

# Flexión termoelástica de placas ortótropas

Carlos A. Rossit y Patricio A.A. Laura

Departamento de Ingeniería  
Universidad Nacional del Sur  
Instituto de Mecánica Aplicada (CONICET)  
8000 Bahía Blanca, Argentina  
Tel.: 54-291-459 51 00 , Fax: 54-291-459 51 10  
e-mail: ima@criba.edu.ar

## Resumen

En el presente trabajo se analiza la flexión termoelástica de placas ortótropas delgadas bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones.

Se aproxima la deflexión de la placa en términos de funciones coordenadas polinómicas que, para el caso de la placa rectangular empotrada, satisfacen idénticamente las condiciones de borde.

El enfoque utilizado es particularizado para el caso de la placa isótropa donde se comprueba excelente acuerdo con resultados existentes en la literatura técnico-científica tanto para la determinación de desplazamiento como para los esfuerzos resultantes. La metodología en cuestión es sumamente simple y eficiente.

## THERMOELASTIC BENDING OF ORTHOTROPIC PLATES

## Summary

The present paper deals with thermoelastic bending of thin orthotropic plates using small deflection theory. The plate displacement is conveniently expressed in terms of polynomial coordinate functions which identically satisfy the boundary conditions in the case of rectangular plates with clamped edges. It is shown that the present approach degenerates properly into the isotropic plate case where excellent agreement is achieved, with results available in the references, for displacements and stress resultants.

## INTRODUCCIÓN

Dentro de los casos generales de anisotropía existe una situación particular de interés tecnológico que se presenta cuando el material tiene tres planos ortogonales de simetría elástica. Esos materiales son denominados ortótropos.

Al respecto cabe aclarar que modelos ortótropos representan satisfactoriamente el comportamiento de materiales de uso muy difundido en ingeniería, como el hormigón armado, las maderas, algunos plásticos compuestos de materiales reforzados con fibras dispuestas según ciertas configuraciones geométricas, etc.

Asimismo, merece destacarse el comportamiento mecánico con características globales ortótropas que presentan en virtud de su configuración geométrica determinados elementos estructurales constituidos por materiales homogéneos (por ejemplo placas corrugadas y placas con refuerzos).

## ANÁLISIS DEL PROBLEMA

Consideraremos una placa delgada elástica de espesor constante conformada por un material ortótropo.

Se toma como origen de coordenadas un punto cualquiera  $O$  del plano medio de la placa y como direcciones coordenadas  $x$  e  $y$  a las direcciones principales de elasticidad<sup>1,2</sup> (Figura 1).

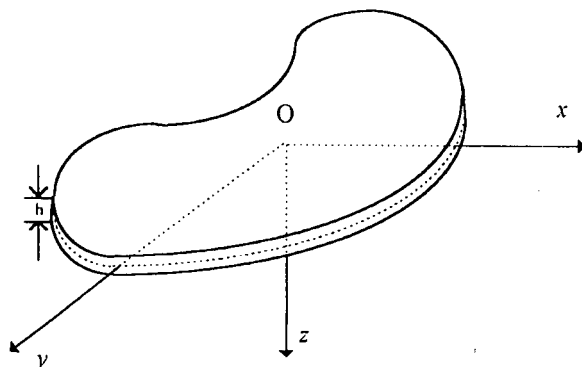


Figura 1. Placa ortótropa y sistema de ejes coordenados

Supongamos que sobre la placa actúa una variación térmica

$$T(x, y, z) = zT_1(x, y) \quad (1)$$

De acuerdo con la teoría aproximada de placas delgadas tendremos

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

donde  $u$  y  $v$  son los desplazamientos de un punto de la placa en la dirección de los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente, mientras  $w$  indica los desplazamientos de los puntos del plano medio de la placa en la dirección  $z$ .

Aplicando la ley generalizada de Hooke y teniendo en cuenta efectos térmicos, las ecuaciones constitutivas son

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1}(\sigma_x - \nu_1 \sigma_y) + \alpha_1 T \quad (3a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_2}(\sigma_y - \nu_2 \sigma_x) + \alpha_2 T \quad (3b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (3c)$$

donde  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  y  $G$  son los módulos de Young, coeficientes de Poisson y módulo de elasticidad transversal para las direcciones principales respectivamente, mientras  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son los respectivos coeficientes de expansión térmica del medio.

Expresando las ecuaciones (3) en términos de las tensiones y teniendo en cuenta (2) y (1), resultan las siguientes expresiones.

$$\sigma_x = -\frac{z}{1-\nu_1\nu_2} \left[ E_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_1 E_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (E_1 \alpha_1 + \nu_1 E_2 \alpha_2) T_1(x, y) \right] \quad (4a)$$

$$\sigma_y = -\frac{z}{1-\nu_1\nu_2} \left[ E_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_2 E_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (E_2 \alpha_2 + \nu_2 E_1 \alpha_1) T_1(x, y) \right] \quad (4b)$$

$$\tau_{xy} = -2zG \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4c)$$

Como es sabido, cortando a la placa con planos perpendiculares al plano medio, paralelos a los ejes coordenados y separados entre sí distancias  $dx$  y  $dy$ , las componentes del tensor de tensión  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  generan los momentos  $M_{\bar{x}}dy$ ,  $M_{x\bar{y}}dy$ ,  $M_{\bar{y}}dx$  y  $M_{x\bar{x}}dx$  (Figura 2).

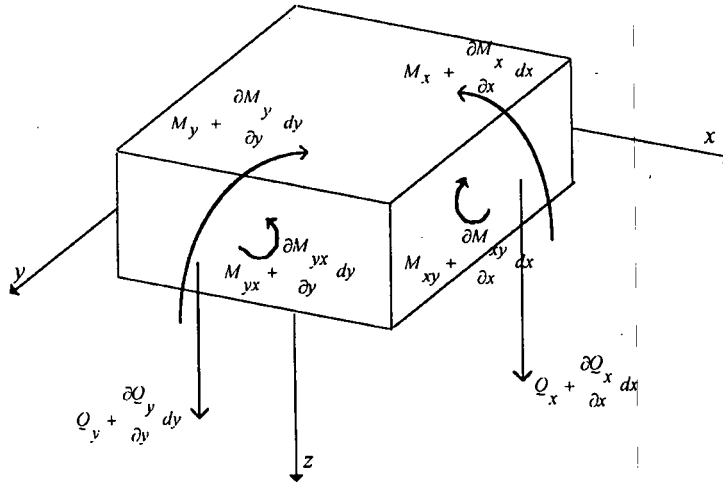


Figura 2. Elemento de placa y esfuerzos resultantes

La expresión de los momentos por unidad de longitud será

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = - \left[ D_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \beta_1 T_1 \right] \quad (5a)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = - \left[ D_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \beta_2 T_1 \right] \quad (5b)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -2D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (5c)$$

donde

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}; \quad D_k = \frac{Gh^3}{12} \quad (6)$$

$$\beta_1 = D_1(\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2); \quad \beta_2 = D_2(\alpha_2 + \nu_1 \alpha_1) \quad (7)$$

Consideraremos la posibilidad de una carga transversal estática  $p(x, y)$ , no teniendo en cuenta fuerzas de volumen. Planteando condiciones de equilibrio del elemento de placa, obtendremos las expresiones de  $Q_x$  y  $Q_y$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = - \left[ D_1 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + \beta_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + 2D_k \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (8a)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = - \left[ D_2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \nu_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + \beta_2 \frac{\partial T_1}{\partial y} + 2D_k \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \quad (8b)$$

Proyectando los esfuerzos resultantes según el eje  $z$ , se obtiene la ecuación diferencial gobernante\*

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p - \left( \beta_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

donde

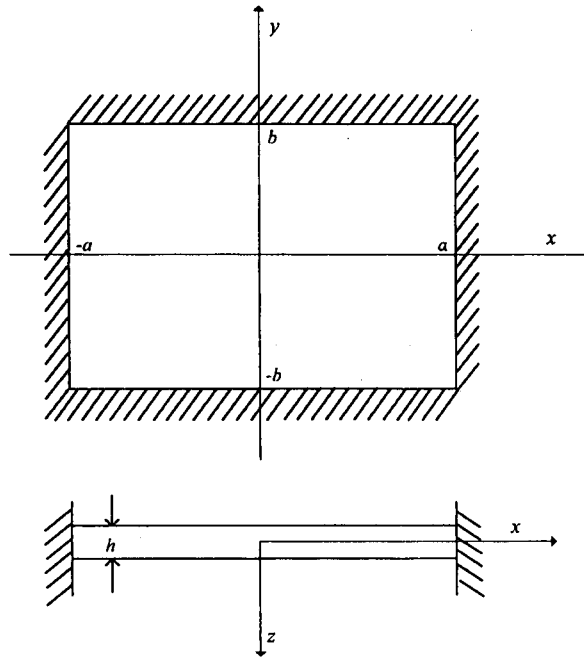
$$D_3 = \nu_1 D_2 + 2D_k \quad (10)$$

Obviamente, en el caso isótropo se tiene

$$D_1 = D_2 = D_3 = D, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu; \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta = D\alpha(1 + \nu) \quad (11)$$

y la ecuación diferencial (9) se transforma en

$$D\nabla^4 w = p - D\alpha(1 + \nu)\nabla^2 T_1 \quad (12)$$



**Figura 3.** Placa rectangular ortótropa empotrada en los cuatro bordes

\* Los autores no efectúan alarde alguno de originalidad, pero es de cierta importancia el hecho de que la ecuación (9) no ha sido obtenida previamente en las referencias.

## PLACA ORTÓTropa RECTANGULAR EMPOTRADA

La ecuación gobernante de la flexión térmica de la placa es la (9) y las condiciones de borde (Figura 3)

$$w \Big|_{x=\pm a} = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=\pm a} = 0 \quad (13a, b)$$

$$w \Big|_{y=\pm b} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=\pm b} = 0 \quad (14a, b)$$

Obsérvese que, de acuerdo con la expresión (9) y teniendo en cuenta que las condiciones de borde (13a,b) y (14a,b) no contienen explícitamente la temperatura<sup>3</sup>, puede analizarse el problema de la placa sometida a variación térmica como un problema isotérmico de la misma placa sometida a la carga equivalente

$$p^* = - \left( \beta_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \right) \quad (15)$$

Por lo tanto resulta razonable aproximar la deflexión de la placa con polinomios del tipo<sup>4,5,6</sup>

$$w(x, y) \cong w_a(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij} X_i(x) Y_j(y) \quad (16)$$

donde

$$X_i(x) = (c_i x^4 + d_i x^2 + 1) x^{2i-2} \quad (17a)$$

$$Y_j(y) = (e_j y^4 + f_j y^2 + 1) y^{2j-2} \quad (17b)$$

Reemplazando cada función coordenada  $[X_i(x), Y_j(y)]$  en las condiciones de borde, obtenemos las expresiones de  $c_i$ ,  $d_i$ ,  $e_j$  y  $f_j$

$$c_i = \frac{1}{a^4}; \quad d_i = -\frac{2}{a^2}; \quad e_j = \frac{1}{b^4}; \quad f_j = -\frac{2}{b^2} \quad (18)$$

Se determinarán las  $A_{ij}$  de la expresión (16) mediante el método de Ritz, lo que requerirá que la funcional energética<sup>1</sup>  $J[w]$

$$\begin{aligned} J[w] = & \frac{1}{2} \int \int \left[ D_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_1 \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 4D_k \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy - \int \int p^* w dx dy \end{aligned} \quad (19)$$

sea un mínimo con respecto a las constantes  $A_{ij}$

$$\frac{\partial J[w]}{\partial A_{ij}} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

Surge entonces un sistema de ecuaciones no homogéneo en las  $A_{ij}$ . Una vez resuelto el mismo, disponemos de una solución aproximada del problema. Es importante destacar el hecho de que para la situación en estudio el clásico método de Galerkin conduce a los mismos resultados.

## RESULTADOS NUMÉRICOS

Se ha considerado el caso de una placa sometida a la acción de una variación térmica distribuida según la ley

$$T(x, y, z) = \frac{z}{h} \frac{T_0}{2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (21)$$

El problema ha sido resuelto en forma adimensional, definiendo

$$\bar{x} = \frac{x}{a}; \quad \bar{y} = \frac{y}{b} \text{ y } \lambda = \frac{a}{b} \quad (22)$$

Se han obtenido resultados numéricos adimensionales, tomando en (16)  $N = 2$ , para una configuración termomecánica representada por los siguientes valores

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{1}{2}; \quad \frac{D_k}{D_1} = \frac{1}{3}; \quad \nu_2 = 0, 3; \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1, 5$$

y diferentes magnitudes de la relación de lados

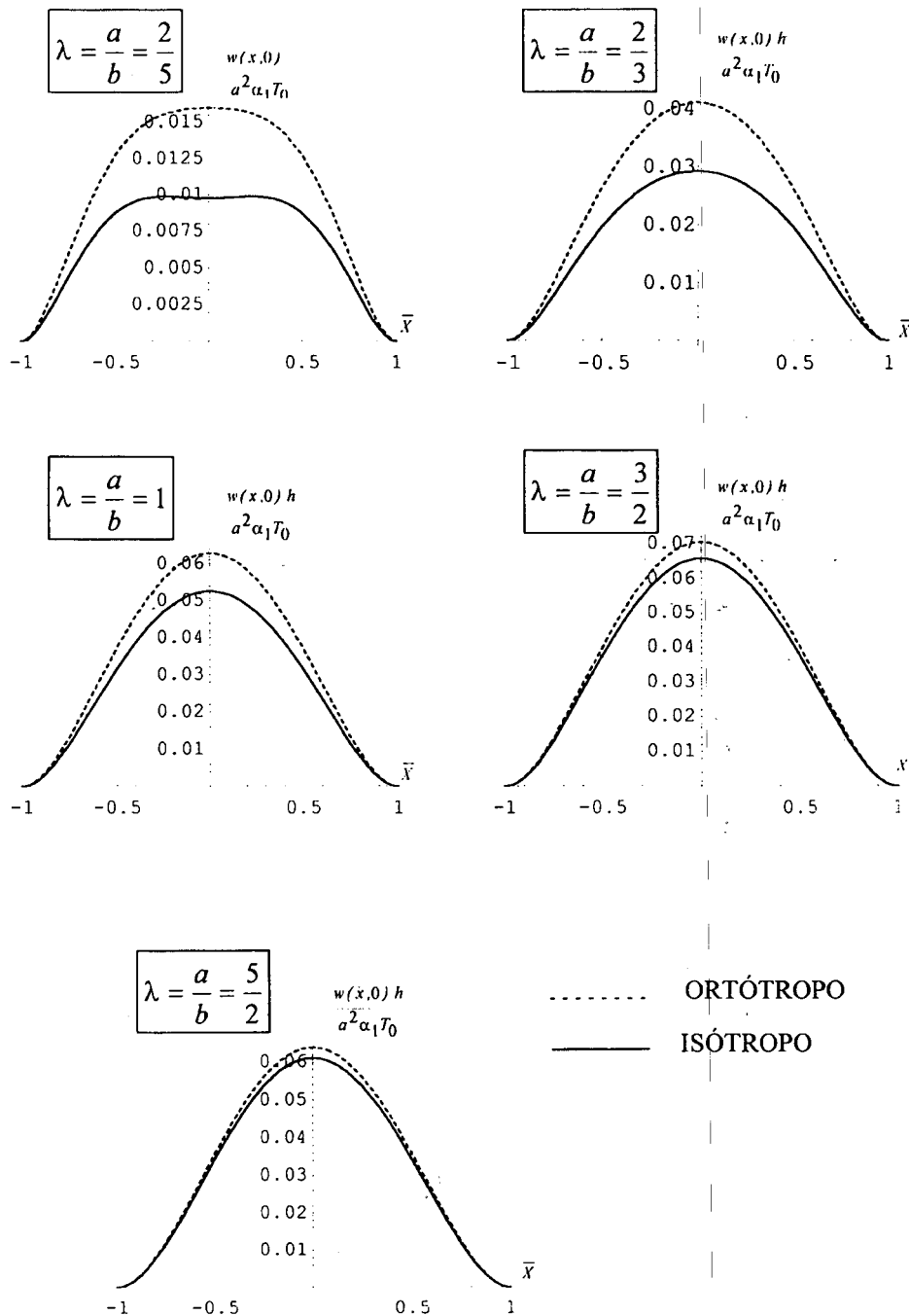
$$\lambda = \frac{a}{b} = \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2} \text{ y } \frac{5}{2}$$

En las Figuras 4 a 7 se representan las variaciones de los parámetros adimensionales de desplazamiento  $\left( \frac{w(\bar{x}, 0)}{a^2 \alpha_1 T_0} h \right)$ , de momentos flectores  $\left( \frac{M\bar{x}(\bar{x}, 0)}{D_1 \alpha_1 T_0} h \right)$  y momentos torsores  $\left( \frac{M\bar{x}\bar{y}(\bar{x}, 0, 5)}{D_1 \alpha_1 T_0} h \right)$ .

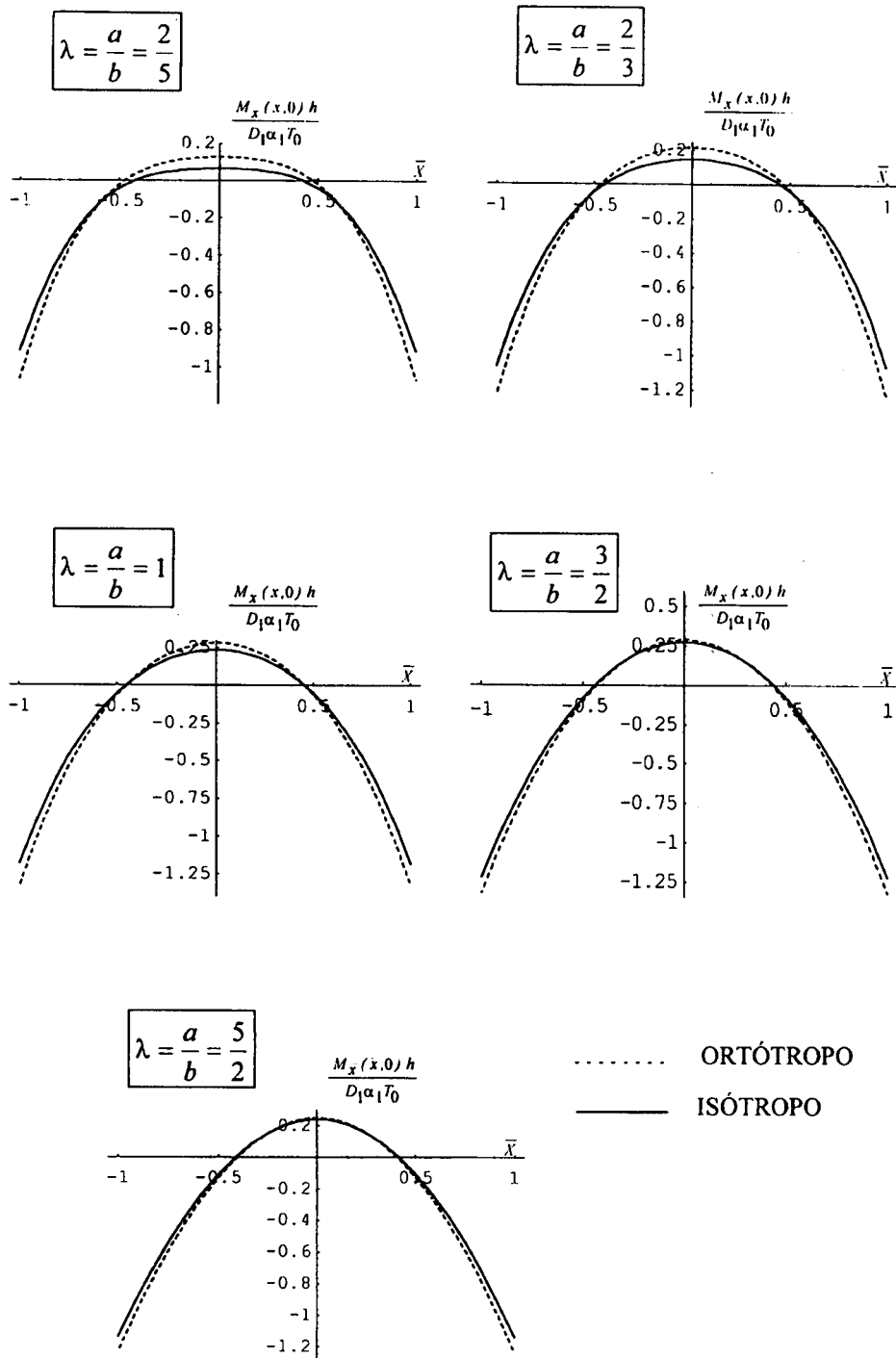
En todos los casos se compara con los respectivos casos isótropos

$$\left( D_2 = D_1 = D, \quad D_k = \frac{D(1 - \nu)}{2}, \quad \nu_1 = \nu_2 = 0, 3; \quad \alpha_2 = \alpha_1 = \alpha \right)$$

Cabe aclarar que en el caso de la placa isótropa cuadrada se observa que el valor de la deflexión en el centro  $\frac{w(0,0)}{a^2 \alpha_1 T_0} h = 0,0138$  coincide con el exacto<sup>3</sup>, mientras que el valor del máximo momento flector  $\left( \frac{M\bar{x}(0,1)}{D_1 \alpha_1 T_0} h \right) = -0,5116$  muestra muy buena concordancia con el valor disponible en la referencia<sup>3</sup>.

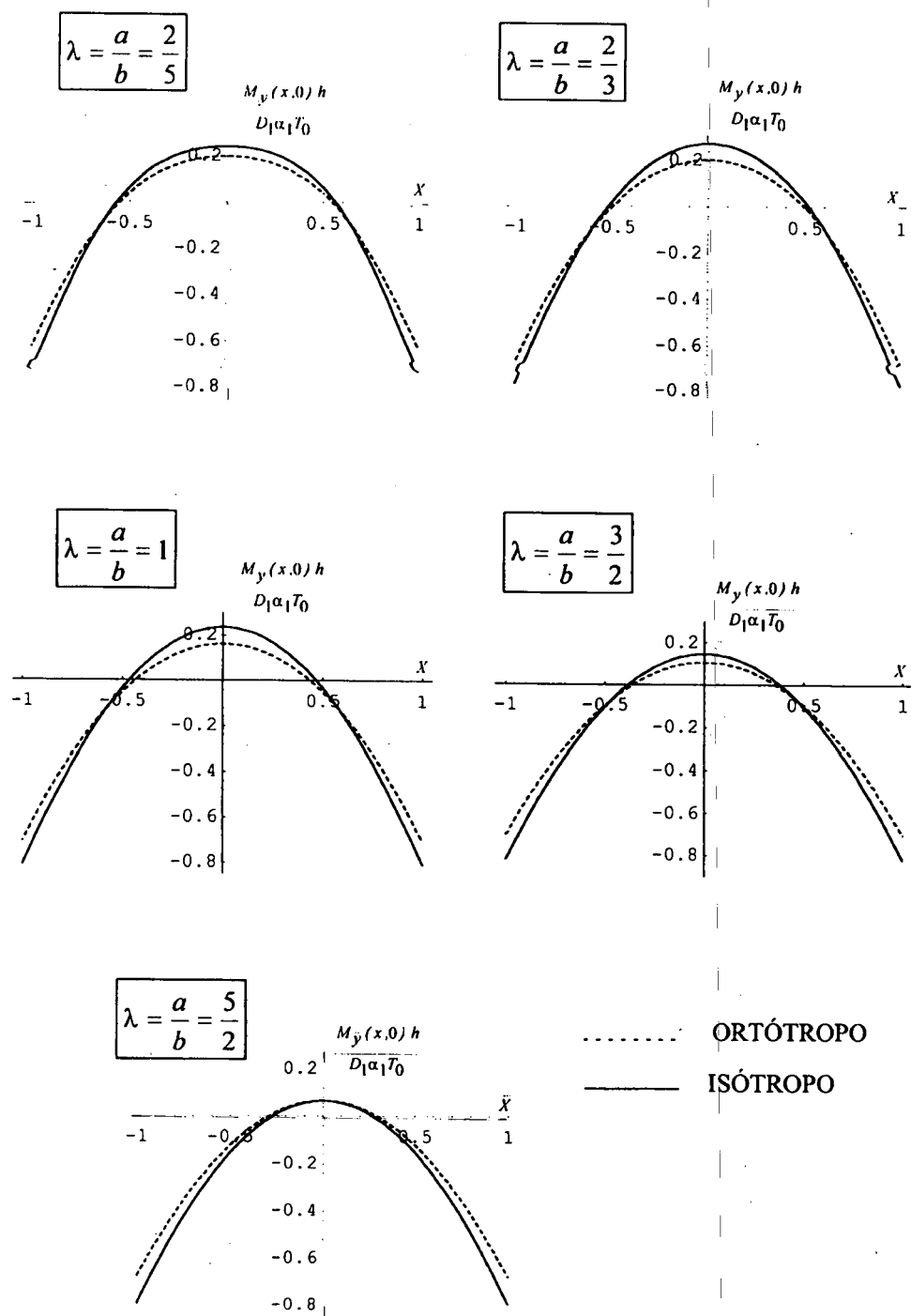


**Figura 4.** Elástica adimensional  $wh/a^2\alpha_1T_0$  en  $\bar{y} = 0$  para diversos valores de  $a/b$ . Comparación entre el caso isótropo y el ortótropo



**Figura 5.** Variación de  $M_{\bar{x}}h/D_1\alpha_1 T_0$  en  $\bar{y} = 0$  para diversos valores de  $a/b$ . Comparación entre el caso isótropo y el ortótropo





**Figura 6.** Variación de  $M_{\bar{y}}h/D_1\alpha_1T_0$  en  $\bar{y} = 0$ , para diversos valores de  $a/b$ . Comparación entre el caso isótropo y el ortótropo

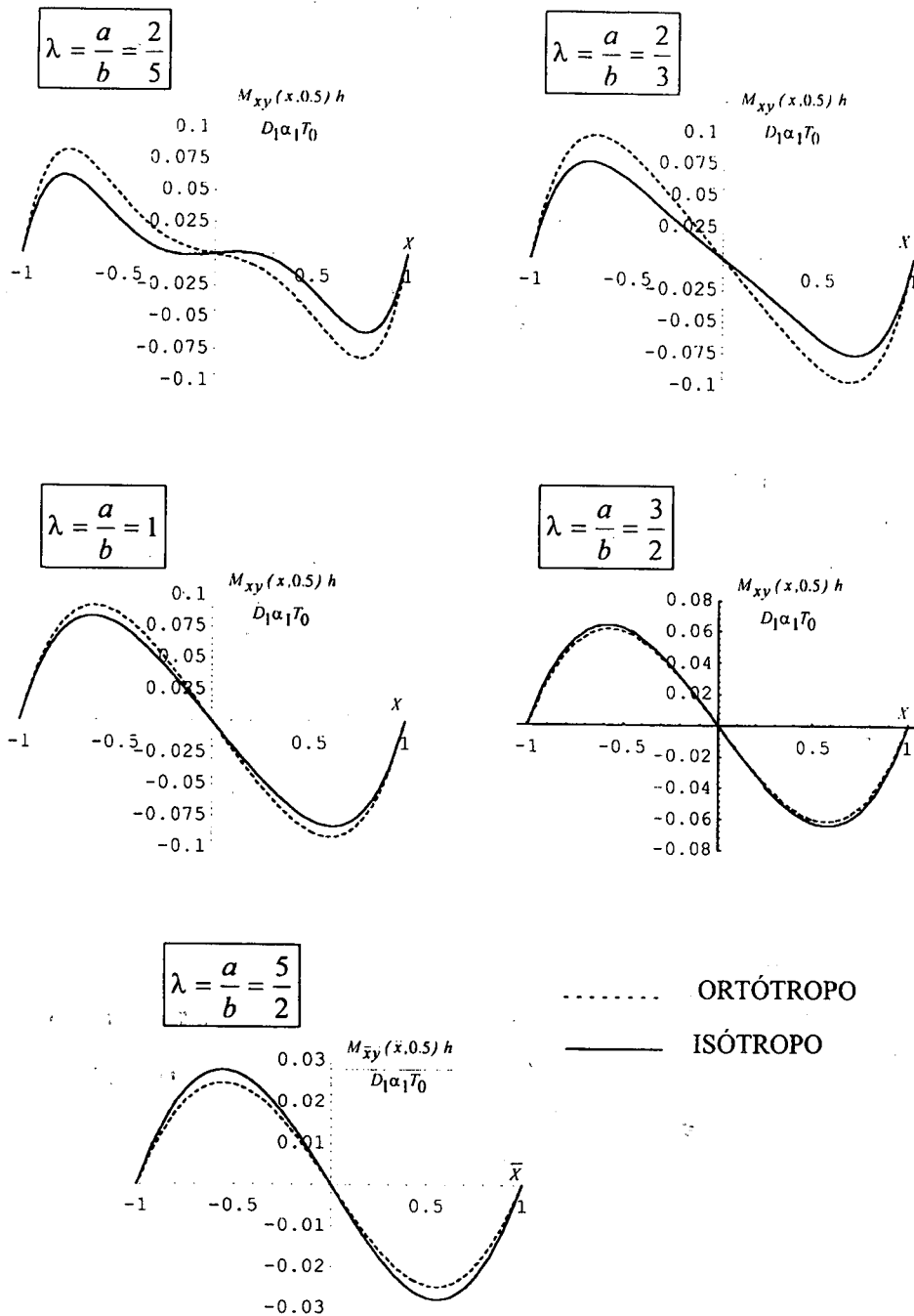


Figura 7. Variación de  $M_{xy}h/D_1\alpha_1T_0$  en  $\bar{y} = 0,5$  para diversos valores de  $a/b$ . Comparación entre el caso isótropo y el ortótropo