

# ASENTAMIENTOS Y ESFUERZOS VERTICALES EN SUELOS QUE SOPORTAN CARGAS VERTICALES DE DISTRIBUCIÓN ARBITRARIA

J. A. Rodríguez-Gutiérrez<sup>1</sup> y J. Darío Aristizabal-Ochoa<sup>2</sup>

**Resumen:** Se propone un modelo para el cálculo de asentamientos y esfuerzos verticales en suelos sometidos a cargas verticales distribuidas en el plano horizontal en áreas de forma arbitraria. El modelo permite determinar los asentamientos elásticos o inelásticos y los esfuerzos verticales en cualquier punto debajo del área cargada. Dos tipos de variación del módulo de elasticidad del suelo son utilizados: 1) el módulo varía linealmente con la profundidad; 2) el módulo varía con la intensidad del esfuerzo vertical. Se obtienen expresiones para los esfuerzos verticales y los asentamientos integrando las fórmulas de Boussinesq para varias distribuciones de presiones bajo la zapata (uniforme, lineal, y parabólica). Se incluyen ayudas de diseño y cuatro ejemplos que demuestran la capacidad y validez del algoritmo propuesto.

**Palabras Claves:** desplazamientos, esfuerzos verticales, factores de influencia, métodos numéricos, zapatas.

## SETTLEMENTS AND STRESSES IN SOILS SUPPORTING VERTICAL LOADS OF ARBITRARY DISTRIBUTION

**Abstract:** An analytical model that calculates the displacements and stresses in an elastic soil stratum supporting distributed loads over an area of arbitrary shape is presented. The proposed equations are suitable for both the linear and nonlinear analyses of stresses and displacements in elastic soils. Two models are proposed with the elastic modulus of the soil varying: 1) linearly with the depth of the supporting soil; and 2) according to the intensity of vertical stress through the soil depth. Closed form expressions for the vertical stresses and displacements are developed from direct integration of Boussinesq's equation for three different pressure distributions over the loaded area (uniform, linear and parabolic). Design aids and four examples are also included to show the simplicity and validity of the proposed method.

**Keywords:** embankments, flexible footings, influence factors, numerical methods, displacements, vertical stresses.

## INTRODUCCIÓN

La mayoría de las investigaciones sobre asentamientos y esfuerzos verticales en suelos sometidos a cargas verticales superficiales son para casos de áreas rectangulares o circulares bajo carga vertical concéntrica y distribución de presiones uniforme. Tal distribución es luego utilizada para calcular esfuerzos y asentamientos verticales en el suelo. Giroud (1968) fue uno de los primeros en presentar ayudas de diseño para el cálculo de asentamientos bajo zapatas rectangulares considerando una distribución lineal de presiones (i.e. el caso de carga axial y flexión alrededor de uno de los ejes de simetría). Jarquio y Jarquio (1984) presentan fórmulas explícitas para calcular los esfuerzos verticales en zapatas rectangulares con una distribución lineal de presiones en el suelo. Braja (1990) presenta un método desarrollado por Georgiadis y Butterfield (1988) para calcular asentamientos y rotaciones instantáneas de zapatas cargadas excéntricamente.

---

<sup>1</sup> Ingeniero Consultor, Calle 83 #45-29, Medellín-Colombia.

<sup>2</sup> Profesor Generación 125-Años, Facultad de Minas, Universidad Nacional, Medellín-Colombia. E-mail: jdaristi2@yahoo.com

En general, las investigaciones teóricas y experimentales sobre el comportamiento carga-asentamiento están limitadas a áreas rectangulares y circulares bajo carga axial concéntrica. Ueshita y Meyerhor (1967) presentan un modelo de elementos finitos para analizar zapatas bajo suelos estratificados. Girjavallabhan y Reese (1968) presentan un modelo de elementos finitos para analizar el comportamiento inelástico carga-asentamiento de zapatas. Desai y Reese (1970) realizaron un estudio teórico experimental para analizar el comportamiento carga-asentamiento de zapatas circulares cargadas concéntricamente. Kurian et al (1997) realizó un estudio teórico experimental sobre el comportamiento de zapatas rectangulares en arenas reforzadas y no reforzadas. Recientemente, Mayne y Poulos (1999) obtuvieron numéricamente factores de influencia para el cálculo de asentamientos de zapatas circulares y rectangulares.

A pesar de numerosos estudios experimentales y analíticos disponibles en la literatura técnica sobre asentamientos y esfuerzos en suelos sometidos a cargas, todavía existe la necesidad de modelos con la capacidad de analizar el caso general de un área de forma arbitraria sometida a cargas no uniformemente distribuidas. Esta es la razón principal por la que este estudio fue llevado a cabo, desarrollar un algoritmo basado en la ecuación de Boussinesq capaz de predecir ambos los esfuerzos y los asentamientos en cualquier punto a profundidad determinada en un medio o estrato que soporta una carga no uniformemente distribuida sobre un área de forma arbitraria. Tres tipos diferentes de distribución de la carga son modelados: uniforme, lineal y parabólica. Formulas cerradas para los esfuerzos y asentamientos verticales son desarrolladas utilizando la técnica de integración de la cuadratura de Gauss.

## CALCULO DE ESFUERZOS VERTICALES

En el cálculo de los esfuerzos y asentamientos verticales en el suelo soportante de una zapata cargada excéntricamente, el primer paso es conocer la distribución de presiones bajo la zapata misma. Un método para resolver este problema es presentado en un artículo previo de Rodríguez-Gutiérrez y Aristizabal-Ochoa (2004) en esta misma revista.

Consideremos un área de forma arbitraria sometida a una carga vertical y momentos flectores biaxiales que producen una distribución de presiones y una posición del eje neutro como lo muestra la Figura 1(a). La fuerza total en un diferencial de área es

$$dP = q \, dx \, dy \quad (1)$$

donde:  $q$  = presión bajo la zapata en el centroide del área elemental.

Considerando  $dP$  como una carga puntual, el esfuerzo vertical en un punto cualquiera con coordenadas globales  $X_o$ ,  $Y_o$ ,  $Z$  causado por la carga  $dP$  como lo muestra la Figura 1(b) puede ser expresado como

$$d\Delta\sigma_z = \frac{3qZ^3 dydx}{2\pi[(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2 + Z^2]^{5/2}} \quad (2)$$

donde  $x_o$ ,  $y_o$  son las coordenadas del punto  $(X_o, Y_o)$  respecto a los ejes locales  $xy$  que son calculadas como sigue:

$$x_o = (X_o - X_a) \cos \alpha + (Y_o - Y_a) \sin \alpha \quad (3a)$$

$$y_o = (Y_o - Y_a) \cos \alpha - (X_o - X_a) \sin \alpha \quad (3b)$$

El esfuerzo vertical total causado por el área a compresión se obtiene integrando  $d\Delta\sigma_z$  sobre el área; si utilizamos trapecios para aproximar el área bajo compresión tenemos:

$$\Delta\sigma_z = \sum_{i=1}^{n_t} \int_{r_i}^{s_i} \int_0^{a_i x + b_i} \frac{3qZ^3 dydx}{2\pi[(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2 + Z^2]^{5/2}} \quad (4)$$

En general  $q$  es una función de  $y$ . En esta publicación se utilizan los siguientes tres modelos para la variación de  $q$ :

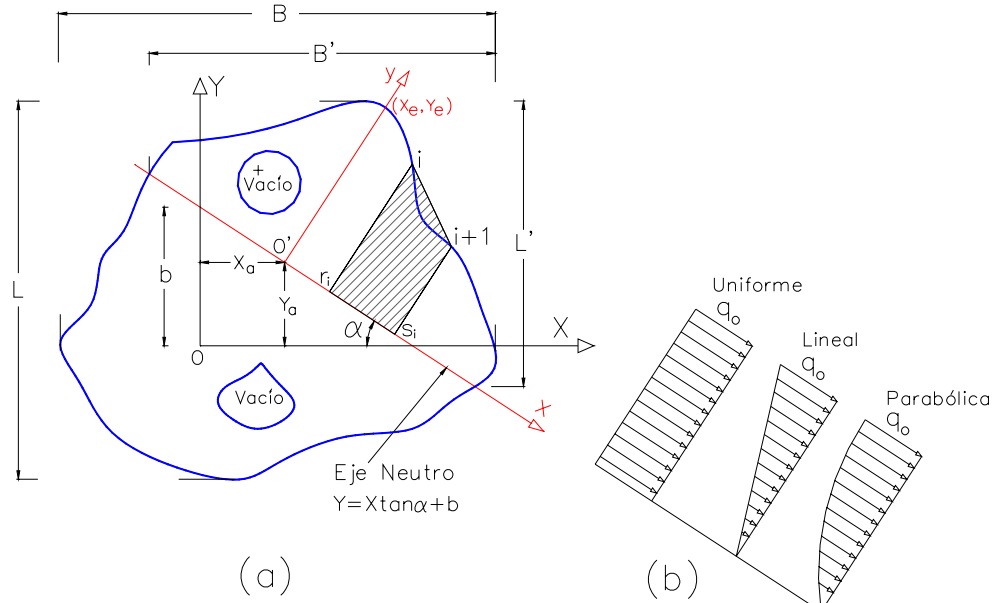
$$\text{Uniforme:} \quad q = q_0 \quad (5a)$$

$$\text{Lineal:} \quad q = q_0 y/c \quad (5b)$$

$$\text{Parabólico:} \quad q = q_0 (y/c)^{1/2} \quad (5c)$$

Para el caso de variación uniforme de  $q$ , la ecuación (3) puede reducirse a:

$$\Delta\sigma_Z = \frac{3q_0 Z^3}{2\pi} \sum_{i=1}^{n_t} \int_{r_i}^{s_i} \frac{1}{k^4} \left[ \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + k^2}} - \frac{y'^3}{3\sqrt{(y'^2 + k^2)^3}} - \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + k^2}} + \frac{y_0^3}{3\sqrt{(y_0^2 + k^2)^3}} \right] dx \quad (6)$$



**Figura 1: Zapata de forma arbitraria bajo flexión biaxial: (a) Parámetros geométricos; y (b) Tipos de distribución de presiones.**

donde

$$k^2 = Z^2 + (x_0 - x)^2 \quad (7a)$$

$$y' = a_i x + b_i - y_0 \quad (7b)$$

Para el caso del modelo lineal tenemos:

$$\Delta\sigma_Z = \frac{3q_0 Z^3}{2\pi c} \sum_{i=1}^{n_t} \Psi_i - \frac{y_0}{c} \Delta\sigma_Z (\text{uniforme}) \quad (8)$$

donde  $\Delta\sigma_Z$  (uniforme) es la expresión obtenida en la ecuación (6) y

$$\Psi_i = \frac{s_{b1}}{k_1^2 \sqrt{s_{b1}^2 + k_1^2}} - \frac{r_{b1}}{k_1^2 \sqrt{r_{b1}^2 + k_1^2}} + \frac{s_{b1}}{a_t^{3/2} k_2^2 \sqrt{r_{b2}^2 + k_2^2}} - \frac{s_{b2}}{a_t^{3/2} k_2^2 \sqrt{s_{b2}^2 + k_2^2}} \quad (9)$$

$$s_{b1} = s_i - x_0 \quad (10a)$$

$$r_{b1} = r_i - x_0 \quad (10b)$$

$$s_{b2} = s_i + [a_i(b_i - y_0) - x_0]/a_t \quad (10c)$$

$$r_{b2} = r_i + [a_i(b_i - y_0) - x_0]/a_t \quad (10d)$$

$$a_t = 1 + a_1^2 \quad (10e)$$

$$k_1^2 = y_0^2 + Z^2 \quad (10f)$$

$$k_2^2 = [x_0^2 + Z^2 + (b_i - y_0)^2]/a_t - [(a_i b_i - a_i y_0 - x_0)/a_t]^2 \quad (10g)$$

La integral (6) es calculada numéricamente utilizando cuadratura de Gauss y efectuando la siguiente sustitución:

$$x = \frac{1}{2}[r_i(1 - \xi) + s_i(1 + \xi)] \quad (11a)$$

$$dx = \frac{1}{2}(s_i - r_i)d\xi \quad (11b)$$

Cuando  $a_i = 0$  y la distribución de presiones es parabólica, la expresión (4) puede reducirse a

$$\Delta\sigma_Z = \frac{3q_0 Z^3}{2\pi\sqrt{c}} \sum_{i=1}^{n_t} \int_0^{b_i} \frac{\sqrt{y}}{k_s^2} \left( \frac{x_s}{\sqrt{x_s^2 + k_s}} - \frac{x_s^3}{3(x_s^2 + k_s)^{3/2}} - \frac{x_r}{\sqrt{x_r^2 + k_s}} + \frac{x_r^3}{3(x_r^2 + k_s)^{3/2}} \right) dy \quad (12)$$

donde:  $x_s = s_i - x_0$  (13a)

$x_r = r_i - x_0$  (13b)

$k_s = Z^2 + (y - y_0)^2$  (13c)

La integral de la ecuación (12) es calculada numéricamente utilizando cuadratura de Gauss con las siguientes sustituciones:

$$y = b_i(1+\eta)/2 \quad (14c)$$

$$dy = b_i d\eta/2 \quad (14b)$$

Si  $a_i \neq 0$  la integral doble de la ecuación (4) es calculada numéricamente utilizando cuadratura de Gauss con las siguientes sustituciones:

$$x = [r_i(1-\xi) + s_i(1+\xi)]/2 \quad (15a)$$

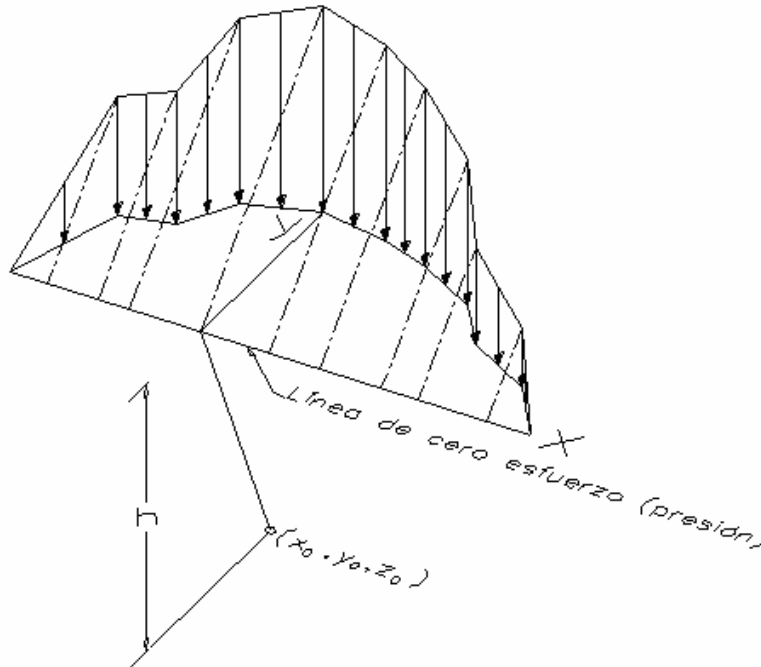
$$y = (1+\eta)[(a_i r_i + b_i)(1-\xi) + (a_i s_i + b_i)(1+\xi)]/4 \quad (15b)$$

$$dx dy = \frac{1}{8} (s_i - r_i) [(a_i s_i + b_i)(1+\xi) + (a_i r_i + b_i)(1-\xi)] d\xi d\eta \quad (15c)$$

Cuando la distribución de presiones es uniforme o lineal, 10 puntos de Gauss dan buena aproximación, mientras para la distribución parabólica son necesarios 20 puntos para una buena aproximación.

## CÁLCULO DE LOS ASENTAMIENTOS VERTICALES

En el caso general de un área de forma arbitraria sometida a una carga distribuida de forma arbitraria, el asentamiento en un punto cualesquiera ( $X_0, Y_0$ ) a una profundidad  $h$  como se muestra en la Figura 2, es calculado por la ecuación (16).



**Figura 2: Asentamientos en un extracto a profundidad  $h$  (punto  $X_0, Y_0, Z_0$ ) causado por cargas verticales distribuidas arbitrariamente a lo largo del eje  $X$  y linealmente a lo largo del eje  $Y$ .**

$$\rho = B'(1 - \nu^2) \int_0^{h/B'} \varepsilon_z dZ^* \quad (16)$$

donde  $Z^* = Z/B'$  = altura normalizada,  $B'$  = ancho efectivo de la zapata (véase figura 1b),  $E_s$  = módulo elástico del suelo.  

$$\varepsilon_z = \Delta\sigma_z/E_s; \quad (17)$$

En esta publicación utilizaremos dos modelos de variación de  $E_s$  como lo indican las expresiones (18) y (19):

$$E_s = E_o + k_E Z \quad (18)$$

$$E_s = E_o(1 - \Delta\sigma_z/q_u) \quad (19)$$

donde  $k_E$  = rata de variación de  $E_s$  con  $Z$ ,  $q_u$  = capacidad última de soporte del suelo,  $E_o$  = módulo inicial del suelo.

Cuando en la ecuación (17)  $\Delta\sigma_z$  tiene la forma de las ecuaciones (6) ó (8) y  $E_s$  tiene la forma de la ecuación (18), la integral de la ecuación (16) es obtenida numéricamente haciendo las siguientes sustituciones:

$$x = r_i + [(s_i - r_i) + (s_i - r_i)\xi]/2 \quad (20a)$$

$$Z^* = h(1 + \eta)/(2B') \quad (20b)$$

$$dx dz^* = \frac{h}{4B'} (s_i - r_i) d\xi d\eta \quad (20c)$$

Si la distribución de presiones bajo la zapata es parabólica y  $E_s$  es constante la expresión (16) toma la forma:

$$\rho = \frac{(1 - \nu^2) q_o}{2\pi E_s \sqrt{c}} \sum_{i=1}^{n_i} \int_{r_i}^{s_i} \int_0^{a_i x + b_i} \sqrt{y} \left( \frac{2a_s}{a_s^{3/2}} - \frac{2a_s + 3h^2}{(a_s + h^2)^{3/2}} \right) dy dx \quad (21)$$

donde

$$a_s = (x_o - x)^2 + (y_o - y)^2 \quad (21a)$$

Si la distribución de presiones aplicadas es parabólica y  $E_s$  tiene la forma de la ecuación (18), la expresión (16) toma la forma:

$$\rho = \frac{3(1 - \nu^2) q_o}{2\pi \sqrt{c}} \sum_{i=1}^{n_i} \int_0^{a_i x + b_i} \int_{r_i}^{s_i} \sqrt{y} [\delta_1(x, y) + \delta_2(x, y) + \delta_3(x, y)] dy dx \quad (22)$$

donde

$$\delta_1(x, y) = \frac{k_E E_o^3}{(a_s k_E^2 + E_o^2)^{5/2}} \text{Ln} \left[ \frac{\sqrt{a_s} (E_o + h k_E) (\sqrt{a_s k_E^2 + E_o^2} - \sqrt{a_s} k_E)}{E_o (\sqrt{(a_s + h^2)(a_s k_E^2 + E_o^2)} - a_s k_E + h E_o)} \right] \quad (23a)$$

$$\delta_2(x, y) = \frac{E_o (a_s k_E)^2 - 2a_s E_o^3 + 3a_s h k_E E_o^2 + a_s (h k_E)^3 - 3h^2 E_o^3 + 4k_E h^3 E_o^2}{3(a_s + h^2)^{3/2} (a_s k_E^2 + E_o^2)^2} \quad (23b)$$

$$\delta_3(x, y) = \frac{2E_o^3 a_s^{5/2} - E_o k_E^2 a_s^{7/2} - 3a_s^{5/2} (h k_E)^2 E_o^2 + 6a_s^{3/2} h^2 E_o^3 - 3h^4 E_o k_E^2 a_s^{3/2}}{3(a_s + h^2)^3 (a_s k_E^2 + E_o^2)^2} + \frac{6a_s^{1/2} E_o^3 h^4 - a_s^{1/2} E_o h^6 k_E^2 + 2E_o^3 h^6 a_s^{-1/2}}{3(a_s + h^2)^3 (a_s k_E^2 + E_o^2)^2} \quad (23c)$$

donde  $a_s$  está definido por la ecuación (21a).

La relación no lineal carga-asentamiento puede ser estudiada con el presente modelo considerando que el módulo elástico del suelo  $E_s$  varía con el esfuerzo vertical como indica la ecuación (19), pero suponiendo que la distribución de presiones aplicadas es uniforme, lineal o parabólica. En este caso la integral de la ecuación (16) sólo puede obtenerse expresándola por incrementos en la siguiente forma:

$$\rho = \frac{h(1 - \nu^2)}{n E_o} \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_{Z_i} \left/ \left( 1 - \frac{\Delta\sigma_{Z_i}}{q_u} \right) \right. \quad (24)$$

donde  $\Delta\sigma_{Z_i}$  es una función de  $Z$  como indica la ecuación (4) y  $Z = ih/n$ .

La expresión (19) fue obtenida con base en los trabajos de Duncan y Chang (1970) y Kondner (1963). Varias expresiones para  $q_u$  se encuentran en los textos de mecánica de suelos. Consúltense, por ejemplo, Peck et al. (1974), Teng (1986), Braja (1990) y Cernica (1995).

Una forma general de  $q_u$  tiene la siguiente forma:

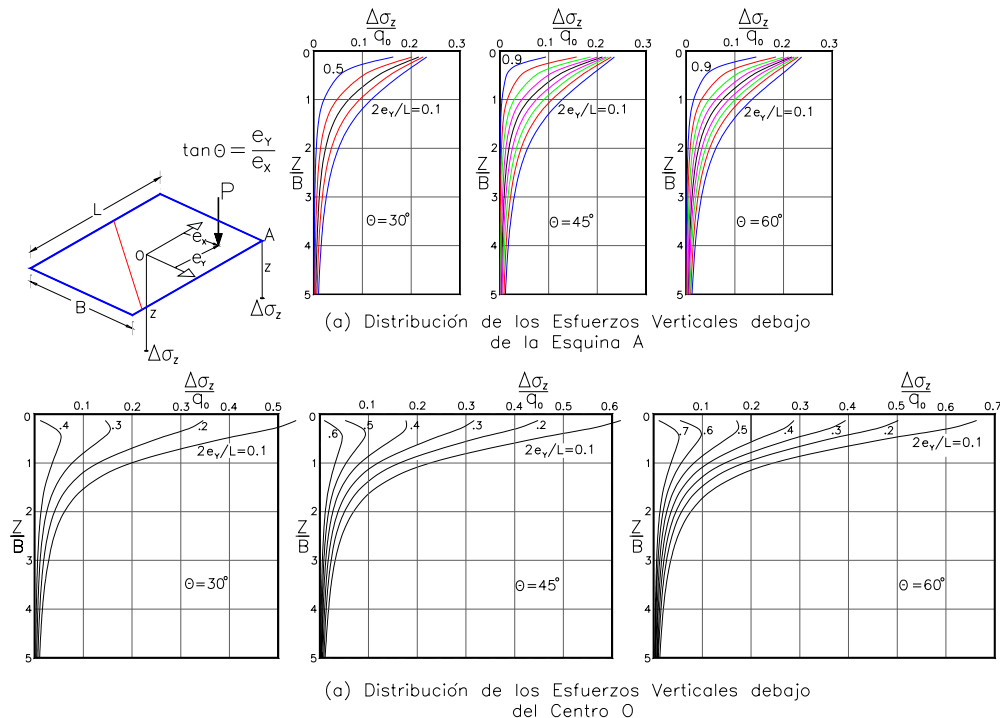
$$q_u = c N_c F_{cs} F_{cd} F_{ci} + f N_f F_{fs} F_{fd} F_{fi} + \frac{1}{2} \gamma B' N_\gamma F_{\gamma s} F_{\gamma d} F_{\gamma i} \quad (25)$$

donde  $c$  = cohesión del suelo soportante,  $f$  = esfuerzo efectivo en la parte inferior de la zapata,  $\gamma$  = peso unitario del suelo,  $B'$  = ancho efectivo de la zapata (véase figura 1b),  $F_{cs}$ ,  $F_{fs}$  y  $F_{\gamma s}$  = factores de carga,  $F_{cd}$ ,  $F_{fd}$  y  $F_{\gamma d}$  = factores de profundidad,  $F_{ci}$ ,  $F_{fi}$  y  $F_{\gamma i}$  = factores de inclinación de carga,  $N_c$ ,  $N_f$  y  $N_\gamma$  = factores de capacidad de suelo soportante.

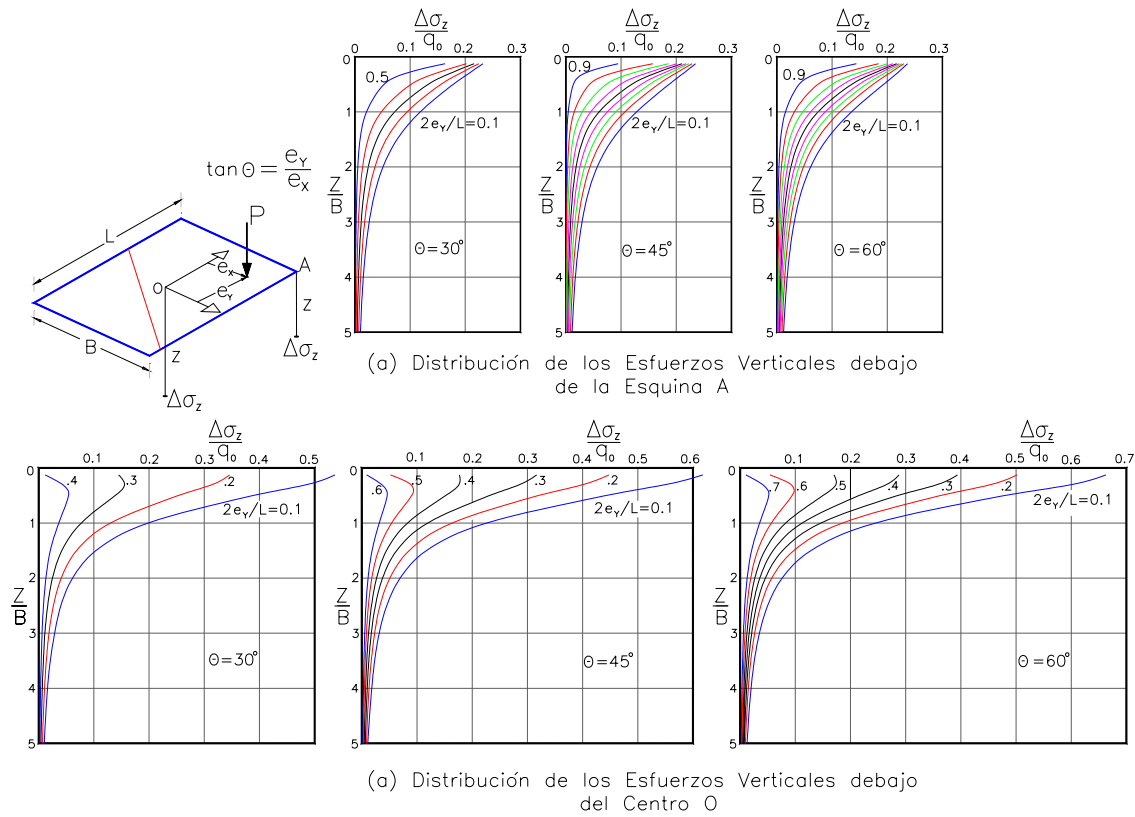
Zadropa (1994) presenta un estudio interesante donde compara los valores de los factores de la ecuación (25) obtenidos por modelos analíticos y empíricos con los obtenidos a partir de datos experimentales. En el caso de una zapata bajo flexión biaxial definimos el largo efectivo  $L'$  y ancho efectivo  $B'$  la mayor y menor de las magnitudes:  $X_{er}-X_{el}$  o  $Y_{et}-Y_{eb}$ ; donde:  $X_{er}$  y  $X_{el}$  son las coordenadas más a la derecha y más a la izquierda de la poligonal que aproxima el área a compresión, respectivamente.  $Y_{et}$  y  $Y_{eb}$  son las abscisas más arriba y más abajo de la poligonal que aproxima el área a compresión, respectivamente. De igual manera el largo absoluto  $L$  y ancho absoluto  $B$  son definidos como la mayor y menor de las magnitudes:  $X_{tr}-X_{tl}$  o  $Y_{tt}-Y_{tb}$ ; donde:  $X_{tr}$  y  $X_{tl}$  son las coordenadas más a la derecha y más a la izquierda de la poligonal que aproxima el área de la zapata, respectivamente.  $Y_{tt}$  y  $Y_{tb}$  son las abscisas más arriba y más abajo de la poligonal que aproxima el área de la zapata, respectivamente.

## APLICACIONES (AYUDAS GRÁFICAS DE DISEÑO)

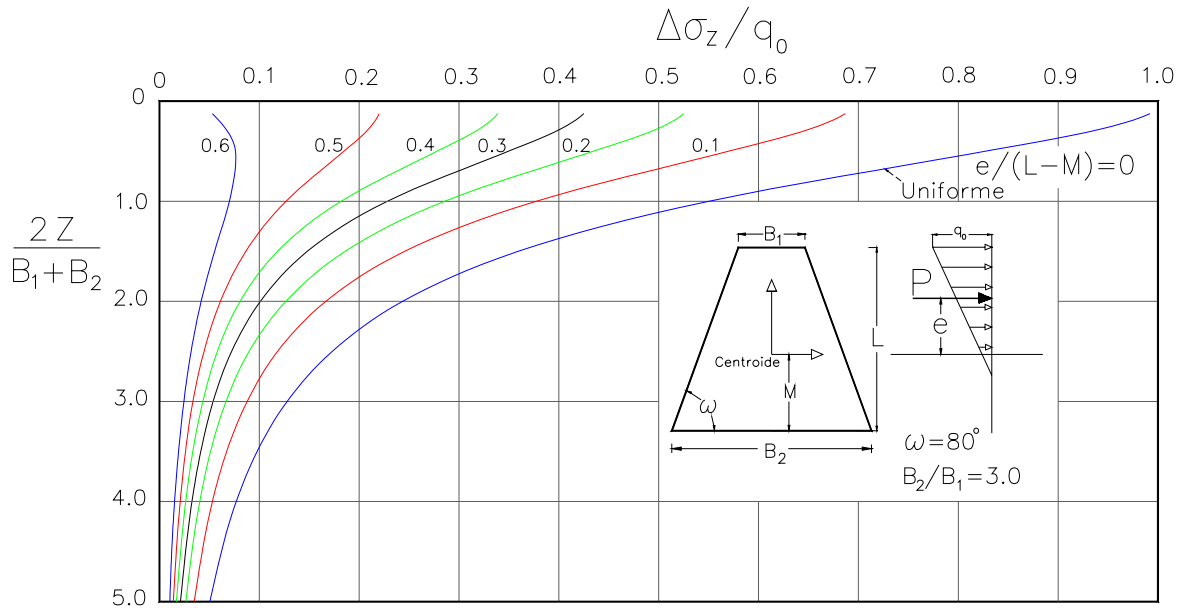
Las Figuras 3 a la 7 ilustran la utilización el modelo propuesto para obtener ayudas gráficas de diseño. Las Figuras 3(a) y (b) muestran la variación del esfuerzo vertical bajo el centro y el borde de un área circular cargada excéntricamente. Las Figuras 4(a) y (b) muestran la variación del esfuerzo vertical bajo el centro y en una esquina de un área cuadrada sometida a una carga linealmente distribuida causando flexión biaxial. La Figura 5 muestra la variación del esfuerzo vertical bajo el centroide de un área trapezoidal sometida a una carga linealmente distribuida causando flexión uniaxial alrededor del eje  $x$ .



**Figura 3: Esfuerzos Verticales causados por una carga vertical distribuida linealmente sobre una zapata rectangular: a) en el centro O; B) en la esquina A.**

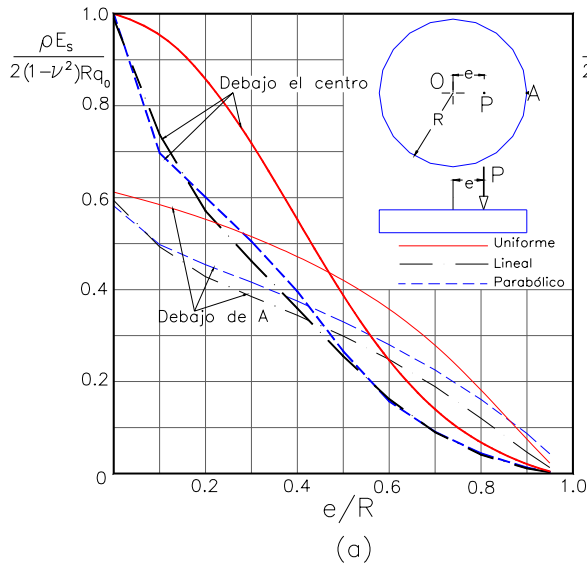


**Figura 4: Esfuerzos verticales debajo de una zapata cuadrada sometida a una carga vertical excéntrica (linealmente distribuida) (para  $\theta = 30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$ ), respectivamente: (a) debajo de la esquina A y (b) debajo del centro O.**

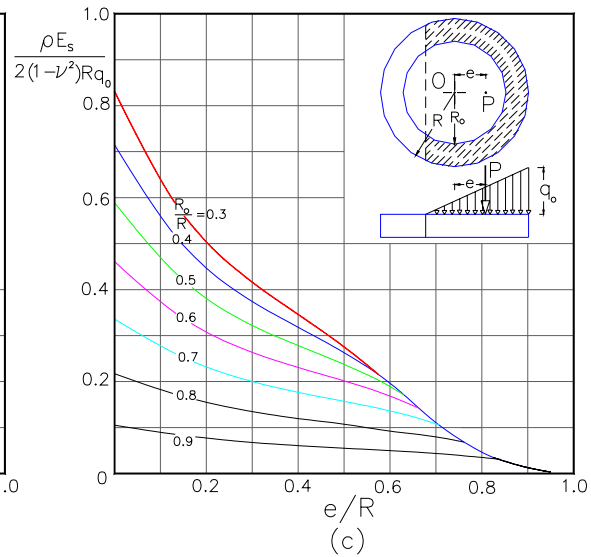


**Figura 5: Esfuerzos verticales debajo el centroide de una zapata trapezoidal sometida a una carga uniformemente distribuida y excéntrica alrededor de un eje.**

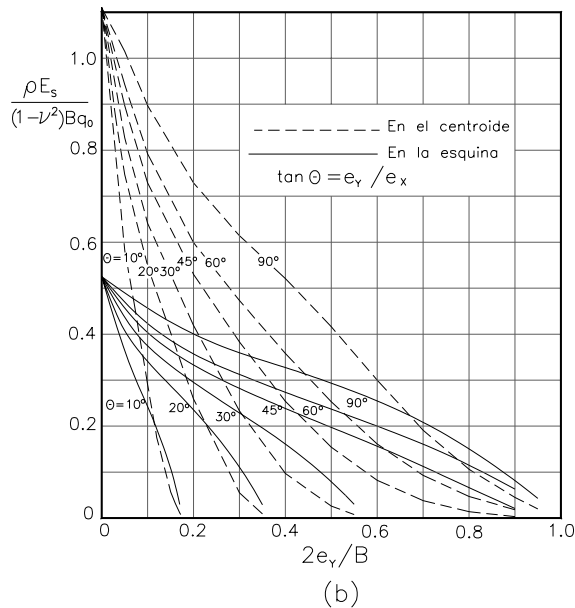
Las Figuras 6(a)-(b) muestran la variación del factor de influencia de desplazamientos normalizados con respecto a  $\rho E_s / (1-\nu^2) B q_0$  en una zapata circular y cuadrada sometidas a cargas linealmente distribuidas. La Figura 6(c) muestra la variación del factor de influencia de desplazamientos en una zapata en forma de anillo sometida a una carga linealmente distribuida. La Figura 6(d) muestra la influencia de la variación de módulo elástico del suelo con la profundidad en el valor del factor de influencia de desplazamientos a una carga linealmente distribuida en una zapata circular



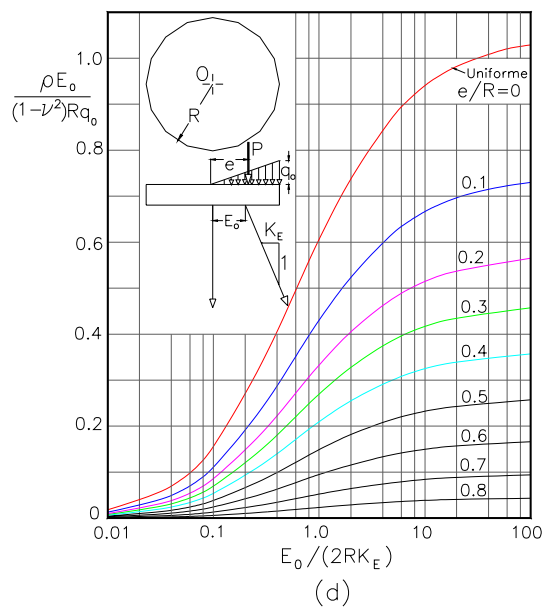
(a)  
En el Centro O y orilla A  
de una zapata circular.



(c)  
En el Centro O de una zapata de  
forma de anillo (distribución lineal)



(b)  
En el centroide y en la esquina de  
una zapata cuadrada sometida a  
una carga linealmente distribuida.



(d)  
Factor de influencia del Desplazamiento Vertical  
para una zapata circular sometida a una  
carga linealmente distribuida y con E del suelo  
variando linealmente con la profundidad h.

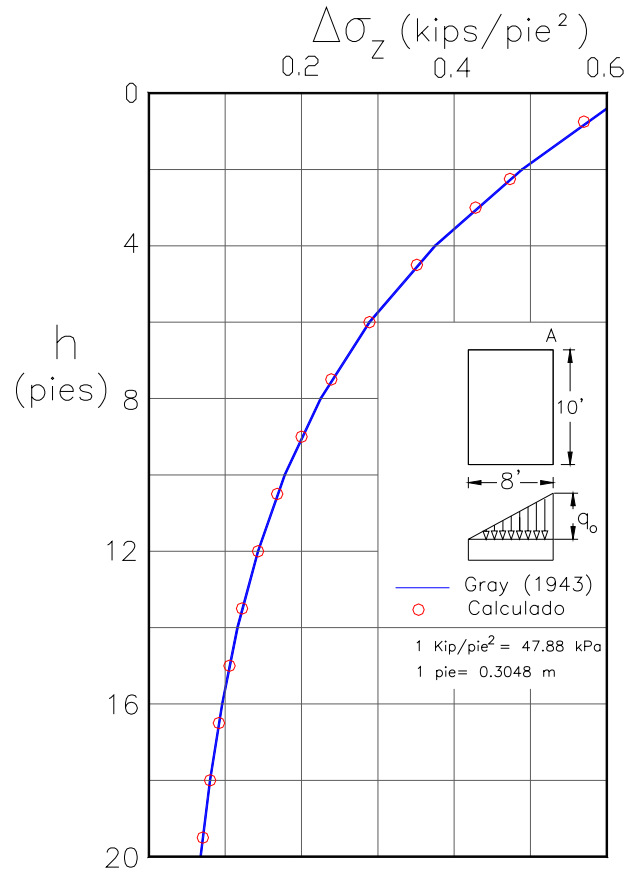
**Figura 6: Desplazamiento vertical para una: a) zapata circular; b) zapata cuadrada; c) zapata en segmento de anillo; y d) zapata circular con  $E_s$  variando linealmente con la profundidad  $h$  del suelo todas sometidas cargas linealmente distribuidas.**



## EJEMPLOS DE VERIFICACIÓN

Los cuatro ejemplos que siguen comprueban la buena correlación del modelo propuesto con resultados encontrados en la literatura.

**Ejemplo 1.** Una zapata rectangular con  $L=10$  pies (3.05 m),  $B=8$  pies (2.44 m) es sometida a una carga axial  $P=70$  kip (311.37 kN) y un momento  $M_x=150$  kip-pie (203.37 kN-m). Calcular los esfuerzos verticales desde la base de la zapata hasta una profundidad  $h=20$  pies (6.096 m) bajo el punto A.



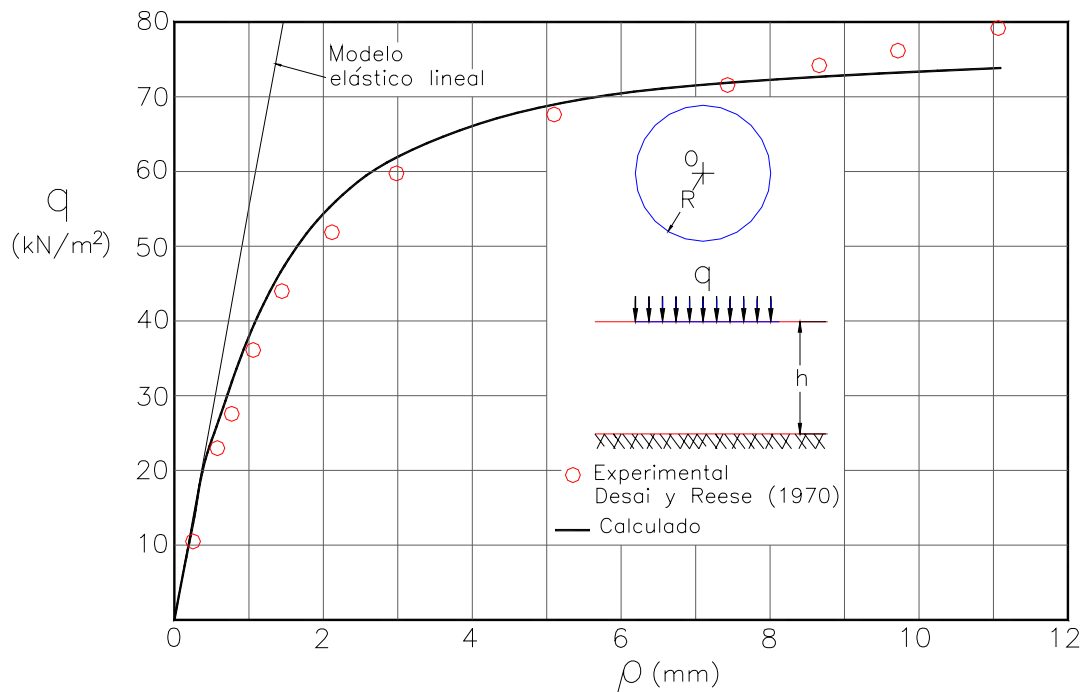
**Figura 7: Ejemplo 1. Esfuerzos verticales en la esquina A debajo de un área rectangular sometida a una carga distribuida linealmente.**

**Solución:** Supongamos que la distribución de presiones bajo la zapata es lineal. Las cargas producen una presión máxima  $q_0=2.512$  kip/pie<sup>2</sup> (120.312 kN/m<sup>2</sup>) y la altura del bloque de esfuerzos  $b=5.571$  pies (1.698 m). La Figura 7 muestra los valores obtenidos con el modelo propuesto y los valores obtenidos por Jarquio y Jarquio (1984). Puede observarse que la correlación disminuye con la profundidad.

**Ejemplo 2.** Encontrar la respuesta carga-asentamiento de una zapata circular con  $R=1.5$  pulg. (0.0381 m),  $h=8.7$  pulg. (0.221 m), el suelo bajo la zapata presenta las siguientes características obtenidas experimentalmente:  $\gamma=0.0636$  lb/pul<sup>3</sup> (17.26 kN/m<sup>3</sup>);  $c=1.6$  lb/pul<sup>2</sup> (11.03 kN/m<sup>2</sup>);  $\phi=2^\circ$ ;  $E_o=4,000$  lb/pul<sup>2</sup> (2752.92 kN/m<sup>2</sup>); relación de Poisson  $\nu=0.485$ .

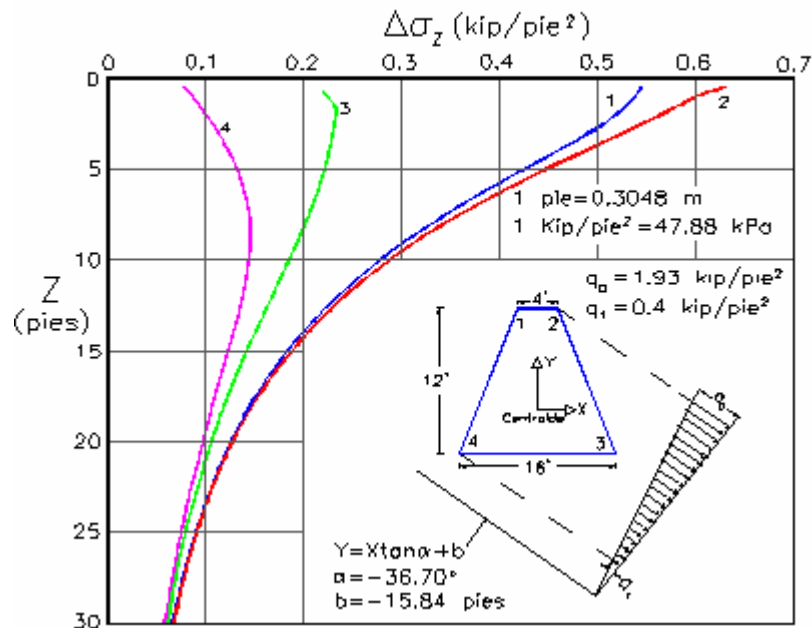
**Solución:** Para utilizar el modelo actual el valor de  $q_u$  es calculado utilizando la ecuación de Meyerhof (ver Cernica (1995), páginas 124-125) y  $n=40$ . El valor del esfuerzo vertical  $\Delta\sigma_{Z_i}$  a la profundidad  $Z_i=ih/n$  es calculado utilizando la expresión (6), ya que la distribución de la carga aplicada es uniforme.

La Figura 8 muestra los resultados obtenidos utilizando la expresión (24) y los datos experimentales obtenidos por Desai y Reese (1970). La correlación entre los valores calculados con el modelo propuesto con los datos experimentales es excelente.



**Figura 8: Esfuerzo-versus-asentamiento vertical debajo del centro de un área circular cargada uniformemente.**

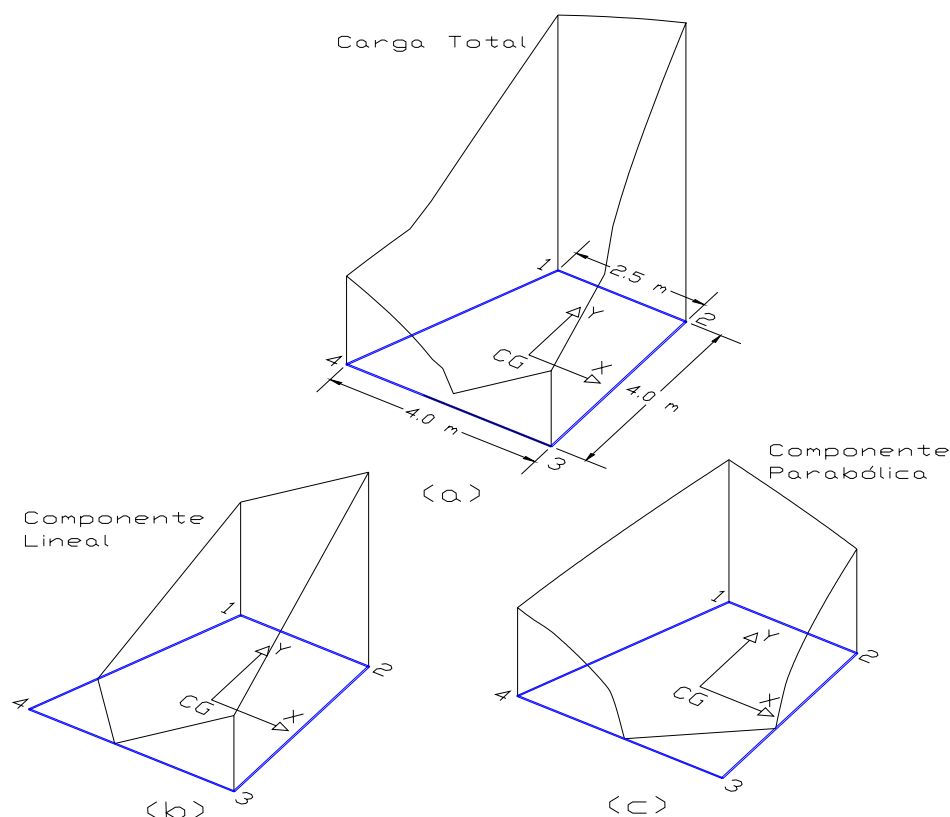
**Ejemplo 3.** Determinar la variación de los esfuerzos y de los asentamientos verticales debajo de las esquinas de la zapata trapezoidal que se muestra en la Figura 9. La profundidad total del estrato es de 30 pies (9.144 m) con las siguientes propiedades elásticas  $E_s = 500 \text{ kip/pie}^2$  (23.949 MPa) y  $\nu = 0.5$ .



**Figura 9: Esfuerzos verticales debajo los vértices de una zapata trapezoidal cargada excéntrica (distribución lineal).**

**Solución:** Utilizando la ecuación (16) y teniendo en cuenta que  $h = 30 \times (B_1 + B_2) / 2$ , los asentamientos elásticos en las esquinas 1, 2, 3 y 4 obtenidos con el modelo propuesto fueron los siguientes:  $\rho_1 = 0.01057 \text{ pies}$  (32 mm),  $\rho_2 = 0.0111 \text{ pies}$  (34 mm),  $\rho_3 = 0.00669 \text{ pies}$  (20 mm),  $\rho_4 = 0.0048 \text{ pies}$  (15 mm), respectivamente. La distribución de esfuerzos verticales es mostrada en la Figura 9.

**Ejemplo 4.** Determinar la variación de los esfuerzos verticales y los asentamientos elásticos superficiales bajo los vértices 2 y 4 de la zapata en forma de trapecio rectángulo bajo la carga mostrada en la Figura 10(a), donde la base menor mide 2.5 m, la base mayor y la altura miden 4.0 m. La zapata descansa sobre un estrato de espesor infinito que tiene las siguientes propiedades  $E_s=18,000 \text{ kN/m}^2$  y  $\nu = 0.3$ .



**Figura 10: Zapata trapezoidal con ángulo recto en el vértice 3 sometida a una carga irregular: (a) geometría y carga aplicada; (b) Componente lineal; (c) Componente parabólico.**

**Solución:** La carga de la Figura 10(a) resulta de la suma de la carga lineal de la Figura 10(b) y la carga parabólica de la Figura 10(c) que tienen las siguientes distribuciones:

$$q = 12.419 \left( \frac{y}{4.417} \right) \text{ kN/m}^2 \text{ (lineal); } \quad q = 9.088 \sqrt{\frac{y}{3.452}} \text{ kN/m}^2 \text{ (parabólica)}$$

Las ecuaciones de las líneas de cero presiones con respecto a los ejes globales con origen en el centroide de la zapata para las dos distribuciones de carga son:

$$Y = X \tan (-47.61^\circ) - 2.588 \text{ m; } \quad Y = X \tan (39.68^\circ) - 1.629$$

Utilizando el principio de superposición los asentamientos y esfuerzos verticales son calculados. Para representar un estrato de espesor infinito hacemos  $h = 30(B_1+B_2)/2 = 30(2.5+4.0)/2 = 97.5 \text{ m}$ . Los asentamientos calculados con el modelo propuesto fueron los siguientes: **Vértice 2:**  $\rho = 0.0007 \text{ m}$  (carga lineal);  $\rho = 0.000546 \text{ m}$  (carga parabólica); y  $\rho = 0.001246 \text{ m}$  (carga total); **Vértice 4**  $\rho = 0.000263$  (carga lineal);  $\rho = 0.000439 \text{ m}$  (carga parabólica); y  $\rho = 0.000702 \text{ m}$  (carga total).

## CONCLUSIONES

El objetivo de este artículo fue presentar un modelo que permite generalizar la ecuación de Boussinesq para los casos de cargas verticales aplicadas a zapatas de formas arbitrarias sometidas a cargas axiales y momentos flectores biaxiales que producen distribución de presiones uniforme, lineal o parabólica debajo las mismas. Se desarrollaron fórmulas integrales para los esfuerzos verticales y asentamientos para cada modelo de distribución de presiones, las cuales son reducidas al menor orden posible. Las integrales son resueltas numéricamente utilizando cuadratura de Gauss ,

requiriendo 10 puntos de integración para las distribuciones uniforme y lineal, y 20 puntos de integración para la distribución parabólica.

Adicionalmente, se incluyen dos modelos para la variación del módulo elástico  $E_s$  del suelo: el modelo lineal según el cual el módulo varía con la profundidad, y el modelo no lineal según el cual el módulo varía con el esfuerzo vertical  $\Delta\sigma_z$ . Se supone que la relación de Poisson del suelo  $\nu$  permanece constante con la profundidad del mismo. La ley generalizada de Hooke, en la que la deformación vertical depende además del esfuerzo vertical de los esfuerzos en las direcciones de los ejes locales  $xy$  utilizados para la integración no es tenida en cuenta. Sólo el esfuerzo vertical es tenido en cuenta en el cálculo de asentamientos verticales.

El modelo propuesto puede adaptarse para analizar esfuerzos y asentamientos en suelos estratificados, donde las propiedades del suelo varían de estrato a estrato. Investigaciones adicionales como son las de los efectos de la rigidez misma de la zapata (a través de la cual se aplican las cargas), de los esfuerzos triaxiales resultantes en el suelo, y de los diferentes estratos son verdaderos retos de importancia práctica. Sin embargo, debido a su complejidad éstos requieren un modelo mucho más complejo.

Una serie de ayudas gráficas de diseño presentadas en esta publicación fueron desarrolladas utilizando el modelo propuesto. Estas ayudas son para el cálculo de esfuerzos y de asentamientos en suelos elásticos sometidos a cargas verticales través de zapatas de forma cuadrada, rectangular, trapezoidal, circular y de forma de anillo. Cuatro ejemplos numéricos muestran la validez del modelo propuesto.

## REFERENCIAS

- Braja, M. D. (1990). *Principles of Foundation Engineering*, 5th Ed., Pws-Kent Publishing Company. Pacific Grove, California.
- Cernica, J. M. (1995). *Geotechnical Engineering Foundation Design*, John Wiley & Sons, Inc., New York, New York.
- Desai, C. S. y Reese, L. C. (1970). "Analysis of circular footings on layered soils", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, Vol. 96, No. 4, pp. 1289-1310.
- Duncan, J. M. y Chang, C. Y. (1970). "Nonlinear analysis of stress and strain in soils", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, Vol. 96, No. 5, pp. 1629-1653.
- Georgiadis, M. y Butterfield, R. (1988). "Displacement of footings on sand under eccentric and inclined loads", *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 25, No. 2, pp 199-212.
- Girijavallabhan, C. V. y Reese, L. C. (1968). "Finite element method for problems in soil mechanics", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, Vol. 94, No. 2, pp. 473-496.
- Giroud, J. P. (1968). "Settlement of a linearly loaded rectangular area", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, Vol. 94, No. 4, pp. 813-831.
- Jarquio, R. y Jarquio, V. (1984). "Vertical stress formulas for triangular loading", *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 110, No. 1, pp.73-78.
- Kondner, R. L. (1963). "Hyperbolic stress-strain response: cohesive soils", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, Vol. 89, No. 1, pp.115-143.
- Kurian, N.P., Beena, K.S, y Kumar, R. K. (1997). "Settlement of reinforced sand in foundations", *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 123, No. 9, pp. 818-827.
- Mayne, P. W. y Poulos, H.G. (1999). "Approximate displacement influence factors for elastic shallow foundations", *Journal of the Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, Vol. 125, No. 6, pp. 453-460.
- Peck, R. B., Hanson, W.E. y Thornburn, T. H. (1974). *Foundation Engineering*, 2nd. Ed., John Wiley and Sons, New York, New York.
- Rodriguez, J. A. y Aristizabal-Ochoa, J. Darío (1999). "Biaxial interaction diagrams for short RC columns of any cross section", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 125, No. 6, pp. 672-683.
- Rodríguez-Gutiérrez, J. A. y Aristizabal-Ochoa, J. Darío (2004). "Presiones en zapatas rígidas de forma arbitraria sometidas a carga axial excéntrica", *Revista Internacional de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil*, Vol. 4, No. 1, pp. 67-81.
- Teng, W. C. (1986). *Foundation Design*, Englewood Cliffs, Inc., New York.
- Ueshita, K. y Meyerhof, G. G. (1967). "Deflection of multilayer soil systems", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, Vol. 93, No. 5, pp. 257-282.
- Zadroga, B. (1994). "Bearing capacity of shallow foundations on noncohesive soils", *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 120, No. 11, pp. 1991-2008.