

# El problema de medir la diversidad en conjuntos no dominados y una propuesta de solución

Giovanni Lizárraga · Salvador Botello · Pedro Perez

Recibido: Marzo 2010, Aceptado: Abril 2010  
©Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España 2010

**Resumen** Una propiedad muy importante de los conjuntos no dominados es su diversidad. Mientras mayor sea la diversidad, más rica es la información sobre las posibles soluciones a un problema multi-objetivo. Desde el inicio de la computación evolutiva multi-objetivo se han encontrado dificultades para evaluar la diversidad de los conjuntos no dominados. Muchas métricas diseñadas con este fin, fallan en ejemplos muy sencillos. En este trabajo revisamos en que consisten las principales fallas de las métricas de diversidad y damos una propuesta que no presenta estos problemas. Nuestra propuesta mide la diversidad de una forma diferente, considerando un hiper-volumen de influencia del conjunto, y tiene un comportamiento excelente como medida de desempeño. Se probó nuestra métrica usando un benchmark publicado en la bibliografía, teniendo un desempeño perfecto.

## THE PROBLEM OF MEASURING THE DIVERSITY OF A NON-DOMINATED SET AND A SOLUTION

**Summary** Diversity is a very important property for non-dominated sets. The diversity is a measure of how much information is contained in a non-dominated set.

---

Giovanni Lizárraga, Pedro Perez  
Corporación Mexicana de Investigación en Materiales S.A. de C.V.  
Ciencia y Tecnología 790, C.P. 25290, Saltillo, México  
Tel. 52 (844) 411-3200, Fax 52 (844) 4 16 77 12  
e-mail: glizarraga@comimsa.com; pperez@comimsa.com

Salvador Botello  
Centro de Investigación en Matemáticas  
Jalisco s/n, C.P. 36240, Guanajuato, México  
Tel. 52 (473) 732 7155 / 735 0800, Fax 52 473 732 5749  
e-mail: botello@ciimat.mx

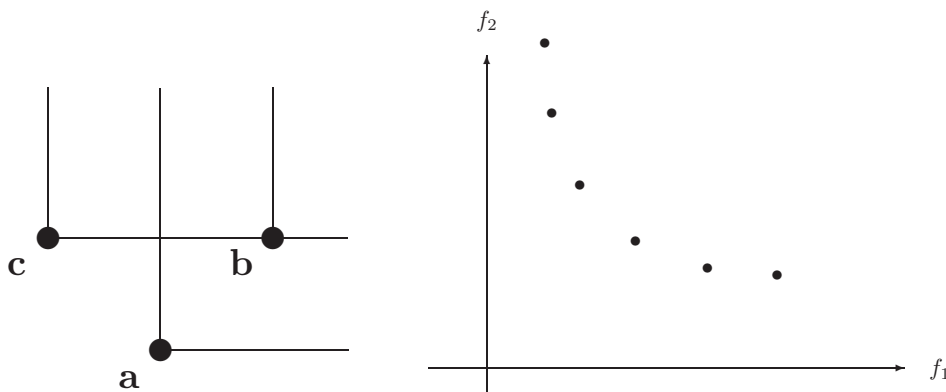
Evaluating diversity has been a difficult issue in multi-objective evolutionary computation. Many diversity performance measures fail in simple cases. In this work, we describe the most common problems in diversity performance measures and we propose a more robust approach. The problem with most performance measures is that they consist on evaluating the standard deviation of the distances between the elements of the non-dominated sets, or a similar calculation. This dependence on a standard deviation produces a high sensibility to small changes in the non-dominated sets. Our approach is based on an hyper-volume associated to the non-dominated set. The behavior of this hyper-volume is exactly what we expect from a diversity performance measure. We tested our approach using a benchmark published in bibliography, showing an exceptional performance.

## 1. Introducción

Optimización es un área de las matemáticas aplicadas, donde se busca encontrar la mejor solución a un problema, generalmente sujeto a restricciones. Optimizar un diseño de ingeniería es importante pues permite economizar recursos al mismo tiempo que se cumplen todos los requisitos de funcionalidad. Algunos ejemplos de como se ha utilizado la optimización en diseños de ingeniería pueden verse en [1], [2], [3].

Un caso especial en optimización es la Optimización Multi-Objetivo (OMO). En OMO, se trabaja con problemas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } F(x) &= \langle f_1(x), \dots, f_m(x) \rangle & (1) \\ \text{sujeto a : } & x \in X \subset R^n & (2) \end{aligned}$$



**Figura 1.** Ejemplos de dominancia (izquierda) y un conjunto no dominado (derecha)

donde  $X$  es el conjunto de todas las soluciones factibles al problema.

En OMO no existe una idea clara *a priori* de cómo identificar la solución óptima para un problema, pues se desconoce el compromiso entre las diferentes funciones objetivo  $f_i(x)$ . Para poder identificar la solución óptima, es común recolectar un conjunto de posibles soluciones. A este conjunto le llamamos conjunto no dominado. Al observar este conjunto de soluciones es posible tener una idea más clara de qué tipo de solución es la que más nos conviene, incluso elegir la solución final a nuestro problema de entre los elementos del conjunto no dominado.

Es evidente que la calidad y cantidad de la información presente en un conjunto no dominado es sumamente importante. Para un mismo problema y dependiendo del método de recolección, es posible obtener diferentes conjuntos. Por lo tanto, es necesario algún método para evaluar qué tan bueno es un conjunto no dominado. Esto con varios fines, como por ejemplo, tener una idea de qué tan rica es la información sobre la que se está tomando una decisión. También es importante para identificar qué métodos de recolección dan mejores resultados.

Las dos principales propiedades de un conjunto no dominado son convergencia y diversidad, cuya definición se dará más adelante. En este trabajo nos enfocaremos solamente en diversidad, probablemente la propiedad más difícil de evaluar. Las métricas diseñadas para medir diversidad fallan fácilmente en casos muy sencillos, por lo que es necesario idear nuevas métricas. En este trabajo explicamos algunas de las causas de estas fallas y proponemos una nueva métrica que es mucho más robusta.

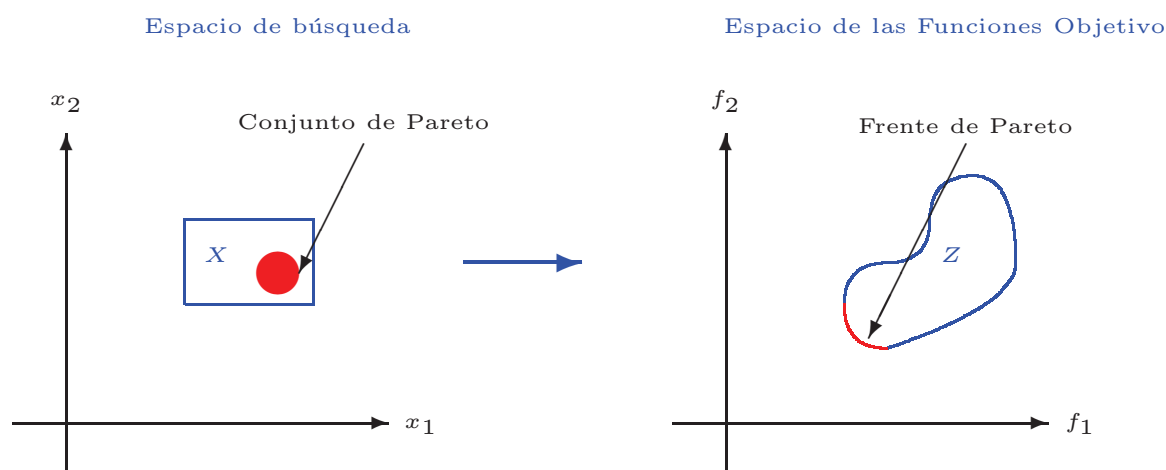
El resto del artículo se organiza como sigue: en la Sección 2 introducimos los conceptos más relevantes para este trabajo de la OMO. En la Sección 3 explicamos algunos de los problemas más comunes de las métricas

de diversidad. En la Sección 4 discutimos el concepto de diversidad y proponemos una nueva forma de evaluarla. En la Sección 5 sometemos nuestra propuesta a casos de prueba. Finalmente, damos nuestras conclusiones en la Sección 6.

## 2. Conceptos básicos

En Optimización Multi-Objetivo, cada solución factible  $x$  es evaluada en base a varias funciones objetivo, es decir, en base a un vector de números reales  $F(x) = \langle f_1(x), \dots, f_m(x) \rangle$ . Comparar dos soluciones  $x, y \in X$  es complicado si no existen preferencias por ninguna función objetivo. Cuando se desean comparar vectores, es común utilizar el Criterio de Optimalidad de Pareto (COP). COP describe una relación binaria entre vectores llamada dominancia. La definición de dominancia nos dice que un vector  $w$  domina a un vector  $z$  ( $w \text{ dom } z$ ) si  $z$  no es mejor que  $w$  en cualquiera de las funciones objetivo y que existe al menos una función objetivo para la cual  $w$  es mejor que  $z$ . En notación matemática (y tomando en cuenta que sólo consideramos funciones a minimizar) dominancia se define como:  $w \text{ dom } z \equiv \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, a_i \leq b_i \wedge \exists j \in \{1, 2, \dots, n\} \mid a_j < b_j$ , donde  $w, z \in R^m$  y  $a_i$  representa el  $i$ -ésimo elemento de  $a$ .

Es evidente que si un vector  $w$  domina a un vector  $z$ , entonces  $w$  es mejor que  $z$ . Desafortunadamente, aún con COP es posible tener vectores incomparables, es decir, casos donde ni  $w$  domina a  $z$  ni  $z$  domina a  $w$ . Un conjunto no dominado es un conjunto de vectores mutuamente incomparables. Para ejemplificar estos conceptos, en la Figura 1, lado izquierdo, se ven tres vectores  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Podemos ver que  $a \text{ dom } b$ ,  $c \text{ dom } b$ , pero  $a$  y  $c$  son incomparables bajo COP. En la misma figura, lado derecho, vemos un conjunto de puntos no dominados. Cualquier par de vectores en este conjunto son incomparables entre sí.



**Figura 2.** Elementos importantes de un problema multi-objetivo

En un problema multi-objetivo, podemos asumir sin temor a error, que una solución  $x$  es mejor que una solución  $y$  si  $F(x)$  domina a  $F(y)$ . De manera que es posible descartar a todas aquellas soluciones dominadas y concentrarnos en aquellas soluciones en  $X$  que no son dominadas por ninguna otra solución en  $X$ . Al conjunto de todas las soluciones factibles que no son dominadas por ninguna otra solución factible, se le llama Conjunto de Pareto (CP). Al la imagen de CP bajo el vector de funciones objetivo  $F(x)$  se le llama Frente de Pareto (FP). Una representación gráfica de los conceptos mencionados en este párrafo se muestran en la Figura 2.

La calidad de una solución factible depende de sus valores en las funciones objetivo, por lo que el resto de la discusión de este artículo se desarrolla en el espacio de las funciones objetivo. Para más información sobre Optimización Multi-Objetivo, recomendamos la lectura de Coello [4] y Deb [5].

Independientemente de cuáles sean las preferencias finales sobre las funciones objetivo, la solución óptima del problema será un elemento del Frente de Pareto. Por lo tanto, se busca obtener una aproximación al FP para clarificar preferencias y ser capaz de identificar la solución final al problema. Una aproximación al FP consiste en un conjunto no-dominado de tamaño finito. En el resto del artículo se usaran los términos aproximación y conjunto no dominado como equivalentes.

Se han propuesto muchas metodologías para aproximar el Frente de Pareto, sin embargo una pregunta frecuente es que tan buena es una aproximación. Medir la calidad de un conjunto no-dominado no es fácil. En general se consideran dos propiedades principales: convergencia, que se refiere a qué tan cerca está la aproximación al FP; y diversidad, que se refiere a qué tan

rica es la información que aporta la aproximación sobre el Frente de Pareto. En este artículo nos enfocamos en diversidad, y asumimos una situación donde la convergencia no es un factor de discriminación entre los conjuntos no-dominados que se están comparando. Un ejemplo de esta situación es cuando todas las aproximaciones a comparar son subconjuntos del Frente de Pareto.

La diversidad de un conjunto no-dominado se ha interpretado de varias maneras. En la siguiente sección mostramos algunas de estas interpretaciones, describimos algunas métricas de diversidad basadas en estas interpretaciones y explicamos cuales son los problemas que asociados a ellas.

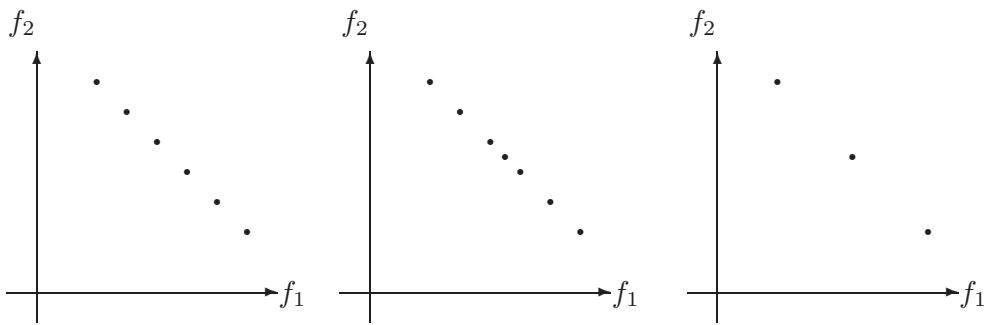
### 3. Medidas de diversidad

Una interpretación muy común de diversidad es que los elementos de un conjunto no dominado deben estar equiespaciados entre ellos. Existen muchos ejemplos de métricas basadas en esta idea. Por ejemplo la métrica de distribución de Schott ( $f$ ) [6], la métrica de distribución de Deb [7], la medida de dispersión basada en entropía de Farhang y Azarm [8] y muchas otras.

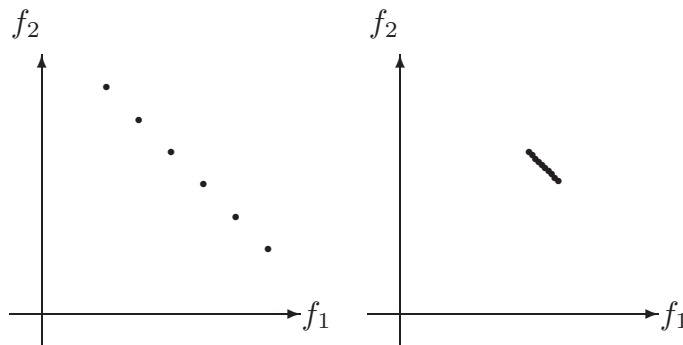
El problema con las métricas que miden la uniformidad en la distribución de los vectores, es que carecen de una propiedad muy importante. Esta propiedad es llamada monotonía [9] y se enuncia a continuación:

**Definición 1** Una métrica  $I$  tiene la propiedad de monotonía si al agregar nuevos elementos a un conjunto no dominado  $A$ , la valoración que da  $I$  a  $A$  mejora.

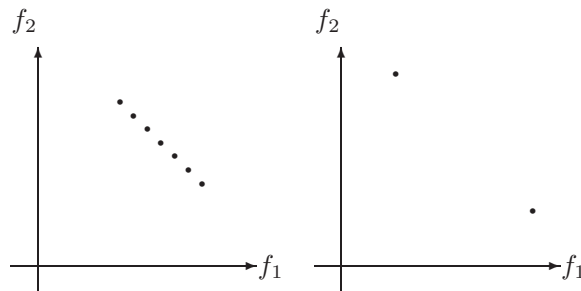
Evidentemente, al agregarle más elementos a un conjunto no dominado, la cantidad de información que el conjunto nos proporciona es mayor y, por lo tanto, debe



**Figura 3.** Tres conjuntos no dominados:  $A$  (izquierda),  $B$  (centro) y  $C$  (derecha)



**Figura 4.** Dos conjuntos no dominados con diferencias en el número de elementos:  $A$  (izquierda) 6 elementos,  $B$  (derecha) 10 elementos



**Figura 5.** Dos conjuntos no dominados con diferencias en extensión:  $A$  (izquierda),  $B$  (derecha)

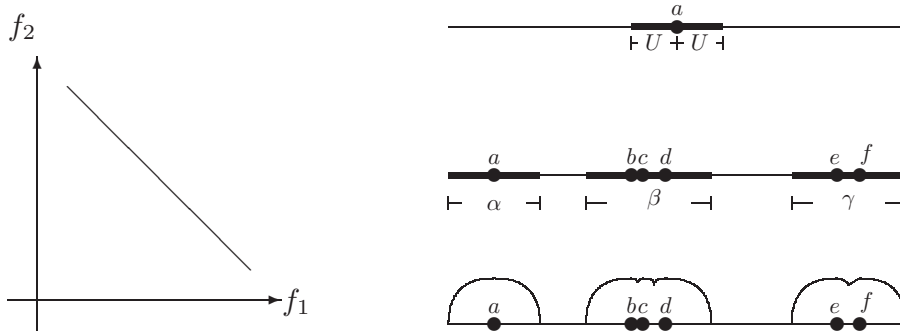
tener una mejor evaluación. Desafortunadamente, toda métrica que mida la uniformidad en la distribución de un conjunto no dominado viola el principio de monotonía. Para ver esto, considere la Figura 3. En esta figura vemos que  $B$  tiene los mismos elementos que  $A$  más un vector, por lo que  $B$  debe ser considerado mejor que  $A$ . Pero una métrica basada en uniformidad va a evaluar a  $A$  como mejor que  $B$  pues  $A$  tiene más uniformidad en sus elementos. Mientras mejor sea una métrica para evaluar uniformidad más fácilmente caerá en este error.

Un ejemplo más extremo se da cuando comparamos  $B$  con  $C$  en la Figura 3. Como  $C$  es más uniforme, será considerado como mejor que  $B$ , a pesar de que  $B$  contiene mucha más información. En general las medidas de uniformidad ignoran el número de elementos conte-

nidos en las aproximaciones. Una métrica que toma en cuenta uniformidad y número de elementos es el índice  $M_2$  de Zitzler [10], pero aún así carece de monotonía.

También se ha relacionado la diversidad con el número final de vectores generados. Esto debe manejarse con cuidado pues pueden darse casos como el mostrado en la Figura 4, donde el conjunto  $A$  tiene menos elementos que el conjunto  $B$ . Sin embargo, los elementos del conjunto  $B$  están aglomerados en un pequeño espacio, por lo que dan casi la misma información, mientras que los elementos de  $B$  se encuentran bien distribuidos. El número de vectores generados se usa en combinación con otras medidas de diversidad para poder hacer evaluaciones más confiables.

Otra interpretación que se le ha dado a la diversidad es el concepto de extensión. La extensión, como su nom-



**Figura 6.** Un Frente de Pareto continuo (izquierda). Propuestas para métricas de diversidad (derecha)

bre lo sugiere, se refiere a que tan amplia es la zona del Frente de Pareto que abarca un conjunto no dominado. Se han dado pocas propuestas en este sentido, como por ejemplo la Máxima Dispersión de Zitzler [10], que consiste en la distancia entre los valores extremos del conjunto no dominado. Otro ejemplo es la métrica de cobertura de Farhang y Azarm [11], que está basada en conos convexos para decidir cuando una aproximación tiene mejor extensión que otra. Medir solamente extensión puede dar un panorama limitado y engañoso de la diversidad. Para ver esto, obsérvese la Figura 5. Aquí vemos que  $A$  nos ofrece una gran cantidad de información sobre el Frente de Pareto, mientras que  $B$  sólo tiene dos vectores. Sin embargo,  $B$  se considera mejor desde el punto de vista de extensión por abarcar una distancia mayor con estos dos vectores, lo cual es contradictorio.

**4. Una nueva propuesta de diversidad**

En esta sección proponemos una métrica de diversidad que no esta basada en ninguna de las ideas presentada en la sección anterior, sino que parte de otro principio. Este principio combina, de forma natural, la noción intuitiva de cuando una aproximación tiene una mejor diversidad que otra.

Imagínese el caso hipotético donde podemos analizar todos los elementos del Frente de Pareto. Bajo esta condición especial, es factible pensar que podemos identificar la verdadera solución óptima para nuestro problema multi-objetivo. Llamémosle  $z^*$  a esta solución óptima. En la práctica,  $z^*$  no puede ser identificada de antemano pero se busca identificarla usando aproximaciones al Frente de Pareto, ya que  $z^*$  es un elemento de FP. Ahora, suponiendo un FP con un número infinito de elementos y considerando que las aproximaciones al Frente de Pareto son conjuntos finitos. ¿Cuál es la probabilidad de que  $z^*$  sea un elemento de una aproximación? La respuesta es, por supuesto cero. Excepto

en casos donde el Frente de Pareto tenga un número relativamente pequeño de elementos, podemos considerar que la solución óptima a un problema multi-objetivo no estará contenida en una aproximación. A lo más que podemos aspirar es a que la aproximación tenga una solución cercana a  $z^*$ .

*A priori*, cualquier elemento del Frente de Pareto puede ser la solución óptima. Por lo tanto, una buena aproximación al FP será aquella que proporcione vectores cercanos a cualquier elemento del FP. De manera que una aproximación tiene una mejor diversidad mientras mayor sea su capacidad de proporcionar vectores parecidos a cualquier elemento aleatorio del Frente de Pareto.

Se usa esta nueva definición de diversidad para construir una métrica robusta. Imagínese un Frente de Pareto continuo y recto (con fines de simplificar la explicación) como el que se muestra en la Figura 6, lado izquierdo. Para facilitar el análisis, se rota ese Frente de Pareto hasta dejarlo horizontal, como se muestra en la Figura 6, lado derecho, parte superior. Vamos a asociar a cada elemento de una aproximación una zona de influencia determinada por un radio  $U$ . Por ejemplo, al vector  $a$  en la Figura 6, lado derecho, parte superior, le vamos a asociar todos aquellos elementos del Frente de Pareto que estén a una distancia de  $a$  menor a o igual a  $U$ . Se dice que estos elementos están “cubiertos” por  $a$ . La interpretación de esta zona de influencia, es que para cualquier elemento  $z$  del FP cubierto por  $a$ , el vector  $a$  representa una solución equivalente, para la cual podemos tomar a  $a$  como un sustituto de  $z$ .

Dada una aproximación al Frente de Pareto como la mostrada en la Figura 6, lado derecho, parte central, podemos considerar como métrica de diversidad a la longitud de la unión de las zonas de influencia de todos los elementos de la aproximación. En la Figura 6, lado derecho, parte central, esta longitud sería igual a  $\alpha + \beta + \gamma$ . Esta métrica de diversidad es una función de beneficio que da un valor más alto a una aproximación que cubre más elementos del Frente de Pareto.

Una desventaja de esta métrica de diversidad es que, una vez que todos los elementos del FP están cubiertos, agregar más vectores a la aproximación no mejorará su valoración. Debido a esto se introduce una modificación. A cada elemento  $z$  del Frente de Pareto se le asigna un peso  $w(z)$ , cuyo valor depende del elemento más cercano de una aproximación  $A$ . Este peso está dado por la siguiente fórmula:

$$w(z) = \begin{cases} \sqrt{U^2 - d(z, a_{near})^2} & \text{si } d(z, a_{near}) \leq U \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (3)$$

donde  $d(x, y)$  es la distancia Euclidiana entre  $x$  y  $y$ ,  $a_{near}$  es el elemento de  $A$  más cercano a  $z$ . Y se redefine nuestra métrica de calidad, llamada  $B$ , como:

$$B(A) = \int_{z \in PF} w(z) dz \quad (4)$$

$B$  puede visualizarse como el área de la unión de los semicírculos que se muestran en la Figura 6, lado derecho, parte inferior. En la práctica,  $B$  puede ser muy difícil de calcular, pues necesitamos conocer el FP. Además que para diferentes problemas multi-objetivo, los Frentes de Pareto correspondientes pueden tener muchas topologías diferentes. Diferentes topologías pueden hacer aún más difícil calcular  $B$ . Para resolver esto, se hará un cambio más. En vez de definir nuestra métrica de diversidad a través de una función de peso  $w$ , simplemente se asocia un círculo de radio  $U$  a cada uno de los elementos de una aproximación, y se define una nueva métrica de diversidad, llamada  $B2$ , como el área de la unión de todos estos círculos. Nótese que  $B2$  no tiene las dificultades de cálculo que tiene  $B$ . Para calcular  $B2$  no es necesario conocer el Frente de Pareto y la topología de éste es irrelevante. El valor de  $B2$  depende únicamente de la posición de los vectores de la aproximación y de el valor de  $U$ . Una representación gráfica de  $B2$  para una aproximación es como se ve en la Figura 7.

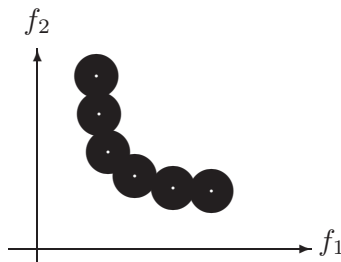


Figura 7.  $B2$

Ahora se generalizará la definición de  $B2$  para cualquier dimensión. Sea  $b(a, U)$  la bola de radio  $U$  cuyo centro es  $a$ . Sea  $\mu(X)$  la medida de un conjunto  $X$ , por ejemplo área, volumen, hipervolumen, etc. La definición de  $B2$  es la siguiente, para una aproximación  $A$ :

$$B2(A) = \mu\left(\bigcup_{a \in A} b(U, a)\right) \quad (5)$$

$B2$  tiene la propiedad de monotonía. Cada nuevo vector que se agrega a un conjunto no dominado agrega una mayor cantidad de área, por lo que la evaluación de una aproximación se incrementa conforme se incluyen nuevos elementos. Esto se puede ver en la Figura 8, donde se reproducen las aproximaciones de la Figura 3, pero con las bolas asociadas a los vectores. Podemos ver que el conjunto  $B$  tiene una mayor área respecto al conjunto  $A$  gracias a la aportación que hace el vector extra en  $B$ . Cuando comparamos  $B$  con  $C$  o  $A$  con  $C$ , vemos que  $C$  tiene una menor área debido a que tiene muy pocos elementos, a pesar de que éstos están muy bien dispersos. Por esto, nuestra propuesta es más robusta en estos casos.

También es fácil ver que  $B2$  es robusta en casos como el de la Figura 4, la cual reproducimos en la Figura 9, pero agregando bolas a los vectores. Como se puede apreciar, el conjunto  $B$  tiene poca área debido a que sus bolas asociadas están muy cerca unas de otras y se crean muchas intersecciones. Mientras que en el conjunto  $A$  se da muy poca intersección, ya que sus elementos están separados unos de otros.

Para casos como el de la Figura 5, nuestra propuesta también es robusta, pues aproximaciones que tengan elementos muy alejados pero que aportan poca información intermedia, tendrán áreas más pequeñas.

Un punto importante es cómo elegir el radio  $U$  de las bolas. Una de las razones por las que  $B2$  funciona, es por las intersecciones entre bolas. Conjuntos con buena diversidad tienen pocas intersecciones y una mayor área. Conjuntos con una diversidad pobre tienden a tener un número mayor de intersecciones y un área pequeña. Sin embargo, si  $U$  es demasiado pequeño, es posible que no se den intersecciones aún en conjuntos con diversidad pobre. Pueden sugerirse muchas formas de fijar el valor de  $U$ . En nuestro caso se decidió calcular el valor de  $U$  como el promedio de las distancias entre cada vector y su vecino más cercano. De esta manera pueden garantizarse intersecciones en conjuntos con elementos muy cercanos entre ellos.

Otro punto muy importante es la complejidad computacional. Calcular la medida de un conjunto de  $N$  de bolas tiene complejidad  $N \log N$  en dos dimensiones y  $N^2$  en tres dimensiones [12]. Para más de tres dimensiones no conocemos un algoritmo exacto, pero se puede

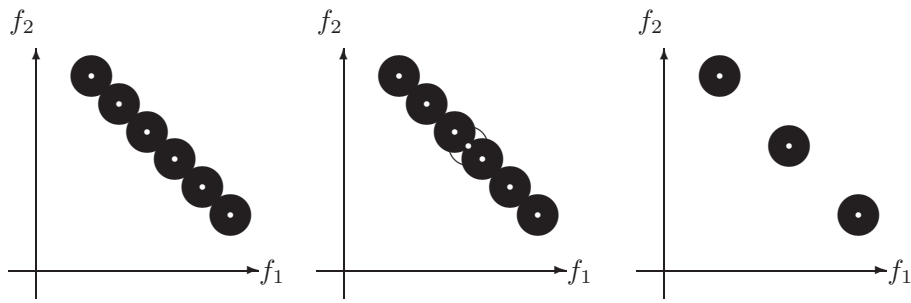


Figura 8. Tres conjuntos no dominados: A (izquierda), B (centro) y C (derecha)

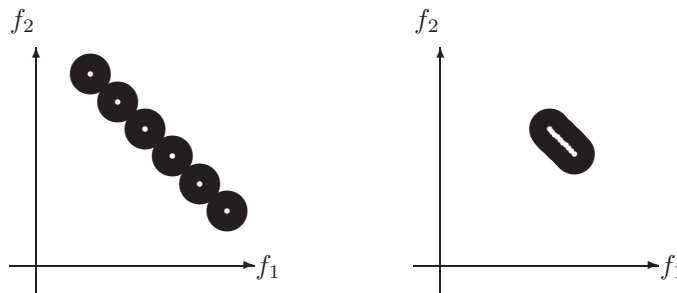


Figura 9. B2 aplicada en dos conjuntos no dominados con diferencias en extensión: A (izquierda), B (derecha)

aproximar con una integración Montecarlo en tiempo lineal [13].

### 5. Experimentos

Para evaluar la validez de nuestra propuesta, usamos algunos casos de pruebas publicados en [14]. Cada uno de estos casos consiste en varios conjuntos no dominados con diferentes grados de calidad, y es evidente a la vista que conjunto no dominado es mejor que otro. Para pasar las pruebas, una métrica debe evaluar los conjuntos para ordenarlos del mejor al peor correctamente. Usamos los casos de prueba 3, 4, 5, 6, 7 y 8. No usamos los casos de prueba 1 y 2 pues en estos casos se evalúa convergencia. Cada caso de prueba cuenta con 5 conjuntos no dominados: A, B, C, D y E, excepto el caso de prueba 6 que solo tiene dos conjuntos: A y B.

Para representar las relaciones de calidad entre conjuntos no dominados se usan los símbolos “ $>$ ” y “ $=$ ”. Por ejemplo,  $A > B$  significa que A es mejor que B;  $A = B$  significa que A es igual de bueno que B. También se crean cadenas de relaciones como por ejemplo  $A > B = C > D = E$ , que significa que A es mejor que todos los demás conjuntos; B y C son igual de buenos y superiores a D y E; y D y E son igual de buenos.

Cada caso de prueba tiene una versión en dos dimensiones y en tres dimensiones. La descripción de cada caso de prueba puede encontrarse en [14]. En la Tabla 1, se muestran los resultados esperados de los casos

Tabla 1. Resultados correctos de los casos de prueba

Prueba	Dos dimensiones	Tres dimensiones
3	$A > B > C > D > E$	$A > B > C > D > E$
4	$A > B > C > D > E$	$A > B > C > D > E$
5	$E > D > C > B > A$	$E > D > C > B > A$
6	$A = B$	$A = B$
7	$A = B = C = D = E$	$A = B = C = D = E$
8	$E > D > C > B > A$	$E > D > C > B > A$

Tabla 2. Resultados de la métrica B2

Prueba	Dos dimensiones	Tres dimensiones
3	$A > B > C > D > E$	$A > B > C > D > E$
4	$A > B > C > D > E$	$A > B > C > D > E$
5	$E > D > C > B > A$	$E > D > C > B > A$
6	$A = B$	$A = B$
7	$A = B = C = D = E$	$A = B = C = D = E$
8	$E > D > C > B > A$	$E > D > C > B > A$

Tabla 3. Resultados para la métrica de distribución de Schott

Prueba	Dos dimensiones	Tres dimensiones
3	$D > C > B > A > E$	$E > D > C > B > A$
4	$C > D > E > B > A$	$E > D > B > C > A$
5	$E > D > C > B > A$	$E > D > C > B > A$
6	$A = B$	$A = B$
7	$A = B = C = D = E$	$A = B = C = D = E$
8	$E > D > C > B > A$	$E > D > C > B > A$

de prueba. En la Tabla 2, se presentan los resultados para nuestra propuesta. A modo de comparación, en la Tabla 3 se muestran los resultados para la métrica de distribución de Schott ( $f$ ) [6]. Como se puede observar,

nuestra propuesta resuelve correctamente todos los casos de prueba, mientras que  $f$  falla en los casos 3 y 4. Esto demuestra lo confiable y robusta que es nuestra métrica de diversidad.

## 6. Conclusiones

En este trabajo expusimos varios de los problemas más frecuentes que se encuentran en las métricas de diversidad para conjuntos no dominados. Con el objetivo de crear una nueva propuesta, analizamos el concepto de diversidad y lo redefinimos como la capacidad de un conjunto no dominado de proveer soluciones parecidas a cualquier elemento del Frente de Pareto. En base a esta definición, construimos una nueva métrica de diversidad que tiene varias propiedades deseables y demostró ser robusta en casos engañosos. Para evaluar nuestra propuesta usamos algunos casos de prueba publicados en la literatura, los cuales resolvió correctamente, superando a otra métrica muy citada en la bibliografía.

## Referencias

1. Estupiñan J., Oñate E., Suárez B. (1998) Optimización topológica mediante algoritmos genéticos, estrategias evolutivas y el método de la burbuja. *Rev. Internac. de Mét. Num. para Cál. y Dis. Ing.* 14(4):427-438
2. Botello S., Marroquin J.L., Oñate E., Horebeek J. (1999) Un modelo de optimización estocástica aplicado a la optimización de estructuras de barras prismáticas. *Rev. Internac. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.* 15(4):425-434
3. Botello S., Esqueda H., Hernández A., Zarate F., Valdés J.G. (2007). Estrategias evolutivas aplicadas en la optimización de problemas que involucran interacción fluido-estructura. *Rev. Internac. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.* 23(4):415-428
4. Coello C.A., Van Veldhuizen D., Lamont G.B. (2002) *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*. Kluwer Academic/Plenum Publishers. New York. USA
5. Deb K. (2001) *Multi-objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. John Wiley and Sons. Chichester. UK
6. Schott J.R. (1995) Fault tolerant design using single and multicriteria genetic algorithm optimization. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
7. Deb K., Agrawal S., Pratab A., Meyarivan T. A Fast Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization: NSGA-II. In *Proceedings of the Parallel Problem Solving from Nature VI Conference*. Lecture Notes in Computer Science. 1917:849–858. Schoenauer M., Deb K., Rudolph G., Yao X., Lutton E., Merelo J.J., Schwefel H-P. (Eds.) Springer. Paris. France.
8. Farhang-Mehr A., Azarm S. (2002) Diversity assessment of pareto optimal solution sets: an entropy approach. *IEEE International Conference on E-Commerce Technology*. 1:723–728
9. Knowles ., Corne D. (2002) On Metrics for Comparing Non-dominated Sets. In *Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation (CEC'2002)*. 1:711–716
10. Zitzler E. (1999) Evolutionary Algorithms Multiobjective Optimization: Methods and Applications. PhD thesis. Swiss Federal Institute of Technology (ETH).
11. Mehr A.F., Azarm S. (2003) Minimal sets of quality metrics. In *EMMO 2003*. Lecture Notes in Computer Science. 2632: 405–417. C.M. Fonseca *et al.* (Eds.)
12. Avis D., Bhattacharya B.K., Imai H. (1988) Computing the volume of the union of spheres. *The Visual Computer*. 3(6):323–328
13. Spirakis P.G. (1985) The volume of the union of many spheres and point inclusion problems. In *Proceedings on STACS 85 2nd annual symposium on theoretical aspects of computer science*. p. 328–338, New York, NY. USA. Springer-Verlag. New York, Inc.
14. Lizárraga G., Hernández A., Botello S. (2008) A set of test cases for performance measures in multiobjective optimization. In *MICAI '08: Proceedings of the 7th Mexican International Conference on Artificial Intelligence*. p. 429–439. Berlin. Heidelberg. Springer-Verlag.