

UN MÉTODO DE REGULARIZACIÓN DE MALLAS DE ELEMENTOS FINITOS EN MODELOS TRIDIMENSIONALES SÓLIDOS

MARÍA V. HORMAZA*
ENRIQUE AMEZUA**
RAFAEL AVILÉS**
y
ALFONSO HERNÁNDEZ**

**Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales y de Ingenieros de Telecomunicación
Alameda Urquijo, s/n, 48013 Bilbao, España*

***Departamento de Ingeniería Mecánica
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales y de Ingenieros de Telecomunicación
Alameda Urquijo, s/n, 48013 Bilbao, España*

RESUMEN

La importancia que tiene en el análisis por elementos finitos la obtención de forma automática de una malla de calidad contrastada ha originado que en los últimos años se haya dedicado un gran esfuerzo al estudio del mallado adaptivo, de modo que se pueda corregir una malla a partir de la cuantificación de alguna magnitud representativa de la calidad de la misma, siguiendo algún esquema de refinado de malla. Lógicamente, los resultados de este proceso serán tanto más válidos cuanto mayor sea la calidad de la malla de partida. Este artículo expone un método de corrección de mallas de elementos finitos a partir de la modificación de las coordenadas de determinados nudos del mallado con el fin de obtener elementos con una relación de aspecto tan próxima a la unidad como sea posible. El método es completamente automático y aplicable a cualquier malla de elementos finitos correspondiente a un modelo 3D sólido, si bien su adaptación a otro tipo de modelos (por ejemplo, superficies o modelos planos) es inmediata. El resultado es la obtención de una malla de mejor calidad, que puede utilizarse ventajosamente como punto de partida en un esquema de mallado adaptivo, dando lugar a resultados más aceptables.

SUMMARY

The method here proposed for the correction of finite-element meshes is based on the modification of the coordinates of certain mesh nodes, the aim being to derive elements with an aspect relation as close as possible to unity. This entirely automatic method can be applied to any finite-element mesh corresponding to a 3-D solid model, while furthermore it is quickly

Recibido: Junio 1994

adaptable to various other types, including plane models of surfaces. The outcome in each case is a mesh of higher quality, a sound basis for a self-adaptive mesh scheme and a promise of better results.

INTRODUCCIÓN

No es necesario hacer especial hincapié en la importancia y extensión que hoy en día tiene el método de los elementos finitos para resolver gran cantidad de problemas complejos de ingeniería; resulta innecesario, igualmente, insistir en el hecho de que la etapa más costosa de dicho método consiste en la elaboración de una malla adecuada de elementos finitos que represente lo más fielmente posible el modelo a analizar. En este contexto cabe señalar que en los últimos años se han desarrollado diversos métodos que con la ayuda del computador, así como de los cada vez más potentes paquetes de CAD, permiten crear con comodidad mallas de elementos para modelos de geometría compleja.

Obviamente, el desarrollo de técnicas de mallado para modelos tridimensionales se ha producido más lentamente que para modelos planos, y ello por dos razones fundamentales:

- En primer lugar, la dificultad de almacenar y disponer de forma cómoda de todos los datos necesarios para la correcta definición de un modelo tridimensional. En este sentido cabe destacar que los modernos sistemas de un modelo sólido han resuelto en gran parte esta dificultad al permitir sus bases de datos disponer de manera eficaz de la información necesaria para definir correctamente los modelos tridimensionales.
- En segundo lugar, la propia dificultad de desarrollar un método de mallado válido para discretizar un sólido de forma general o con el menor número posible de restricciones.

Considerando los métodos de mallado referentes a modelos tridimensionales sólidos, estos pueden agruparse de la siguiente manera:

- **Métodos de “triangulación” de volumen:** constan habitualmente de dos etapas: una primera de generación de nudos y una segunda de creación de tetraedros a partir de los nudos anteriores. En esta segunda etapa, la triangulación (o tetraedrización) de Delaunay es una de las técnicas más utilizadas^{1,2,3}.
- **Métodos de extracción de elementos:** se basan en un conjunto de operadores que extraen tetraedros a partir de la información topológica y geométrica referente al sólido^{4,5}.
- **Métodos de descomposición espacial recursiva:** desarrollados en un principio por Shepard y Yerry; en esta familia pueden englobarse diversos métodos^{6,7,8,9,10}, todos ellos basados en la aproximación de un sólido mediante celdas de diferente tamaño, obtenidas mediante la subdivisión recursiva de una región del espacio que envuelve el objeto a mallar.

Los métodos correspondientes a los dos primeros grupos producen mallas formadas exclusivamente por tetraedros, mientras que los correspondientes al grupo tercero dan lugar a mallados con diferentes tipos de elementos, en general hexaedros, tetraedros, prismas y pirámides⁸.

Cualquiera de los métodos indicados produce una malla que puede contener un determinado porcentaje (pequeño en general) de elementos distorsionados, los cuales habitualmente se concentrarán en torno a los contornos del modelo; pero puesto que las solicitaciones y restricciones exteriores en un modelo se aplican generalmente sobre dichos contornos, la existencia de tales distorsiones puede dar lugar a modelos de elementos finitos defectuosos, en los que los resultados obtenidos se alejen notablemente de la realidad.

La corrección de la calidad de las mallas de elementos finitos es objeto de estudio desde hace más de 15 años. En general, lo que se hace es localizar las zonas más deficientes de la malla (para lo cual suele ser necesario efectuar un análisis de elementos finitos) y corregirlas mediante un mallado más denso o con elementos de mayor orden (o bien combinando simultáneamente ambas técnicas) dando lugar a los diversos esquemas de refinado de mallas.

Ahora bien, es evidente que los esquemas de refinado de malla producirán mejores resultados cuanto mayor sea la calidad de la malla de partida. En este sentido una mejora sustancial consiste en obtener una malla en la que los elementos posean una buena relación de aspecto, y por tanto una adecuada regularidad. Los métodos de Generación Laplaciana permiten mejorar la regularidad de la malla, si bien con ellos resulta difícil controlar una posible variación de la densidad del mallado en distintas zonas del modelo.

El método aquí propuesto corrige una malla de elementos finitos mediante la modificación de las coordenadas de determinados nudos. Para ello, como se verá más adelante, se establece una analogía entre el problema a resolver y la deformación que sufre un sistema mecánico formado por barras articuladas entre sí y sometidas a fuerzas en sus extremos. El método considera las diferentes densidades de mallado dentro del modelo, dando como resultado una malla de elementos con mejor relación de aspecto.

MÉTODO DE LAS RESTRICCIONES DE DISTANCIA

El resultado de la aplicación de métodos automáticos de mallado puede provocar la aparición de una cierta cantidad de elementos cuya forma es poco regular. Esto es debido en general a la necesidad del método de ajustarse de forma precisa a la geometría del modelo, o bien a la existencia de regiones con diferente densidad de mallado, lo que provoca la aparición de "zonas de transición" en las que la malla presenta una calidad deficiente.

Para eliminar estos defectos pero sin alterar el número de nudos y elementos del mallado se ha creado un método que se basa en la modificación automática de las coordenadas de los nudos afectados. Este método, denominado "método de las restricciones de distancia", parte en primer lugar de la detección de los elementos

defectuosos, para lo cual se debe establecer un criterio que permita determinar qué elementos del conjunto se consideran así.

La regularidad de un elemento viene determinada por la longitud de sus lados y el valor de los ángulos que estos lados forman entre sí. El método que se va a exponer considera que el mallado a corregir estará integrado por hexaedros, tetraedros, pirámides o prismas de base triangular, si bien su aplicación es válida para cualquier tipo de elemento. En general, al modelo a mallar se le hace corresponder una determinada densidad de mallado, que puede variar en distintas regiones del modelo. Esta densidad supone asignar un tamaño ideal a los lados de cada elemento L en el caso hipotético de que éstos fueran perfectamente regulares.

La definición del elemento ideal no plantea ningún problema en el caso de hexaedros. Sin embargo, el criterio no está tan claro en el caso de prismas de base triangular, tetraedros o pirámides. En el método presentado se ha optado por una solución concreta, en la cual se ha considerado que el prisma es la mitad de un cubo, mientras que la pirámide está definida de modo que los lados de la base tengan la misma dimensión que la altura, coincidiendo dicha base con la cara de un cubo ideal. Para el tetraedro se considera que el elemento ideal es aquél en que todos sus lados tienen una dimensión igual al lado de un cubo ideal.

Obviamente, la definición de elemento ideal puede ser modificada si se desea. Sin embargo, esto no afecta en absoluto a la esencia del método.

Ahora bien, aunque las longitudes de los lados de los cubos, pirámides o prismas coincidan con la distancia ideal, estos elementos pueden no ser de buena calidad, ya que pueden existir deficiencias derivadas de la distorsión angular. Sin embargo, este problema no aparece en los tetraedros, en los cuales una deformación angular del elemento implica una deformación de sus lados.

Así pues y teniendo en cuenta que, como se verá más adelante, el método desarrollado utiliza el concepto de distancia. Para solucionar este problema se consideran los tetraedros en que estos elementos pueden ser descompuestos sin introducir ningún nudo nuevo. Como ya se ha indicado, el tetraedro es un elemento que no se puede distorsionar sin variar las longitudes de los lados. Por lo tanto, a partir de ahora, el método no trabajará ya con los elementos finitos como tales, sino con los tetraedros a que pueden dar lugar.

A continuación se consideran los lados de esos tetraedros, lados que corresponden a distancias entre los distintos nudos de los elementos finitos, pero que no necesariamente tienen por qué ser aristas de los mismos. Cuando los valores de esas distancias coincidan con las distancias que debe haber entre los nudos del elemento cuando éste es perfectamente regular, se ha conseguido el elemento ideal (no distorsionado).

En la Tabla I se representan los diferentes tetraedros en que pueden ser descompuestos los distintos elementos y las distancias ideales que deberán tener los lados de estos tetraedros.

Por lo tanto, para definir los nudos cuyas coordenadas deben ser modificadas, se compararán las longitudes de los lados de los tetraedros anteriormente citados con las que deberían tener si correspondieran a un elemento ideal. Cuando la diferencia supere la tolerancia admitida, se estará ante una "distancia" inaceptable y las coordenadas de los nudos correspondientes deberán ser modificadas.

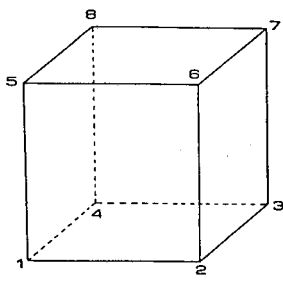
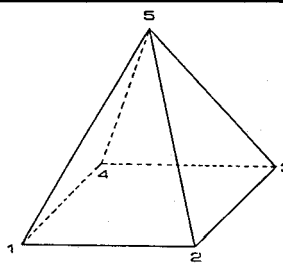
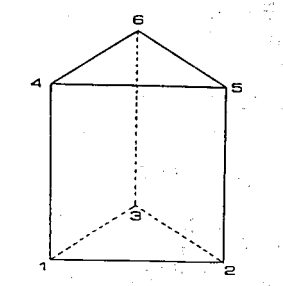
ELEMENTOS	TETRAEDROS	BARRAS	LONGITUDES IDEALES
	<p>2-5-6-7</p> <p>4-5-7-8</p> <p>2-3-4-7</p> <p>1-2-4-5</p> <p>2-4-5-7</p>	<p>2-5</p> <p>2-6</p> <p>2-7</p> <p>5-6</p> <p>5-7</p> <p>6-7</p> <p>4-5</p> <p>4-7</p> <p>4-8</p> <p>5-8</p> <p>7-8</p> <p>2-3</p> <p>2-4</p> <p>3-4</p> <p>3-7</p> <p>1-2</p> <p>1-4</p> <p>1-5</p>	<p>$L\sqrt{2}$</p> <p>L</p> <p>$L\sqrt{2}$</p> <p>L</p> <p>$L\sqrt{2}$</p> <p>L</p> <p>$L\sqrt{2}$</p> <p>L</p> <p>L</p> <p>L</p> <p>L</p> <p>L</p> <p>$L\sqrt{2}$</p> <p>L</p> <p>L</p> <p>L</p> <p>L</p>
	<p>1-2-3-5</p> <p>1-3-4-5</p>	<p>1-2</p> <p>2-3</p> <p>1-3</p> <p>1-5</p> <p>2-5</p> <p>3-5</p> <p>3-4</p> <p>1-4</p> <p>4-5</p>	<p>L</p> <p>L</p> <p>$L\sqrt{2}$</p> <p>$L\sqrt{3/2}$</p> <p>$L\sqrt{3/2}$</p> <p>$L\sqrt{3/2}$</p> <p>L</p> <p>L</p> <p>$L\sqrt{3/2}$</p>
	<p>3-4-5-6</p> <p>1-3-4-5</p> <p>1-2-3-5</p>	<p>1-2</p> <p>1-3</p> <p>1-4</p> <p>1-5</p> <p>2-3</p> <p>2-5</p> <p>3-4</p> <p>3-5</p> <p>3-6</p> <p>4-5</p> <p>4-6</p> <p>5-6</p>	<p>$L\sqrt{2}$</p> <p>L</p> <p>L</p> <p>$L\sqrt{2}$</p> <p>L</p> <p>L</p> <p>$L\sqrt{2}$</p> <p>$L\sqrt{2}$</p> <p>L</p> <p>$L\sqrt{2}$</p> <p>L</p> <p>L</p>

Tabla I. Longitudes ideales para los diferentes elementos finitos

Cuando una “distancia” defectuosa pertenece simultáneamente a elementos con distinta densidad de mallado asignada a cada uno de ellos, la longitud ideal de la misma será diferente según el elemento que se considere. Por ello, para salvar estos casos, se impone la condición de que la distancia ideal sea la media aritmética de las distancias ideales correspondientes a cada uno de los elementos afectados.

Una vez definidas las “distancias” defectuosas dentro del modelo, se debe modificar su geometría de manera que se obtenga una malla lo más próxima posible a la malla ideal. Para conseguir esto se modifican las posiciones de los nudos afectados en la malla.

Esta modificación debe seguir unas ciertas reglas, de forma que se considera llegar a la forma más próxima a la ideal en los elementos.

Así pues, la esencia del método es que sobre cada par de nudos afectados se impondrán unas "restricciones de distancia", que dependerán de la densidad de mallado correspondiente asignada a la región del modelo, en la que se encuentra el elemento (de ahora en adelante denominaremos elemento a cada par de nudos entre los que se define una distancia).

Estas restricciones se pueden imponer de dos formas:

- 1) Estudiar la malla total en conjunto. De este modo, en un único paso se impondrán todas las condiciones y se obtendrá la solución. Esta primera forma es poco práctica ya que el efecto de la corrección de un elemento defectuoso es inapreciable en zonas de la malla que estén alejadas del citado elemento. Además, la solución del problema se obtiene por medio de la resolución de un sistema de ecuaciones cuyo orden depende del número de nudos que se tengan en cuenta. Si se considera la malla total, en conjunto, el número de nudos aumenta y el orden del sistema de ecuaciones es mayor, con lo cual el tiempo de resolución se alarga considerablemente, teniendo en cuenta además que esta variación es no lineal.
- 2) Estudiar el problema total como una serie de subproblemas parciales. De esta forma se reduce el tiempo de cálculo sin afectar la precisión de los resultados. El ahorro de tiempo es debido a que hay zonas de la malla que son lo suficientemente regulares, como para que no se sometan al proceso. Además, la descomposición del problema total en varios subproblemas independientes produce una disminución importante del orden de los sistemas de ecuaciones y por consiguiente del tiempo de cálculo.

Como consecuencia de lo anterior se considerará cada una de las regiones defectuosas por separado. La modificación de la posición de uno de los nudos de los elementos defectuosos también afectará a los elementos contiguos. Por lo tanto, estos elementos contiguos también se tienen que tener en cuenta en el cálculo. Puede ocurrir que uno de estos elementos contiguos se halle en el grupo de los defectuosos, o bien que sea contiguo simultáneamente a otro de dichos elementos. Por lo tanto, dentro de la malla total se pueden aislar zonas que contengan a uno o varios elementos defectuosos y cada una de estas zonas se puede tratar de forma independiente.

Se denomina d_{ij} a la distancia existente entre los nudos i y j de un elemento y D_{ij} a la distancia ideal correspondiente. Se parte de una zona aislada de la malla total, en la que existen n restricciones de distancia (elementos) entre los N nudos de la malla. Si se denomina $\{\mathbf{x}\}$ al vector de coordenadas de estos nudos, se puede definir una función de error $\Phi(\{\mathbf{x}\})$ como

$$\Phi(\{\mathbf{x}\}) = \sum_1^n (d_{ij} - D_{ij})^2 \quad (1)$$

la cual intentaremos expresar en función de las coordenadas de los puntos. Considérense para ello dos nudos i, j y un sistema de referencia xyz . Sea d la proyección del segmento ij sobre el plano xy ; c_z el coseno del ángulo formado por el vector ij con el eje z y s_z

el seno del mismo ángulo. Sean c_x y s_x el coseno y el seno del ángulo formado por la proyección del segmento con el eje x (Figura 1).

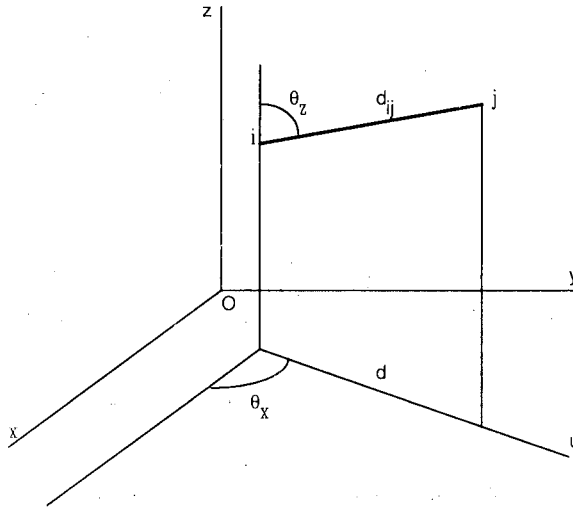


Figura 1. Proyección del segmento $i - j$ sobre el plano xy

Considerando un plano perpendicular al xy que contiene al segmento ij (Figura 2), se puede escribir

$$d_{ij} = s_z d + c_z(z_j - z_i) \tag{2}$$

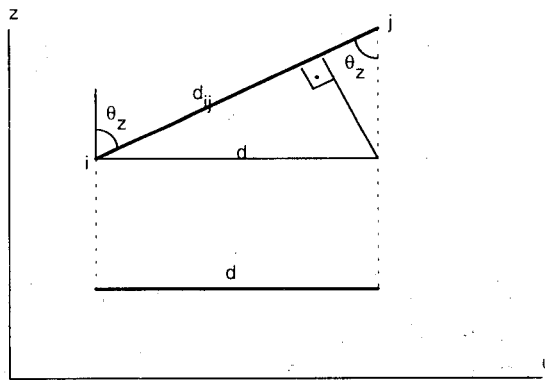


Figura 2. Plano proyectante sobre el plano xy que contiene al segmento $i - j$

Elevando al cuadrado la expresión (2), se obtiene

$$\begin{aligned} d_{ij}^2 &= [s_z d + c_z(z_j - z_i)]^2 = s_z^2 d^2 + c_z^2 z_j^2 + c_z^2 z_i^2 - 2c_z^2 z_j z_i + 2s_z c_z d(z_j - z_i) = \\ &= s_z^2 d^2 + c_z^2 z_j^2 + c_z^2 z_i^2 - 2c_z^2 z_j z_i + 2s_z c_z d z_j - 2s_z c_z d z_i \end{aligned} \tag{3}$$

Por otra parte, d es la distancia entre las proyecciones de los puntos i y j sobre el plano xy . Por tanto, de forma análoga a lo anterior se puede escribir

$$d = (x_j - x_i)c_x + (y_j - y_i)s_x \quad (4)$$

Sustituyendo esta expresión (4) en (3), se obtiene

$$\begin{aligned} d_{ij}^2 = & s_z^2 c_x^2 x_j^2 + s_z^2 s_x^2 y_j^2 + 2c_x s_x s_z^2 x_j y_j + s_z^2 c_x^2 x_i^2 + s_z^2 s_x^2 y_i^2 + 2c_x s_x s_z^2 x_i y_i - \\ & - 2s_z^2 c_x^2 x_i x_j - 2s_z^2 s_x^2 y_i y_j - 2s_z^2 c_x s_x x_j y_i - 2s_z^2 c_x s_x x_i y_j + c_z^2 z_j^2 + c_z^2 z_i^2 - \\ & - 2c_z^2 z_i z_j + 2s_z c_z c_x x_j z_j + 2s_z c_z s_x y_j z_j + 2s_z c_z c_x x_i z_i + 2s_z c_z s_x y_i z_i - \\ & - 2s_z c_z c_x x_j z_i - 2s_z c_z s_x y_j z_i - 2s_z c_z c_x x_i z_j - 2s_z c_z s_x y_i z_j \end{aligned} \quad (5)$$

Escribiendo esta igualdad en forma matricial, se llega a la siguiente expresión

$$d_{ij}^2 = (x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) \begin{bmatrix} s_z^2 c_x^2 & c_x s_x s_z^2 & s_z c_z c_x & -s_z^2 c_x^2 & -s_z^2 c_x s_x & -s_z c_z c_x \\ c_x s_x s_z^2 & s_z^2 s_x^2 & s_z c_z s_x & -s_z^2 c_x s_x & -s_z^2 s_x^2 & -s_z c_z s_x \\ s_z c_z c_x & s_z c_z s_x & c_z^2 & -s_z c_z c_x & -s_z c_z s_x & -c_z^2 \\ -s_z^2 c_x^2 & -s_z^2 c_x s_x & -s_z c_z c_x & s_z^2 c_x^2 & c_x s_x s_z^2 & s_z c_z c_x \\ -s_z^2 c_x s_x & -s_z^2 s_x^2 & -s_z c_z s_x & c_x s_x s_z^2 & s_z^2 s_x^2 & s_z c_z s_x \\ -s_z c_z c_x & -s_z c_z s_x & -c_z^2 & s_z c_z c_x & s_z c_z s_x & c_z^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix} = \{\tilde{\mathbf{x}}\}^T [\tilde{\mathbf{G}}_{ij}] \{\tilde{\mathbf{x}}\} \quad (6)$$

donde $[\tilde{\mathbf{G}}_{ij}]$ es una matriz de orden 6×6 que relaciona las coordenadas de los nudos i y j . Si se expande esa matriz con ceros hasta la dimensión $3N \times 3N$, se obtiene otra matriz expandida que denominaremos $[\mathbf{G}_{ij}]$. De la misma forma, al vector $\{\tilde{\mathbf{x}}\}$ expandido se le denominará $\{\mathbf{x}\}$.

Si en (6) se emplean los vectores y matrices expandidos y se sustituye en (1) el resultado es

$$\Phi(\{\mathbf{x}\}) = \sum_1^n \left[\left(\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}] \{\mathbf{x}\}^{\frac{1}{2}} - D_{ij} \right)^2 \right] \quad (7)$$

DETERMINACIÓN DE LA POSICIÓN ÓPTIMA

Una vez planteada la función de error $\Phi(\{\mathbf{x}\})$ dependiendo de las coordenadas de los nudos, la posición óptima de los mismos se obtendrá cuando el valor de la función de error sea mínimo. Para minimizar la función $\Phi(\{\mathbf{x}\})$ se utilizará un método quasi-Newton, teniendo en cuenta que el mínimo de $\Phi(\{\mathbf{x}\})$ será generalmente un valor mayor que 0 y sólo se obtendrá el valor 0 cuando se utilicen modelos muy sencillos y mallados muy regulares.

En primer lugar se desarrolla en serie de Taylor la función y se desprecian todos los términos de grado mayor que 2. Entonces

$$\begin{aligned} \Phi(\{\mathbf{x}\}) \cong \tilde{\Phi}(\{\mathbf{x}\}) = & \Phi(\{\mathbf{x}\}_q) + \nabla(\Phi\{\mathbf{x}\}_q)(\{\mathbf{x}\} - \{\mathbf{x}\}_q) + \\ & + \frac{1}{2}(\{\mathbf{x}\}^T - \{\mathbf{x}\}_q^T)[\mathbf{H}(\Phi\{\mathbf{x}\}_q)](\{\mathbf{x}\} - \{\mathbf{x}\}_q) \end{aligned} \quad (8)$$

donde $\{\mathbf{x}\}_q$ es la q -ésima aproximación al mínimo, $\nabla(\Phi\{\mathbf{x}\}_q)$ es el gradiente de $\Phi(\{\mathbf{x}\})$ en $\{\mathbf{x}\}_q$ y $[\mathbf{H}(\Phi\{\mathbf{x}\}_q)]$ es la matriz hessiana de $\Phi(\{\mathbf{x}\})$ evaluada en $\{\mathbf{x}\}_q$. La ecuación (8) indica que el mínimo de la función de error puede aproximarse mediante el mínimo de $\tilde{\Phi}(\{\mathbf{x}\})$. Este mínimo vendrá dado por

$$\nabla(\Phi\{\mathbf{x}\}) \cong \nabla(\tilde{\Phi}\{\mathbf{x}\}) = \{\mathbf{0}\} \quad (9)$$

Sustituyendo esta expresión en (8), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\nabla(\tilde{\Phi}\{\mathbf{x}\}) = \nabla(\Phi\{\mathbf{x}\}_q) + [\mathbf{H}(\Phi\{\mathbf{x}\}_q)](\{\mathbf{x}\} - \{\mathbf{x}\}_q) = \{\mathbf{0}\} \quad (10)$$

o bien

$$[\mathbf{H}(\Phi\{\mathbf{x}\}_q)](\{\mathbf{x}\} - \{\mathbf{x}\}_q) = -\nabla(\Phi\{\mathbf{x}\}_q) \quad (11)$$

El vector $\{\mathbf{x}\}$ obtenido a partir de (11) es una nueva y probablemente mejor aproximación al mínimo verdadero de función de error.

Para resolver el sistema (11) es necesario obtener el valor de las matrices y vectores que lo constituyen. Para ello, en primer lugar se calcula el gradiente de la función de error (7)

$$\nabla(\Phi\{\mathbf{x}\}) = 2 \sum_1^n \left[\left(\left(\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}] \{\mathbf{x}\} \right)^{\frac{1}{2}} - D_{ij} \right) \frac{\partial \left(\left(\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}] \{\mathbf{x}\} \right)^{\frac{1}{2}} \right)}{\partial \{\mathbf{x}\}} \right] \quad (12)$$

Operando en esta expresión, se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla(\Phi\{\mathbf{x}\}) = 2 \sum_1^n \left[\left(\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}] \{\mathbf{x}\} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \left(\left(\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}] \{\mathbf{x}\} \right)^{\frac{1}{2}} \right)}{\partial \{\mathbf{x}\}} \right] - \\ - 2 \sum_1^n D_{ij} \frac{\partial \left(\left(\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}] \{\mathbf{x}\} \right)^{\frac{1}{2}} \right)}{\partial \{\mathbf{x}\}} \end{aligned} \quad (13)$$

Si se realizan las derivadas de la expresión (13), se obtienen las expresiones siguientes

$$\begin{aligned} \nabla(\Phi\{\mathbf{x}\}) = 2 \sum_1^n \left[\left(\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}] \{\mathbf{x}\} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left(\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}] \{\mathbf{x}\} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \left(\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}] \{\mathbf{x}\} \right)}{\partial \{\mathbf{x}\}} \right] - \\ - 2 \sum_1^n D_{ij} \frac{1}{2} \left(\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}] \{\mathbf{x}\} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \left(\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}] \{\mathbf{x}\} \right)}{\partial \{\mathbf{x}\}} \end{aligned} \quad (14)$$

y puesto que

$$\frac{\partial \left(\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}] \{\mathbf{x}\} \right)}{\partial \{\mathbf{x}\}} = 2[\mathbf{G}_{ij}] \{\mathbf{x}\} \quad (15)$$

o bien

$$\left[\frac{\partial \left(\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}] \{\mathbf{x}\} \right)}{\partial \{\mathbf{x}\}} \right]^T = 2\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}] \quad (16)$$

ya que la matriz $[\mathbf{G}_{ij}]$ es simétrica, la expresión (14) se transforma en

$$\nabla(\Phi\{\mathbf{x}\}) = 2 \sum_1^n [\mathbf{G}_{ij}] \{\mathbf{x}\} - 2 \sum_1^n D_{ij} \frac{[\mathbf{G}_{ij}] \{\mathbf{x}\}}{\left(\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}] \{\mathbf{x}\} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (17)$$

En las expresiones anteriores y con el fin de hacer un desarrollo más sencillo se ha supuesto que $[\mathbf{G}_{ij}]$ es constante, cuando realmente es función de $\{\mathbf{x}\}$. En la práctica se ha comprobado que la convergencia del método es buena, siendo además el algoritmo resultante mucho más sencillo.

Simplificando y aplicando (6), se llega a

$$\nabla(\Phi\{\mathbf{x}\}) = 2 \sum_1^n [\mathbf{G}_{ij}]\{\mathbf{x}\} - 2 \sum_1^n D_{ij} \frac{[\mathbf{G}_{ij}]\{\mathbf{x}\}}{d_{ij}} \tag{18}$$

o lo que es lo mismo

$$\nabla(\Phi\{\mathbf{x}\}) = 2 \sum_1^n \left(1 - \frac{D_{ij}}{d_{ij}}\right) [\mathbf{G}_{ij}]\{\mathbf{x}\} \tag{19}$$

Las operaciones indicadas en estas ecuaciones no son complicadas de obtener, pero se van a poder simplificar notablemente. Para ello, supóngase un par de nudos i, j cualesquiera que se encuentran en una posición tal que su distancia es d_{ij} . Se puede ver el problema a resolver como el de un sistema mecánico formado por barras elásticas en equilibrio, bajo la acción de un cierto sistema de fuerzas exteriores. Esto permite suponer que si una barra de longitud inicial D_{ij} alcanza una longitud final d_{ij} , existen unas acciones exteriores que aplicadas en los nudos y en la dirección de la barra producen esa deformación.

Planteando este paralelismo, obviamente sobre cada "barra" las acciones van a ser iguales y opuestas, $\{\tilde{\mathbf{A}}_i\}$ sobre el nudo i y $\{\tilde{\mathbf{A}}_j\}$ sobre el nudo j , de modo que

$$\{\tilde{\mathbf{A}}_j\} = -\{\tilde{\mathbf{A}}_i\} \tag{20}$$

Esto puede expresarse de la siguiente manera (Figura 3)

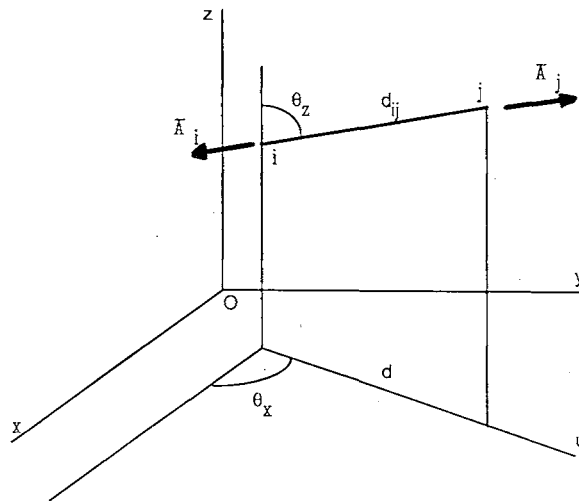


Figura 3. Fuerzas $\{\tilde{\mathbf{A}}_i\}$ y $\{\tilde{\mathbf{A}}_j\}$ aplicadas sobre los nudos de la "barra" $i - j$

$$\begin{Bmatrix} \{\tilde{\mathbf{A}}_i\} \\ \{\tilde{\mathbf{A}}_j\} \end{Bmatrix} = (d_{ij} - D_{ij}) \begin{Bmatrix} -C_x s_z \\ -s_x s_z \\ -C_z \\ C_x s_z \\ s_x s_z \\ C_z \end{Bmatrix} \quad (21)$$

En forma compacta puede expresarse como

$$\{\tilde{\mathbf{A}}_{ij}\} = (d_{ij} - D_{ij})\{\tilde{\mathbf{h}}_{ij}\} \quad (22)$$

Por otra parte, si se efectúa el producto

$$\{\tilde{\mathbf{G}}_{ij}\}\{\tilde{\mathbf{x}}\} \quad (23)$$

se obtiene

$$[\tilde{\mathbf{G}}_{ij}]\{\tilde{\mathbf{x}}\} = \begin{bmatrix} s_z^2 C_x^2 & C_x s_x s_z^2 & s_z C_z C_x & -s_z^2 C_x^2 & -s_z^2 C_x s_x & -s_z C_z C_x \\ C_x s_x s_z^2 & s_z^2 s_x^2 & s_z C_z s_x & -s_z^2 C_x s_x & -s_z^2 s_x^2 & -s_z C_z s_x \\ s_z C_z C_x & s_z C_z s_x & C_z^2 & -s_z C_z C_x & -s_z C_z s_x & -C_z^2 \\ -s_z^2 C_x^2 & -s_z^2 C_x s_x & -s_z C_z C_x & s_z^2 C_x^2 & C_x s_x s_z^2 & s_z C_z C_x \\ -s_z^2 C_x s_x & -s_z^2 s_x^2 & -s_z C_z s_x & C_x s_x s_z^2 & s_z^2 s_x^2 & s_z C_z s_x \\ -s_z C_z C_x & -s_z C_z s_x & -C_z^2 & s_z C_z C_x & s_z C_z s_x & C_z^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} (x_i - x_j)s_z^2 C_x^2 + (y_i - y_j)C_x s_x s_z^2 + (z_i - z_j)s_z C_z C_x \\ (x_i - x_j)s_z^2 C_x s_x + (y_i - y_j)s_x^2 s_z^2 + (z_i - z_j)s_z C_z s_x \\ (x_i - x_j)s_z C_x C_z + (y_i - y_j)C_z s_x s_z + (z_i - z_j)C_z^2 \\ -(x_i - x_j)s_z^2 C_x^2 - (y_i - y_j)C_x s_x s_z^2 - (z_i - z_j)s_z C_z C_x \\ -(x_i - x_j)s_z^2 C_x s_x - (y_i - y_j)s_x^2 s_z^2 - (z_i - z_j)s_z C_z s_x \\ -(x_i - x_j)s_z C_x C_z - (y_i - y_j)C_z s_x s_z - (z_i - z_j)C_z^2 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} [-(x_j - x_i)C_x s_z - (y_j - y_i)s_x s_z - (z_j - z_i)C_z]C_x s_z \\ [-(x_j - x_i)C_x s_z - (y_j - y_i)s_x s_z - (z_j - z_i)C_z]s_x s_z \\ [-(x_j - x_i)C_x s_z - (y_j - y_i)s_x s_z - (z_j - z_i)C_z]C_z \\ [(x_j - x_i)C_x s_z + (y_j - y_i)s_x s_z + (z_j - z_i)C_z]C_x s_z \\ [(x_j - x_i)C_x s_z + (y_j - y_i)s_x s_z + (z_j - z_i)C_z]s_x s_z \\ [(x_j - x_i)C_x s_z + (y_j - y_i)s_x s_z + (z_j - z_i)C_z]C_z \end{Bmatrix} =$$

$$= d_{ij} \begin{Bmatrix} -C_x s_z \\ -s_x s_z \\ -C_z \\ C_x s_z \\ s_x s_z \\ C_z \end{Bmatrix} = d_{ij}\{\tilde{\mathbf{h}}_{ij}\} \quad (24)$$

Por lo tanto, el vector de acciones que actúa sobre la barra será

$$\{\tilde{\mathbf{A}}_{ij}\} = (d_{ij} - D_{ij})\{\tilde{\mathbf{h}}_{ij}\} = \left(\frac{d_{ij} - D_{ij}}{d_{ij}} \right) [\tilde{\mathbf{G}}_{ij}]\{\tilde{\mathbf{x}}_{ij}\} \quad (25)$$

Expandiendo todos los vectores $\{\tilde{\mathbf{A}}_{ij}\}$ hasta la dimensión $3N$, se obtienen los vectores $\{\mathbf{A}_{ij}\}$, y sumando todos los vectores $\{\mathbf{A}_{ij}\}$ correspondientes a todos los pares de nudos, se obtiene un vector $\{\mathbf{A}\}$

$$\{\mathbf{A}\} = \sum_1^n \{\mathbf{A}_{ij}\} = \sum_1^n \left(\frac{d_{ij} - D_{ij}}{d_{ij}} \right) [\mathbf{G}_{ij}]\{\mathbf{x}\} \quad (26)$$

Si se compara (26) con (19), se llega a la conclusión de que existe una relación entre el vector de las acciones sobre las "barras" y el vector gradiente de la función error, siendo esta relación

$$\nabla(\Phi\{\mathbf{x}\}) = 2\{\mathbf{A}\} \quad (27)$$

Esta ecuación (27) hace posible calcular el vector gradiente a partir del cálculo de los vectores acción de cada barra y ensamblarlos para formar el vector de acciones $\{\mathbf{A}\}$, operación que es muy sencilla de realizar, evitando así las operaciones indicadas en la expresión (19).

Por otro lado, con respecto a la matriz hessiana, si se utiliza la traspuesta de la ecuación (19), se obtiene

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}(\Phi\{\mathbf{x}\})] &= \frac{\partial}{\partial\{\mathbf{x}\}} \left[2 \sum_1^n \left(1 - \frac{D_{ij}}{d_{ij}} \right) \{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}] \right] = \\ &= 2 \sum_1^n \left(1 - \frac{D_{ij}}{d_{ij}} \right) [\mathbf{G}_{ij}] + \frac{\partial \left[2 \sum_1^n \left(1 - \frac{D_{ij}}{d_{ij}} \right) \right]}{\partial\{\mathbf{x}\}} \{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}] = \\ &= 2 \sum_1^n \left(1 - \frac{D_{ij}}{d_{ij}} \right) [\mathbf{G}_{ij}] + \frac{\partial}{\partial\{\mathbf{x}\}} \left[2 \sum_1^n \left(1 - \frac{D_{ij}}{(\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}]\{\mathbf{x}\})^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}] = \\ &= 2 \sum_1^n \left(1 - \frac{D_{ij}}{d_{ij}} \right) [\mathbf{G}_{ij}] + 2 \sum_1^n \left(\frac{\frac{1}{2} D_{ij} (\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}]\{\mathbf{x}\})^{-\frac{1}{2}}}{\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}]\{\mathbf{x}\}} \right) \{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}] = \\ &= 2 \sum_1^n \left(1 - \frac{D_{ij}}{d_{ij}} \right) [\mathbf{G}_{ij}] + 2 \sum_1^n \frac{D_{ij} [\mathbf{G}_{ij}]\{\mathbf{x}\}\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}]}{(\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}]\{\mathbf{x}\})^{\frac{3}{2}}} = \\ &= 2 \sum_1^n \left(1 - \frac{D_{ij}}{d_{ij}} \right) [\mathbf{G}_{ij}] + 2 \sum_1^n \frac{D_{ij}}{d_{ij}^3} [\mathbf{G}_{ij}]\{\mathbf{x}\}\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{G}_{ij}] \end{aligned} \quad (28)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la expresión(24)

$$[\tilde{\mathbf{G}}_{ij}]\{\tilde{\mathbf{x}}\}\{\tilde{\mathbf{x}}\}^T[\tilde{\mathbf{G}}_{ij}] = d_{ij}\{\tilde{\mathbf{h}}_{ij}\}\{\tilde{\mathbf{h}}_{ij}\}^T d_{ij} = d_{ij}^2\{\tilde{\mathbf{h}}_{ij}\}\{\tilde{\mathbf{h}}_{ij}\}^T \quad (29)$$

Desarrollando el producto $\{\tilde{\mathbf{h}}_{ij}\}\{\tilde{\mathbf{h}}_{ij}\}^T$, se tiene

$$\begin{aligned} \{\tilde{\mathbf{h}}_{ij}\}\{\tilde{\mathbf{h}}_{ij}\}^T &= \begin{pmatrix} -c_x s_z \\ -s_x s_z \\ -c_z \\ c_x s_z \\ s_x s_z \\ c_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_x s_z & -s_x s_z & -c_z & c_x s_z & s_x s_z & c_z \end{pmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} s_z^2 c_x^2 & c_x s_x s_z^2 & s_z c_z c_x & -s_z^2 c_x^2 & -s_z^2 c_x s_x & -s_z c_z c_x \\ c_x s_x s_z^2 & s_z^2 s_x^2 & s_z c_z s_x & -s_z^2 c_x s_x & -s_z^2 s_x^2 & -s_z c_z s_x \\ s_z c_z c_x & s_z c_z s_x & c_z^2 & -s_z c_z c_x & -s_z c_z s_x & -c_z^2 \\ -s_z^2 c_x^2 & -s_z^2 c_x s_x & -s_z c_z c_x & s_z^2 c_x^2 & c_x s_x s_z^2 & s_z c_z c_x \\ -s_z^2 c_x s_x & -s_z^2 s_x^2 & -s_z c_z s_x & c_x s_x s_z^2 & s_z^2 s_x^2 & s_z c_z s_x \\ -s_z c_z c_x & -s_z c_z s_x & -c_z^2 & s_z c_z c_x & s_z c_z s_x & c_z^2 \end{bmatrix} = [\tilde{\mathbf{G}}_{ij}] \quad (30) \end{aligned}$$

Considerando este resultado, la ecuación (28) se puede escribir

$$[\mathbf{H}(\Phi\{\mathbf{x}\})] = 2 \sum_1^n \left(1 - \frac{D_{ij}}{d_{ij}}\right) [\mathbf{G}_{ij}] + 2 \sum_1^n \left(\frac{D_{ij}}{d_{ij}^3}\right) d_{ij}^2 [\mathbf{G}_{ij}] = 2 \sum_1^n [\mathbf{G}_{ij}] = 2[\mathbf{G}] \quad (31)$$

donde $[\mathbf{G}]$ es una matriz de orden $3N \times 3N$ que denominaremos matriz geométrica.

Por tanto, sustituyendo (31) y (27) en (11)

$$[\mathbf{G}](\{\mathbf{x}\} - \{\mathbf{x}\}_q) = -\{\mathbf{A}\} \quad (32)$$

Resolviendo este sistema, se obtiene un vector $\{\mathbf{x}\}_{q+1}$ que muy probablemente represente una posición más cercana al mínimo de la función $\Phi(\{\mathbf{x}\})$ que $\{\mathbf{x}\}_q$. El proceso finaliza cuando se alcanza el valor $\Phi(\{\mathbf{x}\}) = 0$. Sin embargo, las restricciones geométricas a las que se debe someterse el mallado hacen que este valor sea muy difícil de alcanzar. Por ello, en la práctica el proceso se da por finalizado cuando la diferencia del valor de la función entre dos aproximaciones sucesivas es tan pequeña como se desee. Obviamente, la aplicación del método supone que el módulo analizador de elementos finitos debe contemplar la existencia de elementos a que se da lugar, como pueden ser hexaedros en los que los nudos de una cara no constituyan un plano.

RESTRICCIONES AL MOVIMIENTO DE LOS NUDOS

En el sistema (32) intervienen tanto las coordenadas de los nudos de elementos defectuosos como de los contiguos a los defectuosos. Estos últimos nudos se consideran de posición fija, de modo que únicamente se modifican las posiciones de los nudos que pertenecen a algún elemento defectuoso. Por otra parte, estas restricciones resultan necesarias a fin de que la matriz $[G]$ obtenida sea definido-positiva.

Por otro lado, puede ocurrir que alguno de los nudos sometidos al proceso pertenezca al contorno del modelo sólido. Es obvio que en estos casos debe restringirse la capacidad de movimiento de tales nudos, para que el contorno del modelo no se vea modificado. Pueden darse tres posibilidades:

- El nudo coincide con un vértice del modelo: en este caso, dicho nudo se considera de posición fija.
- El nudo pertenece a una arista del modelo: sólo se permite el desplazamiento del nudo a lo largo de la arista.
- El nudo pertenece a una cara del modelo: el nudo puede desplazarse únicamente por la cara.

EJEMPLOS

A continuación se presentan unos ejemplos de aplicación del método propuesto. El primero de ellos constituye un modelo muy sencillo con el que se pretende ilustrar el modo de operar del método. Consiste en un prisma con un agujero central mallado inicialmente según la Figura 4, el cual se somete al proceso de regularización. El mallado consta de 98 elementos, todos ellos hexaédricos, y 198 nudos.

La Figura 5 muestra la posición de los nudos después del proceso y la Tabla II indica los valores que va adoptando la función de error en las sucesivas iteraciones. Como se observa, tras una sola iteración se produce un descenso en la función de error de más de un 60 %. Después de dos iteraciones el valor de la función de error apenas se modifica y el modelo pasa a ser el de la Figura 5. Como puede observarse, el mallado obtenido es notablemente mejor que el de partida. El hecho de que la función de error no descienda más se debe a la necesidad del mallado de ajustarse al contorno provocado por el agujero central.

La Figura 6 muestra el mallado de un tornillo con 1624 nudos y 1299 elementos. Este mallado se ha obtenido con un método basado en⁸, que obviamente no es el más adecuado para mallar un sólido de revolución con el que nos ocupa. Sin embargo, sí es útil para poder comprobar el efecto del método de las restricciones de distancia, que da lugar al modelo de la Figura 7, obtenido tras 4 iteraciones, donde se observa cómo el mallado ha sido modificado en zonas muy localizadas del mismo.

Por último, las Figuras 8 y 9 muestran dos visuales distintas del mallado de un modelo ya tratado por Perucchio, Saxena y Kela⁹.

Este mallado inicial consta de 1839 nudos y 1518 elementos. Tras cuatro iteraciones se obtiene el mallado representado en las Figuras 10 y 11. Conviene prestar atención a

la zona marcada en las Figuras por la flecha. Como se observa, el método de mallado utilizado ha creado unos elementos casi degenerados, en los que alguna de las aristas tiene una longitud prácticamente nula. Sin embargo, tras la aplicación del método de restricciones de distancia se obtienen unos elementos muy aceptables en dicha zona. En las cuatro iteraciones el valor de la función de error ha pasado de 253.64 a 48.53 con una reducción del 80 %.

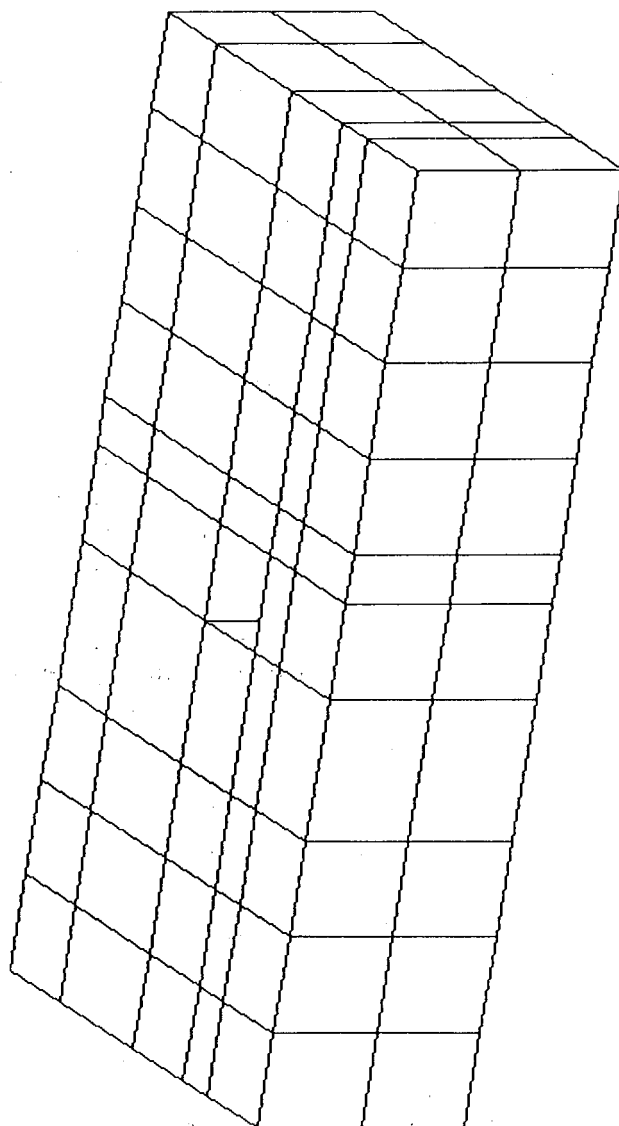


Figura 4. Modelo prismático de elementos finitos con un agujero pasante central

ITERACIÓN	FUNCIÓN DE ERROR	DIFERENCIA ENTRE ITERACIONES	DIFERENCIA %
Valor inicial	293.76657	-	-
1	113.85742	179.90915	61.24
2	110.46712	3.39030	2.98
3	110.24723	0.21989	0.20
4	110.19543	0.05180	0.05
5	110.16394	0.03149	0.03

Tabla II. Valores de la función de error para el modelo de la Figura 4

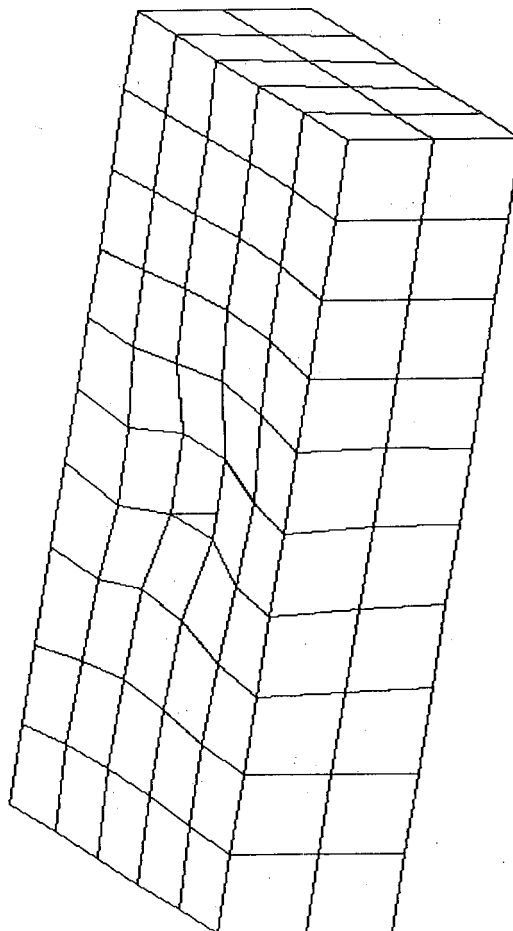


Figura 5. Modelo de la Figura 4 después de ser sometido al método de restricciones de distancia

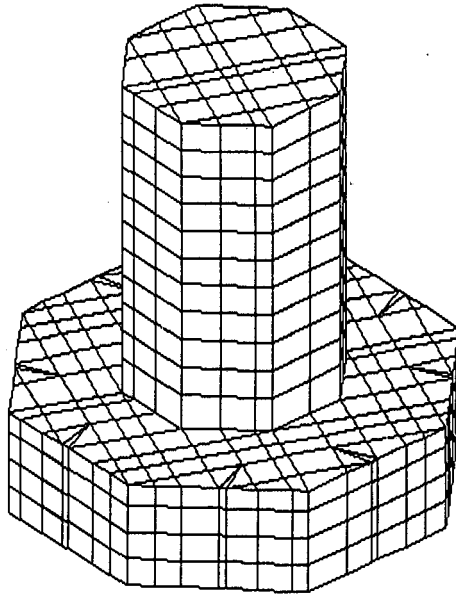


Figura 6. Mallado de un tornillo (1624 nudos y 1299 elementos)

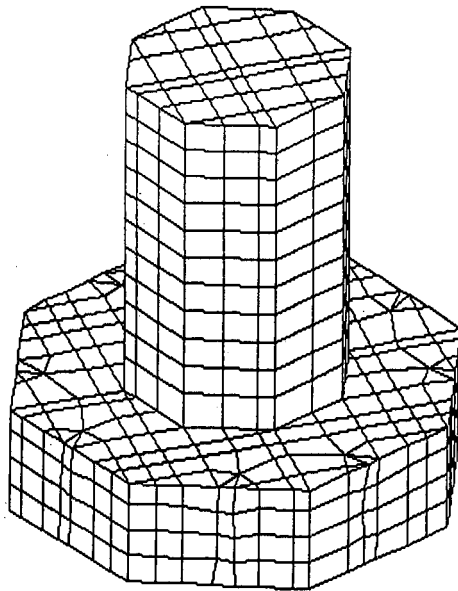


Figura 7. Modelo anterior, modificado por el método de restricciones de distancia, después de 4 iteraciones

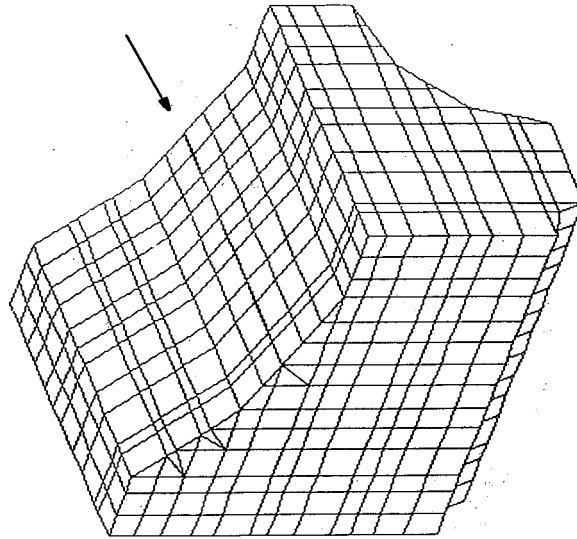


Figura 8. Modelo de elementos finitos con 1839 nudos y 1518 elementos

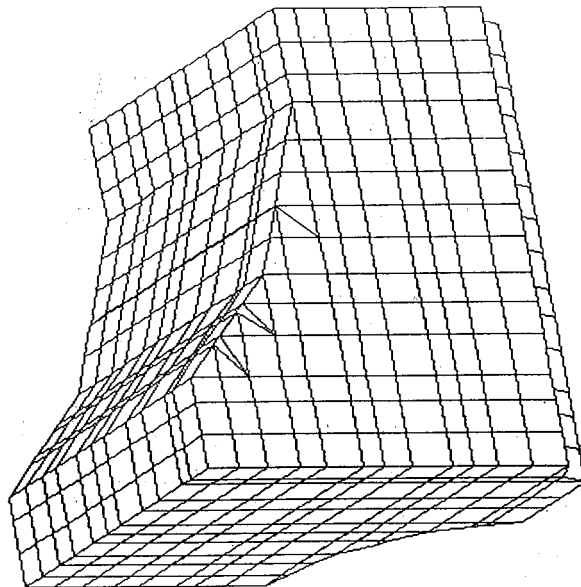


Figura 9. Otra perspectiva del modelo de la Figura 8

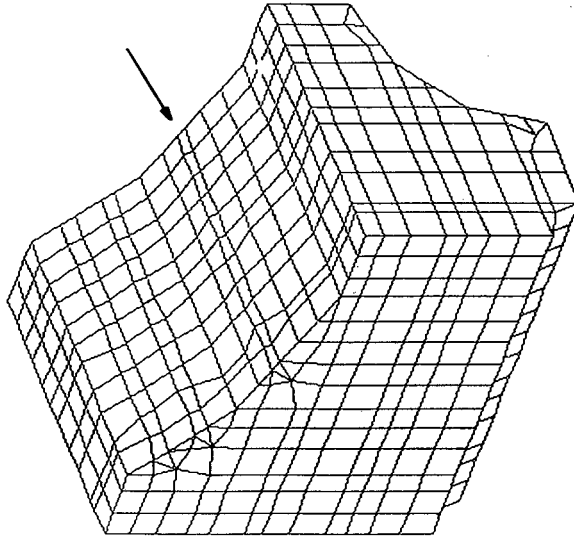


Figura 10. El modelo anterior regularizado después de 4 iteraciones

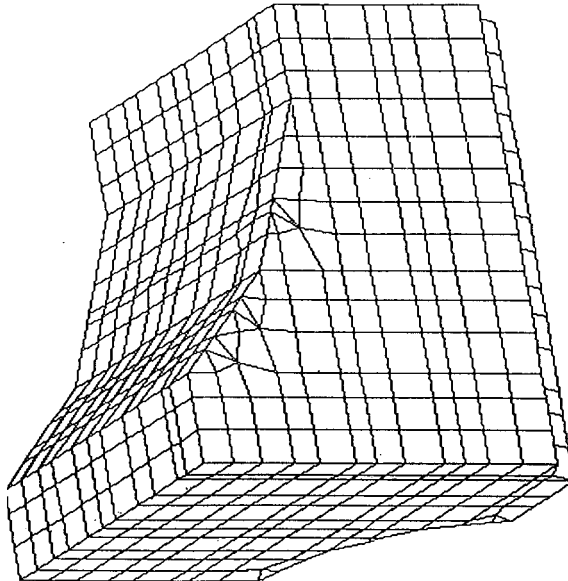


Figura 11. Otra perspectiva del modelo de la Figura 10

CONCLUSIONES

En este artículo se expone el método de regularización de malla que hemos denominado "Método de las Restricciones de Distancia", el cual permite mejorar la relación de aspecto en zonas muy localizadas de un mallado.

La aplicación del mismo se ha realizado para modelos tridimensionales sólidos, pero no existe ninguna limitación para su aplicación a otros modelos de elementos finitos.

A partir de la definición de una función de error que nos permite cuantificar la calidad del modelo en cuanto a la forma de sus elementos se llega a la obtención de un sistema de ecuaciones en el que la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes se obtienen fácilmente, considerando la analogía del problema con el de un sistema mecánico constituido por barras elásticas deformadas por la acción de fuerzas exteriores.

Por último, indicar que la aplicación práctica del método, expuesta en los ejemplos presentados, consigue mejorar notablemente la calidad de los modelos con un pequeño número de iteraciones.

REFERENCIAS

1. J.C. Cavendish, D.A. Field y W.H. Frey, "An Approach to Automatic Three-dimensional Finite Element Mesh Generation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **21**, N° 2, pp. 329-347, (1985).
2. D.A. Field y W.H. Frey, "Automation of Tetrahedral Mesh Generation", GMR-4967, G.M.R.L., Michigan, (1985).
3. Nguyen-Van-Phai, "Automatic Mesh Generation with Tetrahedron Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **18**, N° 2, pp. 273-290, (1982).
4. B. Wördenweber, "Automatic Mesh Generation of 2 and 3 Dimension Curvilinear Manifolds", Technical Report 18, Computer Laboratory, University of Cambridge, Cambridge, U.K., (1981).
5. T.C. Woo y T. Thomasma, "An Algorithm for Generating Solid Elements in Objects with Holes", *Computers and Structures*, Vol. **18**, pp. 333-342, (1984).
6. W.J. Schroeder, M.S. Stephard, "A Combined Octree/Delaunay Method for Fully Automatic 3D Mesh Generation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **29**, N° 1, pp. 37-55, (1990).
7. M.S. Stephard, M.K. Georges, "Automatic Three-dimensional Mesh Generation by the Finite Octree Technique", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **32**, N° 4, pp. 709-749, (1991).
8. R. Perucchio, M. Saxena y A. Kela, "Automatic Mesh Generation from Solid Models Based on Recursive Spatial Descompositions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **28**, N° 11, pp. 2469-2501, (1989).
9. M.A. Yerry y M.S. Stephard, "Automatic Three-dimensional Mesh Generation by the Modified-octree Technique", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **20**, N° 11, pp. 1965-1990, (1984).
10. M.A. Yerry y M.S. Stephard, "Automatic Mesh Generator for Three-dimensional Solids", *Computers and Structures*, Vol. **20**, N° 1-3, pp. 31-39, (1985).