

Desarrollo de un método numérico para la determinación del mapa tensional en la zona de contacto entre dos cuerpos

Manuel Estrems y Félix Faura

ETS Ingenieros Industriales, Universidad Politécnica de Cartagena

Paseo Alfonso XIII 48, 30203 Cartagena, España

Tel.: 34-968-32 5961, Fax: 34-968-32 6445

e-mail: manuel.estrems@upct.es

e-mail: felix.faura@upct.es

José I. Pedrero

ETS Ingenieros Industriales, UNED

Aptdo. 60149, 28080 Madrid, España

Tel.: 34-91-398 64 30, Fax: 34-91-398 65 36

e-mail: jpedrero@ind.uned.es

Resumen

Se presenta un método numérico para la determinación del mapa tensional en la zona de contacto entre dos cuerpos, a partir de la distribución de presiones sobre la superficie. Este método permite determinar el campo de tensiones cerca de la superficie. Se ha aplicado a las superficies lubricadas donde la picadura es el tipo de fallo más usual en componentes mecánicos como engranajes, cojinetes, etc. Se han usado dos modelos de lubricación: el numérico de Dowson y Higginson, y el analítico de Greenwood. Los resultados muestran que hay una influencia importante de la lubricación sobre la localización del origen de la grieta de la picadura en la superficie y no en la subsuperficie.

DEVELOPMENT OF A NUMERICAL METHOD FOR THE DETERMINATION OF THE TENSIONAL MAP IN THE CONTACT ZONE BETWEEN TWO BODIES

Summary

A numerical method for the determination of the tensional map in the contact zone between two bodies is presented, from the pressure distribution upon the surface. It allows to determine the stress field near the surface. It has been applied to lubricated surfaces, where pitting is the most usual failure in mechanical components as gears, bearings, etc. Two lubrication models have been used: the numerical one of Dowson and Higginson and the analytical one of Greenwood. The results show that lubrication plays an important role on the location of the origin of the pitting on the surface instead of the subsurface.

INTRODUCCIÓN

Una de las causas de fallo que con mayor frecuencia se presentan en transmisiones por engranajes es la conocida como fatiga superficial o picadura. Se caracteriza por una especie de desmoronamiento en la zona de rodadura, en cuya superficie se produce desprendimiento de material, en forma de conos, muy característico de este fenómeno. Pese a ser menos temido que el fallo por rotura en la base, por lo general repentino y de naturaleza catastrófica, la aparición de la picadura, aunque progresiva, termina alterando las características de una buena transmisión, introduciendo ruido, vibraciones y sobrecargas, que pueden llegar a alcanzar valores inaceptables. Asimismo, cuando se trabaja con aceros endurecidos, el riesgo de aparición de picaduras suele ser muy superior al de rotura, lo que determina la necesidad de un buen modelo de comportamiento, del que se puedan extraer predicciones fiables.

Hoy se admite que el fallo por picadura responde a un fenómeno de fatiga. La distribución de presiones en la superficie, en la región próxima al punto de contacto, crea un estado tensional en la subsuperficie del diente, que depende tanto de la geometría de los dientes en contacto como de las características de la lubricación. La máxima tensión de cortadura producida por esta distribución subsuperficial localiza el origen de la grieta, caso de rebasarse el valor de la tensión de fatiga admisible para los ciclos de carga establecidos. Esta grieta incipiente se propaga hasta la superficie, favorecida eventualmente por la inyección a presión de lubricante, hasta provocar el desprendimiento de material. El estudio del valor de las tensiones en la subsuperficie se puede determinar numéricamente, y por lo tanto el punto crítico y el valor de su tensión tangencial máxima también es calculable, mediante el método que se presenta en este trabajo.

El contacto entre dos cilindros, en el caso de tensión plana, que es el que nos ocupa, y más en concreto, el contacto entre dos dientes de engranajes lubricados ha sido estudiado por Poritsky¹ y otros investigadores, basándose en la teoría de Hertz². Sin embargo, la consideración de una distribución distinta de la hertziana no ha sido analizada en toda su profundidad, sobre todo en sus efectos sobre el fallo superficial en componentes mecánicos.

Dos cuerpos deslizando bajo régimen elastohidrodinámico de lubricación pueden tener una distribución de presiones sobre sus superficies distinta de la hertziana. Dowson y Higginson³ proporcionaron soluciones numéricas a las ecuaciones de la mecánica de fluidos y de la elasticidad que intervienen en el fenómeno elastohidrodinámico, y aunque se hayan aportado posteriores mejoras al método, como las de Paolo⁴, sus correlaciones de espesor de película siguen utilizándose en la actualidad. Grubin⁵ resolvió analíticamente las ecuaciones bajo la hipótesis de que las cargas altas las soportan superficies planas y obtuvo que el campo de presiones que se ejercía sobre las superficies coincidía con el dado en el contacto seco, es decir, con el de Hertz. Greenwood⁶ haciendo un cambio de referencia en la resolución de las ecuaciones realizó una extensión del problema de Grubin⁵ y obtuvo una solución analítica más perfecta cuyo campo de presiones ya tenía todas las características observadas en la solución numérica, como el pico en la presión ejercida sobre la superficie. Pan y Hamrock⁷ encontraron unas correlaciones ampliando las de Dowson para el pico de presiones y su localización. Ishii *et al.*⁸ desarrollaron un sistema experto para el control de la lubricación con estas expresiones.

Las soluciones elastohidrodinámicas para el caso plano se pueden aplicar al caso tridimensional incluso cuando la profundidad de contacto es menor que el semiancho de contacto, como señalaron Evans y Snidle⁹. También sirven para condiciones no estacionarias, pues la formación del régimen es casi inmediata, como lo muestra el trabajo de Hooke¹⁰. Sólo en la estimación de la fuerza de rozamiento se ha detectado un pequeño y despreciable lazo de histéresis en la representación gráfica de la fuerza en función de la velocidad, al cambiar rápidamente el sentido del deslizamiento¹¹.

Existen otras variables que influyen en el mapa tensional y no se han tenido en cuenta en este estudio. Se ha partido del supuesto de que el espesor de película es mucho mayor que la altura de la rugosidad superficial con lo que se puede despreciar el efecto de ésta en el mapa tensional, para lo cual se supone que el espesor específico de película es despreciable¹². Esto lleva consigo el bajo valor de la fricción. Y el efecto de la temperatura tampoco se ha tenido en cuenta, ya que el incremento es pequeño, no afecta a las propiedades del material y es difícil de modelizar su efecto como ha puesto de relieve recientemente Paolo¹³.

Por lo tanto, los regímenes de lubricación pueden hacer que la distribución de presiones sobre la zona de contacto se desvíe bastante de la prevista por Hertz para el contacto simple entre dos cilindros. Estas nuevas distribuciones pueden tener consecuencias prácticas en el diseño del tratamiento a recibir por las superficies en contacto, o en la aplicación de las condiciones de lubricación. Para considerar estos efectos se ha desarrollado un método numérico que determina, de una forma rápida y eficaz, el mapa tensional de la zona de contacto a partir de una distribución de presiones normales sobre una superficie semiindefinida. De esta forma se puede disponer de una valiosa herramienta de análisis y diseño.

Para hallar el mapa tensional a partir de la distribución de presiones, se disponen de otros métodos, como el Método de los Elementos Finitos y el Método de los Elementos de Contorno. Estos últimos métodos tienen el inconveniente de requerir largo tiempo de preproceso y postproceso, y un mallado extremadamente fino para la determinación del estado tensional en puntos muy cercanos a la superficie, con lo que exige una capacidad de cálculo del ordenador que muchas veces no está disponible.

En este artículo se presenta el método numérico desarrollado y se aplica al estudio de la influencia de las condiciones de lubricación en el contacto entre dos cilindros. En concreto se estudiarán las condiciones creadas por tres regímenes de lubricación, se compararán con las producidas por el contacto simple y se destacarán las consecuencias que se dirimen de cara al diseño.

MODELO DESARROLLADO

Cuando se tiene una distribución de presiones sobre una superficie semiindefinida, donde no se conocen las tensiones en la subsuperficie, la primera solución más intuitiva es su discretización en cargas puntuales de las que se conoce el campo de tensiones producido por cada una de ellas mediante las expresiones (1) y (2), según la Figura 1.

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r} \quad (1)$$

$$\sigma_\theta = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (2)$$

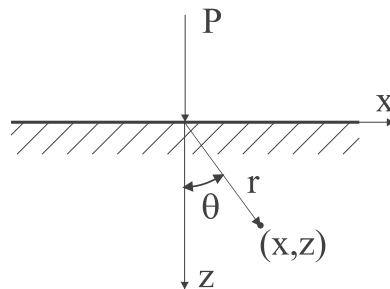


Figura 1. Carga puntual sobre una superficie semiindefinida

Transformadas estas expresiones a coordenadas cartesianas se obtienen las ecuaciones (3)-(5)

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 z}{(x^2 + z^2)^2} \quad (3)$$

$$\sigma_z = -\frac{2P}{\pi} \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2} \quad (4)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2P}{\pi} \frac{x z^2}{(x^2 + z^2)^2} \quad (5)$$

Cuando actúa una distribución de presiones sobre la superficie $p(x)$, la determinación del estado tensional en un punto de la subsuperficie vendrá dada por las siguientes integrales

$$\sigma_x = -\frac{2z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s) (x-s)^2}{((x-s)^2 + z^2)^2} ds \quad (6)$$

$$\sigma_z = -\frac{2z^3}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s)}{((x-s)^2 + z^2)^2} ds \quad (7)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2z^2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s) (x-s)}{((x-s)^2 + z^2)^2} ds \quad (8)$$

Estas integrales tienen una singularidad en $z=0$, por lo que el valor del estado tensional se dispara cuando el punto de cálculo está cercano a la superficie. Al ser aplicable el principio de superposición, la distribución de presiones se puede sustituir por una suma de esfuerzos sobre la superficie que sea equivalente, o suficientemente aproximativa, y cuyo campo tensional sea conocido.

El problema que tiene la discretización con cargas puntuales es que el campo de presiones es discontinuo, al proporcionar unas tensiones y deformaciones altísimas en la proximidad de los puntos de aplicación de la carga, lo cual distorsiona notablemente el mapa tensional, no pudiéndose determinar con precisión el campo de presiones en la proximidad de la superficie.

Una solución a este inconveniente es discretizar la función de presiones en distribuciones de presiones rectangulares en lugar de utilizar cargas puntuales. La solución de las integrales (6)-(8) para el caso de distribución de presiones constante ($p(s) = \text{cte}$) se conoce¹⁴ y sus expresiones analíticas son

$$\sigma_x = -\frac{P}{2\pi} (2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)) \quad (9)$$

$$\sigma_z = -\frac{P}{2\pi} (2(\theta_1 - \theta_2) - (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)) \quad (10)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{P}{2\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \quad (11)$$

En donde θ_1 y θ_2 están relacionados con las coordenadas cartesianas por las expresiones (12), según la Figura 2.

$$\text{tg} \theta_1 = \frac{z}{x-a}; \quad \text{tg} \theta_2 = \frac{z}{x+a} \quad (12)$$

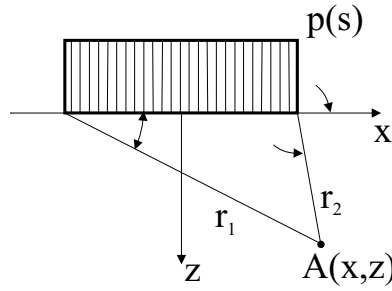


Figura 2. Distribución de presiones rectangular sobre una superficie semiindefinida

La solución para este tipo de cargas da lugar a puntos singulares de tensiones y deformaciones en los bordes del intervalo de aplicación de la carga. En estos puntos las tensiones son altamente discontinuas, de forma que en una zona muy pequeña existe un altísimo gradiente de tensiones, por tanto el problema de la distorsión sigue existiendo.

Este problema se soluciona buscando una discretización basada en elementos que se anulen en los bordes y cuya suma sea equivalente a la distribución de presiones de partida, además de que tengan solución analítica para las integrales correspondientes. La condición de que en los bordes el valor de la distribución sea nulo es necesaria, ya que en caso contrario se presentaría el mismo problema que en el de las cargas rectangulares. Esta es la conocida condición de Boussinesq¹⁴.

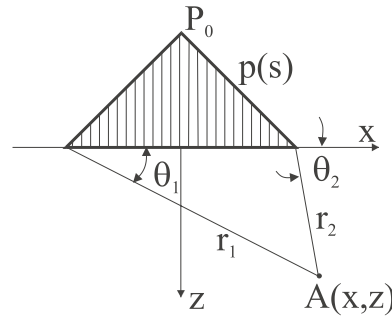


Figura 3. Representación de distribución triangular

Estos problemas quedan resueltos con una distribución de tipo triangular, como la mostrada en la Figura 3 cuyas soluciones para las integrales (6)-(8) son

$$\sigma_x = \frac{p_0}{\pi a} \left((x-a)\theta_1 + (x+a)\theta_2 - 2x\theta + 2z \ln \frac{r_1 r_2}{r^2} \right) \quad (13)$$

$$\sigma_z = \frac{p_0}{\pi a} ((x-a)\theta_1 + (x+a)\theta_2 - 2x\theta) \quad (14)$$

$$\tau_{xz} = \frac{p_0 z}{\pi a} (\theta_1 + \theta_2 - 2\theta) \quad (15)$$

La relación entre los parámetros que aparecen en las expresiones de las tensiones y las coordenadas cartesianas son los indicados en las siguientes expresiones:

$$r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + z^2}; \quad r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + z^2}; \quad r^2 = x^2 + z^2 \quad (16)$$

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{z}{x-a}; \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{z}{x+a}; \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{z}{x} \quad (17)$$

Partiendo de estas ecuaciones se puede discretizar una distribución de presiones, como superposición de distribuciones triangulares, del tipo de las indicadas en la Figura 4. Esta discretización coincide con una discretización trapezoidal si se integraran numéricamente las integrales (6)-(8). Observando la Figura 4 esto es fácil de ver sabiendo que la suma de las áreas superpuestas de los dos triángulos es igual al área del trapecoide, con lo que la discretización en distribuciones triangulares, como la representada en la Figura 4, es equivalente a la discretización trapezoidal.

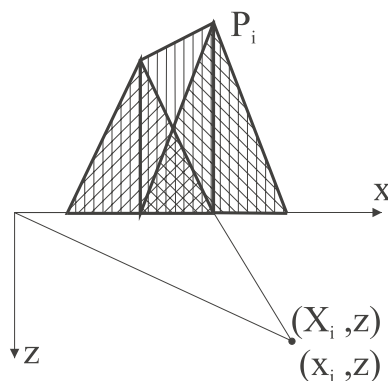


Figura 4. Sistema de referencia relativo y superposición de distribuciones triangulares

Las ecuaciones (13)-(15) funcionan si el triángulo es isósceles con lo que el intervalo de discretización debe ser constante en todo el intervalo de carga.

El algoritmo desarrollado para el cálculo del mapa tensional consiste en hallar, para un punto dado, la superposición de todas las distribuciones triangulares.

Los pasos seguidos son los siguientes:

- Se determinan los puntos de discretización x_i de la carga. Estos puntos estarán separados una distancia constante h .
- Se calcula el valor de la presión P_i en cada uno de los puntos de discretización. La distribución de presiones total se aproximará como la suma de distribuciones triangulares de altura P_i y anchura $2h$.
- Para hallar el estado tensional en un punto determinado (x, z) en el espacio semi-infinito, se aplicará el principio de superposición y se calculará su estado tensional como la suma de los producidos por todas y cada una de las distribuciones triangulares. De este modo, la tensión equivalente de Tresca en un punto será igual a la suma de todas las tensiones equivalentes producidas por cada distribución triangular en que se ha discretizado la carga total. Para determinar cada una de estas tensiones equivalentes se sustituye en las expresiones (13)-(15) el punto (X_i, z) siendo $X_i = x - x_i$.
- Se determina la tensión equivalente de Tresca en una matriz de puntos separados una distancia h en el espacio semi-infinito y mediante una aplicación gráfica se obtiene el mapa tensional con sus curvas isotensionales.

En la Figura 5 se muestra de forma esquemática los pasos descritos anteriormente.

De este modo se obtiene el valor de la tensión cortante máxima en una matriz de puntos que es el dato de partida para que mediante una interpolación se pueda obtener los valores máximos de la tensión tangencial y su localización.

Este método numérico para la determinación de las tensiones de contacto se ha aplicado al caso del contacto de dos cilindros lubricados.

Los datos numéricos que aparecen en los siguientes apartados son números adimensionales. Las dimensiones y coordenadas son múltiplos del semiancho de contacto

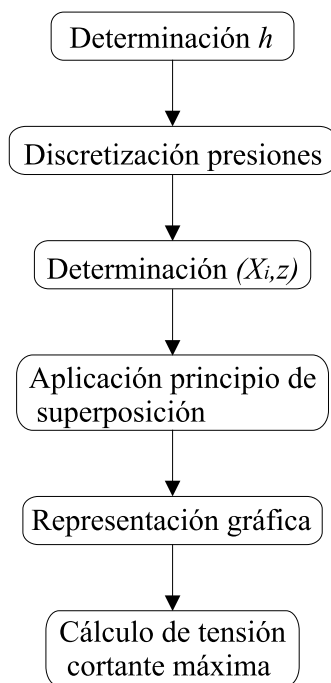


Figura 5. Diagrama de flujo del algoritmo utilizado

calculado por la fórmula de Hertz y las presiones son múltiplos de la presión máxima de contacto según el mismo modelo de Hertz².

Modelo de lubricación de Dowson y Higginson

La superposición del efecto de la lubricación sobre la distribución de tensiones producido en el contacto seco ha sido ampliamente estudiado, en este caso ciñéndose a unas distribuciones calculadas por Dowson y Higginson³, para el caso de contacto elastohidrodinámico. Estas soluciones vienen representadas en la Figura 6.

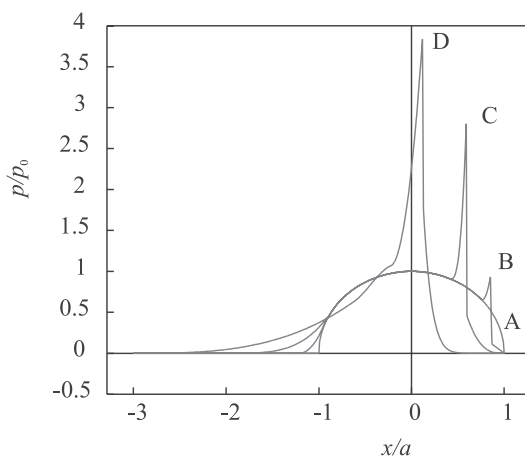


Figura 6. Distribución de presiones sobre la superficie

Estos modelos han sido muy discutidos, pues para bajas presiones, el lubricante se desvía de la teoría elastohidrodinámica del comportamiento exponencial de la viscosidad respecto

a la presión, con lo que la magnitud del pico que aparece en las soluciones del caso ideal se trunca en la realidad. El pico se ha observado experimentalmente por Johnson¹⁴, aunque con alturas mucho menores que las indicadas teóricamente.

Modelo de lubricación de Greenwood

La distribución de presiones presentada por Greenwood⁶ tiene la ventaja de disponer de una expresión analítica. De todas formas, para la obtención del mapa tensional se ha recurrido al método numérico de superposición de distribuciones triangulares. Este modelo es una extensión de la hipótesis de Grubin⁵, según la cual, las cargas altas las deben soportar superficies planas, pero en lugar de abarcar la superficie plana toda la zona de contacto, sólo abarca una porción de la misma tal, como se observa en la Figura 7. Para obtener el campo de presiones, Greenwood traslada el origen de coordenadas al nuevo centro de

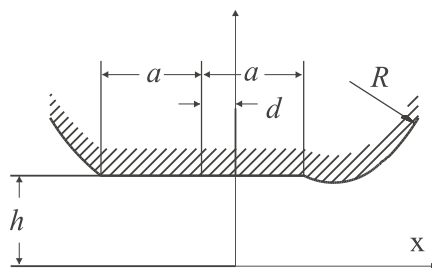


Figura 7. Desplazamiento del centro de presiones d

presiones situado a una distancia d del eje de simetría del cilindro en contacto. La expresión del campo de presiones viene dada por la ecuación (18), la cual se puede poner en forma adimensional en función de $\xi = x/a$, y del desplazamiento reducido del centro de presiones $\mu = d/a$, resultando la expresión (19).

$$p(x) = \frac{E}{2R} \left(d \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + \sqrt{a^2 - x^2} \right) \quad (18)$$

$$p(\xi) = \frac{aE}{2R} \left(\mu \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} + \sqrt{1 - \xi^2} \right) \quad (19)$$

La integral de esta presión en el área en el que actúa da lugar a una fuerza total que se diferencia de la hertziana en un factor función únicamente de μ (20).

$$P = \frac{\pi a^2 E}{4R} (1 + 2\mu) \quad (20)$$

Para calcular el valor μ para unas condiciones elastohidrodinámicas determinadas se ha tomado el valor de espesor de película de Dowson y Higginson³ y después se han resuelto numéricamente las condiciones a la salida de la zona de contacto. El procedimiento de cálculo de μ se puede encontrar de forma detallada en¹⁵, de donde se ha extraído el siguiente resumen.

Al igual que hizo Greenwood⁶ se consideran las zonas de entrada y de salida de la película como independientes: la zona de entrada determinaría el espesor de la película h^* y la zona de salida la distorsión del perfil de presiones, es decir, al formarse la película de lubricante en la entrada, el espesor de ésta se mantiene constante como requisito para aguantar la carga, al cabo de una distancia, toda la carga que tiene que soportar la ha soportado por lo que se produce la constricción en el espesor de lubricante. Cuanto menor es la carga, más

estrecha será la zona que soporta la carga y más distorsionado resultará el perfil. Aunque el fenómeno no sea tan sencillo en la realidad, este modelo representa bastante bien todas las características del perfil elastohidrodinámico de presiones. La aparición del pico de presión en la salida puede hacer que el máximo de la presión sea mucho mayor que el proporcionado por la fórmula de Hertz.

Dado que el espesor de película proporcionado por Dowson y Higginson es un valor muy admitido, en adelante se prestará especial atención a la zona de salida que es la que va a determinar el valor de μ , que es el que determina la forma del perfil de presiones. De momento se ha establecido un procedimiento por el cual se obtiene un valor razonable.

Mediante manipulaciones matemáticas sobre la ecuación de Reynolds, Greenwood⁶ obtuvo una expresión que regula la zona de salida del lubricante, que viene dada en la ecuación (21)

$$\frac{a^3}{8\alpha\eta_0UR^2} = 24 \int_0^{\theta^*} \frac{B(\theta)\sinh(\theta)}{(H_0 - B(\theta))^3} d\theta \quad (21)$$

en donde

$$\xi = -\cosh\theta \quad (22)$$

$$H_0 = \frac{4Rh^*}{a^2} \quad (23)$$

$$B(\theta) = 4\mu(\sinh(\theta) + \theta) - (\sinh(2\theta) - 2\theta) \quad (24)$$

y θ^* es el valor de θ que hace $B(\theta) = 0$.

Esta es una ecuación con una única incógnita, pues suponemos que el espesor de película viene bien correlacionado por la expresión de Dowson y Higginson. Para la resolución de la ecuación (21) se han requerido los siguientes pasos:

- primera estimación de μ ,
- aplicación de Newton-Raphson para la obtención de θ^* ,
- resolución numérica de la integral mediante cuadratura de Lagrange en 10 puntos,
- nueva estimación de μ mediante la aplicación del método de la secante,
- comprobación de la convergencia.

Para la obtención de una primera estimación de μ se ha partido de la hipótesis de que el espesor mínimo de película es 0,8 veces el espesor de película en la zona de contacto y éste ocurre en un máximo de $B(\theta)$ cuyo valor aproximado es de $7,5 * \mu^{3/2}$, sabiendo además que

$$H_0 - B(\theta_{max}) = 0,8H_0 \quad (25)$$

de donde

$$B(\theta_{max}) = 0,2H_0 \quad (26)$$

como $H_0 = (1 + 2\mu)H$ se obtiene que la ecuación a resolver para obtener el valor inicial de μ es

$$7,5\mu^{3/2} - (0,2 + 0,4\mu)H = 0 \quad (27)$$

La primera estimación de μ se obtiene por el método de Newton-Raphson resolviendo la ecuación (27). Como primer valor se toma un valor excesivo para la mayoría de los casos como puede ser 5. El método numérico no ha dado problemas hasta 40 iteraciones en esta resolución de Newton-Raphson, para los valores que se han usado en las pruebas.

Una vez obtenido μ se ha usado para la obtención de θ^* con cuyo valor ya se puede discretizar la integral para su resolución numérica. El método seguido para la obtención de θ^* ha pasado por calcular el valor de θ_{max} , dado que la forma de la curva de $B(\theta)$ sugiere que el valor de θ_{max} es una porción de θ^* , este procedimiento también es conveniente para evitar que el valor inicial de θ^* en la iteración de Newton-Raphson sea muy pequeño o muy grande, ya que de ser muy pequeño el método convergería en el origen y de ser muy grande tendría una convergencia laboriosa, o bien no convergería. El procedimiento usado se ha resuelto para que siempre haya convergencia.

El valor inicial de θ_{max} se ha tomado del $\cosh^{-1}(1+\mu)$ el cual tiene facilidad de converger. Una vez obtenido el valor de θ_{max} se toma el valor inicial de θ^* como $2/3$ del valor de θ_{max} lo cual facilita también en mucho la convergencia.

Respecto al método de la secante usado para obtener el valor de μ que iguala la expresión (21), la precaución que se ha de tomar es la de no prolongar demasiado las iteraciones para que las ordenadas de los dos puntos no coincidan en valores próximos a 0, pues la secante sería paralela al eje de abscisas y no habría convergencia.

Los perfiles de presiones utilizados en el análisis vienen dados en la Figura 8. Estos son equivalentes respecto a las condiciones que aparecen a las dadas por la solución numérica de Dowson y Higginson en la Figura 6.

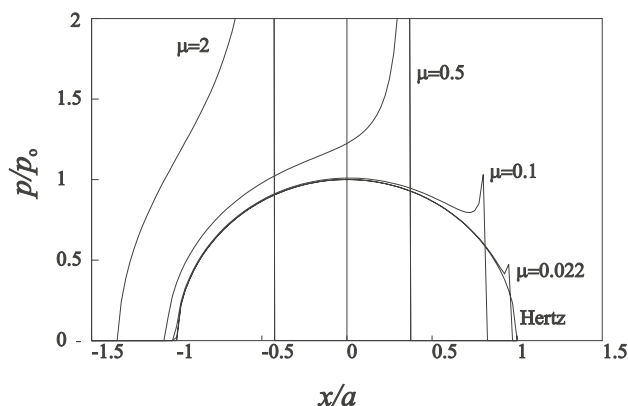


Figura 8. Distribución de presiones de Greenwood según el factor de distorsión de presiones μ

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se van a presentar en primer lugar los mapas tensionales obtenidos a partir de tres soluciones numéricas de Dowson y Higginson, cuyos perfiles se parecen poco unos de otros. A continuación se realizará un análisis similar para las distribuciones según el modelo de Greenwood, para terminar proponiendo alguna modificación a las soluciones anteriores, que sean más reales y concuerden más con las observaciones experimentales.

Modelo	$\frac{x_c}{a}$	$\frac{z_c}{a}$	$\frac{\tau_{max}}{p_0}$
A (Hertz)	0,00	0,78	0,30
B	0,03	0,78	0,30
C	0,59	0,015	0,65
D	0,11	0,065	0,85

Tabla I. Valores críticos de cada régimen de lubricación según modelo de Dowson y Higginson

La localización y el valor del cortante máximo de cada modelo vienen representados en la Tabla I, en la que la tensión cortante máxima y su localización en la subsuperficie vienen en coordenadas adimensionales $\tau_{\max}/p_0$, x_c/a y z_c/a .

El algoritmo del anterior apartado se ha traducido en un programa del cual se han sacado los mapas tensionales representados en las Figuras 9-16.

La validez del programa ha sido comprobada al aplicar la distribución de Hertz, de la que resulta un mapa tensional exacto que concuerda con el modelo teórico.

En la Figura 9 se observa el mapa tensional resultante de superponer a la distribución de Hertz la presión de entrada y el pico de salida debido a la lubricación (modelo B).

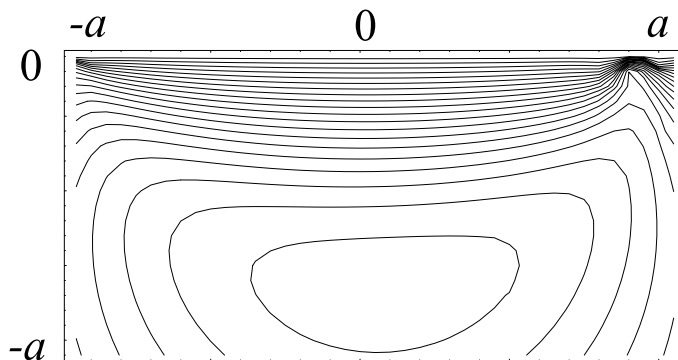


Figura 9. Mapa tensional de la distribución correspondiente al modelo B

La distorsión no ha sido la suficiente para variar el valor de la tensión cortante crítica, pero cabe destacar la aproximación a la superficie de una tensión cortante alta ($\tau_{\max}/p_0 = 0,24$). Esta va a ser una característica constante en los siguientes modelos, lo cual marca la influencia del material (su tamaño de grano, el recubrimiento superficial, etc.), en el modo de fallo de la superficie, que puede ser por picadura o por desconchado.

En el modelo C de lubricación se observa que el punto crítico ya no está regido por la distribución de Hertz sino por la zona distorsionada por el pico. Ésta provoca un acercamiento a la superficie de la tensión cortante máxima y un aumento del valor de ésta. La influencia de la distorsión es predominante pues la carga está concentrada. Si se redujera el ancho de Hertz a un valor de la anchura del pico y a su altura, se vería justificado el valor del cortante equivalente y su localización.

En la Figura 10 se observa el resultado de una lubricación de tipo D en el que la carga está concentrada en una zona del pico y el perfil de presiones tiene una forma muy distinta de la elíptica del contacto seco y estático.

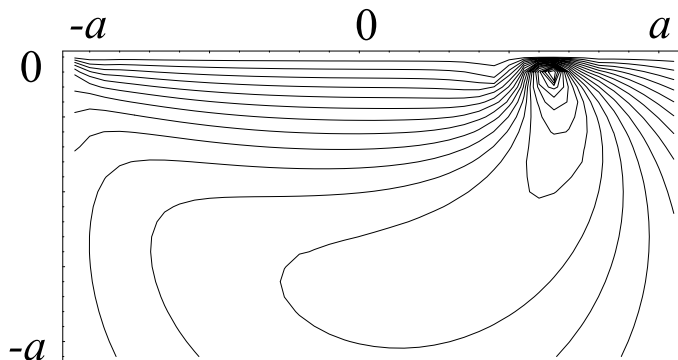


Figura 10. Mapa tensional correspondiente al modelo C

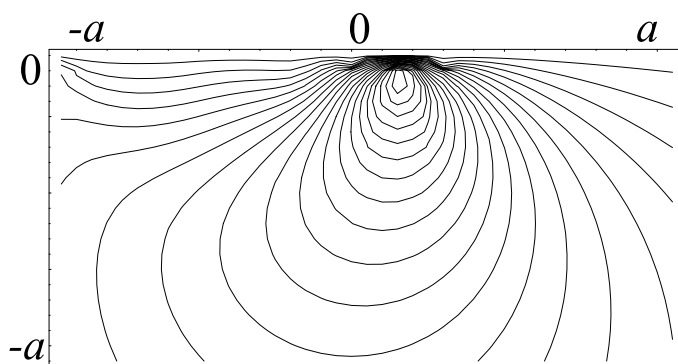


Figura 11. Mapa tensional correspondiente al modelo D

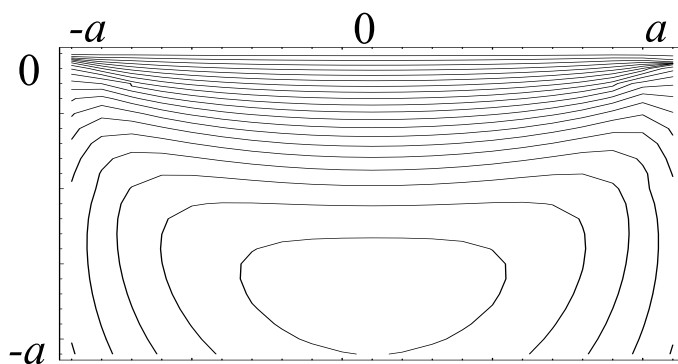


Figura 12. Mapa tensional para $\mu=0,022$

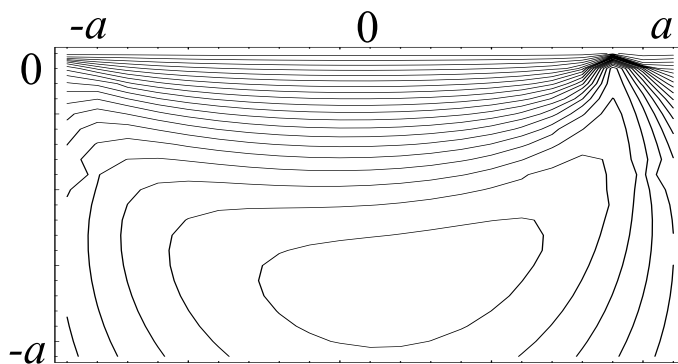


Figura 13. Mapa tensional para $\mu=0,1$

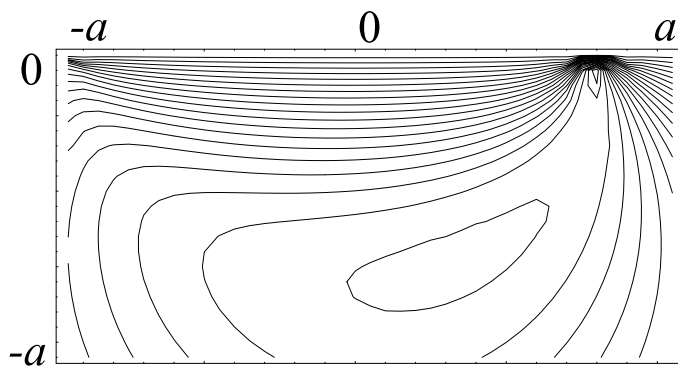


Figura 14. Mapa tensional para $\mu=0,15$

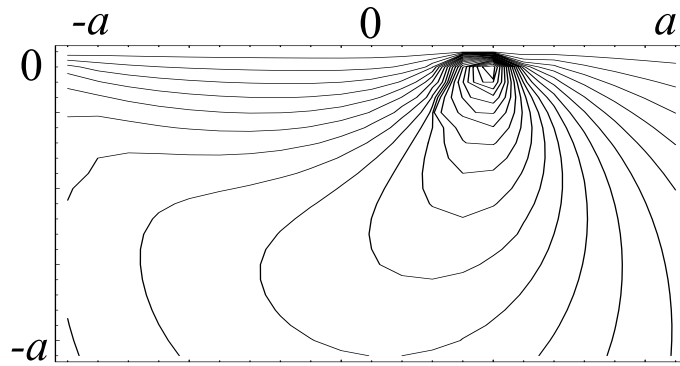


Figura 15. Mapa tensional cuando $\mu=0,5$

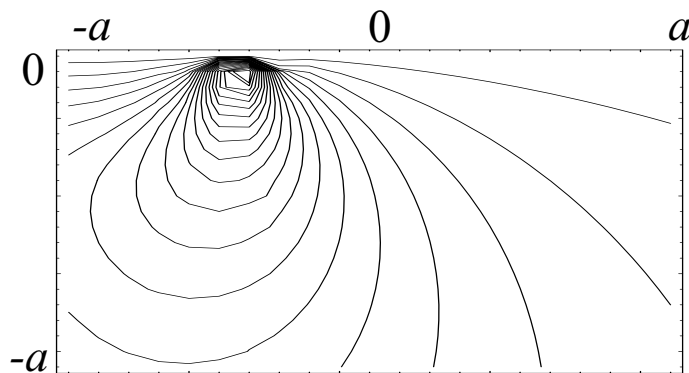


Figura 16. Mapa tensional para $\mu=2$

Se puede destacar que el cortante máximo ya se aproxima a la unidad, con lo que la precaución que aplican algunas normas internacionales (AGMA¹⁶ e ISO¹⁷ para engranajes) de tomar la presión máxima de la distribución de Hertz como tensión crítica, con la que comparar la tensión resistente del material tiene justificación en la práctica.

También es de destacar que bajo ciertos regímenes de lubricación el ancho en donde se concentran la mayor parte de los esfuerzos disminuye. Esto explica que la fatiga superficial comience muchas veces por generar una mancha gris en la zona de fallo debido a micro-desconchados a los que se han dado el nombre de “grey staining”¹⁸.

En cuanto a los resultados obtenidos con la distribución de presiones dada por Greenwood mostrados en las Figuras 12–15, no se ha obtenido mucha diferencia en cuanto a la forma del mapa tensional, a la vez que los valores máximos y la distancia de estos a la superficie son muy similares, por lo que se tiene que en cuanto al criterio de fallo el parámetro más influyente es el desplazamiento reducido del centro de presiones μ .

Para un valor de $\mu = 0,15$ se observa que tiene dos máximos, uno en la superficie y otro en un punto cercano al dado por la distribución de Hertz. Ambos valores son muy parecidos por lo que habrá dos modos de fallo en este régimen: el que tenga el origen de grieta en la superficie y el que lo tenga en la subsuperficie.

Como se puede observar en la Tabla II, se puede establecer como regla general que, cuando μ aumenta, la tensión tangencial máxima también aumenta y se aproxima a la superficie, siendo más crítico porque la grieta se origina antes y porque al comenzar más cerca de la superficie, el desconchado se produce mucho antes. La vida del componente a fallo superficial se reduce por la adición de ambos efectos.

μ	$\frac{x_c}{a}$	$\frac{z_c}{a}$	$\frac{\tau_{max}}{p_0}$
0,02	0,00	0,74	0,301
0,1	0,14	0,73	0,335
0,15	0,28	0,70	0,311
0,2	0,68	0,015	1,568
0,3	0,56	0,016	1,204
0,4	0,43	0,023	0,750
0,5	-0,38	0,070	0,956
2	-0,43	0,070	2,042

Tabla II. Valores críticos de cada régimen de lubricación según el modelo de Greenwood

Respecto al valor de μ conviene señalar que éste disminuye al aumentar la fuerza aplicada entre las superficies, con lo que en ese grado también disminuye la presión máxima p_0 , y por lo tanto también la tensión tangencial máxima.

Por otra parte, al aumentar μ el régimen es más hidrodinámico, con lo que dejan de tener efecto las hipótesis impuestas en el cálculo elastohidrodinámico. En concreto la independencia entre la zona de entrada y la de salida del lubricante en la zona de contacto, que es una hipótesis con la que se ha calculado μ , tiene cada vez menos sentido.

Conforme aumenta la presión local en el pico, se puede llegar a una situación en donde la máxima presión superficial se encuentre en la zona donde no hay material al ser la rugosidad superficial de la misma escala que el espesor de película, de forma que la distribución de presiones a la salida tenga un pico pequeño.

Otra causa que limita el pico de salida es la resistencia del material. Puede ocurrir que el valor tangencial máximo sobrepase el límite elástico del material, pero dada la estrechez de la zona, el efecto de plasticidad puede ser nulo en la superficie pues el material necesita un tiempo para reaccionar, dependiendo de la velocidad de propagación del sonido en el mismo¹⁴.

Conviene evitar que la existencia del pico distorsione los cálculos de vida a presión superficial, dada la complejidad del fenómeno. Pero cuando el pico es pequeño se puede estimar la tensión tangencial máxima subsuperficial, por lo que se puede hacer una recomendación teniendo en cuenta las pruebas realizadas y sus resultados.

Los métodos de cálculo de las normas AGMA¹⁶ e ISO¹⁷ de cálculo de engranajes a presión superficial toman como tensión de cálculo la tensión nominal teórica σ_H (dada por la teoría del contacto de Hertz) modificada con factores que tienen en cuenta los defectos en la fabricación y otros fenómenos como tamaño, vibraciones, etc. Entre esos coeficientes no se encuentran los debidos a la distorsión del perfil de presiones, que como se ha mostrado anteriormente, puede tener un efecto decisivo en la resistencia del diente a presión superficial.

Se puede tener en cuenta la distorsión del perfil de presiones a partir de los valores de la Tabla II, añadiendo a todos los factores recomendados por las normas un factor K_ξ , cuyo valor depende del desplazamiento del centro de presiones de Greenwood μ , el cual se calcula a partir de las variables elastohidrodinámicas del sistema, según el método mostrado en el presente trabajo. En la Tabla III se ofrecen unos valores recomendados de K_ξ que se han deducido de los resultados obtenidos y pueden ser orientativos. De este modo se puede establecer un nuevo modelo de cálculo a presión superficial, en el que la tensión nominal queda modificada por este factor de distorsión por lubricación K_ξ

$$\sigma_0 = K_\xi \sigma_H \quad (28)$$

siendo σ_0 la tensión nominal modificada y σ_H la tensión nominal teórica según Hertz.

μ	K_ξ	Comentario
$\mu < 0.1$	1	Teoría de Hertz válida
$0.1 < \mu < 0.15$	1	Posibilidad de inicio de grieta en la superficie
$0.15 < \mu < 0.5$	3	Inicio de grieta en la superficie
$\mu > 0.5$	> 3	Comprobar régimen e hipótesis de partida Realizar mapa tensional Comprobar rugosidad superficial

Tabla III. Valores recomendados de K_ξ

CONCLUSIONES

En los mapas tensionales obtenidos se puede observar la divergencia que existe entre los modelos desarrollados por la teoría de Hertz y la influencia que puede tener la lubricación en el mapa tensional, y por lo tanto, en el comportamiento del material.

La existencia del pico, que puede no ser exacta pero que siempre existe, puede ser determinante. Con un pequeño pico se observa cómo un valor alto de tensión cortante se acerca a la superficie.

También es destacable el crecimiento del valor de la tensión cortante máxima. Cuando el pico es muy pronunciado, el valor del cortante máximo se aproxima a la unidad, lo que explica cómo algunas normas de cálculo de componentes mecánicos señalan esa tensión como crítica para el estudio de la picadura.

Por último, se ha aplicado el método a una distribución de presiones que siguiera las hipótesis elastohidrodinámicas de Greenwood que tiene la ventaja de que proporciona una expresión analítica de dicha distribución y su forma depende de un único parámetro μ , en función del cual se pueden dibujar los mapas tensionales correspondientes, y a la vista de los resultados se ha recomendado un método que tiene en cuenta la distorsión del perfil de presiones para la modificación de las tensiones teóricas de las normas AGMA e ISO.

Con este algoritmo se dispone de una nueva herramienta muy adecuada para realizar análisis sobre el comportamiento mecánico de las superficies de los materiales. Este estudio es fácilmente extrapolable a otros de importante significado como laminadores, rodamientos, cojinetes, etc., en los que la distribución de presiones se puede llegar a conocer mediante otros procedimientos que establece la mecánica del contacto.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto “Estudio de la Generación de Perfiles Conjugados para Dientes de Engranajes. Desarrollo de los Modelos de Comportamiento a Flexión y a Presión superficial”, financiado por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (PB95-0876), y complementariamente, por el Vicerrectorado de Investigación de la UNED. Los autores desean expresar su agradecimiento a ambas entidades.

REFERENCIAS

- 1 H. Poritsky, “Stresses and deflections of cylindrical bodies in contact with application to contact of gears and of locomotive wheels”, *Trans. ASME, Series E, J. Appl. Mech.*, Vol. **17**, pp. 191–201, (1950).

- 2 H. Hertz, "Über die Berührung fester elastischer Körper", *Journal Reine und Angewandte Mathematik*, Vol. **92**, pp. 156–71, (1882).
- 3 D. Dowson y G.R. Higginson, "*Elasto-hydrodynamic lubrication*", Pergamon Press, Oxford, (1966).
- 4 J. Paolo y F.A. Saita, "Solución del problema elastohidrodinámico de contacto lineal", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **8**, N°4, pp. 427–438, (1992).
- 5 A. Grubin, "Fundamentals of hydrodynamic theory of lubrication of heavily loaded cylindrical surfaces", K. Ketova (Ed.), Translation of a Russian book N° 30, Central Scientific Institute for Technology and Mechanical Engineering, Moscow, (1949).
- 6 J.A. Greenwood, "An extension of the Grubin theory of elastohydrodynamic lubrication", *Journal of Physics; Series D: Applied Physics*, Vol. **5**, pp. 2195–2211, (1972).
- 7 P. Pan y B.J. Hamrock, "Simple formulas for performance parameters used in elastohydrodynamically lubricated line contacts.", *Trans. ASME Journal of Tribology*, Vol. **111**, N° 2, pp. 246–252, (1989).
- 8 K. Ishii, J.M. Klinger y B.J. Hamrock, "Compatibility-based design for contact stress", *Trans. ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. **115**, N° 2, pp. 359–366, (1993).
- 9 H.P. Evans y R.W. Snidle, "Wildhaber-Novikov circular arc gears: elastohydrodynamics", *Trans. ASME Journal of Tribology*, Vol. **115**, N° 3, pp. 487–492, (1993).
- 10 C.J. Hooke, "The minimum film thickness in line contacts during reversal of entrainment", *Trans. ASME Journal of Tribology*, Vol. **115**, N° 1, pp. 191–199, (1993).
- 11 D.P. Hess y A. Soom, "Friction at a lubricated line contact operating at oscillating sliding velocities", *Trans. ASME Journal of Tribology*, Vol. **115**, N° 1, pp. 147–152, (1990).
- 12 C.R. Evans, C.R. y K.L. Johnson, "The influence of surface roughness on EHL traction", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Part C, Vol. **201**, N° C2, pp. 145–150, (1987).
- 13 J. Paolo, "Solución simultánea de las ecuaciones gobernantes del problema termo-elastohidrodinámico de contacto lineal", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **14**, N° 4, pp. 461–480, (1998).
- 14 K.L. Johnson, "*Contact mechanics*", Cambridge University Press, Cambridge, (1985).
- 15 M. Estrems, "Modelo de cálculo a presión superficial de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente", Tesis Doctoral, ETSI Industriales, Universidad de Murcia, (1998).
- 16 AGMA Information Sheet 908-B95, "Geometry factors for determining the pitting resistance and bending strength of spur, helical and herringbone gear teeth", *American Gear Manufacturers Association*, Alexandria, VA, (1995).
- 17 ISO International Standard 6336, "Calculation of load capacity of spur and helical gears", *International Organization for Standardization*, Ginebra, (1996).
- 18 L. Faure, "Micro endommagements de surface des dents d'engranages cémentes trempes rectifiées", *International Congress. Contact Mechanics*, Bourdeaux, Francia, pp. 96–97, (1994).