

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO CONFINADO DE FLUIDO POLIMÉRICO EM PRESENÇA DE OBSTÁCULO

R.G. PEREIRA*
W. BRAGA**
e
M.N. FROTA* **

** Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal Fluminense, UFF
Rua Passos da Pátria, 156
24210-240 Niterói - RJ - Brasil*

*** Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-Rio
Rua Marquês de São Vicente, 225
22453-900 Rio de Janeiro - RJ - Brasil*

SUMÁRIO

O presente código numérico utilizando formulação primitiva e malhas não-deslocadas foi desenvolvido para resolver o escoamento de fluidos não-newtonianos puramente viscosos. As equações de *momentum* são resolvidas usando um método tridiagonal em bloco de dois permitindo o acoplamento das equações durante a solução. A equação da pressão, obtida através do uso da equação da continuidade, é resolvida pelo método SOR. Resultados numéricos para o escoamento confinado em regime permanente de fluidos *power-law* em presença de obstáculos são apresentados.

SUMMARY

This numerical code using primitive formulation and non displaced grids has been developed to solve purely viscous non-Newtonian fluid flow. The momentum equations are solved using a two block tridiagonal method allowing the coupling of the equations during solution. The pressure equation, obtained using the continuity equation, is solved by SOR. Numerical results for confined permanent power-law flow with obstacles are presented.

Recibido: Enero 1995

INTRODUÇÃO

A relevância científica, tecnológica e comercial do escoamento de fluidos em presença de obstáculos (sistemas fluido-partícula) pode ser constatada em diversas aplicações: processos de filtração e sedimentação; transportes fluidizados; movimento de bio-partículas no sangue etc. A importância deste tema tem sido evidenciada nos trabalhos de vários pesquisadores: Kim and Cho⁵ etc. Neste contexto, um código numérico utilizando formulação primitiva e malhas não-deslocadas foi desenvolvido para resolver o escoamento de fluidos não-newtonianos puramente viscosos em presença de obstáculos. A revisão bibliográfica encontra-se detalhada em Pereira⁶.

FORMULAÇÃO E DESCRIÇÃO FÍSICA

A Figura 1 mostra o escoamento de um fluido em torno de uma partícula cilíndrica localizada na linha de centro do duto.

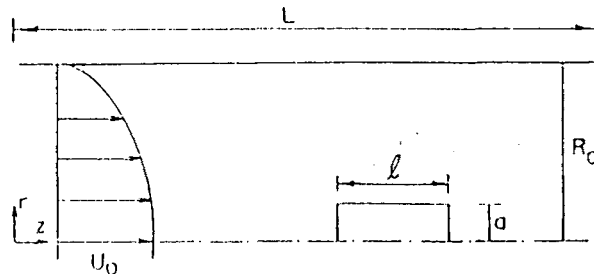


Figura 1. Escoamento confinado de fluido em presença de obstáculo

As equações de movimento adimensionais são escritas abaixo, usando u, v e p como variáveis dependentes. Embora somente soluções em regime permanente sejam requeridas no presente estudo, os termos transientes são mantidos com a finalidade de aplicar-se relaxação na solução por diferenças finitas.

Equação da continuidade:

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{v}{r} = 0 \quad (1)$$

Momentum na direção radial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial r} + \frac{\partial(uv)}{\partial z} + \frac{v^2}{r} = \frac{\eta}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{\eta}{Re} \frac{v}{r^2} \\ + \frac{2}{Re} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \eta}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial p}{\partial r} \end{aligned} \quad (2)$$

Momentum na direção axial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial r} + \frac{\partial u^2}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \frac{\eta}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ + \frac{2}{Re} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \eta}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (3)$$

sendo η e Re , respectivamente, a função viscosidade e o número de Reynolds dados por

$$\eta = m(2 \mathbf{II}_\Gamma)^{\frac{n-1}{2}} \quad (4)$$

$$Re = \frac{\rho V^{2-n} d^n}{m 8^{n-1} \left(\frac{3n+1}{4n} \right)^n} \quad (5)$$

sendo m o parâmetro de consistência; n o expoente *power-law*; \mathbf{II}_Γ o segundo invariante do tensor deformação; V a velocidade de Hagen-Poiseuille no centro da partícula, conforme Fayon e Happel⁴, e d o diâmetro equivalente de uma esfera tendo a mesma área superficial que a da partícula cilíndrica.

A condição de contorno hidrodinâmica ao longo das paredes do duto e partícula é a condição de não-deslizamento, implicando em $u_w = v_w = 0$. Na entrada e saída do duto, assume-se a condição de escoamento desenvolvido. A saída do duto encontra-se sempre suficientemente distante da localização da partícula.

MÉTODO NUMÉRICO

Denotando por ϕ a variável dependente, a forma geral das equações escritas em coordenadas cilíndricas é

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(v\phi)}{\partial r} + \frac{\partial(u\phi)}{\partial z} + \frac{v\phi}{r} = C^\phi \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + F^\phi + G^\phi + P^\phi \quad (6)$$

As equações da continuidade e *momentum* são obtidas da equação (6), utilizando-se valores apropriados para C^ϕ , F^ϕ , G^ϕ e P^ϕ .

No presente trabalho, utilizou-se uma adequada decomposição do domínio computacional, evitando-se o uso de malhas não-ortogonais. A célula computacional típica e uma das malhas utilizadas são mostradas nas Figuras 2 e 3, respectivamente.

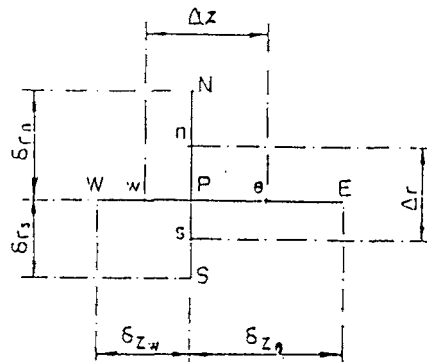


Figura 2. Célula computacional típica

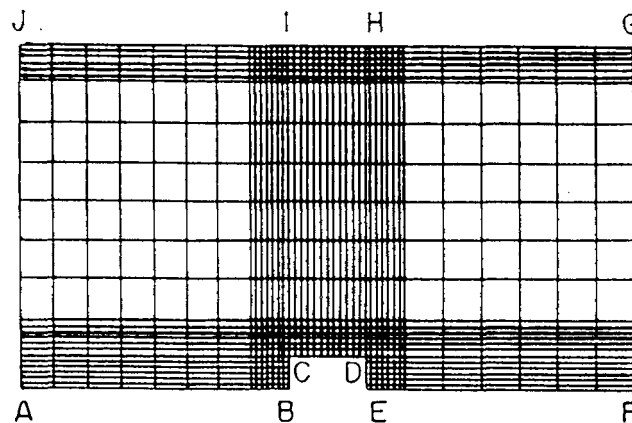


Figura 3. Malha computacional típica

Não linearidade e discretização das equações

No presente trabalho, utilizou-se a formulação primitiva e malhas não-deslocadas. A equação da pressão, obtida através do uso da equação da continuidade, é resolvida pelo método SOR e em seguida as equações de *momentum* são resolvidas usando-se um método tridiagonal em bloco de dois, Cebeci e Bradshaw³, permitindo o acoplamento das equações durante a solução. A seguir, diversos aspectos da implementação numérica das equações serão apresentados, começando-se com a técnica utilizada na linearização.

As não linearidades estão presentes nos termos de inércia e nos termos viscosos. O tratamento numérico destes termos é feito de forma diferenciada tendo em vista uma maior eficiência computacional. Os termos de inércia são linearizados pelo método Newton-Raphson visando manter o acoplamento das equações de *momentum* com uma taxa de convergência de segunda ordem. Para um termo típico, resulta em

$$u^{t+1} \phi^{t+1} = \phi^t u^{t+1} + u^t \phi^{t+1} - u^t \phi^t \quad (7)$$

sendo que t indica o número da iteração. A não linearidade associada à dependência da função viscosidade com o tensor deformação foi tratada diferenciadamente. Embora diversas técnicas implícitas de linearização dos termos viscosos tenham sido investigadas, Pereira^{6,7}, o modo mais eficiente foi a utilização de um simples procedimento explícito, ou seja, a função viscosidade é avaliada usando-se o campo de velocidades obtidos da iteração anterior. Para todos os casos testados, este procedimento levou a uma melhor taxa de convergência. Naturalmente, para a situação de regime transiente, um outro tratamento deverá ser necessário.

Uma vez linearizadas as equações, a próxima etapa consiste na discretização dos termos. Para as derivadas de segunda ordem, um esquema tradicional de diferenças centrais adequado ao caso de malhas não-uniformes foi utilizado, resultando, por exemplo, em

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{2}{\delta z_e + \delta z_w} \left[\frac{\phi_E}{\delta z_e} - \left(\frac{1}{\delta z_e} + \frac{1}{\delta z_w} \right) \phi_P + \frac{\phi_W}{\delta z_w} \right] \quad (8)$$

No presente trabalho, tratamento especial é dado aos termos de inércia, sendo utilizado um esquema similar ao proposto por Braga¹ usando-se uma fórmula de três pontos, própria para o caso de malhas não-uniformes. Deste modo, considerando a nomenclatura da Figura 2, tem-se

$$\frac{\partial(u\phi)}{\partial z} = \frac{(u\phi)_e}{\delta z_e} + \left(\frac{1}{\delta z_w} - \frac{1}{\delta z_e} \right) (u\phi)_P - \frac{(u\phi)_w}{\delta z_w} \quad (9)$$

Ao invés de utilizar-se a média aritmética entre ϕ_E e ϕ_P para a obtenção de ϕ_e , uma formulação mais geral é usada

$$\phi_e = \left(1 - \alpha_z \frac{2 \delta z_w}{\delta z_e + \delta z_w} \right) \frac{(\delta z_e) \phi_E}{\delta z_e + \delta z_w} + \left(1 + \alpha_z \frac{2 \delta z_e}{\delta z_e + \delta z_w} \right) \frac{(\delta z_w) \phi_P}{\delta z_e + \delta z_w} \quad (10)$$

A velocidade na posição e é dada por

$$u_e = \frac{\delta z_e}{\delta z_e + \delta z_w} u_E + \frac{\delta z_w}{\delta z_e + \delta z_w} u_P \quad (11)$$

com equações similares aplicáveis às outras variáveis. A determinação de α_z é feita de modo a evitar o aparecimento de flutuações espaciais durante a solução do problema. Conforme Braga¹, tem-se

$$\alpha_z = \frac{\delta z_e + \delta z_w}{2 \delta z_w} - \frac{2}{|Re_z|} \quad \text{para } u_P > 0 \quad (12)$$

ou seu negativo, no caso de $u_P < 0$. Nesta equação, Re_z é o número de Reynolds da célula computacional, dado por

$$Re_z = 2u_P \frac{\delta z_e \delta z_w}{\delta z_e + \delta z_w} Re \quad (13)$$

Se o valor de α_z obtido da equação (12) for negativo utiliza-se $\alpha_z = 0$. Nestas situações, o esquema tradicional de diferenças centrais é usado, sendo propício para escoamento fortemente viscoso. Conforme indicado por Braga¹, valores específicos de α_z reproduzem outros esquemas já utilizados na literatura, tais como o esquema exponencial, o esquema *power-law* etc. Como pode ser constatado, os resultados obtidos com a equação (9) são comparáveis com os demais esquemas, sendo muito mais simples de serem avaliados. Após um arranjo adequado, obtém-se a seguinte equação de *momentum* discretizada na direção axial

$$\begin{aligned} \frac{A_P^u u_P^{t+1}}{\beta} + A_N^u u_N^{t+1} + A_S^u u_S^{t+1} + A_E^u u_E^{t+1} + A_W^u u_W^{t+1} + B_P^u v_P^{t+1} + B_N^u v_N^{t+1} + \\ + B_S^u v_S^{t+1} - C_E^u p_E^t - C_P^u p_P^t - C_W^u p_W^t + SF + SFZ + A_P^u u_P^t \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

que pode ser escrita como

$$u_P = \hat{u}_P - \frac{\beta}{A_P^u} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_P \quad (15)$$

sendo β o fator de relaxação incluído devido ao desacoplamento entre as equações de *momentum* e pressão visando assegurar um procedimento iterativo convergente e \hat{u} indica todos os termos exceto o gradiente de pressão discretizado, Peric⁹. Conforme mencionado anteriormente, as equações de *momentum* são resolvidas em bloco pelo algoritmo de Thomas, usado sequencialmente em ambas as direções. A discretização da equação de *momentum* na direção radial é obtida similarmente.

A equação da pressão é obtida pela substituição dos componentes da velocidade dados pelas equações de *momentum* na equação da continuidade, similarmente ao procedimento utilizado por Thiar¹⁰. A discretização dos gradientes de velocidade nesta equação é feita pelo seguinte esquema

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_e - u_w}{0,5(\delta z_e + \delta z_w)} \quad (16)$$

Após a discretização, tem-se para a equação da continuidade

$$u_e - u_w + \frac{\delta z_e + \delta z_w}{\delta r_n + \delta r_s} (v_n - v_s) + \frac{\delta z_e + \delta z_w}{2r_P} v_P = 0 \quad (17)$$

Embora não estritamente necessário, v_P na equação (17) pode ser substituído pela seguinte relação linear entre v_n e v_s :

$$v_P = \frac{\delta r_s}{\delta r_n + \delta r_s} v_n + \frac{\delta r_n}{\delta r_n + \delta r_s} v_s \quad (18)$$

Combinando-se as equações, resulta

$$u_e + u_w + d_1 v_n - d_2 v_s = 0 \quad (19)$$

sendo d_1 e d_2 prontamente obtidos. Em geral, os componentes da velocidade calculados com base em valores estimados, não irão satisfazer a equação da continuidade, assim a equação (19) será igual a um valor Q , representando uma fonte ou sumidouro de massa que deverá ser eliminado antes de obter-se a convergência.

A determinação de u_e, u_w, v_n e v_s é feita aplicando-se as equações de *momentum* entre os pontos nodais. Por exemplo, obtem-se para u_e

$$u_e = \hat{u}_e - \frac{\beta}{A_e} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_e \quad (20)$$

sendo

$$\frac{\partial p}{\partial z} \Big|_e = \frac{p_E - p_P}{\delta z_e} \quad (21)$$

$$\hat{u}_e = \frac{1}{2} (\hat{u}_P + \hat{u}_E) \quad (22)$$

$$A_e = \frac{1}{2} (A_P^u + A_E^u) \quad (23)$$

sendo A_P^u e A_E^u obtidos através da equação (3.9) e \hat{u}_P e \hat{u}_E através da equação (15) aplicadas nos pontos nodais P e E .

Após a substituição de todos os termos, obtem-se para a equação da pressão

$$A_P^P p_P^{t+1} + A_N^P p_N^{t+1} + A_S^P p_S^{t+1} + A_E^P p_E^{t+1} + A_W^P p_W^{t+1} = B^P \quad (24)$$

A equação (24) aplica-se a todos os pontos nodais internos. Próximo ao contorno, utiliza-se os valores conhecidos de velocidades na substituição indicada pela equação (19), evitando-se, assim, a necessidade de conhecer-se as condições de contorno para a pressão.

Metodologia de solução e decomposição de domínio

O algoritmo numérico utilizado para resolver as equações algébricas primeiramente atualiza os valores de pressão resolvendo a equação (24) usando uma única iteração do método SOR. A seguir, os novos valores para os campos de velocidades são obtidos através da solução simultânea das duas equações de *momentum* via o método TDMA.

Conforme mencionado anteriormente, a presença de uma partícula no centro do duto sugere o uso de decomposição do domínio computacional visando levar em conta os aspectos físicos do problema e evitar o uso de malhas fortemente deformadas. A Figura 3 mostra os três sub-domínios utilizados no presente trabalho. Evidentemente, um aspecto crítico neste procedimento é o acoplamento entre as regiões. Isto é feito através do uso das equações de *momentum* (equação (14) e a correspondente equação na direção radial), para os pontos nodais localizados sobre as linhas \overline{CI} e \overline{DH} . Depois de atualizar-se os valores das velocidades nestas linhas, os sub-domínios EFGHE, CDHIC e ABIJA são resolvidos sequencialmente. Estes três sub-domínios também são acoplados aplicando-se a equação (24) (equação da pressão) aos pontos nodais vizinhos as linhas \overline{CI} e \overline{DH} .

RESULTADOS

No presente trabalho, resultados são mostrados para dois parâmetros de interesse: $\Delta P^+ A/D$ e $F_{W^+}^+/D$ (força de pressão adicional e força na parede adicional, ambas normalizadas pela força de arrasto). Resultados para outras situações físicas envolvendo estes e outros parâmetros estão disponíveis em Pereira⁶ e em Pereira^{7,8}.

Os resultados numéricos apresentados foram obtidos em uma malha computacional de 1000 pontos (40 pontos na direção z e 25 na direção r). Concentraram-se vários pontos na região central do duto, onde localiza-se a partícula, conforme ilustrado na Figura 3. Durante a simulação, o parâmetro de relaxação β variou de 0,2 a 0,9 sendo obtida a convergência para: $|(\phi^{t+1} - \phi^t)/\phi^t| < 10^{-4}$.

Validação

O método numérico foi validado com base na intercomparação com resultados experimentais gerados em laboratório para as mesmas condições físicas, e para diversos regimes de escoamento (Pereira^{6,7}). A Tabela I mostra a intercomparação entre computação e experimento para o caso e um fluido puramente viscoso de expoente *power-law* igual 0,7 e para as seguinte razões de aspecto entre partícula e duto: $a/R_0 \leq 0,1$ e $\ell/R_0 = 1,0$.

$\frac{a}{R_0}$	Re	$\frac{\Delta P^+ A}{D}$ Numérico	$\frac{\Delta P^+ A}{D}$ Experimental	Desvio relativo [%]
0,10	0,9	1,8260	1,830	0,20
0,10	1,7	1,8208	1,820	0,04
0,05	8,6	1,8270	1,837	0,50
0,10	25,6	1,8200	1,840	1,10
0,10	100,0	1,4492	1,487	2,50
0,10	350,0	1,0761	1,048	2,70

Tabela I. Comparação da razão $\Delta P^+ A/D$
 Natureza do fluido: não-newtoniana (puramente viscoso, $n = 0,7$)
 Geometria da partícula: cilíndrica ($a/R_0 \leq 0,1$ e $\ell/R_0 = 1,0$)

As razões $\Delta P^+ A/D$ e F_w^+/D

Limitado ao regime de Oseen, as razões $\Delta P^+ A/D$ and F_w^+/D foram teoricamente determinadas por Brenner^{6,7} como uma função do expoente *power-law* (n) para o caso de um fluido puramente viscoso escoando em presença de uma pequena partícula cilíndrica ($a/R_0 \leq 0,1$), localizada na região central do duto.

De acordo com a proposição de Brenner, estas razões de forças podem ser obtidas mediante o valor do expoente *power-law*, através das equações

$$\frac{\Delta P^+ A}{D} = \frac{3n + 1}{n + 1} \quad (25)$$

$$\frac{F_w^+}{D} = \frac{2n}{n + 1} \quad (26)$$

sendo: ΔP^+ a queda de pressão adicional no escoamento devido a presença da partícula; A a área da seção reta do duto; D a força de arrasto sobre a partícula e F_w^+ a força adicional na parede do duto, também devido a presença da partícula no escoamento.

A confirmação experimental dos diferentes aspectos da Teoria de Brenner² tem sido feita por vários pesquisadores conforme descrito em Pereira^{6,7}. Entretanto, nenhum destes trabalhos tratou de fluidos do tipo dilatante ($n > 1$) possivelmente devido as dificuldades associadas a estes fluidos.

Pereira^{6,7} obteve as razões $\Delta P^+ A/D$ e F_w^+/D para diversos tipos de fluidos e situações físicas. Experimentalmente, $\Delta P^+ A/D$ foi determinado para o casos de esferas e partículas cilíndricas em fluidos newtonianos e não-newtonianos (pseudoplástico e viscoelástico). No próximo parágrafo, analisam-se os resultados numéricos de $\Delta P^+ A/D$ e F_w^+/D para as situações envolvendo fluidos newtonianos e não-newtonianos (pseudoplástico e dilatante), em presença de uma partícula cilíndrica.

Resultados numéricos de $\Delta P^+ A/D$ e F_w^+/D

As Figuras 4 e 5 mostram a influência da razão ℓ/R_0 (comprimento da partícula) e do expoente *power-law* (n) sobre $\Delta P^+ A/D$ e F_w^+/D , para o caso do movimento relativo de partículas cilíndricas ($a/R_0 = 0,1$) em fluidos newtonianos e não-newtonianos puramente viscosos. Os resultados numéricos obtidos para os diferentes fluidos e números de Reynolds mostram que as razões $\Delta P^+ A/D$ e F_w^+/D não são afetadas pelo comprimento da partícula. Assim, para cada fluido estudado, a força de pressão adicional e a força na parede adicional mantém-se proporcional a força de arrasto sobre a partícula, independentemente da razão ℓ/R_0 . Estes resultados estão de acordo com a proposição de Brenner² que indica a validade da teoria indistintamente para os casos de comprimentos finitos e infinitos das partículas. Além disto, os resultados para as razões $\Delta P^+ A/D$ e F_w^+/D referentes aos casos de fluidos newtonianos ($n = 1$), pseudoplásticos ($n = 0,7$) e dilatantes ($n = 2$), estão de acordo com as equações (25) e (26).

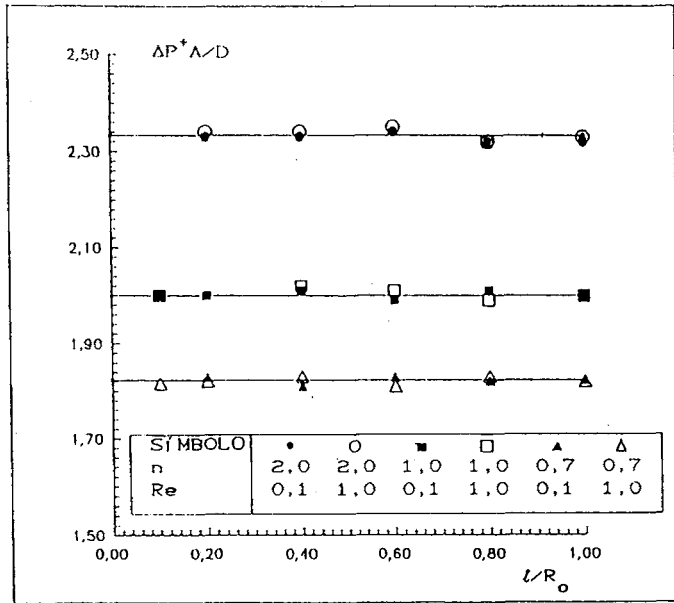


Figura 4. A influência de l/R_0 e n em $\Delta P^+ A/D$

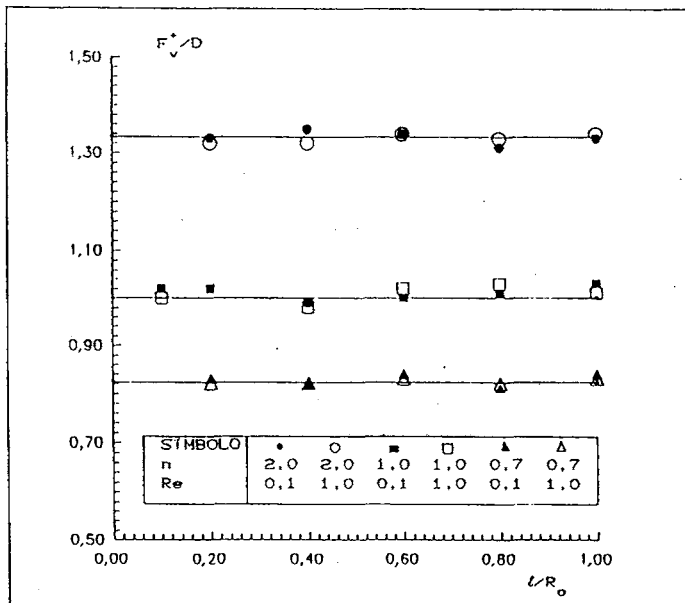


Figura 5. A influência de l/R_0 e n em F_w^+ / D

CONCLUSÃO

Desenvolveu-se um código numérico utilizando formulação primitiva e malhas não-deslocadas que provou-se eficiente para resolver os escoamentos de fluidos não-newtonianos puramente viscosos. Resultados numéricos para o escoamento confinado de fluidos newtonianos e não-newtonianos em presença de obstáculos foram apresentados mostrando a influência do expoente *power-law* e das razões de aspecto entre duto e partícula nos parâmetros de interesse: $\Delta P^+ A/D$ e F_w^+/D .

REFERÊNCIAS

1. W. Braga, "On the Use of Some Weighted Upwind Schemes for Strongly Convective Flows", *Numerical Heat Transfer*, Vol. **18 (B)**, pp. 43–60, (1990).
2. H. Brenner, "Dynamics of a Particle in a Viscous Fluid", *Chemical Engineering Science*, Vol. **17**, pp. 435–446, (1962).
3. T. Cebeci e P. Bradshaw, "*Momentum Transfer in Boundary Layers*", McGraw-Hill Book Company, Washington, (1977).
4. M.A. Fayon e J. Happel, "Effect of Cylindrical Boundary on a Fixed Rigid Sphere in a Moving Viscous Fluid", *A.I.Ch.E. Journal*, Vol. **6**, 1, pp. 55–58, (1960).
5. I. Kim e Y.I. Cho, "The Hydrodynamics of a Bent Cylinder in a Viscoelastic Fluid", *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. **33**, pp. 219–224, (1989).
6. R.G. Pereira, "Investigação Numérico-Experimental de Escoamentos Poliméricos em Presença de uma Obstrução Localizada", Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, (1992).
7. R.G. Pereira, W. Braga e M.N. Frota, "Avaliação Numérico-Experimental de Escoamentos Poliméricos em Presença de Grandes Obstruções" Anais do IV Encontro Nacional de Ciências Térmicas (Rio de Janeiro - Brasil), pp. 557–580, (1992).
8. R.G. Pereira, W. Braga e M.N. Frota, "Redução de Arrasto por Adição Polimérica", Anais do I Congresso Iberoamericano de Engenharia Mecânica (Madri - Espanha), Vol. **1**, pp. 329–334, (1993).
9. M. Peric, R. Kessler, e G. Scheuerer, "Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Colocated Grids", *Computers & Fluids*, Vol. **16**, 4, pp. 389–403, (1988).
10. G.D. Thiart, "Finite Difference Scheme for the Numerical Solution of Fluid Flow and Heat Transfer Problems on Nonstaggered Grids", *Numerical Heat Transfer*, Vol. **17 (B)**, pp. 43–62, (1990).