

PRINCIPIOS VARIACIONALES PARAMETRIZADOS EN ELASTICIDAD LINEAL

CARLOS A. FELIPPA
y
CARMELO MILITELLO

*Department of Aerospace Engineering Sciences
& Center for Space Structures and Controls,
University of Colorado,
Boulder, Colorado 80309-0429, USA*

RESUMEN

Este trabajo presenta una formulación parametrizada de los principios variacionales de elasticidad lineal. La formulación incluye como casos especiales todos los principios variacionales clásicos en que el campo de desplazamientos varía independientemente. En artículos relacionados, esta formulación, conjuntamente con el tratamiento híbrido de interfaces internas, se usa para justificar y desarrollar clases de elementos finitos de alto rendimiento.

SUMMARY

This paper presents a parametrized formulation of the variational principles of linear elasticity. The formulation includes as special cases all classical principles with independently varied displacement field. In related papers this formulation, in conjunction with the hybrid treatment of internal interfaces, is used as a basis for the variational justification and further development of high performance finite elements.

INTRODUCCION

El estudio clásico de métodos variacionales en elasticidad sigue generalmente dos caminos diferentes: generalización progresiva de principios especializados (por ejemplo, el principio de energía potencial total), o especialización creciente del principio más general (Hu-Washizu). La mayoría de las exposiciones didácticas siguen el primer camino, mientras que la mayoría de los tratados monográficos siguen el segundo. En ambos casos es tradicional presentar los principios clásicos uno por uno: energía potencial, energía complementaria, Hellinger-Reissner, Hu-Washizu, etc.. Este trabajo toma una ruta distinta. Todos los principios variacionales de elasticidad lineal con variación independiente de desplazamientos se confluyen en una *funcional parametrizada* que provee los resultados clásicos para valores específicos de los parámetros. El resultado es una familia continua de formulaciones. El estudio de

Recibido: Junio 1989

la primera variación de esta funcional indica que el máximo numero de parámetros independientes es tres.

Esta formulación parametrizada de principios variacionales en elasticidad ha sido útil como una base para desarrollar *elementos finitos de alto rendimiento*. En particular este procedimiento variacional aclara varios puntos dudosos relacionados con la "formulación libre" de Bergan y Nygård^{1,2}, y con la formulación de "deformaciones naturales" estudiada recientemente por los autores^{11,12}. Un ingrediente importante de este método es la retención de los parámetros libres del principio general *al nivel de los elementos finitos*, es decir, a través de la discretización. Los valores de estos parámetros se ajustan con un método de balance de energía para mejorar la calidad de la aproximación numérica, y pueden variar de elemento a elemento. Aplicaciones de esta índole se describen en una serie de artículos recientes³⁻¹⁰.

EL PROBLEMA DE ELASTOSTATICA LINEAL

Consideramos un *cuerpo linealmente elástico* bajo carga estática que ocupa el volumen V . El cuerpo está delimitado por una superficie S que descomponemos en $S : S_d \cup S_t$. Desplazamientos se especifican en S_d y tracciones de superficie en S_t . El vector normal exterior unitario en S es $\mathbf{n} \equiv n_i$.

Los tres campos de volumen incógnitos son los desplazamientos $\mathbf{u} \equiv u_i$, deformaciones $\mathbf{e} \equiv e_{ij}$, y tensiones $\boldsymbol{\sigma} \equiv \sigma_{ij}$. Los datos incluyen: el campo de fuerzas volumétricas $\mathbf{B} \equiv b_i$ en V , desplazamientos conocidos $\hat{\mathbf{u}}$ en S_d , y tracciones conocidas $\hat{\mathbf{t}} \equiv \hat{t}_i$ en S_t .

Las relaciones que ligan los campos de volumen son las ecuaciones de deformación-desplazamiento:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad \text{ó} \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{en } V, \quad (1)$$

las ecuaciones constitutivas

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\mathbf{e} \quad \text{ó} \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl}e_{kl} \quad \text{en } V, \quad (2)$$

y las ecuaciones de equilibrio

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^* \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{B} \quad \text{ó} \quad \sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{en } V, \quad (3)$$

donde $\mathbf{D}^* = -\operatorname{div}$ es el operador adjunto de $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^T)$.

El vector de tensión con respecto a una dirección definida por el vector unitario \mathbf{v} se escribe $\boldsymbol{\sigma}_v = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}$, ó $\sigma_{vi} = \sigma_{ij}v_j$. En la superficie S el vector de tracciones se define como

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad \text{ó} \quad \sigma_{ni} = \sigma_{ij}n_j. \quad (4)$$

Con esta definición la condición de contorno en las tracciones se escribe

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{ó} \quad \sigma_{ij}n_j = \hat{t}_i \quad \text{sobre } S_t, \quad (5)$$

mientras que la condición de desplazamientos de contorno es

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{d}} \quad \text{ó} \quad u_i = \hat{d}_i \quad \text{sobre } S_d. \quad (6)$$

NOTACION

Dependencias Variacionales

En métodos variacionales de aproximación no se trabaja por supuesto con los campos exactos que satisfacen las ecuaciones (1)-(3), (5)-(6), sino con campos *independientes* (primarios) que están sujeto a variaciones, y campos *dependientes* (secundarios, asociados, derivados), que no lo están. Las aproximación se determina tomando variaciones con respecto a los campos independientes.

Un campo *variado en forma independiente* será identificado con un guíño superpuesto, por ejemplo $\tilde{\mathbf{u}}$. Un campo dependiente se identifica escribiendo el campo independiente del que depende como superscripto. Por ejemplo, si los desplazamientos se varían independientemente, los campos de deformaciones y tensiones derivados son

$$\mathbf{e}^u = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^T)\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\sigma}^u = \mathbf{E}\mathbf{e}^u = \mathbf{ED}\tilde{\mathbf{u}}. \quad (7)$$

Una ventaja de esta convención es que \mathbf{u} , \mathbf{e} y $\boldsymbol{\sigma}$ pueden reservarse para los campos *exactos*.

Abreviación de Integrales

Integrales de volumen y superficie se abreviarán poniendo paréntesis y corchetes, respectivamente, alrededor del integrando. Por ejemplo:

$$(f)_V \stackrel{\text{def}}{=} \int_V f \, dV, \quad [f]_S \stackrel{\text{def}}{=} \int_S f \, dS, \quad [f]_{S_d} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{S_d} f \, dS, \quad [f]_{S_t} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{S_t} f \, dS. \quad (8)$$

Si \mathbf{f} y \mathbf{g} son funciones vectoriales y \mathbf{p} y \mathbf{q} funciones tensoriales, su producto interior en V se escribe de la manera usual:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_V \stackrel{\text{def}}{=} \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \, dV = \int_V f_i g_i \, dV, \quad (\mathbf{p}, \mathbf{q})_V \stackrel{\text{def}}{=} \int_V \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \, dV = \int_V p_{ij} q_{ij} \, dV, \quad (9)$$

y similarmente para integrales de superficie, en cuyo caso se usarán corchetes.

Interfases Interiores

En las subsecciones siguientes se construyen *principios variacionales híbridos* en que desplazamientos de borde d se pueden variar independientemente de los desplazamientos internos u . Estos desplazamientos funcionan como multiplicadores de Lagrange que relajan la continuidad de los desplazamientos internos. Principios variacionales que contienen P^d se llamarán de *desplazamientos generalizados*, o d -generalizados.

La selección de d como campo independiente *no es variacionalmente admisible* en S_d ó S_t . Por lo tanto debemos extender la definición de la frontera para incluir *interfases internas* designadas colectivamente como S_i . Así

$$S : S_d \cup S_t \cup S_i. \quad (10)$$

En S_i ni los desplazamientos ni las tracciones se especifican. Detalles adicionales sobre la definición de integrales de volumen y superficie en la presencia de S_i pueden verse en^{6-8,11}.

La aparición de la frontera S_i es una consecuencia natural del uso de elementos finitos de tipo híbrido. En efecto, la unión de bordes *comunes a dos ó más* elementos híbridos, constituye S_i . Se nota que en general esta frontera es artificial pues depende de la discretización elegida*.

LAS FUNCIONALES DE ELASTICIDAD LINEAL

Los principios variacionales de elasticidad lineal se basan en funcionales de la forma

$$\Pi = U - P, \quad (11)$$

donde U caracteriza la energía interna almacenada en el volumen y P incluye otras contribuciones como el trabajo de las cargas aplicadas y la energía de "dislocación" almacenada en S_i . Llamaremos U la *energía de deformación generalizada* y P el *potencial de solicitación*.

La Energía de Deformación Generalizada

La energía de deformación generalizada (EDG) tiene la expresión general

$$U = \frac{1}{2}j_{11}(\tilde{\sigma}, e^\sigma)v + j_{12}(\tilde{\sigma}, \tilde{e})v + j_{13}(\tilde{\sigma}, e^u)v + \frac{1}{2}j_{22}(\sigma^e, \tilde{e})v + j_{23}(\sigma^e, e^u)v + \frac{1}{2}j_{33}(\sigma^u, e^u)v \quad (12)$$

donde j_{11}, \dots, j_{33} son coeficientes numéricos. Por ejemplo, la EDG del principio de Hu-Washizu se obtiene poniendo $j_{12} = -1$, $j_{13} = 1$, $j_{22} = 1$, otros cero. La representación matricial del funcional (12) y las relaciones que deben existir entre los coeficientes se estudian en otro apartado.

* Si hay interfaces naturales interiores —por ejemplo un cambio brusco de material o de dimensiones— es práctica común disponer la malla de modo que las interfaces naturales también sean interfaces entre elementos.

Potenciales de Solitación Híbridos

Principios variacionales de elasticidad lineal se construyen combinando la integral volumétrica (12) con P . Dos formas de este potencial de solitación (PS), llamado P^d y P^t en lo que sigue, son de interés en el tratamiento híbrido de discontinuidades en la interfase S_i . El PS d -generalizado (desplazamiento generalizado) introduce un *campo independiente de desplazamientos* \tilde{d} sobre S_i :

$$P^d(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\mathbf{d}}) = (\mathbf{B}, \tilde{\mathbf{u}})_V + [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n, \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{d}}]_{S_d} + [\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{u}}]_{S_t} + [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n, \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{d}}]_{S_i}. \quad (13)$$

El PS t -generalizado (tracción generalizado) introduce un *campo independiente de tracciones* $\tilde{\mathbf{t}}$ sobre S_i :

$$P^t(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\mathbf{t}}) = (\mathbf{B}, \tilde{\mathbf{u}})_V + [\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{d}}]_{S_d} + [\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{u}}]_{S_t} + [\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{u}}]_{S_i}. \quad (14)$$

La forma "convencional" P^c del PS se obtiene si las integrales sobre S_i se anulan y en adición se toma $\mathbf{t} \equiv \boldsymbol{\sigma}_n$ sobre S . En este caso P^t y P^d se convierten en P^c , que retiene sólo dos campos independientes:

$$P^c(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = (\mathbf{B}, \tilde{\mathbf{u}})_V + [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n, \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{d}}]_{S_d} + [\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{u}}]_{S_t}. \quad (15)$$

PS Modificados

La derivación de ciertas clases de elementos finitos de alto rendimiento ha sido basada primordialmente en el potencial P^d . Estas derivaciones no se basan directamente en (13) sino en formas modificadas en la que la integral sobre S_i se transforma en una integral sobre la frontera total (10). Estas modificaciones se pueden estudiar en^{7,8} y no son requeridas en el material que sigue.

Funcionales Completos

Las funcionales de elasticidad (11) se obtienen combinando la ETG (12) con uno de los potenciales (13)-(15). Por ejemplo, las versiones d y t generalizadas de la funcional de Hu-Washizu son

$$\Pi_W^d = U_W - P^d, \quad \Pi_W^t = U_W - P^t, \quad (16)$$

donde U_W se obtiene poniendo $j_{22} = j_{13} = 1$, $j_{12} = -1$, otros cero, en (12).

REPRESENTACION MATRICIAL DE FUNCIONALES

La EDG (12) se puede escribir en forma matricial como*

$$U = \frac{1}{2} \int_V \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad \boldsymbol{\sigma}^e \quad \boldsymbol{\sigma}^u \rangle \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ & j_{22} & j_{23} \\ sim & & j_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}^\sigma \\ \tilde{\mathbf{e}} \\ \mathbf{e}^u \end{Bmatrix} dV. \quad (17)$$

* Para justificar la simetría de \mathbf{J} nótese, por ejemplo, que $j_{13}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{e}^u)_V = \frac{1}{2}j_{13}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{e}^u)_V + \frac{1}{2}j_{13}(\mathbf{e}^\sigma, \boldsymbol{\sigma}^u)_V$, etc..

La matriz simétrica

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ sim & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} \quad (18)$$

caracteriza la EDG. Usando las ecuaciones $\sigma^e = \mathbf{E}\mathbf{e}$, $\sigma^u = \mathbf{ED}\tilde{\mathbf{u}}$, $\mathbf{e}^e = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{e}$, y $\mathbf{e}^u = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}$, la integral (17) se puede escribir en la forma alternativa

$$U = \frac{1}{2} \int_V \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad \tilde{\mathbf{e}} \quad \tilde{\mathbf{u}} \rangle \begin{bmatrix} j_{11}\mathbf{E}^{-1} & j_{12}\mathbf{I} & j_{13}\mathbf{D} \\ j_{12}\mathbf{I} & j_{22}\mathbf{E} & j_{23}\mathbf{ED} \\ j_{13}\mathbf{D}^T & j_{23}\mathbf{D}^T\mathbf{E} & j_{33}\mathbf{D}^T\mathbf{ED} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ \tilde{\mathbf{e}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} dV. \quad (19)$$

La Primera Variación

La primera variación de la EDG (17) es

$$\delta U = (\Delta \mathbf{e}, \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}})_V + (\Delta \boldsymbol{\sigma}, \delta \tilde{\mathbf{e}})_V - (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}', \delta \tilde{\mathbf{u}})_V + [\boldsymbol{\sigma}'_n, \delta \tilde{\mathbf{u}}]_S, \quad (20)$$

donde

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta \mathbf{e} &= j_{11}\mathbf{e}^{\boldsymbol{\sigma}} + j_{12}\tilde{\mathbf{e}} + j_{13}\mathbf{e}^u, \\ \Delta \boldsymbol{\sigma} &= j_{12}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + j_{22}\boldsymbol{\sigma}^e + j_{23}\boldsymbol{\sigma}^u, \\ \boldsymbol{\sigma}' &= j_{13}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + j_{23}\boldsymbol{\sigma}^e + j_{33}\boldsymbol{\sigma}^u. \end{aligned}} \quad (21)$$

Los dos términos últimos en (20) se combinan con contribuciones de la variación de P . Por ejemplo, si $P = P^c$ la variación completa de $\Pi^c = U - P^c$ es

$$\delta \Pi^c = (\Delta \mathbf{e}, \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}})_V + (\Delta \boldsymbol{\sigma}, \delta \tilde{\mathbf{e}})_V - (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{B}, \delta \tilde{\mathbf{u}})_V + [\boldsymbol{\sigma}'_n - \hat{\mathbf{t}}, \delta \tilde{\mathbf{u}}]_{S_t} + [-\tilde{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{d}}, \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n]_{S_d}. \quad (22)$$

Usando P^d ó P^t no cambia los términos volumétricos. Las ecuaciones de Euler-Lagrange que corresponden a P^d y P^t se estudian en^{6,7,8,10,11} para una forma más restrictiva de las funcionales U .

Por consistencia de las ecuaciones de Euler-Lagrange con las ecuaciones de campo debemos tener $\Delta \mathbf{e} = 0$, $\Delta \boldsymbol{\sigma} = 0$ y $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}$ si los campos de tensiones y deformaciones se reducen a los exactos. En consecuencia

$$\boxed{\begin{aligned} j_{11} + j_{12} + j_{13} &= 0, \\ j_{12} + j_{22} + j_{23} &= 0, \\ j_{13} + j_{23} + j_{33} &= 1. \end{aligned}} \quad (23)$$

Debido a estas condiciones de vínculo, el máximo número de parámetros independientes que define los elementos de \mathbf{J} es tres. Un estudio más detallado de las condiciones (23) y del significado físico de las ecuaciones con relación al método de residuos ponderados $\Delta \mathbf{e} = 0$ y $\Delta \boldsymbol{\sigma} = 0$ se presenta en¹⁰.

Funcionales Específicas

Expresiones de \mathbf{J} para ciertos principios clásicos y parametrizados se tabulan en lo que sigue. Los subscripts de \mathbf{J} sirven para identificar las funcionales, que aparecen más ó menos en orden de complejidad creciente. Los campos indicados en paréntesis después del nombre de la funcional son aquellos que varían independientemente.

Energía potencial total ($\tilde{\mathbf{u}}$):

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Tensión-desplazamiento Reissner, tambien llamada Hellinger-Reissner, ($\tilde{\sigma}, \tilde{\mathbf{u}}$):

$$\mathbf{J}_R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Funcional tensión-desplazamiento "anónima" que aparece en Oden y Reddy³: ($\tilde{\sigma}, \tilde{\mathbf{u}}$):

$$\mathbf{J}_U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Deformación-desplazamiento Reissner¹³ ($\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{u}}$):

$$\mathbf{J}_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Hu-Washizu ($\tilde{\sigma}, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{u}}$):

$$\mathbf{J}_W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Familia de tensión-desplazamiento parametrizada ($\tilde{\sigma}, \tilde{\mathbf{u}}$) que incluye a U_P , U_R y U_U como casos especiales^{5,7,8}:

$$\mathbf{J}_\gamma = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 1-\gamma \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Familia deformación-desplazamiento parametrizada ($\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{u}}$) que incluye a U_P y U_S como casos especiales⁷:

$$\mathbf{J}_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \beta \\ 0 & \beta & 1-\beta \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Familia tensión-deformación-desplazamiento doblemente parametrizada ($\tilde{\sigma}, \tilde{\epsilon}, \tilde{u}$) que incluye a U_β y U_γ como casos especiales⁷:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\beta\gamma} &= (1 - \beta)\mathbf{J}_\gamma + (1 - \gamma)\mathbf{J}_\beta - (1 - \beta - \gamma)\mathbf{J}_P \\ &= \begin{bmatrix} -\gamma(1 - \beta) & 0 & \gamma(1 - \beta) \\ 0 & -\beta(1 - \gamma) & \beta(1 - \gamma) \\ \gamma(1 - \beta) & \beta(1 - \gamma) & 1 - \beta - \gamma + 2\beta\gamma \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

Familia tensión-deformación-desplazamiento triplemente parametrizada ($\tilde{\sigma}, \tilde{\epsilon}, \tilde{u}$) que incluye a U_W y $U_{\beta\gamma}$ como casos especiales⁷:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\alpha\beta\gamma} &= \alpha\mathbf{J}_W + (1 - \alpha)\mathbf{J}_{\beta\gamma} \\ &= \begin{bmatrix} -\gamma(1 - \beta)(1 - \alpha) & -\alpha & \alpha + \gamma(1 - \beta)(1 - \alpha) \\ -\alpha & \alpha - \beta(1 - \gamma)(1 - \alpha) & \beta(1 - \gamma)(1 - \alpha) \\ \alpha + \gamma(1 - \beta)(1 - \alpha) & \beta(1 - \gamma)(1 - \alpha) & (1 - \beta - \gamma + 2\beta\gamma)(1 - \alpha) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (32)$$

La última forma, que contiene tres parámetros independientes, provee todas las matrices \mathbf{J} que satisfacen las condiciones (23). Nótese que $\mathbf{J}_{\alpha\beta\gamma}$ da funcionales de tipo tensión-desplazamiento si $\alpha = \beta = 0$, de tipo deformación-desplazamiento si $\alpha = \gamma = 0$, y de tipo tensión-deformación-desplazamiento en caso contrario.

Descomposición en Energía

Una descomposición interesante de \mathbf{J} como suma de cuatro matrices de rango uno es

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

donde $c_1 = \frac{1}{2}(j_{11} + j_{22} - j_{33} + 1)$, $c_2 = \frac{1}{2}(-j_{11} + j_{22} + j_{33} - 1)$, y $c_3 = \frac{1}{2}(j_{11} - j_{22} + j_{33} - 1)$. Para reinterpretar (33) como descomposición en energía, llamemos

$$\mathcal{U}(\epsilon) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\epsilon, \epsilon)_V \quad (34)$$

la habitual energía de deformación (“strain energy”) asociada con el campo de deformaciones ϵ . (Si el tensor \mathbf{E} es positivo definido, $\mathcal{U}(\epsilon)$ es no-negativa.) Entonces

$$U = \mathcal{U}(\epsilon^u) + c_1\mathcal{U}(\epsilon^\sigma - \tilde{\epsilon}) + c_2\mathcal{U}(\tilde{\epsilon} - \epsilon^u) + c_3\mathcal{U}(\epsilon^u - \epsilon^\sigma), \quad (35)$$

donde $\mathcal{U}_P(\epsilon^u) = U_P$ es la energía de deformación que aparece en el principio clásico de energía potencial total. Descomposiciones de esta forma proveen la base para el “ajuste” de elementos finitos de alto rendimiento por el método de *balance de energía* considerando “parches” de elementos sometidos a ciertos sistemas de deformaciones y cargas^{4,5,7,8}.

CONCLUSIONES

Hemos presentado una formulación parametrizada de las funcionales de elasticidad lineal, que incluye varios principios clásicos como casos especiales. Esta formulación ha probado su utilidad en la construcción y ajuste de elementos finitos de alto rendimiento.

Debemos notar que la expresión (17) incluye solamente principios variacionales de elasticidad en que el campo de desplazamientos únicamente varía independientemente y excluye principios en que eso no ocurre; por ejemplo la funcional de energía complementaria. Una forma parametrizada más general que también incluye los principios de tipo tensión-deformación (sin desplazamientos independientes) se presenta en¹⁰.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo del primer autor ha sido financiado por NASA Lewis Research Center (Grant NAG 3-934). El trabajo del segundo autor ha sido apoyado por una beca del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina.

REFERENCIAS

1. P.G. Bergan y M.K. Nygård, "Finite elements with increased freedom in choosing shape functions," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **20**, pp. 643-664, (1984).
2. P.G. Bergan y M.K. Nygård, "Nonlinear shell analysis using free formulation finite elements," *Proc. Europe-US Symposium on Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, Trondheim, Norway, Springer-Verlag, Berlin, (1985).
3. P.G. Bergan y C.A. Felippa, "A triangular membrane element with rotational degrees of freedom", *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. **50**, pp. 25-69, (1985).
4. C.A. Felippa y P.G. Bergan, "A triangular plate bending element based on an energy-orthogonal free formulation", *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. **61**, pp. 129-160, (1987).
5. C.A. Felippa, "Parametrized multifield variational principles in elasticity", *Proceedings Pan-American Congress of Applied Mechanics*, (PACAM), Rio de Janeiro, Brasil, (1989).
6. C.A. Felippa, "Parametrized multifield variational principles in elasticity: I. Mixed functionals," *Commun. Applied Numer. Methods*, Vol. **5**, pp. 79-88 (1989).
7. C.A. Felippa, "Parametrized multifield variational principles in elasticity: II. Hybrid functionals and the free formulation," *Commun. Applied Numer. Methods*, Vol. **5**, pp. 89-98 (1989).
8. C.A. Felippa, "The extended free formulation of finite elements in linear elasticity," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. **86**, pp. 609-616, (1989).
9. C.A. Felippa y C. Militello, "Variational formulation of high performance finite elements: parametrized variational principles", aceptada para publicación en *Computers & Structures*, (1989).
10. C.A. Felippa y C. Militello, "Developments in variational methods for high performance plate and shell elements," *Proceedings AMD Symposium on Analytical and Computational Models for Shells*, Editor A.K. Noor, ASME Winter Annual Meeting, San Francisco, CA, (1989).

11. C. Militello y C.A. Felippa, "A variational justification of the assumed natural strain formulation of finite elements: I. Variational principles," aceptada para publicación en *Computers & Structures*. (1989).
12. C. Militello y C.A. Felippa, "A variational justification of the assumed natural strain formulation of finite elements: II. The four node C^0 plate element", aceptada para publicación en *Computers & Structures*, (1989).
13. J.T. Oden y J.N. Reddy, *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, 2^a edición, Springer-Verlag, Berlin, (1983).