Vol. **17**, **2**, 149–168 (2001)

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

Comparación entre modelos de colisión de cuerpos

Edson Cataldo

Universidade Federal Fluminense (UFF)
Departamento de Matemática Aplicada
Rua Mário Santos Braga, s/n
Brasil-CEP: 24020-140
Tel.: 55-21-717 82 69
e-mail: ecataldo@mec.puc-rio.br

Rubens Sampaio

PUC-Rio
Departamento de Engenharia Mecânica
Rua Marquês de São Vicente, 225
Gávea-Rio de Janeiro-RJ
Brasil-CEP: 22453-90
Tel.: 55-21-529 95 38, Fax: 55-21-294 91 49
e-mail: rsampaio@mec.puc-rio.br

Sumário

Existen en la literatura varios modelos que describen choques entre cuerpos rígidos. La mayor dificultad en el modelage es construir un modelo lo suficientemente simple que permita simular un problema en tiempo real y lo bastante sofisticado para no alterar la dinámica para poder predecir en el tiempo. El objetivo de este trabajo es describir algunos de los modelos más usados y compararlos a través de simulaciones numéricas mostrando los límites de su validez.

Palabras clave:

Colisiones, choque, dinámica, modelage, simulaciones.

COMPARISON BETWEEN MODELS OF RIGID COLLISIONS

Summary

There are in the literature some models that describe collisions between rigid bodies. The great difficulty in the modeling is to construct a model sufficiently simple that permits the simulation of a problem in real time and so sophisticated that it does not change the dynamics in order to invalidate the predictions in the time of observation desired. The aim of this paper is to describe some of the more used models, to compare them and to show their limits of validity using numeric simulations.

Keywords:

Collisions, choque, dynamics, modeling, simulations.

 ISSN: 0213–1315 Recibido: Julio 2000

INTRODUCCIÓN

Para estudiar la dinámica de cuerpos rígidos, incluyendo choque, debemos observar que a cada colisión la ecuación diferencial que describe la dinámica del cuerpo en estudio es nuevamente resuelta con nuevas condiciones iniciales. Para determinar esas nuevas condiciones iniciales, obtenidas a partir del estado del cuerpo en el instante inmediatamente antes del choque, varios modelos fueron desarrollados.

Los modelos clásicos que aparecen en la literatura hacen hipótesis simplificadas que en algunos casos conducen a absurdos ya que violan leyes físicas. Comparamos algunos de estos modelos, desarrollándolos a través de la misma formulación, con simulaciones numéricas mostramos algunas ventajas y desventajas de cada modelo. Comenzamos estudiando el caso de choque sin rozamiento. Para eso usamos la ley de Newton que relaciona el coeficiente de restitución (normal) (ϵ) y las velocidades relativas normales de los cuerpos antes ($\dot{D}_{NA}$) y después del choque ($\dot{D}_{NE}$) por $\dot{D}_{NE} = -\epsilon\dot{D}_{NA}$. Después discutimos la ley de Poisson que relaciona el coeficiente de restitución con los impulsos normales al final de la fase de expansión (I_{NE}) y de la fase de compresión (I_{NC}) por $I_{NE} = \epsilon I_{NC}$. Para estudiar el caso con rozamiento comenzamos combinando la ley de Newton con la ley de Coulomb. Discutiremos los casos en los cuales ese modelo contradice la ley de conservación de la energía y a continuación la ley de Poisson con la ley de Coulomb. Para colisiones bidimensionales ese modelo no contradice la ley de conservación de energía. Finalmente consideremos la ley de Smith. Este modelo no contradice la ley de conservación de energía, pero por otra parte la ecuación a ser resuelta es no lineal.

ECUACIONES BÁSICAS

Las ecuaciones que describen la dinámica y la cinemática de la colisión se discuten a continuación. Consideramos la posición del sistema en el instante t definido por $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)^t$. Consideramos el contacto entre dos cuerpos y $\mathbf{R}$ la fuerza de reacción ejercida de uno sobre el otro. Sea

$$\mathbf{R} = (\, R_N \quad R_T \,)^t$$

La dinámica del sistema es dada por las equaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + r_i \tag{1}$$

con Q_i la contribución de las fuerzas externas generalizadas, r_i la fuerza generalizada debido a la reacción en el contacto y T la energía cinética del sistema. Consideremos P_1 y P_2 los puntos de los cuerpos que entraran en contacto en la colisión. Denotamos $\mathbf{D}$ el vector que representa el desplazamiento relativo entre los dos cuerpos y $\dot{\mathbf{D}}$ el vector que representa la velocidad relativa entre los cuerpos. En el punto de contacto representamos los impulsos en las direcciones normal y tangencial por I_N y I_T. Usamos $\mathbf{u}_n$ y $\mathbf{u}_\tau$ como los vectores unitarios de la dirección normal (dado por n) y en la dirección tangencial (dado por τ) en la base de la colisión. Calculando la velocidad relativa entre los puntos de contacto tenemos

$$\dot{\mathbf{D}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial P_2}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_1}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial P_1}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial P_2}{\partial q_i} - \frac{\partial P_1}{\partial q_i})\dot{q}_i + \frac{\partial P_2}{\partial t} - \frac{\partial P_1}{\partial t}$$

Introduciendo las notaciones

$$W_T^i = \left(\frac{\partial P_2}{\partial q_i} - \frac{\partial P_1}{\partial q_i}\right)\mathbf{u}_\tau, \qquad W_N^i = \left(\frac{\partial P_2}{\partial q_i} - \frac{\partial P_1}{\partial q_i}\right)\mathbf{u}_n$$

$$\tilde{w}_T = \left(\frac{\partial P_2}{\partial t} - \frac{\partial P_1}{\partial t}\right)\mathbf{u}_\tau \quad \text{y} \quad \tilde{w}_N = \left(\frac{\partial P_2}{\partial t} - \frac{\partial P_1}{\partial t}\right)\mathbf{u}_n$$

Consideramos entonces $\mathbf{W}_T$ el vector columna con las componentes W_T^i y $\mathbf{W}_N$ el vector columna con las componentes W_N^i.

Podemos escribir las componentes normal ($\dot{D}_N$) y tangencial ($\dot{D}_T$) de $\dot{\mathbf{D}}$ como

$$\begin{cases} \dot{D}_N = \mathbf{W}_N^t \dot{\mathbf{q}} + \tilde{w}_N \\ \dot{D}_T = \mathbf{W}_T^t \dot{\mathbf{q}} + \tilde{w}_T \end{cases}$$

o

$$\dot{\mathbf{D}} = [W]^t \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{w}}$$

con $\dot{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \dot{D}_N \\ \dot{D}_T \end{pmatrix}$, $[W]^t = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^t \\ \mathbf{W}_T^t \end{pmatrix}$ una matriz $(2, n)$ y $\tilde{w} = \begin{pmatrix} \tilde{w}_N \\ \tilde{w}_T \end{pmatrix}$.

La fuerza generalizada $\mathbf{r}$ se puede escribir en términos de $[W]$ y de $\mathbf{R}$ como

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N & \mathbf{W}_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_N \\ R_T \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \mathbf{r} = [W]\mathbf{R}$$

Integramos la ec. (5) en el intervalo $(t-\epsilon, t+\epsilon)$ con el instante de la colisión t. Tenemos

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\Big|_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} - \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \frac{\partial T}{\partial q_i} d\tau = \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} Q_i d\tau + \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} r_i d\tau$$

Consideramos $\epsilon \to 0$ y que Q_i es continua y limitada, entonces

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} r_i d\tau \quad \text{con} \quad \Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\Big|_E - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\Big|_A$$

Usamos el índice E para representar el límite a la derecha y A para representar el límite a la izquierda.

Sabemos que $\mathbf{r} = [W]\mathbf{R}$, entonces

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} r_i d\tau = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \begin{pmatrix} W_N^i & W_T^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_N \\ R_T \end{pmatrix} d\tau$$

Escribimos el impulso $\mathbf{I}$ causado por la reacción $\mathbf{R}$ como

$$\mathbf{I} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \mathbf{R} d\tau = \begin{pmatrix} I_N \\ I_T \end{pmatrix}$$

entonces

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \begin{pmatrix} W_N^i & W_T^i \end{pmatrix} \mathbf{I}$$

Denotamos $\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ como el vector cuyas componentes son $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, entonces podemos escribir

$$\Delta\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = [W]\mathbf{I}$$

Por otro lado

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}[M]\dot{\mathbf{q}}^t \Rightarrow [M](\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_A) = [W]\mathbf{I} = \begin{pmatrix} W_N & W_T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_N \\ I_T \end{pmatrix}$$

En lugar de escribir las equaciones en términos de $\dot{\mathbf{q}}$ podemos usar $\dot{\mathbf{D}}$. Consideramos la equación

$$\dot{\mathbf{D}} = [W]^T\dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} W_N^t \\ W_T^t \end{pmatrix}\dot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} \tilde{w}_N \\ \tilde{w}_T \end{pmatrix}$$

entonces

$$\dot{\mathbf{D}}_{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{D}}_{\mathbf{A}} = [W]^T(\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{A}})$$

Por otro lado

$$[M](\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{A}}) = [W]\mathbf{I} \Rightarrow (\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{A}}) = [M]^{-1}[W]\mathbf{I}$$

entonces

$$\dot{\mathbf{D}}_{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{D}}_{\mathbf{A}} = [W]^T[M]^{-1}[W]\mathbf{I} = [\tilde{M}_L]\mathbf{I}$$

resultando

$$\mathbf{I} = [M_L](\dot{\mathbf{D}}_E - \dot{\mathbf{D}}_A)$$

cuando $[\tilde{M}_L]$ sea invertible $[\tilde{M}]_L^{-1} = [M_L]$. Llamamos $[M_L]$ la matriz de masa local.

La colisión entre dos cuerpos se modela como un proceso instantáneo. Las velocidades son discontinuas y las posiciones son continuas. Para describir algunos modelos de colisión podemos pensar que el cambio en la velocidad pre-colisión para la velocidad pos-colisión se realiza en dos etapas: etapa de compresión y de expansión. La etapa de compresión es la que va imediatamente antes de la colisión hasta que la velocidad normal relativa sea nula. La etapa de expansión es la que comienza imediatamente después del final de la etapa de compresión y va hasta el final del proceso, llamado virtual. El tiempo no desempeña papel en este proceso. Usamos A para indicar la situación inmediatamente antes de la colisión, C para indicar la situación en el inicio da etapa de compresión y E para indicar la situación en el fin de la etapa de expansión.

Resumiendo, en la etapa de compresión tenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_{NC} \\ \dot{D}_{TC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^t \\ \mathbf{W}_T^t \end{pmatrix}\dot{\mathbf{q}}_C + \begin{pmatrix} \tilde{w}_N \\ \tilde{w}_T \end{pmatrix} \tag{2}$$

y

$$M(\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{C}} - \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{A}}) - \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N & \mathbf{W}_T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{NC} \\ I_{TC} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{3}$$

con la condición de complementaridad $I_{NC}\dot{D}_{NC} = 0, \quad I_{NC} \geq 0, \quad \dot{D}_{NC} \geq 0$ y en la etapa de expansión tenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_{NE} \\ \dot{D}_{TE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^t \\ \mathbf{W}_T^t \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{E}} + \begin{pmatrix} \tilde{w}_N \\ \tilde{w}_T \end{pmatrix} \tag{4}$$

y

$$M(\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{C}}) - \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N & \mathbf{W}_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{NE} \\ I_{TE} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{5}$$

La condición de complementaridad, para los casos que estudiaremos, será dada por $I_{NE}\dot{D}_{NE} = 0, \quad I_{NE} \geq 0, \quad \dot{D}_{NE} \geq 0$.

CASO SIN ROZAMIENTO: LEY DE NEWTON

Considerando la definición del coeficiente de restitución dado por Newton, en el caso general, tenemos

$$\dot{D}_{NE} = -\epsilon_N \dot{D}_{NA} \tag{6}$$

siendo ϵ_N una matriz diagonal que contiene los coeficientes de restitución ϵ_i, siendo $0 \leq \epsilon_i \leq 1$.

En el caso sin roce el vector que describe la velocidad después del choque es dado por

$$\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{A}} - M^{-1} W_N {G_N}^{-1} (1+\epsilon) \dot{D}_{NA} \tag{7}$$

siendo $G_N = W_N^t M^{-1} W_N$. Este resultado se demuestra en la referencia[5].

Como aplicación y para posterior comparación con otros modelos consideremos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO

Consideremos el choque de una barra con una barrera rígida como lo muestra la Figura 1.

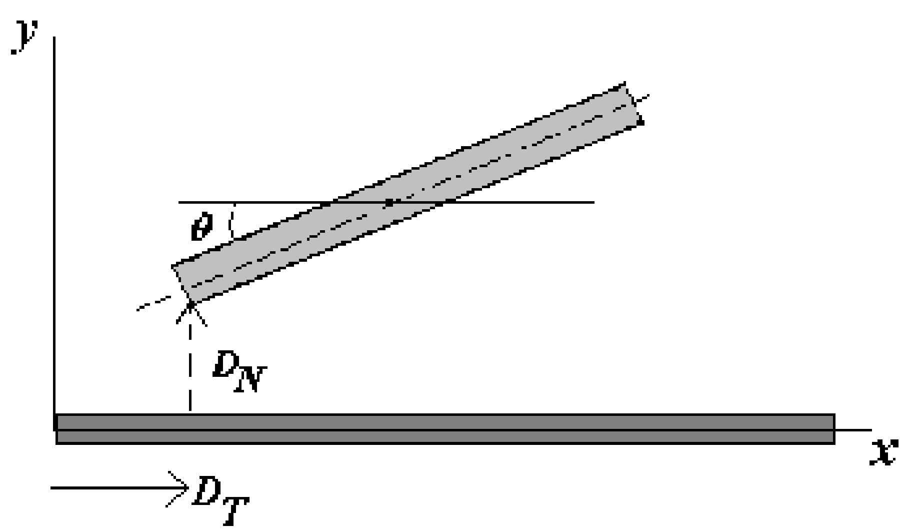

Figura 1. Ejemplo usado para las leyes de choque

La distancia D_T sólo será necesaria en el caso con rozamiento.
Consideremos el vector de coordenadas generalizadas

$$\{\mathbf{q}\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}$$

Considerando $2L$ el largo de la barra para el contacto del lado izquierdo, tenemos

$$D_N = y - L\sin\theta \Rightarrow \dot{D}_N = \dot{y} + L\dot{\theta}\cos\theta = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & L\cos\theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}_N^t} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \tag{8}$$

La ecuación de la dinámica del sistema viene dada por

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ \dfrac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Así, la matriz de masa está dada por

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}mL^2 \end{bmatrix}$$

Usando la ecuación (6) tenemos

$$\begin{cases} \dot{x}_E = \dot{x}_A \\ \dot{y}_E = \dot{y}_A - \dfrac{1}{m}G_N^{-1}(1+\epsilon)\dot{D}_{N1A} \\ \dot{\theta}_E = \dot{\theta}_A + \dfrac{3}{mL}\cos\theta G_N^{-1}(1+\epsilon)\dot{D}_{N1A} \end{cases}$$

siendo $G_N = \frac{1}{m} + \frac{3cos^2\theta}{m}$. Si consideramos el choque en el lado derecho, tenemos

$$D_N = y + L\sin\theta$$

De esta forma llegamos a

$$\begin{cases} \dot{x}_E = \dot{x}_A \\ \dot{y}_E = \dot{y}_A - \dfrac{1}{m}G_N^{-1}(1+\epsilon)\dot{D}_{N2A} \\ \dot{\theta}_E = \dot{\theta}_A + \dfrac{3}{mL}cos\theta G_N^{-1}(1+\epsilon)\dot{D}_{N2A} \end{cases}$$

Para el caso sin rozamiento no consideramos la ley de Poisson, ya que para casos en los que resultados dados por esa ley difieren de los obtenidos con la ley de Newton están ampliamente discutidos en la referencia[7] en el caso de un único punto de contacto y en la referencia[5] en el caso de múltiples (y finitos) puntos de contacto.

CONSIDERACIÓN DE ROZAMIENTO: LEY DE COULOMB

Consideraremos el choque de la barra con la barrera rígida. Para la consideración de rozamiento debemos tomar en cuenta la componente tangencial de la distancia relativa (D_T).

Consideraremos, por ahora, sólo el choque de la extremidad de la izquierda. En las simulaciones consideraremos las dos extremidades. Tenemos

$$D_N = y - L\sin\theta \Rightarrow \dot{D}_N = \dot{y} - L\dot{\theta}\cos\theta = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -L\cos\theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{W}_N^t} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \tag{9}$$

y

$$D_T = x - L\cos\theta \Rightarrow \dot{D}_T = \dot{x} + L\dot{\theta}\sin\theta = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & L\sin\theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{W}_T^t} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Para la etapa de compresión tenemos

$$\begin{cases} \dot{D}_{NC} = \dfrac{1+3cos^2\theta}{m} I_{NC} - \dfrac{3\sin\theta\cos\theta}{m} I_{TC} + \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_{TC} = \dfrac{-3\sin\theta\cos\theta}{m} I_{NC} + \dfrac{1+3\sin^2\theta}{m} I_{TC} + \dot{D}_{TA} \end{cases}$$

En la etapa de expansión tenemos

$$\begin{cases} \dot{D}_{NE} = \dfrac{1+3\cos^2\theta}{m} I_{NE} - \dfrac{3\sin\theta\cos\theta}{m} I_{TE} + \dot{D}_{NC} \\ \dot{D}_{TE} = \dfrac{-3\sin\theta\cos\theta}{m} I_{NE} + \dfrac{1+3\sin^2\theta}{m} I_{TE} + \dot{D}_{TC} \end{cases}$$

Consideremos

$$\begin{cases} A = \dfrac{1+3\cos^2\theta}{m} \\ B = \dfrac{3\sin\theta\cos\theta}{m} \\ C = \dfrac{1+3\sin^2\theta}{m} \end{cases}$$

El coeficiente de rozamiento a partir del cual no habrá deslizamiento (μ_d) se obtiene haciendo $\dot{D}_{TA} = 0$ y $\dot{D}_{TC} = 0$. Así

$$\mu_d = \frac{3\sin\theta\cos\theta}{1+3\sin^2\theta} = \frac{B}{C}$$

Consideremos cuatro casos: utilización de la ley de Newton con la ley de Coulomb para $\mu > \mu_d$ y $\mu < \mu_d$ y la utilización de la ley de Poisson con la ley de Coulomb para $\mu > \mu_d$ y $\mu < \mu_d$.

Primer caso: ley de Newton para ϵ y considerando $\mu >| \mu_d |$

En este caso tenemos $\dot{D}_{TC} = \dot{D}_{NC} = 0$, entonces

$$I_{TC} = \frac{B\dot{D}_{NA} + A\dot{D}_{TA}}{B^2 - AC} \quad \text{e} \quad I_{NC} = \frac{BI_{TC} - \dot{D}_{NA}}{A}$$

también

$$\dot{D}_{NE} = -\epsilon \dot{D}_{NA} \quad \text{e} \quad \dot{D}_{TE} = 0$$

de ahí

$$I_{NE} = \frac{-C\epsilon\dot{D}_{NA}}{AC - B^2} \quad \text{e} \quad I_{TE} = \frac{B}{C} I_{NE}$$

Segundo caso: ley de Newton para ϵ y considerando $\mu <| \mu_d |$

Cuando consideramos $\mu <| \mu_d |$ habrá deslizamiento que puede ser deslizamiento para adelante (*forward sliding*) o deslizamiento inverso (*reversed sliding*). Esto depende del signo de la componente tangencial de la velocidad relativa antes de cada una de las etapas.

Consideremos primero $\dot{D}_{TA} < 0$. Así, $I_{TC} = \mu I_{NC}$. De esa forma, tenemos

$$I_{NC} = \frac{\dot{D}_{NA}}{B\mu - A} \quad \text{e} \quad I_{TC} = \mu I_{NC} \quad \text{pues} \quad \dot{D}_{NC} = 0$$

también

$$\dot{D}_{TC} = -BI_{NC} + CI_{TC} + \dot{D}_{TA}$$

Si $\dot{D}_{TC} < 0$ (*forward sliding* en el final de la fase de etapa)

$$I_{NE} = \frac{I_{TE}}{\mu} \quad \text{e} \quad I_{TE} = \frac{\mu\epsilon\dot{D}_{NA}}{\mu B - A}$$

Si $\dot{D}_{TC} > 0$ (*reversed sliding* en el final de la etapa de compresión)

$$I_{TE} = -\mu I_{NE} \quad \text{e} \quad I_{TE} = \frac{\mu\epsilon\dot{D}_{NA}}{A + B\mu}$$

Consideremos el caso en que $\dot{D}_{TA} > 0$. Así $I_{TC} = -\mu I_{NC}$. De esta forma, tenemos

$$I_{NC} = \frac{-\dot{D}_{NA}}{A + B\mu} \quad \text{e} \quad I_{TC} = \frac{\mu\dot{D}_{NA}}{A + B\mu}$$

también

$$\dot{D}_{TC} = -BI_{NC} + CI_{TC} + \dot{D}_{TA}$$

Si $\dot{D}_{TC} < 0$ (*reversed sliding*) en el final de la etapa de compresión

$$I_{TE} = \mu I_{NE} \quad \text{y} \quad I_{TE} = \frac{\mu\epsilon\dot{D}_{NA}}{\mu B - A}$$

Si $\dot{D}_{TC} > 0$ (*forward sliding*) en el final de la fase de etapa

$$I_{TE} = -\mu I_{NE} \quad \text{y} \quad I_{TE} = \frac{\mu\epsilon\dot{D}_{NA}}{A + B\mu}$$

Tercer caso: ley de Poisson para ϵ y considerando $\mu > \mu_d$

En este caso $\dot{D}_{TC} = 0 \quad \text{y} \quad \dot{D}_{NC} = 0$. Así

$$I_{NC} = \frac{BI_{TC} - \dot{D}_{NA}}{A} \quad \text{e} \quad I_{TC} = \frac{B\dot{D}_{NA} + A\dot{D}_{TA}}{B^2 - AC}$$

también

$$I_{NE} = \epsilon I_{NC} \quad \text{e} \quad I_{TE} = \frac{B}{C} I_{NE}$$

Cuarto caso: ley de Poisson para ϵ y considerando $\mu <| \mu_d |$

Tal como hicimos en el segundo caso consideraremos los casos de deslizamiento para adelante (*forward sliding*) y de deslizamiento inverso (*reversed sliding*)

Primero consideraremos $\dot{D}_{TA} < 0$. Así

$$I_{TC} = \mu I_{NC}$$

De esta forma, tenemos

$$I_{NC} = \frac{\dot{D}_{NA}}{B\mu - A} \quad \text{e} \quad I_{TC} = \mu I_{NC}$$

también

$$\dot{D}_{TC} = -BI_{NC} + CI_{TC} + \dot{D}_{TA}$$

Si $\dot{D}_{TC} < 0$, tenemos

$$I_{TE} = \mu I_{NE}, \quad I_{NE} = \epsilon I_{NC} \quad \text{e} \quad I_{TE} = \mu\epsilon I_{NC}$$

también

$$\dot{D}_{NE} = AI_{NE} - BI_{TE}$$

y

$$\dot{D}_{TE} = -BI_{NE} + CI_{TE} + \dot{D}_{TC}$$

Si $\dot{D}_{TC} > 0$, tenemos

$$I_{TE} = -\mu I_{NE}, \quad I_{NE} = \epsilon I_{NC} \quad \text{e} \quad I_{TE} = -\mu\epsilon I_{NC}$$

también

$$\dot{D}_{NE} = AI_{NE} - BI_{TE}$$

y

$$\dot{D}_{TE} = -BI_{NE} + CI_{TE} + \dot{D}_{TC}$$

Ahora consideraremos $\dot{D}_{TA} > 0$. Así, $I_{TC} = -\mu I_{NC}$. De esta forma

$$I_{NC} = \frac{-\dot{D}_{NA}}{A + B\mu} \quad \text{e} \quad I_{TC} = \frac{\mu\dot{D}_{NA}}{A + B\mu}$$

también

$$\dot{D}_{TC} = -BI_{NC} + CI_{TC} + \dot{D}_{TA}$$

Si $\dot{D}_{TC} < 0$, tenemos

$$I_{TE} = \mu I_{NE} \quad \text{e} \quad I_{NE} = \epsilon I_{NC}$$

llegamos a

$$\dot{D}_{NE} = AI_{NE} - BI_{TE}$$

y

$$\dot{D}_{TE} = -BI_{NE} + CI_{TE} + \dot{D}_{TC}$$

Si $\dot{D}_{TC} > 0$, tenemos

$$I_{TE} = -\mu I_{NE} \quad \text{e} \quad I_{NE} = \epsilon I_{NC}$$

llegamos a

$$\dot{D}_{NE} = AI_{NE} - BI_{TE}$$

y

$$\dot{D}_{TE} = -BI_{NE} + CI_{TE} + \dot{D}_{TC}$$

DOS CASOS PARTICULARES

Antes de las simulaciones consideremos dos casos para situaciones inmediatamente antes del impacto. Utilizaremos $m = 1$, $L = 1$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Primer caso

Consideremos el caso llamado de impacto directo; esto es $\dot{D}_{NA} = -1$ y $\dot{D}_{TA} = 0$. Calculamos el coeficiente de rozamiento a partir del cual el cuerpo para de deslizarse (μ_d). Hacemos $\dot{D}_{TC} = 0$ y obtenemos $\mu_d = I_{TC}/I_{NC} = 0,6$. Así, si $\mu > 0,6 \Rightarrow \dot{D}_{TC} = 0$.

Caso $\mu > 0,6$

De la condición de complementaridad tenemos $\dot{D}_{NC} = 0$ y sabemos que $\dot{D}_{TC} = 0$. Así

$$I_{TC} = 0,375 \quad \text{e} \quad I_{NC} = 0,625$$

En la etapa de expansión $\dot{D}_{TE} = 0$. Obtenemos $I_{TE} = 0,6 I_{NE}$.

Usando la ley de Newton

En este caso $\dot{D}_{NE} = \epsilon$

$$I_{NE} = 0,625\epsilon \quad \text{e} \quad I_{TE} = 0,375\epsilon$$

Usando la ley de Poisson

En este caso $\epsilon = \frac{I_{NE}}{I_{NC}}$, entonces

$$I_{NE} = 0,625\epsilon \quad \text{e} \quad I_{TE} = 0,375\epsilon$$

En este caso las leyes de Newton y de Poisson entregan el mismo resultado.

Caso $\mu < 0,6$

En la etapa de compresión tenemos $\dot{D}_{NC} = 0$. Así

$$\begin{cases} 3,5I_{NC} - 1,5I_{TC} = 1 \\ -1,5I_{NC} + 2,5I_{TC} = \dot{D}_{TC} \end{cases}$$

pero $I_{TC} = \mu I_{NC}$, entonces

$$I_{NC} = \frac{1}{2,5 - 1,5\mu} \quad \text{e} \quad I_{TC} = \frac{\mu}{2,5 - 1,5\mu}$$

así

$$\dot{D}_{TC} = \frac{2,5\mu - 1,5}{2,5 - 1,5\mu}$$

Verificamos que $\dot{D}_{TC} < 0$. En la etapa de expansión tenemos

$$\begin{cases} \dot{D}_{NE} = 2,5I_{NE} - 1,5I_{TE} \\ \dot{D}_{TE} = -1,5I_{NE} + 2,5I_{TE} + \dot{D}_{TC} \end{cases}$$

Usando la ley de Newton

$$\dot{D}_{NE} = -\epsilon\dot{D}_{NA} = \epsilon$$

Tenemos, $I_{TE} = \mu I_{NE}$, para $\dot{D}_{TE} < 0$. Entonces, $I_{NE} = \frac{\epsilon}{2,5-1,5\mu}$ e $I_{TE} = \frac{\mu\epsilon}{2,5-1,5\mu}$. Así

$$\dot{D}_{TE} = \frac{2,5\mu - 1,5}{2,5 - 1,5\mu}(\epsilon + 1) < 0$$

Usando la ley de Poisson

$$I_{NE} = \epsilon I_{NC} \quad \text{e} \quad I_{TE} = \mu I_{NE} = \mu\epsilon I_{NC}$$

entonces

$$\dot{D}_{NE} = \frac{2,5 - 1,5\mu}{2,5 - 1,5\mu}\epsilon = \epsilon$$

también

$$\dot{D}_{TE} = \frac{2,5\mu - 1,5}{2,5 - 1,5\mu}\epsilon + \dot{D}_{TC} = \frac{(2,5\mu - 1,5)(\epsilon + 1)}{2,5 - 1,5\mu} < 0$$

En este caso las leyes de Newton y de Poisson también entregan resultados idéntico. Observamos que habrá deslizamento al final de la etapa de expansión.

Segundo caso

Consideremos $\dot{D}_{NA} = -1$ y $\dot{D}_{TA} = 0,6$ En la etapa de compresión tenemos

$$\begin{cases} \dot{D}_{NC} = 2,5I_{NC} - 1,5I_{TC} - 1 \\ \dot{D}_{TC} = -1,5I_{NC} + 2,5I_{TC} + 0,6 \end{cases}$$

Caso $\mu > 0,6$

En este caso tenemos $\dot{D}_{NC} = 0$ y $\dot{D}_{TC} = 0$. Luego, $I_{TC} = 0 \quad \text{e} \quad I_{NC} = 0,4$. En la etapa de expansión tenemos

$$\begin{cases} \dot{D}_{NE} = 2,5I_{NE} - 1,5I_{TE} \\ 0 = -1,5I_{NE} + 2,5I_{TE} \end{cases}$$

Usando la ley de Newton

$$\dot{D}_{NE} = \epsilon, \quad I_{TE} = 0,375\epsilon \quad \text{e} \quad I_{NE} = 0,625\epsilon$$

Usando la ley de Poisson

En este caso $I_{NE} = \epsilon I_{NC} = 0,4\epsilon$. Así

$$I_{TE} = 0,24\epsilon, \quad I_{NE} = 0,4\epsilon \quad \text{e} \quad \dot{D}_{NE} = 0,64\epsilon$$

Observamos que las leyes de Newton y de Poisson entregan resultados distintos.

Caso $\mu < 0,6$

En este caso tenemos $\dot{D}_{NC} = 0$ e $I_{TC} = -\mu I_{NC}$. Así

$$I_{NC} = \frac{1}{2,5 + 1,5\mu} \quad \text{e} \quad I_{TC} = \frac{-\mu}{2,5 + 1,5\mu}$$

Tenemos

$$\dot{D}_{TC} = \frac{-1,6\mu}{2,5 + 1,5\mu} < 0$$

así

$$\dot{D}_{TC} < 0 \Rightarrow I_{TE} = \mu I_{NE}$$

Usando la ley de Newton

$$\dot{D}_{NE} = \epsilon, \quad I_{NE} = \frac{\epsilon}{2,5 - 1,5\mu} \quad \text{e} \quad I_{TE} = \frac{\mu\epsilon}{2,5 - 1,5\mu}$$

también

$$\dot{D}_{TE} = \frac{(2,5\mu - 1,5)\epsilon - 1,6\mu}{2,5 - 1,5\mu}$$

Usando la ley de Poisson

$$I_{NE} = \epsilon I_{NC} = \frac{\epsilon}{2,5 + 1,5\mu} \quad \text{e} \quad I_{TE} = \frac{\mu\epsilon}{2,5 + 1,5\mu}$$

$$\dot{D}_{NE} = \frac{(2,5 - 1,5\mu)\epsilon}{2,5 + 1,5\mu} \quad \text{e} \quad \dot{D}_{TE} = \frac{(2,5\mu - 1,5)\epsilon - 1,6\mu}{2,5 + 1,5\mu}$$

Observamos que las leyes de Newton y de Poisson entregan resultados distintos.

CONSIDERACIONES DE ENERGÍA

Cuando usamos la ley de Poisson para colisiones bidimensionales[5] $T_E - T_A \leq 0$ (T_E es la energía cinética en el final de la fase de expansión y T_A es la energía cinética inmediatamente antes del choque). En el ejemplo estudiado la preocupación está en el caso en que los resultados dados por las leyes de Newton y de Poisson difieren generando energía. Esto ocurre cuando $\dot{D}_{NA} = -1; \quad \dot{D}_{TA} = 0,6 \quad \text{y} \quad \mu > 0,6$. Usando la ley de Newton, tenemos

$$T_E - T_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,625\epsilon \\ 0,375\epsilon \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,3125\epsilon^2 - 0,2 \tag{11}$$

Observamos que cuando $\epsilon > 0,8$, $T_E - T_A > 0$, la ley de conservación de energía está violada. Usando la ley de Poisson, tenemos

$$T_E - T_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,4\epsilon \\ 0,24\epsilon \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,2\epsilon^2 - 0,2 \tag{12}$$

Para $0 \leq \epsilon \leq 1 \Rightarrow T_E - T_A \geq 0$. La ley da conservación de energía no está violada, como era de esperar.

SIMULACIONES

Para las simulaciones consideremos $L = 1$ y $m = 1$. Para que podamos comparar con los datos obtenidos anteriormente, creamos una situación de tal forma que inmediatamente antes del primer choque las condiciones discutidas en la sección anterior fuesen alcanzadas (Figura 2).

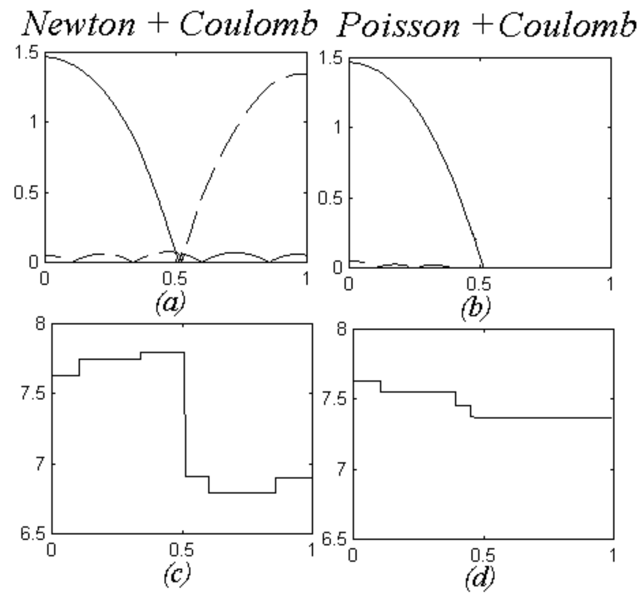

Figura 2. Caso $\mu > \mu_d$ ($\mu = 1$). En el primer choque: $\dot{D}_{NA} = -1$ y $\dot{D}_{TA} = 0,6$; (a) y (c) desplazamiento de la extremidad de la izquierda (línea llena) y de la extremidad de la derecha (línea a trazos); (b) y (d) energía

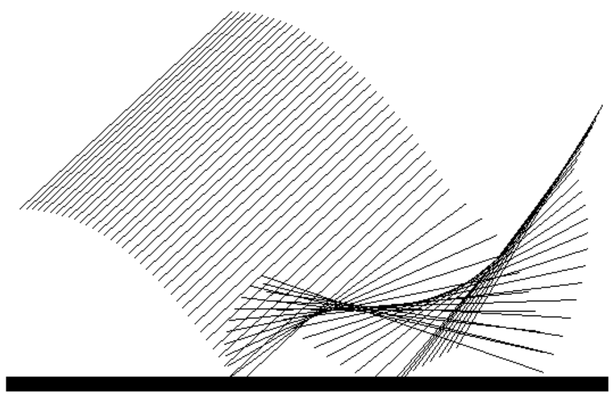

Figura 3. Animación: ley de Newton sin rozamiento

Mostraremos otro caso en que obtenemos aumento de energía, además esta vez mostraremos también las animaciones.

Consideremos el caso en que $\epsilon = 0,9$ y $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 2$, $y_0 = 1$, $\dot{y}_0 = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\theta} = 0$. Mostramos la animación de este problema en la Figura 3.

El gráfico de la energía se muestra en la Figura 4.

Para que podamos comparar con los datos obtenidos para el caso de la ley de Newton sin rozamiento, consideremos las mismas condiciones, pero ahora incluiremos rozamiento. Usaremos $\mu = 1$.

Mostramos la animación, para el caso de la ley de Newton con rozamiento, en la Figura 5.

Visualmente ya percibimos la diferencia al agregar rozamiento. Sin embargo, el problema es más serio, pues el modelo, usando las condiciones anteriores, contradice la ley de la conservación de energía. Esto podemos ver observando el gráfico de la energía en la Figura 6.

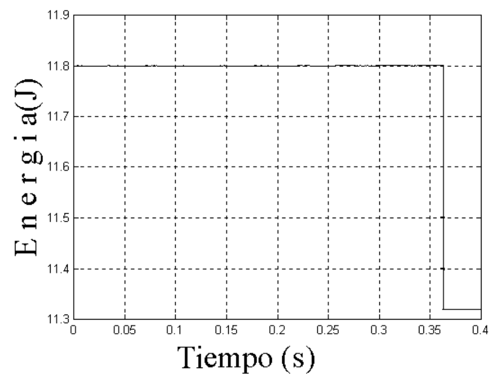

Figura 4. Energía: ley de Newton sin rozamiento

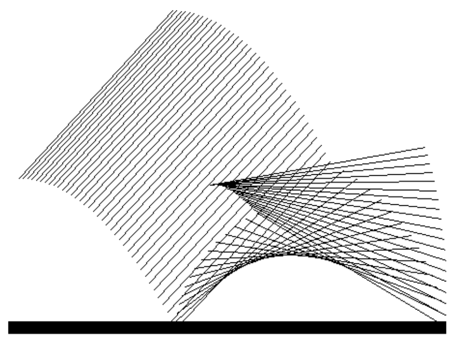

Figura 5. Animación: ley de Newton considerando rozamiento de Coulomb

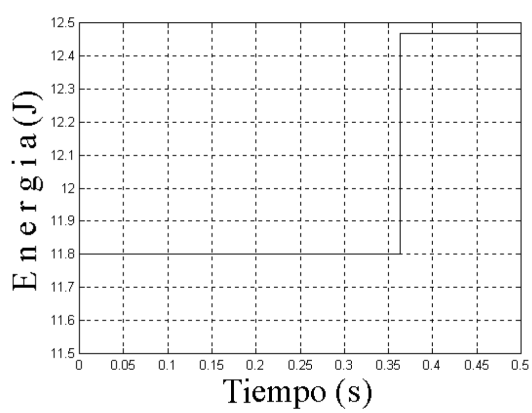

Figura 6. Generación de energía en el choque

Por otro lado, el problema de generación de energía no ocurre si utilizamos la ley de Poisson. El gráfico de la animación para ese caso se muestra en la Figura 7. Tracemos el gráfico de la energía en la Figura 8.

Deseamos observar la influencia del rozamiento en la dinámica del cuerpo. Consideraremos el caso de la ley de Poisson con rozamiento, variando el coeficiente de rozamiento, y observaremos los gráficos obtenidos.

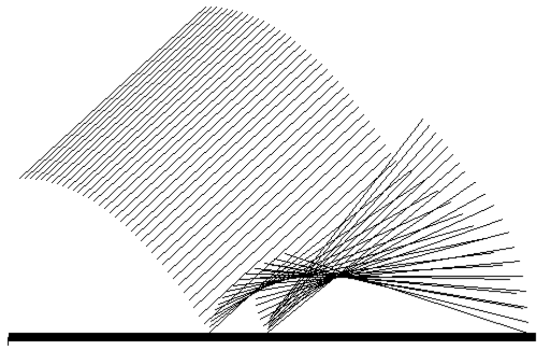

Figura 7. Animación: ley de Poisson considerando roce de Coulomb

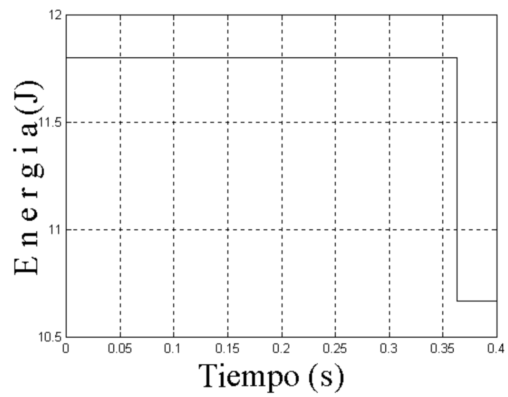

Figura 8. Energía: Poisson con Coulomb, $\mu = 1$

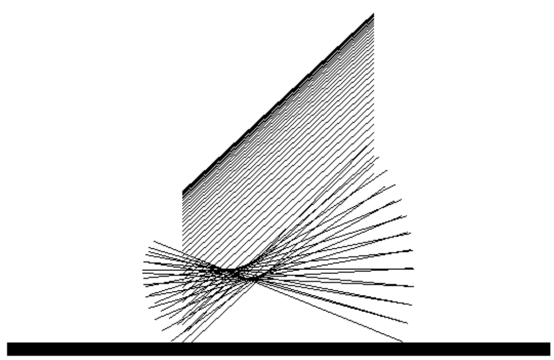

Figura 9. Animación: Poisson con Coulomb, $\mu = 0$

Consideremos las condiciones: $L = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$, $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ y $\dot{\theta}_0 = 0$. Tracemos varios gráficos de las animaciones y de las energías para varios valores de μ. Los gráficos se muestran en las Figuras 9 a 16. No observamos cambios en los gráficos a partir de $\mu = 1$. Destacamos que ese tipo de información sólo podemos obtener cuando usamos un simulador, como el que está aquí descrito.

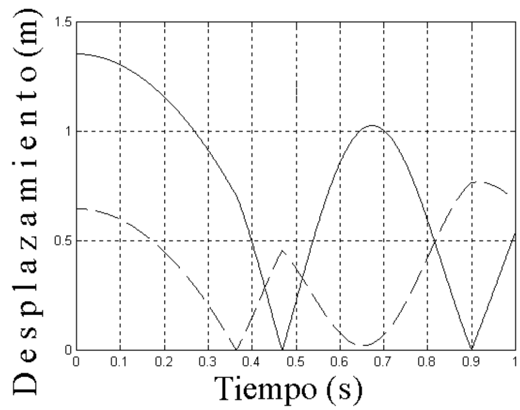

Figura 10. Desplazamiento: Poisson con Coulomb, $\mu = 0$. Extremidad de la izquierda (línea continua) y extremidad de la derecha (línea a trazos)

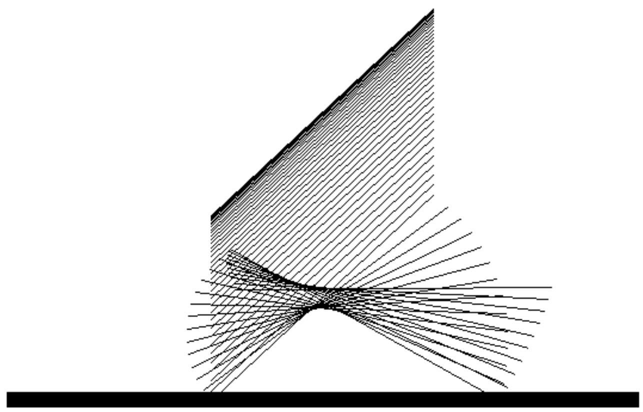

Figura 11. Animación: Poisson con Coulomb, $\mu = 0,3$

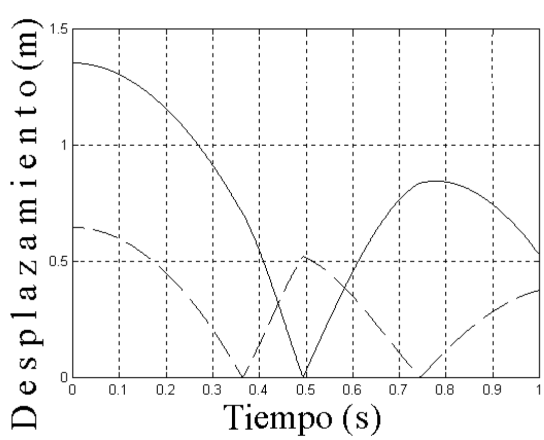

Figura 12. Desplazamiento: Poisson con Coulomb, $\mu = 0,3$. Extremidad de la izquierda (línea continua) y extremidad de la derecha (línea a trazos)

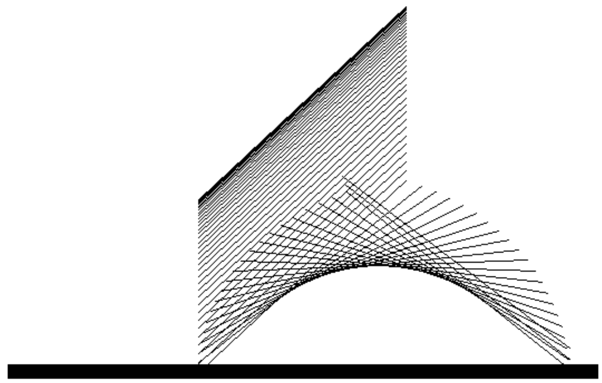

Figura 13. Animación: Poisson con Coulomb, $\mu = 1$

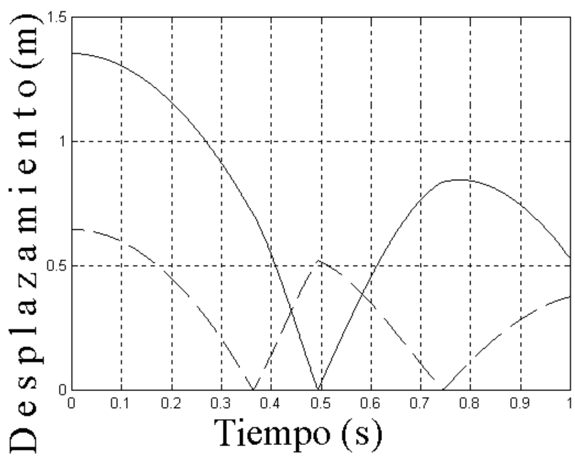

Figura 14. Desplazamiento: Poisson con Coulomb, $\mu = 1$. Extremidad de la izquierda (línea continua) y extremidad de la derecha (línea a trazos)

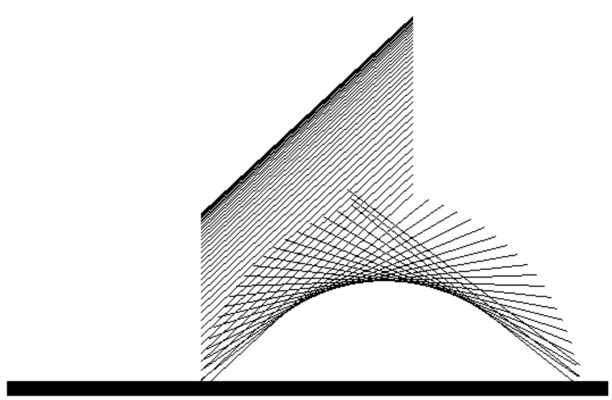

Figura 15. Animación: Poisson con Coulomb, $\mu = 50$. Extremidad de la izquierda (línea continua) y extremidad de la derecha (línea a trazos)

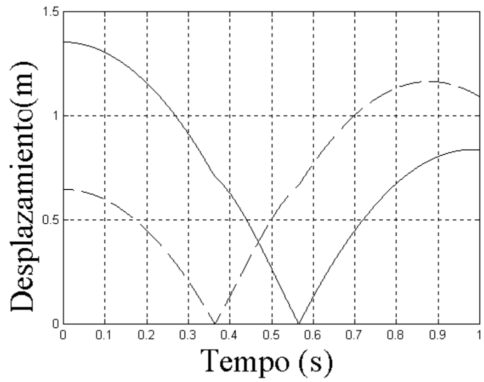

Figura 16. Desplazamiento: Poisson con Coulomb, $\mu = 50$

LEY DE SMITH

Para efectos de comparación deseamos discutir el caso en que usamos la ley de Smith en vez de la ley de Coulomb para el rozamiento. Uno de los inconvenientes de esta ley es que la ecuación obtenida es no lineal. Además, ciertos rozamientos entre los cuerpos no están considerados. La ley de Smith utiliza la definición de coeficiente de restitución dado por Newton y la relación entre los impulsos normales y tangenciales dados por

$$I_T = -\mu I_N \frac{\| \dot{D}_{TA} \| \dot{D}_{TA} + \| \dot{D}_{TE} \| \dot{D}_{TE}}{\| \dot{D}_{TA} \|^2 + \| \dot{D}_{TE} \|^2}$$

siendo $I_T = I_{TC} + I_{TE}$ e $I_N = I_{NC} + I_{NE}$. Consideremos el caso de la barra estudiada anteriormente en que $m = 1$, $L = 1$, $\dot{D}_{NA} = -1$, $\dot{D}_{TA} = 0,6$ y $\mu = 1$; esto es $\mu > 0,6$.

Para este caso aplicando la ley de Smith y suponiendo $\dot{D}_{TE} < 0$, llegamos a la ecuación

$$\begin{aligned}&(2,5 - 1,5\mu)x^3 + [(1,5 - 2,5\mu)(\epsilon + 1) + (0,9\mu - 1,5)]x^2 + (0,54\mu + 0,9)x + \\ &+ (0,54\epsilon + 0,9\mu\epsilon + 0,576\mu) = 0\end{aligned} \tag{13}$$

siendo $x = \dot{D}_{TE}$.

	Newton y Coulomb	Poisson y Coulomb	Smith
$\dot{D}_{TE}$	0	0	-0,6
$\dot{D}_{NE}$	1	1	1
I_N	1,025	0,8	0,8
I_T	0,375	0,24	0
$T_E - T_A$	0,0125	0	0

Tabla I. Comparación entre las leyes, $\epsilon = 1$

Como es un polinomio de grado tres podemos pensar que en algunos casos existen tres raíces reales. Aunque aún no se ha demostrado en la literatura, todo lleva a creer que la solución de este problema es única. Normalmente cuando la solución está compuesta por tres raíces reales, dos se descartan. Uno de los motivos es el signo de la raíz y el otro motivo es que a pesar que el signo es compatible con el problema, al calcular los valores de los impulsos encontramos respuestas físicamente incorrectas. En la Tabla I mostramos los valores de los impulsos normales y tangenciales, de las velocidades relativas y normales y tangencial final finales y de la energía, para tres casos considerados: ley de Newton con ley de Coulomb, ley de Poisson con ley de Coulomb y ley de Smith. En la tabla utilizamos $\epsilon = 1$.

CONCLUSIONES

Algunos de los modelos considerados para estudiar los choques de un cuerpo con una barrera rígida pueden fallar, ya que contradicen leyes físicas. A través de un estudio más detallado usando gráficos y tablas, mostramos algunos casos en que esos modelos fallan. Comparamos esos modelos intentando mostrar ventajas y desventajas desde el punto de vista de cálculos.

REFERENCIAS

1 E. Cataldo, "Simulação e modelagem de colisões planas entre corpos rígidos", Tesis presentada en PUC-Rio, Brasil, (1999).

2 E. Cataldo y R. Sampaio, "Comparação entre modelos de colisão de corpos", *8° Congreso de Ingenieria Mecánica*, Vol. **1**, pp. 345–348, Chile, (1998).

3 E. Cataldo y R. Sampaio, "Comparing some models of collision between rigid bodies", *PACAM VI/DINAME*, Vol. **8**, pp. 1301–1304, Rio de Janeiro, RJ, (1999).

4 A. Chaterjee, "Rigid body collisions: some general considerations, new collision laws, and some experimental data", Tesis presentada en Cornell University, (1997).

5 F. Pfeiffer y C. Glocker, "Multibody Dynamics with Unilateral Contacts", Wiley series in nonlinear science, (1996).

6 C.E. Smith, "Prediction rebounds using rigid-body dynamics", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. **58**, pp. 754–758, (1991).

7 Y. Wang y M.T. Mason, "Two-dimensional Rigid-Body Collisions wiht Friction", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. **59**, pp. 635–637, (1992).