n_i^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} n_i^n - \frac{t_{di}^n}{\rho} n_i^n r_{m_i}^* \quad \text{en} \quad \Gamma_D \times (0, t) \quad (3.51)$$

Donde se ha denominado,

$$r_{m_i}^* = \rho \frac{\partial v_i^n}{\partial t} + \rho v_j^n \frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} - f_i^n$$

De esta manera podemos reescribir la ecuación (3.51) como,

$$\rho v_{ci}^{n+1} n_i^n = \rho v_i^* n_i^n - (\Delta t + t_{di}) \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} n_i^n - t_{di}^n n_i^n r_{m_i}^{\prime\prime n} \quad \text{en} \quad \Gamma_D \times (0, t) \quad (3.52)$$

Que es la forma correspondiente de la condición de contorno tipo Dirichlet, que impone la velocidad normal sobre el contorno y que es adecuada para el algoritmo estabilizado. Hay que señalar que la condición de contorno (3.52) presenta una pequeña

incorrección, dado que la velocidad normal se impone sobre el contorno Γ_{D_n} en el instante t_n (cuya normal genérica es \mathbf{n}^n). En realidad esta es la única forma de proceder, dado que el contorno en el instante siguiente no se conoce (en general) hasta que se ha resuelto el paso de tiempo actual. Esta problemática está asociada con la metodología semi implícita de resolución de las ecuaciones y representa un error despreciable del orden $O(\Delta t^2)$, por lo que no reduce la precisión del esquema.

Si, por otra parte, tenemos en cuenta la siguiente relación,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \psi_h \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Gamma} \psi_h n_i^n R_i(p^{n+1}, r_{m_i}'') d\Gamma = \\ &= \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i^* - v_i^n + v_i^n) d\Omega - \int_{\Gamma} \psi_h n_i^n R_i(p^{n+1}, r_{m_i}'') d\Gamma = \\ &= \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial v_i^n}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} (v_i^* - v_i^n) d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma} \psi_h (v_i^* - v_i^n) n_i^n d\Gamma - \int_{\Gamma} \psi_h n_i^n R_i(p^{n+1}, r_{m_i}'') d\Gamma \end{aligned} \quad (3.53)$$

Donde se ha denominado,

$$R_i(p, r_i') = (\Delta t + \delta_d^n) \frac{\partial p}{\partial x_i} + \delta_d^n r_{m_i}''$$

Y, si sustituimos la ecuación (3.52) en (3.53), tenemos,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \psi_h \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Gamma} \psi_h n_i^n R_i(p^{n+1}, r_{m_i}'') d\Gamma = \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial v_i^n}{\partial x_i} d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} (v_i^* - v_i^n) d\Omega + \int_{\Gamma - \Gamma_M} \psi_h (v_i^* - v_i^n) n_i^n d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma - \Gamma_M} \psi_h n_i^n R_i(p^{n+1}, r_{m_i}'') d\Gamma + \int_{\Gamma_M} \psi_h (v_i^{n+1} - v_i^n) n_i^n d\Gamma \end{aligned} \quad (3.54)$$

Donde, si tomamos como condición de contorno natural del problema¹¹ que $v_i^{n+1} n_i^n = v_i^n n_i^n$, su forma estabilizada, dada por (3.52), será,

$$v_i^n n_i^n = \rho v_i^* n_i^n - (\Delta t + t_{d_i}) \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} n_i^n - t_{d_i}^n n_i^n r_{m_i}'' \quad \text{en } \Gamma_{D_n} \times (0, t) \quad (3.55)$$

Que sustituida en (3.54), da como resultado,

¹¹ esta condición de contorno permite que se imponga de manera automática la velocidad normal a Γ del instante anterior.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \psi_h \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Gamma} \psi_h n_i^n R_i(p^{n+1}, r_{m_i}^n) d\Gamma = \\ = \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial v_i^n}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} (v_i^* - v_i^n) d\Omega \end{aligned} \quad (3.56)$$

Donde v_i^n es un campo de velocidades corregido, de manera que se cumple $v_{c_i}^{n+1} n_i^n = v_i^n n_i^n$.

Si sustituimos la relación (3.56) en (3.55), tenemos que,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial [\psi_h (\Delta t + \delta_d^n)]}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial v_i^n}{\partial x_i} d\Omega + \\ + \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} (v_i^* - v_i^n) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial (\delta_d^n \psi_h)}{\partial x_i} r_{m_i}^n d\Omega \end{aligned} \quad (3.57)$$

Con lo cual hemos podido eliminar de la ecuación (3.57) las integrales de contorno con el consiguiente ahorro en tiempo de procesamiento y necesidad de almacenamiento de datos.

Por otra parte, las integrales de (3.57), que involucran derivadas de δ_d^n son calculadas, en sentido distribucional, sólo en el interior de los elementos¹², suponiendo que δ_d^n es constante en su interior. De esta manera podemos escribir una nueva forma de la ecuación (3.57), como,

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} (\Delta t + \delta_d^n) \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial v_i^n}{\partial x_i} d\Omega + \\ + \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} (v_i^* - v_i^n) d\Omega - \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \delta_d^n \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} r_{m_i}^n d\Omega \end{aligned} \quad (3.58)$$

Las ecuaciones (3.50) y (3.58) junto con la (3.46), definen en este caso la forma final del algoritmo *CF* de pasos fraccionados semi implícito.

¹²Si N_i es una función continua y M está definida sólo a nivel elemental (es decir es constante en los elementos y pues $\frac{dM}{dx_i}$ no está definida en los lados de los elementos, se puede demostrar que, en un sentido distribucional [Oña98b, pp. 18-19],

$$\int_{\Omega} N_i \frac{dM}{dx_i} d\Omega = - \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \frac{dN_i}{dx_i} M d\Omega + \int_{\partial\Omega} N_i M n_i d(\partial\Omega)$$

Siendo n_i la normal en el contorno $\partial\Omega$.

Como conclusión se presentan las ecuaciones del algoritmo *CF* de pasos fraccionados semi implícito para su resolución por el método de los elementos finitos. Se incluyen las condiciones de contorno aplicables en cada paso de la resolución¹³.

Ecuación de Cantidad de Movimiento Fraccionaria

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} d\Omega = & - \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{\partial (v_i v_j)^n}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{ij}^n d\Omega - \int_{\Omega} \psi_{h_i} f_i^n d\Omega - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial (h_{m_{ij}}^n \psi_{h_i})}{\partial x_j} r_{m_i}^n d\Omega + \int_{\Gamma_F} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^n d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \psi_{h_i} (t_{c_i}^n + p n_i^n) d\Gamma \\ r_{m_i} = & \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \end{aligned} \quad (3.59)$$

Condiciones de contorno

Contorno libre Γ_F

Tracción $t_{c_i}^n$ impuesta en Γ_N

Ecuación de Continuidad

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} (\Delta t + \delta_d^n) \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega = & - \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial v_i^n}{\partial x_i} d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} (v_i^* - v_i^n) d\Omega - \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \delta_d^n \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} r_{m_i}^n d\Omega \\ r_{m_i}^n = & \left(\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} - f_i \right)^n \end{aligned} \quad (3.60)$$

Condiciones de contorno

Presión prescrita en Γ_P

Velocidad normal a Γ fijada a $v_{c_i} n_i$ en Γ_{D_n}

Velocidad normal a Γ fijada a $v_i^n n_i$ en $\Gamma - \Gamma_{D_n}$

Ecuación de Momento o de proyección

$$\int_{\Omega} \psi_{h_i} v_i^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} \psi_{h_i} v_i^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{\rho} \psi_{h_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega \quad (3.61)$$

Condiciones de contorno

Velocidad prescrita a v_{c_i} en Γ_D

¹³ Aunque existen diversas posibilidades de imponer algunas de estas condiciones, la manera presentada es la que se considera más apropiada, a la vista de los resultados de diferentes pruebas.

3.4.3 Determinación de las Longitudes Características

Hasta ahora hemos presentado la forma general de las ecuaciones de Navier Stokes para su resolución mediante el algoritmo *CF* de pasos fraccionados semi implícito, definido por las ecuaciones (3.59)-(3.61). Ahora bien, a partir de esta forma pueden derivarse diferentes variantes de la metodología general según la elección de los parámetros de estabilización \mathbf{h}_{m_i} y δ_d .

En el capítulo 2 hemos discutido extensamente la elección de los parámetros de estabilización para la ecuación de convección difusión y hemos dado una forma particular para los mismos.

Si nos fijamos en la forma de la ecuación de balance de cantidad de movimiento estabilizada (3.5), y la reescribimos sustituyendo el tensor τ'_{ij} por su valor, tenemos,

$$r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} = 0 \quad (3.62)$$

$$r_{m_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i$$

Si comparamos la ecuación (3.62) anterior con la ecuación estabilizada de convección difusión siguiente, cuya obtención se llevo a cabo en el capítulo 2,

$$r_{CD} - \frac{1}{2} h_{DC_i} \frac{\partial r_{CD}}{\partial x_j} = 0 \quad (3.63)$$

$$r_{CD} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial (v_j \varphi)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K_{ji} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) - Q$$

Donde podemos apreciar claramente el carácter convectivo de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento (tomando $\varphi = v_i$). Además el término viscoso tiene forma de difusión, aunque aparecen ciertos términos cruzados debido al carácter vectorial de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento que, evidentemente, no aparecen en la ecuación de convección difusión.

De esta analogía se puede inferir que las deducciones hechas para la determinación de los parámetros de estabilización de la ecuación de convección difusión en el capítulo 2, nos servirán para su aplicación a la ecuación de conservación de cantidad de movimiento.

Al igual que hicimos en el capítulo 2, descompongamos el vector \mathbf{h}_{m_i} en la siguiente forma¹⁴ (ver figura 3.2),

$$\mathbf{h}_{m_i} = \alpha' h^e \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} + \beta' h^e \frac{\mathbf{v}_{r_i}}{|\mathbf{v}_{r_i}|} \quad (3.64)$$

¹⁴despreciando el término residual \mathbf{h}_s .

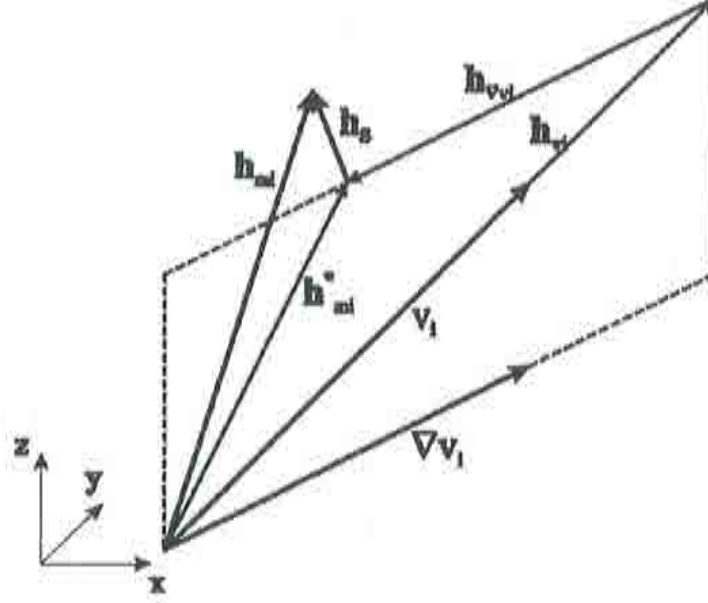


Figura 3.2: Descomposición vectorial del vector h_{m_i} .

Donde $\mathbf{v}_r = \frac{r_{m_i}}{|\nabla v_i|^2} \nabla v_i$ y h^e es una medida del tamaño del elemento¹⁵. Si sustituimos la descomposición (3.64) en (3.59), obtenemos,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} d\Omega &= - \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{\partial (v_i v_j)^n}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{ij}^n d\Omega - \int_{\Omega} \psi_{h_i} f_i^n d\Omega - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \alpha' h^e \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{m_i}^n d\Omega - \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \beta' \frac{h^e}{|\mathbf{v}_{r_i}|} \frac{(r_{m_i}^n)^2}{|\nabla v_i|^2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma_F} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^n d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \psi_{h_i} (t_{c_i}^n + p m_i^n) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.65)$$

En (3.65), las integrales correspondientes al término de estabilización son calculadas, en sentido distribucional, sólo en el interior de los elementos. Esto se debe a que a las funciones de forma ψ_{h_i} no se les exige continuidad en las derivadas primeras¹⁶, y por ello los términos que incluyen derivadas de segundo orden no están definidos en el contorno de los elementos. Esta forma de calcular las integrales de los términos de estabilización es ampliamente usada en la práctica [HFH89] [Cod93a] [Sot97] [Oña96].

Por otra parte, y al objeto de controlar la cantidad de difusión añadida en la

¹⁵El índice e indica que el valor de h^e se tomará constante en el interior de cada elemento. Para su cálculo pueden utilizarse, por ejemplo las recomendaciones presentadas en [Sot97]. Conviene indicar además que este valor puede depender del instante de tiempo.

¹⁶Continuidad C_0 .

estabilización, modificaremos los términos de estabilización para dejar (3.65) en la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} d\Omega &= - \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{\partial (v_i v_j)^n}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{ij}^n d\Omega - \int_{\Omega} \psi_{h_i} f_i^n d\Omega - \\
&- \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \langle k_1 - k_{2_i} \rangle \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{m_i}^n d\Omega - \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} k_{2_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} d\Omega + \\
&+ \int_{\Gamma_F} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^n d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \psi_{h_i} (t_{e_i}^n + p m_i^n) d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Donde, los parámetros k_1 y k_2 toman los siguientes valores,

$$\begin{aligned}
k_1 &= \alpha'(\gamma) \frac{h}{2} |\mathbf{v}| \\
k_{2_i} &= \beta'(\gamma_{||i}) \frac{h}{2} \frac{|r_{m_i}|}{|\nabla v_i|}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Siendo $\langle a_1, a_2 \rangle = \max(0, a_1 - a_2)$, $\gamma = \frac{|\mathbf{v}| h^e}{2\nu}$ y $\gamma_{||i} = \frac{|\mathbf{v}_{||i}| h^e}{2\nu}$, con $\mathbf{v}_{||i} = \frac{\mathbf{v} \cdot \nabla v_i}{|\nabla v_i|^2} \nabla v_i$. Donde, para el cálculo de γ , $\gamma_{||i}$ se ha identificado el valor de la difusión con el de la viscosidad cinemática del fluido $\nu = \mu/\rho$, como puede deducirse fácilmente de la comparación entre (3.59) y (3.5).

Para mayor claridad, reproducimos aquí de nuevo, la tabla extraída de [Cod93a] [Sot97] que nos permite calcular los valores de los coeficientes α' , β' .

$$\begin{aligned}
&\begin{array}{cc} & m=1 \\ \alpha'(\gamma) & |\gamma| > 1 \quad \left\{ \begin{array}{cc} \frac{7}{3} & |\gamma| \leq 3 \\ 1 & |\gamma| > 3 \end{array} \right\} \\ \alpha'(\gamma) & |\gamma| \leq 1 \quad \frac{7}{3} \\ \beta'(\gamma_{||i}) & \max\left(0, 0.7 - \frac{1}{\gamma_{||i}}\right) \end{array} \quad \begin{array}{cc} & m=2 \\ \left\{ \begin{array}{cc} \frac{7}{6} & |\gamma| \leq 3 \\ \frac{1}{2} & |\gamma| > 3 \end{array} \right\} \\ \frac{7}{9} \\ \max(0, 0.35 - \frac{1}{\gamma_{||i}}) \end{array}
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Donde m es el grado de los polinomios empleados en la interpolación.

En lo referente a la determinación del parámetro δ_d correspondiente a la ecuación (3.60), una elección apropiada [OSI00] [GO99] es la más simple,

$$\delta_d = \max\left(\frac{h^e}{2|\mathbf{v}|}, \frac{\rho h^e{}^2}{4\mu}\right)$$

Que viene determinado por el análisis de los límites de estabilidad del problema de convección difusión [Cod93a] [OM99].

De esta manera la ecuación (3.60), quedará en la forma,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial [\psi_h (\Delta t + \delta_d^n)]}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega = & - \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial v_i^n}{\partial x_i} d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} (v_i^* - v_i^n) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial (\delta_d^n \psi_h)}{\partial x_i} r_{m_i}^m d\Omega \end{aligned} \quad (3.69)$$

3.4.4 El Fenómeno de la Turbulencia

Hasta ahora se ha presentado una metodología para la resolución de las ecuaciones de Navier Stokes incompresibles en un *régimen laminar*. Estas ecuaciones pueden ser derivadas partiendo de unos principios generales y bajo unas ciertas hipótesis (ver apéndice J).

Por otra parte, tal y como se discutió en el capítulo 1, la existencia y unicidad de la solución de estas ecuaciones, sólo puede ser demostrada bajo ciertas hipótesis restrictivas, que en términos generales se reducen a que el número de Reynolds R_n sea moderado. Ante esta evidencia, no tenemos más que preguntarnos qué ocurre en el caso general. Es conocido que en algunos casos simplificados se puede demostrar que existe solución de la forma débil del problema si existe solución a la forma fuerte original [Lio84]. Pero, por otra parte, el análisis numérico nos permite obtener soluciones a los problemas planteados, incluso a elevados valores de R_n . Entonces, ¿es física esa solución?

En la realidad, la experimentación sugiere que esas soluciones *laminares* están ahí, pero son más inestables cuanto mayor es el valor de R_n del problema. Esta inestabilidad de la solución significa que, en un experimento, en función del valor de R_n podemos encontrar las siguientes situaciones,

- Una única solución.
- Sistemas estacionarios con más de una solución. La situación estacionaria final es función de las condiciones iniciales.
- Más de una solución, alguna de ellas no estacionaria. La situación estacionaria final es función de las condiciones iniciales.
- Un flujo caótico plenamente desarrollado [Tab89] cuya solución, en un diagrama de fases, describe un atractor extraño. Este tipo de flujo se denomina *turbulento*.

En el sentido expresado anteriormente, podemos considerar R_n como el parámetro de bifurcación del problema.

Se acepta que este denominado flujo turbulento cumple con los principios de la mecánica de fluidos (las ecuaciones de Navier Stokes) debido a que las escalas de longitud más pequeñas de este tipo de fenómenos son mucho mayores que las escalas moleculares. Desafortunadamente estas escalas son todavía mucho menores que las

que son posibles de calcular por simulación directa, excepto en los casos más simples, de escasa utilidad práctica [BB98] [DLDB98]. La razón de ello es que la turbulencia presenta fluctuaciones mucho más pequeñas que el tamaño de los elementos en los que se discretiza el dominio. Los vórtices más pequeños sólo podrían capturarse con tamaños de los elementos del orden $h \approx \nu^{\frac{3}{4}}$ [MP94]. El número de nodos de una malla tridimensional con ese tamaño de elementos, sería del orden de $\nu^{-\frac{9}{4}}$. Un valor de $\nu \approx 10^{-6}$, que corresponde a las aplicaciones que pretendemos resolver en nuestro caso, nos llevaría a 10^{14} nodos. En la actualidad, los superordenadores permiten trabajar hasta con 10^7 nodos [LYO98], con lo que aún tendremos que esperar para tener disponibles ordenadores capaces de resolver este tipo de problemas mediante simulación directa.

Por otra parte, cabe añadir que, el límite del problema de Navier Stokes para $R_n \rightarrow \infty$ es el denominado problema de Euler, ya introducido en el capítulo 1. Este problema es una simplificación del más general de Navier Stokes, en el que se han eliminado los términos de viscosidad. Es evidente que, con esta simplificación se eliminan muchos fenómenos de interés de la simulación numérica, que pueden dar lugar a flujos que nada tienen que ver con los que se encuentran en el límite $R_n \rightarrow \infty$. Pero, sin embargo, la experiencia demuestra que el análisis numérico del fluido para $R_n \rightarrow \infty$ resulta en soluciones muy similares a las que se producen en la realidad, en muchos casos prácticos. En este sentido hay que añadir que los flujos típicos en hidrodinámica naval tienen valores característicos de $R_n = 10^9$, con lo que se hace evidente que la consideración de $R_n \rightarrow \infty$ no es tan descabellada.

Las Ecuaciones de Reynolds

Recuperemos, para la siguiente exposición, las ecuaciones de Navier Stokes (3.1) y (3.2), obtenidas en el apéndice J, y en las que, para comodidad en la exposición siguiente, se han eliminado los términos de estabilización,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_i v_j)}{\partial x_j} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} &= f_i \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

Con las adecuadas condiciones de contorno e iniciales, que para la siguiente discusión no son importantes.

Como se comentó anteriormente, con las capacidades de cálculo disponibles en la actualidad, las ecuaciones (3.70) no pueden ser resueltas, con suficiente exactitud, en flujos turbulentos. Sin embargo, para la mayoría de los problemas de ingeniería, no es necesario conocer exactamente la distribución de velocidades y presiones en el fluido, sino unos valores medios (tanto espaciales como temporales). Por lo tanto, podemos adoptar un método estadístico para obtener una aproximación de esos valores medios. Esta metodología fue sugerida por Osborne Reynolds [Rey83] tras una serie de experimentos sobre el flujo a través de tubos. Una de sus más importantes conclusiones

fue que el comportamiento general del fluido depende de un número (llamado tras él número de Reynolds):

$$R_n = \frac{\rho v d}{\mu} \quad (3.71)$$

donde d es el diámetro del tubo y v es la velocidad de entrada. Reynolds pudo observar como para bajos R_n el flujo permanece en régimen laminar (con un perfil parabólico de velocidades sobre el tubo). Pero cuando R_n superaba un valor crítico (en torno a 2000) el flujo aparecía turbulento (el perfil parabólico desaparecía) a una cierta distancia de la entrada del tubo. A partir de ahí el efecto de aumentar R_n significaba que la región turbulenta se extendía más y más.

La complejidad del fenómeno de la turbulencia implica la necesidad de separar dos regiones de valores de R_n . Aquella de valores alejados del valor crítico de R_n (aquél en el que se produce la transición al régimen turbulento) y aquella en la que se está cercano a la transición. El fenómeno de la transición al régimen turbulento debe abordarse de forma casi independiente del problema general de la turbulencia, y no se considera de interés su estudio en el presente trabajo.

En realidad la separación anterior nos permite simplificar el problema. Ante problemas con bajos o moderados valores de R_n , o aquellos en los que el régimen laminar sea predominante, recurriremos a la solución del problema de Navier Stokes presentado con anterioridad en este capítulo. Para valores elevados de este parámetro tendremos que recurrir a una nueva formulación que se basa en criterios estadísticos y que presentamos a continuación.

Siguiendo los mencionados criterios estadísticos, estudiaremos el problema en relación a la media de las variables que lo describen. Comencemos diciendo que es posible definir tres tipos de medias; la media temporal, la media espacial y la media estadística [Sot97].

La media temporal es apropiada para la turbulencia estacionaria, esto es, un flujo turbulento que, de media, no varía con el tiempo. Para flujos de este tipo, la media de una variable instantánea $\chi(\mathbf{x}, t)$, se define como,

$$\bar{\chi}_t(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \chi(\mathbf{x}, t) dt \quad (3.72)$$

La media espacial es apropiada para la turbulencia homogénea. Esto ocurre en el flujo turbulento que, de media, es uniforme en todas direcciones. Esta media se define por,

$$\bar{\chi}_e(t) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V \chi(\mathbf{x}, t) dV \quad (3.73)$$

La media estadística (o media de experimentos) es la más general. Se define como la media de N experimentos idealmente iguales. Si se denomina $\chi_n(\mathbf{x}, t)$ a la distribución de la variable $\chi(\mathbf{x}, t)$ en el n -ésimo experimento, podemos expresar la media estadística como,

$$\bar{\chi}_s(\mathbf{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(\mathbf{x}, t) \quad (3.74)$$

Para un flujo turbulento, homogéneo y estacionario, se ha de suponer que las tres medias anteriores coinciden. Para la siguiente discusión adoptaremos la media estadística (3.74).

Si consideramos las variables del flujo como variables estadísticas, estas pueden describirse como la suma de su valor medio más una fluctuación aleatoria, es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \quad (3.75)$$

donde $\bar{\mathbf{v}}, \bar{p}$ son las medias¹⁷ de las variables \mathbf{v}, p y \mathbf{v}', p' sus fluctuaciones aleatorias. Las relaciones (3.75) es la denominada descomposición de Reynolds base de la siguiente discusión. Si sustituimos la (3.75) en las ecuaciones (3.70) y tomando la media en estas últimas¹⁸, podemos escribir,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (\bar{v}_j \bar{v}_i)}{\partial x_j} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} &= \bar{f}_i \\ \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

El término $\frac{\partial (\bar{v}_j \bar{v}_i)}{\partial x_j}$ puede expandirse si se hace uso de la descomposición (3.75), quedando como,

$$\frac{\partial (\bar{v}_j \bar{v}_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial (\bar{v}_j \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\bar{v}_j' \bar{v}_i')}{\partial x_j} \quad (3.77)$$

y sustituida en la ecuación (3.76) queda como,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (\bar{v}_j \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial (\bar{v}_j' \bar{v}_i')}{\partial x_j} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} &= \bar{f}_i \\ \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

¹⁷notaremos la media de una variable con el signo "-" sobre él. Es decir la media de f , se notará \bar{f} .

¹⁸se ha de tener en cuenta que la media de las fluctuaciones es nula.

Si comparamos la ecuación (3.78) con (3.70) y si identificamos las medias de las variables con las que define la ecuación (3.70), vemos que la única diferencia es la adición del término $\rho \frac{\partial(\overline{v_j'v_i'})}{\partial x_j}$. Es usual escribir este término como [Sot97] [VCZ97],

$$\frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial x_j}, \quad \tau_{ij}^R = -\rho \overline{v_j'v_i'} \quad (3.79)$$

Donde $\underline{\tau}^R$ es el denominado tensor de tensiones de Reynolds o de tensiones turbulentas.

La aparición de este nuevo término en las ecuaciones de Reynolds, requiere que sea modelado de alguna manera para cerrar el sistema de ecuaciones (que ahora tiene $N \times N$ nuevas incógnitas).

La propuesta más conocida para modelar el tensor de Reynolds supone que las tensiones turbulentas son proporcionales al gradiente de las velocidades medias,

$$\tau_{ij}^R = 2\mu_T \varepsilon_{ij} - \frac{2}{3}k \delta_{ij} \quad (3.80)$$

Que es la denominada hipótesis de Boussinesq [Wil93] [Sot97], donde k es la energía cinética de las fluctuaciones definida como,

$$k = \frac{1}{2} \overline{v_i'v_i'}$$

Si sustituimos la ecuación (3.80) en (3.70) podemos escribir,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - 2(\mu_T + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} &= f_i \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (3.81)$$

donde se han eliminado las marcas "-" sobre los valores promediados y se ha incluido el término k en la presión, por lo que no es necesaria su determinación.

Modelos de Turbulencia

Sobre la base de la modelización anterior del tensor de Reynolds, el problema de incorporar los efectos de la turbulencia se reduce a encontrar la distribución de la viscosidad turbulenta μ_T , que aparece en la ecuación (3.80). Hay que señalar que esta no es una propiedad del fluido, sino que depende del estado local de la turbulencia. Originalmente, el concepto de viscosidad turbulenta surgió por analogía entre el movimiento molecular y el movimiento turbulento [Wil93] [Sot97]. Es interesante notar el parecido

de la definición (3.80), con la presentada en el capítulo 1 para el tensor de tensiones del fluido τ_{ij} . Esta analogía lleva a considerar que los vórtices turbulentos (*turbulent eddies*) se comportan como partículas de fluido, que, como las moléculas, colisionan e intercambian cantidad de movimiento. Dado que la viscosidad molecular es proporcional a la velocidad media y al camino medio libre entre moléculas, siguiendo la analogía se puede postular que la viscosidad turbulenta es proporcional a una velocidad característica del movimiento fluctuante y a una escala de longitud típica de éste, la cual Prandtl [Pra25] bautizó como longitud de mezcla. Esto puede escribirse como,

$$\mu_T \propto \rho v_m l_m \quad (3.82)$$

Donde v_m es la velocidad característica del movimiento fluctuante y l_m es la longitud de mezcla.

A los argumentos anteriores, base de la modelización (3.82), se le puede objetar que los vórtices turbulentos no son cuerpos rígidos y por tanto no tienen porqué comportarse como tales. Sin embargo, la experiencia demuestra que el modelo (3.82) funciona bien en la práctica.

A continuación, se presentarán diferentes modelos de turbulencia, los cuales se diferencian en la manera de determinar v_m y l_m . Estos serán modelos simples de los denominados de cero ecuaciones [Sot97]. En principio los modelos más complicados de una y dos ecuaciones (ver [LRB⁺98] [Sot97] [VCZ99]) debieran ser más exactos que los que se presentarán aquí, que no incluyen, en su formulación, ningún efecto de transporte de las cantidades turbulentas¹⁹. Sin embargo, las conclusiones de dos de los últimos congresos en los que se compararon resultados de análisis *CFD* en buques, no permiten apoyar esa suposición. Incluso, las evidencias sugieren lo contrario [LB97] [TOK97]. Esto puede ser debido a la gran dificultad de estabilizar las ecuaciones que modelizan el transporte convectivo de las variables turbulentas [Sot97] [VCZ99] en las formulaciones más complejas, que puede dar lugar a resultados imprevisibles. Esta complejidad es similar a la estudiada para la ecuación de convección-difusión en el capítulo 2, y la técnica *CF* está disponible para solventar este aspecto. Frente a la complejidad de estos modelos, los más simples son fácilmente calibrados para tipos de problemas específicos y permiten obtener muy buenas, y consistentes predicciones del flujo [Wil93].

En virtud de las anteriores conclusiones y siguiendo los objetivos de este trabajo presentados en la introducción se creyó oportuno incluir modelos turbulentos simples y robustos que permitieran obtener resultados suficientemente cercanos a los reales con un alto grado de fiabilidad.

Modelo de Longitud de Mezcla. El modelo de longitud de mezcla fue el primer modelo de turbulencia propiamente dicho [Wil93]. Fue introducido por Prandtl [Pra25] en 1925 y se basa en la denominada hipótesis de longitud de mezcla de Prandtl. Este

¹⁹Es decir, la turbulencia se disipa allí donde se genera.

postuló que la velocidad característica del movimiento fluctuante v_m era proporcional al gradiente de la velocidad media por la longitud de mezcla l_m .

$$v_m = l_m \sqrt{2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} \quad (3.83)$$

La hipótesis anterior se basó en la observación del flujo cortante (*shear flow*), donde sólo hay una componente del gradiente de velocidad y sólo una componente del tensor de Reynolds es importante [Sch69] [Wil93].

De la relación (3.83), y junto con la relación (3.82), se puede obtener,

$$\mu_T = C\rho l_m^2 \sqrt{2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} \quad (3.84)$$

Donde C es la constante de proporcionalidad de (3.82).

La longitud de mezcla l_m se puede considerar constante, aunque existen fórmulas de base experimental que permiten su determinación. Si denominamos y a la distancia a la superficie sólida, la fórmula de Nikuradse [Sch69] define,

$$l_m = L \left[0.14 - 0.018 \left(1 - \frac{y}{L} \right)^2 - 0.06 \left(1 - \frac{y}{L} \right)^4 \right] \quad (3.85)$$

Donde L es una distancia característica del problema que en canales abiertos suele tomarse como la altura total del flujo.

Como ya se ha mencionado, se han desarrollado diferentes formulaciones para el cálculo de l_m . Una de las más conocidas se debe a Baldwin y Lomax [?] (ver también [LB97] [Sch69]). Este modelo propone calcular l_m en la capa límite (l_{m_i}), como [Wil93],

$$l_{m_i} = \kappa y \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A_0^+}} \right) \quad (3.86)$$

Donde y^+ es un valor adimensional²⁰ de la distancia a la pared y , y que se definirá posteriormente (3.94), en este mismo capítulo, con objeto del estudio de la capa límite. A_0^+ es una constante que toma el valor $A_0^+ = 26$.

La anterior ecuación (3.86) puede ser corregida, para tener en cuenta los efectos de los gradientes de presión, en la siguiente forma,

$$\begin{aligned} l_{m_i} &= \kappa y \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}} \right) \\ A^+ &= 26 \left[1 + y \frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\rho v_\tau^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.87)$$

²⁰ $y^+ = \frac{y v_\tau}{\nu}$ donde $v_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$, siendo τ_p la tensión de corte en la pared.

Donde x debe entenderse como la dirección del flujo (y es la dirección normal a la pared) y v_τ es la velocidad de fricción que se introducirá posteriormente.

En cambio, fuera de la capa límite, la viscosidad turbulenta está dada por,

$$\mu_T = \rho C_1 C_2 F_W F_K \quad (3.88)$$

Donde,

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.0168, \quad C_2 = 1.6 \\ C_W &= 0.25, \quad C_K = 0.3 \\ F_W &= \min \left[y_{max} F_{max}, C_W y_{max} \frac{v_{max}^2}{F_{max}^2} \right] \\ F_{max} &= \frac{1}{\kappa} \max_y (l_m \sqrt{2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}) \\ F_K &= \left[1 + 5.5 \left(\frac{C_K}{y_{max}} \right) \right] \end{aligned}$$

Donde y_{max} es el valor de y donde la cantidad $(l_m \sqrt{2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}})$ toma su máximo y v_{max} es la máxima velocidad en la capa límite²¹.

Modelo de Smagorinsky. El modelo de Smagorinsky es un caso sencillo de los modelos tipo *LES* (*Large Eddy Simulation*). La base de estos métodos es intentar modelar el movimiento de las escalas más pequeñas del problema que no pueden ser capturadas por la malla de elementos finitos, mientras que el movimiento de las escalas mayores de la turbulencia se resuelve directamente.

Este modelo propone que la viscosidad turbulenta depende del tamaño de la malla de la siguiente forma [Sma63],

$$\mu_T = C \rho h^e \sqrt{2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} \quad (3.89)$$

Donde C es una constante que debe ser del orden de $C \approx 0.01$, y h^e el tamaño del elemento en cuestión.

Aunque el modelo de Smagorinsky (3.89) se basa en supuestos diferentes que el de longitud de mezcla (3.84), los dos coinciden si se toma $l_m = h^e$.

²¹Aunque para flujo en cortante se suele tomar la diferencia entre la velocidad máxima en la capa límite y la velocidad en el punto en el que la cantidad $(l_m \sqrt{2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}})$ toma su máximo.

La Ley de Pared

Siguiendo con el modelo de longitud de mezcla, estudiaremos como se comporta el flujo en las cercanías de un contorno sólido. La figura 3.3 muestra un típico perfil de velocidades para una capa límite turbulenta. La cantidad y^+ , como se definirá después, es una distancia adimensional a la pared, al igual que v^+ que representa el módulo de la velocidad adimensional. Desde un punto de vista experimental, pueden distinguirse las tres regiones que aparecen representadas en la figura 3.3. Estas son, una capa interna o subcapa viscosa, una capa externa y una capa de transición entre ambas conocida como capa logarítmica o en ocasiones también capa plenamente turbulenta [Wil93]. Esta capa logarítmica se define por ser la zona suficientemente cercana a la pared que los términos inerciales de las ecuaciones de Navier Stokes pueden despreciarse y que a la vez está lo suficientemente alejada de ella como para que se puedan despreciar las tensiones (moleculares) viscosas frente a las de Reynolds. Esta región se acepta que se encuentra en el intervalo entre $y^+ = 30$ e $y^+ = 100$ (o incluso por encima, dependiendo del valor de R_n).

Por otra parte, se supone que en la zona más cercana a la pared (subcapa viscosa) la velocidad varía linealmente con y^+ para después tender asintóticamente hacia la variación en capa logarítmica. La capa exterior se extiende hasta una distancia δ , que es la amplitud de la capa límite. El comportamiento de la velocidad en esa zona es mucho más complicado de definir.

Estrictamente hablando la capa logarítmica no es sino una transición entre las capas interna y externa. Sin embargo, encontraremos, por la simplicidad de las ecuaciones que la gobiernan que es muy útil para simplificar la simulación de los fenómenos en la zona cercana a las paredes.

Si consideramos una capa límite (bidimensional) con presión constante, el flujo en situación estacionaria estará gobernado por las siguientes ecuaciones de la capa límite [Wil93], que pueden derivarse de la simplificación de las ecuaciones de Reynolds,

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{12}^R \right] &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (3.90)$$

Dado que en la zona de la capa logarítmica los términos convectivos son despreciables, las ecuaciones 3.90 indican que la suma de las tensiones de Reynolds y viscosas debe ser constante,

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{12}^R \approx \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_P = \tau_P \quad (3.91)$$

Donde el subíndice P indica "evaluado en la pared" y por lo tanto τ_P es la tensión de corte en la pared. Normalmente se denomina velocidad de fricción al valor dado por $v_\tau = \sqrt{\frac{\tau_P}{\rho}}$.

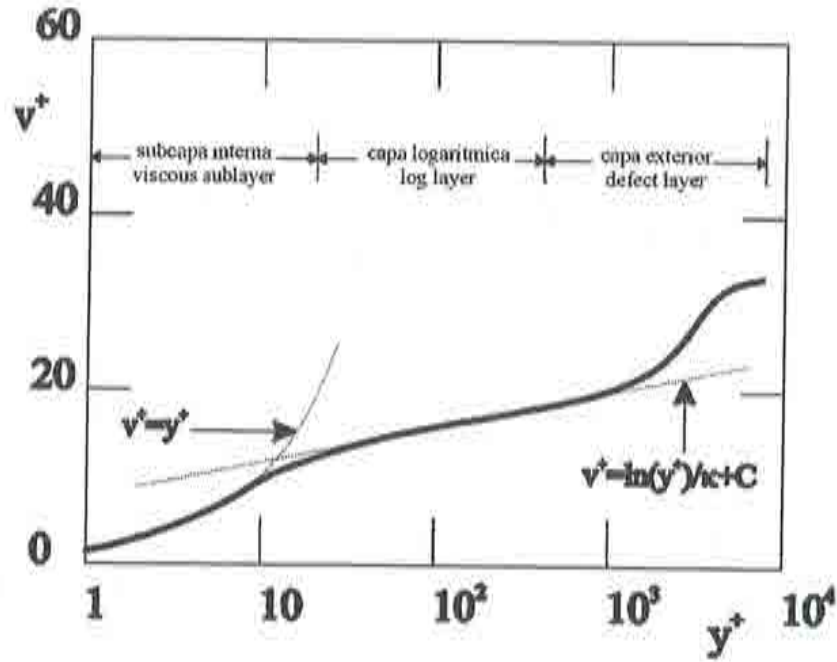


Figura 3.3: Distribución de velocidad típica para una capa límite turbulenta.

Como se indicó anteriormente, en la capa logarítmica las tensiones de Reynolds son mucho mayores que las viscosas, y por lo tanto de acuerdo con el modelo de longitud de mezcla,

$$l_m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \approx v_\tau^2 \quad (3.92)$$

Si se supone que la longitud de mezcla [Wil93] está dada por $l_m = \kappa y$, podemos integrar la ecuación (3.92) inmediatamente, resultando,

$$u \approx \frac{v_\tau}{\kappa} \ln(y) + C \quad (3.93)$$

Donde si introducimos las siguientes cantidades adimensionales,

$$\begin{aligned} y^+ &= \frac{y v_\tau}{\nu} \\ u^+ &= \frac{u}{v_\tau} \end{aligned} \quad (3.94)$$

y las sustituimos en (3.93), obtenemos la forma más conocida de la denominada *ley de pared*.

$$u^+ \approx \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C \quad (3.95)$$

Donde κ es conocida como constante de Kármán y C es una constante adimensional, sus valores, para capas límite incompresibles sin gradientes de presión significativos, pueden tomarse como [Wil93],

$$\begin{aligned} \kappa &\approx 0.41 \\ C &\approx 5.0 \end{aligned}$$

Evidentemente, por los supuestos que se han hecho, la ley (3.95) sólo se considera válida²² entre $y^+ = 30$ e $y = 0.1\delta$.

Sin embargo la ley (3.95) ha sido revisada en muchas ocasiones, con el objetivo de extender su rango de validez, aquí consideraremos, la denominada ley de pared de Reichardt [Wil93] [FKT99] siguiente,

$$u^+ \approx 2.5 \ln(1 + \kappa y^+) + 7.8 \left(1 - e^{-\frac{y^+}{11}} - \frac{y^+}{11} e^{-0.33 y^+} \right) \quad (3.96)$$

El rango de validez de la anterior se sitúa entre $y^+ = 0$ e $y = 0.1\delta$ (o $y^+ = 300$).

A partir de aquí, pueden considerarse otras muchas modificaciones de la ley de pared (ver por ejemplo [Wil93]) pero por su simplicidad y su óptimo comportamiento para simular flujos desprendidos [Wil93] [Sot97] (los cuales violan las hipótesis de la ley de pared) cabe destacar la siguiente ley que permite tener en cuenta los efectos de la rugosidad,

$$u^+ \approx \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y^+ S_R}{100} \right) + 8.4 \quad (3.97)$$

Siendo,

$$S_R = \left\{ \begin{array}{ll} (50/k_R^+)^2 & \text{si } k_R^+ < 25 \\ 100/k_R^+ & \text{si } k_R^+ \geq 25 \end{array} \right\}$$

donde $k_R^+ = \frac{k_R v_\tau}{\nu}$, siendo k_R la altura media de la rugosidad.

Las leyes de pared dadas en (3.95), (3.96) y (3.97) pueden utilizarse para simplificar los cálculos. Fijémonos en la figura 3.4, en ella podemos (a la izquierda) ver la disposición de los nodos de una malla de elementos finitos cerca de una pared. Supongamos

²²para valores menores de y^+ se puede considerar más exacta la relación [Sot97] $y^+ = u^+$. Aunque cabe señalar que las dos leyes coinciden [GM98] para $y^+ = 11.06$.

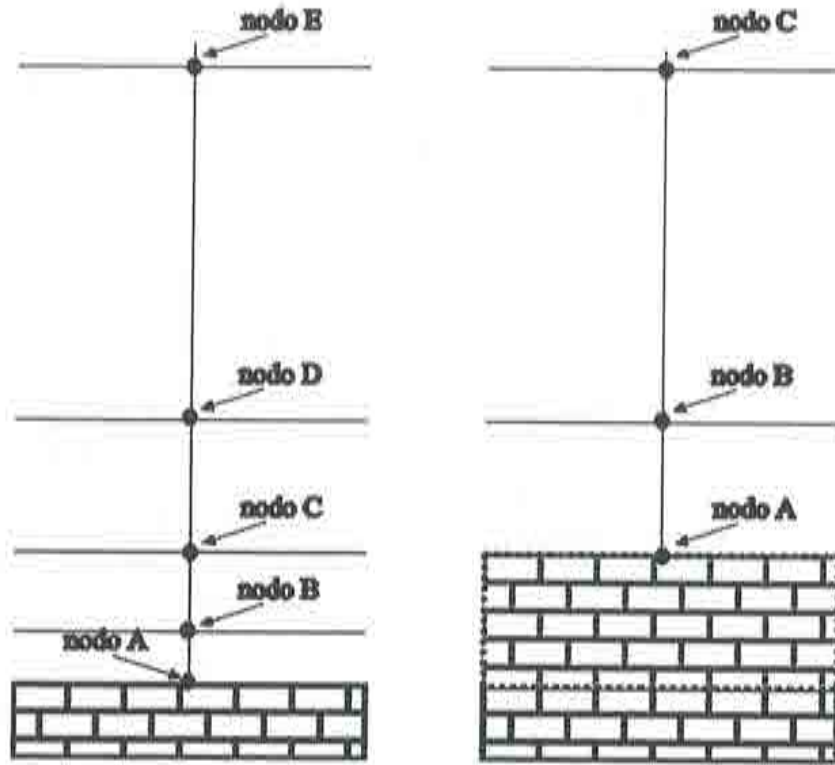


Figura 3.4: Simplificación del problema para la condición de contorno para la ley de pared.

que los nodos A, B, C están dentro de la zona descrita por las leyes de pared anteriores (en general $y_C^+ < 100$). Dado que conocemos la forma de la solución en la zona más cercana a la pared (esta dada por (3.95), (3.96) o (3.97)), podemos eliminar la parte de la malla más próxima al contorno (nodos A y B de la figura 3.4), sustituyendo su efecto por una condición especial en el siguiente nodo de la malla (nodo C de la izquierda de la figura 3.4). esta condición de contorno especial es la tracción dada por la ley de pared.

Efectivamente, dado el par y, v , es posible gracias a (3.95), (3.96) y (3.97) calcular v_τ , y con él $\tau_p = \rho v_\tau^2$. Que es la componente de la tracción tangente al contorno (en la dirección de la velocidad), que es constante en la zona más cercana a la pared (nodos A, B, C en nuestro caso).

Fijémonos en la parte derecha de la figura 3.4, para poder describir de manera breve el algoritmo para la implementación de esta condición de contorno.

- 1° Dado y , mover la pared una distancia y según la normal (ver parte derecha de la 3.4)
- 2° Resolver el problema de flujo imponiendo en el nodo A, $v_i n_i = 0$
- 3° Calcular τ_p a partir de $|\mathbf{v}_A|$ dado y
- 4° Resolver el problema del flujo fluido imponiendo en el nodo A,
 $v_i n_i = 0, n_j \tau_{ij} = \tau_p \frac{v_i}{|\mathbf{v}|} - \frac{1}{2} h_{mij} n_j r_{mi}$
- 5° Volver a 3°

(3.98)

Por otra parte y dado que la distancia que abarca la zona interior y la logarítmica de la capa límite (se puede considerar en torno a 0.1 δ) es en general despreciable frente al tamaño de los elementos de la malla, podemos despreciar el desplazamiento del contorno (paso 1° del algoritmo (3.98)) con lo que la condición de tracción puede imponerse directamente sobre el nodo de contorno de la malla.

Una revisión sobre las bondades y limitaciones de la Ley de Pared puede encontrarse en [BH].

3.5 Ejemplos

A continuación se presentan algunos ejemplos numéricos, de validación del algoritmo presentado.

3.5.1 Ejemplo 1

El primer ejemplo es el problema del flujo confinado en una cavidad (en inglés *cavity flow*). Esta es una prueba clásica para evaluar el comportamiento de un algoritmo en la resolución de flujos incompresibles. En este caso extenderemos el problema, que normalmente se estudia bidimensionalmente, al espacio tridimensional.

Un esquema del problema puede verse en la figura 3.5. Un fluido viscoso está confinado en una cavidad en forma de cubo de lado unidad. Todos los lados del cubo tienen prescrita la condición de velocidad nula²³, a excepción del superior, cuya prescripción es velocidad unidad, y las caras delantera y posterior, que tienen impuesta la condición de velocidad normal nula. Se impone la condición de presión nula en una línea paralela al eje de simetría del problema sobre la base del cubo (ver figura 3.5).

Inicialmente, excepto en la cara superior, la velocidad se hace nula. A partir de ese momento inicial, la viscosidad transmite la cantidad de movimiento al interior de la cavidad.

Para los cálculos se utilizó una malla de 9553 tetraedros lineales con 1970 nodos, cuyo contorno se muestra en la figura 3.6.

En las figuras 3.8, 3.7 y 3.9, se presentan diversos resultados obtenidos para un R_η unidad. Para un valor tan bajo de R_η podemos suponer que los términos convectivos

²³Incluyendo las aristas laterales de la cara superior del cubo.

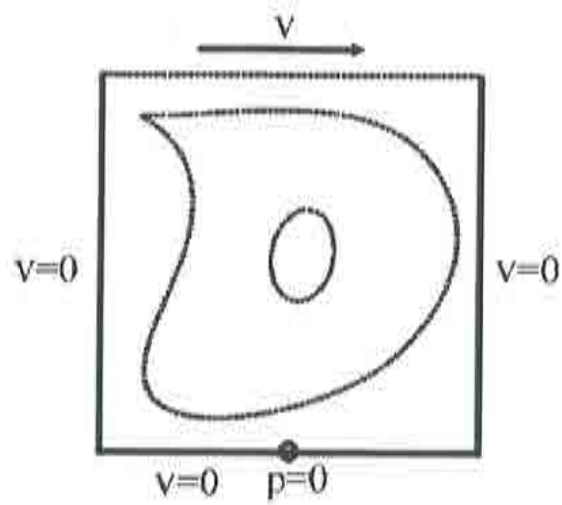


Figura 3.5: Flujo en una cavidad. Definición del problema.

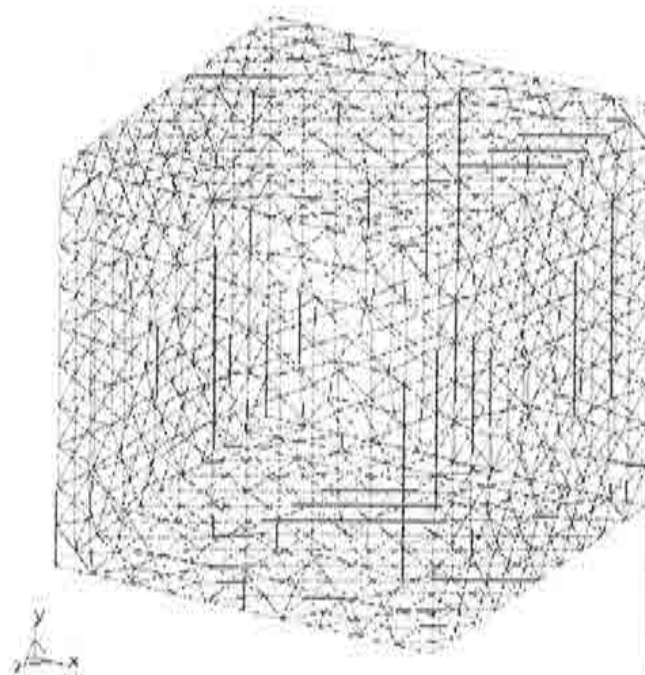


Figura 3.6: Malla de contorno utilizada para el flujo en cavidad.

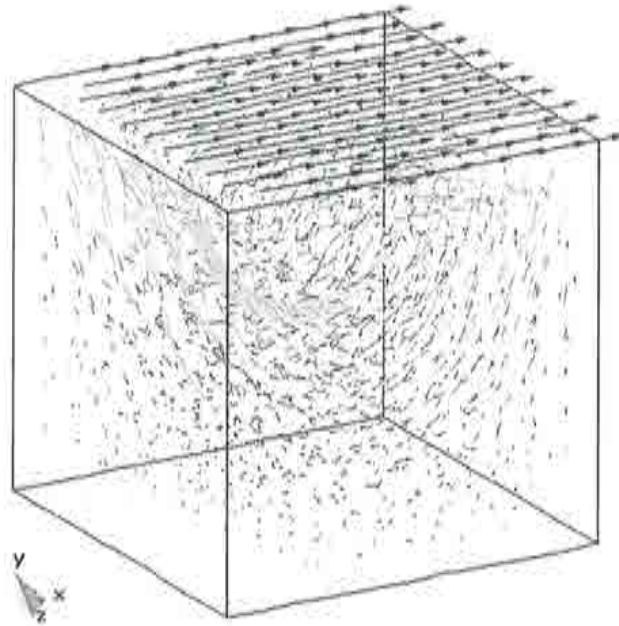


Figura 3.7: Vectores de velocidad y líneas de corriente del flujo en una cavidad.

de las ecuaciones de Navier Stokes son despreciables frente a los difusivos, por lo que este tipo de flujo es una buena prueba para comprobar la estabilidad ante la restricción de incompresibilidad. Los resultados comparan muy bien con los obtenidos por otros autores, mediante otros algoritmos numéricos (ver [Cod92]). En la distribución de la presión se observaron (ver figura 3.10) pequeñas oscilaciones en su distribución, que sin duda pueden atribuirse a la grosera discretización del problema.

3.5.2 Ejemplo 2

A continuación se presentan diferentes resultados del análisis de un perfil NACA 0012 a diferentes ángulos de ataque (entre 0° y 15°). Para su análisis se han resuelto las ecuaciones de Euler ($R_n \rightarrow \infty$, $\rho = 1.01 \text{ Kg/m}^3$ y $\mu = 0$) y de Navier Stokes ($R_n = 10^6$, $\rho = 1.01 \text{ Kg/m}^3$ y $\mu = 0.00001 \text{ Kg/m} \cdot \text{s}$) en diferentes casos. En todos los casos la velocidad de entrada en el dominio se tomó $v_\infty = 10 \text{ m/s}$. En el resto de las caras del dominio se prescribió a cero la velocidad normal a la superficie, a excepción de la cara opuesta a la de entrada donde se dejó el contorno libre. Un resumen de los resultados obtenidos se muestra a continuación. Estos resultados se han comparado con los experimentales disponibles en [AD59]. Una definición tipo del problema se muestra en la figura 3.11. En los análisis se utilizaron mallas entre los 35.000 y los 160.000 elementos (tetraedros lineales). Un ejemplo de las mallas utilizadas puede verse en la figura 3.12.

En la figura 3.13 se muestra la distribución del coeficiente v^2/v_∞^2 sobre el perfil en

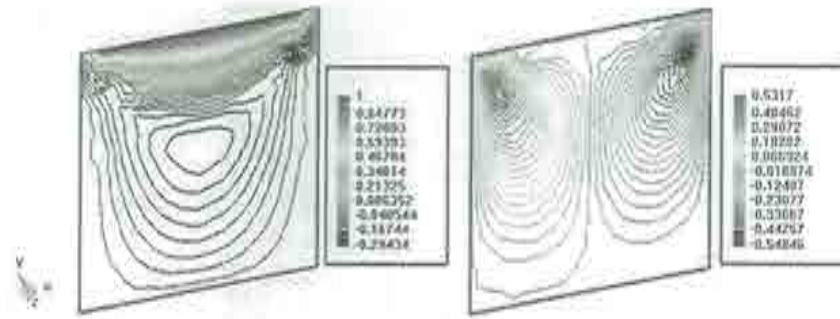


Figura 3.8: Contornos de velocidad, sobre un corte diametral, del flujo en una cavidad (componente horizontal a la izquierda y vertical a la derecha).

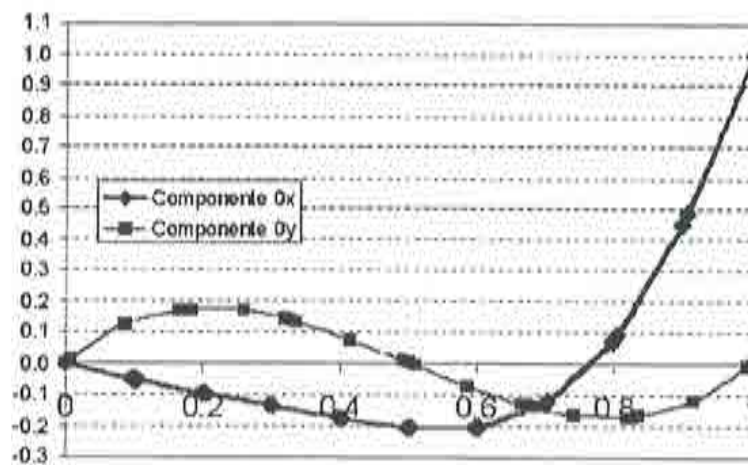


Figura 3.9: Distribución de velocidad (componentes $0x$ y $0y$) sobre la línea media horizontal del plano diametral en el flujo en una cavidad.

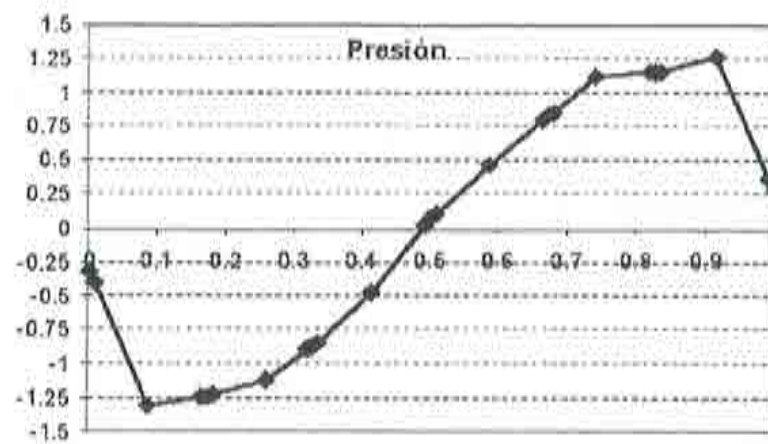


Figura 3.10: Distribución de la presión la línea media horizontal del plano diametral en el flujo en una cavidad.

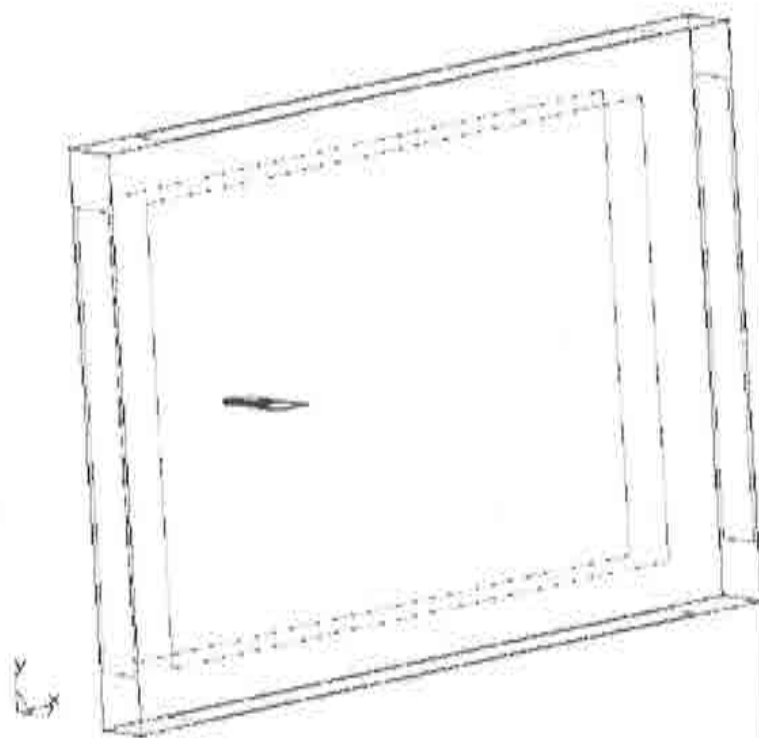


Figura 3.11: Definición geométrica del problema del análisis de un perfil NACA 0012.

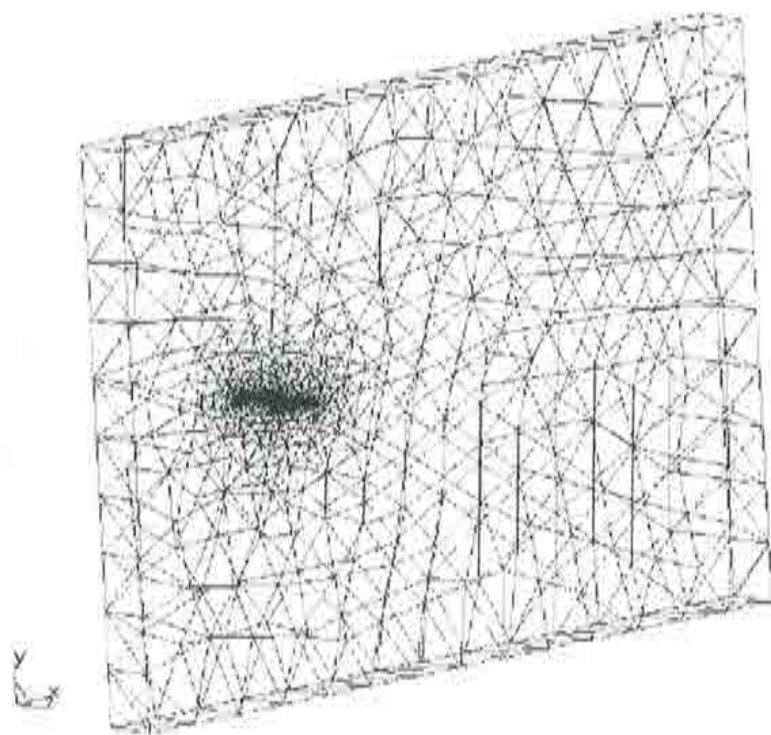


Figura 3.12: Malla tipo utilizada en el análisis del perfil NACA 0012.

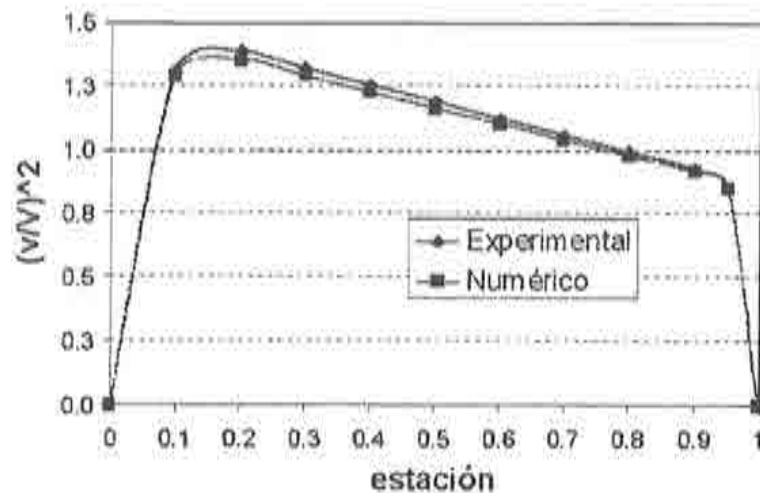


Figura 3.13: Comparación de los valores experimentales y numéricos de la distribución de v^2/v_∞^2 en el perfil NACA 0012 con un ángulo de ataque de 0° .

un corte diametral de la malla. Estos resultados se comparan con datos experimentales, pudiéndose apreciar la buena correspondencia entre ambos. Esta buena correspondencia con los resultados experimentales, en cuanto a la distribución del coeficiente v^2/v_∞^2 se pudo apreciar en los diferentes ángulos de ataque analizados. En la figura 3.14 se presenta la distribución de presión sobre el perfil en el caso del ángulo de ataque de 5° . En este mismo caso se muestra la distribución de vectores de velocidad en la figura 3.15.

En la figura 3.16 se muestra la distribución de velocidad (componente según Ox) en el caso de $R_n = 10^6$. En los ejemplos corridos con $\mu \neq 0$, se impuso sobre el contorno la tracción dada por la ley de pared logarítmica. No se usó ningún modelo de turbulencia, con la intención de probar las capacidades de esta condición de contorno en flujos laminares²⁴. Como se puede apreciar en la figura 3.17, los resultados del coeficiente de empuje obtenidos en este caso concuerdan bastante bien con los datos experimentales. Sin embargo, las diferencias apreciadas, que también se encontraron en el caso de $\mu = 0$, son significativas. En los análisis detenidos de la solución, se observó que la velocidad transversal al eje del perfil, tomaba valores que llegaban a valores en torno al 5% de la velocidad de entrada. Este fenómeno se debe a imperfecciones de la malla en la zona donde la curvatura del perfil es importante, que pueden provocar las diferencias observadas con los datos experimentales. Sin embargo, cabe insistir en el hecho significativo de que las diferencias puntuales de las variables calculadas, con los datos experimentales, son mínimas en todos los casos analizados (ver figura 3.13).

²⁴En los ángulos de ataque analizados el flujo no tiene fenómenos importantes de desprendimiento, por lo que la aproximación laminar parece lógica.

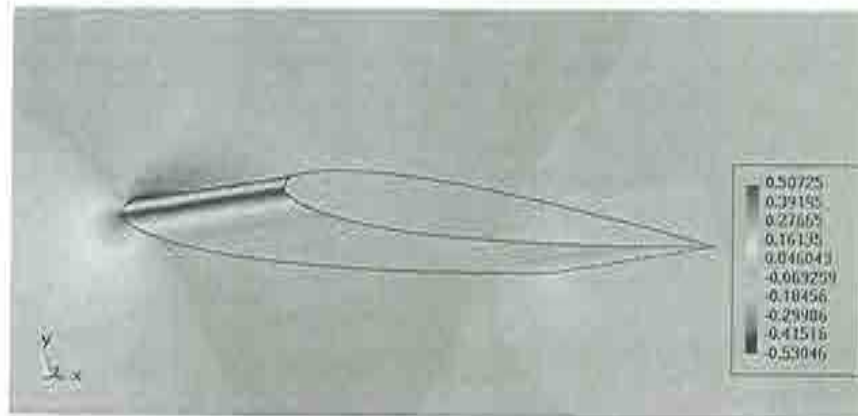


Figura 3.14: Distribución de presión en torno al perfil NACA 0012 (ángulo de ataque 5° , $R_n \rightarrow \infty$).

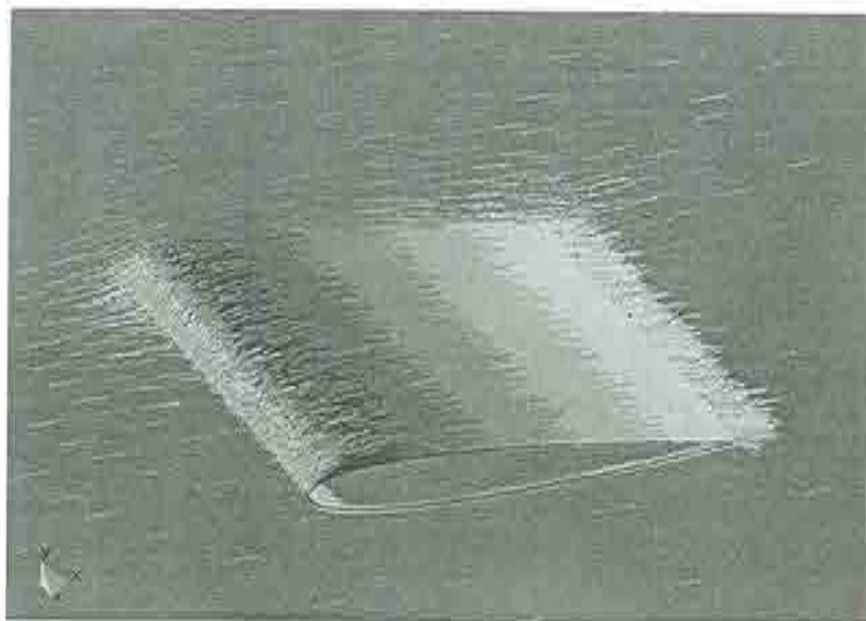


Figura 3.15: Vectores de velocidad sobre el perfil NACA 0012 (ángulo de ataque 5° , $\mu = 0$).

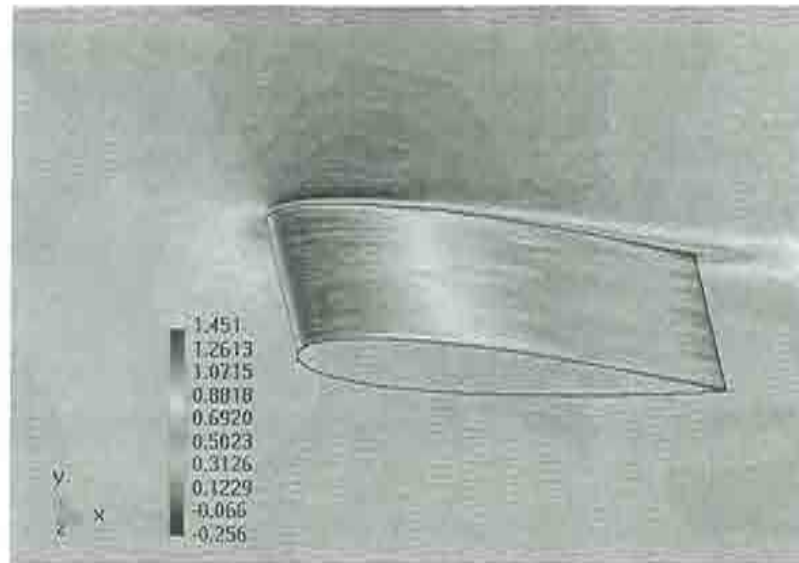


Figura 3.16: Distribución de presión en torno al perfil NACA 0012 (ángulo de ataque 5° , $R_n = 10^6$).

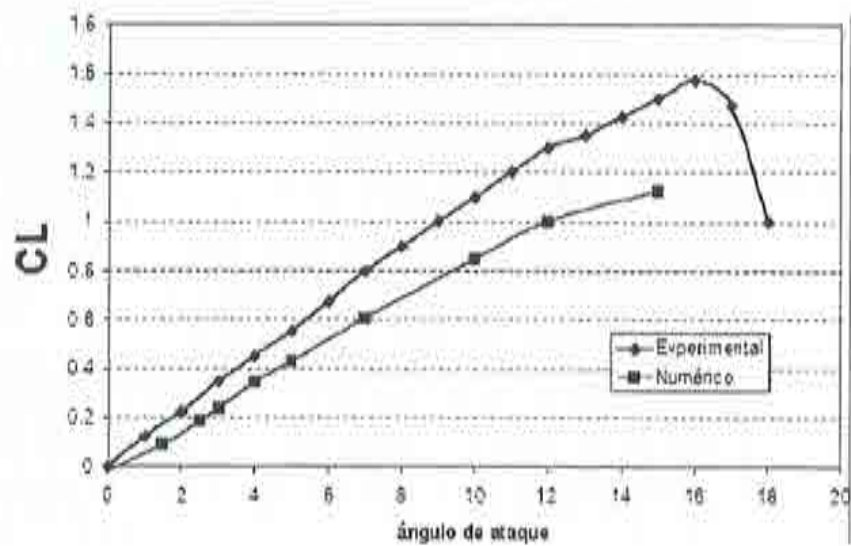


Figura 3.17: Comparación de los resultados numéricos y experimentales de empuje dinámico obtenidos en el análisis del perfil NACA 0012 ($R_n \rightarrow \infty$).

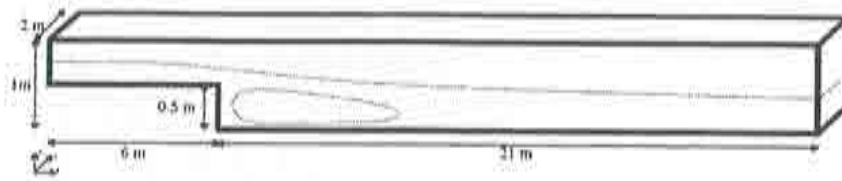


Figura 3.18: Geometría utilizada en el análisis del flujo ante un escalón.

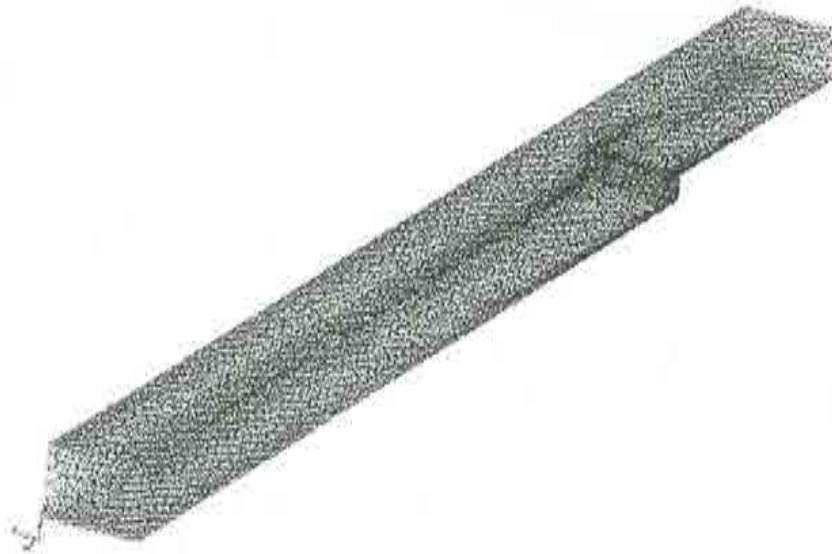


Figura 3.19: Malla de contorno utilizada en el análisis del flujo sobre un escalón.

3.5.3 Ejemplo 3

Por último, presentamos el ejemplo clásico del análisis del flujo ante un escalón inverso (en inglés *backwards facing step*). Este ejemplo ha sido analizado para $R_n = 7 \cdot 10^4$ ($\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$ y $\mu = 0.0071 \text{ Kg/m} \cdot \text{s}$). En este caso los resultados numéricos obtenidos pueden ser comparados con los experimentales disponibles en [KKJ80].

La geometría del problema se ha representado esquemáticamente en la figura 3.18. En la entrada de canal (de dimensiones $2\text{ m} \times 0.5\text{ m}$ se prescribe la componente Ox de la velocidad a 1 m/s , haciendo nulas el resto de las componentes. En la superficie de salida se dejó el flujo libre. Las superficies laterales se consideran planos de simetría y sobre ellas se anula la componente de la velocidad según Oz . El resto de superficies tienen impuesta la tracción dada por la ley de pared extendida.

La malla utilizada en los cálculos, que se presenta en la figura 3.19, consta de 13428 nodos y 49241 tetraedros lineales.

Los resultados experimentales, muestran, que en este caso el flujo turbulento está plenamente desarrollado, por lo cual, este problema es un buen test para probar la

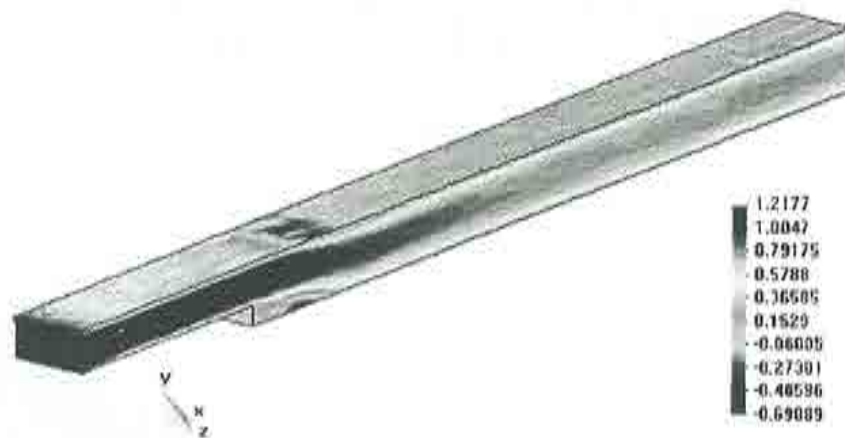


Figura 3.20: Distribución de la componente Ox de la velocidad en el análisis del flujo ante un escalón.

validez del método presentado en este tipo de flujos. El modelo de turbulencia utilizado en este caso es el de Smagorinsky.

A continuación se muestran diversos resultados gráficos de la solución obtenida. En primer lugar, en la figura 3.20 se muestran los contornos de la componente de velocidad según Ox . En esta figura puede observarse claramente la recirculación que se produce tras el escalón. De la misma manera, en la figura 3.21 se presenta el trazado de líneas de corriente a valores de la coordenada y . En el detalle que se incluye en la misma figura 3.21 se aprecia claramente el vórtice formado tras el escalón. Es importante notar la importancia de los efectos tridimensionales en este caso. En las referencias [Sot97] y [VCZ97] se hace mención a la importancia de estos efectos, como posible causa de la disparidad entre los resultados numéricos obtenidos y los experimentales disponibles en [KKJ80].

Por último, en la figura 3.22 se muestran diversos resultados en un corte diametral de la malla. Un análisis de estos resultados permite estimar la longitud del vórtice en torno a $3.2m$. Mientras que los resultados experimentales dan un valor en torno a $3.5 \pm 0.5m$, con lo cual se puede considerar que el cálculo numérico predice apreciablemente bien la formación de este vórtice.

3.6 Conclusiones

En este capítulo se ha aplicado el *método de cálculo finitesimal* para la estabilización de las ecuaciones de Navier Stokes incompresibles. Adicionalmente se ha presentado el algoritmo de pasos fraccionados semi implícito como esquema de integración temporal de las mismas. La aplicación de esta metodología es original de este trabajo y se complementa con la incorporación de la condición de superficie libre presentada en el capítulo anterior. Por otra parte, se han presentado las ventajas de la metodología

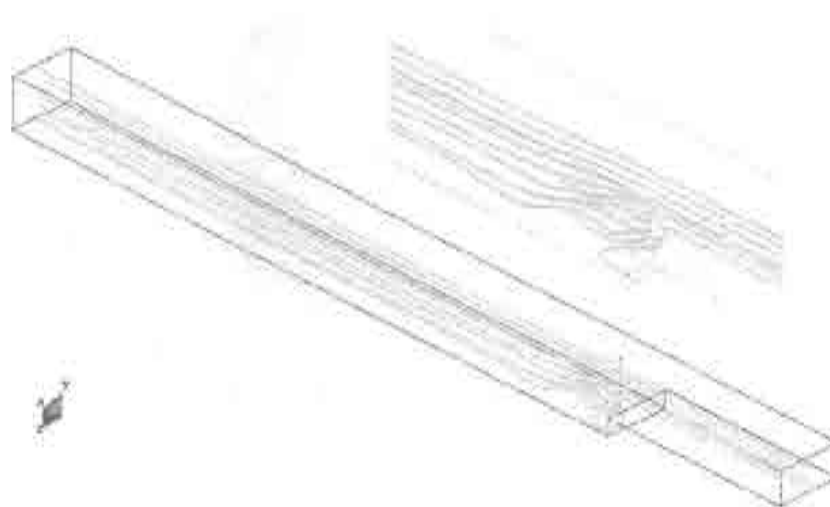


Figura 3.21: Trazado de líneas de corriente del flujo ante un escalón. Se incluye detalle de la recirculación en la zona cercana al escalón.

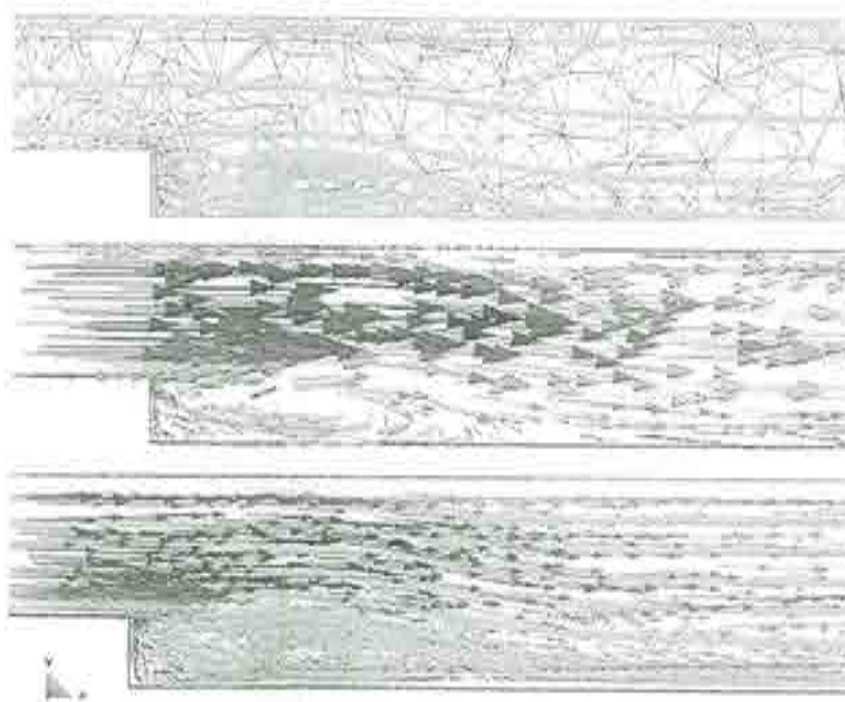


Figura 3.22: Detalle del resultado sobre el plano diametral del análisis del flujo ante un escalón.

desarrollada para la solución del problema planteado.

Se han definido además los parámetros de estabilización aplicables a las ecuaciones de Navier Stokes, a partir de los criterios presentados en el capítulo 2.

Además, se han extendido los conceptos mencionados para la resolución de las ecuaciones de Reynolds. Para ello se han introducido los conceptos básicos de la turbulencia y se han presentado diferentes modelos. Por último se ha presentado la condición de contorno basada en denominada ley de pared, para su aplicación en flujos con elevados valores de R_n .

En los ejemplos numéricos presentados se han probado las capacidades del método y sus propiedades de estabilización en diferentes problemas.

Capítulo 4

Un Algoritmo para la Deformación de Mallas de Elementos Finitos

La variación de forma de la superficie libre del problema que se nos presenta, junto con el cambio de posición del buque, requiere la modificación de la malla del dominio de análisis. En el presente capítulo se presenta un algoritmo automático para la actualización de mallas de elementos finitos que permite una deformación uniforme de los elementos. El método está basado en el algoritmo propuesto por Chiandussi, Bugeda y Oñate y presentado en [CBO99], para la deformación de mallas debidas al movimiento de cuerpos sumergidos. Este método ha sido extendido para permitir el movimiento de cuerpos flotando en presencia de una superficie libre. El algoritmo se basa en la consideración del volumen de control como un sólido elástico lineal con diferentes características elásticas en cada elemento. En último lugar se presentan varios ejemplos básicos de aplicación del algoritmo señalado.

4.1 Introducción

La solución del problema de interacción fluido estructura que nos ocupa requiere, para una aproximación suficientemente precisa, la actualización de la malla de análisis. La deformación de la superficie libre, junto con el movimiento del buque (arfa y trimado dinámico en el caso más simple) provocan un cambio en la geometría del dominio de análisis que, en la mayoría de los algoritmos desarrollados hasta la fecha, se ha tenido en cuenta gracias a la suposición de que tales cambios son pequeños [Daw77] [D'E97] [LB97] [LYOI96] [Rav96]. Esta suposición, sin embargo, deja de ser válida en muchos problemas prácticos, en particular cuando el número de Froude del problema es elevado.

Por otra parte, la actualización de la malla de elementos finitos ha sido un tema tratado muy intensamente en los últimos años. La gran dificultad práctica para desarrollar un algoritmo automático de regeneración de mallas, junto con el alto coste de cálculo que conlleva este proceso, han incentivado el desarrollo de diferentes alternativas para llevar a cabo la deformación de la malla, evitando grandes distorsiones de los elementos. Algunas alternativas pueden consultarse en [HMJ93] [FKT99] [Bat89]

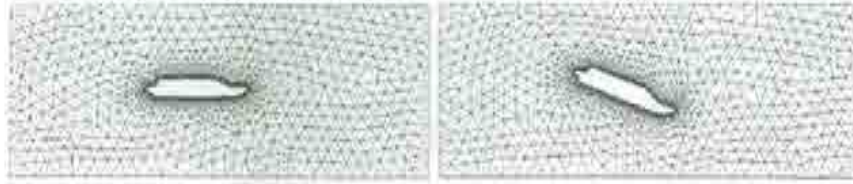


Figura 4.1: Deformación del volumen de análisis debido al movimiento de los contornos.

[WR98]. Durante el desarrollo de este trabajo se han revisado y probado varios de estos métodos. De todos ellos, el que mejores resultado ha presentado es el propuesto por Chiandussi, Bugada y Oñate [CBO99]. Este método asegura una distorsión mínima de los elementos y se basa en la solución iterativa de un problema elástico lineal en la malla del fluido, es decir, se resuelve un problema estructural sobre la malla del volumen de análisis. Al objeto de minimizar la distorsión de la malla, se escogen las propiedades elásticas de cada uno de los elementos de la malla de manera que los elementos que sufren mayor distorsión se hacen más rígidos. Las bases del método propuesto se presentan a continuación.

4.2 Un Algoritmo para la Deformación Uniforme de Mallas

En el caso general del análisis de un problema, y en particular en el caso que nos ocupa, la modificación de la posición de los objetos (el buque) y los cambios que sufren los contornos (superficie libre) pueden considerarse, al nivel del problema discreto, como desplazamientos en los nodos de los contornos de la malla de elementos finitos (ver figura 4.1).

Una vez que los desplazamientos de los contornos de la estructura son conocidos, su influencia en la posición de todos los nodos internos del modelo discreto puede ser tomada en cuenta considerando la malla de elementos finitos como una estructura ficticia. Resolviendo el problema de una estructura formada por un material elástico lineal, con los desplazamientos de las superficies móviles impuestos, es posible obtener el desplazamiento de todos los nodos de la malla. Usando este procedimiento, los desplazamientos de los contornos de la estructura son extrapolados al resto de la malla en función de la rigidez elástica de cada elemento. Evidentemente, en nuestro caso, los contornos no móviles, tienen fijado su desplazamiento a cero en este análisis estructural ficticio.

Desafortunadamente la solución del problema estructural, considerando la estructura con características de un material isotrópico, lineal y homogéneo produce grandes deformaciones en el proceso de actualización de la malla. Esto es debido a que los elementos cercanos a las superficies donde se producen los cambios se deforman mucho más que aquellos más alejados. Esto lleva frecuentemente a mallas muy distorsionadas

cerca de los contornos móviles y, en el límite, a mallas no conformes con elementos que se intersectan.

Conviene hacer notar que la aproximación de elementos finitos usada en este proceso, es sólo una herramienta de interpolación y por lo tanto, las tensiones obtenidas en este problema *pseudoestructural* no son relevantes. Esto nos permite asignar diferentes propiedades mecánicas a cada elemento de la malla, siendo de esta manera posible, distribuir la deformación de una manera más uniforme, haciendo más rígidos los elementos más cercanos a los contornos móviles, y más blandos los más lejanos. Esta idea es la base de la metodología que presentamos en este capítulo.

En el caso expuesto, las diferentes propiedades mecánicas de los elementos de la malla pueden ser asignadas basándose en diferentes criterios, geométricos o físicos. Un criterio geométrico básico sería, por ejemplo, variar el módulo de Young de los elementos en función de la distancia mínima a los contornos. A continuación discutiremos la bondad de diferentes criterios que pueden utilizarse para el fin propuesto.

4.3 Asignación de las Propiedades Mecánicas

Durante el desarrollo de este trabajo se han ensayado varias alternativas para la asignación de las propiedades mecánicas del algoritmo de deformación de mallas. Entre estas cabe destacar por sus apropiadas características para determinados problemas, las siguientes:

- ⇒ Asignación en función del tamaño del elemento. Este criterio es apropiado en el caso que la malla usada tenga el tamaño elemental asignado en función de criterios de proximidad a las zonas donde se producen las mayores deformaciones. Además hay que señalar que este criterio presenta la ventaja de no ser necesario resolver dos veces el problema elástico, dado que las rigideces son conocidas desde el principio.
- ⇒ Asignación en función de la distancia a los contornos móviles. Este criterio tiene, al igual que el anterior, la ventaja de no necesitar resolver el problema elástico en dos ocasiones, sin embargo, el algoritmo de cálculo de las distancias a los contornos móviles puede ser complejo, sobre todo si la geometría del problema tiene diferentes contornos o cuerpos móviles.

El resultado de estas pruebas sólo no lleva a la misma conclusión que la encontrada en [CBO99]. Según esta, los criterios basados en la deformación, y en particular en la energía de la deformación, producen mejores resultados. Efectivamente, la distribución de rigideces elementales que permite este criterio tiene una discriminación mucho mayor que en otros casos, por lo que permite absorber deformaciones muy importantes de la malla [GO99] [OG99] [OGE99].

A continuación se presenta el criterio de selección de las propiedades elásticas elegido para el presente trabajo.

4.4 Un Algoritmo para la Deformación Uniforme de Mallas

Consideremos un dominio elástico con propiedades homogéneas de isotropía, caracterizadas por un módulo de Young E_1 y un coeficiente de Poisson ξ . Tras resolver el problema así planteado usando, por ejemplo, elementos lineales C_0 , podemos calcular las tensiones principales σ_i en el centro de cada elemento como

$$\sigma_i = E_1 [\varepsilon_i - \xi (\varepsilon_j + \varepsilon_k)] \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3 \quad (4.1)$$

donde ε_i son las deformaciones principales.

Si buscáramos que la deformación de la malla fuese tal que obtuviéramos un campo de deformaciones uniforme $\varepsilon_i = \varepsilon^*$ en toda la malla, las tensiones principales estarían dadas por

$$\sigma_i = E_2 \varepsilon^* [1 - 2\xi] \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

donde E_2 es el módulo de Young (desconocido a priori) de cada elemento.

Como ya se ha comentado, se pueden utilizar diferentes criterios para calcular E_2 , pero de todos los probados, el que se ha mostrado más efectivo es el que se deriva de igualar las energías de deformación elemental en ambos análisis.

Tras evaluar las tensiones y deformaciones principales, la energía de deformación elemental del análisis de un sólido elástico lineal tridimensional, puede escribirse como,

$$U = \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3 \quad (4.3)$$

De esta forma, sustituyendo la ecuación (4.1) en (4.3) podemos escribir la energía de deformación en función de E_1 y ε como,

$$U_1 = E_1 [(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) - 2\xi (\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1)] \quad (4.4)$$

De la misma manera, sustituyendo la ecuación (4.2) en (4.3), la energía de deformación elástica puede escribirse en el segundo análisis como,

$$U_2 = 3E_2 \varepsilon^{*2} (1 - 2\xi) \quad (4.5)$$

Si obligamos a que la segunda solución tenga la misma distribución de la energía de deformación, podemos evaluar el nuevo modulo de Young elemental E_2 como,

$$E_2 = \frac{E_1 [(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) - 2\xi (\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1)]}{3\varepsilon^{*2} (1 - 2\xi)} \quad (4.6)$$

Se hace notar que el módulo de Young de cada elemento es proporcional a la deformación elemental, como se perseguía, y que tanto E_1 como ε^* son constantes para todos los elementos de la malla.

El proceso de actualización de la malla seguirá, por lo tanto, los siguientes pasos,

1. Se considerará la malla como un sólido elástico homogéneo de características E_1 y ξ . Se resolverá el correspondiente problema elástico, imponiendo como condiciones de contorno los desplazamientos de los contornos del dominio.
2. Se calcularán las deformaciones principales y los valores del nuevo módulo de Young elemental usando la ecuación (4.6) para un valor dado ε^* .
3. Repetir la resolución del problema elástico lineal, con los desplazamientos prescritos en el contorno usando los valores elementales de E_2 calculados.

No se presentará aquí la formulación empleada para resolver el problema elástico lineal que se plantea. Esta es ampliamente conocida y puede ser encontrada en cualquier libro básico de la materia (ver, por ejemplo [Oña95] [ZT94a]).

El movimiento de los nodos del dominio, obtenido tras el paso 3, asegura una distorsión cuasi uniforme de la malla. Más detalles del método, incluyendo otras alternativas de cálculo del módulo de Young E_2 pueden encontrarse en [CBO99].

Por último, hay que señalar que, el valor de la deformación uniforme (ε^*) impuesta en el segundo cálculo (paso 3) es arbitrario. Evidentemente valores muy pequeños de este valor provocan que la matriz del sistema resultante esté muy mal condicionada. Por otra parte valores muy grandes no son útiles pues provocan que los elementos con grandes deformaciones obtenidas en el primer cálculo (paso 1) no se hagan lo suficientemente rígidos, obteniendo importantes distorsiones de la malla en el proceso. Para el presente trabajo se ha adoptado un valor de 10^{-4} para la relación E_2/ε^{*2} .

4.5 Aplicación a Cuerpos Semisumergidos

El algoritmo mostrado para la deformación de la malla, permite tratar el movimiento del dominio debido a cambios en la posición de cuerpos sumergidos o semisumergidos. No obstante, en el último caso señalado, cuando el cuerpo intersecta la superficie libre, los cambios en la geometría del dominio de análisis son tales que no se puede determinar fácilmente el movimiento de los nodos en la línea de flotación, por sufrir el efecto conjunto del avance de la superficie libre y del movimiento del cuerpo (ver figura 4.2).

En estos casos el movimiento de la superficie libre debe ser tal que los puntos de la línea de flotación avancen tangentes al cuerpo. Esta condición de contorno no se impone en las ecuaciones de la superficie libre, por lo que los resultados obtenidos deben ser corregidos para tener en cuenta tal efecto. A este problema debe sumarse el hecho, ya mencionado, de que el movimiento del cuerpo flotante interacciona de forma imprevisible con el cambio en la superficie libre.



Figura 4.2: Problema de un cuerpo semisumergido.

Una posible solución de este problema es el remallado del dominio, aprovechando las herramientas disponibles de manejo de entidades *CAD*. Sin embargo esta técnica requiere de un control absoluto sobre la generación de la malla, y se encuentra de lleno con la gran dificultad que esta generación tiene al tratar con geometrías complejas. Por esta razón, al abordar este problema en el presente trabajo se eligió otra solución. Para la mayoría de los problemas, la utilización de un algoritmo que combine un esquema de proyección de superficies, junto con la técnica de movimiento de malla presentada anteriormente tiene importantes ventajas frente al remallado. Entre ellas cabe destacar su fiabilidad y rapidez. El algoritmo mencionado ha sido desarrollado específicamente para el presente trabajo y se basa en un esquema de proyección de mallas superficiales tridimensionales similar a la analogía de muelles, ya propuesta por Batina [Bat89], para la deformación de mallas de elementos finitos.

El algoritmo completo consta de tres pasos que se explican a continuación y que se esquematizan en la figura 4.3.

Paso 1: La malla superficial del cuerpo (tanto por debajo como por encima de la flotación) es proyectada sobre el plano Oxy (siendo la dirección Oz la vertical y según la cual se va a llevar a cabo la proyección). Para ello se consideran las aristas de la malla como muelles sin masa de constante elástica proporcional a su longitud en cada instante y se supone que la masa está concentrada en los nodos y que es igual para cada uno de ellos. De esta manera se da mayor rigidez a las aristas de menor tamaño. Inicialmente, la curva que define la línea superior del objeto se proyecta ortogonalmente sobre el plano Oxy . De esta manera tenemos una red de muelles en un estado de no equilibrio. El proceso de relajación del sistema llevará a una red en equilibrio en el plano Oxy . Para llegar a esta situación se hace evolucionar el sistema siguiendo las leyes de la dinámica. Las ecuaciones que rigen el proceso dinámico son evidentemente muy simples y su integración se hace explícitamente,

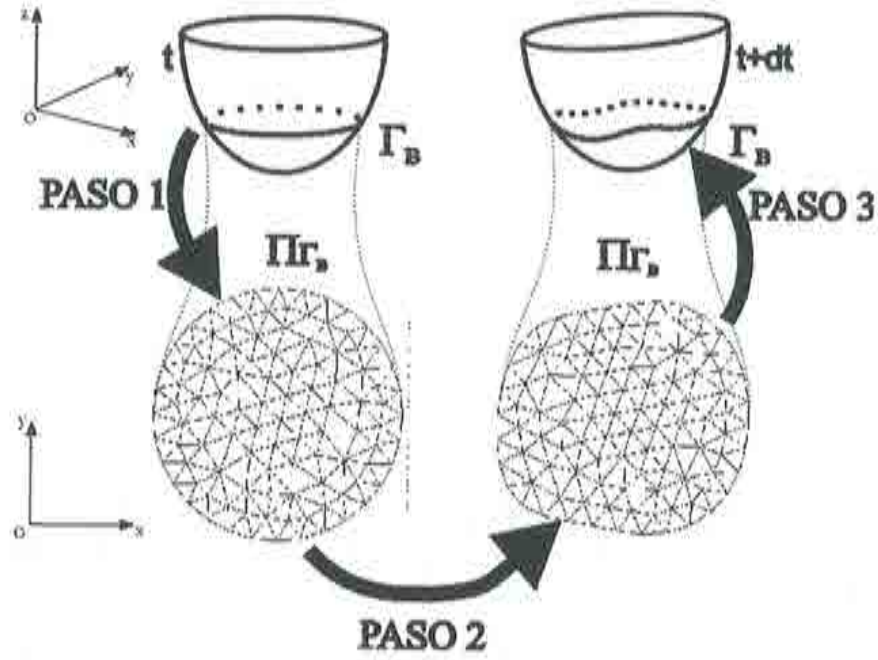


Figura 4.3: Esquema del algoritmo de proyección de mallas superficiales.

Fuerza en el nodo i :

$$F_i(t) = K \sum_j l_{ij}(t) - \chi v_i(t-dt) \quad (4.7)$$

Desplazamiento del nodo i :

$$d_i(t) = v_i(t-dt)dt + K \frac{dt^2}{m_i} \sum_j l_{ij}(t) \quad (4.8)$$

Donde $l_{ij}(t)$ es la longitud de la arista que une a los nodos i y j en el instante t , K es la constante de proporcionalidad entre longitud de la arista y fuerza que ejerce el muelle, χ es una constante de viscosidad del movimiento, $v_i(t-dt)$ es la velocidad del nodo i en el instante $t-dt$, m_i es la masa asociada al nodo i y dt es el incremento de tiempo para la evolución del proceso.

Como se aprecia el proceso es simple y la utilización de un incremento de tiempo variable por nodo hace que la evolución sea muy rápida. En resumen este primer paso sería como sigue:

- | | | |
|-------|--------------------------------|---|
| I.- | $t = t + dt$ | |
| II.- | bucle en nodos (i) | { |
| III.- | | $v_i(0) = 0$ |
| IV.- | | $dt_i = \frac{Min(l_{ij}(t))}{2v_i(t-dt)}$ |
| V.- | | $d_i(t) = v_i(t-dt)dt_i + \frac{dt_i^2}{m_i}F_i(t)$ |
| | | } |
| VI.- | Si $\sum_i d(t) \geq \delta$ | ir a I |
| VII.- | Si $\sum_i d(t) < \delta$ | fin |

Paso 2: Se calcula la deformación de la línea de flotación a partir de los valores nodales de la velocidad obtenidos en el calculo del problema de mecánica de fluidos. La deformación se lleva a cabo sobre la malla tridimensional del cuerpo de la siguiente forma.

En un primer momento, conocido el movimiento del cuerpo flotante y el cambio de posición de la superficie libre, los nodos de la línea de flotación son desplazados de acuerdo con estos cambios¹, para luego ser proyectados sobre la superficie del cuerpo, según las normales a los elementos. Las coordenadas locales de estos puntos son utilizadas para definir el movimiento plano de los nodos. Por último, se comprueba que todos los puntos han sido correctamente proyectados². Esta metodología se esquematiza en la figura 4.4. En ella se presenta el movimiento de los puntos j , k de la línea de flotación a la posición j' , k' .

Una vez que la línea de flotación ha sido deformada tridimensionalmente, y se han obtenido sus correspondientes movimientos planos, la malla del cuerpo se deforma, haciendo uso del algoritmo de actualización descrito en el apartado anterior (ver figura 4.4, donde se indica esquemáticamente la trasformación del punto i de la malla en el punto i').

Paso 3: Se proyecta de manera inversa la malla plana sobre el cuerpo original. Para ello se calculan las coordenadas relativas de los nodos de la malla plana deformada dentro de los elementos correspondientes de la malla plana original. La localización del elemento al que pertenece cada nodo se hace con un método similar al propuesto en [Lön90]. Las coordenadas locales así determinadas se utilizan para situar los puntos en la malla tridimensional original. Por último hay que hacer notar que los movimientos así obtenidos son relativos a la posición original de la flotación. Por ello es necesario sumar a éstos el movimiento de sólido rígido del cuerpo.

¹El movimiento total de los nodos corresponderá a la suma del movimiento relativo del cuerpo, respecto a la flotación en reposo, más el desplazamiento de la superficie libre.

²Es necesario establecer un control en este movimiento. Esto se puede hacer, por ejemplo, evitando que el desplazamiento de estos puntos sea mayor que $\frac{h}{2}$. Otra posibilidad es limitar el desplazamiento a la mitad del punto de intersección de los movimientos planos.

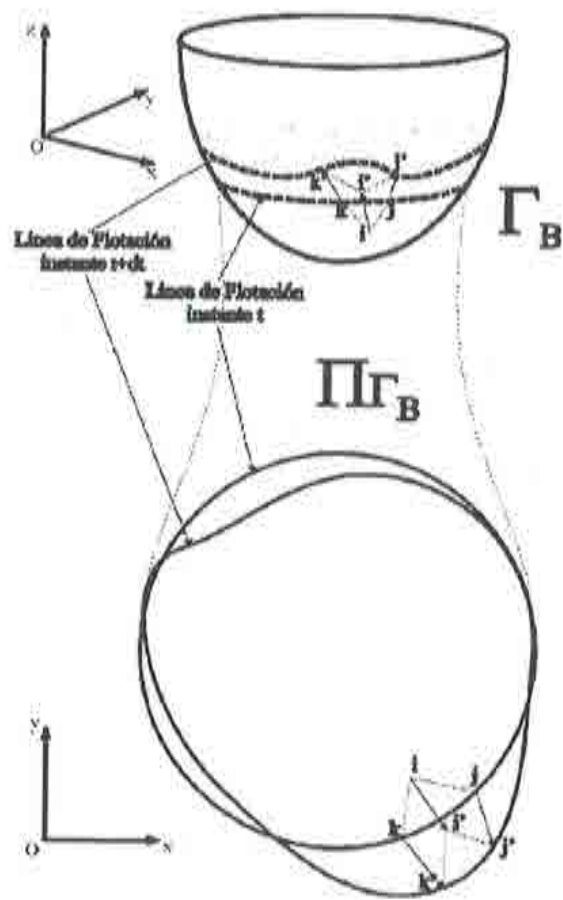


Figura 4.4: Método para evaluar la deformación de la línea de flotación.

Hay que hacer notar que el *Paso 1* anterior sólo debe realizarse una vez en cada problema, después, la malla plana obtenida puede utilizarse para el resto de los cálculos.

4.6 Un Algoritmo Iterativo para la Deformación de Mallas de Elementos Finitos

El algoritmo presentado resulta óptimo para la resolución de la mayoría de los problemas prácticos de interacción fluido estructura, por su capacidad para permitir que la malla absorba grandes deformaciones del contorno con una distorsión aceptable. Sin embargo el coste que requiere para los problemas dinámicos habituales, es muy elevado. Si nos referimos al almacenamiento de memoria, no sólo es necesario guardar la matriz del sistema estructural que se resuelve, sino que es necesario mantener en memoria toda la información de la malla original, que no es necesaria para el resto de los cálculos del problema. Por otra parte, y en lo que a tiempo de procesamiento se refiere, es necesario resolver dos sistemas lineales por cada movimiento de la malla, y además, estos sistemas han de ser ensamblados cada vez, lo cual supone, por si sólo un gran esfuerzo de cálculo.

Por ello, y en virtud de las especificaciones definidas para este proyecto, se hace necesario, aun a riesgo de perder calidad en la deformación de la malla, modificar el algoritmo con el fin de reducir a un nivel aceptable la necesidad de recursos del proceso.

Con este objetivo se han probado diferentes variaciones del algoritmo original presentado, todas ellas basadas en dos premisas; guardar información sólo de la matriz deformada actual y huir del doble ensamblado y resolución por cada paso de tiempo.

De las diversas pruebas realizadas se incluye a continuación una descripción del algoritmo que presentó mejores resultados en cuanto a las calidades de las mallas obtenidas. El algoritmo se basa en calcular las rigideces de los elementos de la malla en función de los incrementos de deformación y teniendo en cuenta el valor de la rigidez en el instante anterior.

Como ya se ha comentado, esta metodología es sólo una variación del algoritmo básico, presentado anteriormente, y que podemos resumir como sigue,

$$ALGBAS = \left[\begin{array}{l} 1. \text{Ensamblar problema elástico con } E_1 \text{ y } \xi. \\ 2. \text{Resolver sistema.} \\ 3. \text{Calcular } E_2^{(e)} = \frac{E_1[(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) - 2\nu(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_3\epsilon_1)]}{3\epsilon^*{}^2(1-2\xi)}. \\ 4. \text{Ensamblar problema elástico con } E_2^{(e)} \text{ y } \xi. \\ 5. \text{Resolver sistema.} \\ 6. \text{Mover nodos.} \end{array} \right] \quad (4.9)$$

Por otra parte, consideraremos los siguientes algoritmos alternativos a (4.9),

$$ALGANT = \left[\begin{array}{l} 1. \text{Ensamblar problema elástico con } E_2^{(e)} \text{ y } \xi. \\ 2. \text{Resolver sistema.} \\ 3. \text{Actualizar malla.} \end{array} \right] \quad (4.10)$$

$$ALGINC = \left[\begin{array}{l} 1. \text{Ensamblar problema elástico con } E_1 \text{ y } \xi. \\ 2. \text{Resolver sistema.} \\ 3. \text{Calcular } E_2^{(e)} = C_1 \vartheta \left[\frac{F^{(e)} - F_{\min}^{(e)}}{F_{\max}^{(e)} - F_{\min}^{(e)}} \right]^2 + (1 - C_1) E_{2_{old}}^{(e)}. \\ 5. \text{Ensamblar problema elástico con } E_2^{(e)} \text{ y } \xi. \\ 6. \text{Resolver sistema.} \\ 7. \text{Actualizar malla.} \end{array} \right] \quad (4.11)$$

En el anterior algoritmo (4.11), ϑ es una constante que mide la relación de rigideces máxima y mínima de los elementos (valores en torno a 1000 son suficientes en la mayoría de los casos prácticos) $E_{2_{old}}^{(e)}$ es el valor de $E_2^{(e)}$ en la iteración anterior, y C_1 es un coeficiente tal que $0 < C_1 < 1$. Por otra parte, se ha denominado $F_{\min}^{(e)}$, $F_{\max}^{(e)}$ a los valores mínimo y máximo de $F^{(e)}$, definido por,

$$F^{(e)} = \frac{[(\Delta \varepsilon_1^2 + \Delta \varepsilon_2^2 + \Delta \varepsilon_3^2) - 2\xi (\Delta \varepsilon_1 \Delta \varepsilon_2 + \Delta \varepsilon_2 \Delta \varepsilon_3 + \Delta \varepsilon_3 \Delta \varepsilon_1)]}{(1 - 2\xi)} \quad (4.12)$$

Donde $\Delta \varepsilon$ son las deformaciones incrementales, calculadas a partir de los desplazamientos de los nodos de la malla en la última iteración.

De esta manera, podemos escribir el esquema completo del algoritmo iterativo para la deformación de mallas como,

I.	n = 0		
II.	[...]	Solución Fluido	
III.	n = n + 1		
IV.	Si n = 1	ALGBAS(Malla ₁)	(4.13)
V.	Si n ≠ 1	Si n/N es entero ALGINC(Malla _n)	
		Si n/N no es entero ALGANT(Malla _n)	
VI.	Volver a II.		

En el algoritmo anterior $ALG(Malla_i)$ significa que el algoritmo correspondiente se aplica sobre la malla del paso de tiempo i-ésimo. Como puede apreciarse, el algoritmo (4.13) actualiza las rigideces de la malla cada N pasos de tiempo, al ser n el contador principal del bucle de cálculo ($t = t_n$).

El algoritmo (4.13) ha sido el usado para la resolución de los ejemplo que se presentan en el siguiente apartado.

Por otra parte, si el problema que se pretende resolver tiende a un estacionario, y el único objetivo del análisis se centra en este estado, puede no ser necesario actualizar la malla cada paso de tiempo.

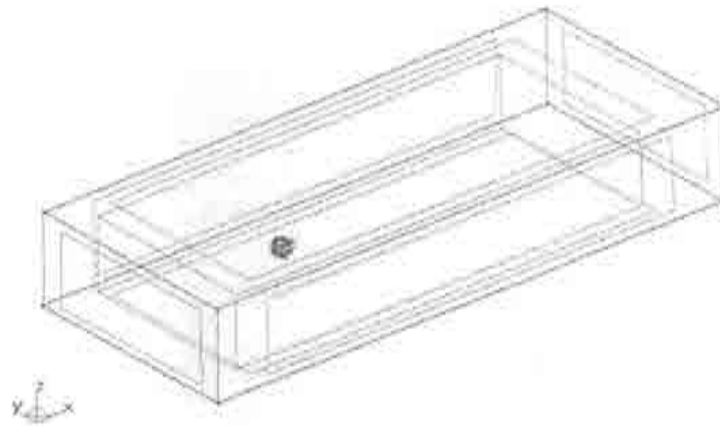


Figura 4.5: Definición CAD del problema de una esfera móvil sumergida enfrentada a una corriente uniforme.

4.7 Ejemplos

4.7.1 Ejemplo 1

La figura 4.5 muestra la geometría (definición *CAD* del problema) de un canal y la posición de una esfera de $2m$ de diámetro con un peso de 1000 N y una inercia de rotación de $1000\text{ Kg}\cdot\text{m}^2$. La esfera está sometida a la acción de una corriente uniforme de dirección Ox . El problema ha sido analizado para un valor del número de Reynolds $R_n = 200$ y un número de Froude $F_n = 0.71$ correspondientes a una velocidad de entrada del fluido de 1 m/s y a una densidad del fluido de 1000 Kg/m^3 .

Se permite a la esfera el movimiento vertical y la rotación según el eje Oy debidos a la acción del fluido. El movimiento vertical de la esfera está constreñido por la presencia de un muelle que la une al fondo. Este muelle tiene de constante elástica 2500 N/m . Se impone a la esfera una velocidad vertical y hacia arriba inicial de 1 m/s . Para la resolución se ha usado una malla de 19870 tetraedros lineales con 4973 nodos.

En la figura 4.6 se muestra la posición de la esfera y un corte diametral de la malla en diferentes instantes de tiempo.

En la figura 4.7 se muestran los contornos de velocidad del fluido proyectados sobre dos planos diametrales perpendiculares en diferentes instantes de tiempo.

Por último la figura 4.8 muestra la deformada de la superficie libre en dos instantes de tiempo, mientras que en la figura 4.9 se presenta un gráfico de la evolución del desplazamiento vertical de la esfera en función del tiempo.

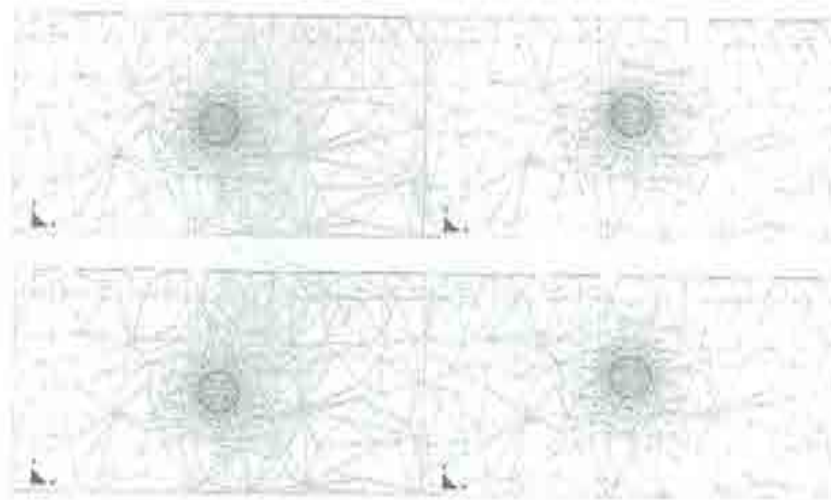


Figura 4.6: Posición de la esfera y la malla en diferentes instantes de tiempo (de izquierda a derecha y de arriba a abajo $t = 0.47$, $t = 0.94$, $t = 1.83$, $t = 3.16$).

4.7.2 Ejemplo 2

El segundo ejemplo muestra la caída de una esfera en una probeta llena de líquido. La esfera parte del reposo y el problema acaba cuando aquella alcanza su velocidad de caída estacionaria. La relación de diámetros de la esfera y de la probeta es 1:4. El número de Reynolds para la velocidad estacionaria es $R_n = 100$. La malla utilizada en el cálculo tiene 85765 elementos (tetraedros lineales) con 13946 nodos. La definición CAD del problema y un detalle de la malla de cálculo se muestran en la figura 4.10.

En la figura 4.11 pueden verse los contornos de deformación de la malla durante la caída (estos se han proyectado sobre el tubo al que se ha practicado un corte oblicuo), mientras que en la figura 4.12 se presentan los contornos de velocidad en diferentes instantes de tiempo. La figura 4.13 muestra la evolución de la velocidad de caída con el tiempo y se compara con la velocidad denominada de Stokes, calculada igualando la curva experimental de resistencia al avance de la esfera (como función de la velocidad) con el peso de la misma. Es claro que este valor debe ser ligeramente mayor que el real, como así ocurre, pues en él se desprecian los efectos de la interacción con la pared, y a esta razón pueden deberse las pequeñas diferencias encontradas.

4.7.3 Ejemplo 3

El último ejemplo que se presenta corresponde a un cilindro vertical sometido a una corriente uniforme de velocidad 1 m/s (ver figura 4.14). El número de Froude del problema es $F_n = 1.0$, mientras que el número de Reynolds es $R_n = 200$. El diámetro del cilindro es $2m$. No se considera ningún movimiento del cilindro. La malla utilizada en este ejemplo tiene 35567 tetraedros con 4670 nodos.

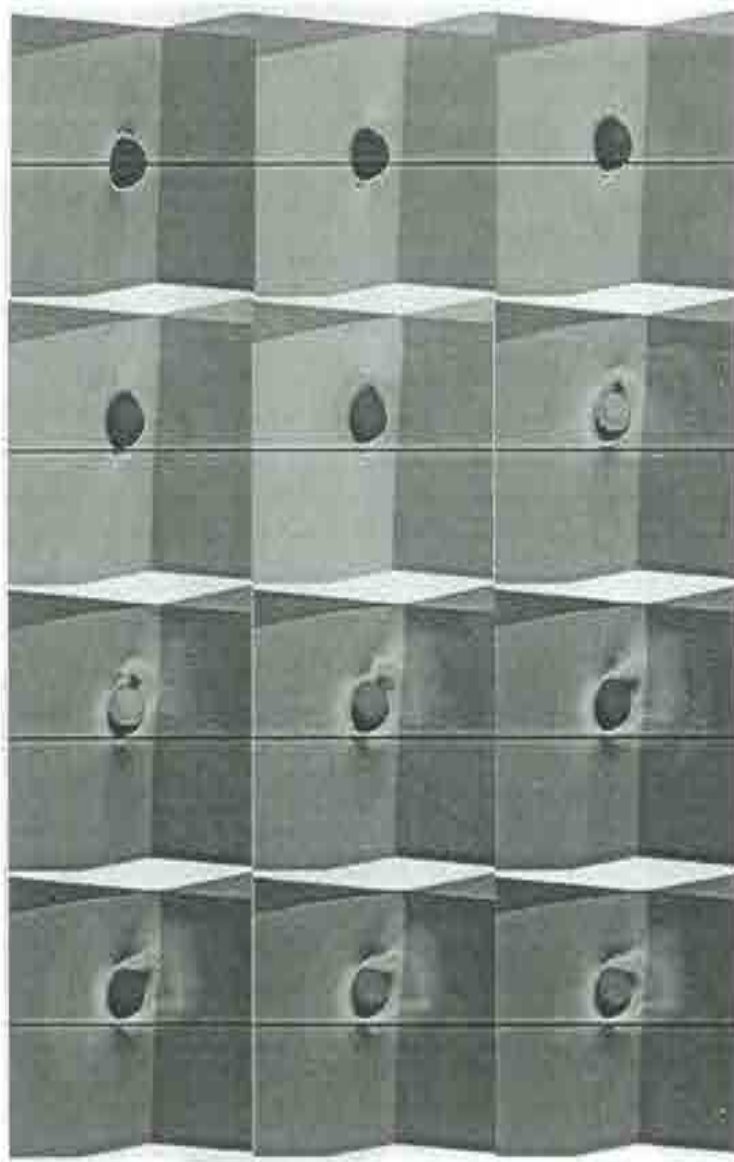


Figura 4.7: Evolución del módulo de la velocidad con el movimiento de la esfera en diferentes instantes de tiempo (de izquierda a derecha y de arriba a abajo $t = .47$, $t = .92$, $t = 1.10$, $t = 1.32$, $t = 1.67$, $t = 2.01$, $t = 2.43$, $t = 4.83$, $t = 6.16$, $t = 8.18$, $t = 12.35$, $t = 15.65$).



Figura 4.8: Deformación de la superficie libre amplificada 10 veces en los instantes de tiempo $t_1 = 0.47s$ y $t_2 = 3.16s$.

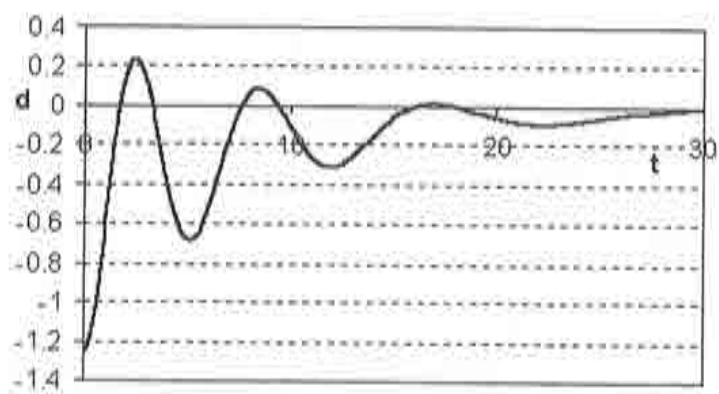


Figura 4.9: Evolución del movimiento de la esfera con el tiempo.

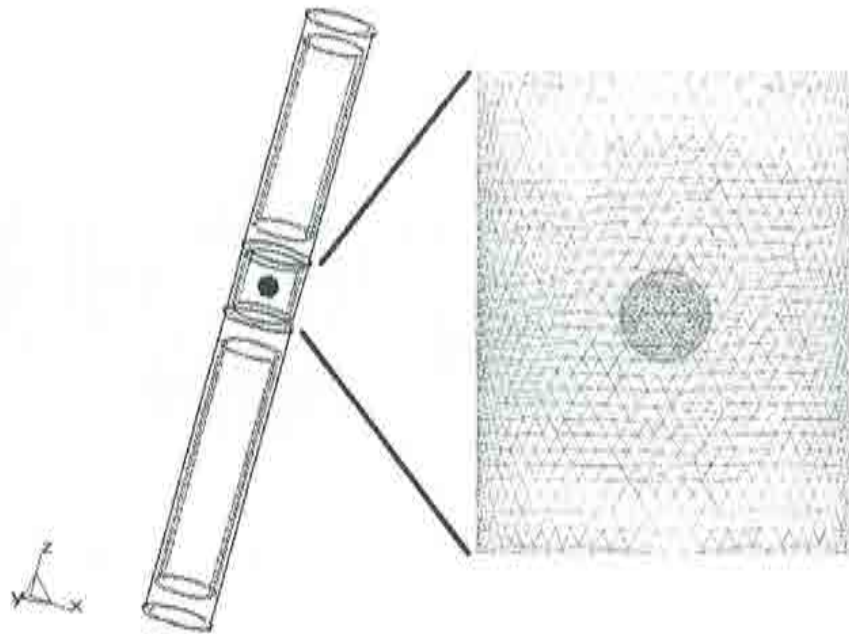


Figura 4.10: Definición CAD del problema de una esfera que cae libremente en un cilindro vertical lleno de líquido.

En la figura 4.15 se puede ver la solución de contornos de velocidad en el instante $t = 10.5s$, donde se puede apreciar el efecto del desprendimiento de los vórtices. Por otra parte, en la figura 4.16 se pueden ver los contornos del módulo del vector deformación de la malla. En ella se puede apreciar como la diferencia de altura en la superficie libre entre la zona de impacto con el cilindro y la estela que produce, es superior al diámetro del cilindro.

4.8 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado un procedimiento para la actualización automática de mallas de elementos finitos durante la resolución del problema acoplado. Este método permite deformar las mallas, permitiendo seguir los cambios en el contorno o los debidos al movimiento de los objetos en estudio. La restricción que se impone a la deformación de la malla es que la distorsión producida sea uniforme. De esta forma es posible que la malla admita grandes deformaciones conservando buenas propiedades para el análisis.

Sin embargo, el método básico es costoso, en lo que se refiere a necesidad de almacenamiento de memoria y tiempo de procesamiento, por lo que se ha modificado de manera que se adecúa a los procesos dinámicos que pretendemos resolver.

Los ejemplos que se han presentado muestran las posibilidades del procedimiento presentado, aplicado a problemas de mecánica de fluidos con contornos móviles y de interacción fluido estructura.

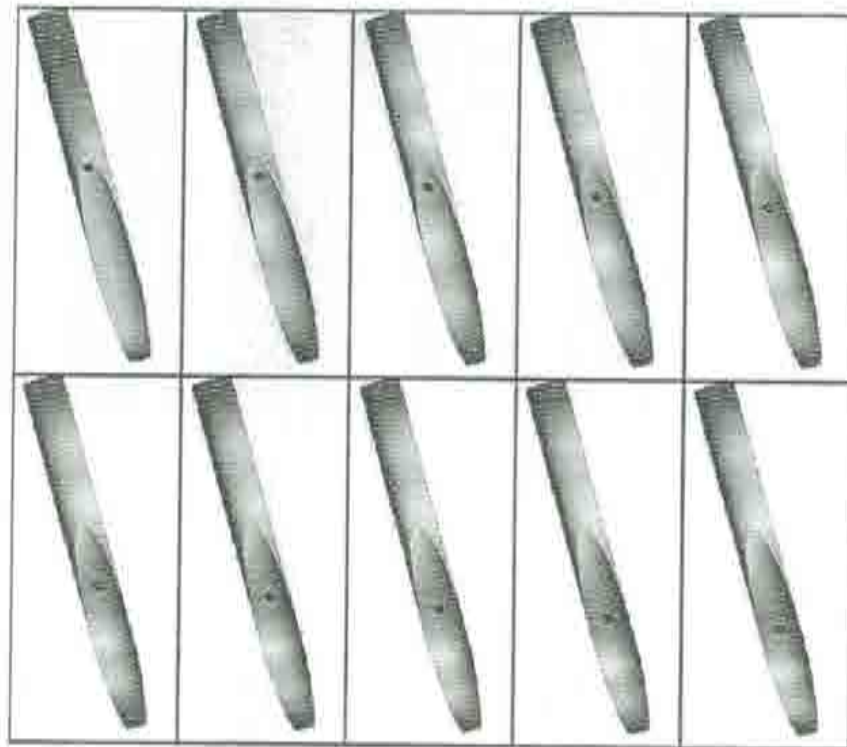


Figura 4.11: Evolución de la caída de la esfera en la probeta. Se muestran los contornos del módulo de la deformación de la malla.

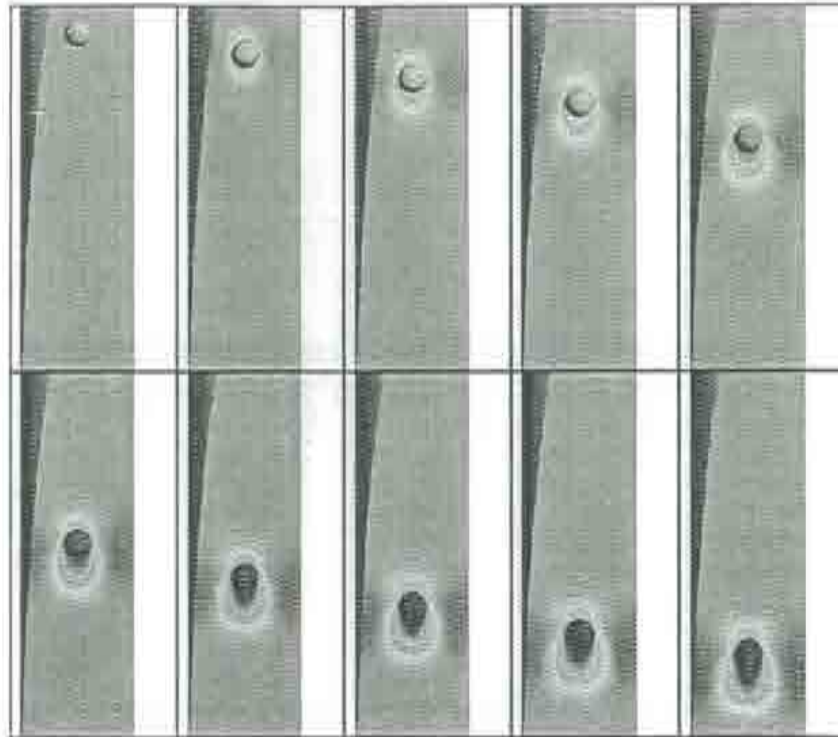


Figura 4.12: Contornos del módulo de la velocidad en diferentes instantes de la caída de la esfera.

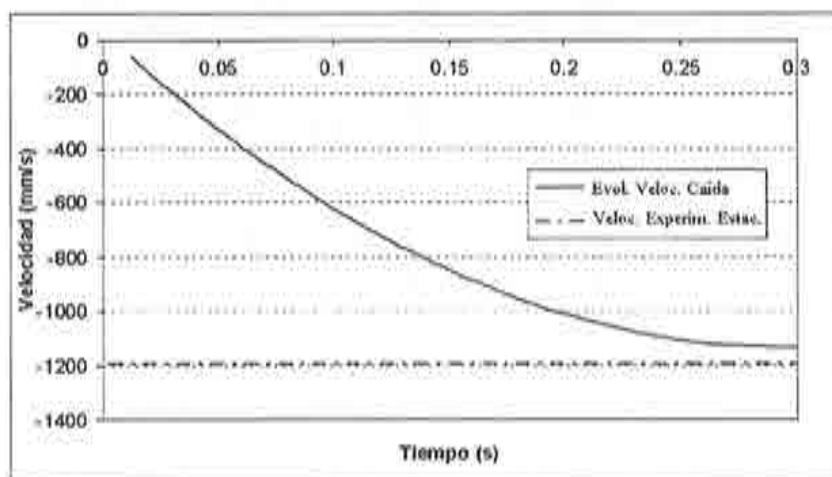


Figura 4.13: Evolución de la velocidad de caída de la esfera comparada con la velocidad experimental (1.95 m/s).

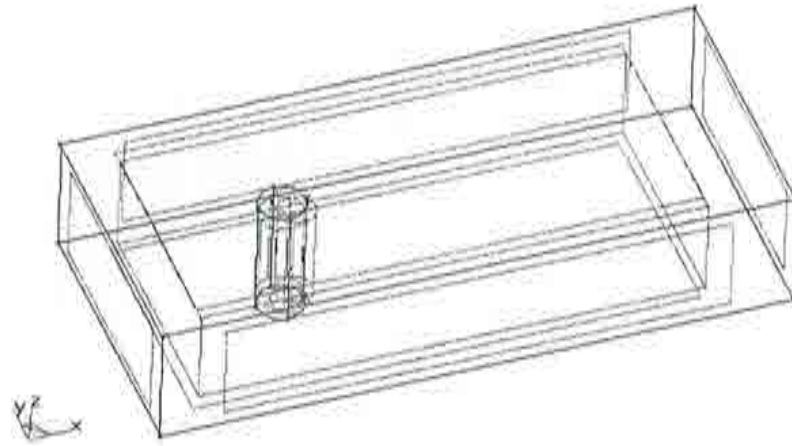


Figura 4.14: Definición CAD utilizada para el problema de un cilindro vertical enfrentado a una corriente uniforme.



Figura 4.15: Contornos del módulo de la velocidad sobre la superficie libre del problema del cilindro vertical para $t = 10.5s$.



Figura 4.16: Contornos del módulo de la deformación de la malla sobre el contorno, en el problema del cilindro vertical, para $t = 10.5s$.

Capítulo 5

Un Método para Análisis Hidrodinámico de Buques

A lo largo de los anteriores capítulos hemos revisado diferentes aspectos de los problemas de resolución del análisis hidrodinámico de buques basado en técnicas CFD. Aquí haremos una revisión de estos aspectos, al presentar el algoritmo desarrollado para resolver el problema. Estos aspectos incluyen una descripción detallada del algoritmo de resolución del problema de mecánica de fluidos y sus posibles variantes, una presentación del método de solución de la ecuación de superficie libre, una descripción del método de movimiento de malla y una discusión del algoritmo general. Por último se presentarán diversos resultados de aplicaciones prácticas del método. Estos resultados se discutirán, comparándose con datos experimentales disponibles.

5.1 Introducción

Hasta aquí hemos estudiado con detenimiento diferentes aspectos de los problemas de resolución del análisis hidrodinámico de buques basado en técnicas CFD. Entre los mencionados aspectos, pueden enumerarse los siguientes:

1. Resolución de las ecuaciones de Navier Stokes en flujo laminar y turbulento mediante el algoritmo *CF* de pasos fraccionados (capítulo 3).
2. Resolución de la ecuación de superficie libre no lineal completa, gracias a la metodología *CF* (capítulo 2).
3. Modificaciones de las anteriores ecuaciones para su resolución, teniendo en cuenta el movimiento de la malla de elementos finitos, de acuerdo con la metodología *ALE* (capítulo 2 y 3).
4. Metodología para la deformación cuasi uniforme de mallas de elementos finitos (capítulo 4).

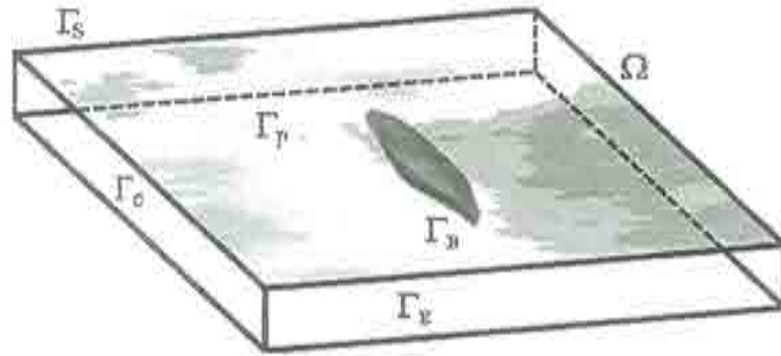


Figura 5.1: Definición del problema de análisis de flujo fluido alrededor de un buque.

En el presente capítulo se pretende llevar a cabo una revisión de estos aspectos, al presentar el algoritmo completo que ha sido desarrollado para resolver el problema planteado. De esta manera, se discutirán diversos problemas específicos, así como algunos detalles más directamente relacionados con la programación del algoritmo.

5.2 Un Método Estabilizado para Análisis Hidrodinámico de Buques

Consideremos el problema del movimiento de un fluido¹ alrededor de un buque, definido en la figura 5.1. En ella se representa un dominio fluido Ω limitado por los siguientes contornos:

Γ_η	Superficie libre	
Γ_E	Contorno de entrada del fluido	
Γ_B	Contorno del buque (superficie mojada)	(5.1)
Γ_S	Contorno de salida del fluido	
Γ_C	Resto de contornos del dominio Ω	

La definición del problema anterior requiere además los siguientes datos:

- Velocidad de avance del buque. Dado que, por simplicidad en el planteamiento del problema, se definirá un sistema de referencia que avanza con una velocidad uniforme igual a la del buque, esta será la que se debe imponer como condición de entrada del fluido.
- Aceleración de la gravedad. Esta, se puede modificar a conveniencia para controlar el valor de F_n .

¹Definido por su densidad ρ y viscosidad μ , que se consideran constantes.

- Características del fluido, definido por μ y ρ .
- Inercia al movimiento del buque, desplazamiento y centro de gravedad si se pretende simular el movimiento de este.

Junto a los anteriores, es necesario indicar que tipo de condiciones se imponen sobre los contornos definidos en (5.1). Evidentemente, dependiendo del tipo de análisis que se pretenda llevar a cabo, las condiciones de contorno aplicables sobre los anteriormente mencionados variarán. A continuación se presentan las diferentes alternativas que se pueden presentar,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_\eta & p = p_\eta(\mathbf{x}, t) \\
 \Gamma_E & v_i = v_{ei}(\mathbf{x}, t) \\
 \Gamma_B & v_i n_i = v_{ei}(\mathbf{x}, t) n_i \\
 \Gamma_S & p = 0 \\
 \Gamma_C & v_i n_i = v_{ei}(\mathbf{x}, t) n_i \quad \forall \quad p = 0
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_\eta & p = p_\eta(\mathbf{x}, t) \\
 \Gamma_E & v_i = v_{ei}(\mathbf{x}, t) \\
 \Gamma_B & v_i = 0 \\
 \Gamma_S & n_j \tau'_{ij} = n_j \tau''_{ij} \\
 \Gamma_C & v_i n_i = v_{ei}(\mathbf{x}, t) n_i \quad \forall \quad p = 0
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_\eta & p = p_\eta(\mathbf{x}, t) \\
 \Gamma_E & v_i = v_{ei}(\mathbf{x}, t) \\
 \Gamma_B & n_j \tau'_{ij} s_i = \tau_p(\mathbf{x}, t) \\
 \Gamma_S & n_j \tau'_{ij} = n_j \tau''_{ij} \\
 \Gamma_C & v_i n_i = v_{ei}(\mathbf{x}, t) n_i \quad \forall \quad p = 0
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

La opción (5.2) es adecuada para un análisis con $\mu = 0$ (ecuaciones de Euler). Mientras que la (5.3) es la correspondiente a un análisis típico con velocidad nula en la pared del buque. Es evidente que esta simulación sólo será útil, en general, para bajos R_n , dado que requiere una malla suficientemente fina como para poder capturar las variaciones de una capa límite. Para superar la anterior limitación, se presenta la alternativa (5.4), que sustituye la condición de velocidad nula sobre la pared por la imposición de la tracción τ_p , paralela al contorno dada por la ley de pared. La forma del campo de presiones $p_\eta(\mathbf{x}, t)$, correspondiente a la condición de superficie libre dinámica, que se debe imponer sobre la superficie libre se discutirá posteriormente.

Hay que añadir que la condición sobre el contorno de salida Γ_S debe ser la condición de flujo libre, pero una simplificación útil en muchos casos es hacer nula la presión

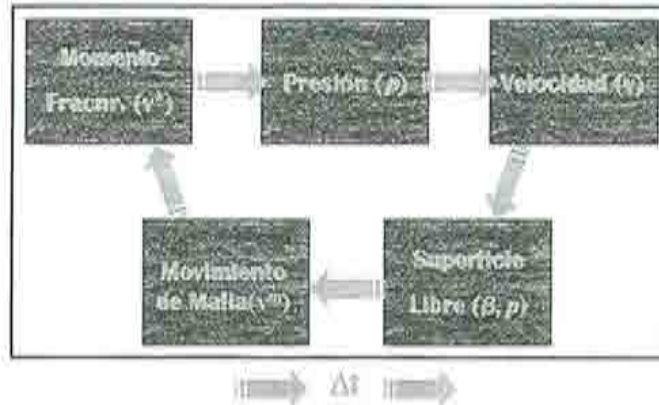


Figura 5.2: Esquema general del algoritmo de resolución del problema.

dinámica². Esta condición es habitual en contornos en los que el flujo no está perturbado, por lo que puede imponerse de la misma forma sobre Γ_C . En este último caso es de especial interés considerar la que podríamos denominar condición de fondo infinito [LYO98]. Esta consiste en imponer la presión dinámica a cero sobre el fondo no perturbado³, lo que representa una forma aproximada de simular un dominio infinitamente profundo.

Tomando como entrada los datos generales mencionados y definidas las condiciones de contorno en alguna de las formas (5.2), (5.3) o (5.4), el problema queda definido y puede resolverse según el algoritmo definido en la figura 5.2.

Como puede apreciarse, el esquema general del algoritmo consta de cinco fases, correspondientes a otros tantos sistemas de ecuaciones, que deben resolverse para cada paso de tiempo. Estos pueden definirse como⁴:

1. Resolución de la Ecuación de Cantidad de Movimiento Fraccionaria si-

²Esta condición simplificada sólo es aplicable si se impone algún tipo de amortiguamiento sobre el campo de olas, de manera que no se perturbe este contorno. Como se discutirá más tarde, este amortiguamiento se aplica en este trabajo para evitar diversos problemas de reflexión de ondas contra los contornos.

³Lo que obliga a que el contorno correspondiente esté lo suficientemente lejano del buque.

⁴La notación empleada a continuación corresponde a la presentada en los capítulos anteriores.

guiente, que permite calcular el campo de velocidades aproximadas \mathbf{v}^* ,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} v_i^* d\Omega &= \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} v_i^n d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{\partial (v_i v_j)^n}{\partial x_j} d\Omega - \\
&- \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{ij}^n d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \psi_{h_i} f_i^n d\Omega - \\
&- \Delta t \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \langle k_1 - k_{2,i} \rangle \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} r_{m_i}^n d\Omega - \\
&- \Delta t \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} k_{2,i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} d\Omega + \\
&+ \Delta t \int_{\Gamma_F} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^n d\Gamma + \Delta t \int_{\Gamma_N} \psi_{h_i} (t_{c_i}^n + p n_i^n) d\Gamma \\
r_{m_i} &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}'}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Los coeficientes k_1 y k_2 se calculan a partir de las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned}
k_1 &= \alpha(\gamma) \frac{h}{2} |\mathbf{v}|, \quad \gamma = \frac{|\mathbf{v}| h^e}{2\nu} \\
k_{2,i} &= \beta(\gamma_{||i}) \frac{h}{2} \frac{|r_{m_i}|}{|\nabla v_i|}, \quad \gamma_{||i} = \frac{|\mathbf{v}_{||i}| h^e}{2\nu}
\end{aligned}$$

donde, para tetraedros lineales, se puede tomar,

$$\begin{aligned}
\alpha(x) &= \begin{cases} |x| > 3 & 1 \\ |x| \leq 3 & \frac{x}{3} \end{cases} \\
\beta(x) &= \max\left(0, 0.7 - \frac{1}{x}\right)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Condiciones de contorno aplicables

Contorno libre Γ_F

Tracción $t_{c_i}^n$ impuesta en Γ_N

2. Resolución de la **Ecuación de Continuidad** siguiente, que permite calcular el campo de presiones p^{n+1} ,

$$\begin{aligned}
\sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} (\Delta t + \delta_d^n) \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega &= - \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial v_i^n}{\partial x_i} d\Omega + \\
&+ \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} (v_i^* - v_i^n) d\Omega - \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \delta_d^n \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} \tau_{m_i}^n d\Omega
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$r_{m_i}'' = \left(\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} - f_i \right)^n$$

Condiciones de contorno aplicables

Presión prescrita en Γ_P

Velocidad normal a Γ fijada a $v_{ci} n_i$ en Γ_{D_n}

Velocidad normal a Γ fijada a $v_i^n n_i$ en $\Gamma - \Gamma_{D_n}$

3. Resolución de la **Ecuación de Momento o de proyección** siguiente, de donde se obtiene el campo de velocidades v^{n+1} ,

$$\int_{\Omega} \psi_{hi} v_i^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} \psi_{hi} v_i^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{\rho} \psi_{hi} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega \quad (5.8)$$

Condiciones de contorno aplicables

Velocidad prescrita a v_{ci} en Γ_D

4. Cálculo de la nueva distribución de la elevación de la **Superficie Libre** η^{n+1} , aplicando la condición cinemática de superficie libre siguiente,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_h \eta^{t+\Delta t} d\Omega &= \frac{4}{3} \int_{\Omega} \varphi_h \eta^t d\Omega - \frac{1}{3} \int_{\Omega} \varphi_h \eta^{t-\Delta t} d\Omega + \\ &+ \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \varphi_h w d\Omega - \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \varphi_h (v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial \eta}{\partial x_j} d\Omega + \\ &+ \sum_{e=1}^{N_{et}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} \frac{\langle k_1^{fs} - k_2^{fs} \rangle}{|\mathbf{v}|^2} v_j \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} w d\Omega - \\ &- \sum_{e=1}^{N_{et}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} \langle k_1^{fs} - k_2^{fs} \rangle \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} \frac{v_i}{|\mathbf{v}|^2} (v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial \eta}{\partial x_j} d\Omega - \\ &- \sum_{e=1}^{N_{et}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} k_2^{fs} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} d\Omega \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Los coeficientes k_1^{fs} y k_2^{fs} se obtienen a partir de las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} k_1^{fs} &= \frac{h}{2} |\mathbf{v}| \\ k_2^{fs} &= 0.35h \left| \frac{(v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial \eta}{\partial x_j} - w}{(v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial \eta}{\partial x_j}} \right| \quad i, j = 1, 2 \end{aligned}$$

Condiciones de contorno aplicables

Elevación η prescrita a η_{fiz} en $\Gamma_{\eta_{fiz}}$

- A partir de la distribución de la altura de la superficie libre $\eta(\mathbf{x}, t + \Delta t)$, se puede calcular el campo de presiones $p_\eta(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ correspondiente a la condición dinámica de superficie libre, en la siguiente forma,

$$p_\eta(\mathbf{x}, t + \Delta t) = g\eta_{dif}(\mathbf{x}, t + \Delta t) \quad (5.10)$$

- Donde $\eta_{dif}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ es la diferencia entre la elevación de la superficie libre calculada $\eta(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ y la elevación de la malla correspondiente. La ecuación (5.10) tiene dos límites de especial interés. Si la posición de los nodos de la malla correspondiente siguen el movimiento de la superficie libre, la ecuación (5.10) se transforma en la simple imposición de que la presión es nula sobre la superficie libre $p_\eta(\mathbf{x}, t + \Delta t) = 0$. Si por otra parte, la malla sobre la superficie libre no se actualiza, la condición anterior se transforma en $p_\eta(\mathbf{x}, t + \Delta t) = g\eta(\mathbf{x}, t + \Delta t)$.

5. **Actualización de la Malla** de elementos finitos, teniendo en cuenta la deformación del contorno definida por el movimiento de la superficie libre y la nueva posición del buque. De este proceso se obtiene la nueva posición de todos los nodos de la malla \mathbf{x}^{n+1} . Para ello es necesario, en primer lugar, estimar la nueva posición del buque. Esto se lleva a cabo por integración directa de las fuerzas que el fluido ejerce sobre la carena. Estas fuerzas son integradas explícitamente en el tiempo para obtener los desplazamientos y giros instantáneos, de acuerdo con la dinámica del sólido rígido clásica.

Podemos escribir el esquema completo del algoritmo iterativo para la deformación de mallas como,

I.	$n = 0$		
II.	[...]	Solución Fluido	
III.	$n = n + 1$		
IV.	Si $n = 1$	$ALGBAS(Malla_1)$	(5.11)
V.	Si $n \neq 1$	Si n/N es entero $ALGINC(Malla_n)$	
		Si n/N no es entero $ALGANT(Malla_n)$	
VI.	Volver a II.		

- Donde n es el indicador del paso de tiempo ($t = t_n$) y N es un control interno del algoritmo, que indica cada cuantos pasos de tiempo se actualizará la malla. Los métodos $ALGBAS(Malla_1)$, $ALGINC(Malla_n)$ y $ALGANT(Malla_n)$ se aplican sobre la malla en el paso de tiempo t_n y se pueden describir como sigue,

$$ALGBAS = \left[\begin{array}{l} 1. \text{Ensamblar problema elástico con } E_1 \text{ y } \xi. \\ 2. \text{Resolver sistema.} \\ 3. \text{Calcular } E_2^{(e)} = \frac{E_1 [(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) - 2\nu(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1)]}{3\varepsilon^{*2}(1-2\xi)}. \\ 4. \text{Ensamblar problema elástico con con } E_2^{(e)} \text{ y } \xi. \\ 5. \text{Resolver sistema.} \\ 6. \text{Mover nodos.} \end{array} \right] \quad (5.12)$$

$$ALGANT = \left[\begin{array}{l} 1. \text{Ensamblar problema elástico con con } E_2^{(e)} \text{ y } \xi. \\ 2. \text{Resolver sistema.} \\ 3. \text{Actualizar malla.} \end{array} \right] \quad (5.13)$$

$$ALGINC = \left[\begin{array}{l} 1. \text{Ensamblar problema elástico con } E_1 \text{ y } \xi. \\ 2. \text{Resolver sistema.} \\ 3. \text{Calcular } E_2^{(e)} = C_1 \vartheta \left[\frac{F^{(e)} - F_{\min}^{(e)}}{F_{\max}^{(e)} - F_{\min}^{(e)}} \right]^2 + (1 - C_1) E_{2old}^{(e)}. \\ 5. \text{Ensamblar problema elástico con con } E_2^{(e)} \text{ y } \xi. \\ 6. \text{Resolver sistema.} \\ 7. \text{Actualizar malla.} \end{array} \right] \quad (5.14)$$

- En el anterior algoritmo (5.14), ϑ es una constante que mide la relación de rigideces máxima y mínima de los elementos (valores en torno a 1000 son suficientes en la mayoría de los casos prácticos) $E_{2old}^{(e)}$ es el valor de $E_2^{(e)}$ en la iteración anterior, y C_1 es un coeficiente tal que $0 < C_1 < 1$. Por otra parte, se ha denominado $F_{\min}^{(e)}$, $F_{\max}^{(e)}$ a los valores mínimo y máximo de $F^{(e)}$, definido por,

$$F^{(e)} = \frac{[(\Delta \varepsilon_1^2 + \Delta \varepsilon_2^2 + \Delta \varepsilon_3^2) - 2\xi(\Delta \varepsilon_1 \Delta \varepsilon_2 + \Delta \varepsilon_2 \Delta \varepsilon_3 + \Delta \varepsilon_3 \Delta \varepsilon_1)]}{(1 - 2\xi)} \quad (5.15)$$

Donde $\Delta \varepsilon$ son las deformaciones incrementales, calculadas a partir de los desplazamientos de los nodos de la malla en la última iteración.

El algoritmo de solución del problema, presentado en los anteriores puntos 1-5, puede ser utilizado para la resolución de problemas en los que sólo interese la solución estacionaria. Sin embargo, si el objetivo del estudio es el análisis del proceso transitorio, el algoritmo presentado debe ser corregido, de manera que se tenga en cuenta el movimiento de la malla en la resolución del problema de Navier Stokes. Esta corrección se hace mediante la metodología *ALE*, presentada en los capítulos anteriores. Teniendo en cuenta esta metodología, los cinco puntos anteriores quedan como sigue,

1. Resolución de la **Ecuación ALE de Balance de Cantidad de Movimiento Fraccionaria** siguiente, que permite calcular el campo de velocidades aproximadas v^* ,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} v_i^* d\Omega &= \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} v_i^n d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} (v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} d\Omega - \\
 &- \Delta t \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} v_i^n \frac{\partial v_j^n}{\partial x_j} d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{ij}^m d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \psi_{h_i} f_i^n d\Omega - \\
 &- \Delta t \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \langle k_1 - k_{2,i} \rangle \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{m_i}^n d\Omega - \\
 &- \Delta t \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} k_{2,i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} d\Omega + \\
 &+ \Delta t \int_{\Gamma_F} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^m d\Gamma + \Delta t \int_{\Gamma_N} \psi_{h_i} (t_{ci}^n + p n_i^n) d\Gamma \\
 r_{m_i} &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho (v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho v_i \frac{\partial v_j^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

- En la anterior ecuación (5.16) $v_j^{m^n}$ representa el campo de la velocidad de los nodos de la malla en el proceso de actualización de esta. Conviene señalar que, en el presente caso, la ecuación (5.5) continúa siendo válida, sin embargo, tal y como se presentó en capítulos anteriores, la formulación *ALE* permite que los términos sean evaluados en el sistema de coordenadas correspondiente a la deformación de la malla.

En la ecuación (5.16) los coeficientes k_1 , $k_{2,i}$ se calculan igual que en el caso anterior.

2. Resolución de la **Ecuación de Continuidad** siguiente, que permite calcular el campo de presiones p^{n+1} ,

$$\begin{aligned}
 \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} (\Delta t + \delta_d^n) \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega &= - \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial v_i^n}{\partial x_i} d\Omega + \\
 &+ \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} (v_i^* - v_i^n) d\Omega - \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \delta_d^n \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} r_{m_i}^m d\Omega \\
 r_{m_i}^m &= \left(\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho (v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} - f_i \right)^n
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Condiciones de contorno aplicables

Presión prescrita en Γ_P

Velocidad normal a Γ fijada a $v_{ci} n_i$ en Γ_{D_n}

Velocidad normal a Γ fijada a $v_i^n n_i$ en $\Gamma - \Gamma_{D_n}$

3. Resolución de la **Ecuación de Momento o de proyección** (5.8), de donde se obtiene el campo de velocidades \mathbf{v}^{n+1} .
4. Resolución de la **Ecuación cinemática ALE de Superficie Libre** η^{n+1} , aplicando la condición cinemática de superficie libre siguiente,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \varphi_h \eta^{t+\Delta t} d\Omega &= \frac{4}{3} \int_{\Omega} \varphi_h \eta^t d\Omega - \frac{1}{3} \int_{\Omega} \varphi_h \eta^{t-\Delta t} d\Omega + \\
 &+ \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \varphi_h w d\Omega - \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \varphi_h (v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial \eta}{\partial x_j} d\Omega + \\
 &+ \sum_{e=1}^{N_{et}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} \frac{\langle k_1^{fs} - k_2^{fs} \rangle}{|\mathbf{v}|^2} v_j \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} w d\Omega - \\
 &- \sum_{e=1}^{N_{et}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} \langle k_1^{fs} - k_2^{fs} \rangle \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} \frac{v_i}{|\mathbf{v}|^2} (v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial \eta}{\partial x_j} d\Omega - \\
 &- \sum_{e=1}^{N_{et}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} k_2^{fs} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} d\Omega \quad i, j = 1, 2
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Los coeficientes k_1^{fs} y k_2^{fs} se obtienen a partir de las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned}
 k_1^{fs} &= \frac{h}{2} |\mathbf{v}| \\
 k_2^{fs} &= 0.35h \left| \frac{(v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial \eta}{\partial x_j} - w}{(v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial \eta}{\partial x_j}} \right| \quad i, j = 1, 2
 \end{aligned}$$

Condiciones de contorno aplicables

Elevación η prescrita a η_{fix} en $\Gamma_{\eta_{fix}}$

- El campo de presiones $p_\eta(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ correspondiente a la condición dinámica de superficie libre se calcula mediante la ecuación (5.10) anterior.
5. **Actualización de la Malla** de elementos finitos, mediante el algoritmo (5.11). De este proceso se obtiene la nueva posición de todos los nodos de la malla \mathbf{x}^{n+1} y a partir de ellos es inmediato calcular la velocidad de movimiento de los nodos de la malla. En la forma más simple, esto se puede hacer mediante la siguiente relación,

$$v_j^{n+1} = \frac{x_j^{n+1} - x_j^n}{\Delta t}$$

Por otra parte las condiciones de contorno presentadas en (5.2)-(5.4) son impuestas en los algoritmos anteriores como sigue,

- Condición de contorno de presión impuesta sobre Γ_η , $p = p_\eta(\mathbf{x}, t)$. Se impone directamente sobre los sistemas (5.7) o (5.17). Lo mismo se hace sobre Γ_C , $p = 0$ en el caso de elegir esa opción.
- Condición de contorno de velocidad prescrita sobre Γ_E , $v_i = v_{ci}(\mathbf{x}, t)$ y sobre Γ_B , $v_i = 0$ en el caso de la alternativa (5.3). Se prescribe la velocidad corrigiendo el campo de velocidades obtenido en (5.8).
- Condición de contorno de velocidad normal prescrita sobre Γ_C , $v_i n_i = v_{ci}(\mathbf{x}, t) n_i$. Al igual que en el caso anterior, se prescribe esta componente de la velocidad corrigiendo el campo de velocidades obtenido en (5.8). De esta manera la condición natural de las ecuaciones (5.7) o (5.17) es precisamente $v_i n_i = v_{ci}(\mathbf{x}, t) n_i$.
- Condición de contorno de tensión tangencial impuesta sobre Γ_B , $n_j \tau'_{ij} s_i = \tau_p(\mathbf{x}, t)$. Se impone ensamblando el término de la integral de contorno $\int_{\Gamma_B} \psi_{h_i} (t_{ci}^n + p n_i^n) d\Gamma = \int_{\Gamma_B} \psi_{h_i} \tau_p \frac{v_i}{|v|} d\Gamma$ de la ecuación (5.5) o (5.16).
- Condición de contorno de flujo libre en Γ_S , $n_j \tau'_{ij} = n_j \tau_{ij}^m$. Se impone ensamblando el término de la integral de contorno $\int_{\Gamma_S} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^m d\Gamma$ de la ecuación (5.5) o (5.16).

A continuación se presentan diferentes aspectos generales de la solución del problema que completan el desarrollo del algoritmo presentado.

5.2.1 Cálculo del Incremento de Tiempo

El algoritmo de resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes (5.5)-(5.8), tiene, evidentemente limitaciones en su estabilidad en el avance temporal. Dada su naturaleza semi-implícita⁵, estas limitaciones se hacen muy evidentes y obligan a la elección de un incremento de tiempo Δt de manera que el esquema sea estable. Por ello presentaremos aquí unas recomendaciones para la elección del incremento de tiempo. Estas están basadas en el estudio de ciertos casos particulares de la ecuación de convección difusión estabilizada y se pueden consultar en [Cod93a] [OM99]. Según estos análisis, la ecuación transitoria de convección difusión integrada en el tiempo con un esquema explícito es incondicionalmente estable, si se cumple que [Cod93a],

⁵La ecuación de balance de cantidad de movimiento es integrada mediante un esquema de Euler hacia delante (*forward Euler*).

$$\Delta t \leq \frac{\Delta t_\xi \Delta t_\zeta}{\Delta t_\xi + \Delta t_\zeta} \quad (5.19)$$

Donde Δt_ξ es el incremento de tiempo para el cual se consigue la estabilidad incondicional en el problema unidimensional de convección pura⁶, mientras que Δt_ζ es el límite para la ecuación unidimensional de difusión pura. Estos límites para la ecuación unidimensional estabilizada en el espacio con el método *SUPG*, pueden obtenerse sencillamente en el caso de una malla uniforme formada por elementos lineales de tamaño h^e , para el problema con velocidad uniforme v , a partir de la relación,

$$c \leq \min \left(\frac{\gamma}{1 + \alpha\gamma}, \frac{1}{\gamma} + \alpha \right) \quad (5.20)$$

Donde c es el denominado número de Courant que se define por,

$$c = \frac{v\Delta t}{h^e} \quad (5.21)$$

Por otra parte, si suponemos que α está dado por la definición (5.6), la condición (5.20) anterior se puede escribir como,

$$c \leq \frac{\gamma}{1 + \min \left(\frac{\gamma}{3}, 1 \right) \gamma}$$

De donde pueden obtenerse los siguientes límites,

$$\begin{aligned} \Delta t_\xi &\leq \frac{h^e}{\min \left(\frac{\gamma}{3}, 1 \right) v} \quad \gamma \gg 1 \\ \Delta t_\zeta &\leq \frac{h^{e^2}}{2k} \quad u \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Y sustituyendo (5.22) en (5.19) se tiene la expresión,

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{\min \left(\frac{\gamma}{3}, 1 \right) v}{h^e} + \frac{2k}{h^{e^2}}} \quad (5.23)$$

Hay que hacer notar que una opción alternativa [VCZ97], más restrictiva que (5.23), es considerar que el límite del incremento temporal para el caso de $u \gg$ es $\Delta t_\zeta^{-1} \leq$

⁶Difusión nula, o bien $v \rightarrow \infty$.

$\frac{\min(\frac{2}{3}, 1)v}{h^e} + \frac{2k}{h^e}$, que se puede obtener de aplicar de nuevo (5.23) en (5.19). Dado que esta forma es más restrictiva, será la que adoptaremos. Si además incluimos un factor de seguridad FS , para la determinación del incremento de tiempo que asegura la estabilidad temporal del esquema, la restricción (5.19), queda como,

$$\Delta t \leq \frac{FS}{\frac{\min(\frac{2}{3}, 1)v}{h^e} + \frac{4k}{h^e}} \quad (5.24)$$

Ahora, consideremos la identificación de términos entre la ecuación de convección-difusión y las ecuaciones de Navier Stokes, con el objeto de hacer aplicable la relación (5.24) a nuestro caso⁷. En este caso, (5.24) puede escribirse, para su uso en la resolución de las ecuaciones de Navier Stokes, como,

$$\Delta t \leq \frac{FS}{\frac{\min(\frac{2}{3}, 1)|v|}{h^e} + \frac{4\mu}{\rho h^e}} \quad (5.25)$$

De esta manera, se tomará como valor del incremento temporal para la resolución de las ecuaciones (5.5)-(5.9) el dado por,

$$\Delta t = \min_e \left(\frac{FS}{\frac{\min(\frac{2}{3}, 1)|v^e|}{h^e} + \frac{4\mu}{\rho h^e}} \right) \quad (5.26)$$

Es decir el mínimo de todos los incrementos temporales calculados para cada uno de los elementos de la malla⁸.

5.2.2 Solución con Incremento de Tiempo Local

Evidentemente, la elección del incremento de tiempo mediante la expresión (5.26) limita las posibilidades del algoritmo presentado, en el sentido que, en general para problemas prácticos el incremento de tiempo será proporcional al mínimo tamaño de los elementos de la malla. Esto implica que a medida que refinemos la malla, el tiempo de cálculo necesario para resolver el problema, no sólo aumentará por la necesidad obvia de resolver un problema mayor, sino que también el incremento temporal disminuirá por lo que necesitaremos resolver más veces el sistema de ecuaciones.

Sin embargo, hemos visto que la restricción (5.25) es sólo local, por lo que podemos plantearnos tomar diferentes incrementos de tiempo para cada elemento de la malla. De esta manera, no resolveremos ningún problema físico, pero esta elección nos permitirá

⁷Esta identificación ya ha sido considerada en el capítulo 3.

⁸El índice e indica que el valor correspondiente es elemental.

llegar a la solución final estacionaria de muchos problemas prácticos con un tiempo de cálculo significativamente menor. Además, en problemas generales, donde no exista una situación final estacionaria, o bien interese estudiar la evolución de los fenómenos, este algoritmo con incrementos de tiempo locales, puede utilizarse en las primeras iteraciones, con el fin de acelerar el proceso de llegada a la situación de interés.

En general, para muchos de los estudios de interés en hidrodinámica naval, este esquema con incrementos de tiempo locales es interesante. En las diferentes pruebas que se han realizado, se ha comprobado que la aceleración de la convergencia a una situación estacionaria es óptima y que las ganancias de tiempo pueden situarse entre las 10 y 30 veces.

Sin embargo, hay que hacer mención de que la inclusión de un paso de tiempo local en las ecuaciones (5.5)-(5.9) nos obligaría a su integración, complicando las expresiones dadas [VCZ97]. Efectivamente, el parámetro Δt ya no es constante, por lo que la derivación de la forma (5.5) no es posible. Si tenemos lo anterior en cuenta, y retomando la forma general de la ecuación de balance de cantidad de movimiento, dada en el capítulo 3, siguiente,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} d\Omega = & - \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{\partial (v_i v_j)^n}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{ij}^n d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} \psi_{h_i} f_i^n d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial (h_{m_{ij}}^n \psi_{h_i})}{\partial x_j} r_{m_i}^n d\Omega + \int_{\Gamma} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^n d\Gamma + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \psi_{h_i} h_{m_{ij}}^n n_j^n r_{m_i}^n d\Gamma \end{aligned} \quad (5.27)$$

Vemos que el problema se reduce a integrar el primer miembro de (5.27). Pero si consideramos que Δt es constante por elementos, podemos volver a recuperar la forma (5.5) (o bien la (5.16)).

Aplicando los mismos criterios anteriores, puede concluirse que las ecuaciones (5.7) y (5.17) continúan siendo válida en este caso.

Como comentario final, se desea añadir que, la formulación del algoritmo con paso de tiempo local, estabilizado mediante la técnica *Characteristic Galerkin*, requiere la inclusión de diferentes términos adicionales [VCZ97, pag. 79] a la forma de Galerkin de la ecuación de balance de cantidad de movimiento. En el caso del método de *Cálculo Finitesimal*, estos términos podrían justificarse si se tomara $h_{m_{ij}}^n = \alpha v_i \Delta t$. Durante el desarrollo del presente trabajo, se ha probado la inclusión de estos términos en la forma (5.27). La experiencia no ha mostrado que la influencia de esta adición sea positiva, hallando que incluso, en algunos casos, su efecto puede ser negativo para la estabilidad del esquema (5.5)-(5.9).

5.2.3 La Condición de Superficie Libre sobre Referencias no Planas

En el capítulo 2, se justificó la forma de la ecuación (5.9). Sin embargo, su desarrollo está basado en la suposición de que $\eta(x, y, t)$ es la función que define la elevación de un punto de coordenadas x, y de la superficie libre en un instante dado. De esta manera, se puede definir la función implícita de la superficie libre $F(x, y, z, t)$, como,

$$F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0 \quad (5.28)$$

La forma de la ecuación (5.28) hace evidente que $\eta(x, y, t)$ debe referirse a una superficie plana y en concreto a la definida por $z = 0$. De esta manera, si nuestro dominio original Ω , estuviera limitado por un contorno no plano o bien no paralelo a $z = 0$, la ecuación (5.9) dejaría de ser válida, por ello es necesario corregirla ligeramente para tener en cuenta esta situación, que se produce, por ejemplo, si actualizamos el contorno para seguir el movimiento de la propia superficie libre. Si denominamos entonces $\eta_*^t(x, y, t)$ a la elevación de la superficie libre, en el instante t , respecto a un contorno genérico $\Gamma_\eta := z = \chi^t(x, y, t)$, se tiene que $\eta^t(x, y, t) = \eta_*^t(x, y, t) + \chi^t(x, y, t)$, y sustituyendo en la ecuación (5.9), podemos escribir que,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_h \eta_*^{t+\Delta t} d\Omega &= \frac{4}{3} \int_{\Omega} \varphi_h \eta_*^t d\Omega - \frac{1}{3} \int_{\Omega} \varphi_h \eta_*^{t-\Delta t} d\Omega + \\ &+ \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \varphi_h w d\Omega - \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \varphi_h (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) (\eta_*^t + \chi^t) d\Omega + \\ &+ \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} \frac{\langle k_1^{fs} - k_2^{fs} \rangle}{|\tilde{\mathbf{v}}|^2} (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \varphi_h) w d\Omega - \\ &- \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} \langle k_1^{fs} - k_2^{fs} \rangle \tilde{\nabla} \varphi_h \cdot \left(\frac{\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}}{|\tilde{\mathbf{v}}|^2} \right) \cdot \tilde{\nabla} (\eta_*^t + \chi^t) d\Omega - \\ &- \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} k_2^{fs} (\tilde{\nabla} (\eta_*^t + \chi^t) \cdot \tilde{\nabla} \varphi_h) d\Omega \end{aligned} \quad (5.29)$$

Donde, para la obtención de (5.29) se han eliminado los términos de la estabilización temporal correspondientes a χ^t .

5.2.4 Condición Absorbente para la Superficie Libre

Al objeto de prevenir la reflexión de las olas generadas en la superficie libre, en los contornos del dominio es necesario disponer algún tipo de contorno absorbente, a imagen

de las playas que se disponen en los canales de ensayos. Aunque diversos autores han desarrollado métodos muy elaborados para permitir eliminar estos indeseables efectos de los contornos (ver por ejemplo [D'E97]) aún no se ha desarrollado ninguna metodología utilizable en problemas no lineales o transitorios. En el presente trabajo se ha empleado un sistema mucho más simple para evitar las reflexiones en los contornos. Este sistema consiste en imponer un amortiguamiento [LYO98] [HMJ93] [CA99] al campo de elevaciones de la superficie libre en aquellas zonas en las que existe riesgo de que las reflexiones afecten a la solución. Este amortiguamiento consiste en la adición de un término proporcional a la elevación de la superficie libre en la ecuación (5.29). De esta manera podemos escribir esta ecuación como,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \varphi_h \eta_*^{t+\Delta t} d\Omega &= \frac{4}{3} \int_{\Omega} \varphi_h \eta_*^t d\Omega - \frac{1}{3} \int_{\Omega} \varphi_h \eta_*^{t-\Delta t} d\Omega + \\
&+ \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \varphi_h w d\Omega - \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \varphi_h \left(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\nabla} \right) (\eta_*^t + \chi^t) d\Omega + \\
&+ \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} \frac{\langle k_1^{fs} - k_2^{fs} \rangle}{|\bar{\mathbf{v}}|^2} \left(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\nabla} \varphi_h \right) w d\Omega - \\
&- \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} \langle k_1^{fs} - k_2^{fs} \rangle \bar{\nabla} \varphi_h \cdot \left(\frac{\bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{v}}}{|\bar{\mathbf{v}}|^2} \right) \cdot \bar{\nabla} (\eta_*^t + \chi^t) d\Omega - \\
&- \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} k_2^{fs} \left(\bar{\nabla} (\eta_*^t + \chi^t) \cdot \bar{\nabla} \varphi_h \right) d\Omega - \\
&- \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \Lambda(\mathbf{x}) \varphi_h (\eta_*^t + \chi^t) d\Omega
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Donde $\Lambda(\mathbf{x})$ es una función de amortiguamiento dada por,

$$\Lambda(\mathbf{x}) := \begin{cases} si \ x \in \Gamma_d & -\frac{2}{L_i} \ln(\varepsilon^*) \left[1 - \min \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}{L_i} \right] \\ si \ x \notin \Gamma_d & 0 \end{cases} \tag{5.31}$$

Donde Γ_d es el contorno sobre el que se impone en amortiguamiento, que es una franja en torno al límite de la superficie libre, de anchura variable (dada por L_1, L_2, L_3, L_4), tal y como se indica en la figura 5.3.

En la definición (5.31) $\min \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}{L_i}$ representa el valor mínimo de las distancias del punto \mathbf{x} a uno de los laterales donde se impone el amortiguamiento dividido entre la anchura de la banda correspondiente (ver figura 5.3), mientras que ε^* es un parámetro relativo⁹ a la amplitud de las olas, que mide la intensidad del amortiguamiento.

⁹Si consideramos la solución particular a la siguiente ecuación diferencial unidimensional,

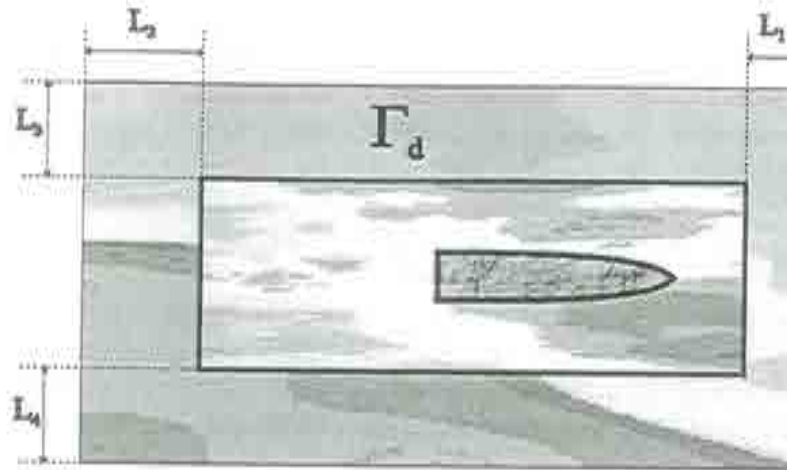


Figura 5.3: Disposición esquemática de las zonas donde se impone el amortiguamiento en la superficie libre.

En todo caso, cabe añadir que aún solucionado el problema de la inestabilidad de la ecuación discreta de transporte convectivo aún queda por salvar la limitación que supone la imposición de condiciones en las paredes del dominio de análisis. En efecto, la resolución de las ecuaciones de dinámica de fluidos por el método de los elementos finitos, lleva consigo la necesidad de imponer condiciones en los contornos, que perturban de algún modo la solución. De hecho estas condiciones de contorno sólo reflejan la necesidad física de disponer de límites en el problema. El efecto de estos contornos en nuestro caso, sería similar al de las paredes de un canal de experiencias, provocando rebotes indeseables. Estos reflejos sobre los contornos, producen perturbaciones que, si la inestabilidad de la ecuación de superficie libre esta corregida, tienden a quedar localizados en el contorno pero, en caso contrario, se propagan aguas arriba. En efecto, en este caso, el operador discreto es *ciego* para estas olas propagadas corriente arriba, y en el contrario evita su propagación. Se han propuesto diferentes maneras

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{k}{\omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} + s\phi = 0$$

dada por,

$$\phi = A \sin(kx + \omega t) e^{-sx}$$

Si s es tal que tiene un valor diferente de 0, sólo sobre un intervalo de longitud \mathcal{L} , el factor de amortiguamiento máximo será $e^{-s\mathcal{L}}$, por lo que el máximo valor posible en esa zona será $A e^{-s\mathcal{L}}$. Si queremos que $A e^{-s\mathcal{L}} < \varepsilon$, entonces se debe cumplir que $s > -\frac{1}{\mathcal{L}} \ln(\varepsilon)$, siendo $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{A}$.

Este criterio se aplica en el presente problema para la amortiguación de la solución de la ecuación cinemática de superficie libre.

de evitar este fenómeno, desde la amortiguación directa de las olas para evitar el rebote [Daw77][HMJ93] hasta métodos más sofisticados que eliminan la posibilidad de que se transmitan olas aguas arriba [D'E97] [SDI98], pero una solución efectiva a este problema está aún por descubrir.

5.2.5 La Problemática de las Popas de Espejo

Al contrario de lo que ocurre con la mayoría de los códigos numéricos existentes, el algoritmo (5.5)-(5.9) presentado es de aplicación absolutamente general a cualquier geometría naval. Sin embargo hay un aspecto que por su especial peculiaridad conviene discutir aquí. Este se refiere a las dificultades que se presentan en la simulación de los fenómenos que se desarrollan en presencia de una popa con espejo. Efectivamente, en la figura 5.4 se pueden observar los tres tipos de flujos que se pueden encontrar en presencia de una popa de espejo. La aparición de uno u otro dependerá de la configuración del buque en cada momento.

El flujo que se ha denominado de popa tradicional en la figura 5.4, es similar al que se produce en popas de crucero y no presenta dificultades especiales, debido a que el espejo queda sobre la línea de flotación inicial y no afecta en forma alguna. Sin embargo, las popas habituales en la mayoría de los buques modernos presentan los dos tipos de flujos adicionales que se presentan en la figura 5.4. El flujo con aguas muertas aparece para velocidades bajas, desarrollándose una zona de flujo turbulento localizado a popa del buque. Sin embargo, a medida que se aumenta la velocidad, la popa de espejo comienza a secarse hasta llegarse a una situación como la indicada bajo el nombre de popa de espejo en la figura 5.4, siendo en esta configuración en la que suele situarse la condición de diseño. Al contrario que lo que ocurre en los códigos de uso en hidrodinámica naval, existentes en la actualidad [Rav96], todas las situaciones referidas pueden ser perfectamente simuladas gracias al algoritmo (5.5)-(5.9). Sin embargo, existe una problemática asociada a la resolución de la situación típica de la popa de espejo. En este caso la superficie libre que se observa experimentalmente, presenta dos zonas claramente diferenciadas¹⁰. Una que se extiende desde la popa de espejo hacia aguas abajo y otra está formada por el resto de la superficie libre, tal y como se representa esquemáticamente en la figura 5.5.

En esta situación, el problema que se presenta en la resolución del problema de superficie libre, por su carácter de ecuación de convección pura, es la necesidad de imponer una condición de contorno para que la solución esté definida. En este caso es pues necesario prescribir la elevación de la superficie libre de manera que coincida con la salida del flujo fluido, tal y como se indica en la figura 5.6.

Tal prescripción es suficiente para poder simular los fenómenos en este tipo de flujos, sin necesidad de añadir ningún artificio especial, como es común en otros códigos [Rav96]. Sin embargo, la necesidad de prescribir el valor de la elevación de la superficie libre, complica la simulación del proceso de transición de flujo con aguas muertas a

¹⁰Hecho en el que se basan la mayoría de los códigos comerciales para incluir correcciones específicas para esta situación.

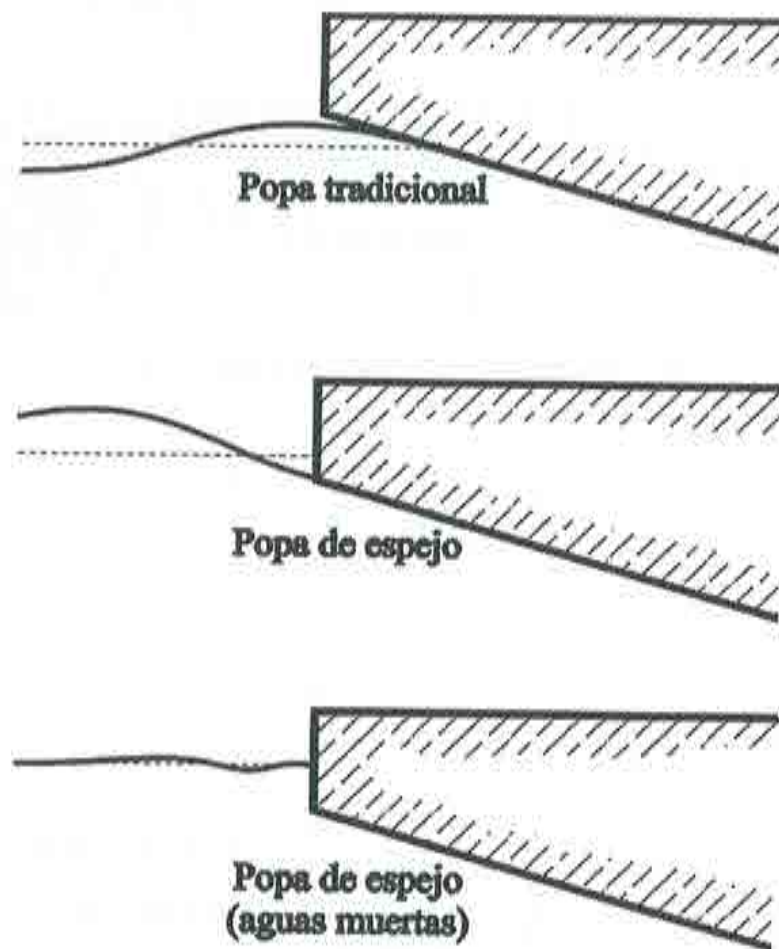


Figura 5.4: Esquemas de los posibles regímenes de flujo que pueden aparecer en una popa de espejo.

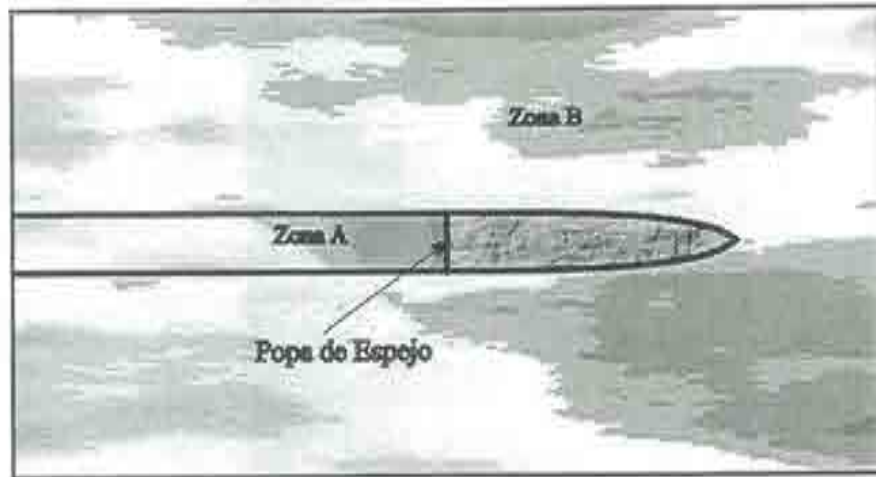


Figura 5.5: Diferentes zonas que se presentan en la superficie libre con popas de espejo.

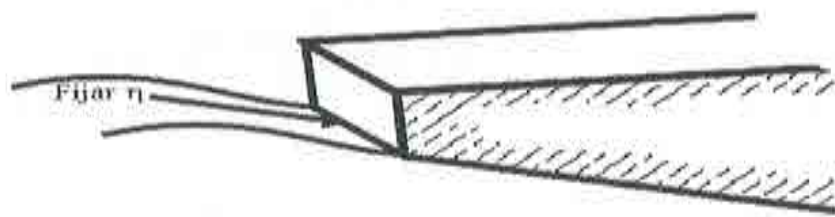


Figura 5.6: Situación de la zona donde es necesario prescribir η en los flujos con popa de espejo.

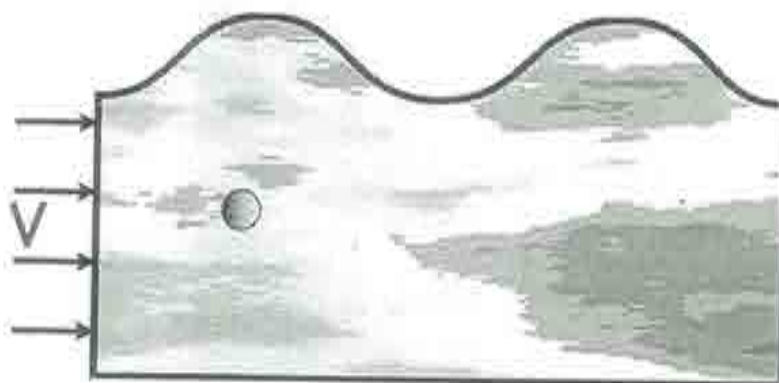


Figura 5.7: Efecto de una perturbación fija sobre la superficie libre.

flujo en popa de espejo. La manera de proceder en estos casos es partir de velocidades elevadas, donde es seguro que no aparezca el flujo con aguas muertas, para ir descendiendo la velocidad gradualmente. De esta manera se llegará a un punto donde el algoritmo no converja, que corresponderá a la situación en que el espejo comience a mojarse, por lo que la imposición hecha sobre la superficie libre no es ya física. A partir de este punto el problema se resuelve de la manera habitual, sin ningún tipo de imposiciones excepcionales.

5.3 Un Generador de Olas Numérico

Otro aspecto que se ha considerado durante el presente trabajo es el desarrollo de un generador de olas numérico. Este generador podría ser incluido en las simulaciones para tener en cuenta el efecto del oleaje en el comportamiento de la carena. A continuación se describe el método diseñado para conseguir esta generación.

Consideremos el efecto que sobre la superficie libre, tiene una perturbación fija, como la representada en la figura 5.7. En efecto, si consideramos, un dominio Ω , con una superficie libre Γ_n , en el que entre un fluido con una velocidad V que choca con un obstáculo, se produce una ola estacionaria en la superficie libre, que en el caso de que la profundidad del dominio sea muy grande, se cumple, aproximadamente, la siguiente relación [Llo89],

$$\lambda = \frac{2\pi}{g} V^2 \quad (5.32)$$

Donde λ es la longitud de la ola que aparece y g es la aceleración de la gravedad. Consideremos ahora la situación presentada en la figura 5.8. En este caso la perturbación se mueve a una velocidad V' respecto al fondo, provocando que la ola que produce, estacionaria respecto a ella, se desplace respecto al fondo a la misma veloci-

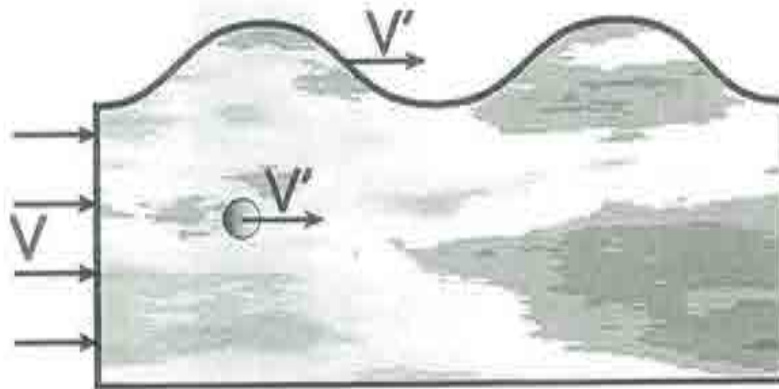


Figura 5.8: Efecto de una perturbación móvil sobre la superficie libre.

dad. En este caso, dado que la velocidad con la que se mueve el fluido respecto a la perturbación es $(V - V')$, se cumple la siguiente relación,

$$\lambda = \frac{2\pi}{g} (V - V')^2 \quad (5.33)$$

Con esta sencilla base teórica, podemos imaginar el siguiente generador de olas. Dada la velocidad de encuentro de las olas con el barco $V_e = (V - V')$, podemos calcular la longitud de onda correspondiente a partir de (5.33). Entonces, podemos perturbar el fluido imponiendo un campo de presiones sobre la superficie libre, tal y como se representa en la figura 5.9, dado por la siguiente expresión,

$$p(x, t) = Ag \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{V'}{\lambda} t \right) \quad (5.34)$$

Donde A es un parámetro que permite controlar la amplitud de las olas generadas¹¹ y que depende de manera compleja de cada problema particular, por lo que requiere ser calibrado en cada caso. El resultado que produce la aplicación de (5.34) es idéntico al representado en la figura 5.8.

Es posible modificar la forma del generador dado en (5.34) para permitir incluir el efecto de una composición de ondas. En este caso podemos imponer un campo de presiones dado por [GÁ88],

$$p(x, t) = \sum_i A_i g \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{V'}{\lambda} t \right) \quad (5.35)$$

¹¹ Este parámetro es del orden de la altura de olas generada, pero su relación con ellas depende de la energía transmitida al fluido por el generador, que es significativamente dependiente de la geometría del dominio, por lo que la relación entre ambas varía en cada caso particular.

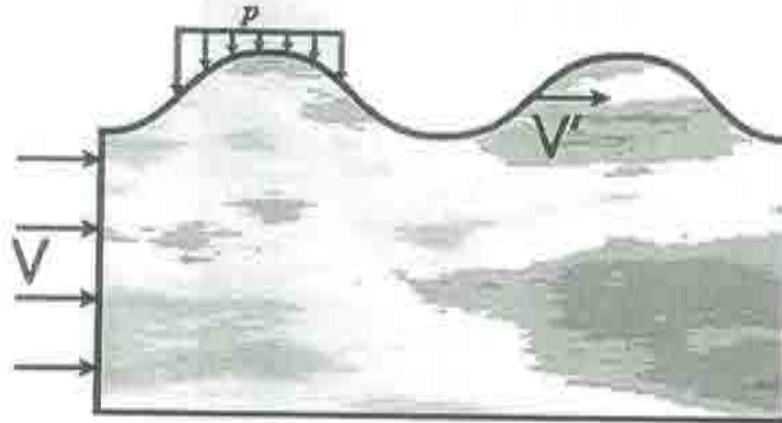


Figura 5.9: Esquema de un generador de olas numérico, consistente en la imposición de una presión oscilatoria sobre la superficie libre.

Por otra parte, es evidente que el generador (5.35) puede complicarse, dándole más flexibilidad, si permitimos que la perturbación sea variable según el otro eje horizontal Oy . De esta manera, podemos añadir un desfase en (5.35), en la forma,

$$p(x, y, t) = \sum_i A_i g \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{V'}{\lambda} t + \varphi(y) \right) \quad (5.36)$$

La forma (5.36) permite obtener espectros de olas reales, mediante técnicas similares a las utilizadas en los canales de experiencias (ver [GÁ88]).

5.4 Ejemplos

A continuación se presentan diversos ejemplos prácticos de aplicación de la metodología presentada. Entre ellos se pueden encontrar diversos problemas reales, de aplicación directa en la industria naval. En los análisis escogidos para esta exposición se tuvo en consideración especial uno de los aspectos que se considera esencial de este trabajo. Este se refiere al salto cualitativo que supone el no tener que restringirse a la teoría de los buques lentos. Efectivamente los análisis CFD tradicionales en hidrodinámica naval, se restringían a un valor de F_n relativamente bajo, con el problema añadido de que en la solución para F_n muy pequeños está polucionada por los errores numéricos (una buena aproximación a la solución, en estos casos, es la del doble modelo sumergido) y es en general poco fiable (en códigos no lineales provoca importantes inestabilidades en muchos casos). El método presentado en este trabajo rompe esta barrera y puede ser aplicado a problemas con F_n elevados.

Todos los análisis aquí realizados se han llevado a cabo con mallas de tetraedros lineales, por la flexibilidad de estas mallas para adaptarse a geometrías complejas y el



Figura 5.10: Geometría utilizada en el análisis del modelo de la serie 60 con $C_b = 0.6$.

bajo coste de cálculo de este elemento. Otros tipos de elementos se consideraron en fases iniciales del trabajo pero su uso se limitó a problemas académicos.

5.4.1 Ejemplo 1

El primer ejemplo que se analiza es una prueba clásica en el análisis *CFD* de buques; el modelo de la serie 60 con coeficiente de bloque $C_B = 0.6$. Este modelo ha sido analizado por diferentes autores (ver por ejemplo [Rav96]) dado que fue elegido para tal objeto dentro del Programa de Cooperación Experimental del Comité de Flujo y Resistencia de la *ITTC* (*International Towing Tank Conference*), existiendo por lo tanto diversos resultados experimentales publicados, correspondientes al remolque del buque trincado. Para la siguiente discusión se han tomado los resultados publicados en [TSL93b] y [TSL93a]. Este ejemplo ha sido analizado numéricamente en diferentes aspectos, presentándose a continuación un resumen de los resultados encontrados.

En la figura 5.10 puede verse la definición geométrica del modelo que ha sido usada en el análisis, para el cual se han utilizado diferentes mallas volumétricas de tetraedros lineales, variando entre 35.000 y 700.000 elementos.

En primer lugar se presentan los resultados del análisis del modelo estándar con una eslora en flotación de $L_{WL} = 3.1m$, $B = 0.406m$, $D = 0.244m$ y $T = 0.163m$.

En la figura 5.11 se presenta el mapa de olas (arriba) y el campo de velocidades sobre la superficie libre para el análisis no viscoso correspondiente a $F_n = 0.316$. Para este mismo caso se presentan diferentes perfiles de olas. En ellos se comparan los resultados numéricos con los experimentales publicados en [TSL93b].

En la figura 5.12 se presentan los resultados del perfil de olas sobre el casco. Los resultados numéricos que se incluyen corresponden al análisis no viscoso ($\rho = 1000Kg/m^3$, $\mu = 0$) y viscoso ($\rho = 1000Kg/m^3$, $\mu = 10^{-3}Kg/ms$ y condición de contorno sobre el buque de tracción impuesta, dada por la ley de pared logarítmica) para $F_n = 0.316$ (el modelo se sitúa con su perpendicular de proa en el origen de co-

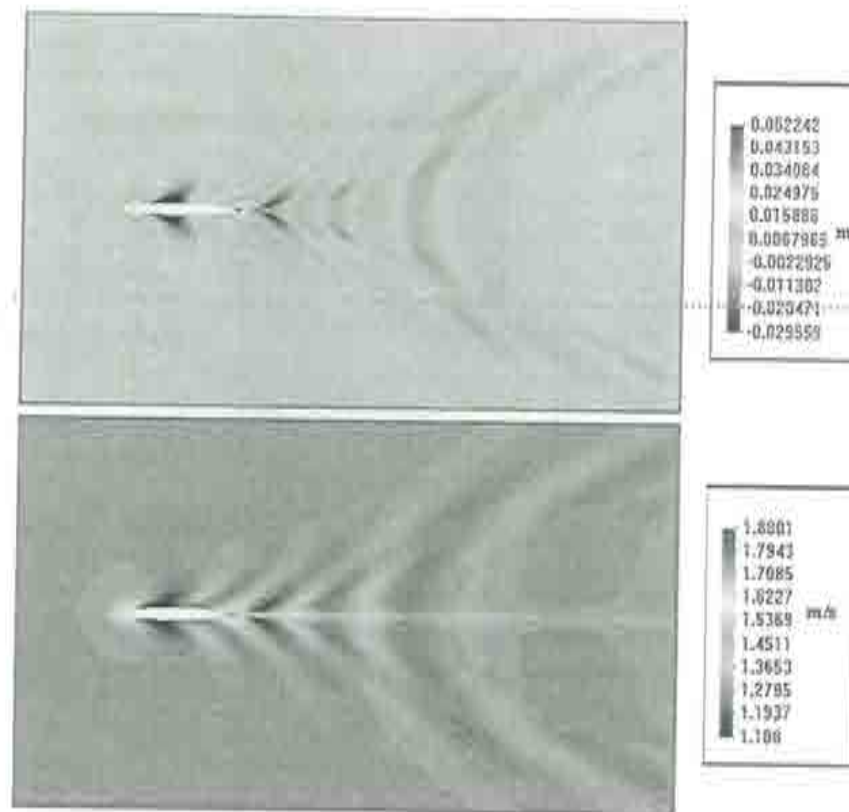


Figura 5.11: Mapa de olas (arriba) y de velocidades (abajo) sobre la superficie libre, resultado del análisis del buque de la serie 60 ($F_n = 0.316$)

ordenadas). En el análisis viscoso se utilizó un modelo de turbulencia de Smagorisky. Como puede apreciarse, los resultados numéricos concuerdan muy bien con los experimentales. Pudiendo observarse una sensible mejora en los mismos, en el caso del análisis viscoso.

En la figura 5.13 se presentan los resultados del perfil de olas en un corte practicado a una distancia $y/L_{pp} = 0.0755$ del plano de crujía. Los resultados numéricos que se incluyen corresponden, al igual que en el caso anterior, al análisis viscoso y no viscoso para $F_n = 0.316$ (el modelo se sitúa con su perpendicular de proa en el origen de coordenadas). Como puede apreciarse, los resultados numéricos concuerdan muy bien con los experimentales en ambos casos. Pudiendo observarse, no obstante, una importante mejora en los mismos, en el caso viscoso.

El tercer perfil de olas, que se presenta en la figura 5.14 corresponde a los resultados en un corte practicado a una distancia $y/L_{pp} = 0.2067$ del plano de crujía. Los resultados numéricos se obtuvieron para $F_n = 0.316$ (el modelo se sitúa con su perpendicular de proa en el origen de coordenadas). Como puede apreciarse, los resultados numéricos concuerdan muy bien con los experimentales en ambos casos. En este caso, la mejora

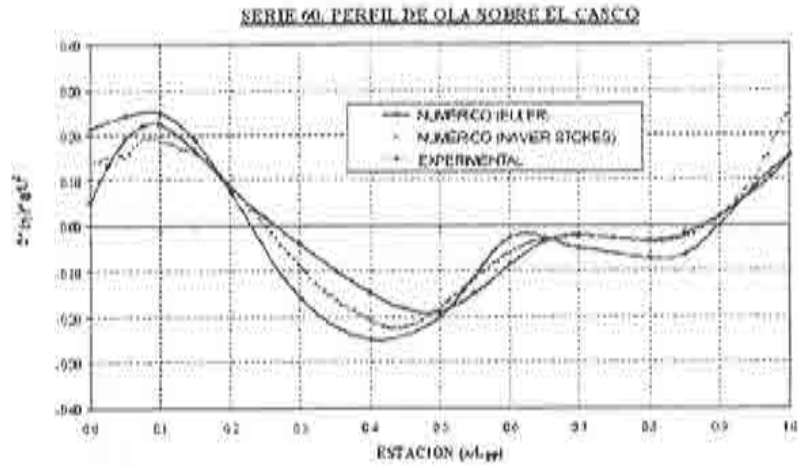


Figura 5.12: Comparación de los resultados del perfil de olas sobre el casco del buque de la serie 60 ($F_n = 0.316$)

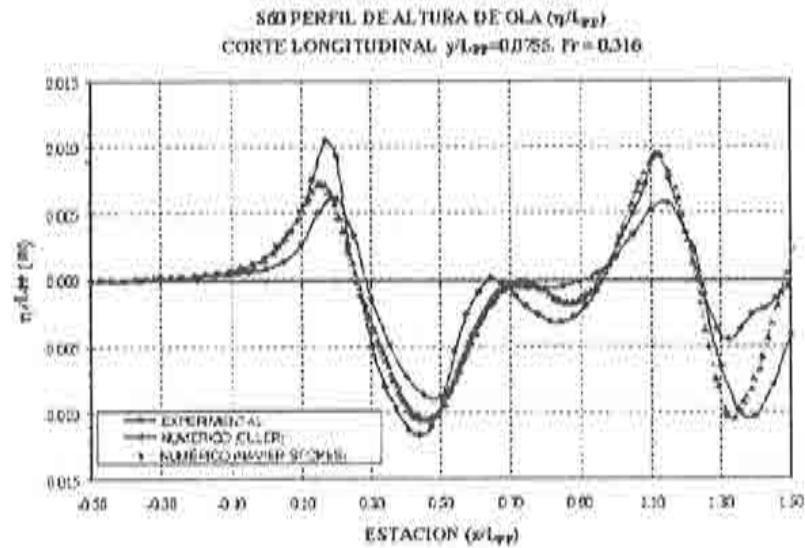


Figura 5.13: Comparación de los resultados del perfil de olas en un corte a una distancia $y/L_{pp} = 0.0755$ del plano de crujía, en el análisis del buque de la serie 60 ($F_n = 0.316$).

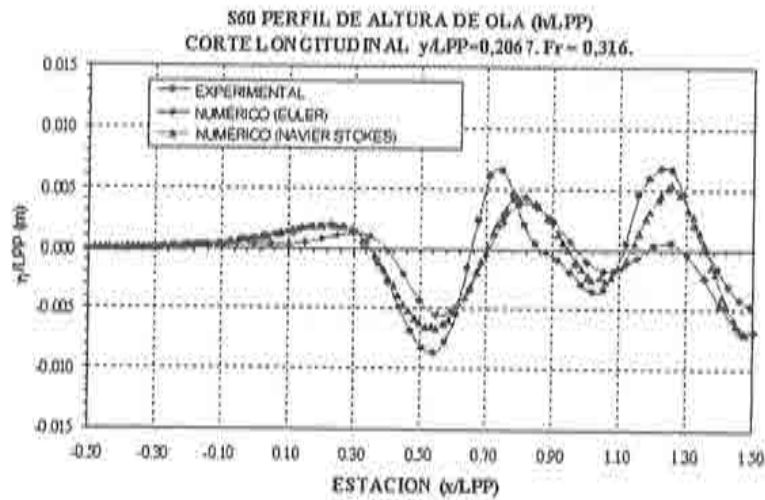


Figura 5.14: Comparación de los resultados del perfil de olas en un corte a una distancia $y/L_{pp} = 0.2067$ del plano de crujía, en el análisis del buque de la serie 60 ($F_n = 0.316$).

apreciada en el caso del análisis viscoso es, en este corte, mucho más significativa.

Por otra parte, en la figura 5.15 se muestran diferentes instantáneas del proceso de convergencia de la solución para $F_n = 0.316$.

A continuación, en las figuras 5.16 y 5.17 se muestran la evolución del coeficiente de resistencia por formación de olas, obtenido numéricamente del análisis no viscoso, con el valor de F_n . Este valor se compara con los obtenidos, según las recomendaciones de la *ITTC*, de los datos experimentales. Como puede observarse, en la figura 5.16, correspondiente al análisis con una malla grosera, la solución obtenida para F_n pequeños se separa mucho de la esperable. Esto se debe a que la malla utilizada no permite capturar las pequeñas perturbaciones que ocurren en la superficie libre, resultando en una solución inestable. Es evidente que, una solución más aproximada en este caso correspondería al análisis del doble modelo sumergido. En la gráfica 5.17, correspondiente al análisis con una malla más fina, puede verse como la solución para F_n pequeños vuelve a acercarse al valor esperado. Sin embargo, los problemas de inestabilidad persisten, en este caso, para valores inferiores de F_n .

A continuación se presentan los resultados del análisis del buque a *escala real* (considerando que el modelo estudiado con anterioridad está a una escala $\lambda = 40$) de la serie 60, propuesto en [TSL91]. Este buque tiene una eslora entre perpendiculares $L_{pp} = 121.9m$, una manga $B = 16.2m$ y un calado $T = 6.5m$. El análisis ha sido hecho con las constantes físicas características del medio siguientes $\rho = 1000Kg/m^3$, $\mu = 10^{-3}Kg/ms$. Se impuso sobre el buque la condición de contorno de tracción prescrita, dada por la ley de pared logarítmica extendida. El análisis se llevó a cabo con un modelo de turbulencia de Smagorisky. Se analizaron tres casos, correspondientes a

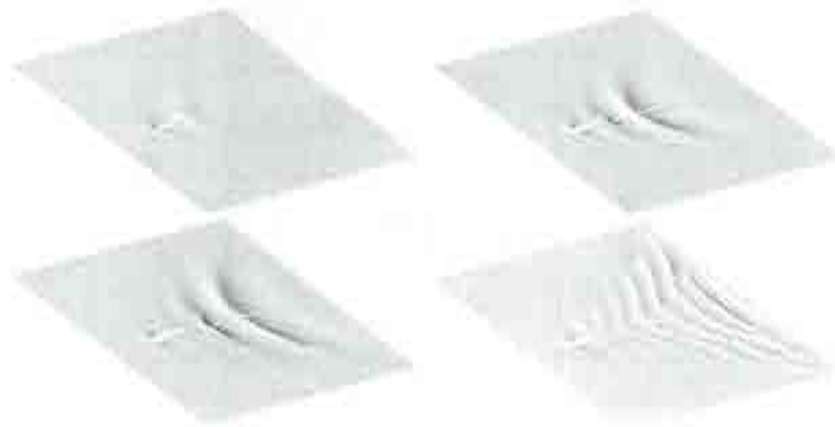


Figura 5.15: Instantáneas del proceso de convergencia de la solución de las olas creadas por el modelo de la serie 60 ($F_n = 0.316$).

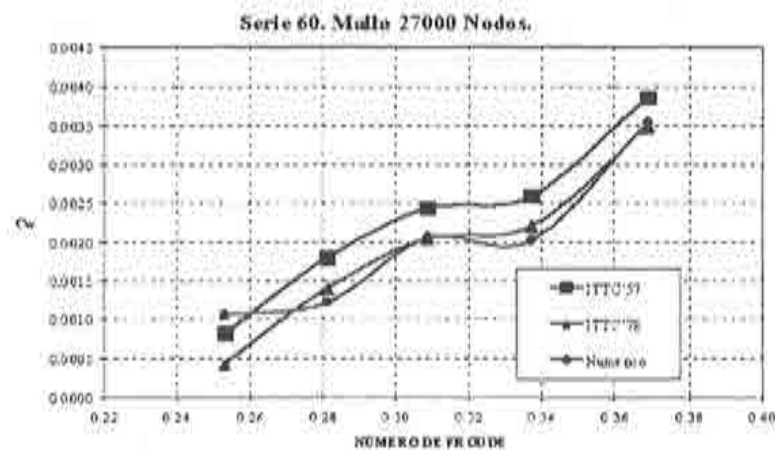


Figura 5.16: Gráfica del coeficiente de resistencia por formación de olas del modelo de la serie 60. Los resultados numéricos, obtenidos con una malla de 27000 nodos, se comparan con los extraídos de los experimentos según las recomendaciones de la *ITTC*.

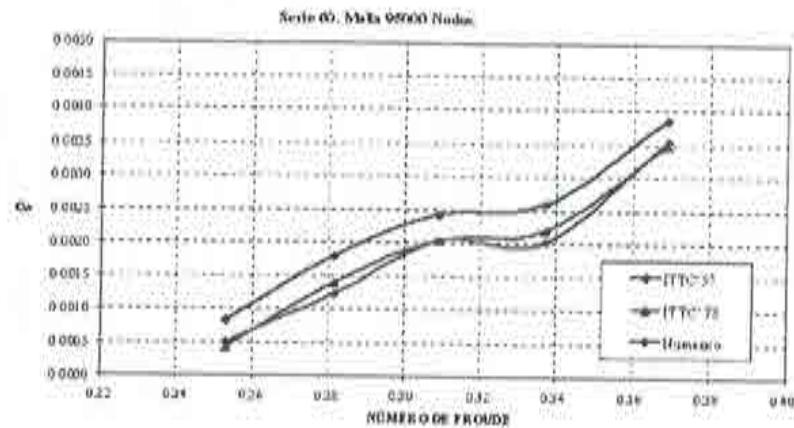


Figura 5.17: Gráfica del coeficiente de resistencia por formación de olas del modelo de la serie 60. Los resultados numéricos, obtenidos con una malla de 95000 nodos, se comparan con los extraídos de los experimentos según las recomendaciones de la *ITTC*.

$F_n = 0.316$, $F_n = 0.238$ y $F_n = 0.160$. A continuación se presentan diferentes resultados gráficos de los análisis efectuados.

En la figura 5.18 se muestra el mapa de olas para el caso de $F_n = 0.316$. Este mapa es muy similar al obtenido en el análisis del modelo a escala $\lambda = 40$, aunque se apreciaron diferencias significativas en la zona cercana a la popa, probablemente debidas a fenómenos relacionados con la turbulencia. En las figuras 5.19 y 5.20 se muestran diversas líneas de corriente en las cercanías de la popa del buque, pudiendo apreciarse su gran curvatura, indicativa de que el flujo está separado en esa zona. Además, se han dibujado sobre el casco los contornos de la componente O_x de la velocidad, pudiendo apreciarse la zona donde el flujo comienza a separarse, indicado, de manera aproximada por el cambio de signo de esta componente (en azul).

Por otra parte, en la figura 5.21 se muestran las mismas líneas de corriente en las cercanías de la proa del buque. Se puede apreciar la importante perturbación que, el buque, produce en el flujo, indicada por la curvatura de estas líneas.

En la figura 5.22 se muestran los contornos componente O_x de la velocidad sobre la superficie libre, mientras que en la figura 5.23 se muestran los mismos contornos en las cercanías del buque.

A continuación se muestran diversos resultados del análisis del buque para $R_n = 10^9$ y $F_n = 0.238$. En la figura 5.24 se muestra el mapa de olas calculado. La malla se ha deformado con un factor de amplificación de 5. Por su parte, en la figura 5.25 se muestra el trazado de varias líneas de corriente en las cercanías de la popa del buque. Sobre el casco se han dibujado los contornos del módulo de la velocidad. Estos mismos contornos, pueden verse sobre la superficie libre, en la figura 5.26. Por último se presenta, en la figura 5.27, la distribución de presión en las cercanías del casco. Las



Figura 5.18: Mapa de olas del buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 1.3 \cdot 10^9$ y $F_n = 0.316$.

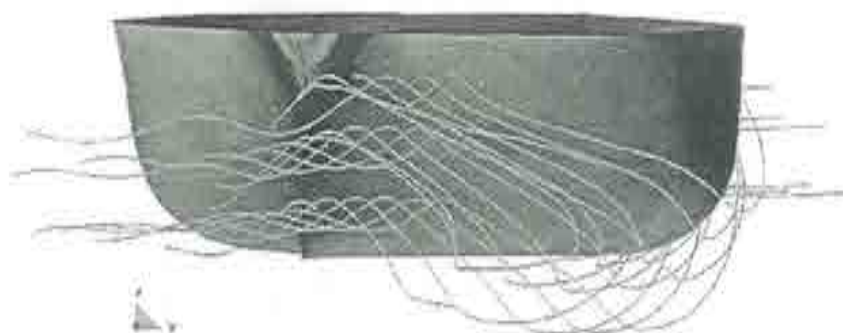


Figura 5.19: Líneas de corriente en torno a la popa del buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 1.3 \cdot 10^9$ y $F_n = 0.316$.

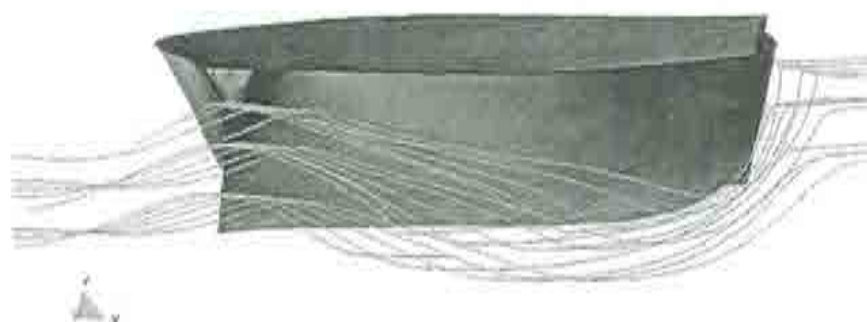


Figura 5.20: Perspectiva de las líneas de corriente en torno a la popa del buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 1.3 \cdot 10^9$ y $F_n = 0.316$.



Figura 5.21: Líneas de corriente en torno al buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 1.3 \cdot 10^9$ y $F_n = 0.316$.



Figura 5.22: Contornos del módulo de la velocidad sobre la superficie libre del buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 1.3 \cdot 10^9$ y $F_n = 0.316$.

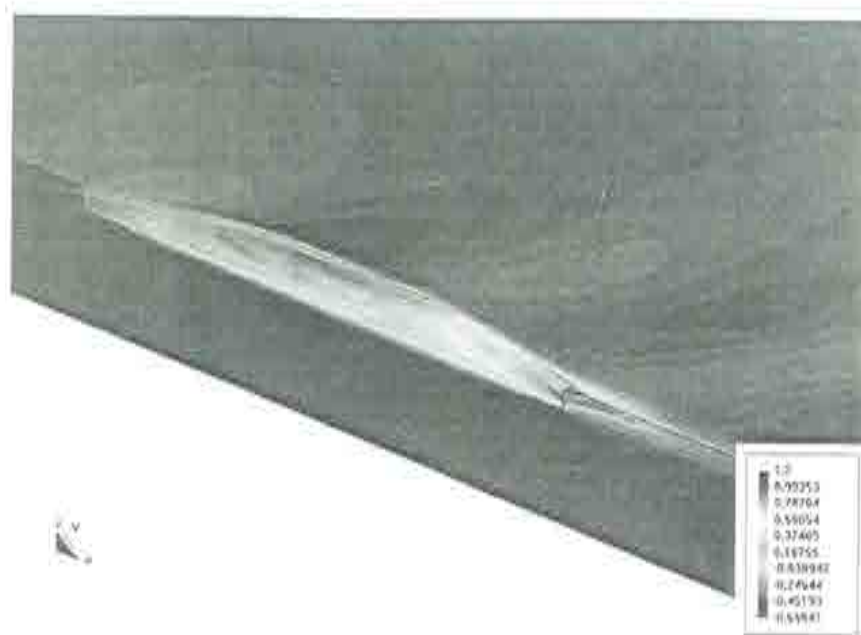


Figura 5.23: Contornos de la componente según Ox de la velocidad del buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 1.3 \cdot 10^9$ y $F_n = 0.316$.

superficies se han hecho transparentes, permitiendo que se vean las líneas de corriente trazadas.

Por último en la figura 5.28 se presentan los contornos de la componente según Ox de la velocidad en torno al buque para $R_n = 6.5 \cdot 10^8$ y $F_n = 0.16$, mientras que en la figura 5.29 se presentan los contornos de la presión en el mismo caso. En esta misma figura se han trazado diferentes líneas de corriente sobre el casco.

Como conclusión del análisis del modelo de la serie 60, debe señalarse la importancia significativa, que los fenómenos relacionados con la viscosidad, parecen tener en la solución. Esta influencia es más destacable en las zonas cercanas a la popa del buque. La variación de las condiciones de contorno sobre el buque pueden mejorar los resultados en el caso con viscosidad nula, pero este efecto depende del caso concreto. Por otra parte, la convergencia del problema se complica a medida que se disminuye¹² el valor de F_n . Esto se debe a que la perturbación de la superficie libre es despreciable, y no puede capturarse sino con una malla lo suficientemente fina. El resultado, en este caso, es la aparición de oscilaciones numéricas que desaparecen utilizando mallas más finas. Es evidente, que este proceso de refinamiento tiene un límite, llegado al cual hay que suponer que la mejor aproximación posible al problema es considerar que la superficie libre permanece imperturbada.

Por otra parte, es importante señalar, que la solución con viscosidad es mucho más estable que la obtenida para $\mu = 0$. Los ensayos llevados a cabo para R_n elevados

¹² Este problema es mucho más significativo en los análisis con viscosidad nula.



Figura 5.24: Mapa de olas del buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 10^9$ y $F_n = 0.238$.

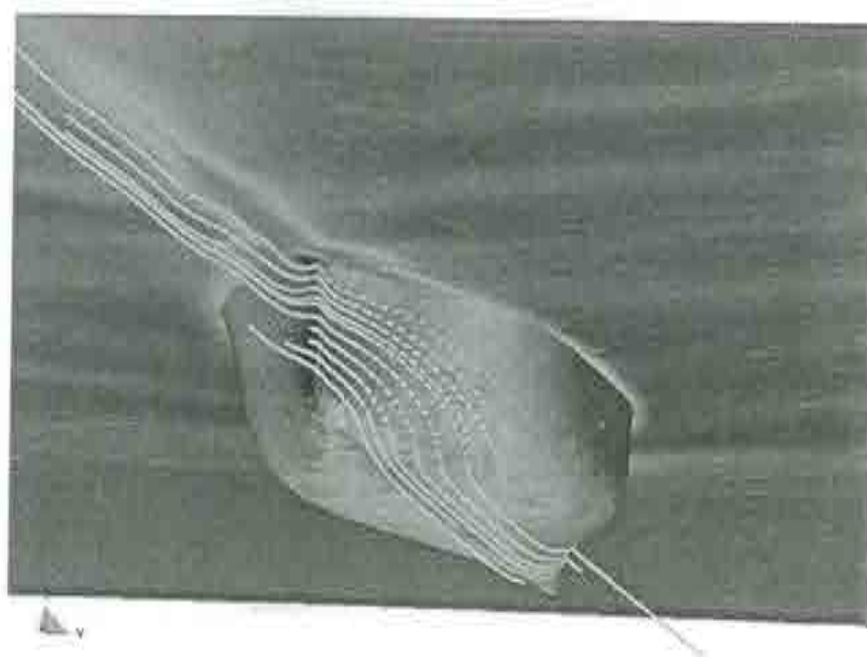


Figura 5.25: Líneas de corriente en torno al buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 10^9$ y $F_n = 0.238$.



Figura 5.26: Contornos del módulo de la velocidad en torno al buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 10^9$ y $F_n = 0.238$.



Figura 5.27: Contornos de presión en torno al buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 10^9$ y $F_n = 0.238$. La superficie libre transparente permite ver las líneas de corriente trazadas en torno al buque.

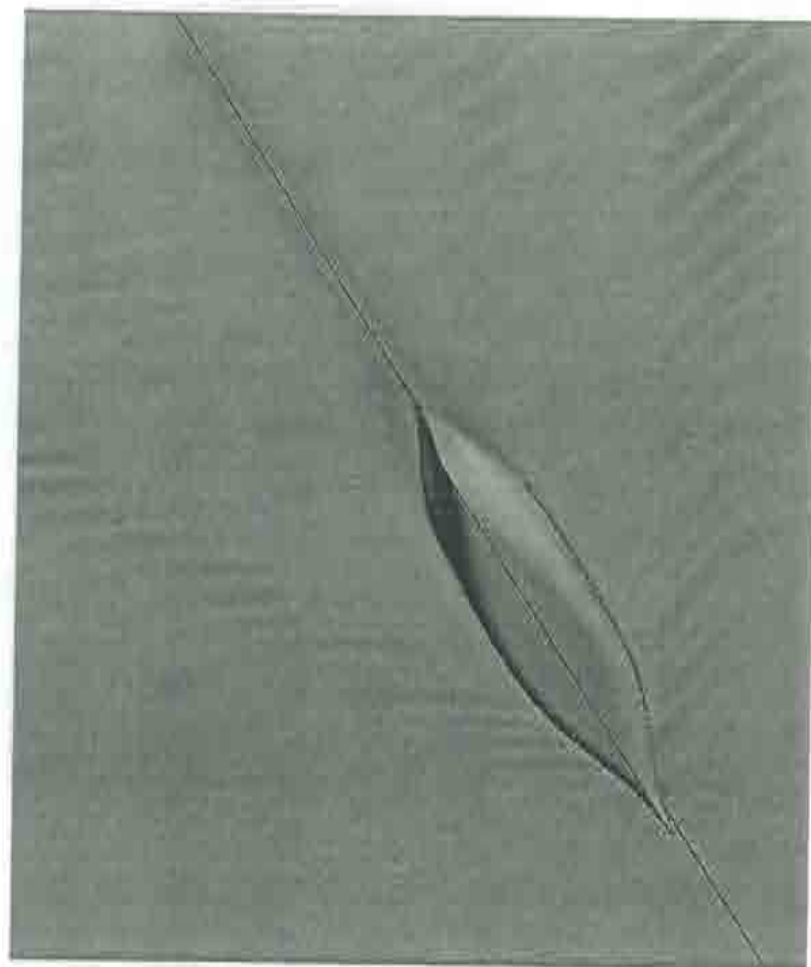


Figura 5.28: Contornos de la componente según Ox de la velocidad en torno al buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Análisis para $R_n = 6.5 \cdot 10^8$ y $F_n = 0.16$.

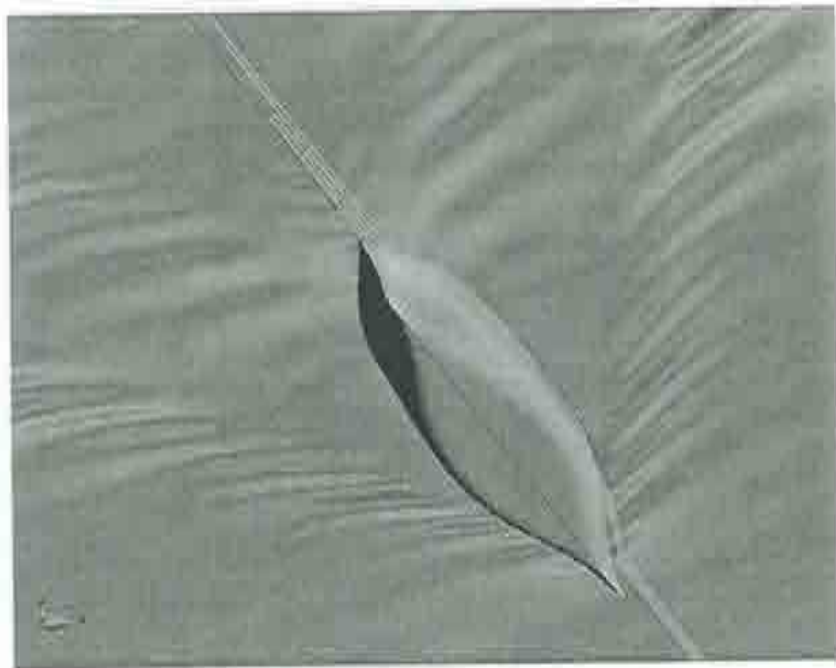


Figura 5.29: Contornos de presión en torno al buque de $L_{pp} = 122m$ de la Serie 60. Se han trazado diferentes líneas de corriente sobre el casco. Análisis para $R_n = 6.5 \cdot 10^8$ y $F_n = 0.16$.

confirman este aspecto, habiéndose podido correr casos para valores de F_n relativamente bajos, con mallas *modestas* en torno a 100.000 elementos tetraédricos.

Además los ensayos realizados con valores de $R_n \simeq 10^9$ ofrecen valores de la resistencia total muy cercanos a los que pueden obtenerse, a partir de los ensayos en canal (ver [TSL91]), siguiendo las recomendaciones de la *ITTC*. A continuación se presenta una tabla que recoge los valores de resistencia al avance obtenidos en los ensayos, comparándolos con los extrapolados a partir de los datos experimentales. Los primeros se han separado en dos componentes, la primera correspondiente a la integración de los esfuerzos sobre el casco, y la segunda por integración de la presión. Todos los valores de resistencia están dados en Newtons y la velocidad en m/s .

V	Experimental	Númeroico(p)	Númeroico(τ)	Númeroico($p + \tau$)
5.33	72.000	5.500	75.200	80.700
8.23	155.000	30.400	167600	198.000
10.93	300.000	83.200	243600	326.800

Como puede apreciarse, las diferencias máximas son del orden del 15%. Estas diferencias, pueden no ser tan significativas, habida cuenta de la incertidumbre que existe tanto en el método de extrapolación, como en el proceso de integración numérica sobre el casco.

5.4.2 Ejemplo 2

A continuación se presentan los resultados del análisis de la fragata denominada HS-DF04 perteneciente a la E.N. Bazán de C.N.M. Esta geometría ha sido ensayada en el Basin d'Essais des Carènes de París [ddC98]. En los análisis numéricos que se presentan, se ha analizado el modelo a escala con el objeto de validar los resultados con los obtenidos experimentalmente.

En la figura 5.30 puede verse la compleja definición geométrica del modelo que ha sido usada en el análisis, para el cual se han utilizado diferentes mallas volumétricas de tetraedros lineales, variando entre 35.000 y 150.000 elementos. Como puede apreciarse, el modelo posee un significativo bulbo en proa, cuyo objeto es alojar el equipo de sonar, una quilla y termina con una popa de espejo. La simulación se llevó a cabo fijando en la zona central del espejo la elevación de la superficie libre, siguiendo la metodología explicada en este mismo capítulo.

En la figura 5.31 y 5.32 se presentan los resultados del perfil de olas sobre el casco. Los resultados numéricos que se incluyen corresponden al análisis no viscoso ($\rho = 1000 Kg/m^3$, $\mu = 0$) del modelo, a escala 1:22 (las características principales del modelo son $L_{pp} = 5.5m$, $B = 0.7m$ y $T = 0.2m$), para un valor de $F_n = 0.45$. El modelo se sitúa con su perpendicular de proa en el origen de coordenadas. Como puede apreciarse, los resultados numéricos concuerdan apreciablemente bien con los experimentales, aunque las oscilaciones de mayor frecuencia no se han recogido, probablemente por su origen en fenómenos no reproducidos numéricamente como olas rompientes y por los errores



Figura 5.30: Geometría utilizada en el análisis de la carena HSDF04.

introducidos por lo grosero de la malla empleada. La diferencia entre los perfiles, que se aprecia en la parte derecha de las gráficas se debe al efecto del amortiguamiento numérico añadido en esta zona, a la solución numérica, para impedir la reflexión en el contorno.

El mapa de olas correspondiente al mismo caso se presenta en la figuras 5.33 y 5.34.

Por otra parte, en la figura 5.35 se presenta la curva de resistencia por formación de olas obtenida en los análisis, y se compara con las curvas correspondientes a las recomendaciones de la *ITTC* de 1978 y 1957. Como puede apreciarse, el resultado obtenido, debe considerarse óptimo, al encontrarse entre ambas, y con diferencias relativas menores del 7%. No fue posible obtener resultados numéricos estables, con las condiciones de contorno mencionadas con anterioridad, para F_n menores de 0.39. Esto concuerda con las observaciones experimentales, que detectaron que la popa empezaba a estar mojada para valores inferiores de F_n . Por lo tanto, la metodología de análisis de buques con popa de espejo parece ser adecuada para detectar la zona de tránsito al flujo con aguas muertas. A partir de ese punto, sería necesario eliminar la prescripción de la altura de la superficie libre en la popa de espejo, pues ya no es física.

Por último, se presentan diferentes resultados gráficos del análisis viscoso ($\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$, $\mu = 10^{-3} \text{ Kg/ms}$) del modelo, a escala, para un valor de $F_n = 0.45$. Este análisis se llevó a cabo con la imposición de la tracción sobre el casco, dada por la ley de pared logarítmica extendida. Además se utilizó un modelo de turbulencia de Smagorinsky.

En la figura 5.36 se presentan los contornos de velocidad sobre el casco del modelo. Se puede observar claramente la importante estela que crea el bulbo de proa. En la figura 5.37 se han trazado diferentes líneas de corriente, que permiten observar la influencia del modelo en el flujo. Por otra parte, esta misma influencia, en lo referente al bulbo, puede verse en la figura 5.38.

Por otra parte, los perfiles de olas obtenidos en este caso, no se diferencian signi-

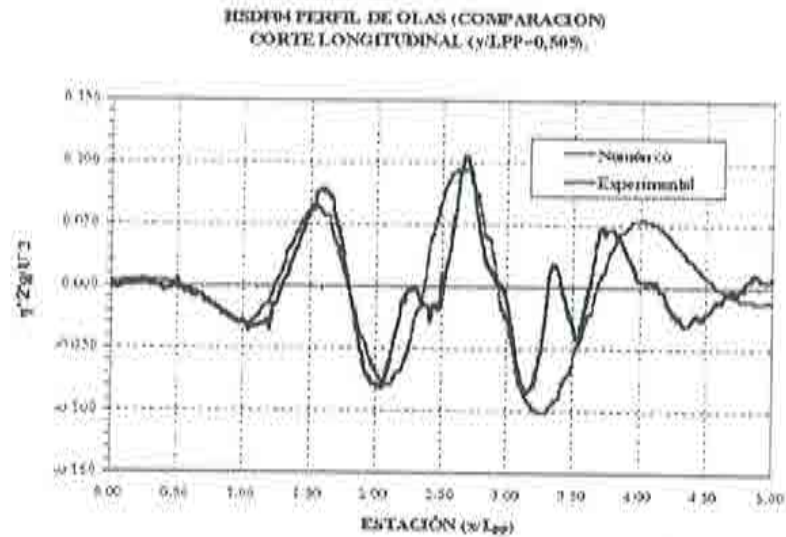


Figura 5.31: Comparación de los resultados del perfil de olas en un corte a una distancia $y/L_{pp} = 0.505$ del plano de crujía, en el análisis de la carena HSDF04 ($F_n = 0.45$).

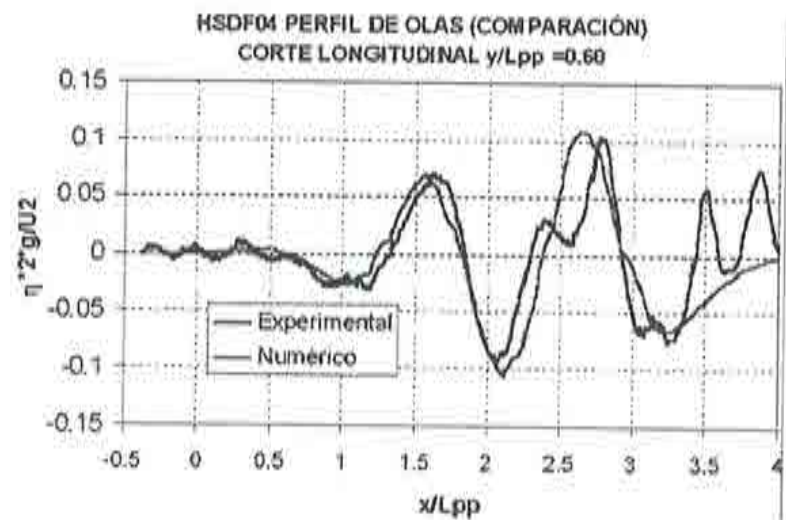


Figura 5.32: Comparación de los resultados del perfil de olas en un corte a una distancia $y/L_{pp} = 0.60$ del plano de crujía, en el análisis de la carena HSDF04 ($F_n = 0.45$).



Figura 5.33: Mapa de olas resultado del análisis de la carena HSDF04 ($F_n = 0.45$)



Figura 5.34: Isocontornos de altura de olas, resultado del análisis de la carena HSDF04 ($F_n = 0.45$)

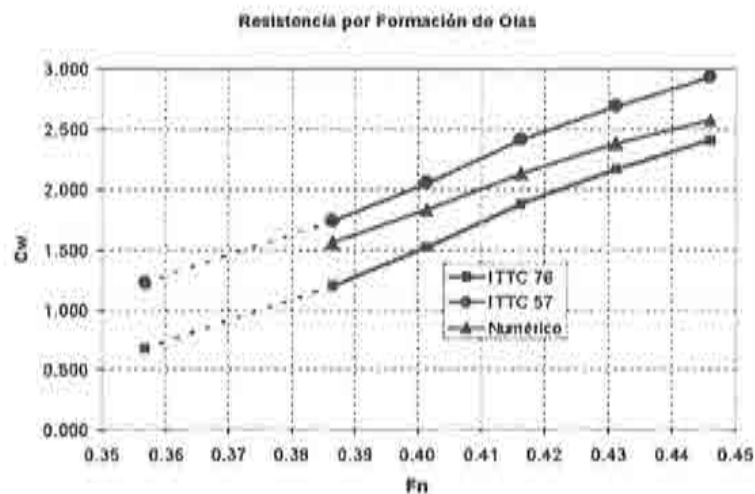


Figura 5.35: Curva de resistencia por formación de olas de la fragata. Se indica en rayado la zona donde experimentalmente se observó que el espejo comenzaba a estar mojado.

ficativamente de los presentados en 5.31 y 5.32 para el análisis no viscoso.

5.4.3 Ejemplo 3

El siguiente ejemplo que se presenta corresponde al análisis de un submarino. La geometría pertenece a la E.N. Bazán de C.N.M. y por razones de confidencialidad y seguridad, sólo se presentan aquí ciertos resultados cualitativos. El objetivo del análisis es determinar la firma radar (perturbación del submarino en la superficie libre) y firma de presión (perturbación de la distribución de presión que produce a diferentes alturas) con el objeto de permitir mejorar su diseño, de manera que se dificulte su detección, y en el sentido opuesto, poder encontrar medios más eficaces para la detección de estos artefactos navales. En la figura 5.39 se muestra la definición geométrica superficial del submarino, de eslora total $L_{OA} = 67m$, junto con la malla utilizada en el análisis. Las mallas volumétricas completas, utilizadas en el análisis tenían más de 1.000.000 de elementos tetraédricos lineales y por encima de 175.000 nodos.

En la figura 5.40 se muestran varios resultados gráficos del análisis de la firma de presión del submarino. Para ello se han practicado diversos cortes (el submarino, en situación de ataque, se encuentra entre los dos superiores) sobre los que se han dibujado las líneas isobaras en diferentes instantes de tiempo.

Por otra parte, en la figura 5.41 se presentan diferentes imágenes del análisis de la firma radar del submarino. En este caso el interés se centra en calcular la deformación de la superficie libre, que éste produce cuando se encuentra en situación de ataque. En



Figura 5.36: Contornos de velocidad sobre la carena HSDF04 para $F_n = 0.45$.



Figura 5.37: Trazado de líneas de corriente en torno al casco de la fragata ($F_n = 0.4$).

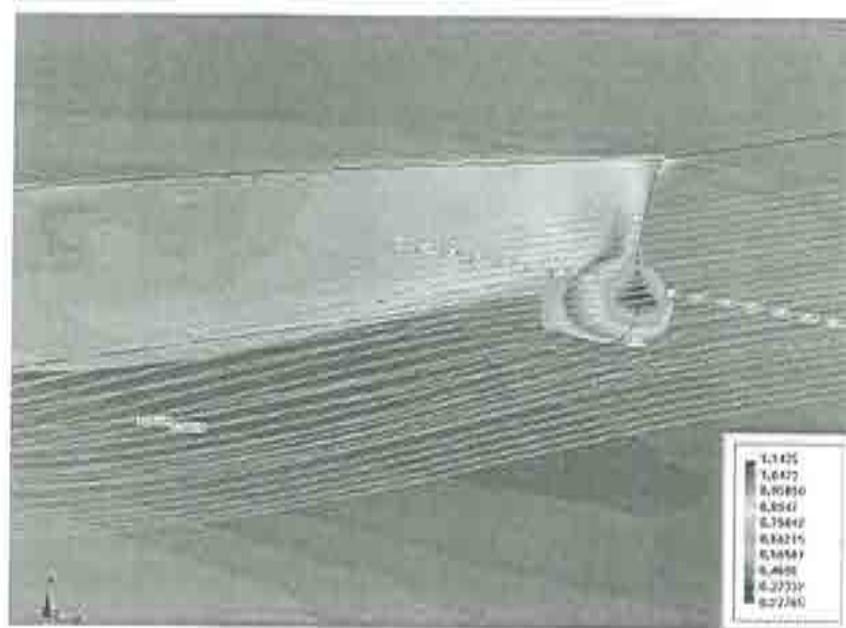


Figura 5.38: Trazado de líneas de corriente en torno al bulbo de la fragata ($F_n = 0.4$).



Figura 5.39: Definición geométrica (*CAD*) de un submarino y malla de superficie utilizada en el análisis.

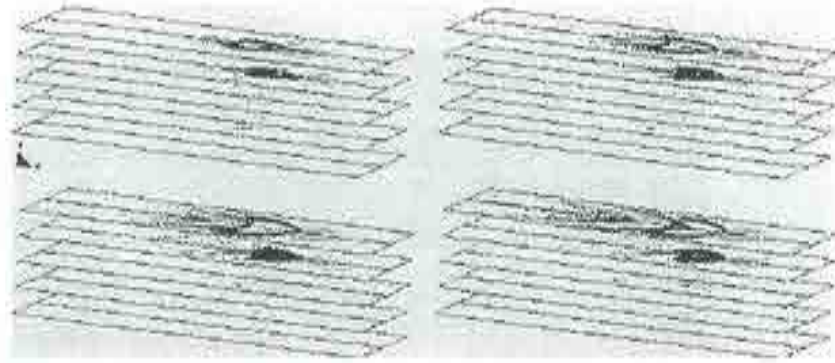


Figura 5.40: Análisis de la firma de presión del submarino. Líneas isobaras en diferentes instantes de tiempo.

las diferentes instantáneas de la figura 5.41 se muestra la deformación producida en el mar y la distribución de presiones sobre el casco del submarino.

5.4.4 Ejemplo 4

A continuación se analiza otra carena clásica, como test de validación de códigos numéricos en hidrodinámica naval: el modelo *Wigley*. En este caso, las formas de esta carena están dadas analíticamente por la siguiente ecuación,

$$y = \frac{B}{2} 4x(1-x) \left(1 - \left(\frac{z}{d} \right)^2 \right)$$

donde x , y y z son las coordenadas de los puntos que definen la superficie del modelo y B , d son las constantes que definen la manga y calado de la carena, que en nuestro caso toman los valores $B = 0.6m$, $d = 0.375m$ (lo que corresponde a una eslora del modelo de $L_{WL} = 6m$). En la figura 5.42 puede verse la definición geométrica de este modelo.

El análisis que se ha llevado a cabo en este caso consistió en un primer estudio del comportamiento del modelo en un rango de F_n , utilizando una malla fija de 125.000 tetraedros lineales. Los resultados de estos ensayos, llevados a cabo con viscosidad nula, se presentan en las figuras 5.43, 5.44 y 5.45, donde se incluyen mapas de velocidad y contornos de altura de ola para valores de F_n , 0.266, 0.316 y 0.452.

A continuación, se tratarán de reproducir los análisis experimentales publicados en [NJ83], correspondientes a un modelo con una eslora de $6m$. Para el análisis numérico se tomaron los siguientes valores $\rho = 1000Kg/m^3$, $\mu = 10^{-3}Kg/ms$ y $F_n = 0.316$ (que corresponde a una velocidad de $2.424m/s$). El cálculo se ha llevado a cabo imponiendo la tracción en el casco, dada por la ley de pared extendida y utilizando un modelo de turbulencia de Smagorinsky. Los resultados experimentales, para este caso, ofrecen un

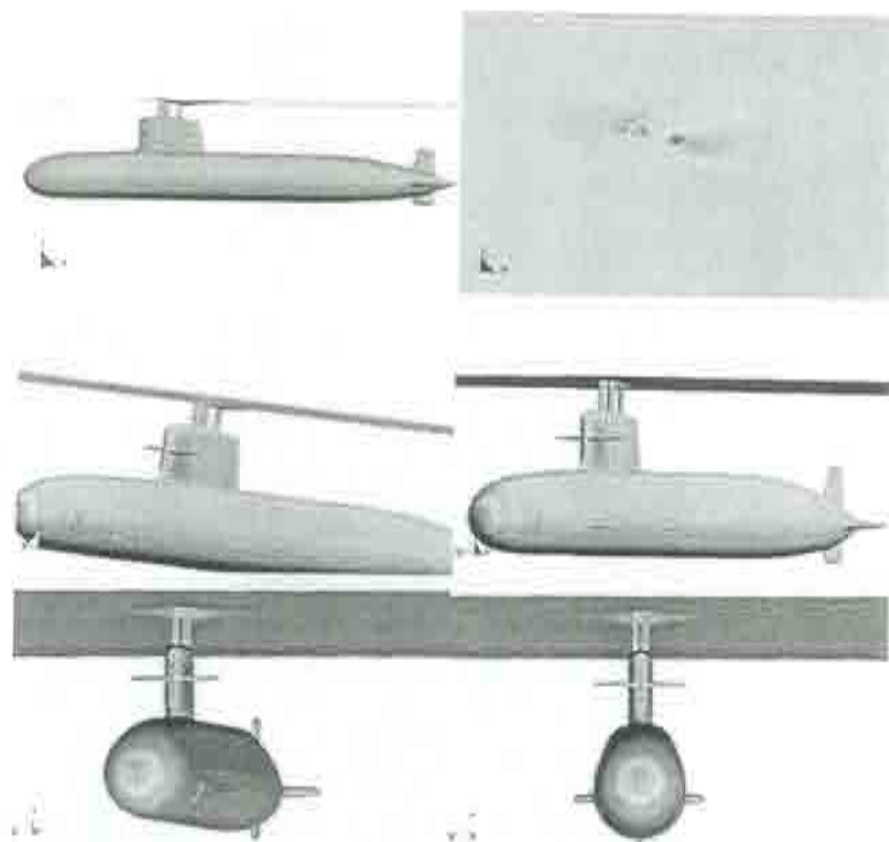


Figura 5.41: Diferentes imágenes del análisis de la firma rádar de un submarino en situación de ataque.



Figura 5.42: Definición geométrica del modelo *Wigley*.

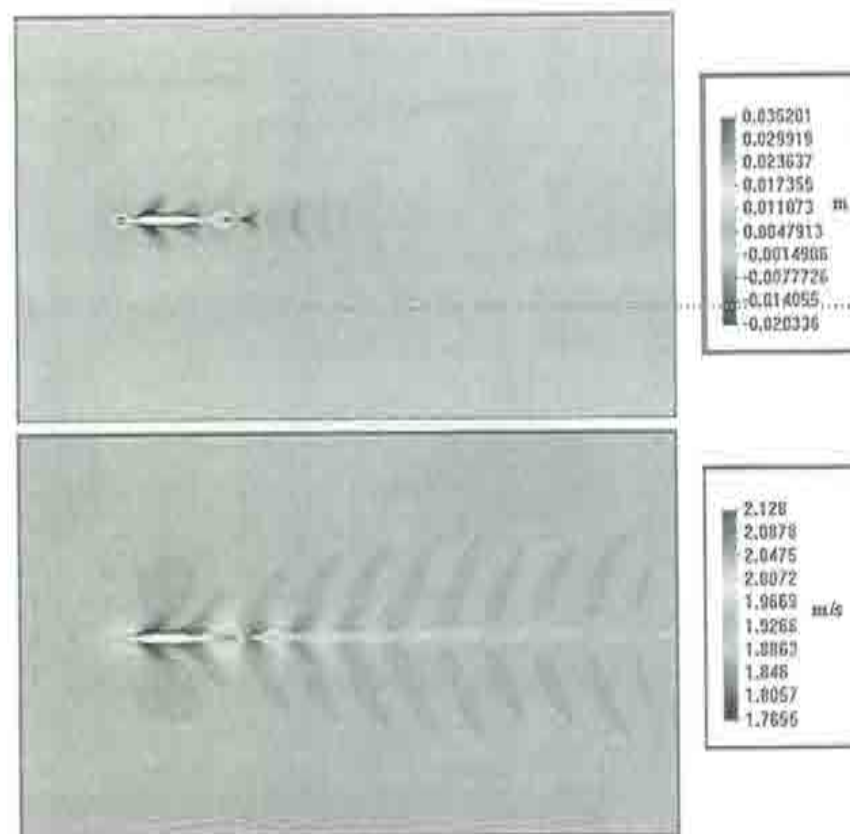


Figura 5.43: Mapa de olas (arriba) y de velocidades (abajo) sobre la superficie libre, resultado del análisis del modelo *Wigley* ($F_n = 0.266$).

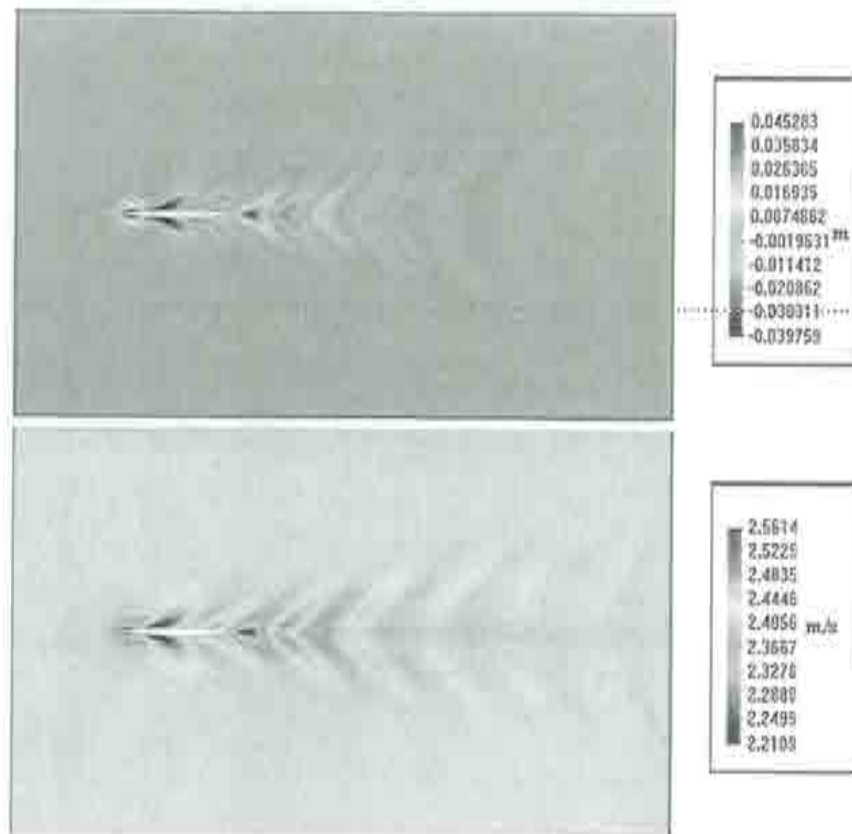


Figura 5.44: Mapa de olas (arriba) y de velocidades (abajo) sobre la superficie libre, resultado del análisis del modelo *Wigley* ($F_n = 0.316$).

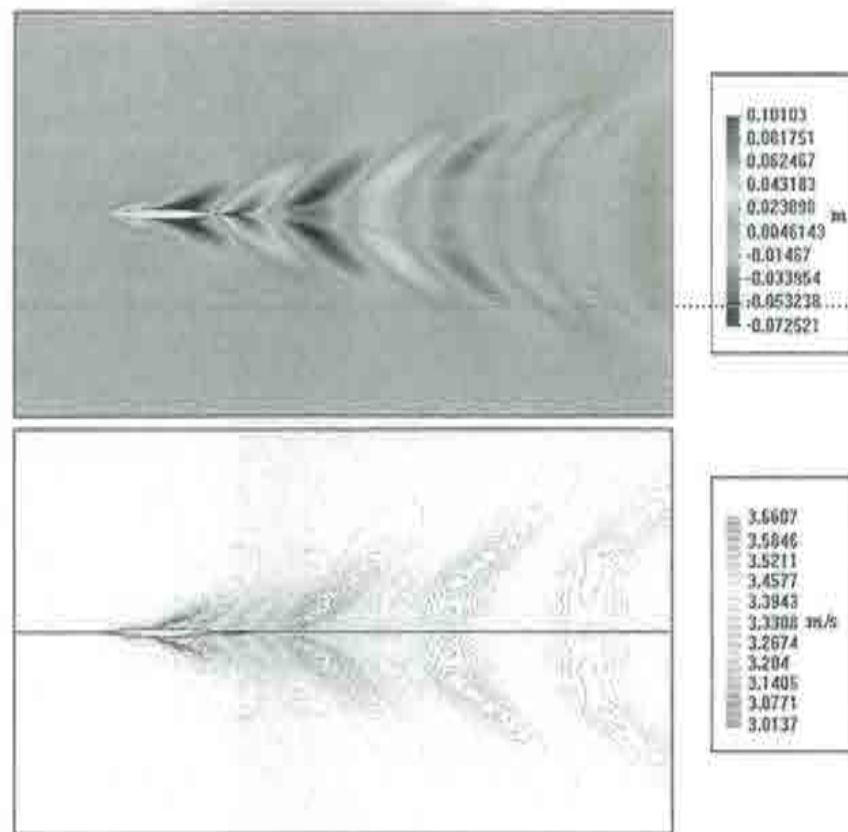


Figura 5.45: Mapa de olas (arriba) y de velocidades (abajo) sobre la superficie libre, resultado del análisis del modelo *Wigley* ($F_n = 0.452$).

valor del coeficiente de resistencia total, para el modelo trincado, de $C_T = 5.2 \cdot 10^{-3}$ y de $C_T = 4.9 \cdot 10^{-3}$ para el modelo libre (en cuya situación de equilibrio, los valores de trimado y hundimiento son -0.15% y 0.04 , respectivamente).

Para permitir validar la capacidad del método presentado, se llevaron a cabo tres ensayos. En el primero de ellos se corrió con una malla fija y el modelo en la situación estática, correspondiente a su posición de trincado. El valor del coeficiente de resistencia obtenido en este caso fue de $C_T = 4.9 \cdot 10^{-3}$. Lo cual representa un error de apenas el 6% respecto al valor experimental. Las figuras 5.46 y 5.47 muestran diversos resultados de este análisis.

En la segunda prueba se permitió la deformación de la malla, pero sólo debida a la variación de la superficie libre. Este análisis debiera reproducir exactamente el experimental con el modelo trincado. El coeficiente de resistencia obtenido en este caso fue de $C_T = 5.3 \cdot 10^{-3}$, lo que representa un error de menos del 2% respecto al valor experimental. Los resultados gráficos, en este caso, apenas se diferencian de los obtenidos en el tercer ensayo, que se presenta a continuación.

En el último ensayo se permitió el movimiento del modelo. Este debiera reproducir exactamente el experimental con el modelo libre, si bien, la posición vertical del centro de gravedad del modelo numérico (que se tomó a la altura de la flotación en reposo), puede diferir de la utilizada en el remolque, pues este dato es desconocido. El coeficiente de resistencia obtenido en este caso fue de $C_T = 5.1 \cdot 10^{-3}$, lo que representa un error del orden del 4% respecto al obtenido en el ensayo de remolque. El buque quedó en una situación estable con un trimado de -0.1% y un hundimiento de 0.035 . Las diferencias encontradas en este caso con los datos experimentales, pueden deberse al aspecto ya mencionado, de la diferente posición del centro de gravedad del modelo en cada caso. En la figura 5.51 se muestra la superficie libre en las cercanías del casco, resultado del análisis de este caso. Por otra parte, en la figura 5.49 se muestra la superficie mojada final. A continuación, en las figuras 5.50 y 5.51, se muestran los contornos del módulo de la velocidad sobre la superficie libre y el mapa de olas obtenido. Por último se incluyen, en las figuras 5.52 y 5.53, las distribuciones del módulo de la velocidad y de la presión sobre el modelo. En estas figuras se ha incluido el trazado de unas líneas de corriente que permiten ver como el modelo perturba el flujo uniforme. En este sentido, hay que hacer mención a las diferencias encontradas en la zona cercana a la popa del modelo, entre este análisis y el no viscoso, que se presentó anteriormente.

Por último, se presenta una gráfica comparativa de los perfiles de ola sobre el casco, obtenidos con el modelo libre, y sin mover la malla y los obtenidos experimentalmente. Puede apreciarse que las diferencias son mínimas en los dos casos analizados numéricamente, y a su vez con los datos experimentales. Es significativo señalar, que la mayor diferencia entre los dos resultados numéricos, se da en la zona cercana a la popa, donde en el caso de no mover la malla, se produce una importante variación en la pendiente del perfil, que se separa apreciablemente del obtenido experimentalmente.

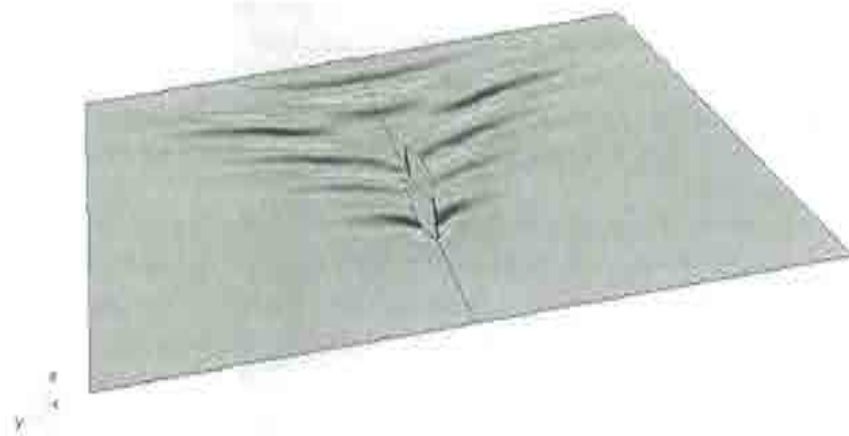


Figura 5.46: Mapa de olas resultado del análisis del modelo Wigley (truncado).



Figura 5.47: Contornos del módulo de velocidad sobre la obra viva y la superficie libre del modelo Wigley (truncado).

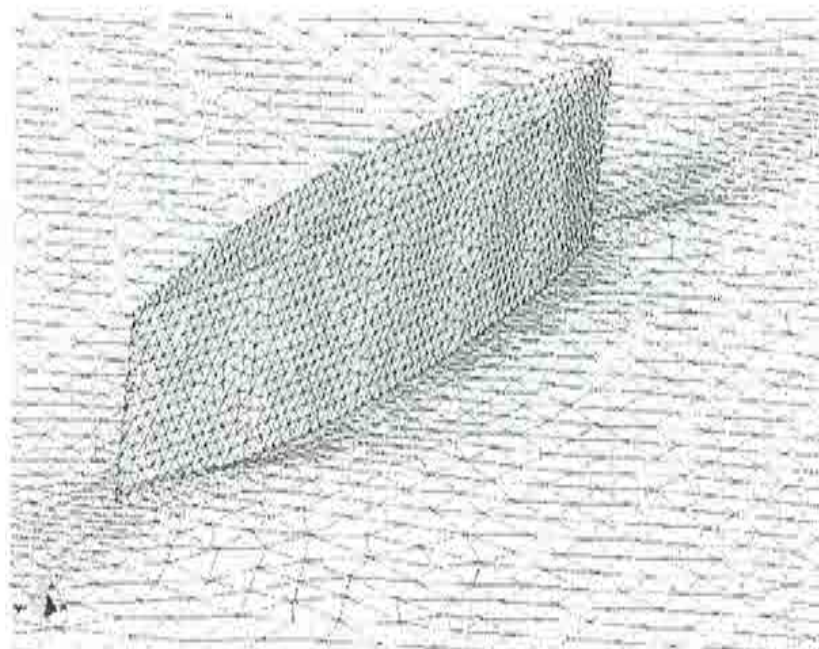


Figura 5.48: Deformación de la malla del modelo *Wigley* (libre) en las cercanías del casco.

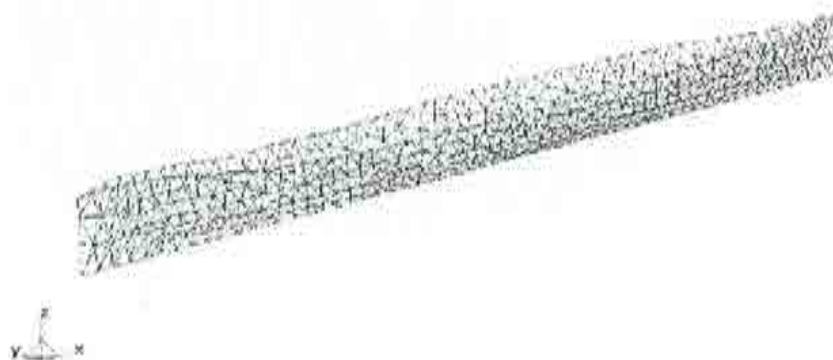


Figura 5.49: Malla de la superficie mojada resultante del análisis del modelo *Wigley* (libre).



Figura 5.50: Contornos del módulo de velocidad sobre la superficie libre del modelo *Wigley* (libre).



Figura 5.51: Mapa de olas resultado del análisis del modelo *Wigley* (libre). La altura se ha amplificado por un factor de 4.

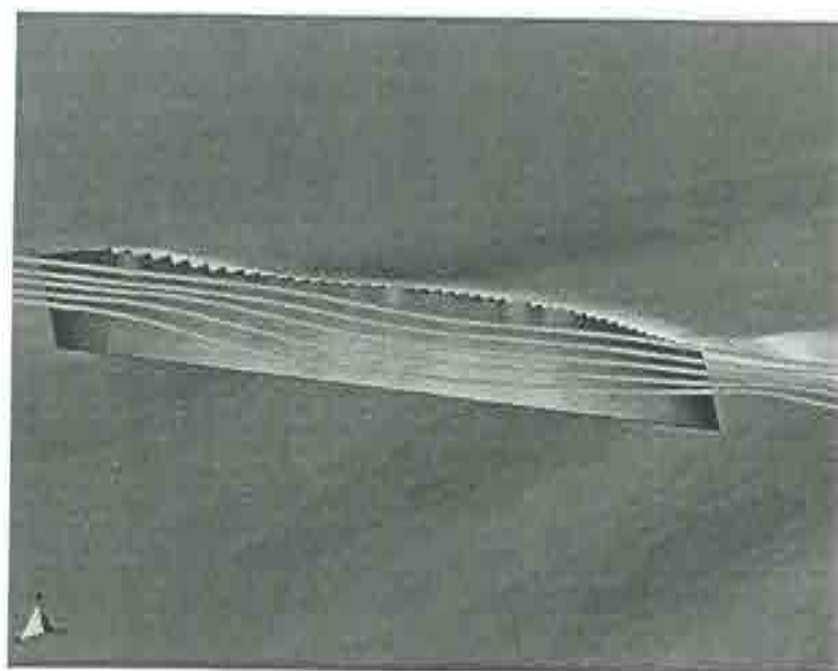


Figura 5.52: Contornos del módulo de velocidad sobre la obra viva y la superficie libre del modelo *Wigley* (libre). También puede verse el trazado de algunas líneas de corriente.

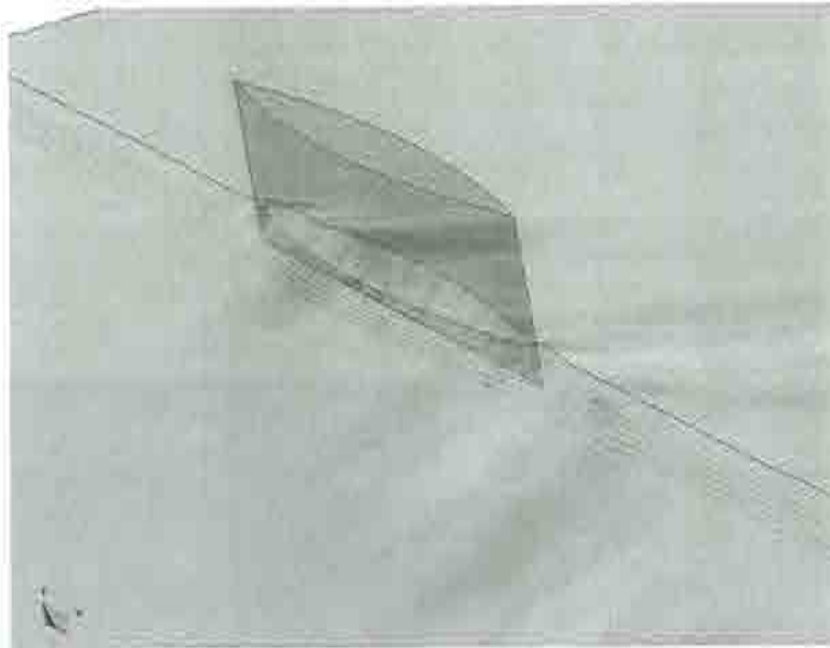


Figura 5.53: Contornos de presión resultado del análisis del modelo *Wigley* (libre). En la imagen, la superficie libre se transparenta, dejando a la vista la obra viva y algunas líneas de corriente trazadas.

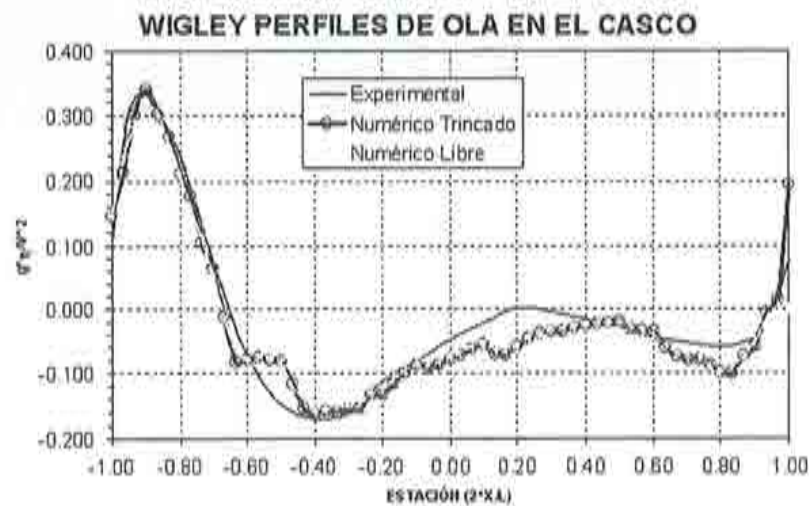


Figura 5.54: Comparación de los perfiles de ola obtenidos en el análisis numérico (con modelo trincado y libre) con los experimentales disponibles.



Figura 5.55: Definición geométrica del modelo *Snowdrift*.

5.4.5 Ejemplo 5

A continuación se presentan unos resultados gráficos de una prueba preliminar del funcionamiento del generador de olas numérico introducido en este capítulo. La geometría que se utilizó corresponde al modelo *Snowdrift*, a escala real ($L_{WL} = 167m$), que se presenta en la figura 5.55. La ola generada es regular, de una longitud de $80m$, mientras que el valor de F_n para el buque es de 0.32 . En los contornos de la superficie libre se dispuso un área de absorción de anchura una longitud de onda. En el movimiento del buque se consideró que su desplazamiento era despreciable, teniendo sólo en cuenta su velocidad. Para la definición dinámica de su evolución se utilizaron los radios de giro tradicionales en problemas de comportamiento en la mar [Llo89].

En las figuras 5.56 y 5.57 se muestran diversas imágenes de la evolución del análisis viscoso ($\rho = 1000 Kg/m^3$, $\mu = 10^{-3} Kg/ms$) utilizando un modelo de turbulencia de Smagorinsky.

5.4.6 Ejemplo 6

El siguiente ejemplo corresponde al análisis del comportamiento de una pala de timón de un velero de competición. Esta geometría pertenece a la empresa Nautatec S.L., presentándose aquí sólo parte de los análisis llevados a cabo y reservando las conclusiones por razones de confidencialidad. En los diferentes análisis llevados a cabo, considerando varias combinaciones de escora y deriva y diversas velocidades de avance, se utilizaron mallas entre 180.000 y 400.000 tetraedros lineales. En todos los análisis se impuso sobre el timón una condición de tracción dada por la ley de pared logarítmica, a la vez que se incluía un modelo de turbulencia de Smagorinsky. En la figura 5.58 se puede ver la definición CAD de uno de los análisis llevados a cabo, mostrando en la figura 5.59 la malla superficial correspondiente. En ella, se ha practicado un corte oblicuo con el objeto de poder ver el interior de la malla.



Figura 5.56: Imágenes de la evolución de la ola regular generada (a).

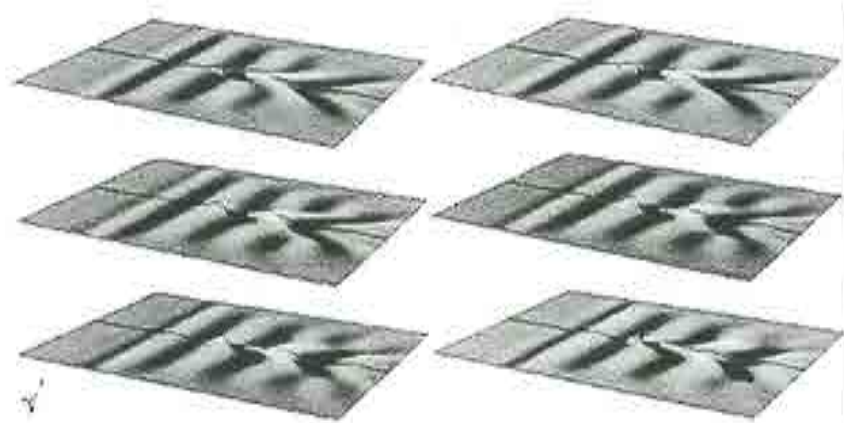


Figura 5.57: Imágenes de la evolución de la ola regular generada (b).

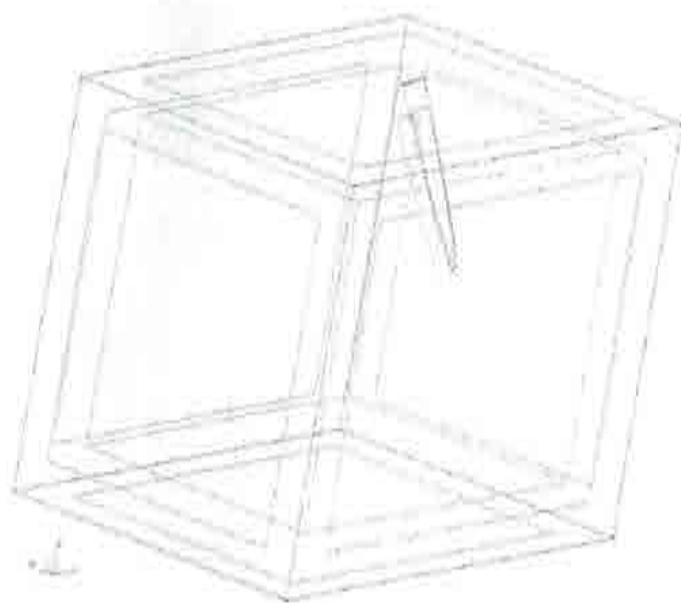


Figura 5.58: Definición *CAD* de un timón perteneciente a un velero de competición.

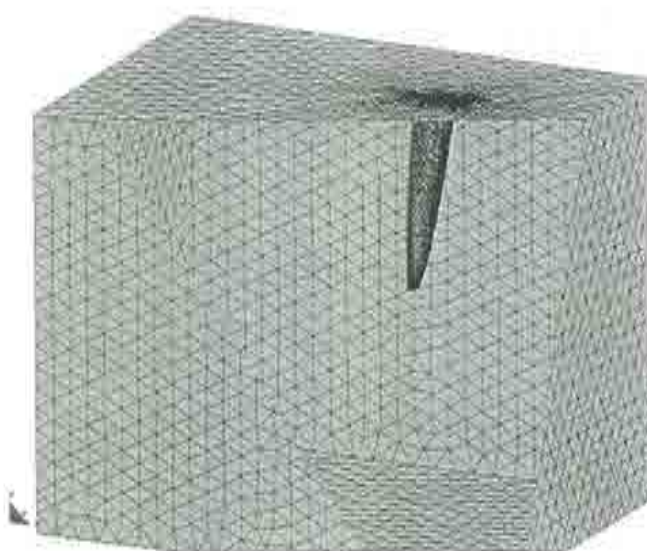


Figura 5.59: Malla utilizada en el análisis de un timón.



Figura 5.60: Contornos de velocidad (componente horizontal) sobre el timón, en las caras de presión (izquierda) y de succión (derecha).

A continuación se muestran diversos resultados del análisis. En la figura 5.60 se muestran los contornos de velocidad (componente horizontal) sobre el timón, en las caras de presión (izquierda) y de succión (derecha). Por otra parte en la figura 5.61 pueden verse los contornos de presión sobre la pala del timón, correspondientes a la cara de presión (izquierda) y de succión (derecha). Por último, en la figura 5.62 se presentan los contornos de velocidad (componente vertical). En esta figura se ha practicado un corte oblicuo, sobre el que se proyecta la misma componente.

5.4.7 Ejemplo 7

A continuación se presenta un ejemplo de aplicación poco clásico en el diseño naval, pero no por ello de poco interés. Se trata del análisis del comportamiento aerodinámico del sistema formado por un conjunto vélico de génova y mayor correspondiente a un velero de competición. La definición geométrica (*CAD*) del problema se presenta en la figura 5.63. La geometría pertenece a la empresa Toni Tió Velas y las conclusiones del análisis no son presentadas aquí por razones de confidencialidad.

Las condiciones de contorno que se han aplicado al problema han sido de velocidad normal nula en todos los contornos del dominio, excepto en la superficie de entrada (prescripción de velocidad fija a $v_{\infty} = 15Kn$) y en la salida que se dejó libre. El problema se analizó con las características físicas del aire ($R_n \simeq 5 \cdot 10^5$), utilizando el modelo de turbulencia de Smagorinsky. Sobre las velas se impuso la tracción dada por la ley de pared logarítmica extendida. La malla utilizada en el análisis puede verse en la figura 5.64. Esta malla consta de 188007 elementos tetraédricos lineales y 35324



Figura 5.61: Contornos de presión sobre la pala de un timón, correspondientes a la cara de presión (izquierda) y de succión (derecha).



Figura 5.62: Contornos de velocidad (componente vertical) sobre la pala de un timón. Adicionalmente se presentan los mismos contornos sobre un plano de corte oblicuo.

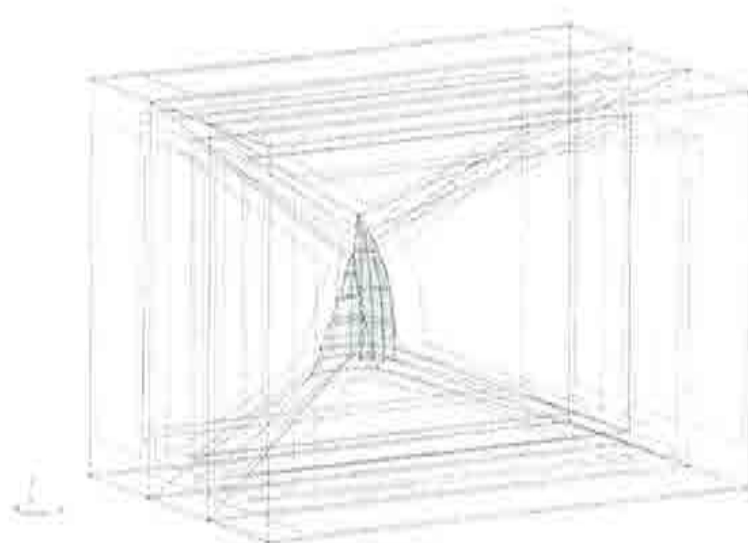


Figura 5.63: Definición geométrica del problema de análisis fluidodinámico del sistema compuesto por unas velas génova y mayor.

nodos.

En la figura 5.65 puede verse la distribución de la presión sobre las velas en la situación cuasi estacionaria encontrada. En esta figura puede observarse claramente el efecto de acoplamiento de las dos velas.

En la figura 5.66 se presenta un trazado de líneas de corriente en este mismo problema, permitiendo observar la perturbación en el flujo que producen. Por último, en la figura 5.67 se presenta una vista frontal de las velas, sobre la que se ha dibujado la distribución de velocidad (componente según Ox).

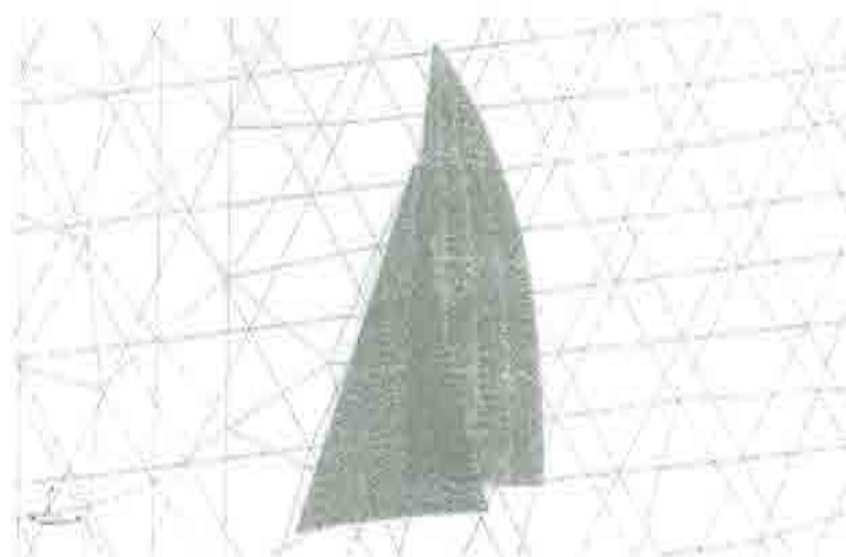


Figura 5.64: Detalle de la malla utilizada en el análisis de las velas génova y mayor.

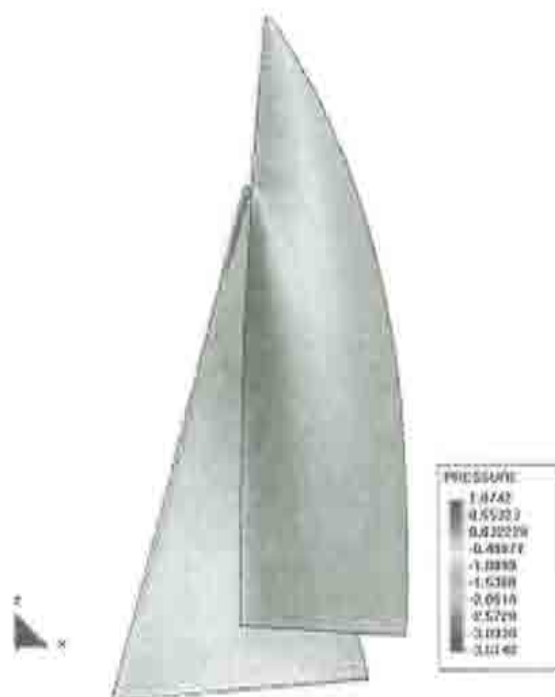


Figura 5.65: Distribución de presión sobre las velas. Vista lateral.

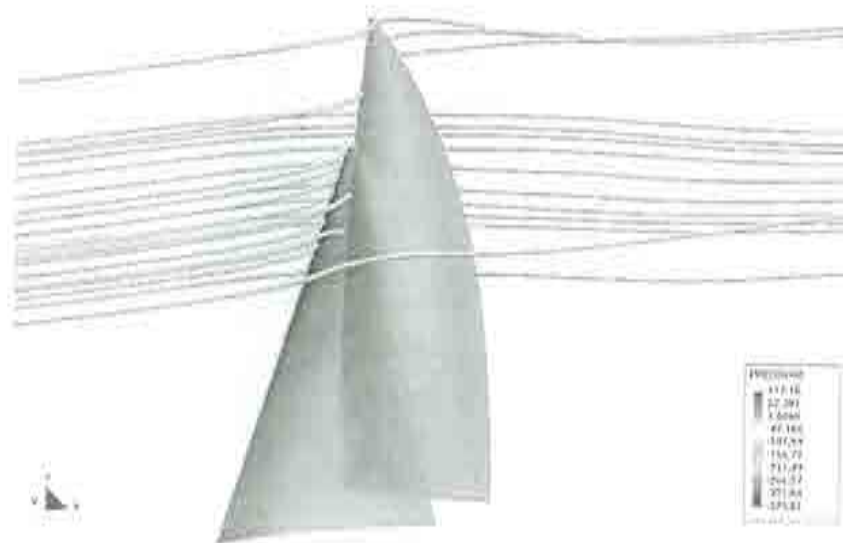


Figura 5.66: Trazado de líneas de corriente en el análisis de las velas génova y mayor. Vista lateral.

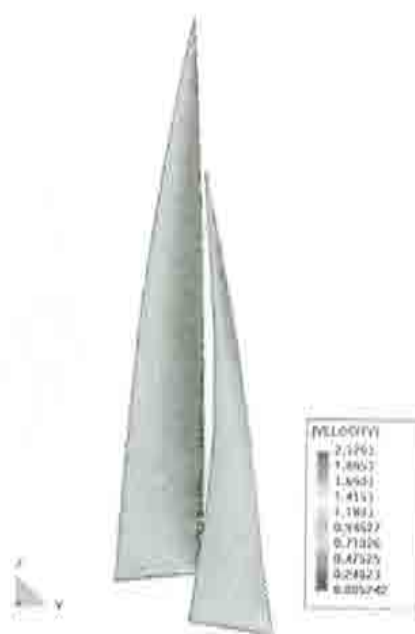


Figura 5.67: Distribución de la velocidad (componente según Ox) sobre las velas. Vista frontal.

Capítulo 6

Conclusiones

En la introducción de este trabajo se planteaba como meta general el desarrollo de un sistema para ayuda al diseño hidrodinámico de buques. Se pretendía poner a disposición del arquitecto naval un sistema que permitiese mejorar los procedimientos actuales de diseño hidrodinámico de barcos, configurando una suerte de *canal de experiencias virtual*, al alcance de su mano, en la mesa de diseño. A continuación, se discute en qué medida se ha cumplido este ambicioso objetivo.

A lo largo del presente trabajo se ha presentado una metodología basada en el método de los elementos finitos para el análisis de problemas de flujo incompresible en fluidodinámica naval. Esta metodología, se basa en la obtención de unas nuevas ecuaciones diferenciales, basadas en criterios discretos, alternativas a las tradicionales ecuaciones de Navier Stokes. El procedimiento de obtención de estas ecuaciones diferenciales se ha denominado *Cálculo Finitesimal*. Las propiedades de las nuevas ecuaciones, permiten resolver el problema mediante el método de los elementos finitos, obteniendo soluciones estables.

Adicionalmente, se extendieron los procedimientos desarrollados para el análisis de problemas en los que el fenómeno de la turbulencia es importante. De esta manera, se aplicaron los criterios mencionados con anterioridad para derivar las ecuaciones estabilizadas de Reynolds. Junto a ellas se presentaron diferentes modelos básicos de turbulencia, dejando la aplicación de métodos más complejos para una futura labor de investigación.

Sin embargo, el punto más novedoso del presente trabajo es la aplicación del método de análisis de flujo incompresible mencionado a problemas navales. Esto requiere de la inclusión de una condición de superficie libre, cuya complejidad ha quedado patente en estas páginas. Esta complejidad ha dejado, necesariamente, problemas abiertos, como el desarrollo de una condición de contorno libre para el problema con superficie libre. Aunque se han investigado diferentes alternativas como el uso de elementos infinitos [Bet92], el desarrollo de condiciones absorbentes discretas [D'E97], o la propia condición de contorno libre para el problema de Navier-Stokes, presentada en el capítulo 3 del presente trabajo, no ha sido posible el desarrollo de una metodología general adecuada.

El método de resolución del problema de mecánica de fluidos, con una condición de contorno de superficie libre, mediante las técnicas del *Cálculo Finitesimal*, es novedoso en el mundo de la hidrodinámica naval. Esta nueva condición de superficie libre, aporta nuevas posibilidades a los métodos de análisis *CFD* de buques. Entre ellas cabe destacar su validez a altos números de Froude, frente a los métodos tradicionales, basados en la teoría de buques lentos.

Por último, se ha presentado un procedimiento que permite la adaptación de la malla de elementos discretos, base para la resolución del problema, a la variación de forma del dominio de análisis, debida a la nueva posición de la superficie libre, o de los cuerpos analizados en cada problema particular. Este método, basado en técnicas presentadas en [CBO99], ha sido modificada, para hacerla adecuada a los problemas aquí planteados. Esta metodología, unida a una descripción arbitraria (*ALE*) de las ecuaciones, permite resolver el problema de interacción fluido estructura que se plantea.

El desarrollo del procedimiento de resolución de las ecuaciones de Navier Stokes, junto a la posibilidad de adaptación iterativa de la malla de elementos finitos, se presenta como una alternativa interesante para ser aplicada en diferentes áreas de la ingeniería.

El sistema resultante de la integración de la metodología de cálculo descrita con el módulo de pre y postproceso *GiD* [RRE98], se ha probado adecuado para la ayuda al diseño hidrodinámico óptimo de diferentes artefactos navales, presentándose en este trabajo diferentes aplicaciones prácticas. Pero, adicionalmente, es posible su uso para el análisis de una gran variedad de problemas dentro y fuera del ámbito naval, como ha quedado patente en varios ejemplos aquí incluidos. Entre ellas, cabe destacar el complejo problema de interacción fluido estructura que el análisis de velas conlleva.

Bibliografía

- [AD59] I.H. Abbott and A. E. Doenhoff. *Theory of wing sections*. Dover Publications, Inc., New York, 1959.
- [Alá72] J.A. Aláez. *Resistencia Viscosa de Buques*. CEHIPAR, 1972.
- [Bab71] I. Babuska. Error bounds for finite element method. *Numer. Math.*, pages 16:322–333, 1971.
- [Bat89] J.T. Batina. Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. *AIAA 27th Aerospace Sciences Meeting*, pages No. 89-0115, Reno, Nevada 1989.
- [BB98] A. Bouhadji and M. Braza. Physical analysis of unsteady viscous transonic flow phenomena around a wing by direct navier-stokes simulation. In K. D. Papaliou, D. Tsahalis, J. Périaux, C. Hirsch, and M. Pandolfi, editors, *Computational Fluid Dynamics 98*, Athens, 1998. John Wiley and Sons.
- [BD88] F. Brezzi and J. Douglas. Stabilized mixed methods for the stokes problem. *Numer. Math.*, 53:225–235, 1988.
- [Bet92] P. Bettess. *Infinite Elements*. Penshaw Press, Avon (Great Britain), 1992.
- [BH] P. Bradshaw and G.P. Huang. The law of the wall in turbulent flow. *Jnl. Fluid Mech.*, pages 165–188.
- [BH82] A.N. Brooks and T.J.R. Hughes. Streamline upwind/petrov galerkin formulation for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, pages 32:199–259, 1982.
- [Bou71] J. Boussinesq. Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 72:755–759, 1871.
- [BT75] E. Baba and K. Takekuma. A study on free-surface flow around bow of slowly moving full forms. *Jnl. Soc. Naval Architects Japan*, 137, 1975.

- [CA99] C.T. Chan and K. Anastasiou. Solution of incompressible flows with or without a free surface using the finite volume method on unstructured triangular meshes. *Int. Jnl. Num. Meth. Fluids*, 29:35–57, 1999.
- [CBO99] G. Chiandusi, G. Buggeda, and E. Oñate. A simple method for update of finite element meshes. Technical Report Report N. 147, CIMNE, 1999.
- [Cho67] A.J. Chorin. A numerical method for solving incompressible viscous problems. *Jnl. of Computational Physics*, 2:12–26, 1967.
- [Cod92] R. Codina. *A Finite Element Model for Incompressible Flow Problems*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 1992.
- [Cod93a] R. Codina. A discontinuity capturing crosswind dissipation for the finite element solution of the convection diffusion equation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, pages 110:325–342, 1993.
- [Cod93b] R. Codina. A finite element formulation for the numerical solution of the convection-difusion equation. Technical Report Monograph N.14, International Center for Numerical Methods in Engineering, 1993.
- [Cod96] R. Codina. Comparison of some finite element methods for solving the diffusion -convection-reaction equation. Technical Report Publication N.101, International Center for Numerical Methods in Engineering, 1996.
- [CVZ97] R. Codina, M. Vázquez, and O.C. Zienkiewicz. A fractional step method for the solution of the compressible navier stokes equations. Technical Report Report N. 118, CIMNE, 1997.
- [Daw77] C.W. Dawson. A practical computer method for solving ship wave problems. In *2nd. Int. Conf. Num. Ship Hydrodynamics*, pages 30–38, Berkeley, USA, 1977.
- [ddC98] Basin d'Essais des Carènes. BAZAN HSDF04: Resistance tests and longitudinal wave cut experiments. Technical Report STUDY E10183 - REPORT NR. 1, Proyecto Esprit FLASH N. 24903, 1998.
- [D'E97] J. D'Elia. *Métodos Numéricos para el Problema de la Resistencia de Ola en Barcos*. PhD thesis, Universidad Nacional del Litoral, 1997.
- [DLDB98] Ph. Druault, E. Lamballais, J. Delville, and J.P. Bonnet. Comparative study of inflow conditions for direct numerical simulation of a 2d spatially-developing plane mixing layer. In K. D. Papaliou, D. Tsahalis, J. Périaux, C. Hirsch, and M. Pandolfi, editors, *Computational Fluid Dynamics 98*, Athens, 1998. John Wiley and Sons.

- [Don82] J. Donea. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient fluid structure interactions. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 33:689–723, 1982.
- [FFH92] L.P. Franca, S.L. Frey, and T.J.R. Hughes. Stabilized finite element methods: I.application to the advective diffusive model. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 95:253–276, 1992.
- [FKT99] C. Farhat, B. Koobus, and H. Tran. Simulation of vortex shedding dominated flows past rigid and flexible structures. In *Computational Methods for Fluid Structure Interaction*, Trondheim (Norway) 1999.
- [FMJ93] J. Farmer, L. Martinelli, and A. Jameson. A fast multigrid method for solving the nonlinear ship wave problem with a free surface. In *Sixth Int. Conf. Num. Ship Hydrodynamics*, 1993.
- [GÁ88] J.M. González Álvarez. *Nuevos Métodos de Predicción de Calidad de Olas Generadas en Laboratorios*. PhD thesis, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales, Universidad Politécnica de Madrid, 1988.
- [GDdC88] A.C. Galeão and E.G. Dutra do Carmo. A consistent approximate upwind petrov-galerkin method for convection-dominated problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 68:83–95, 1988.
- [GM98] H. Grotjans and F.R. Menter. Wall functions for general application cfd codes. In K. D. Papaliou, D. Tsahalis, J. Périaux, C. Hirsch, and M. Pandolfi, editors, *Computational Fluid Dynamics 98*. John Wiley and Sons, 1998.
- [GO99] J. García and E. Oñate. Un método estabilizado para análisis de problemas de interacción fluido estructura con superficie libre. In *Métodos Numéricos en Ingeniería*, Sevilla (España) 1999.
- [GOS⁺98] J. García, E. Oñate, H. Sierra, C. Sacco, and S. Idelsohn. A stabilized numerical method for analisis of ship hydrodynamics. In K. D. Papaliou, D. Tsahalis, J. Périaux, C. Hirsch, and M. Pandolfi, editors, *Computational Fluid Dynamics 98 (Vol.II)*. John Wiley and Sons, 1998.
- [GPVC98] J. García, L. Pérez, J. Valle, and J.R. Chacón. El proyecto bajel. una herramienta de diseño hidrodinámico de buques de pasaje. In *XXXIV SSTT de Ingeniería Naval*, 1998.
- [GR86] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, 1986.

- [GSP98] J. García, A. Souto, and L. Pérez. Sobre los CFD. una herramienta de diseño en buques de crucero y pasaje. In *XXXIV SSTT de Ingeniería Naval (AINE)*, 1998.
- [HAC74] C.W. Hirt, A.A. Amsden, and J.L. Cook. An arbitrary lagrangean-eulerian computing method for all flow speeds. *Jnl. of Comp. Physics*, 14:227–253, 1974.
- [HB79] T.J.R. Hughes and A.N. Brooks. A multi-dimensional upwind scheme with no cross-wind diffusion. In *FEM for Convection Dominated Flows (ASME)*, New York (USA) 1979.
- [HF87] T.J.R. Hughes and L.P. Franca. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VII. the stokes problem with various well-posed boundary conditions: Symmetric formulations that converge for all Velocity/Pressure spaces. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 65:85–96, 1987.
- [HFH89] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, and G.M. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. the Galerkin/Least squares method for advective-diffusive equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 73:173–189, 1989.
- [HHJ94] T.J.R. Hughes, G. Hauke, and K. Jansen. *Recent Developments in Finite Element Analysis*, chapter Stabilized Finite Element Methods in Fluids: Inspirations, Origins, Status and Recent Developments, pages 272–292. CIMNE, 1994.
- [Hir90] C. Hirsch. *Numerical Computations of Internal and External Flow. Vol. 2*. John Wiley and Sons, 1990.
- [HLZ81] T.J.R. Hughes, W.K. Liu, and T.K. Zimmermann. Lagrangian-eulerian finite element formulation for viscous flows. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 29:329–349, 1981.
- [HM86] T.J.R. Hughes and M. Mallet. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: IV. a discontinuity capturing operator for multidimensional advective-diffusive systems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 58:329–336, 1986.
- [HMJ93] T. Hino, L. Martinelli, and A. Jameson. A finite volume method with unstructured grid for free surface flow. *Proc. of 6th Int. Conf. Num. Ship Hydrodynamics*, pages 173–194, Iowa City (USA) 1993.
- [HMM86] T.J.R. Hughes, M. Mallet, and A. Mizukami. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: II. beyond SUPG. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 54:341–355, 1986.

- [HS64a] J. Hess and A. Smith. Calculation of nonlifting potential flow about arbitrary tridimensional bodies. *Jnl. Ship Research*, 1964.
- [HS64b] J. Hess and A. Smith. Calculation of potential flow about arbitrary tridimensional bodies. Technical report, Douglas Aircraft Company, 1964.
- [HU96] H.C. Huang and A.S. Usmani. *Finite Element Analysis for Heat Analysis*. Springer-Verlag, 1996.
- [Hug95] T.J.R. Hughes. Multiscale phenomena: Green functions, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 127:387–401, 1995.
- [IO94] S. Idelsohn and E. Oñate. Finite element and finite volumes. two good friends. *Int. Jnl. Num. Meth. Engng.*, 37:3323–3341, 1994.
- [IOS99] S. Idelsohn, E. Oñate, and C. Sacco. Finite element solution of free-surface ship-wave problems. *Int. Jnl. Num. Meth. Eng.*, 45:503–528, 1999.
- [ITT97] *International Towing Tank Conference. ITTC Symbols and Terminology List*. kimmgw2.kimm.re.kr/ITTC/, 1997.
- [JL96] C. Janson and L. Larsson. A method for the optimization of ship hulls from a resistance point of view. In *21st Symposium on Naval Hydrodynamics*, Trondheim (Norway) 1996.
- [KKJ80] J. Kim, S. Kline, and J. Johnson. Investigation of reattaching turbulent shear layer: Flow over a backwards facing step. *Jnl. Fluid Eng. ASME Tran.*, 102:302–308, 1980.
- [KNZH80] D.W. Kelly, S. Nakazawa, O.C. Zienkiewicz, and J.C. Heinrich. A note on upwind and anisotropic balancing dissipation in finite element approximation to convective diffusion problems. *Int. Jnl. Num. Meth. Engng.*, 15:1705–1711, 1980.
- [LB97] L. Larsson and E. Baba. *Advances in Marine Hydrodynamics*, chapter Ship Resistance and Flow Computations, pages 1–75. Ed. M. Ohkusu, 1997.
- [Let93] J.S.Jr. Letcher. Properties of finite-difference operators for the steady-wave problem. *Jnl. Ship Research*, 37:1–7, 1993.
- [LeV90] R.J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser, 1990.
- [Lio84] P. Lions. Mathematical topics in fluid mechanics. *Int. Jnl. Num. Meth. Fluids*, 4:1043–1063, 1984.

- [Llo89] A.R.J.M. Lloyd. *Seakeeping. Ship Behaviour in Rough Weather*. John Wiley and Sons, 1989.
- [LM] L. Landweber and M. Macagno. Irrotational flow around ship forms. Technical Report Report N. 123, IIHR.
- [LMTS96] R.W. Lewis, K. Morgan, H.R. Thomas, and K.N. Seetharamu. *The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis*. John Wiley and Sons, 1996.
- [Lön90] R. Lönher. A vectorized particle tracer for unstructured grids. *Jnl. Comp. Physics*, pages 91:22–31, 1990.
- [LRB⁺98] L. Larsson, B. Regnström, L. Broberg, D.Q. Li, and C.E. Janson. Failures, fantasies and feats in the theoretical/numerical prediction of ship performance. In *22nd Symposium on Naval Hydrodynamics*, 1998.
- [LYO98] R. Lönher, C. Yang, and E. Oñate. Free surface hydrodynamics using unstructured grids. In K. D. Papaliou, D. Tsahalis, J. Périaux, C. Hirsch, and M. Pandolfi, editors, *Computational Fluid Dynamics 98*. John Wiley and Sons, 1998.
- [LYOI96] R. Lönher, E. Yang, E. Oñate, and S. Idelsohn. An unstructured grid-based parallel free surface solver. *IAAA Journal*, 1996.
- [MC98] L. Martinelli and G. Cowles. Finite volume multigrid methods for ship hydrodynamics. In K. D. Papaliou, D. Tsahalis, J. Périaux, C. Hirsch, and M. Pandolfi, editors, *Computational Fluid Dynamics 98*. John Wiley and Sons, 1998.
- [Mic98] J.H. Michell. The wave resistance of ships. *Philos. Mag.*, 45:106–123, 1898.
- [MP94] B. Mohammadi and O. Pironneau. *Analysis of the K-Epsilon Turbulence Model*. John Wiley and Sons, 1994.
- [New76] J.N. Newman. Linealized wave resistance theory. In *Soc. Naval Architects Japan*, Tokyo/Osaka (Japan) 1976.
- [NJ83] F. Noblesse and McCarthy J.H., editors. *Proceedings 2nd DTNSRDC Workshop on Ship Wave Resistance Computations*, Maryland, USA, 1983. David Taylor Naval Ship Research and Development Center.
- [OG99] E. Oñate and J. García. A stabilized finite element method for analysis of fluid structure interaction problems involving free surface waves. In *Computational Methods for Fluid Structure Interaction*, pages 163–175, Trondheim (Norway) 1999.

- [OGE99] E. Oñate and J. García Espinosa. A methodology for analysis of fluid structure interaction accounting for free surface waves. In *European Conference on Computational Mechanics (ECCM'99)*, Munich, Alemania, 1999.
- [OGI97a] E. Oñate, J. García, and S. Idelsohn. Computation of the stabilization parameter for the finite element solution of advective-diffusive problems with sharp gradients. *Int. Jnl. Num. Meth. Fluids*, 25:1385–1407, 1997.
- [OGI97b] E. Oñate, J. García, and S. Idelsohn. Computation of the stabilization parameter for the finite element solution of advective-diffusive problems. *Int. Jnl. Num. Meth. in Fluids*, 25:1385–1407, 1997.
- [OGI97c] E. Oñate, J. García, and S. Idelsohn. Computation of the stabilization parameter for the finite element solution of advective diffusive problems. Technical Report 100, CIMNE, 1997.
- [OGI97d] E. Oñate, J. García, and S. Idelsohn. Estabilización de la solución numérica del problema de transporte convectivo mediante técnicas de cálculo finitesimal. In *V Congreso de Matemática Aplicada*, Vigo (España) 1997.
- [OGI98] E. Oñate, J. García, and S. Idelsohn. An alpha-adaptive approach for stabilized finite element solution of advective-diffusive problems with sharp gradients. In John Wiley and Sons, editors, *Computational Fluid Dynamics 98*. Papaliou, K. D. and Tsahalis, D. and Périaux, J. and Hirsch, C. and Pandolfi, M., 1998.
- [OIOT96] E. Oñate, S. Idelsohn, Zienkiewicz O.C., and R.L. Taylor. A finite point method in computational mechanics. applications to convective transport and fluid flow. *Int. Jnl. Num. Meth. Engng.*, 39:3839–3866, 1996.
- [OIZ+97] E. Oñate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, and C. Sacco. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. Technical Report Report N. 110, CIMNE, 1997.
- [OJI98] E. Oñate, García J., and S. Idelsohn. *An Alpha Adaptive Approach for Stabilized Finite Element Solution of Advective-Diffusive Problems with Sharp Gradients*. Elsevier, 1998.
- [OM99] E. Oñate and M. Manzan. A general procedure for deriving stabilized space-time finite element methods for advective diffusive problems. *Int. Jnl. Num. Meth. Fluids*, 31:203–211, 1999.
- [Oña95] E. Oñate. *Cálculo de Estructuras Por el Método de los Elementos Finitos. Análisis Estático Lineal*. CIMNE, 1995.
- [Oña96] E. Oñate. On the stabilization of numerical solution for advective-diffusive transport and fluid flow problems. Technical Report 81, CIMNE, 1996.

- [Oña98a] E. Oñate. Derivation of stabilized equations for advective-diffusive transport and fluid flow problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 151:233–267, 1998.
- [Oña98b] E. Oñate. A finite element method for incompressible viscous flows using a finite increment calculus formulation. Technical Report Research Report N. 150, CIMNE, 1998.
- [OSI00] E. Oñate, C. Sacco, and S. Idelsohn. A finite point method for incompressible flow problems. *Computing and Visualization in Science*, 2:67–75, 2000.
- [PA92] L. Pérez and R. Abad. *Prácticas de Teoría del Buque*. ETSIN, 1992.
- [Pér89] G. Pérez. *Teoría del Buque. Vol. I-V*. ETSIN, 1989.
- [PM77] L. Pérez and M. Moreno. El flujo potencial en cuerpos de revolución equivalentes a formas del buque. In *Sesiones Técnicas de Ingeniería Naval*, 1977.
- [Pra25] L. Prandtl. über die ausgebildete turbulenz. *ZAMM*, 5, 1925.
- [PSS96] L. Pérez, J.M. Sánchez, and A. Souto. A practical application of cfd: The optimization of a bulbous bow on a ro-ro ship. In *I International Conference on Marine Industry (MARIND'96)*, Varna (Bulgaria) 1996.
- [PSS97] L. Pérez, J.M. Sánchez, and A. Souto. La calidad en el software. validación CFD. In *II Jornadas Ibéricas de Ingeniería Naval*, Lisboa (Portugal) 1997.
- [Rav92] H.C. Raven. A practical non-linear method for calculating ship wavemaking and wave resistance. In *19th Symposium on Naval Hydrodynamics*, Seoul (Korea) 1992.
- [Rav96] H.C. Raven. *A Solution Method for the Nonlinear Ship Wave Resistance Problem*. PhD thesis, Technische Universiteit Delft, 1996.
- [Ray] L. Rayleigh. On waves. *Philos. Mag.*, 5:257–279.
- [Rey83] O. Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels. *Royal Society, Phil. Trans.*, A:175:935, 1883.
- [RG96] J.N. Reddy and D.K. Gartling. *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. CRC Press, 1996.
- [Ros95] B. Rosen. SPLASH, the world's leading free-surface flow simulations, 1995. South Bay Simulations, Inc.

- [RRE98] R. Ribó, M.A. Riera, and Escolano E. GiD user manual. disponible en <http://gid.cimne.upc.es>, 1998.
- [Sch69] H. Schlichting. *Boundary Layer Theory*. Mc Graw Hill, New York, 1969.
- [SDI98] M. Storti, J. D'Elia, and S. Idelsohn. Absorbing boundary conditions for the ship wave problem: Fem and panel methods. In K. D. Papaliou, D. Tsalhalis, J. Périaux, C. Hirsch, and M. Pandolfi, editors, *Computational Fluid Dynamics 98*, John Wiley and Sons, 1998.
- [Sma63] J.S. Smagorinsky. General circulation model of the atmosphere. *Mon. Weath. Rev.*, 91:99–164, 1963.
- [Sot97] O.A. Soto. *Estabilización de la Solución por Elementos Finitos de Problemas de Flujo Incompresible con Rotación, Turbulencia, Superficie Libre y Temperatura*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 1997.
- [Sto47] G.G. Stokes. On the theory of oscillatory waves. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 8:441–455, 1847.
- [Tab89] M. Tabor. *Chaos and integrability in Nonlinear Dynamics*. John Wiley and Sons, New York, 1989.
- [TOK97] *The International CFD Conference*, Ulsteinvik (Norway), 1997. Waerdahl Conferences (waerdahl@pdg.no).
- [TS92] Y. Tahara and F. Stern. An interactive approach for calculating ship boundary layers and wakes for nonzero froude number. *Jnl. Comp. Physics*, 98:33–53, 1992.
- [TSL91] Y. Toda, F. Stern, and J. Longo. Mean-flow measurements in the boundary layer and wake and wave field of a series 60 cb = .6 ship mode for froude numbers 0.16 and 0.316. Technical Report 352, IIHR, 1991.
- [TSL93a] Y. Toda, F. Stern, and J. Longo. Mean-flow measurements in the boundary layer and wake and wave field of a series 60 cb = .6 ship model-part 2: Scale effects on near field wave patterns and comparisons with inviscid theory. *Jnl. Ship Research*, 37:16–24, 1993.
- [TSL93b] Y. Toda, F. Stern, and J. Longo. Mean-flow measurements in the boundary layer and wake and wave field of a series 60 cb = .6 ship model-part 1: Froude numbers 0.16 and 0.316. *Jnl. Ship Research*, 36(No. 352):360–377, 1993.
- [VCZ97] M. Vázquez, R. Codina, and O.C. Zienkiewicz. A fractional step method for the solution of the navier stokes equations. Technical Report Report N. 103, CIMNE, 1997.

- [VCZ99] M. Vázquez, R. Codina, and O.C. Zienkiewicz. Numerical modelling of compressible laminar and turbulent flow: The cbs algorithm. Technical Report Monograph N. 50, CIMNE, 1999.
- [Weh73] J.V. Wehausen. The wave resistance of ships. *Adv. App. Mech.*, 1973.
- [Wil93] D.C. Wilcox. *Turbulence Modelling for CFD*. DCW Industries, La Cañada, California, 1993.
- [WR98] W.A. Wall and E. Ramm. *Computational Mechanics. New Trends and Applications.*, chapter Fluid-Structure Interaction based upon a Stabilized (ALE) Finite Element Method, pages 1–20. CIMNE, 1998.
- [Yeu82] R.W. Yeung. Numerical methods in free surface flows. *Ann. rev. Fluid Mech.*, 14:395–442, 1982.
- [ZC95] O.C. Zienkiewicz and R. Codina. A general algorithm for compressible and incompressible flow. part i, the split. *Int. Jnl. Numerical Meth. Fluids*, 20:869–885, 1995.
- [ZMS⁺95] O.C. Zienkiewicz, K. Morgan, S. Satya, R. Codina, and M. Vázquez. A general algorithm for compressible and incompressible flow. part ii, test on the explicit form. *Int. Jnl. Num. Meth. Fluids*, 20:887–913, 1995.
- [ZT94a] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *El Método de los Elementos Finitos. Vol.I*. CIMNE, 1994.
- [ZT94b] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *El Método de los Elementos Finitos. Vol.II*. CIMNE, 1994.

Apéndice A

Los Métodos de Elementos de Contorno

Se presentarán a continuación los pilares teóricos que sustentan los denominados métodos de elementos de contorno o de singularidades. Este tipo de códigos son, hoy en día, prácticamente los únicos utilizados en el diseño asistido por técnicas *CFD* en ingeniería naval.

En primer lugar veremos sucintamente cómo funciona una herramienta de este tipo. En la figura A.1 se muestra un esquema básico de funcionamiento.

El mencionado esquema se refiere a un algoritmo genérico de solución de las ecuaciones de flujo potencial con un contorno de superficie libre. Este problema es en general no lineal, por la imposición de la condición de contorno de la superficie libre, por lo que deberá resolverse iterativamente hasta la convergencia.

La base de todo el algoritmo es el planteamiento discreto del problema, pero este punto se tratará con más detalle en el siguiente apartado. En primer lugar plantearemos las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido, supuesto estacionario, incompresible e irrotacional. Si se define un sistema de coordenadas cartesiano, con su origen en la proa del buque, sobre la superficie libre no perturbada, yendo el eje Ox aguas arriba (paralelo a v_∞ , velocidad no perturbada), y el eje Oz vertical y hacia arriba, con las condiciones se puede definir una función potencial de velocidades ϕ de la forma:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi \quad (\text{A.1})$$

Este potencial debe satisfacer la ecuación de continuidad de masa (ver capítulo 1) y por lo tanto:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \nabla^2\phi = 0 \quad (\text{A.2})$$

En general, los métodos de singularidades describen el potencial de velocidad como suma de un potencial en el infinito más una perturbación.

$$\phi = \phi_{\infty} + \phi_p \quad (\text{A.3})$$

evidentemente se puede escribir que:

$$\phi_{\infty} = -x \cdot \mathbf{v}_{\infty} \quad (\text{A.4})$$

El término de perturbación tiene forma de expansión de singularidades (fuentes de potencial). Estas singularidades se distribuyen de manera conveniente sobre el dominio, como se verá en la resolución por el método de Hess y Smith.

Sobre esta forma del potencial se imponen las condiciones de contorno en velocidad. Estas condiciones se resumen en obligar a que las superficies discretas del casco y la mar sean superficies de corriente o lo que es lo mismo, impenetrables (velocidad normal a la superficie nula). Estas condiciones desde el punto de vista numérico obligan a calcular la derivada normal a las superficies y se pueden escribir como:

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right]_s = 0 \quad (\text{A.5})$$

Siendo \mathbf{n} el vector normal a la superficie en cuestión. Esta condición se impone en puntos concretos de las superficies. Es decir, el problema discreto considera el buque definido por una serie de puntos en los que se imponen las condiciones de contorno.

La ecuación (A.5) es función de las intensidades de las singularidades distribuidas en el dominio, lo cual plantea un sistema de ecuaciones lineales, cuyas incógnitas son las intensidades de las fuentes (por necesidades obvias de resolubilidad iguales en número a las condiciones de contorno).

Como primer paso para la resolución de problema, se parte de una superficie libre plana (ver figura A.1) y se resuelve el problema, permitiendo así calcular las líneas de corriente sobre esta primera aproximación de la superficie libre. Estas líneas de corriente son necesarias en general para la adición sobre las condiciones de contorno de la superficie libre de una difusión que permita la eliminación de las ondas propagadas aguas arriba por el fluido (fenómeno no físico que aparece en el proceso de discretización).

Adicionalmente en la figura (A.1) se incluye la posibilidad de actualizar de nuevo las discretizaciones de los contornos móviles del problema (superficie del mar y casco) permitiendo una aproximación más real del problema.

A.0.8 El Método de Hess y Smith

Como ya se ha comentado, la base de todo el algoritmo es el planteamiento discreto del problema. Aunque existen diferentes alternativas para esta discretización (ver por

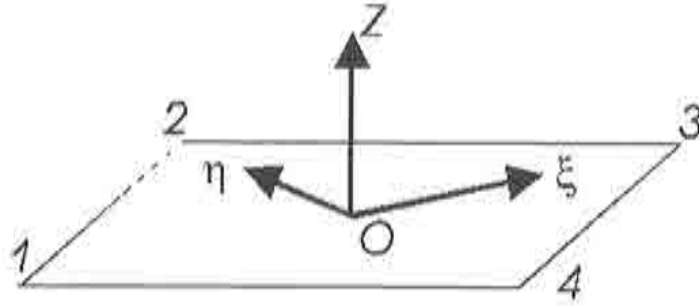


Figura A.2: Sistema de ejes locales en cada cuadrilátero.

ejemplo [LM] [GSP98]) en este apartado nos centraremos en el sin duda más conocido de ellos: el método de Hess y Smith [HS64b] [HS64a].

Consideremos la carena del buque definida por una serie de escamas planas (cuadriláteros en este caso) con una distribución homogénea de fuentes de potencial, de intensidad unidad. Estas fuentes generan una velocidad (u^1, v^1, w^1) en un punto genérico del espacio (x, y, z) dada por:

$$\begin{aligned} u^1(x, y, z) &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \iint_S \frac{(x - \xi) d\xi \cdot d\eta}{r^3} \\ v^1(x, y, z) &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \iint_S \frac{(y - \eta) d\xi \cdot d\eta}{r^3} \\ w^1(x, y, z) &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \iint_S \frac{z \cdot d\xi \cdot d\eta}{r^3} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Las anteriores expresiones están dadas tomando un sistema de ejes locales (ξ, η) en el cuadrilátero. El origen de este sistema de coordenadas locales es el punto nulo de la fuente. El eje Oz es el que define la normal pasando por ese origen, con el sentido positivo hacia fuera del cuerpo. Los ejes Ox e Oy se sitúan sobre el plano del cuadrilátero, ortogonales entre sí, y se colocan de tal modo que el eje Ox está en la dirección del vector que une los vértices 1 y 3, y el eje y se coloca perpendicularmente a éste (ver figura A.2). Se ha llamado $r[(x, y, z), (\xi, \eta, 0)] = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$ y S a la superficie de la carena.

Las integrales tienen expresiones analíticas que aparecen descritas de modo detallado en las referencias [HS64b] [HS64a], pero aún así, su cálculo es complejo. De todos modos, las expresiones completas de la velocidad resultado de resolver estas integrales sólo se usan cuando el punto donde calculamos la velocidad está cerca del panel, dado que su complejidad motiva un coste en tiempo de procesamiento muy alto. La magnitud que define la cercanía o no es una de las dimensiones del panel. Se elige como dimensión característica del panel su diagonal mayor (D). Se utilizan tres expresiones diferentes para el cálculo de la velocidad: la exacta (A.6), una simplificación

sustituyendo la densidad uniforme por un cuadripolo, y una simplificación aún mayor sustituyendo la densidad uniforme por una sola fuente. El criterio para elegir una u otra expresión es el siguiente:

$r < 2.45 \cdot D$	formulaciones exactas
$2.45 \cdot D < r < 4.0 \cdot D$	expansión por un cuadripolo
$r > 4.0 \cdot D$	expansión con un sólo polo

Si imponemos la condición (A.5) en m puntos concretos del casco, y en particular sobre los m puntos nulos de los cuadriláteros (es decir, consideramos al buque definido por una serie de puntos en los que se imponen las condiciones de contorno), la ecuación (A.5) plantea un sistema lineal dado por las m ecuaciones siguientes, cuyas m incógnitas son las densidades de las distribuciones en los cuadriláteros.

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right]_s = 0 \Rightarrow \left[\mathbf{v}_\infty + \sum_i^m \mathbf{v}_i(x_j, y_j, z_j) \right] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad 1 \leq j \leq m \quad (\text{A.7})$$

donde (x_j, y_j, z_j) son los m puntos nulos de las m escamas planas definidas, \mathbf{v}_i las velocidades inducidas por estas escamas (definidas a partir de la ecuación (A.6)) y \mathbf{n} la normal a la escama en su punto nulo.

Dado que la formulación de las \mathbf{v}_i , de esta manera definidas es lineal en las incógnitas, s_i (intensidades de fuente en los paneles), estas ecuaciones representan un sistema lineal de m ecuaciones con m incógnitas. Este sistema se puede escribir a partir de (A.6) y (A.7) como:

$$\left[\mathbf{v}_\infty + \sum_i^m s_i \begin{Bmatrix} u^1(x, y, z) \\ v^1(x, y, z) \\ w^1(x, y, z) \end{Bmatrix} \right] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad 1 \leq j \leq m \quad (\text{A.8})$$

Una vez resuelto este las velocidades en cualquier punto pueden ser calculadas de la misma manera que las inducidas en los paneles (A.6).

A.0.9 La Condición de Superficie Libre

Aunque en el capítulo 2 se ha hecho una extensa discusión de los métodos disponibles para imponer la condición de superficie, con el objeto de completar este apéndice, se incluyen aquí unas líneas básicas sobre este aspecto.

La condición cinemática de superficie libre en función del potencial de velocidades, puede escribirse como [PM77]:

$$\phi_x \frac{\partial \beta}{\partial x} + \phi_y \frac{\partial \beta}{\partial y} - \phi_z = 0 \quad (\text{A.9})$$

Es posible derivar una condición de superficie libre dinámica a partir de la continuidad de las tensiones sobre la interfaz. Pero, en el flujo potencial, esta condición degenera a la simple imposición de que la presión debe ser la atmosférica en la superficie, y sin pérdida de generalidad esta presión puede ser tomada como nula. Si despreciamos la tensión superficial y aplicamos la ecuación de Bernouilli, podemos escribir,

$$g\beta + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2 - v_\infty^2) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Donde g es la aceleración de la gravedad.

A las anteriores, en el caso del flujo potencial, hay que añadir la llamada condición de radiación, que elimina la simetría del problema, imponiendo la evidencia física de que las olas generadas por el buque no se transmiten aguas arriba. Esta condición puede expresarse matemáticamente como [D'E97],

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \nabla \phi = v_\infty \quad (\text{A.11})$$

Esta condición es forzada numéricamente en la mayoría de los códigos, existiendo muchas variantes para ello.

Como puede apreciarse, las condiciones de superficie libre son no lineales y deben imponerse sobre una superficie inicialmente desconocida. Esto se ha llevado a cabo tradicionalmente usando esquemas basados en la suposición de que la perturbación producida en la superficie libre es pequeña. A partir de esta suposición es sencillo linealizar las ecuaciones anteriores o desarrollar esquemas iterativos de resolución, tal y como se ha expuesto en el capítulo 2 de este trabajo. Se puede encontrar amplia información sobre este particular en [LRB⁺98] [Rav96] [Rav92] [Daw77].

Apéndice B

El Método de Galerkin Aplicado a la Ecuación de Convección Difusión

A continuación, trataremos de resolver la siguiente ecuación unidimensional, utilizando el método de los elementos finitos mediante la formulación clásica de Galerkin,

$$\begin{aligned}\gamma \frac{d\varphi}{dx} - \frac{h}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= 0 \quad \text{en } 0 < x < l \\ \varphi(0) &= \varphi_0, \quad \varphi(l) = \varphi_l\end{aligned}\tag{B.1}$$

La forma débil de la ecuación (B.1) puede obtenerse multiplicando por una función de test $\psi(x)$ (con $\psi(0) = \psi(l) = 0$) e integrando,

$$\int_0^l \gamma \psi \frac{d\varphi}{dx} dx - \int_0^l \frac{h}{2} \psi \frac{d^2\varphi}{dx^2} dx = 0\tag{B.2}$$

Integrando por partes el segundo término de (B.2), se obtiene la forma débil clásica de la ecuación (B.1),

$$\int_0^l \gamma \psi \frac{d\varphi}{dx} dx + \int_0^l \frac{h}{2} \frac{d\psi}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx = 0\tag{B.3}$$

Considerando funciones de forma $\psi_i(x)$ lineales y aproximando la función $\varphi(x)$, en la forma clásica $\varphi(x) = \hat{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^2 \psi_i \varphi(x_i)$, podemos construir de manera sencilla las

matrices elementales. Llamando $K_{ij} = \int_0^l \gamma \psi_i \frac{d\psi_j}{dx} dx + \int_0^l \frac{h}{2} \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx$, se tiene que, para el elemento I de nodos i, j

$$\begin{aligned} K_{11} &= -\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \\ K_{12} &= \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \\ K_{21} &= -\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \\ K_{22} &= \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned} \Rightarrow \left[\frac{\gamma}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix}$$

Ensamblando las matrices elementales el sistema queda de la forma siguiente,

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{2} \begin{bmatrix} \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \\ \varphi_{i+2} \\ \dots \end{bmatrix} + \\ & + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \\ \varphi_{i+2} \\ \dots \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Como puede apreciarse, las ecuación centrales quedan como sigue:

$$\left[\gamma \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \end{bmatrix} = 0$$

De donde, operando,

$$(1 - \gamma)\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + (1 + \gamma)\varphi_{i-1} = 0 \quad \text{con } i = 1, N - 1 \quad (\text{B.4})$$

Como puede comprobarse, el mismo resultado habríamos obtenido si en vez del método de los elementos finitos hubiéramos usado diferencias finitas con un esquema centrado, donde,

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\varphi}{dx} \right]_i &\approx \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} \\ \left[\frac{d^2\varphi}{dx^2} \right]_i &\approx \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Sustituyendo lo anterior (B.5) en (B.1) se tiene,

$$\gamma \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} - \frac{h}{2} \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Que, como queríamos demostrar, coincide con (B.4).

Esta ecuación puede resolverse como sigue. Su ecuación característica es $(1-\gamma)\lambda^2 - 2\lambda + (1+\gamma) = 0$ cuyas raíces son, $\lambda = 1$ y $\lambda = \frac{(1+\gamma)}{(1-\gamma)}$ (para $\gamma \neq 1$), por lo que la solución genérica de (B.4) puede escribirse como,

$$\varphi_i = C_1 + C_2 \left[\frac{(1+\gamma)}{(1-\gamma)} \right]^i \quad (\text{B.7})$$

Los valores de las constantes C_1 y C_2 , deben determinarse a partir de las condiciones de contorno, pero por la forma de la solución (B.7) ya puede advertirse que habrá oscilaciones debidas al cambio de signo del segundo término para valores de $|\gamma| > 1$.

Si imponemos como condiciones de contorno $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) = 1$ la forma de la solución será,

$$\varphi_i = \frac{1}{1 - \left[\frac{(1+\gamma)}{(1-\gamma)} \right]^N} \left[1 - \left[\frac{(1+\gamma)}{(1-\gamma)} \right]^i \right] \quad (\text{B.8})$$

Señalar que para $\gamma = 1$, la ecuación $(1-\gamma)\lambda^2 - 2\lambda + (1+\gamma) = 0$ queda como $-2\lambda + 2 = 0$ cuya raíz es $\lambda = 1$, con lo que la solución es ahora,

$$\varphi_i = C_1$$

que, evidentemente, no es compatible con las condiciones de contorno $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) = 1$.

En las gráficas a) y d) de la figura B.1 se ha representado la solución de (B.8) en función del parámetro γ . En ella se puede apreciar claramente la aparición de oscilaciones en la solución para valores de $|\gamma| > 1$. (ver gráficas b), c) y d) de la figura B.1).

Dado que, en este caso, existe solución analítica de la ecuación (B.1), dada por,

$$\varphi(x) = \varphi_0 - (\varphi_0 - \varphi_l) \left(\frac{1 - e^{\frac{2\gamma x}{h}}}{1 - e^{\frac{2\gamma l}{h}}} \right) \quad (\text{B.9})$$

podemos comparar las soluciones analítica y numérica (con el método clásico de Galerkin) para $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) = 1$.

A continuación se presentan curvas del error de la solución numérica,

$$E(x_i, \gamma) = \left| \left(\frac{1 - e^{\frac{2\gamma x_i}{h}}}{1 - e^{\frac{2\gamma l}{h}}} \right) - \frac{1}{1 - \left[\frac{(1+\gamma)}{(1-\gamma)} \right]^N} \left[1 - \left[\frac{(1+\gamma)}{(1-\gamma)} \right]^i \right] \right| \quad (\text{B.10})$$

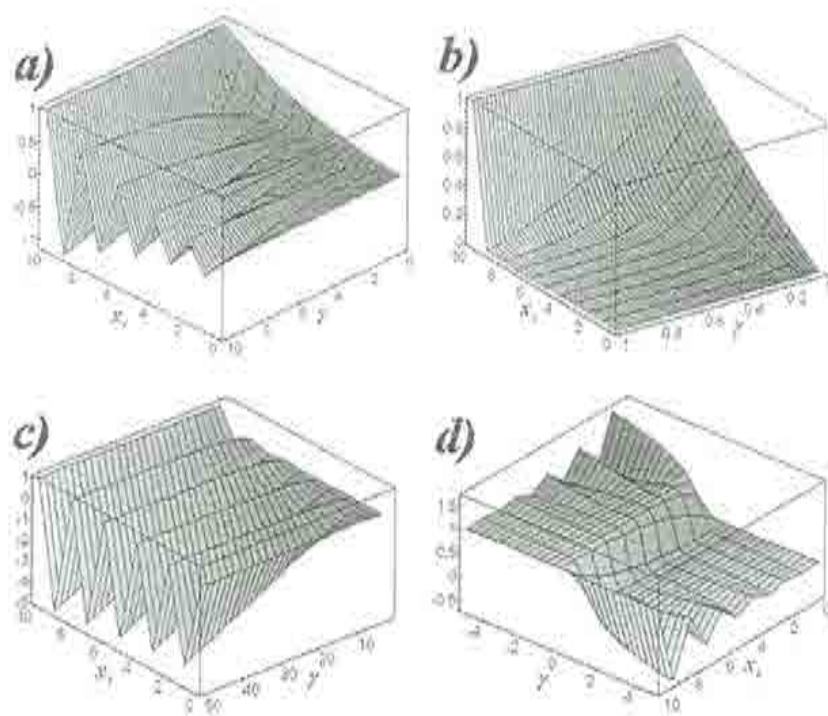


Figura B.1: Solución de la ecuación unidimensional de convección difusión mediante el método de Galerkin. En las gráficas a) y d) se ha representado φ_i en función del parámetro γ . En las gráficas b) y c) se presentan las zonas estables e inestables, respectivamente, de la solución.

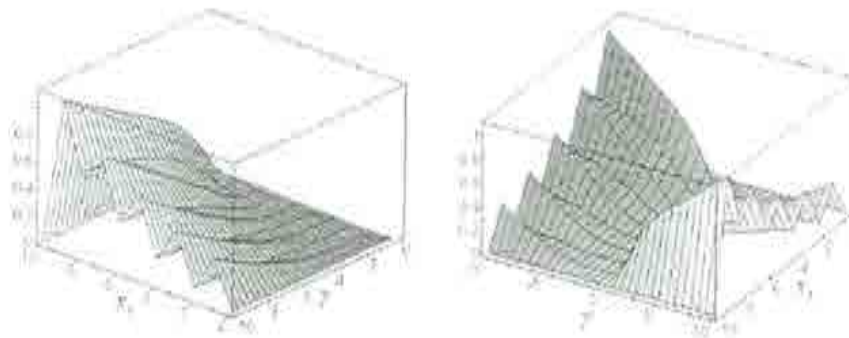


Figura B.2: Error cometido en la solución de la ecuación unidimensional de convección-difusión mediante el método de Galerkin.

para unos valores de los parámetros geométricos de $l = 10$ y $h = 1$ ($N = 0, 10$). En ellas se puede apreciar como crecen las oscilaciones asociadas a la inestabilidad de las soluciones numéricas de la ecuación de convección-difusión, al aumentar el valor de $|\gamma|$. El error de la solución numérica, dado por (B.10) se ha representado en la figura B.2.

Apéndice C

Ecuación de Convección Difusión que Resuelve el Método de Galerkin

Como se ha visto en el apéndice B, la formulación clásica de Galerkin (y como puede comprobarse fácilmente, otros métodos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales, como por ejemplo el método de las diferencias finitas centradas) aplicada a la ecuación de convección difusión siguiente,

$$\gamma \frac{d\varphi}{dx} - \frac{h}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \quad \text{en } 0 < x < l \quad (\text{C.1})$$

da como resultado la siguiente ecuación en diferencias (ver apéndice B),

$$(1 - \gamma)\varphi(x_{i+1}) - 2\varphi(x_i) + (\gamma + 1)\varphi(x_{i-1}) = 0 \quad \text{con } i = 1, N - 1 \quad (\text{C.2})$$

Cuando el intervalo $[0, l]$ es dividido en N elementos iguales, siendo $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = l$ donde, evidentemente, $x_{m+1} - x_m = h$ ($m = 0, N - 1$).

Si desarrollamos en serie de Taylor la función incógnita $\varphi(x)$ en torno al punto x_i , tendremos,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(x_i) \frac{(x_i - x)^n}{n!} \quad (\text{C.3})$$

Donde $\varphi^{(n)}(x) = \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n}$. Si además, el radio de convergencia de la serie es mayor que h , podemos escribir,

$$\varphi(x_{i+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(x_i) \frac{h^n}{n!} \quad (\text{C.4})$$

$$\varphi(x_{i-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi^{(n)}(x_i) \frac{h^n}{n!}$$

Sustituyendo los desarrollos (C.4) en (C.2) se tiene,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \varphi^{(n)}(x_i) \frac{h^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(x_i) \frac{h^n}{n!} + \\ & + \gamma \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi^{(n)}(x_i) \frac{h^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(x_i) \frac{h^n}{n!} \right] = 0 \\ & 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(2n)}(x_i) \frac{h^{2n}}{(2n)!} - 2\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(2n-1)}(x_i) \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Dado que la ecuación original (C.1), cumple,

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{2\gamma}{h} \frac{d\varphi}{dx} \Rightarrow \frac{d^n \varphi}{dx^n} = \left[\frac{2\gamma}{h} \right]^{n-2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \quad (\text{C.6})$$

Sustituiremos la anterior relación en (C.5) con el fin de calcular el error cometido en el cumplimiento de (C.1). Esto resulta en,

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{2\gamma}{h} \right]^{2n-2} \frac{h^{2n}}{(2n)!} - \gamma \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{2\gamma}{h} \right]^{2n-3} \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} \right] + \\
& \quad + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} - \gamma h \frac{d\varphi(x_i)}{dx} = 0 \\
& \left[\frac{h}{2\gamma} \right]^2 \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{[2\gamma]^{2n}}{(2n)!} - \gamma \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[2\gamma]^{2n-1}}{(2n-1)!} \right] + \\
& \quad + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} - \gamma h \frac{d\varphi(x_i)}{dx} = 0 \\
& \left[\frac{h}{2\gamma} \right]^2 \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[2\gamma]^{2n}}{(2n)!} - \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2\gamma]^{2n-1}}{(2n-1)!} - 1 \right] + \\
& \quad + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} - \gamma h \frac{d\varphi(x_i)}{dx} = 0
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Si consideramos los siguientes desarrollos en serie de Taylor,

$$\sinh(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \tag{C.8}$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} \tag{C.9}$$

la relación (E.8), puede escribirse como,

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{h}{2\gamma} \right]^2 \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} [\cosh(2\gamma) - \gamma \sinh(2\gamma) - 1] + \\
& \quad + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} - \gamma h \frac{d\varphi(x_i)}{dx} = 0 \\
& \gamma \frac{d\varphi(x_i)}{dx} - \left[\frac{h}{2} + \frac{h}{4\gamma^2} [\cosh(2\gamma) - \gamma \sinh(2\gamma) - 1] \right] \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} = 0
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Es decir la discretización (C.2) resuelve de forma exacta¹ la ecuación,

$$\gamma \frac{d\varphi(x_i)}{dx} - \frac{h}{2}(1-K) \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} = 0 \tag{C.11}$$

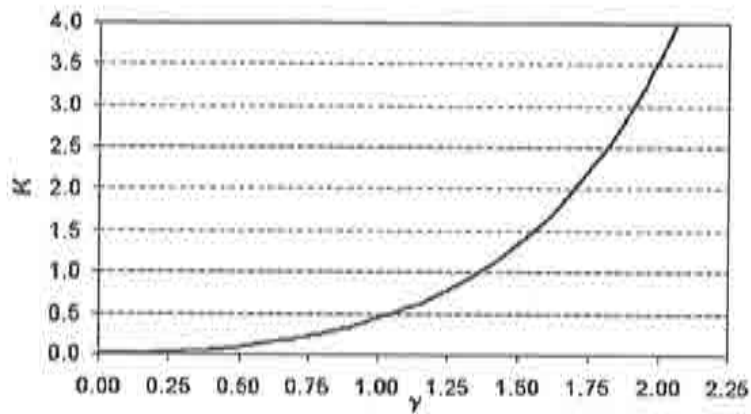


Figura C.1: Gráfica de la variación de la función K con γ .

Con $K = -\frac{1}{2\gamma^2} [\cosh(2\gamma) - \gamma \sinh(2\gamma) - 1]$, cuya variación puede apreciarse en la figura (C.1),

Como puede apreciarse, para valores de $\gamma > 1.3657$ el valor obtenido de K es mayor que 1, con lo que, en esa situación la ecuación que se está resolviendo tiene una difusión total negativa.

Estas consideraciones ayudan a entender el carácter inestable de la solución mediante el método de Galerkin de la ecuación de convección difusión.

¹Exacta en los nodos x_i de la partición.

Apéndice D

Estudio de la Ecuación Unidimensional Modificada de Convección Difusión

En este caso repetiremos la demostración hecha en el apéndice D, pero en este caso aplicada a la resolución de la ecuación unidimensional modificada de convección difusión siguiente,

$$\begin{aligned} \gamma \frac{d\varphi}{dx} - \frac{h}{2} (1 + \alpha\gamma) \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= 0 \quad \text{en } 0 < x < l \\ \varphi(0) &= \varphi_0, \quad \varphi(l) = \varphi_l \end{aligned} \quad (D.1)$$

La forma débil de la ecuación (D.1) puede obtenerse multiplicando por una función de test $\psi(x)$ (con $\psi(0) = \psi(l) = 0$) e integrando,

$$\int_0^l \gamma \psi \frac{d\varphi}{dx} dx - \int_0^l \frac{h}{2} (1 + \alpha\gamma) \psi \frac{d^2\varphi}{dx^2} dx = 0 \quad (D.2)$$

Integrando por partes el segundo término de (D.2), se obtiene la forma débil clásica de la ecuación (D.1),

$$\int_0^l \gamma \psi \frac{d\varphi}{dx} dx + \int_0^l \frac{h}{2} (1 + \alpha\gamma) \frac{d\psi}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx = 0 \quad (D.3)$$

Considerando funciones de forma $\psi_i(x)$ lineales y aproximando la función $\varphi(x)$, en la forma clásica $\varphi(x) = \hat{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^2 \psi_i \varphi(x_i)$, podemos construir de manera sencilla las matrices elementales. Llamando

$$K_{ij} = \int_0^l \gamma \psi_i \frac{d\psi_j}{dx} dx + \int_0^l \frac{h}{2} (1 + \alpha\gamma) \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx$$

se tiene que, para el elemento I de nodos i, j

$$\begin{aligned} K_{11} &= -\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}(1 + \alpha\gamma) \\ K_{12} &= \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}(1 + \alpha\gamma) \\ K_{21} &= -\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}(1 + \alpha\gamma) \\ K_{22} &= \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}(1 + \alpha\gamma) \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\gamma}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1 + \alpha\gamma) & -(1 + \alpha\gamma) \\ -(1 + \alpha\gamma) & (1 + \alpha\gamma) \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix}$$

Ensamblando las matrices elementales el sistema queda de la forma siguiente,

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{2} \begin{bmatrix} \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \\ \varphi_{i+2} \\ \dots \end{bmatrix} + \\ & + \frac{1}{2} (1 + \alpha\gamma) \begin{bmatrix} \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \\ \varphi_{i+2} \\ \dots \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Como puede apreciarse, las ecuación centrales quedan como sigue:

$$\left[\gamma \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 + \alpha\gamma) \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \end{bmatrix} = 0$$

De donde, operando,

$$(1 + \gamma(\alpha - 1))\varphi(x_{i+1}) - 2(1 + \alpha\gamma)\varphi(x_i) + (1 + \gamma(1 + \alpha))\varphi(x_{i-1}) = 0 \quad (\text{D.4})$$

con $i = 1, N - 1$

Como puede comprobarse, el mismo resultado habríamos obtenido si en vez del método de los elementos finitos hubiéramos usado diferencias finitas con un esquema centrado, donde,

$$\begin{aligned}\left[\frac{d\varphi}{dx}\right]_i &\approx \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} \\ \left[\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right]_i &\approx \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2}\end{aligned}\quad (\text{D.5})$$

Sustituyendo lo anterior (D.5) en (D.1) se tiene,

$$\gamma \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} - \frac{h}{2}(1 + \alpha) \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} = 0 \quad (\text{D.6})$$

Que, como queríamos demostrar, coincide con (D.4).

Esta ecuación puede resolverse como sigue. Su ecuación característica es $(1 + \gamma(\alpha - 1))\lambda^2 - 2(1 + \alpha\gamma)\lambda + (1 + \gamma(1 + \alpha)) = 0$ cuyas raíces son, $\lambda = 1$ y $\lambda = \frac{1 + \alpha\gamma + \gamma}{1 + \alpha\gamma - \gamma}$ (para $1 + \alpha\gamma - \gamma \neq 0$), por lo que la solución genérica de (D.4) puede escribirse como,

$$\varphi_i = C_1 + C_2 \left[\frac{1 + \alpha\gamma + \gamma}{1 + \alpha\gamma - \gamma} \right]^i \quad (\text{D.7})$$

Comparando con la solución obtenida en el apéndice B para la ecuación convección difusión típica, en este caso tanto el numerador como el denominador del segundo término de (D.7) se hayan corregidos por un valor $\alpha\gamma$. Esto nos permite, por ejemplo, imponer como condición para la determinación de α , que el cociente del segundo término de (D.7) no cambie de signo ($sg(1 + \alpha\gamma + \gamma) = sg(1 + \alpha\gamma - \gamma)$). De esta forma,

	<i>Denominador</i>	<i>Numerador</i>		<i>Condición</i>
+	$\alpha > 1 - \frac{1}{\gamma}$	$\alpha > -1 - \frac{1}{\gamma}$	\Rightarrow	$\alpha > 1 - \frac{1}{\gamma}$
-	$\alpha < 1 - \frac{1}{\gamma}$	$\alpha < -1 - \frac{1}{\gamma}$	\Rightarrow	$\alpha < -1 - \frac{1}{\gamma}$

Pues los valores críticos (valores máximo y mínimo del intervalo para el que aparecen oscilaciones) son $\alpha = 1 - \frac{1}{\gamma}$, $\alpha = -1 - \frac{1}{\gamma}$. Una gráfica comparativa de las curvas $\alpha = 1 - \frac{1}{\gamma}$ y $\alpha = -1 - \frac{1}{\gamma}$ se presenta en la figura D.4. Cabe señalar que estos valores han sido obtenidos imponiendo sólo la condición de que el segundo término de (D.7) no cambie de signo, ninguna otra condición ha sido impuesta sobre la solución, por lo que su forma no tiene, en principio, que parecerse a la solución analítica de la ecuación de convección difusión original dada por (ver apéndice B):

$$\varphi(x) = \varphi_0 - (\varphi_0 - \varphi_l) \left(\frac{1 - e^{\frac{2\gamma x}{h}}}{1 - e^{\frac{2\gamma l}{h}}} \right) \quad (\text{D.8})$$

Si imponemos como condiciones de contorno $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) = 1$ la forma de la solución será,

$$\varphi(x) = \left(\frac{1 - e^{\frac{2\gamma x}{h}}}{1 - e^{\frac{2\gamma l}{h}}} \right) \quad (D.9)$$

Del mismo modo los valores de las constantes C_1 y C_2 en (D.7), deben determinarse a partir de las condiciones de contorno. Si imponemos como condiciones de contorno, al igual que en el caso anterior, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) = 1$, la forma de la solución será,

$$\varphi_i = \frac{1}{1 - \left[\frac{1 + \alpha\gamma + \gamma}{1 + \alpha\gamma - \gamma} \right]^N} \left[1 - \left[\frac{1 + \alpha\gamma + \gamma}{1 + \alpha\gamma - \gamma} \right]^i \right] \quad (D.10)$$

En los gráficos a) y b) de la figura D.1 se ha representado la solución de la función (D.10) para $\alpha = 1.01 - \frac{1}{\gamma}$ (se hace notar que la solución (D.7)-(D.10) es singular para el valor crítico $\alpha_c = 1 - \frac{1}{\gamma}$). Como puede apreciarse en la figura D.1, la solución para $\gamma < 0$ no se parece nada a la esperable. Se han incluido también (gráficos c) y d) de la figura D.1) representaciones del error cometido en la aproximación utilizando la solución analítica de la ecuación original (D.9). Este error está dado por,

$$E(x_i, \gamma) = \left| \left(\frac{1 - e^{\frac{2\gamma x_i}{h}}}{1 - e^{\frac{2\gamma l}{h}}} \right) - \frac{1}{1 - \left[\frac{1 + \alpha\gamma + \gamma}{1 + \alpha\gamma - \gamma} \right]^N} \left[1 - \left[\frac{1 + \alpha\gamma + \gamma}{1 + \alpha\gamma - \gamma} \right]^i \right] \right| \quad (D.11)$$

En los gráficos a) y b) de la figura D.2 se ha representado la solución de la función (D.10) para $\alpha = -1.01 - \frac{1}{\gamma}$ (se hace notar que la solución (D.7)-(D.8) esta indefinida en $x_0 = 0$ para el valor crítico $\alpha_c = -1 - \frac{1}{\gamma}$). Como puede apreciarse, en este caso a la inversa del anterior) la solución para $\gamma > 0$ no se parece nada a la esperable. Se han incluido también (gráficos c) y d) de la figura D.1) representaciones del error cometido en la aproximación utilizando la solución analítica de la ecuación original (D.9).

Por último se incluyen en la figura D.3 gráficos de la solución de la función (D.10) para el valor óptimo $\alpha = \cotgh(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$, obtenido en el apéndice E. En estas gráficas se puede comprobar que, como era esperable, la solución numérica es nodalmente exacta (en las evaluaciones numéricas el error máximo que se apreció era del orden de 10^{-15}). Por otra parte, en la figura D.4 se han representado las curvas de los valores críticos y óptimo de α .

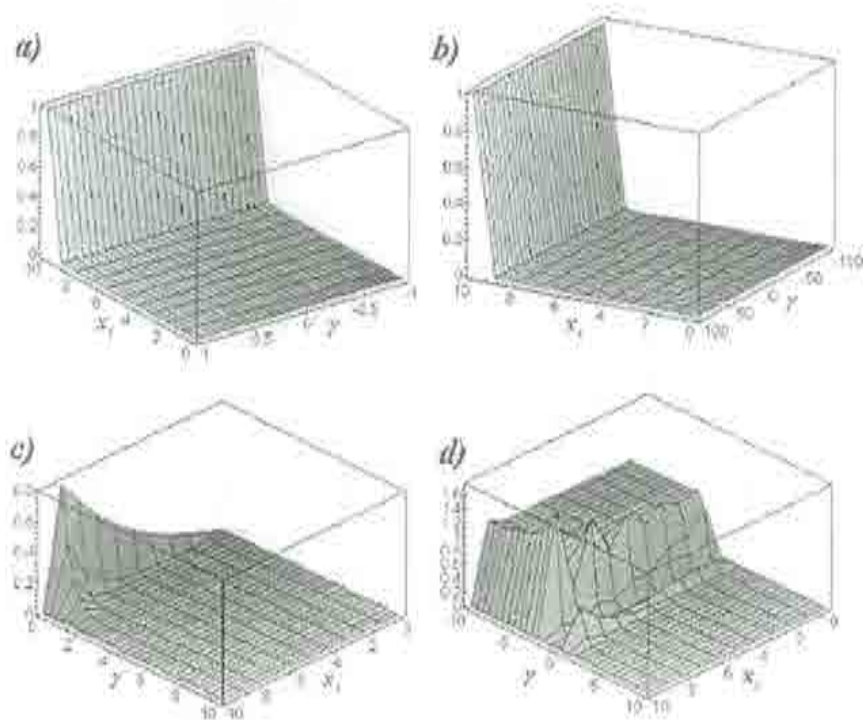


Figura D.1: Solución de la ecuación de convección difusión modificada con $\alpha = 1.01 - \frac{1}{\gamma}$. (gráficos a) y b)). En los gráficos c) y d) se representa el error cometido en la aproximación utilizando la solución analítica de la ecuación original.

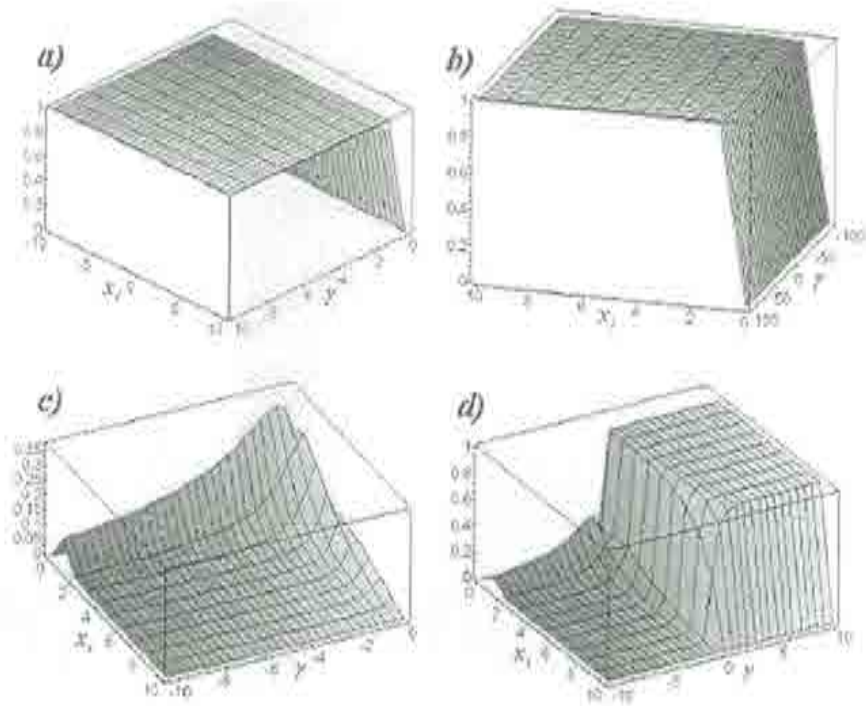


Figura D.2: Solución de la ecuación de convección difusión modificada con $\alpha = -1.01 - \frac{1}{\gamma}$ (gráficos a) y b)). En los gráficos c) y d) se representa el error cometido en la aproximación utilizando la solución analítica de la ecuación original.

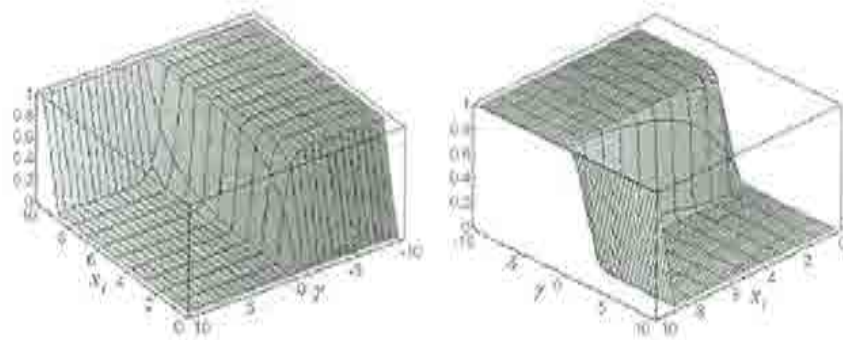


Figura D.3: Solución de la ecuación de convección difusión modificada con $\alpha = \cotgh(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$.

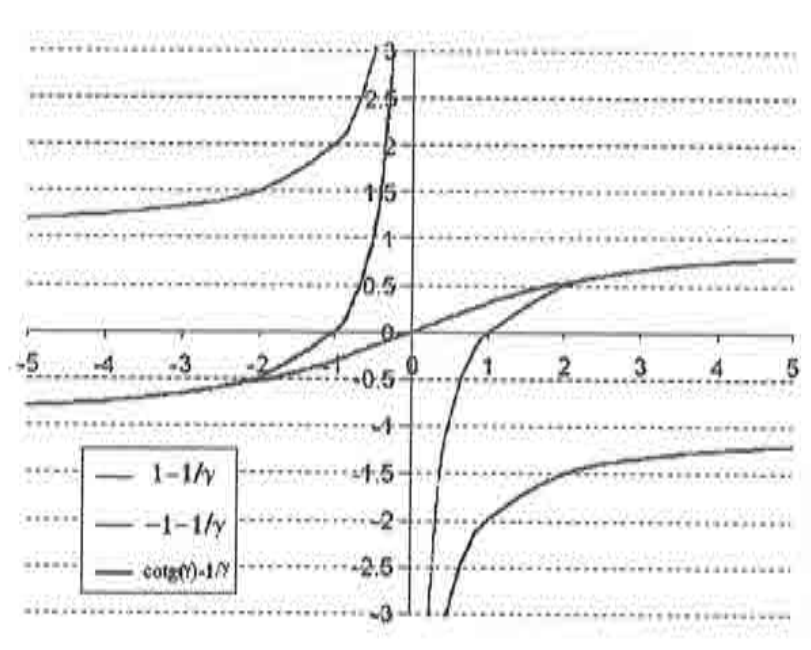


Figura D.4: Comparación de las curvas de α críticos y óptimo.

Apéndice E

Ecuación de Convección Difusión Modificada Óptima

El objetivo del presente apéndice es calcular el valor de α óptimo para obtener un error de truncamiento nulo en la ecuación de convección difusión modificada siguiente:

$$\gamma \frac{d\varphi}{dx} - \frac{h}{2} (1 + \alpha\gamma) \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \quad \text{en } 0 < x < l \quad (\text{E.1})$$

La solución por el método de Galerkin, de la ecuación (E.1) anterior, da como resultado la siguiente ecuación en diferencias (ver apéndice D),

$$(1 + \gamma(\alpha - 1))\varphi(x_{i+1}) - 2(1 + \alpha\gamma)\varphi(x_i) + (1 + \gamma(1 + \alpha))\varphi(x_{i-1}) = 0 \quad (\text{E.2})$$

con $i = 1, N - 1$

Cuando el intervalo $[0, l]$ es dividido en N elementos iguales, siendo $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = l$ donde, evidentemente, $x_{m+1} - x_m = h$ ($m = 0, N - 1$).

Para poder seguir en paralelo el desarrollo hecho en el apéndice C, vamos a escribir el esquema (E.2) en la siguiente forma,

$$(1 - \gamma)\varphi(x_{i+1}) - 2\varphi(x_i) + (1 + \gamma)\varphi(x_{i-1}) + \alpha\gamma[\varphi(x_{i+1}) - 2\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})] = 0 \quad \text{con } i = 1, N - 1 \quad (\text{E.3})$$

Si desarrollamos en serie de Taylor la función incógnita $\varphi(x)$ en torno al punto x_i , tendremos,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(x_i) \frac{(x_i - x)^n}{n!} \quad (\text{E.4})$$

Donde $\varphi^{(n)}(x) = \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n}$. Si además, el radio de convergencia de la serie es mayor que h , podemos escribir,

$$\varphi(x_{i+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(x_i) \frac{h^n}{n!} \quad (\text{E.5})$$

$$\varphi(x_{i-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi^{(n)}(x_i) \frac{h^n}{n!}$$

Sustituyendo los desarrollos (E.4) y (E.5) en (E.3) se tiene,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(2n)}(x_i) \frac{h^{2n}}{(2n)!} - \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(2n-1)}(x_i) \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} + \\ & + \alpha \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(2n)}(x_i) \frac{h^{2n}}{(2n)!} = 0 \\ & \sum_{n=2}^{\infty} \varphi^{(2n)}(x_i) \frac{h^{2n}}{(2n)!} - \gamma \sum_{n=2}^{\infty} \varphi^{(2n-1)}(x_i) \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} + \\ & + \alpha \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(2n)}(x_i) \frac{h^{2n}}{(2n)!} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 \varphi(x_i)}{dx^2} - \gamma h \frac{d\varphi(x_i)}{dx} = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Dado que $\varphi(x)$ se pretende cumpla la ecuación original de convección difusión $\gamma \frac{d\varphi}{dx} - \frac{h}{2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0$ (ver apéndice B), puede obtenerse, de manera sencilla, la relación,

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{2\gamma}{h} \frac{d\varphi}{dx} \Rightarrow \frac{d^n \varphi}{dx^n} = \left[\frac{2\gamma}{h} \right]^{n-2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \quad (\text{E.7})$$

Que sustituida en (E.6), resulta,

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} \left[(1 + \alpha\gamma) \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{2\gamma}{h} \right]^{2n-2} \frac{h^{2n}}{(2n)!} - \gamma \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{2\gamma}{h} \right]^{2n-3} \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} \right] + \\
& \quad + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} - \gamma h \frac{d\varphi(x_i)}{dx} = 0 \\
& \left[\frac{h}{2\gamma} \right]^2 \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} \left[(1 + \alpha\gamma) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\gamma)^{2n}}{(2n)!} - \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\gamma)^{2n-1}}{(2n-1)!} - (1 + \alpha\gamma) \right] + \\
& \quad + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} - \gamma h \frac{d\varphi(x_i)}{dx} = 0
\end{aligned} \tag{E.8}$$

Considerando los siguientes desarrollos en serie de Taylor,

$$\sinh(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \tag{E.9}$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} \tag{E.10}$$

la relación (E.8), puede escribirse como,

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{h}{2\gamma} \right]^2 \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} [(1 + \alpha\gamma) [\cosh(2\gamma) - 1] - \gamma \sinh(2\gamma)] + \\
& \quad + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} - \gamma h \frac{d\varphi(x_i)}{dx} = 0 \\
& \gamma \frac{d\varphi(x_i)}{dx} - \left[\frac{h}{2} + \frac{h}{4\gamma^2} [(1 + \alpha\gamma) [\cosh(2\gamma) - 1] - \gamma \sinh(2\gamma)] \right] \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} = 0
\end{aligned} \tag{E.11}$$

Es decir la discretización (E.2) resuelve de forma exacta (nodalmente exacta) la ecuación,

$$\gamma \frac{d\varphi(x_i)}{dx} - \frac{h}{2} (1 - K) \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} = 0 \tag{E.12}$$

con $K = -\frac{1}{2\gamma^2} [(1 + \alpha\gamma) \cosh(2\gamma) - \gamma \sinh(2\gamma) - (1 + \alpha\gamma)]$. Por lo tanto el error de truncamiento del método es:

$$E_T = \frac{h}{4\gamma^2} [(1 + \alpha\gamma) [\cosh(2\gamma) - 1] - \gamma \sinh(2\gamma)]$$

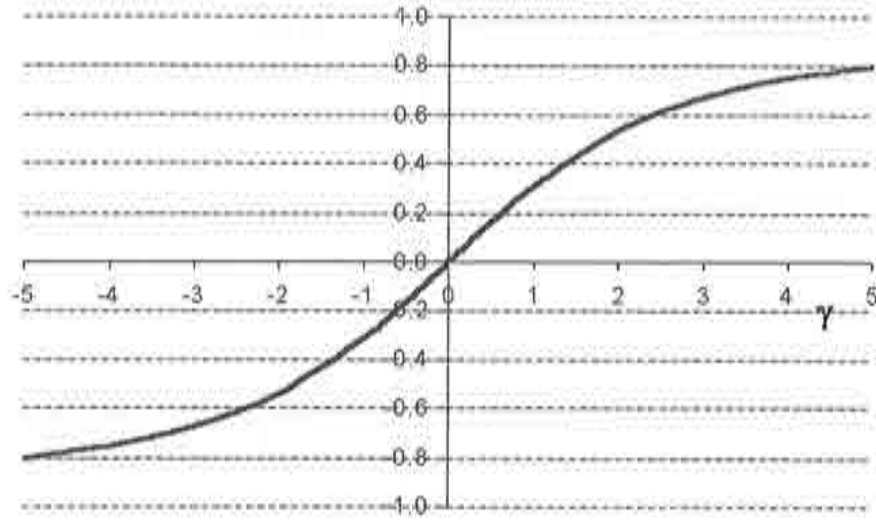


Figura E.1: Gráfica de $\alpha = \coth(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$.

Como hemos mencionado, la condición para la determinación del parámetro α , es que el error de truncamiento sea nulo, esto es, que la solución sea nodalmente exacta para la ecuación original $\gamma \frac{d\varphi}{dx} - \frac{h}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$. Por lo tanto queremos que se cumpla la siguiente relación,

$$(1 + \alpha\gamma) [\cosh(2\gamma) - 1] = \gamma \sinh(2\gamma) \Rightarrow \alpha = \coth(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$$

Esta curva ($\alpha = \coth(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$) se ha representado en la figura E.1.

Apéndice F

La Condición de Superficie Libre de Dawson

Dawson [Daw77] presentó en 1977 el, probablemente, más conocido de los algoritmos numéricos basado en el método de elementos de contorno para resolver el problema de flujo potencial con superficie libre. Su propuesta de resolución del problema de flujo tridimensional de superficie libre se basaba en el acoplamiento de un algoritmo de resolución para el problema del modelo doble sumergido basado en el algoritmo de Hess y Smith [HS64b] [HS64a] [GSP98] con un método de resolución del problema con superficie libre basado en la denominada teoría de los buques lentos.

Esta teoría está basada en la suposición de que el flujo con superficie libre sólo supone una pequeña variación del flujo sin ella (el conocido tradicionalmente como flujo de modelo doble sumergido). Esta suposición se cumple para pequeños números de Froude, y esta es la razón por la que esta forma de abordar el problema es conocida como teoría de los buques lentos. En este sentido, el potencial de velocidades y por lo tanto el campo de velocidad ($\mathbf{v} = (u, v, w)$) se descompone en dos partes aditivas. La componente debida al doble modelo sumergido y la componente de perturbación debida a las olas generadas.

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}^{\times}(x, y, z) + \mathbf{v}'(x, y, z) \quad (\text{F.1})$$

Donde \mathbf{v}^{\times} es la velocidad correspondiente al doble modelo sumergido y \mathbf{v}' es la velocidad de perturbación, por lo cual podemos escribir que $|\mathbf{v}^{\times}| \ll |\mathbf{v}'|$. Si aplicamos la descomposición de la velocidad hecha en la teoría de los buques lentos (F.1) a la ecuación de Bernouilli, tenemos,

$$\eta = \frac{1}{g} \left[C - \frac{p_o}{\rho} - \frac{1}{2} (\mathbf{v}^2) \right] \simeq \frac{1}{g} \left[C - \frac{p_o}{\rho} - \frac{1}{2} (\mathbf{v}^{\times} + \mathbf{v}')^2 \right] \quad (\text{F.2})$$

Donde C es una constante, p_o es la presión sobre la superficie libre, ρ es la densidad del fluido y η la elevación de la superficie libre. Si se considera que $p_o = 0$, podemos escribir que,

$$\eta = \frac{1}{g} \left[C - \frac{1}{2} (\mathbf{v}^\times + \mathbf{v}')^2 \right] \quad (\text{F.3})$$

Si, en (F.3), despreciamos las componentes de la velocidad segun Oz , tenemos que,

$$\eta = \frac{1}{g} \left[C - \frac{p_o}{\rho} - \frac{1}{2} (u^{\times 2} + v^{\times 2} + u'^2 + v'^2 + 2u^\times u' + 2v^\times v') \right] \quad (\text{F.4})$$

Si además eliminamos los términos cuadráticos de la velocidad de perturbación, nos resulta finalmente,

$$\eta = \frac{1}{g} \left[C - \frac{1}{2} (u^{\times 2} + v^{\times 2} + 2u^\times u' + 2v^\times v') \right] \quad (\text{F.5})$$

Con el objeto de simplificar la exposición, en lo que sigue se notará $\mathbf{v}^\times = (u^\times, v^\times)$ y $\mathbf{v}' = (u', v')$, dado que se considera despreciable la componente vertical de la velocidad. De esta manera la ecuación (F.5), se puede escribir como,

$$\eta = \frac{1}{g} \left[C - \frac{1}{2} (\mathbf{v}^{\times 2} + 2\mathbf{v}^\times \cdot \mathbf{v}') \right] \quad (\text{F.6})$$

La ecuación de superficie libre, en el caso estacionario, y suponiendo que se cumple, aproximadamente sobre $z = \eta_{ref}$, puede escribirse como,

$$w = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \eta \quad \text{en} \quad z = \eta_{ref} \quad (\text{F.7})$$

Donde, en (F.7) y en lo que sigue debe entenderse que $\mathbf{v} = (u, v)$ y $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$. Sustituyendo (F.3) en (F.7), tenemos que,

$$2gw + [(\mathbf{v}^\times + \mathbf{v}') \cdot \nabla] (\mathbf{v}^\times + \mathbf{v}')^2 = 0 \quad (\text{F.8})$$

Si en lo anterior sustituimos la ecuación (F.6), pero sólo en el término multiplicado por \mathbf{v}^\times , resulta,

$$2gw + (\mathbf{v}^\times \cdot \nabla) (\mathbf{v}^{\times 2} + 2\mathbf{v}^\times \cdot \mathbf{v}') + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) (\mathbf{v}^\times + \mathbf{v}')^2 = 0 \quad (\text{F.9})$$

En el tercer término, se desprecia el sumando \mathbf{v}' , para dar,

$$2gw + (\mathbf{v}^\times \cdot \nabla) (\mathbf{v}^{\times 2} + 2\mathbf{v}^\times \cdot \mathbf{v}') + u' \frac{\partial \mathbf{v}^{\times 2}}{\partial x} + v' \frac{\partial \mathbf{v}^{\times 2}}{\partial y} = 0 \quad (\text{F.10})$$

Operando los dos últimos términos, la ecuación (F.10) puede escribirse como,

$$2gw + (\mathbf{v}^\times \cdot \nabla) (\mathbf{v}^{\times 2} + 2\mathbf{v}^\times \cdot \mathbf{v}') + 2u^x \mathbf{v}' \cdot \nabla u^\times + 2v^x \mathbf{v}' \cdot \nabla v^\times = 0 \quad (\text{F.11})$$

Por otra parte, si suponemos que la velocidad, y sus componentes aditivas, derivan de funciones potencial, es decir,

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ u' &= \frac{\partial \phi'}{\partial x}, v' = \frac{\partial \phi'}{\partial y}, w' = \frac{\partial \phi'}{\partial z} \\ u^\times &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}, v^\times = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, w^\times = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

se cumplirán las siguientes relaciones,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} = \frac{\partial v'}{\partial x}, \frac{\partial u^\times}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial v^\times}{\partial x} \quad (\text{F.13})$$

Que aplicadas sobre (F.11), permiten escribir que,

$$\begin{aligned} gw + (\mathbf{v}^\times \cdot \nabla) \left(\frac{\mathbf{v}^{\times 2}}{2} + \mathbf{v}^\times \cdot \mathbf{v}' \right) + \mathbf{v}^\times \cdot \nabla (u' u^x + v' v^x) = \\ = u^x \mathbf{v}^\times \cdot \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} + v^x \mathbf{v}^\times \cdot \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

Lo anterior se puede poner en forma más compacta como,

$$\begin{aligned} gw + (\mathbf{v}^\times \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^{\times 2} + \mathbf{v}^\times \cdot \mathbf{v}' \right) + (\mathbf{v}^\times \cdot \nabla) (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}^x) - \\ - \mathbf{v}^\times \cdot (\mathbf{v}^\times \cdot \nabla) \mathbf{v}' = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

Simplificando en la ecuación anterior, se tiene que,

$$\begin{aligned} gw + \mathbf{v}^\times \cdot (\mathbf{v}^\times \cdot \nabla) \mathbf{v}^\times + \mathbf{v}^\times \cdot (\mathbf{v}^\times \cdot \nabla) \mathbf{v}' + \\ + 2\mathbf{v}' \cdot (\mathbf{v}^\times \cdot \nabla) \mathbf{v}^\times = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.16})$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}^\times$, podemos escribir que,

$$\begin{aligned} gw + \mathbf{v}^\times \cdot (\mathbf{v}^\times \cdot \nabla) \mathbf{v}^\times + \mathbf{v}^\times \cdot (\mathbf{v}^\times \cdot \nabla) (\mathbf{v} - \mathbf{v}^\times) = \\ = 2(\mathbf{v}^\times - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v}^\times \cdot \nabla) \mathbf{v}^\times \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

y operando,

$$gw + \mathbf{v}^\times \cdot (\mathbf{v}^\times \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}^\times \cdot \nabla) \mathbf{v}^\times = 2\mathbf{v}^\times \cdot (\mathbf{v}^\times \cdot \nabla) \mathbf{v}^\times \quad (\text{F.18})$$

Si denominamos $l = \frac{\mathbf{v}^\times}{|\mathbf{v}^\times|}$ (vector unitario en la dirección de la velocidad de doble modelo sumergido), el operador $(\mathbf{v}^\times \cdot \nabla)$ puede escribirse como $|\mathbf{v}^\times| \frac{\partial}{\partial l}$. Así podemos reescribir la ecuación (F.18) como,

$$gw + \mathbf{v}^\times \cdot \left(|\mathbf{v}^\times| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial l} \right) + 2\mathbf{v} \cdot \left(|\mathbf{v}^\times| \frac{\partial \mathbf{v}^\times}{\partial l} \right) = 2\mathbf{v}^\times \cdot \left(|\mathbf{v}^\times| \frac{\partial \mathbf{v}^\times}{\partial l} \right) \quad (\text{F.19})$$

Finalmente, la ecuación (F.19) puede escribirse de forma aproximada como,

$$gw + \frac{\partial}{\partial l} \left(\mathbf{v}^\times^2 |\mathbf{v}| \right) = 2\mathbf{v}^\times \cdot \left(|\mathbf{v}^\times| \frac{\partial \mathbf{v}^\times}{\partial l} \right) \quad \text{en } z = \eta_{ref} \quad (\text{F.20})$$

que es la forma final propuesta en [Daw77].

Como puede apreciarse la forma de la (F.20) tiene grandes ventajas para su implementación, las cuales son, en gran medida, causa de su éxito. La posibilidad de cálculo de las derivadas según líneas de corriente, de la solución de doble modelo sumergido (cuya dirección está dada por $l = \frac{\mathbf{v}^\times}{|\mathbf{v}^\times|}$), facilita su determinación utilizando el método de diferencias finitas. De esta manera, el algoritmo de solución se plantea de la siguiente forma:

1. Resolver el problema de doble modelo sumergido, obteniendo así el campo de velocidades $\mathbf{v}^\times = (u^\times, v^\times, w^\times)$.
2. A partir de la solución anterior se pueden evaluar las derivadas respecto de la dirección dada por $l = \frac{\mathbf{v}^\times}{|\mathbf{v}^\times|}$. Así se puede resolver de nuevo el problema, pero imponiendo en este caso la condición (F.20), obteniendo así la solución $\mathbf{v} = (u, v, w)$.

Para facilitar la implementación del algoritmo, en el método original los paneles de la superficie libre se disponían en *tiras* aproximadamente alineadas con el flujo del modelo doble sumergido. De esta manera las derivadas que aparecen podían ser calculadas directamente usando diferencias finitas sobre los puntos de colocación de sucesivos paneles de la misma *tira*.

Pero, probablemente, el aspecto que ha hecho más famoso al método de Dawson fue la forma de estabilización de la ecuación de convección.

Es conocido desde hace tiempo que el cálculo de las derivadas primeras descentradas y corriente arriba (*upwind*) introduce en las ecuaciones una difusión numérica que puede corregir las inestabilidades asociadas a la ecuación de convección difusión. El problema de esta metodología es que la adición de difusión no puede ser controlada fácilmente,

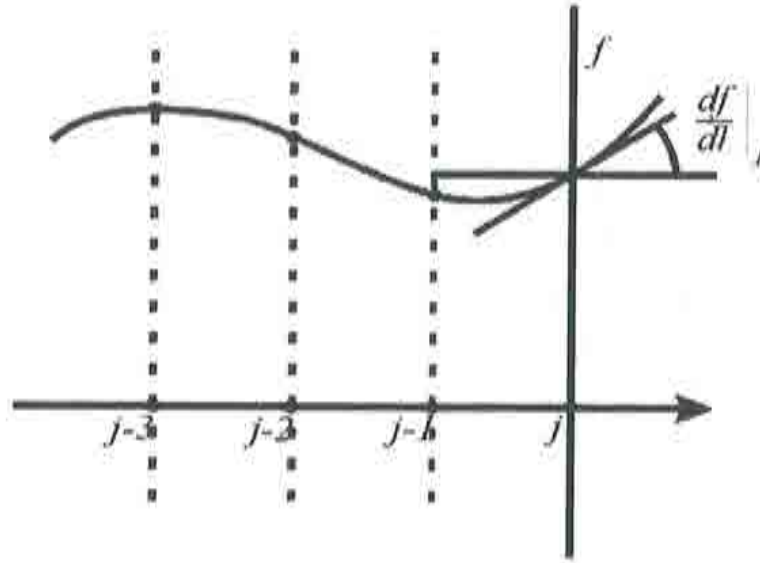


Figura F.1: Esquema de evaluación de la fórmula de *upwind* de Dawson con cuatro puntos.

por lo que la solución suele depender significativamente de parámetros como el tamaño de la malla.

Sin embargo, Dawson propone evaluar la derivada primera de una función $(\frac{\partial f}{\partial l})$ mediante una fórmula de deducción casi mágica y de resultados sorprendentes. Cabe señalar, que en el artículo original, esta fórmula no tiene ninguna justificación teórica y la recomendación de Dawson proviene de una selección usando la técnica de prueba y error.

La propuesta consiste en usar un operador de cuatro puntos de *upwind* (ver figura F.1), el cual debe eliminar los errores de segundo y cuarto orden, pero no del tercero. De esta manera, la función $f(x)$ debe cumplir las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned}
 f(x_j - h) &= f_{j-1} = f_j - h \frac{df}{dl} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 f}{dl^2} + \frac{h^4}{24} \frac{d^4 f}{dl^4} \\
 f(x_j - 2h) &= f_{j-2} = f_j - 2h \frac{df}{dl} + 2h^2 \frac{d^2 f}{dl^2} + \frac{2h^4}{3} \frac{d^4 f}{dl^4} \\
 f(x_j - 3h) &= f_{j-3} = f_j - 3h \frac{df}{dl} + \frac{9h^2}{2} \frac{d^2 f}{dl^2} + \frac{27h^4}{8} \frac{d^4 f}{dl^4}
 \end{aligned} \tag{F.21}$$

de las anteriores relaciones puede obtenerse,

$$\left(\frac{df}{dl} \right)_{Dawson} = \frac{10f_i - 15f_{i-1} + 6f_{i-2} - f_{i-3}}{6h} \tag{F.22}$$

Que es la mencionada fórmula de cuatro puntos, cuya evaluación, estabiliza de manera notable la ecuación (F.20). La evaluación del término $\frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{v}^{\times^2} |\mathbf{v}| \right)$, de la ecuación (F.20), mediante esta fórmula, permite obtener resultados muy aceptables, no añadiendo difusión en exceso de manera significativa. Sin embargo un estudio profundo del operador (F.22) muestra que su rango de funcionamiento óptimo está limitado a un rango de F_n y que su efectividad se ve afectada de manera importante por el tamaño de la malla (ver [Let93]).

En la referencia [IOS99] se analiza en profundidad la fórmula (F.22), y se presenta una forma alternativa de escribirla, basada en esquemas centrados. Por otra parte en la referencias [Rav96] [Let93] se discuten varias alternativas a la formulación de Dawson, para la resolución de la ecuación de superficie libre.

Apéndice G

La Ecuación de Balance de Masa Estabilizada

El objetivo del presente apéndice es presentar una forma estabilizada alternativa para la ecuación de balance de masa. Esta forma ha demostrado tener muy buenas propiedades y es especialmente indicada para problemas en los que el incremento de tiempo crítico es ínfimo, ya que corrige este valor.

Las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y balance de masa (ecuaciones de Navier-Stokes) ya fueron presentadas¹ en el capítulo 3 del presente trabajo y se reproducen a continuación,

Balance de Cantidad de Movimiento

$$r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{G.1})$$

Balance de Masa

$$r_d - \frac{1}{2} h_{d_j} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{G.2})$$

donde

$$r_{m_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \quad (\text{G.3})$$

$$r_d = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad (\text{G.4})$$

Al objeto de simplificar la exposición, escribamos la ecuación de balance de masa, multiplicada por la densidad ρ , en la forma siguiente,

¹y su derivación se incluye en el apéndice J.

$$r_d - \frac{1}{2} h_{d,j} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{G.5})$$

$$r_d = \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$$

Para obtener una forma alternativa, útil por sus propiedades especiales para los propósitos del presente trabajo, de la ecuación (G.5) expresaremos las componentes del vector de longitudes características de la ecuación de balance de masa como,

$$h_{d,j} = -2t_{d,j}v_j \quad (\text{G.6})$$

donde t_d se denomina "tiempo intrínseco". De esta forma la ecuación (G.2) queda como sigue,

$$r_d + t_{d,j}v_j \frac{\partial r_d}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{G.7})$$

Por otra parte, derivando la ecuación (G.1), y despreciando los términos de mayor orden de derivación, se tiene que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_i} = & -\rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \simeq 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

De donde podemos escribir que,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) = & -\rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

Teniendo en cuenta que se cumple la relación,

$$v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) - \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{G.10})$$

Combinado (G.9) y (G.10), y despreciando los términos de orden superior, se puede escribir que,

$$v_i \frac{\partial r_d}{\partial x_i} = \rho v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) = -\rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{G.11})$$

Sustituyendo la relación (G.11) anterior en la ecuación (G.7), se tiene,

$$r_d - t_d \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \right] = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{G.12})$$

Que escrito en una forma más compacta, queda como,

$$r_d - t_d \frac{\partial r'_{m_i}}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{G.13})$$

$$r'_{m_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \quad (\text{G.14})$$

Ya se ha comentado, en diversos momentos, a lo largo del presente trabajo que, las ecuaciones anteriores son el punto de partida para la obtención de diversos métodos numéricos estabilizados para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible. La derivación de las ecuaciones estabilizadas ha sido hecha a nivel elemental, por lo que el proceso de discretización puede ser llevado a cabo con cualquiera de los métodos disponibles. En nuestro caso, las ecuaciones presentadas, serán resueltas utilizando el método de los elementos finitos. El procedimiento elegido para ello es conocido como algoritmo de pasos fraccionados, aunque puede comprobarse que diversos métodos de elementos finitos estabilizados estándar, que permiten interpolaciones de igual orden para velocidad y presión pueden derivarse a partir de la forma modificada de las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y de masa presentadas anteriormente.

Apéndice H

Condición de Contorno Estabilizada para la Ecuación de Convección Difusión

En este apéndice determinaremos una forma estabilizada de las condiciones de contorno tipo Neumann para el problema de convección difusión.

Estudiaremos en primer lugar el balance de flujos en un dominio triangular DEF como el representado en la figura H.1.

Este balance se puede expresar de la siguiente forma, teniendo en cuenta que $\overline{DE} = 2h_x$ y $\overline{FD} = 2h_y$,

$$q_N l = 2h_y [q_x + (u\varphi)]_C + 2h_x [q_y + (v\varphi)]_B + 2h_x h_y Q \quad (\text{H.1})$$

Donde q_N es el flujo normal prescrito, a través del contorno de longitud l ($\supset \Gamma_N$) y Q es el valor de la fuente distribuida, que se supone constante en el dominio DEF .

Por otra parte pueden derivarse las siguientes expansiones en serie de Taylor,

$$\begin{aligned} [q_x + (u\varphi)]_C &= [q_x + (u\varphi)](x - h_x, y) = \\ &= [q_x + (u\varphi)](x, y) - h_x \frac{\partial}{\partial x} [q_x + (u\varphi)] + 0(h_x^2) \\ [q_y + (v\varphi)]_B &= [q_y + (v\varphi)](x, y - h_y) = \\ &= [q_y + (v\varphi)](x, y) - h_y \frac{\partial}{\partial y} [q_y + (v\varphi)] + 0(h_y^2) \end{aligned} \quad (\text{H.2})$$

Sustituyendo (H.2) en (H.1), y teniendo en cuenta que la normal al contorno $\mathbf{n} = (n_x, n_y) = \left(\frac{2h_y}{l}, \frac{2h_x}{l}\right)$ se tiene que,

$$\begin{aligned} q_N &= n_x [q_x + (u\varphi)]_A + n_y [q_y + (v\varphi)]_A - \\ &\quad - \frac{2h_x h_y}{l} \left[\frac{\partial}{\partial x} [q_x + (u\varphi)]_A + \frac{\partial}{\partial y} [q_y + (v\varphi)]_A - Q \right] \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

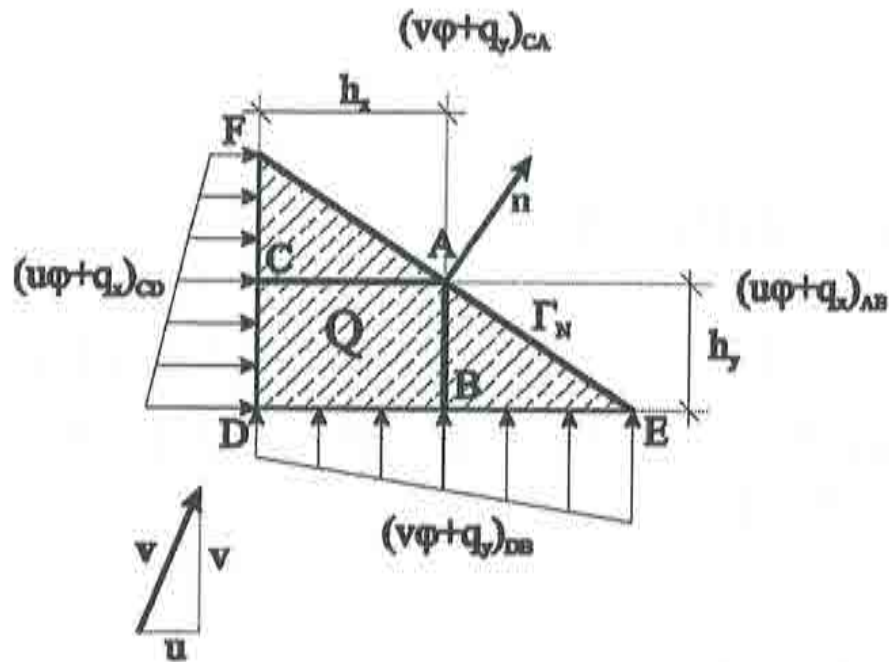


Figura H.1: Balance de flujos en un dominio triangular DEF .

donde, reordenando los términos, y teniendo en cuenta que $4h_x h_y = l(h_y n_x + h_x n_y)$, se puede escribir que,

$$\tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_A + \tilde{\mathbf{n}} \cdot (\tilde{\mathbf{v}}\varphi)_A - q_N - \frac{1}{2} (h_y n_x + h_x n_y) [\tilde{\nabla} \cdot [\mathbf{q} + (\mathbf{v}\varphi)]_A - Q] = 0 \quad (\text{H.4})$$

donde $\vec{q}_A = (q_x, q_y)$, $\vec{n} = (n_x, n_y)$, $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ y $\vec{v} = (u, v)$.

Sustituyendo la ley de Fourier [HU96], $\bar{\mathbf{q}} = -\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \bar{\nabla} \varphi$, donde $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ es el tensor de difusión, en la anterior ecuación (H.4), obtenemos la forma final de la ecuación de balance en el contorno, como,

$$\bar{\mathbf{n}} \cdot (\bar{\mathbf{v}}\varphi) - \bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{K}} \cdot \bar{\nabla}\varphi - q_N - \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{h}}) r = 0 \quad (\text{H.5})$$

donde se ha tomado $\tilde{\mathbf{h}} = (h_x, h_y)$ y,

$$r = \bar{\nabla} \cdot (\tilde{\mathbf{v}}\varphi) - \nabla \cdot (\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \bar{\nabla}\varphi) - Q \quad (\text{H.6})$$

Si consideramos constante el valor de \tilde{v} en el dominio DEF , la ecuación (H.5), se puede escribir como,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{n}} \cdot (\bar{\mathbf{v}}\varphi) - \bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{K}} \cdot \bar{\nabla}\varphi - q_N - \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{h}}) r &= 0 \\ r &= (\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\mathbf{K}} \cdot \bar{\nabla}\varphi) - Q\end{aligned}\quad (\text{H.7})$$

Una forma alternativa de la ecuación (H.6) se puede conseguir si se tiene en cuenta que¹ $h_x = h \frac{u}{|\bar{\mathbf{v}}|}$, $h_y = h \frac{v}{|\bar{\mathbf{v}}|}$, entonces se puede escribir,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{n}} \cdot (\bar{\mathbf{v}}\varphi) - \bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{K}} \cdot \bar{\nabla}\varphi - q_N - \frac{h}{2|\bar{\mathbf{v}}|} \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} r &= 0 \\ r &= (\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\mathbf{K}} \cdot \bar{\nabla}\varphi) - Q\end{aligned}\quad (\text{H.8})$$

Se hace evidente que la extensión de las formas estabilizadas de las ecuaciones de balance en el contorno (H.5)-(H.8) a problemas tridimensionales es inmediata, se puede comprobar de manera sencilla que en este caso las ecuaciones quedan como sigue,

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}\varphi) - \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla\varphi - q_N - \frac{h}{2|\mathbf{v}|} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} r &= 0 \\ r &= (\nabla \cdot \mathbf{v}) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla\varphi) - Q\end{aligned}\quad (\text{H.9})$$

donde se ha llamado $\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z)$, $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$, $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ y $\mathbf{v} = (u, v, w)$.

Por otra parte si en el contorno se impone sólo el flujo difusivo q_{ND} , la ecuación (H.9) anterior se simplifica, quedando en la forma,

$$-\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{K}} \cdot \nabla\varphi - q_{ND} - \frac{h}{2|\mathbf{v}|} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} r = 0 \quad (\text{H.10})$$

¹llamando $h = |\mathbf{h}|$.

Apéndice I

Balance Estabilizado de Cantidad de Movimiento en el Contorno

En este apéndice determinaremos una forma estabilizada de las condiciones de contorno tipo Neumann para la ecuación de balance de cantidad de movimiento del problema de Navier-Stokes en un dominio finito Ω , definido por las siguientes ecuaciones diferenciales,

Balance de Cantidad de Movimiento

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{I.1})$$

Balance de Masa

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{I.2})$$

Donde, en las ecuaciones (I.1) y (I.2) anteriores, se ha denominado $p = p(\mathbf{x}, t)$ al campo de presiones del fluido, $\underline{\tau}'$ a la parte desviadora (excluyendo el término isotrópico de presión) del tensor de tensiones del fluido y $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ al campo de fuerzas volumétricas.

Como se expone en el apéndice J del presente trabajo, las ecuaciones estabilizadas correspondientes a las (I.1) y (I.2) anteriores son,

Balance de Cantidad de Movimiento

$$r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{I.3})$$

Balance de Masa

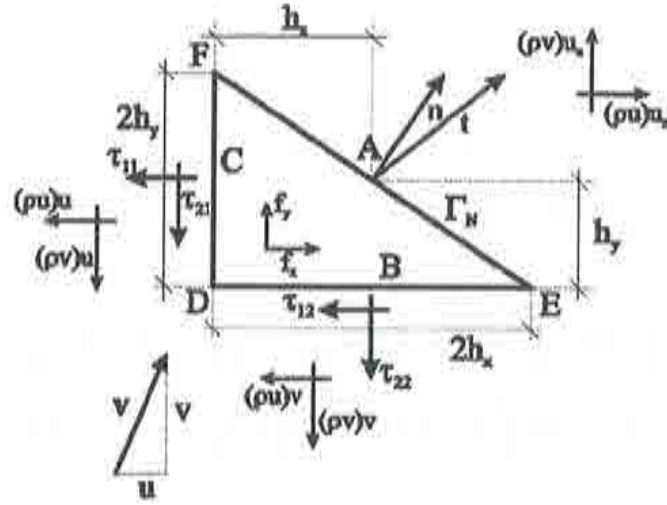


Figura I.1: Balance de flujos en un dominio triangular DEF , contiguo a un contorno tipo Neumann.

$$r_d - \frac{1}{2} h_{d_j} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{I.4})$$

donde

$$\begin{aligned} r_{m_i} &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \\ r_d &= \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

Para simplificar la exposición, analizaremos el caso bidimensional. Para ello estudiaremos en primer lugar el balance de flujos en un dominio triangular DEF , contiguo a un contorno tipo Neumann como el representado en la figura I.1.

Si suponemos que todas las fuerzas, tanto las debidas a la convección como las viscosas, varían linealmente a lo largo de los lados del triángulo EDF y teniendo en cuenta que $\overline{DE} = 2h_x$, $\overline{FD} = 2h_y$ y $\overline{EF} = l$, podemos escribir el balance de fuerzas como,

Balance de Cantidad de Movimiento según Ox

$$\begin{aligned} t_x l - 2h_y [\tau_{11}]_C - 2h_x [\tau_{12}]_B + 2h_x h_y f_x = \\ = [(\rho u) u_n] l - 2h_x [(\rho u) v]_B - 2h_y [(\rho u) u]_C \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

Balance de Cantidad de Movimiento según Oy

$$\begin{aligned} t_y l - 2h_x [\tau_{22}]_B - 2h_y [\tau_{21}]_C + 2h_x h_y f_y = \\ = [(\rho v) u_n] l - 2h_x [(\rho v) v]_B - 2h_y [(\rho v) u]_C \end{aligned} \quad (I.7)$$

donde $\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix}$ es el vector de tracciones prescritas en el contorno Γ_N , $\underline{\underline{\tau}} = \begin{Bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{Bmatrix}$ es el tensor de tensiones del fluido de densidad ρ , $\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$ el vector velocidad y $u_n = \tilde{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau}$.

Por otra parte, podemos escribir las siguientes expansiones,

$$\begin{aligned} [\tau_{11}]_C &= \tau_{11}(x - h_x, y) = \tau_{11} - h_x \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + 0(h_x^2) \\ [\tau_{21}]_C &= \tau_{21}(x - h_x, y) = \tau_{21} - h_x \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + 0(h_x^2) \\ [\tau_{22}]_B &= \tau_{22}(x, y - h_y) = \tau_{22} - h_y \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + 0(h_y^2) \\ [\tau_{12}]_B &= \tau_{12}(x, y - h_y) = \tau_{12} - h_y \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + 0(h_y^2) \\ [(\rho u) u]_C &= [(\rho u) u](x - h_x, y) = [(\rho u) u] - h_x \frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} + 0(h_x^2) \\ [(\rho u) v]_B &= [(\rho u) v](x, y - h_y) = [(\rho u) v] - h_y \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} + 0(h_y^2) \\ [(\rho v) v]_B &= [(\rho v) v](x, y - h_y) = [(\rho v) v] - h_y \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y} + 0(h_y^2) \\ [(\rho v) u]_C &= [(\rho v) u](x - h_x, y) = [(\rho v) u] - h_x \frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} + 0(h_x^2) \end{aligned} \quad (I.8)$$

Sustituyendo las expansiones (I.8) anteriores en (I.6) y (I.7) y tras simplificar, se llega a,

Balance de Cantidad de Movimiento según Ox

$$t_x = n_x \tau_{11} + n_y \tau_{12} - \frac{2h_x h_y}{l} \left[b_x + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} - \frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} - \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} \right] \quad (I.9)$$

Balance de Cantidad de Movimiento según Oy

$$t_y = n_y \tau_{22} + n_x \tau_{21} - \frac{2h_x h_y}{l} \left[b_y + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} - \frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} - \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y} \right] \quad (I.10)$$

Donde se ha hecho uso de las relaciones $n_x = \frac{2h_x}{l}$ y $n_y = \frac{2h_y}{l}$, de donde se cumple que,

$$\begin{aligned}(\rho u) u_n l &= 2h_x (\rho u) v + 2h_y (\rho u) u \\(\rho v) u_n l &= 2h_x (\rho v) v + 2h_y (\rho v) u\end{aligned}$$

Por otra parte, podemos escribir el término $\frac{h_x h_y}{2l}$, como,

$$\frac{2h_x h_y}{l} = \frac{1}{2} \left(\frac{2h_y}{l} h_x + \frac{2h_x}{l} h_y \right) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{h}}$$

Por lo que las ecuaciones (I.9) y (I.10) pueden escribirse como,

Balance de Cantidad de Movimiento según Ox

$$t_x = n_x \tau_{11} + n_y \tau_{12} - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{h}} \left[b_x + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} - \frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} - \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} \right] \quad (\text{I.11})$$

Balance de Cantidad de Movimiento según Oy

$$t_y = n_y \tau_{22} + n_x \tau_{21} - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{h}} \left[b_y + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} - \frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} - \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y} \right] \quad (\text{I.12})$$

y teniendo en cuenta que,

$$\begin{aligned}r_{m_1} &= b_x + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} - \frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} - \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} \\r_{m_2} &= b_y + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} - \frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} - \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y}\end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

Se pueden escribir las ecuaciones (I.11) y (I.12) en forma vectorial como,

$$\bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\underline{\underline{\tau}}} - \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{h}}) \mathbf{r}_m \quad (\text{I.14})$$

Señalar que, considerando el problema incompresible, haciendo ρ constante en (I.13), podemos escribir ,

$$\begin{aligned}r_{m_1} &= b_x + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} - \rho \frac{\partial u^2}{\partial x} - \rho \frac{\partial (uv)}{\partial y} \\r_{m_2} &= b_y + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} - \rho \frac{\partial (uv)}{\partial x} - \rho \frac{\partial v^2}{\partial y}\end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

Despreciando los términos de las derivadas de orden superior. Evidentemente, la condición de contorno (I.14) sigue siendo válida en este caso, teniendo en cuenta la nueva definición del vector r_m .

Por otra parte, la fórmula (I.14) puede ser extendida sencillamente al caso tridimensional, quedando en la forma,

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\tau}} - \frac{1}{2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) r_m \quad (\text{I.16})$$

Apéndice J

Derivación de las Ecuaciones de Navier Stokes estabilizadas

En este apéndice derivaremos la forma estabilizada de las ecuaciones de Navier-Stokes, en el caso bidimensional.

Como es conocido, el balance de cantidad de movimiento en un fluido dado, puede derivarse de la segunda ley de Newton, que define que la variación de la cantidad de movimiento en un dominio de control Ω es igual al total de las fuerzas exteriores que actúan sobre él. Esto puede escribirse en la siguiente forma [Oña96] [RG96],

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma} (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{b} d\Gamma \quad (\text{J.1})$$

Donde \mathbf{f} es la fuerza por unidad de volumen que actúa sobre el dominio de control Ω , y \mathbf{b} es la fuerza por unidad de superficie que actúa sobre la superficie de control $\Gamma = \partial\Omega$ cuya normal es \mathbf{n} . El fluido tiene una densidad ρ y su velocidad está dada por el campo $\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$.

Como es evidente, la ecuación (J.1) es aplicable a cualquier dominio genérico, y en particular al rectángulo $ABCD$ representado en la figura J.1. En este caso el balance de fuerzas en las direcciones horizontal y vertical, pueden escribirse (ver figura J.1) como,

$$\begin{aligned} \sum \text{Balance horizontal} &= \frac{h_y}{2} ([\tau_{11}]_A + [\tau_{11}]_B) - \frac{h_y}{2} ([\tau_{11}]_C + [\tau_{11}]_D) + \\ &\quad + \frac{h_x}{2} ([\tau_{21}]_A + [\tau_{21}]_B) - \frac{h_x}{2} ([\tau_{21}]_C + [\tau_{21}]_D) + h_x h_y f_1 \\ \sum \text{Balance vertical} &= \frac{h_x}{2} ([\tau_{22}]_A + [\tau_{22}]_C) - \frac{h_x}{2} ([\tau_{22}]_D + [\tau_{22}]_B) + \\ &\quad + \frac{h_y}{2} ([\tau_{12}]_A + [\tau_{12}]_B) - \frac{h_y}{2} ([\tau_{12}]_C + [\tau_{12}]_D) + h_x h_y f_2 \end{aligned} \quad (\text{J.2})$$

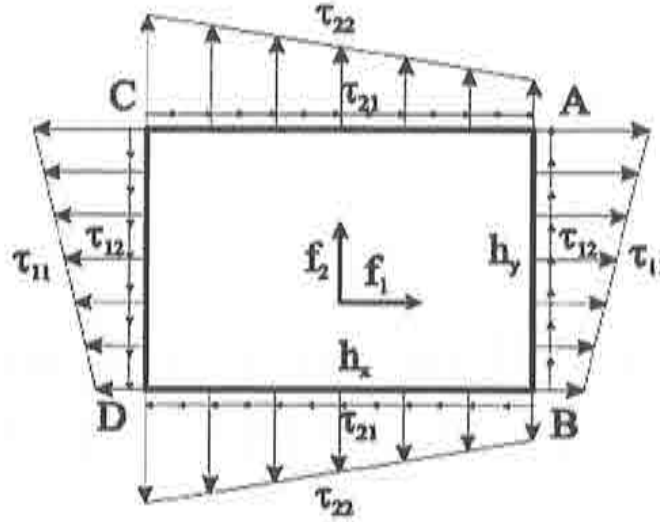


Figura J.1: Dominio rectangular donde se considera el balance de fuerzas.

donde $\underline{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{Bmatrix}$ es el tensor de tensiones del fluido.

Si expandimos en serie de Taylor de tercer orden, los valores de las tensiones de los balances (J.2) en los puntos B , C y D en función de los valores en el punto A , pueden escribirse las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned}
 [\cdot]_B &= [\cdot]_A - h_y \frac{\partial [\cdot]_A}{\partial y} + \frac{h_y^2}{2} \frac{\partial^2 [\cdot]_A}{\partial y^2} + O(h_y^3) \\
 [\cdot]_C &= [\cdot]_A - h_x \frac{\partial [\cdot]_A}{\partial x} + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 [\cdot]_A}{\partial x^2} + O(h_x^3) \\
 [\cdot]_D &= [\cdot]_A - h_x \frac{\partial [\cdot]_A}{\partial x} - h_y \frac{\partial [\cdot]_A}{\partial y} + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 [\cdot]_A}{\partial x^2} + \\
 &\quad + \frac{h_y^2}{2} \frac{\partial^2 [\cdot]_A}{\partial y^2} + h_x h_y \frac{\partial^2 [\cdot]_A}{\partial x \partial y} + O(h_x^3, h_y^3)
 \end{aligned} \tag{J.3}$$

Si aplicamos los desarrollos (J.3) anteriores a los balances (J.2), y teniendo en cuenta que A es un punto genérico, se puede escribir que,

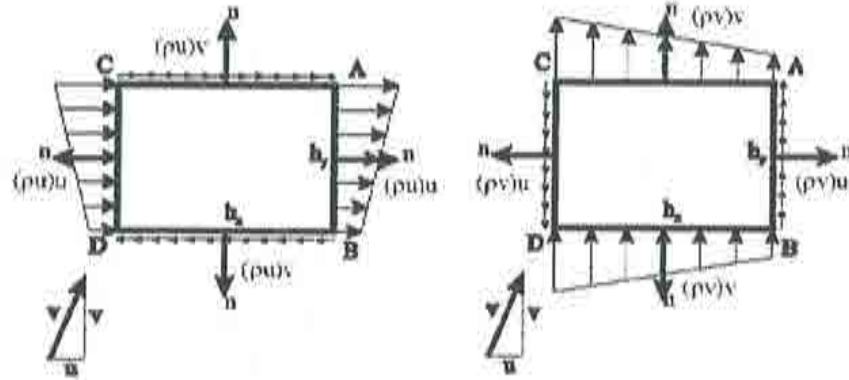


Figura J.2: Dominio de balance de cantidad de movimiento. En la derecha se representa el balance en la dirección vertical y a la izquierda el correspondiente a la dirección horizontal.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{h_x h_y} \sum \text{Balance horizontal} &= \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + f_1 - \\
 &- \frac{h_x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + f_1 \right] - \frac{h_y}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + f_1 \right] \\
 \frac{1}{h_x h_y} \sum \text{Balance vertical} &= \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + f_2 - \\
 &- \frac{h_x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + f_2 \right] - \frac{h_y}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + f_2 \right]
 \end{aligned} \tag{J.4}$$

De la misma manera, podemos escribir los balances de cantidad de movimiento en las direcciones horizontal y vertical, (ver figura J.2) como,

$$\begin{aligned}
 \sum \text{Balance horizontal} &= \\
 &= \frac{h_y}{2} ([(\rho u) u]_A + [(\rho u) u]_B) - \frac{h_y}{2} ([(\rho u) u]_C + [(\rho u) u]_D) + \\
 &+ \frac{h_x}{2} ([(\rho u) v]_A + [(\rho u) v]_B) - \frac{h_x}{2} ([(\rho u) v]_C + [(\rho u) v]_D) \\
 \sum \text{Balance vertical} &= \\
 &= \frac{h_y}{2} ([(\rho v) u]_A + [(\rho v) u]_B) - \frac{h_y}{2} ([(\rho v) u]_C + [(\rho v) u]_D) + \\
 &+ \frac{h_x}{2} ([(\rho v) v]_A + [(\rho v) v]_B) - \frac{h_x}{2} ([(\rho v) v]_C + [(\rho v) v]_D)
 \end{aligned} \tag{J.5}$$

Si como antes, aplicamos los desarrollos en serie de Taylor (J.3) a los balances (J.5), tenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_x h_y} \sum \text{Balance horizontal} &= \frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} - \\
&- \frac{h_x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} \right] - \frac{h_y}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} \right] \\
\frac{1}{h_x h_y} \sum \text{Balance vertical} &= \frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y} - \\
&- \frac{h_x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y} \right] - \frac{h_y}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y} \right]
\end{aligned} \tag{J.6}$$

Si sustituimos los balances de fuerzas (J.4) y cantidad de movimiento (J.6) en la ecuación (J.1), tenemos las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho u d\Omega + \frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \nabla \left[\frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} \right] &= \\
&= \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + f_1 - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \nabla \left[\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + f_1 \right] \\
\frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho v d\Omega + \frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y} - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \nabla \left[\frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y} \right] &= \\
&= \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + f_2 - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \nabla \left[\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + f_2 \right]
\end{aligned} \tag{J.7}$$

Si además, tenemos en cuenta que $\int_{\Omega} \rho u d\Omega \simeq h_x h_y \rho u$ y $\int_{\Omega} \rho v d\Omega \simeq h_x h_y \rho v$, podemos escribir,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial [\rho u]}{\partial t} + \frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \nabla \left[\frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} \right] &= \\
&= \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + f_1 - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \nabla \left[\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + f_1 \right] \\
\frac{\partial [\rho v]}{\partial t} + \frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y} - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \nabla \left[\frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y} \right] &= \\
&= \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + f_2 - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \nabla \left[\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + f_2 \right]
\end{aligned} \tag{J.8}$$

Que se puede escribir en una forma más compacta como,

$$\begin{aligned}
r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_j} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} &= 0 \quad i, j = 1, 2 \quad \text{en } \Omega \\
r_{m_i} &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i
\end{aligned} \tag{J.9}$$

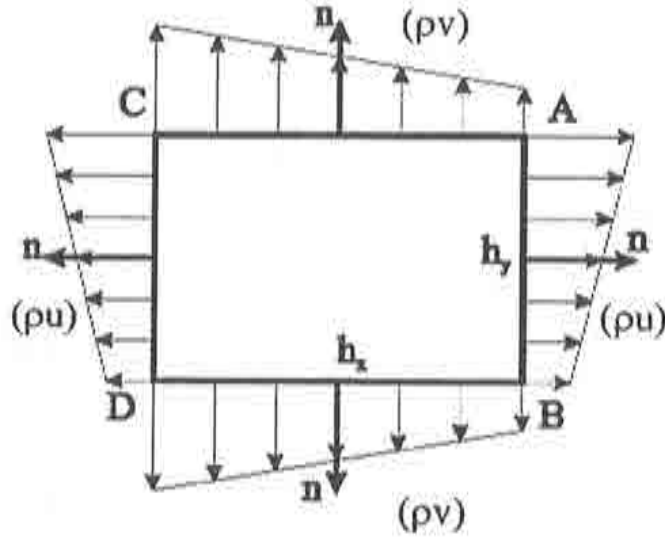


Figura J.3: Dominio sobre el que se calcula el balance de masa.

Donde se ha tenido en cuenta que la densidad del fluido (ρ) es constante.

En la anterior exposición se ha considerado que el dominio de balance para los flujos y fuerzas verticales es el mismo que para las horizontales. Es evidente que esto es una restricción, pues en el caso general puede existir una importante variación de las cantidades en una dirección y no en otra¹, no siendo los dominios de balance óptimos iguales. Una forma más general de las ecuaciones (J.9), puede escribirse como,

$$\begin{aligned} r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} &= 0 \quad i, j = 1, 2 \quad \text{en } \Omega \\ r_{m_i} &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \end{aligned} \quad (J.10)$$

Por otra parte, podemos derivar la ecuación de conservación de masa, a partir del balance en el dominio representado en la figura J.3.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum \text{Balance masa} = \frac{h_y}{2} ([\rho u]_A + [\rho u]_B) - \frac{h_y}{2} ([\rho u]_C + [\rho u]_D) + \\ &\quad + \frac{h_x}{2} ([\rho v]_A + [\rho v]_B) - \frac{h_x}{2} ([\rho v]_C + [\rho v]_D) \end{aligned} \quad (J.11)$$

Si aplicamos a la relación anterior (J.11), los desarrollos (J.3), y tenemos en cuenta que ρ es constante, podemos escribir,

¹Podemos imaginar, por ejemplo, un flujo tenga una dirección preferente o de simetría.

$$\begin{aligned} r_d - \frac{1}{2} h_{dj} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ r_d &= \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{J.12})$$

Es conveniente señalar que, el dominio de balance para el balance de masa no tiene porqué ser el mismo que para el balance de cantidad de movimiento.

Por otra parte, se hace evidente que las ecuaciones derivadas, pueden generalizarse al caso tridimensional, quedando en la siguiente forma,

$$\begin{aligned} r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} &= 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \\ r_d - \frac{1}{2} h_{dj} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ r_{m_i} &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \\ r_d &= \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{J.13})$$

Por último, podemos derivar fácilmente, esquemas estabilizados de mayor orden en el tiempo. Para ello, si integramos en el tiempo las ecuaciones (J.13) en la siguiente forma,

$$\begin{aligned} &\int_t^{t+\delta} \left[r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} \right] dt \simeq \\ &\simeq \frac{\delta}{2} \left[\left[r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} \right]^t + \left[r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} \right]^{t+\delta} \right] \simeq \\ &\simeq \delta \left[\left[r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} \right]^t + \frac{\delta}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} \right]^t \right] \end{aligned} \quad (\text{J.14})$$

$$\begin{aligned} &\int_t^{t+\delta} \left[r_d - \frac{1}{2} h_{dj} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} \right] dt \simeq \\ &\simeq \frac{\delta}{2} \left[\left[r_d - \frac{1}{2} h_{dj} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} \right]^t + \left[r_d - \frac{1}{2} h_{dj} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} \right]^{t+\delta} \right] \simeq \\ &\simeq \delta \left[\left[r_d - \frac{1}{2} h_{dj} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} \right]^t + \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[r_d - \frac{1}{2} h_{dj} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} \right]^t \right] \end{aligned} \quad (\text{J.15})$$

Por lo que podemos escribir las ecuaciones (J.13), como,

$$\begin{aligned}
 r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{mij} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial t} &= 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \\
 r_d - \frac{1}{2} h_{dj} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial r_d}{\partial t} &= 0 \quad \text{en } \Omega \\
 r_{m_i} &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \\
 r_d &= \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad j = 1, 2
 \end{aligned} \tag{J.16}$$

donde, para la obtención de las ecuaciones (J.16) se han despreciado los términos de mayor orden.

Apéndice K

Balance de Masa Cerca de un Contorno tipo Dirichlet

En este apéndice haremos una discusión sobre como expresar el balance de masa cerca de un contorno del dominio.

Para simplificar la exposición, analizaremos el caso bidimensional. Para ello estudiaremos el balance de masa en un dominio triangular DEF , contiguo a un contorno tipo Dirichlet (Γ_D) como el representado en la figura K.1, donde se prescribe la velocidad normal a u_n .

De la simple observación de la figura K.1, y teniendo en cuenta que $\overline{DE} = 2h_x$, $\overline{FD} = 2h_y$ y $\overline{EF} = l$, podemos derivar la siguiente relación,

$$\rho [u_C h_y + v_B h_x] = \rho l u_n \quad (\text{K.1})$$

Si suponemos que la velocidad varía linealmente a lo largo de los lados del triángulo EDF , podemos expresar las velocidades en los puntos B y C en función de su valor en A , de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} u_C &= u_A - \frac{h_x}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_A + O(h_x^2) \\ u_B &= u_A - \frac{h_y}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_A + O(h_y^2) \end{aligned} \quad (\text{K.2})$$

Si sustituimos las relaciones (K.2) anteriores en (K.1), y tenemos en cuenta que A es un punto genérico, podemos obtener,

$$(u n_x + v n_y) - \frac{1}{2} (h_x n_x + h_y n_y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = u_n \quad (\text{K.3})$$

Donde se ha hecho uso de las relaciones $n_x = \frac{h_x}{l}$ y $n_y = \frac{h_y}{l}$, siendo $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ el vector normal al contorno.

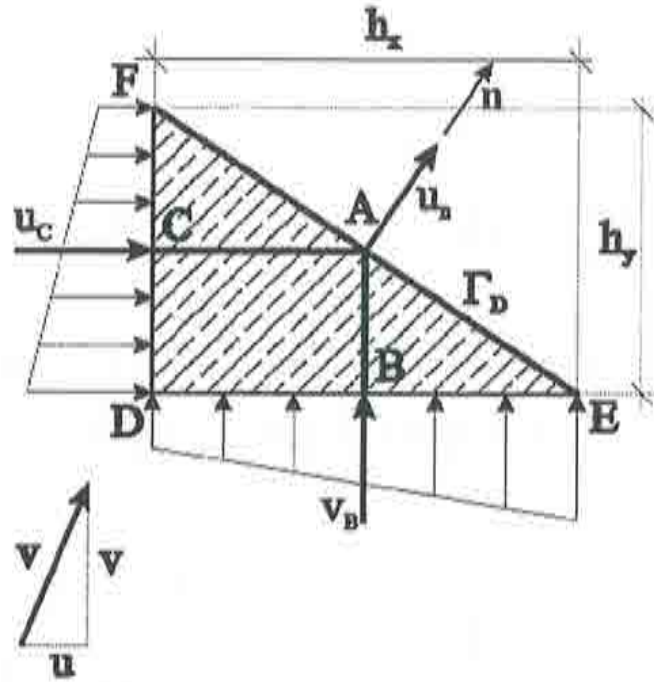


Figura K.1: Dominio de balance cerca de un contorno tipo Dirichlet.

Evidentemente la expresión (K.3) puede ser extendida de manera sencilla al caso tridimensional, quedando como sigue,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} r_d = u_n \quad (\text{K.4})$$

$$r_d = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Por otra parte, si expresamos las componentes del vector de longitudes características, en la siguiente forma¹,

$$h_j = -2t_d v_j \quad (\text{K.5})$$

donde t_d es el vector de tiempos intrínsecos, podemos reescribir la condición (K.4), como,

¹ por simplificar la exposición se usará en lo siguiente notación de índices y se aplicará la convención de Einstein de suma para los índices repetidos en productos y derivadas. Así, por ejemplo, $h_{d_j} \frac{\partial r_{d_i}}{\partial x_j} = \sum_j h_{d_j} \frac{\partial r_{d_i}}{\partial x_j}$.

$$v_j n_j + t_{dj} v_j n_j r_d = u_n \quad (\text{K.6})$$

$$r_d = \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$$

Si además consideramos la ecuación de balance de cantidad de movimiento estabilizada, cuya expresión se deriva en el apéndice G, quedando en la forma siguiente,

$$r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{K.7})$$

$$r_{m_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i$$

Podemos escribir, despreciando los términos de orden superior que,

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \simeq 0 \quad (\text{K.8})$$

y combinado (K.8) con (K.6), obtener,

$$v_i n_i = v_{ei}(\mathbf{x}, t) n_i + \frac{t_{di}}{\rho} n_i r'_{m_i} \quad \text{en } \Gamma_{D_n} \times (0, t) \quad (\text{K.9})$$

$$r'_{m_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i$$

Apéndice L

Un Procedimiento para el Cálculo de los Parámetros de Estabilización

En este apéndice presentaremos un procedimiento iterativo para el cálculo de los parámetros de estabilidad del método de cálculo finitesimal. Para ello fijémonos primero en un problema unidimensional estabilizado genérico, definido por,

$$r(\varphi) - \frac{h}{2} \frac{dr}{dx}(\varphi) = 0 \quad 0 \leq x \leq l \quad (\text{L.1})$$

Si conocemos una solución aproximada φ_0 del problema (L.1), su evaluación resulta en,

$$r(\varphi_0) - \frac{h}{2} \frac{dr}{dx}(\varphi_0) = r_\Omega \quad 0 \leq x \leq l \quad (\text{L.2})$$

Por otra parte, definiremos la media del residuo de una solución numérica particular sobre un elemento Ω^e , como,

$$\bar{r}^e = \frac{1}{\Omega^e} \left| \int_{\Omega^e} r_\Omega d\Omega \right| \quad (\text{L.3})$$

Si sustituimos la ecuación (L.2) en (L.3), tenemos,

$$\bar{r}^e = r^e(\varphi_0) - \left[\frac{h}{2} \frac{dr}{dx}(\varphi_0) \right]^e \quad (\text{L.4})$$

donde, hemos llamado,

$$a^e = \frac{1}{\Omega^e} \left| \int_{\Omega^e} a_\Omega d\Omega \right| \quad (\text{L.5})$$

Si consideramos, por simplicidad, que h es constante por elementos, podemos escribir (L.4) como,

$$\bar{r} = r^e(\varphi_0) - \frac{h^e}{2} \left[\frac{dr}{dx}(\varphi_0) \right]^e \quad (\text{L.6})$$

Supongamos ahora, que hemos encontrado una solución numérica φ_1 , mejorada¹, entonces, debe cumplirse que,

$$\bar{r}^e(\varphi_0) - \bar{r}^e(\varphi_1) \geq 0 \quad (\text{L.7})$$

Sustituyendo la relación (L.4) en (L.7), podemos obtener una expresión para la longitud característica del elemento, dada por,

$$h^e \geq \frac{2(r^e(\varphi_1) - r^e(\varphi_0))}{\left[\left(\frac{dr(\varphi_1)}{dx} \right)^e - \left(\frac{dr(\varphi_0)}{dx} \right)^e \right]} \quad (\text{L.8})$$

Puede demostrarse (ver [Oña98a]) que la relación (L.8) se cumple para valores mayores que el crítico en caso de la ecuación de convección difusión homogénea con coeficientes constantes.

Si expresamos la longitud característica en función de una dimensión típica del elemento l^e , como,

$$h^e = \alpha^e l^e$$

podemos escribir (L.8) como,

$$\alpha^e \geq \frac{2(r^e(\varphi_1) - r^e(\varphi_0))}{l^e \left[\left(\frac{dr(\varphi_1)}{dx} \right)^e - \left(\frac{dr(\varphi_0)}{dx} \right)^e \right]} \quad (\text{L.9})$$

A partir de la relación (L.9) es posible desarrollar metodologías iterativas para la resolución del problema unidimensional estabilizado, como se muestra en [Oña98a] [OGI97b]. De la misma manera, es posible derivar esquemas para el cálculo de los parámetros de estabilidad en el caso general. La metodología propuesta en [OGI97c] [OGI97d] se basa en suponer en primera aproximación que el vector de longitudes características toma la dirección de la velocidad, para luego corregirlo.

Tomemos el problema general estabilizado, dado por,

¹Que puede obtenerse, por ejemplo, por un suavizado de la solución original.

$$r(\varphi) - \frac{1}{2}(\mathbf{h} \cdot \nabla) r(\varphi) = 0 \quad 0 \leq x \leq l \quad (\text{L.10})$$

Al igual que en el caso anterior, si conocemos una solución aproximada φ_0 del problema (L.10), su evaluación resulta en,

$$r(\varphi_0) - \frac{1}{2}(\mathbf{h} \cdot \nabla) r(\varphi_0) = r_\Omega \quad 0 \leq x \leq l \quad (\text{L.11})$$

Que sustituido en (L.3), resulta en,

$$\bar{r}^e = r^e(\varphi_0) - \left[\frac{1}{2}(\mathbf{h} \cdot \nabla) r(\varphi_0) \right]^e \quad (\text{L.12})$$

Si tomamos el mismo criterio (L.7) anterior y sustituimos en él la relación (L.12), tenemos que,

$$(\mathbf{h}^e \cdot \nabla) [r^e(\varphi_1) - r^e(\varphi_0)] \geq 2[r^e(\varphi_1) - r^e(\varphi_0)] \quad (\text{L.13})$$

Donde se ha supuesto, que \mathbf{h} es constante por elementos. Si, además, suponemos que $\mathbf{h}^e = \alpha_v^e l^e \frac{\mathbf{v}^e}{|\mathbf{v}^e|}$, donde \mathbf{v}^e es una velocidad media del elemento, la relación (L.13) puede escribirse como,

$$\alpha_v^e \geq \frac{2[r^e(\varphi_1) - r^e(\varphi_0)]}{l^e \left(\frac{\mathbf{v}^e}{|\mathbf{v}^e|} \cdot \nabla \right) [r^e(\varphi_1) - r^e(\varphi_0)]} \quad (\text{L.14})$$

Una vez calculado iterativamente² α_v^e , cumpliendo la relación (L.14), podemos corregir la suposición inicial hecha para \mathbf{h}^e , mediante la adición de un nuevo término según la dirección del gradiente de la variable, es decir,

$$\mathbf{h}^e = \alpha_v^e l^e \frac{\mathbf{v}^e}{|\mathbf{v}^e|} + \alpha_\varphi^e l^e \frac{\mathbf{v}_r^e}{|\mathbf{v}_r^e|}$$

donde $\mathbf{v}_r^e = \frac{r^e(\varphi)}{|\nabla \varphi|^2} \nabla \varphi$, de esta forma podemos calcular el valor de α_φ^e gracias a la relación,

$$\alpha_\varphi^e \geq \frac{\frac{2}{l^e} [r^e(\varphi_1) - r^e(\varphi_0)] - \alpha_v^e \left(\frac{\mathbf{v}^e}{|\mathbf{v}^e|} \cdot \nabla \right) [r^e(\varphi_1) - r^e(\varphi_0)]}{\left(\frac{\mathbf{v}_r^e}{|\mathbf{v}_r^e|} \cdot \nabla \right) [r^e(\varphi_1) - r^e(\varphi_0)]} \quad (\text{L.15})$$

obtenida a partir de (L.13).

Una exposición más detallada de esta metodología y de otras alternativas, junto con ejemplos de su aplicación puede encontrarse en [OGI97a] [OJI98].

²Sustituyendo el signo \geq por $=$, puede definirse un proceso iterativo que asegura que el error elemental no aumenta entre iteraciones.

Notación

La notación que se ha utilizado en la presente monografía es bastante estándar en la literatura sobre métodos numéricos en ingeniería. Sin embargo dado el carácter multidisciplinar de este trabajo, ha sido necesario introducir ciertas variantes a los símbolos utilizados clásicamente, por su coincidencia con los empleados en otros ámbitos.

Para la definición de la nomenclatura técnica naval, incluida en el presente trabajo, se ha utilizado el texto "International Towing Tank Conference. ITTC Symbols and Terminology List." [ITT97].

Como norma general se escriben los valores escalares en letra cursiva, mientras que los vectores se notan en dos formas; en negrita (\mathbf{v}) para la representación vectorial clásica, y en notación de índices (v_i). Respecto a los tensores de segundo orden, se notan, de igual modo, en forma vectorial, en negrita con doble subrayado ($\underline{\underline{a}}$) y en notación de índices a_{ij} . La elección de una u otra forma en una fórmula concreta se hará en función de la mayor simplicidad y claridad de su expresión. En general, se indica en el texto cuándo se ha introducido un cambio de notación vectorial a notación de índices y viceversa.

También indicar que, cuando se ha creído procedente, se ha aplicado la convención de Einstein de suma para los índices repetidos en productos y derivadas. Así, por ejemplo,

$$h_{d_j} \frac{\partial r_{d_i}}{\partial x_j} = \sum_j h_{d_j} \frac{\partial r_{d_i}}{\partial x_j}$$

La convención anteriormente mencionada sólo se ha aplicado a los índices i, j y k , al no ser que se indique expresamente lo contrario en el texto.

Cuando pueda dar lugar a confusión, se señalan con un acento " \sim " los vectores y operadores bidimensionales, frente a los tridimensionales que no lo llevan. Así distinguiremos, por ejemplo, $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ de $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$.

El espacio de las funciones de cuadrado integrable sobre un dominio Ω se denomina $L^2(\Omega)$, y la norma asociada a su producto interno se indica como,

$$\|f(x)\|_{L^2(\omega)} := \sqrt{\int_{\omega} f(x)^2 d\omega}$$

Se ha denominado $H^1(\Omega)$, al espacio de Sobolev de las funciones cuyas derivadas (en sentido distribucional) pertenecen a $L^2(\Omega)$, definido por,

$$H^1(\Omega) := \{\chi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \left[\|\chi\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{d\chi}{dx} \right\|_{L^2(\Omega)} \right] < \infty\}$$

Mientras que $H_0^1(\Omega)$ es el espacio de funciones de $H^1(\Omega)$ con traza nula en el contorno, esto es,

$$H_0^1(\Omega) := \{\chi \in H^1(\Omega) \mid \chi = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$$

Por otra parte, se notará con $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, la norma asociada a estos espacios,

$$\|f(x)\|_{H^1(\Omega)} := \|f(x)\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{df(x)}{dx} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

Además se ha notado como $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ a la norma puntual dada por,

$$\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

El resto de la notación, no incluida aquí, se explica en el texto.

A continuación, se incluye un pequeño glosario de símbolos utilizados en el presente trabajo.

Ω	Dominio de análisis
Γ	Contorno del dominio
Γ_D	Contorno del dominio donde se prescribe el campo de velocidades
Γ_M	Contorno del dominio donde se prescribe la velocidad normal
Γ_N	Contorno del dominio donde se prescriben las tensiones
Γ_P	Contorno del dominio donde se prescribe el campo de presiones
$\underline{\underline{\varepsilon}}(\cdot)$	Operador gradiente simétrico, de componentes $\varepsilon_{ij}(\cdot)$
∇	Operador gradiente tridimensional $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
$\frac{D}{Dt}$	Operador derivada sustancial o material
\otimes	Operador producto externo de tensores, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} = a_i a_j$
$:$	Operador contracción de tensores, $\underline{\underline{\mathbf{a}}} : \underline{\underline{\mathbf{a}}} = \sum_{i,j} a_{ij} a_{ij}$
F_n	Número de Froude definido como $F_n := \frac{ \mathbf{v} }{\sqrt{g L_r}}$
R_n	Número de Reynolds definido como $R_n := \frac{ \mathbf{v} L_r \rho}{\mu}$
γ	Número de Péclet $\gamma := \frac{ \mathbf{v} L}{2k}$
ξ	Módulo de Poisson

E	Módulo de Young
ρ	Densidad del fluido
μ	Viscosidad dinámica del fluido
ν	Viscosidad cinemática del fluido $\nu = \mu/\rho$
k	Coefficiente de conductividad térmica.
v	Coefficiente de convección, $v = \rho c$, donde c es el calor específico
L	Eslora o longitud característica del problema
p	Presión dinámica del fluido
p	Presión del fluido
\mathbf{v}	Vector velocidad del fluido (componentes (u, v, w) o bien (v_1, v_2, v_3))
t	Tiempo
η	Elevación de la superficie libre en un punto dado
$\underline{\underline{\tau}}'$	Parte desviadora del tensor de tensiones para fluidos newtonianos
$\underline{\underline{\tau}}^R$	Tensor de tensiones de Reynolds
$\underline{\underline{\tau}}$	Tensor de tensiones para fluidos newtonianos
σ	Tensión tangencial del fluido
\mathbf{t}	Vector de tracciones del fluido $\mathbf{t} = -p\mathbf{n} + \mathbf{n}\underline{\underline{\tau}}' = \mathbf{n}\underline{\underline{\tau}}$
τ'_{ij}	Componente i, j del tensor $\underline{\underline{\tau}}'$
τ^R_{ij}	Componente i, j del tensor $\underline{\underline{\tau}}^R$
τ_{ij}	Componente i, j del tensor $\underline{\underline{\tau}}$
$\underline{\underline{\mathbf{I}}}$	Tensor identidad

