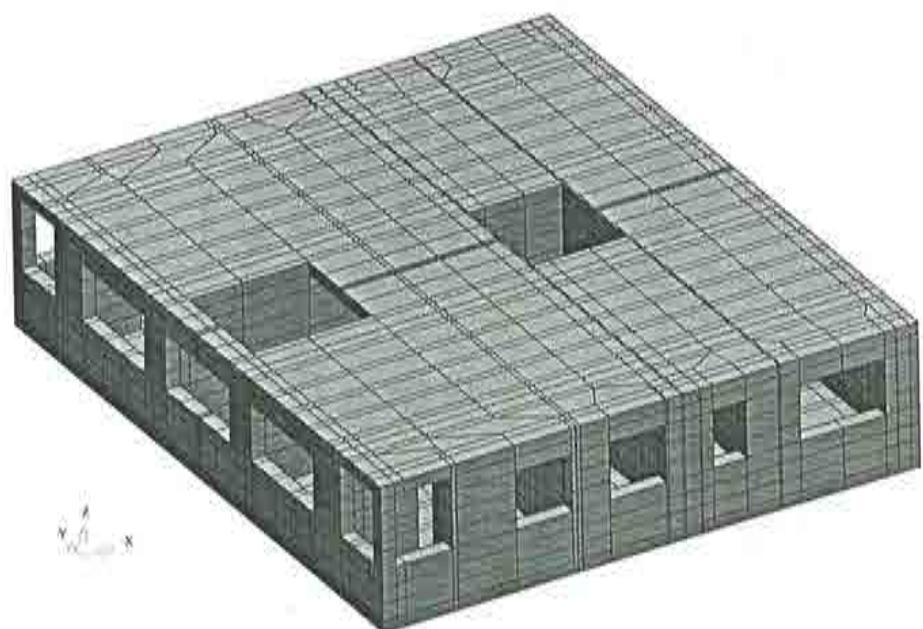


Metodología de evaluación del deterioro en estructuras de hormigón armado

**A.D. Hanganu
A.H. Barbat
E. Oñate**



Metodología de evaluación del deterioro en estructuras de hormigón armado

Alex D. Hanganu

Alex H. Barbat

Eugenio Oñate

Monografía CIMNE Nº 39, Julio 1997

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España

Diseño de la cubierta: Jordi Pallí

Primera Edición, Julio 1997

© Los autores

Edita:

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería
Edificio C1, Campus Norte UPC
Gran Capitán, s/n
08034 Barcelona, España

ISBN: 84-89925-01-1

Depósito Legal: B-35360-97

ÍNDICE

1 INTRODUCCIÓN	1
2 TECNOLOGÍA DE ELEMENTOS FINITOS	9
2.1 Introducción	9
2.2 Ecuaciones de equilibrio del sólido continuo	10
2.3 Elemento finito de barra 2D de Timoshenko	12
2.3.1 Hipótesis de la formulación de viga de Timoshenko	12
2.3.2 Campo de desplazamientos	13
2.3.3 Campo de deformación y aceleración	14
2.3.4 Campo de tensión e inercia	15
2.3.5 Campos de esfuerzos seccionales	16
2.3.6 Discretización del medio continuo en elementos finitos	19
2.3.7 Funciones de forma y relaciones derivadas	19
2.3.8 Ecuaciones de equilibrio para un elemento finito	22
2.3.9 Sistema global de ecuaciones	23
2.4 Elemento finito de lámina de revolución	24
2.5 Elemento finito de barra 3D	29
2.6 Elemento de sólido 3D de hormigón armado	35
3 MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO ISÓTROPO	41
3.1 El concepto de daño	41
3.2 Consideraciones sobre los modelos de daño	44
3.3 Características del modelo	45
3.3.1 Consideraciones energéticas	45
3.3.2 Inecuación de Clasius-Planck. Disipación mecánica	45
3.3.3 Criterio umbral de degradación o daño	46
3.3.4 Regla de evolución de la variable interna	48
3.3.5 Condición de consistencia del daño	48
3.3.6 Condición de carga/descarga	50
3.3.7 Particularización de la función $G(\bar{\sigma})$	50
3.3.8 Obtención del parámetro A	51
3.3.9 Aspectos energéticos del fenómeno de degradación	53

METODOLOGÍA DE EVALUACIÓN DEL DETERIORO EN ESTRUCTURAS

3.3.10	Matriz tangente del modelo de daño	54
3.3.11	Direcciones de fisuración y aplastamiento	58
3.4	Análisis dinámico	59
3.4.1	Modelo de daño visco-elástico	59
3.4.2	Integración temporal de las ecuaciones dinámicas	61
3.5	Factor de retención del corte	63
3.6	Índice global de daño	64
3.7	Ejemplos de validación	66
3.7.1	Análisis de objetividad	66
3.7.2	Validación del factor de retención de corte	68
Anexo 3-1 CONCEPTOS DE ELASTO-PLASTICIDAD		75
1	Introducción	75
2	Conceptos de plasticidad general	75
2.1	Función de fluencia	77
2.2	Descomposición de la deformación total. Regla de flujo	77
2.3	Superficie de carga plástica. Edurecimiento plástico	78
2.4	Relación tensión-deformación generalizada	79
3	Vectores de flujo de Nayak-Zienkiewicz	81
Anexo 3-2 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DINÁMICO. MÉTODO DE NEWMARK		85
1	Ecuaciones de diferencias finitas en el tiempo	85
2	Ánálisis lineal	87
3	Aproximación y estabilidad	89
4	Ánálisis no lineal - Método de la rigidez inicial	91
4 APLICACIÓN DEL ÍNDICE GLOBAL DE DAÑO AL ESTUDIO DE PATOLOGÍAS EN EDIFICIOS		95
4.1	Estructuras porticadas	95
4.1.1	Introducción	95
4.1.2	Pórtico plano sometido a acciones estáticas y dinámicas	95
4.1.3	Pórtico tridimensional sometido a una acción sísmica	104
4.2	Edificios de viviendas	107
4.2.1	Introducción	107
4.2.2	Descripción de la estructura	109
4.2.3	Resultados	109

ÍNDICE

5 APPLICACIÓN DEL ÍNDICE GLOBAL DE DAÑO AL ESTUDIO DE LA SEGURIDAD DE EDIFICIOS DE CONTENCIÓN DE CENTRALES NUCLEARES	117
5.1 Objetivos y alcance del estudio	117
5.2 Descripción de la estructura	119
5.3 Análisis de revolución	121
5.3.1 Análisis estático	121
5.3.2 Análisis dinámico	122
5.4 Metodología del análisis tridimensional	125
5.4.1 Características del modelo de cálculo	126
5.4.2 Modelo de elementos finitos	128
5.5 Calibración del modelo	130
5.6 Efecto de la losa de cimentación sobre la presión de fallo	133
5.7 Estudio dinámico	146
5.7.1 Presión interna dinámica	146
5.7.2 Análisis sísmico	146
5.8 Efecto de la carga térmica	149
5.8.1 Introducción	149
5.8.2 Tratamiento numérico del efecto de la temperatura	151
5.8.3 Definición de la acción térmica	152
5.8.4 Resultados	153
5.9 Estudio probabilista de la presión de fallo	159
5.10 Conclusiones	165
Anexo 5-1 SISTEMA DE POSTESADO EN UN EDIFICIO DE CONTENCIÓN	167
1 Introducción	167
2 Evaluación de las pérdidas de fuerza de pretensado	168
3 Cálculo de las fuerzas de tensión	171
3.1 Cables horizontales	171
3.2 Cables verticales	174
4 Cálculo de las presiones equivalentes	175
4.1 Cables horizontales en el cilindro	176
4.2 Cables horizontales en la cúpula	176
4.3 Cables verticales de dirección N-S	177
4.4 Cables verticales de dirección E-O	177
5 Conclusiones	178

METODOLOGÍA DE EVALUACIÓN DEL DETERIORO EN ESTRUCTURAS

6 APLICACIÓN DEL ÍNDICE GLOBAL DE DAÑO AL ESTUDIO DE CONSTRUCCIONES HISTÓRICAS	183
6.1 Introducción	183
6.2 Análisis de la basílica de San Marcos de Venecia	184
6.2.1 Descripción	184
6.2.2 Objetivo y metodología de análisis	184
6.3 Resultados	188
REFERENCIAS	205
AGRADECIMIENTOS	219

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Hace tres décadas que Ngo y Scordelis (1967) publicaron su trabajo sobre análisis de vigas de hormigón armado por el método de elementos finitos. Todo el período de tiempo transcurrido desde entonces se ha caracterizado por investigaciones extensivas en el campo de la modelización constitutiva del hormigón en masa y armado y por el desarrollo de potentes algoritmos de solución de los problemas de elementos finitos no lineales. Sin embargo, el impacto de estos adelantos científicos sobre la práctica de la ingeniería ha sido menos significativo, puesto que su implementación en el diseño de estructuras reales es escasa. En muchos casos, el diseño se basa todavía en hipótesis muy restrictivas, que consideran el hormigón armado no fisurado, homogéneo, isotropo y lineal elástico.

Desde que en los años 80 el cálculo estructural ha empezado a incluir con mayor frecuencia la no linealidad del material en el diseño, el ingeniero dispone de información detallada sobre los fenómenos que se producen cuando se sobrepasa el límite elástico del material. Se llega a disponer de datos sobre el estado del material, punto a punto, pero estos no son de fácil extrapolación a toda una estructura y tampoco describen con suficiente detalle el estado general de la misma. Asimismo, la importancia del hecho de que una cierta zona estructural esté más o menos deteriorada es de difícil cuantificación a partir de la información local proporcionada por los programas de análisis no lineal tradicionales.

El estudio del comportamiento del hormigón a nivel macroscópico se ha fundamentado tradicionalmente en los modelos de fisuración en tracción, combinados con modelos de aplastamiento en compresión (Hofstetter y Mang 1995). En los últimos años se están imponiendo como alternativa viable los modelos de daño que aportan un tratamiento unificado del comportamiento del hormigón tanto en tracción como en compresión y reducen sustancialmente el esfuerzo de cálculo. Ello los convierte en apropiados a la hora de afrontar estudios de estructuras de gran tamaño y complejidad, puesto que, en muchos modelos de

daño, la integración de la ley constitutiva se reduce a un cálculo analítico.

Los modelos de daño pueden clasificarse en dos grupos: por una parte, los utilizados mayoritariamente en la ingeniería sísmica, para estructuras de barras, que evalúan el índice de daño a partir de magnitudes como esfuerzos seccionales, ductilidad o energía potencial de los elementos estructurales; el segundo grupo lo constituyen los modelos de daño continuo que describen directamente el estado del material de un punto material y que están fundamentados en los principios de la termodinámica.

En relación con los índices de daño se usa la terminología de local y global. La acepción general del término "local" se refiere a secciones, elementos o partes estructurales mientras que por "global" se entiende un índice que expresa el estado de toda la estructura. La necesidad de utilizar índices de daño ha sido reconocida desde hace ya algún tiempo en el ámbito de la ingeniería sísmica, en el marco de la cual se han desarrollado diversas fórmulas para evaluar el estado de elementos estructurales de barras (Lybas y Sozen 1977, Banon et al. 1981, Park et al. 1984). Dichas fórmulas se basan en conceptos como deformación plástica cumulativa en cargas cíclicas (Banon et al. 1981), relación entre el momento fletor máximo y el alcanzado durante el terremoto (Lybas y Sozen 1977) o la muy utilizada en la actualidad función de daño de Park y Ang (1985), la cual relaciona la ductilidad de los elementos estructurales con la energía disipada en cargas cíclicas. Todos estos índices están adecuados al cálculo sísmico y no son aplicables directamente a otros tipos de análisis.

En las definiciones de los índices globales de daño de toda una estructura realizadas en estudios anteriores se ha partido casi siempre de la idea de promediar los índices así llamados "locales" de las partes componentes de las estructuras con diferentes pesos específicos como, por ejemplo, el volumen del elemento, el porcentaje de la energía potencial almacenada en cada elemento con respecto a la total o incluso la importancia asignada a juicio de expertos al elemento estructural. DiPasquale y Çakmak (1987, 1988, 1990) proponen el primer índice global de daño de una estructura entera basado en conceptos no empíricos, relacionándolo con el deterioro del período fundamental de la estructura, lo que le da una base objetiva. Sin embargo, no es posible aplicar este procedimiento de cálculo a sólo una zona de la estructura y, además dicho índice tiene la dificultad añadida de requerir la evaluación del período fundamental de la estructura en cada instante, lo que presenta dificultades y es costoso puesto que necesita determinar la expresión de la matriz de rigidez tangente.

A partir de estas consideraciones se identifican algunos problemas de gran interés práctico en el campo de la ingeniería estructural, cuya solución adecuada representaría un importante avance en el análisis no lineal de estructuras de

hormigón armado. Entre estos problemas pueden enumerarse los siguientes:

- 1) La evaluación sintética del estado global de una estructura y/o de cualquiera de sus partes componentes, durante y después de una acción excepcional estática o dinámica;
- 2) La evaluación de la carga última en estructuras grandes y complejas en las mismas condiciones de carga que en el punto anterior;
- 3) El estudio de las patologías de estructuras.

En este sentido, el propósito de esta monografía es el de encontrar una solución unificada a los problemas arriba mencionados en el marco de los modelos de daño. La solución tendría que proporcionar un indicador sintético del estado global de una estructura después de estar sometida a acciones que le provocan un comportamiento más allá del dominio lineal elástico. Dicho indicador, denominado *índice global de daño*, podría constituir una herramienta adecuada a emplear a la hora de evaluar el estado de degradación tanto de una estructura entera como de cualquiera de sus partes componentes, así como para determinar la carga última de la estructura y, mediante la observación de sus valores en cada zona estructural, identificar sus patologías y zonas débiles. Para que sea útil en resolver todos estos problemas, un índice global de daño debería ser general, objetivo respecto a la malla de elementos finitos y económico desde el punto de vista computacional.

En esta monografía se denominarán índices locales de daño sólo los que se refieren al estado de un punto mientras todos los demás se considerarán índices globales de daño. En este sentido, pueden definirse índices globales para una sección de barra, para un elemento finito o estructural, para zonas de la estructura (por ejemplo una planta de edificio) y, finalmente, para toda la estructura en su conjunto. Con esta denominación, los índices "locales" de daño utilizados en la ingeniería sísmica tendrán tratamiento de globales de una sección de barra o incluso de un elemento estructural como un pilar o una viga.

La idea del índice global de daño propuesto en esta monografía ha surgido del estudio de los modelos de daño continuo, que son modelos constitutivos capaces de calcular el nivel de deterioro de un punto del material. Generalizando los conceptos de equilibrio termodinámico y energía libre en un punto, en los cuales se basan los modelos de daño local (nivel microscópico) y utilizando el concepto de energía potencial de la estructura (nivel macroscópico), se ha llegado a la definición del índice global de daño como indicador de la capacidad resistente actual de una estructura o parte de la misma frente a su capacidad resistente inicial.

La aplicación de este plantamiento a una variada tipología de estructuras requiere adaptaciones y mejoras en el marco del método de los elementos finitos, que constituyen los objetivos secundarios de la monografía detallados a continuación. Asimismo, para estructuras de barras como los pórticos, se necesita, por requerimientos de aplicación del modelo de daño, desarrollar elementos finitos que permitan acceso a información a nivel de tensiones y deformaciones, puesto que no es suficiente conocer únicamente los esfuerzos y deformaciones seccionales. Esto requiere subdiscretizar la sección transversal de dichos elementos finitos de barra a través de un sistema de capas en estructuras bidimensionales o mediante una cuadrícula en estructuras tridimensionales. La necesidad de estudiar estructuras de hormigón armado que presentan simetría de revolución ha llevado a formular un elemento de lámina de revolución dividido por capas capaz de modelizar la ortotropía de la armadura.

La utilización del modelo de daño en el entorno del análisis dinámico llevó a la necesidad de desarrollar un modelo de daño visco-elástico a través del cual se pueda calcular el amortiguamiento dinámico de manera rigurosa. También ha sido desarrollada una formulación de la matriz tangente del modelo de daño presentado, la cual ha sido implementada en un esquema de integración en el tiempo de las ecuaciones de equilibrio dinámico.

Evidentemente, el índice global de daño propuesto necesita ser validado en la resolución de problemas prácticos y demostrar su utilidad con respecto a las metas propuestas anteriormente. También se debe verificar, mediante ejemplos sencillos, si cumple los requisitos de objetividad y sensibilidad. En la presente monografía la validación se ha realizado mediante simulación de ensayos experimentales.

La metodología desarrollada se ha aplicado al estudio del comportamiento no lineal de un amplio tipo de estructuras, tales como edificios de viviendas, edificios de contención de centrales nucleares y construcciones históricas sometidas a cargas estáticas y dinámicas.

La monografía se estructura en dos partes principales: una parte teórica formada por los Capítulos 2 y 3 y otra de aplicaciones prácticas, constituida por los Capítulos 4, 5 y 6. En esta última parte de la monografía se demuestra de manera práctica la utilidad y propiedades del índice global de daño propuesto como herramienta de evaluación del estado estructural. Todo ello en el marco de estudios completos de problemas de evaluación de la seguridad y degradación de varias tipologías estructurales, que van desde pórticos planos hasta estructuras tan relevantes como edificios de contención de centrales nucleares o construcciones históricas como la basílica de San Marcos en Venecia.

En el Capítulo 2 se desarrollan varios tipos de elementos finitos adaptados al uso de un modelo constitutivo tridimensional de daño y adecuados al estudio de estructuras de hormigón armado. Todos los elementos finitos descritos han sido empleados en el proceso de evaluación del índice global de daño propuesto en la monografía. En la primera parte del capítulo se establecen las ecuaciones de equilibrio dinámico generales de un sólido continuo.

A continuación, se desarrollan en detalle las características del elemento finito de barra 2D de Timoshenko con la sección transversal subdividida en capas de distinto material. Ello permite modelizar barras con materiales no homogéneos y en particular el hormigón armado. El segundo elemento finito descrito es el de lámina de revolución basado en la teoría de Timoshenko con una discretización en capas similar al caso de vigas anterior. Dicho elemento permite analizar estructuras de revolución de láminas delgadas constituidas de materiales no homogéneos tales como hormigón armado y permite incluir efectos de ortotropía. A continuación se desarrolla la formulación de un elemento de barra 3D que es la generalización del elemento de barra 2D para permitir cargas cualesquiera, con flexión y cortante en los dos planes de inercia y torsión. En este elemento, las capas se substituyen por una cuadrícula rectangular para subdiscretizar la sección. Ello permite estudiar estructuras tales como pórticos tridimensionales sometidos a carga sísmica. El cuarto y último elemento finito empleado en esta monografía es el de sólido 3D de 20 nodos isoparamétrico, con capas de armadura en cualquiera de las tres direcciones locales. Este elemento permite modelizar cualquier estructura de hormigón armado y permite eliminar todas las hipótesis simplificativas necesarias en las formulaciones de los elementos de barra y axisimétrico descritos anteriormente a cambio de un aumento significativo del esfuerzo computacional. Este es el elemento empleado en el análisis de grandes estructuras en esta monografía.

El Capítulo 3 está dedicado al modelo constitutivo de daño local empleado para la simulación del comportamiento no lineal del hormigón y de la ma-
postería. Se detallan los aspectos esenciales del mismo, tales como el criterio de degradación, la condición de consistencia y la expresión de la función de daño. A continuación se introduce el modelo de daño viscoso de especial relevancia en problemas dinámicos. Luego se desarrolla la metodología para tratar el efecto de retención de cortante en el modelo de daño que puede ser útil a la hora de resolver ciertos tipos de problemas donde es crítico conservar capacidad de resistencia a corte.

Uno de los desarrollos más importantes en esta monografía es el índice glo-
bal de daño que se describe en el tercer capítulo. Dicho índice global es a la vez riguroso desde el punto de vista teórico y sencillo en su formulación y se

basa en conceptos energéticos igual que el índice local de daño. La diferencia fundamental entre ambos índices es que mientras el índice local de daño está formulado en función de la energía libre de un punto material, el índice global de daño se desarrolla a partir de la energía potencial de volúmenes de material de escala macroscópica. Ello convierte al índice global de daño propuesto en una herramienta eficaz a la hora de examinar el estado y los mecanismos de degradación y fallo de estructuras enteras y de sus partes significativas.

El tercer capítulo concluye con unos ejemplos que ilustran las características más destacadas del modelo de daño local y del índice de daño global asociado. En la primera aplicación se demuestra la propiedad de objetividad, respecto a la malla empleada, de la respuesta fuerza-desplazamiento y del índice global de daño. En la segunda aplicación se presenta la validación del factor de retención de corte desarrollado en esta monografía en el marco del modelo de daño local descrito. El ejemplo elegido proviene de un ensayo experimental de una viga de hormigón armado y los resultados numéricos se comparan con los del ensayo. Este capítulo incluye los Anexos 3-1 y 3-2 que sintetizan conceptos de elastoplasticidad útiles a la hora de entender las analogías del modelo de daño con la teoría de la plasticidad clásica y describen brevemente el esquema de Newmark de integración en el tiempo de las ecuaciones de movimiento dinámico utilizadas en la implementación del modelo de daño visco-elástico propuesto en esta monografía.

La parte de aplicaciones prácticas comienza con el Capítulo 4 que está dedicado a estructuras de edificación. El primer problema resuelto es un pórtico plano sometido a acciones estáticas y dinámicas en el que se analiza detenidamente el comportamiento del índice global de daño de la estructura entera y de sus zonas más destacadas desde el punto de vista de la capacidad resistente frente a las acciones mencionadas. El segundo análisis es el de un pórtico tridimensional sometido a un terremoto artificial y confirma el buen comportamiento del modelo constitutivo y la capacidad del índice global de daño de describir la evolución del estado estructural a lo largo de la historia de deformación.

La última parte del Capítulo 4 está dedicada a un estudio de una planta entera de un edificio real de viviendas. Este edificio presentaba problemas de fisuración de los tabiques y el propósito del análisis ha sido reproducir la degradación real observada a través de simulación numérica y averiguar cuáles son las zonas estructurales en las que dicha degradación es más importante. El índice global de daño permite separar los efectos que las distintas zonas de la estructura tienen sobre su rigidez total.

El Capítulo 5 trata con detalle el estudio de la presión de fallo en el edificio

de contención de una central nuclear. El capítulo cuenta con el Anexo 5-1 que da detalles sobre el tratamiento y cálculo del complejo sistema de postesado. Dicho anexo contiene consideraciones teóricas sobre el efecto de los diferentes sistemas de postesado sobre el comportamiento estructural y aportaciones originales en cuanto al cálculo riguroso de la presión equivalente al postesado en una estructura de este tipo. El estudio del edificio de contención comienza por una breve descripción del mismo seguido por un análisis de revolución preliminar para determinar una primera aproximación de la presión de fallo. Dicho análisis se divide en uno estático donde la presión interior se aplica de manera quasi estática, y en uno dinámico en el cual se estudia si la aplicación de la presión interna como impulsos dinámicos modifica el resultado del análisis estático.

En la sección central del Capítulo 5 se describe el análisis tridimensional que contiene la calibración del modelo numérico, el estudio del efecto de la losa de cimentación sobre la presión de fallo, un estudio dinámico del aumento de presión interna y un estudio sísmico de la central sometida al terremoto de El Centro de 1940 escalado a diferentes niveles de acción. A continuación se presentan los resultados del estudio térmico y finalmente se realiza un estudio probabilista de la presión de fallo. En todos estos análisis, se ha determinado tanto el comportamiento de la estructura como el de sus distintas zonas calculándose la evolución de los respectivos índices globales de daño, lo que permite entender en profundidad el desarrollo del proceso de degradación y establecer la influencia de las distintas zonas estructurales en el comportamiento general del edificio de contención. El índice global de daño demostró ser una potente herramienta a la hora de comprender la importancia de la degradación de una zona específica para el conjunto de la estructura.

El Capítulo sexto contiene el análisis de la basílica de San Marcos de Venecia, una construcción histórica de gran importancia. En la primera parte se presenta el análisis estático y dinámico de una sola cúpula y se describe con detalle su historial de degradación, observando las evoluciones de los índices globales de daño elementales. En el caso estático la carga considerada ha sido el peso propio incrementado hasta el fallo, mientras que en el caso dinámico la acción considerada ha sido la de un terremoto artificial. La segunda parte del capítulo muestra los resultados del análisis de la cubierta entera de la basílica que comprende cinco cúpulas. A través de los índices globales de daño puede seguirse todo el historial de degradación estructural hasta el fallo total.

CAPÍTULO 2

TECNOLOGÍA DE ELEMENTOS FINITOS

2.1 INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se describen brevemente los diferentes elementos finitos que se utilizarán en los estudios de degradación de estructuras presentados más adelante en esta monografía.

Los desarrollos que se realizan en este capítulo parten de la obtención de las ecuaciones de equilibrio dinámicas de un sólido sometido a cargas mecánicas a partir del principio de los trabajos virtuales (Flies 1975). Esto facilitará el desarrollo de las formulaciones específicas de cada elemento finito utilizado.

En la segunda parte del capítulo se hace una descripción detallada del elemento de barra de Timoshenko que es la base sobre la cual se desarrollan los primeros tres elementos finitos presentados: barra 1D, lámina de revolución 2D y barra 3D. Se enuncian las hipótesis de Timoshenko para barras, se describen los campos de desplazamientos, de deformación y aceleración, de tensión e inercia, de deformaciones y tensiones seccionales, la discretización con las funciones de forma y la particularización de las magnitudes elementales. Todo el desarrollo está enfocado hacia la deducción de las características del elemento de barra subdiscretizado en capas, de cara a la utilización ulterior de un modelo constitutivo tridimensional general que requiere información a nivel de cada punto de la sección y no de solamente en el eje de la barra, como es habitual en los elementos de barra convencionales.

En la tercera parte del capítulo se muestra la formulación del elemento finito de lámina de revolución basada en la metodología de capas utilizada en el elemento de barra 2D y que tiene la misma ventaja de poder utilizarse conjuntamente con el modelo constitutivo tridimensional de daño.

En la cuarta parte del capítulo se presenta un elemento de barra 3D que tiene seis grados de libertad por nodo (tres translaciones y tres giros), admite cargas cualesquiera y que cambia la subdivisión por capas de la sección transversal con otra generada por una retícula.

El último apartado describe brevemente el elemento de sólido 3D serendípito de 20 nodos que tiene como particularidad la posibilidad de tratar armaduras como capas de material añadidas. Ello permite modelizar con mucha versatilidad el comportamiento del hormigón armado y también materiales en masa donde el espesor es suficientemente importante para que no se pueda reducir su formulación a láminas o placas sin perder exactitud.

Estos cuatro tipos de elementos finitos han sido empleados en la monografía para estudiar las propiedades y ventajas de la tecnología propuesta de cálculo de degradación de estructuras, bajo acciones más allá del límite de comportamiento elástico del material.

2.2 ECUACIONES DE EQUILIBRIO DEL SÓLIDO CONTINUO

Todas las ecuaciones de equilibrio en forma discreta se deducirán en esta monografía a partir del conocido principio de trabajos virtuales. Dicho principio establece que un sólido deformable está en equilibrio si, aplicándole un campo de desplazamientos virtuales compatible con las condiciones de vínculo, el trabajo producido por las fuerzas internas, L_{int} , es igual al trabajo de las fuerzas externas, L_{ext} (Donea 1980)

$$L_{int} = L_{ext} \quad (2.1)$$

Por fuerzas internas se entienden aquellas fuerzas generadas dentro del sólido deformable como respuesta a su propio estado de deformación. En consecuencia, las únicas fuerzas internas que aquí se consideran son las tensiones provocadas por deformación. Por otra parte, las fuerzas externas incluyen todo tipo de acciones exteriores, que no dependen del estado deformacional del sólido. Pueden ser acciones exteriores las fuerzas concentradas puntuales, las fuerzas distribuidas a lo largo del contorno o las fuerzas másticas generadas por campos exteriores al cuerpo, como, por ejemplo, campos magnéticos, eléctricos, gravitatorios, térmicos u otros.

El principio de los trabajos virtuales conduce a la siguiente expresión del trabajo virtual interno L_{int} (Owen y Hinton 1980)

$$L_{int} = \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{\epsilon} dV \quad (2.2)$$

donde V es el volumen del sólido, δ señala una variación virtual, $\boldsymbol{\epsilon}$ es el tensor de deformaciones, $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones y \boldsymbol{C} es la matriz constitutiva.

El trabajo virtual externo L_{ext} debe contener las contribuciones de las fuerzas concentradas f_j , de las fuerzas distribuidas \mathbf{f}^d aplicadas directamente sobre el

contorno del dominio S y también un término debido a la acción de las fuerzas mágicas \mathbf{f}^m que actúan en cada punto del volumen. Esta expresión es

$$L_{ext} = \sum_j \delta u_j f_j + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^d dS + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^m dV \quad (2.3)$$

donde \mathbf{u} es el campo de desplazamiento.

Todas las fuerzas exteriores que intervienen en la anterior relación pueden ser estáticas o dinámicas. Su naturaleza determina si el tipo de cálculo a desarrollar debe ser estático o dinámico, teniéndose en cuenta que basta una sola fuerza dinámica para que el problema sea dinámico.

Cuando se trata de problemas dinámicos, el principio de d'Alembert asegura que, a fin de conseguir el equilibrio dinámico, las seudofuerzas de inercia pueden ser consideradas como fuerzas reales que actúan sobre el cuerpo. En consecuencia, las fuerzas mágicas debidas a efectos iniciales son $-\rho$, el cambio de signo proveniente del sentido opuesto al campo de aceleraciones $\ddot{\mathbf{u}}$. Con estas explicaciones, el término inercial del trabajo virtual externo L_{ext}^i , que está incluido en el último término de la relación (2.3), se expresa como (Hangau et al. 1994a)

$$L_{ext}^i = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^{m,i} dV = - \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho dV = - \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (2.4)$$

donde ρ es la densidad. En consecuencia, la expresión del trabajo virtual exterior es

$$L_{ext} = \sum_j \delta u_j f_j + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^d dS + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^m dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (2.5)$$

La expresión anterior permite expresar el principio de los trabajos virtuales en la forma

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV + \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} dV = \sum_j \delta u_j f_j + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^d dS + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^m dV \quad (2.6)$$

Se ha deducido la ecuación funcional integral, expresada en desplazamientos, que rige el comportamiento de una estructura en régimen dinámico. Para hallar el campo de desplazamientos \mathbf{u} , que es la incógnita del problema, habrá que recurrir a otros procedimientos, puesto que la mecánica del continuo supone soluciones pertenecientes al espacio de funciones continuas de dimensión infinita

(un cuerpo mecánico continuo tiene una infinidad de grados de libertad). Uno de los procedimientos para reducir a un número finito el número de dimensiones del espacio de funciones, dentro de cual se buscan las soluciones, es el método de los elementos finitos.

2.3 ELEMENTO FINITO DE BARRA 2D DE TIMOSHENKO

En el cálculo de las estructuras porticadas se utilizaron, en sus comienzos, modelos basados en elementos de construcción unidimensionales sencillos – vigas y pilares – llamados genéricamente *barras*. La aparición del método de los elementos finitos ha permitido un gran avance debido a su capacidad de desarrollar modelos estáticos y dinámicos más generales y de permitir el cambio de las hipótesis de comportamiento del material de los elementos estructurales, debido a una base teórica más rigurosa y amplia que la de los anteriores métodos matriciales (Zienkiewicz 1980).

Entre las formulaciones de elementos estructurales unidimensionales hay dos que merecen especial atención. La primera, conocida como Teoría de Euler-Bernoulli (Oñate 1992), está muy próxima a las teorías clásicas de la Resistencia de Materiales y permite el análisis de la flexión de vigas esbeltas prescindiendo del efecto de los esfuerzos cortante y axil en el estudio de su deformación. La segunda formulación es la teoría de Timoshenko (Oñate 1992) y en ella se apoyan los elementos finitos de barra y de lámina de revolución utilizados en esta monografía. Su rasgo específico es la consideración del efecto del esfuerzo cortante en la deformación (Feodosiev 1978).

En este apartado se hace, primeramente, una breve síntesis de las características de la formulación de Timoshenko para elementos unidimensionales bajo cargas estáticas y/o dinámicas. A continuación se desarrollan las ecuaciones de equilibrio de una barra, partiendo de la Mecánica del Medio Continuo Deformable, es decir, considerando dicha barra como un sólido continuo deformable (Hirschfeld 1986). Luego se describe la solución del problema mediante el método de los elementos finitos (Mang et al. 1994).

2.3.1 Hipótesis de la formulación de viga de Timoshenko

Se considera una barra de longitud ℓ y de sección transversal de área A variable, representada en su sistema local de coordenadas (véase la Figura 2.1), sobre la cual actúan cargas en el plano local vertical. La teoría de Timoshenko se basa en las hipótesis siguientes (Oñate 1992):

1. Los desplazamientos verticales de todos los puntos de una sección transversal son pequeños e iguales a los del eje de la viga.

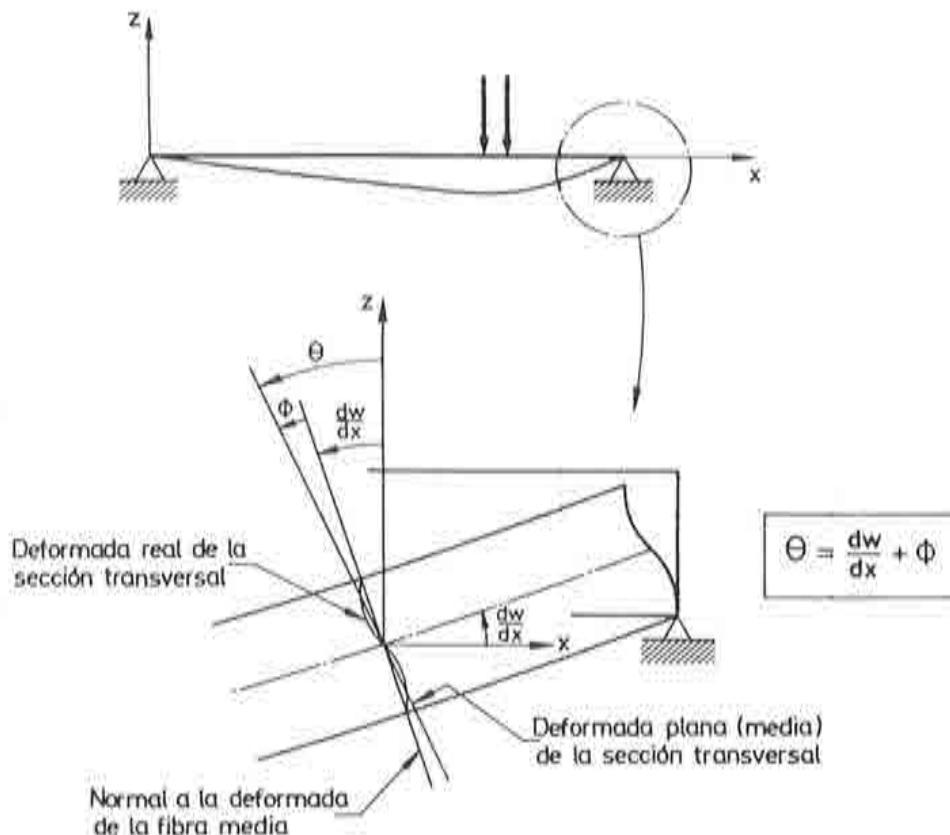


Figura 2.1 Teoría de viga de Timoshenko. Giro de la sección normal a la fibra media (Oñate 1992).

- II. Los desplazamientos laterales son nulos.
- III. Las secciones planas normales al eje de la viga antes de la deformación permanecen planas, pero no necesariamente normales al eje después de la deformación, tal como puede verse en la Figura 2.1.

Esta última hipótesis supone tomar un giro medio para la sección transversal, de manera que ésta pueda considerarse plana. Las primeras dos hipótesis son compartidas con la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, mientras que la tercera difiere en lo que se refiere a la ortogonalidad de la sección respecto al eje en el estado deformado.

2.3.2 Campo de desplazamientos

De los seis desplazamientos generalizados de un punto del espacio, en este caso sólo hay dos relevantes, debido al carácter plano del problema y a las hipótesis hechas anteriormente. Éstas son u^p y w^p que son, respectivamente,

el desplazamiento horizontal y el vertical en el sistema local de coordenadas (véase la Figura 2.1). Por otra parte, el campo de desplazamientos de una sección transversal cualquiera está descrito por la translación horizontal u' , la vertical w' del eje de la barra y por el giro medio de la sección θ (véase la Figura 2.1). El movimiento de cualquier punto del cuerpo puede expresarse en función del movimiento del eje de la sección a la cual pertenece dicho punto, así como resulta de la siguiente ecuación (Oñate 1991):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^p(x', z') &= \left\{ \begin{array}{l} u^p(x', z') \\ w^p(x') \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} u'(x') - z'\theta(x') \\ w'(x') \end{array} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z' \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u'(x') \\ w'(x') \\ \theta(x') \end{array} \right\} = \mathbf{S}(z') \mathbf{u}'(x') \end{aligned} \quad (2.7)$$

Las variables de esta ecuación tienen el siguiente significado:

- $\mathbf{u}^p(x', z')$ – vector de desplazamientos de un punto cualquiera de una sección transversal de la barra. Se considera que estos desplazamientos no varían a lo largo de la dirección normal al plano de flexión (hipótesis I, II);
- $\mathbf{u}'(x')$ – vector de movimientos seccionales de la barra en ejes locales;
- $\mathbf{S}(z')$ – matriz de conversión de los movimientos del eje a los desplazamientos puntuales en función de la altura z' del punto (Oñate 1991).

2.3.3 Campo de deformación y aceleración

Considerando la hipótesis de pequeñas deformaciones, a partir del campo de desplazamientos –relación (2.7)– pueden deducirse fácilmente las deformaciones. Conforme a las hipótesis utilizadas, las únicas deformaciones no nulas son

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \frac{du^p}{dx'} = \frac{du'}{dx'} - z' \frac{d\theta}{dx'} \\ \gamma_{x'z'} &= \frac{du^p}{dz'} + \frac{dw^p}{dx'} = \frac{dw'}{dx'} - \theta \end{aligned} \quad (2.8)$$

Las ecuaciones (2.8) pueden escribirse matricialmente como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z' \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{du'}{dx'} \\ \frac{dw'}{dx'} - \theta \\ \frac{d\theta}{dx'} \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.9)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ es el vector de *deformaciones seccionales*, $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el vector de deformaciones puntuales y \mathbf{S} es la matriz de transformación ya mencionada que también relaciona $\boldsymbol{\varepsilon}$ con $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$. A su vez, las deformaciones seccionales $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ se relacionan con los desplazamientos seccionales a través de la matriz de operadores diferenciales \mathbf{L}

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \frac{du'}{dx'} \\ \frac{dw'}{dx'} - \theta \\ \frac{d\theta}{dx'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx'} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ w' \\ \theta \end{Bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{u}' \quad (2.10)$$

En los estudios dinámicos interesa establecer la relación entre un campo de aceleración que actúa sobre los puntos de una sección transversal de la viga y el campo de aceleración seccional. Dicha relación se deduce de forma inmediata derivando dos veces en función del tiempo la ecuación (2.7), si se considera que los desplazamientos varían explícitamente con el tiempo, es decir, $\mathbf{u}^p = \mathbf{u}^p(x', z', t)$ y $\mathbf{u}' = \mathbf{u}'(x', t)$

$$\ddot{\mathbf{u}}^p = \mathbf{S} \ddot{\mathbf{u}}' \quad (2.11)$$

2.3.4 Campos de tensión e inercia

Las hipótesis propias del estudio de estructuras de barras en general y las de Timoshenko en particular hacen que del total de seis componentes simétricas distintas del tensor de tensiones sólo dos sean no nulas. Éstas son la tensión normal a la sección $\sigma_{x'}$ y la tensión tangencial $\tau_{x'z'}$, que se relacionan con las deformaciones mediante la ecuación constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.12)$$

donde \mathbf{C} es el tensor constitutivo. En el caso lineal elástico, éste es función de las características del material – módulo de elasticidad longitudinal E , coeficiente

de Poisson ν y módulo de elasticidad transversal $G = E/2(1 + \nu)$. De las seis deformaciones independientes del tensor de deformaciones serán diferentes de cero $\varepsilon_{x'}$ y $\gamma_{x'z'}$, y también $\varepsilon_{y'}$ y $\varepsilon_{z'}$. Esto se demuestra partiendo de la relación general entre el tensor de tensiones y el de deformaciones, que tiene la siguiente forma (Zienkiewicz 1980):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{z'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.13)$$

Si en esta última relación se imponen las condiciones $\sigma_{y'} = \sigma_{z'} = 0$, se obtienen $\varepsilon_{y'} = \varepsilon_{z'} = -\nu\varepsilon_{x'}$, lo que demuestra que $\varepsilon_{y'}$ y $\varepsilon_{z'}$ no son variables independientes del problema. Si estos valores se utilizaran ahora para calcular $\sigma_{x'}$, se encuentra precisamente el valor dado por la ecuación (2.12). La imposición de tensiones tangenciales nulas conduce evidentemente a deformaciones tangenciales nulas, con lo cual la única deformación tangencial de interés es $\gamma_{x'z'}$.

En el caso en el cual el punto estudiado esté sometido al campo de aceleraciones visto en el apartado anterior, aparecen fuerzas másicas iniciales y, según estipula la segunda ley de Newton, éstas son proporcionales a la masa y a la aceleración de dicho punto material. Por consiguiente, pueden escribirse las siguientes relaciones:

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{Bmatrix} \rho_{x'} \\ \rho_{z'} \end{Bmatrix} = \rho \begin{Bmatrix} \ddot{u}^p \\ \ddot{w}^p \end{Bmatrix} = \rho \dot{\boldsymbol{u}}^p \quad (2.14)$$

donde $\boldsymbol{\rho}$ es el vector de fuerzas másicas que actúan sobre un elemento diferencial de volumen y ρ es la densidad del material.

2.3.5 Campos de esfuerzos seccionales

Debido a las tensiones, en cada sección transversal de una barra aparecen esfuerzos, fuerzas y momentos que, en las condiciones de la viga cargada en uno de sus planos principales de inercia, son sólo tres: esfuerzo axil N , esfuerzo cortante Q y momento flector M . Utilizando la relación (2.9), la expresión del trabajo virtual interno L_{int} se modifica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L_{int} &= \int_V \delta \epsilon^T \sigma dV = \int_V \delta \hat{\epsilon}^T S^T \sigma dV \\ &= \int_o^\ell \delta \hat{\epsilon}^T \left[\int_A S^T \sigma dA \right] dx' = \int_o^\ell \delta \hat{\epsilon}^T \hat{\sigma} dx' \end{aligned} \quad (2.15)$$

En la relación anterior se ha introducido el vector de esfuerzos seccionales $\hat{\sigma}$ como el conjugado energético del vector de deformaciones seccionales $\hat{\epsilon}$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \int_A S^T \sigma dA = \int_A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -z' & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} dA = \int_A \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \tau_{x'z'} \\ -z\sigma_{x'} \end{Bmatrix} dA \\ &= \int_A S^T C \epsilon dA = \int_A S^T C S \hat{\epsilon} dA = \hat{C} \hat{\epsilon} = \begin{Bmatrix} N \\ Q \\ M \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

de donde resulta la expresión de la *matriz constitutiva seccional* \hat{C} como

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \int_A S^T C S dA = \int_A \begin{bmatrix} E & 0 & -z'E \\ 0 & G & 0 \\ -z'E & 0 & z'^2E \end{bmatrix} dA \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} b_i E_i (z'_{i+1} - z'_i) & 0 & -\frac{1}{2} b_i E_i (z'^2_{i+1} - z'^2_i) \\ 0 & b_i G_i (z'_{i+1} - z'_i) & 0 \\ -\frac{1}{2} b_i E_i (z'^2_{i+1} - z'^2_i) & 0 & \frac{1}{3} b_i E_i (z'^3_{i+1} - z'^3_i) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde b_i , E_i y G_i son el ancho y los módulos elásticos de la capa i que se extiende en altura entre las cotas z'_i y z'_{i+1} . Esta última ecuación permite, debido a su gran generalidad, hallar la matriz constitutiva seccional \hat{C} , que relaciona $\hat{\sigma}$ con $\hat{\epsilon}$, cuando las características del material o su estado termodinámico varían a través del espesor de la viga.

En la Figura 2.2 se representa la barra dividida en capas utilizada conjuntamente con el modelo de daño para simulaciones en aplicaciones concretas (Hanganu 1991).

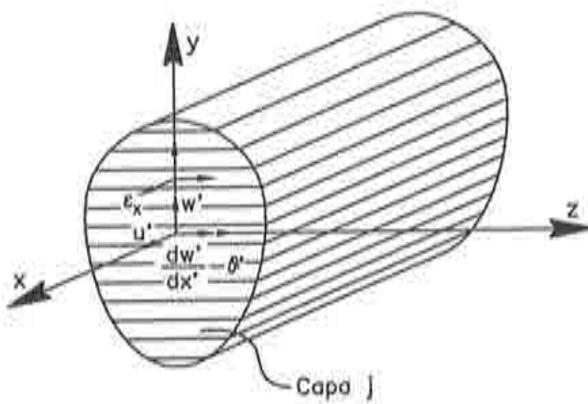


Figura 2.2 Barra de sección no homogénea dividida en capas. Ejes locales y globales.

En el caso dinámico, sobre cada elemento de superficie dA de una sección transversal cualquiera de la viga actúan dos aceleraciones \ddot{u}^p y \ddot{w}^p en las direcciones x' y z' . Dichas aceleraciones producen fuerzas de inercia elementales $\rho_{x'}^p$ y $\rho_{z'}^p$. Al integrarlas a través de la sección, de manera similar al procedimiento utilizado para tensiones, se obtienen los esfuerzos seccionales $\hat{\rho}$ debidos a la inercia a partir de la ecuación (2.3)

$$\begin{aligned} L_{ext}^i &= - \int_V \delta \mathbf{u}^p T \rho dV = - \int_V \delta \mathbf{u}'^T \mathbf{S}^T \rho dV \\ &= \int_0^\ell \delta \mathbf{u}'^T \left[\int_A \mathbf{S}^T \rho dA \right] dx' = \int_0^\ell \delta \mathbf{u}'^T \hat{\rho} dx' \end{aligned} \quad (2.18)$$

Haciendo uso de la ecuación (2.14) y agrupando términos se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \int_A \mathbf{S}^T \rho dA = \int_A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -z' & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_{x'} \\ \rho_{z'} \end{Bmatrix} dA = \int_A \begin{Bmatrix} \rho_{x'} \\ \rho_{z'} \\ -z' \rho_{x'} \end{Bmatrix} dA \\ &= \int_A \mathbf{S}^T \rho \ddot{\mathbf{u}}' dA = \int_A \mathbf{S}^T \rho \mathbf{S} \ddot{\mathbf{u}} dA = \hat{\rho} \ddot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

de donde resulta la expresión de la *matriz de densidad seccional* $\hat{\rho}$

$$\hat{\rho} = \int_A \mathbf{S}^T \rho \mathbf{S} dA \quad (2.20)$$

Esta última ecuación permite calcular la matriz de densidad seccional $\hat{\rho}$ cuando las características del material varían a través del espesor de la viga. La utilización de un modelo de capas conduce a una expresión similar a la (2.17).

2.3.6 Discretización del medio continuo en elementos finitos

La formulación continua considerada hasta este momento tiene el inconveniente del número infinito de grados de libertad correspondiente a un sólido continuo. El método de los elementos finitos proporciona la ventaja de limitar el número de grados de libertad y de minimizar el error producido en esta operación. La discretización es la operación de prefijar un número finito de puntos en los que se desea obtener la información acerca del proceso. El elemento finito es la entidad estructural básica. Dentro del elemento se definen los campos continuos de las variables independientes del proceso que son los desplazamientos \mathbf{u} . Como consecuencia del proceso de discretización, todas las integrales que en el caso continuo abarcaban el dominio entero se transforman en sumas de integrales sobre elementos. La variación dentro de cada elemento se expresa mediante campos continuos que dependen únicamente de los valores de las variables independientes en los nodos del elemento. Los elementos están interconectados sólo en los nodos. Es evidente que los valores de las variables independientes en un nodo son idénticas en todos los elementos que coinciden en este nodo. Sin embargo, no ocurre lo mismo con las variables dependientes debido al hecho de que la continuidad está asegurada sólo dentro de cada elemento.

2.3.7 Funciones de forma y relaciones derivadas

Las variables independientes de las ecuaciones de movimiento de una barra están agrupadas en el vector \mathbf{u} . Las funciones de forma definen el campo continuo elemental, interpolando los valores nodales. Se utilizan funciones cuadráticas lagrangianas correspondientes a un elemento de barra de tres nodos. Cada nodo tiene asociada una función de forma de manera que ésta vale uno en dicho nodo y cero en los demás (véase la Figura 2.3).

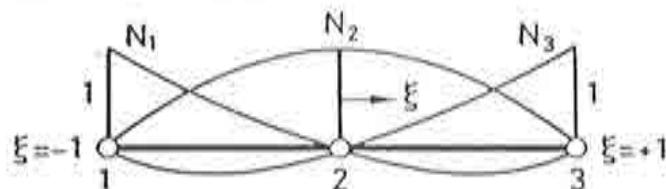


Figura 2.3 Representación de las funciones de forma.

Las funciones de forma de un elemento unidimensional se expresan como función de una variable normalizada ζ , que varía entre -1 y 1. Sus expresiones son (Oñate 1992)

$$N_1(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta(\zeta - 1) ; N_2(\zeta) = 1 - \zeta^2 ; N_3(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta(\zeta + 1) \quad (2.21)$$

Los desplazamientos se interpolan con las funciones (2.21)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' = \begin{Bmatrix} u' \\ w' \\ \theta \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} N_1 u'_1 + N_2 u'_2 + N_3 u'_3 \\ N_1 w'_1 + N_2 w'_2 + N_3 w'_3 \\ N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + N_3 \theta_3 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}'_i \mathbf{a}'_i = \mathbf{N}' \mathbf{a}' \end{aligned} \quad (2.22)$$

y, empleando las siguientes notaciones:

$$\mathbf{N}'_i = N_i I_3 ; \mathbf{a}'_i = \begin{Bmatrix} u'_i \\ w'_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} ; \mathbf{N}' = \{ \mathbf{N}'_1 \quad \mathbf{N}'_2 \quad \mathbf{N}'_3 \} ; \mathbf{a}' = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}'_2 \\ \mathbf{a}'_3 \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

donde \mathbf{N}' es la matriz de funciones de forma y \mathbf{a}' el vector de desplazamientos nodales en el sistema de coordenadas local.

La relación entre las incógnitas nodales y las deformaciones seccionales $\hat{\epsilon}$ se halla teniendo en cuenta las ecuaciones (2.10) y (2.22)

$$\hat{\epsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}' = \mathbf{L} \mathbf{N}' \mathbf{a}' = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}'_i \mathbf{a}'_i = \mathbf{B}' \mathbf{a}' ; \mathbf{B}'_i = \mathbf{L} \mathbf{N}'_i \quad (2.24)$$

y, tras operar, se obtiene la expresión de la matriz de correspondencia \mathbf{B}'_i

$$\mathbf{B}'_i = \begin{bmatrix} \frac{dN_i}{dx'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dN_i}{dx'} & -N_i \\ 0 & 0 & \frac{dN_i}{dx'} \end{bmatrix} ; \mathbf{B}' = \{ \mathbf{B}'_1 \quad \mathbf{B}'_2 \quad \mathbf{B}'_3 \} \quad (2.25)$$

Las derivadas cartesianas de las funciones de forma son

$$\frac{d\mathbf{N}'}{dx'} = \frac{d\mathbf{N}'}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dx'} = \frac{d\zeta}{dx'} \begin{Bmatrix} \frac{2\zeta-1}{2} \\ -2\zeta \\ \frac{2\zeta+1}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

y para hallar $d\zeta/dx'$ se utiliza la representación isoparamétrica que conduce a la siguiente serie de operaciones:

$$\begin{aligned} x' &= N_1 x'_1 + N_2 x'_2 + N_3 x'_3 \\ \frac{dx'}{d\zeta} &= \frac{dN_1}{d\zeta} x'_1 + \frac{dN_2}{d\zeta} x'_2 + \frac{dN_3}{d\zeta} x'_3 = \frac{1}{2} [x'_3 - x'_1 + 2\zeta(x'_1 + x'_3 - 2x'_2)] \end{aligned} \quad (2.27)$$

De esta manera, se ha definido completamente la matriz \mathbf{B}' en cualquier sección transversal del elemento (para cualquier $\zeta \in [-1, 1]$). Se observa que cuando $x'_2 = (x'_1 + x'_3)/2$, entonces $d\zeta/dx' = 2/\ell$.

Hasta aquí se ha utilizado exclusivamente el sistema local de coordenadas. Pasar al sistema global requiere encontrar la proyección del vector de desplazamiento nodal \mathbf{a}'_i a través de la matriz de transformación T .

$$\mathbf{a}'_i = \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) & 0 \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{a}_i = \mathbf{T}\mathbf{a}_i \quad (2.28)$$

donde \mathbf{a}_i es el vector de desplazamientos del nodo i en el sistema global y $\cos(x', x)$ es el coseno del ángulo entre la dirección local x' y la dirección global x . Sólo se modifican las translaciones ya que el ángulo θ es el mismo en cualquier sistema de coordenadas cartesiano. Con esto se pueden escribir en el sistema global todas las magnitudes calculadas hasta ahora:

$$\mathbf{u}' = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}'_i \mathbf{a}'_i = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}'_i \mathbf{T} \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{N} \mathbf{a} ; \mathbf{N}_i = \mathbf{N}'_i \mathbf{T} \quad (2.29)$$

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}'_i \mathbf{a}'_i = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}'_i \mathbf{T} \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{B} \mathbf{a} ; \mathbf{B}_i = \mathbf{B}'_i \mathbf{T} \quad (2.30)$$

El campo de aceleraciones se deduce a partir de la relaciones anteriores, considerando que las funciones de forma son invariantes en el tiempo

$$\ddot{\mathbf{u}}' = \mathbf{N}' \ddot{\mathbf{a}}' = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{a}} \quad (2.31)$$

2.3.8 Ecuaciones de equilibrio para un elemento finito

Las ecuaciones de equilibrio para un elemento de barra se obtienen modificando la ecuación de equilibrio de trabajo virtual (2.5) para el caso unidimensional. Siguiendo el procedimiento del subapartado 2.3.5 de transformación de las integrales de volumen en integrales de línea a través de integraciones parciales sobre la sección de la barra, puede decirse que cualquier fuerza másica \mathbf{f}^m puede transformarse en una fuerza distribuida $\hat{\mathbf{f}}^m = \int_A \mathbf{S}^T \mathbf{f}^m dA$, lo que es lo mismo que calcular los esfuerzos seccionales equivalentes a dichas fuerzas másicas. En consecuencia, la ecuación (2.5) toma la siguiente forma particularizada al caso de las barras

$$\int_o^\ell \delta \mathbf{u}'^T \hat{\rho} \ddot{\mathbf{u}}' dx' + \int_o^\ell \delta \hat{\epsilon}'^T \hat{\mathbf{C}} \hat{\epsilon} dx' = \int_o^\ell \delta \mathbf{u}'^T (\mathbf{f}^d + \hat{\mathbf{f}}^m) dx' + \sum_j \delta u'_j f_j \quad (2.32)$$

Utilizando las expresiones para \mathbf{u}' , $\dot{\mathbf{u}}'$ y $\hat{\epsilon}$ proporcionadas por (2.29), (2.30) y (2.31) se obtiene

$$\delta \mathbf{a}^T \int_o^\ell \mathbf{N}^T \hat{\rho} \mathbf{N} dx' \ddot{\mathbf{a}} + \delta \mathbf{a}^T \int_o^\ell \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{B} dx' \mathbf{a} = \delta \mathbf{a}^T \int_o^\ell \mathbf{N}^T \mathbf{f}^{d,m} dx' + \delta \mathbf{a}^T \sum_j \mathbf{N}^T(\zeta_j) \mathbf{f}_j \quad (2.33)$$

donde $\mathbf{f}^{d,m} = \mathbf{f}^d + \hat{\mathbf{f}}^m$ es el vector de fuerzas distribuidas totales y \mathbf{f}_j es el vector que contiene las tres componentes (axil, cortante y momento flector) de la fuerza concentrada f_j que se aplica sobre el elemento finito en el punto de coordenada paramétrica ζ_j . Como la ecuación (2.33) tiene que ser válida para cualquier desplazamiento virtual $\delta \mathbf{a}$, se tiene

$$\int_o^\ell \mathbf{N}^T \hat{\rho} \mathbf{N} dx' \ddot{\mathbf{a}} + \int_o^\ell \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{B} dx' \mathbf{a} = \int_o^\ell \mathbf{N}^T \mathbf{f}^{d,m} dx' + \sum_j \mathbf{N}^T(\zeta_j) \mathbf{f}_j \quad (2.34)$$

o

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}^e \mathbf{a} = \mathbf{f}^e \quad (2.35)$$

donde

$$\mathbf{M}^e = \int_o^\ell \mathbf{N}^T \hat{\rho} \mathbf{N} dx' \quad (2.36)$$

$$\mathbf{K}^e = \int_0^\ell \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{B} dx' \quad (2.37)$$

$$\mathbf{f}^e = \int_0^\ell \mathbf{N}^T \mathbf{f}^{d,m} dx' + \sum_j \mathbf{N}^T(\zeta_j) \mathbf{f}_j \quad (2.38)$$

\mathbf{M}^e , \mathbf{K}^e y \mathbf{f}^e son la matriz de masa elemental, la matriz de rigidez elemental y el vector de fuerzas nodales elementales, respectivamente. La integración de estas variables matriciales se hace, en la gran mayoría de los casos, mediante integración numérica. Para ello se elige un número de puntos de integración en concordancia con el grado de los polinomios a integrar. Los pesos correspondientes a cada punto se obtienen de las tablas (Oñate 1992), luego se multiplican los valores del argumento calculado en los puntos de integración con los pesos correspondientes y se suman los productos así obtenidos.

El efecto de bloqueo típico en elementos de Timoshenko se ha evitado con la técnica de integración reducida utilizando una cuadratura de Gauss de 2 puntos para integrar los términos de cortante de la matriz de rigidez (Oñate 1992).

2.3.9 Sistema global de ecuaciones

Una vez obtenidas las matrices \mathbf{M}^e , \mathbf{K}^e y \mathbf{f}^e para todos los elementos, se procede al ensamblaje, que consiste en sumar todas las ecuaciones elementales cuyos términos libres tienen el significado de fuerzas aplicadas en la dirección del mismo grado de libertad del mismo nodo. De esta manera, a cada grado de libertad de cada nodo le corresponderá ahora un sólo elemento del vector global de fuerzas \mathbf{f} , obteniéndose así el sistema global de ecuaciones, que se escribe en forma matricial como (Bathe 1982)

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (2.39)$$

donde \mathbf{M} es la *matriz global de masa*, \mathbf{K} es la *matriz global de rigidez* y \mathbf{f} es el *vector global de fuerzas nodales*.

La solución de problemas dinámicos se plantea a través de esquemas de integración en el tiempo (ver Anexo 3.2) que transforman el sistema de ecuaciones (2.39) en un sistema lineal que tiene como incógnitas sólo los desplazamientos. Dicho sistema expresa el equilibrio dinámico en cada instante de tiempo t y puede escribirse genéricamente de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{K}}(t) \mathbf{a}(t) = \hat{\mathbf{f}}(t) \quad (2.40)$$

Evidentemente, como el cálculo estático es una particularización del cálculo dinámico, las ecuaciones de equilibrio estático se obtienen considerándose $\ddot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ en todas las ecuaciones anteriores.

Tras resolver el sistema (2.40) se obtienen los desplazamientos nodales \mathbf{a} . Se calculan las deformaciones seccionales $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B}\mathbf{a}$ y luego las deformaciones en cualquier punto de la barra $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Con esto se dispone de información a nivel tensión-deformación, con lo que se puede aplicar cualquier modelo constitutivo general. Se calculan las tensiones de prueba $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$ que se modifican de acuerdo con el modelo constitutivo $\boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}'$. Con las tensiones corregidas se calculan las tensiones seccionales $\hat{\boldsymbol{\sigma}}' = \int_A S^T \boldsymbol{\sigma}' dA$ y, finalmente, las fuerzas nodales correspondientes $\mathbf{f}' = \int_0^L \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}' dx'$ que se utilizan para evaluar las fuerzas residuales que son necesarias para la siguiente iteración.

2.4 ELEMENTO FINITO DE LÁMINA DE REVOLUCIÓN

La formulación utilizada está basada en la teoría de láminas de revolución de Reissner-Mindlin que es similar a la teoría de Timoshenko para barras completada con la formulación por capas (Hanganu et al. 1993b). Este elemento de lámina se obtiene rotando el elemento descrito en el apartado 2.3 y empleando la misma metodología general. Aunque se conservan los mismos grados de libertad (dos translaciones y un giro), las mismas funciones de forma y la descomposición por capas, el resto de la formulación adquiere características específicas (véase la Figura 2.4).

El campo de desplazamientos tiene formalmente la misma expresión que para la barra 2D

$$\mathbf{u}^p = \begin{Bmatrix} u^p \\ w^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u' - z'\theta \\ w' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z' \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ w' \\ \theta \end{Bmatrix} = \mathbf{S}_u \mathbf{u}' \quad (2.41)$$

donde \mathbf{u}^p es el vector de desplazamientos punitual, las magnitudes señaladas con $()'$ se refieren al eje de la barra en coordenadas locales, \mathbf{u}' es el vector de desplazamientos y \mathbf{S}_u es la matriz de reducción de los desplazamientos al eje central. El campo de deformación es (Oñate 1992)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_\phi \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^p}{\partial x'} \\ \frac{w}{x} \\ \frac{\partial u^p}{\partial z'} + \frac{\partial w^p}{\partial x'} \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

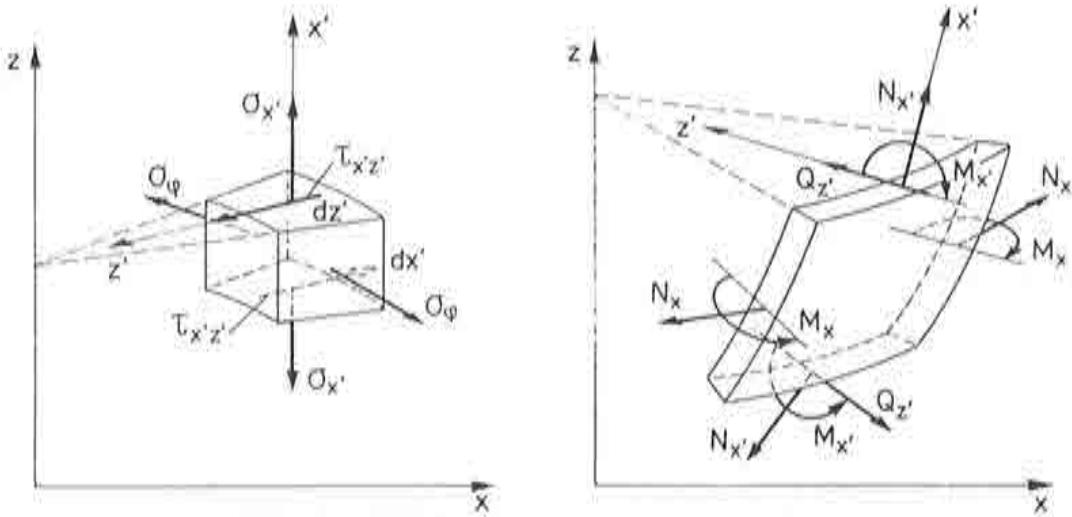


Figura 2.4 Elemento de lámina de revolución.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \frac{du'}{dx'} - z' \frac{d\theta}{dx'} \\ \frac{u' \cos\phi - w' \sin\phi}{x} \\ \frac{dw'}{dx'} - \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du'}{dx'} - z' \frac{d\theta}{dx'} \\ \frac{u' \cos\phi - w' \sin\phi - z' \theta \cos\phi}{x} \\ \frac{dw'}{dx'} - \theta \end{Bmatrix} \quad (2.42')$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{du'}{dx'} \\ \frac{u' \cos\phi - w' \sin\phi}{x} \\ -\frac{d\theta}{dx'} \\ -\frac{\theta \cos\phi}{x} \\ \frac{dw'}{dx'} - \theta \end{Bmatrix} = \boldsymbol{S} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.43)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el vector de deformaciones, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ es el vector de deformaciones seccionales, \boldsymbol{S} es la matriz de transformación $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}$ y ϕ es el ángulo entre el eje local x' y el eje global x (x es el radio de revolución de la lámina). La relación entre las deformaciones seccionales y los desplazamientos seccionales es

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \frac{du'}{dx'} \\ \frac{u' \cos\phi - w' \sin\phi}{x} \\ -\frac{d\theta}{dx'} \\ -\frac{\theta \cos\phi}{x} \\ \frac{dw'}{dx'} - \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx'} & 0 & 0 \\ \frac{\cos\phi}{x} & -\frac{\sin\phi}{x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d}{dx'} \\ 0 & 0 & -\frac{\cos\phi}{x} \\ 0 & \frac{d}{dx'} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ w' \\ \theta \end{Bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{u}' \quad (2.44)$$

donde \mathbf{L} es la matriz de operadores diferenciales.

El trabajo virtual interno se escribe en este caso como

$$\begin{aligned} L_{int} &= \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \left[\int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dz' \right] x d\varphi dx' \\ &= 2\pi \int_0^\ell \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} x dx' = 2\pi \int_0^\ell \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} x dx' \end{aligned} \quad (2.45)$$

donde ℓ y t son la longitud de la barra generatriz y su altura (espesor de la lámina) respectivamente. En la relación anterior se ha introducido el vector de esfuerzos seccionales $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ como el conjugado energético del vector de deformaciones seccionales $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\sigma}} &= \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dz' = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ z' & 0 & 0 \\ 0 & z' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_\varphi \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} dz' \\ &= \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_\varphi \\ z' \sigma_{x'} \\ z' \sigma_\varphi \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} dz' = \begin{Bmatrix} N_{x'} \\ N_\varphi \\ M_{x'} \\ M_\varphi \\ Q_{z'} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el vector de tensiones que se relaciona con el vector de deformaciones a través de la matriz constitutiva \mathbf{C}

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_\varphi \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_\varphi \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.47)$$

La expresión de las tensiones seccionales (2.46) puede transformarse utilizando la relación (2.47) de la manera siguiente

$$\hat{\sigma} = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dz' = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{S}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dz' = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dz' = \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.48)$$

obteniéndose la expresión de la matriz constitutiva seccional $\hat{\mathbf{C}}$

$$\hat{\mathbf{C}} = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} dz' = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} E & 0 & z'E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & z'E & 0 \\ z'E & 0 & z'^2E & 0 & 0 \\ 0 & z'E & 0 & z'^2E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} dz' \quad (2.49)$$

Utilizando la misma notación y desarrollo del elemento de barra, se obtiene

$$\hat{\mathbf{C}} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} b_i E_i (z'_{i+1} - z'_i) & 0 & \frac{1}{2} b_i E_i (z'^2_{i+1} - z'^2_i) & 0 & 0 \\ 0 & b_i E_i (z'_{i+1} - z'_i) & 0 & \frac{1}{2} b_i E_i (z'^2_{i+1} - z'^2_i) & 0 \\ \frac{1}{2} b_i E_i (z'^2_{i+1} - z'^2_i) & 0 & \frac{1}{3} b_i E_i (z'^3_{i+1} - z'^3_i) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} b_i E_i (z'^2_{i+1} - z'^2_i) & 0 & \frac{1}{3} b_i E_i (z'^3_{i+1} - z'^3_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_i G_i (z'_{i+1} - z'_i) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Dicha matriz sirve para incluir el efecto de la no homogenidad del material. También puede considerarse el efecto de la ortotropía de la armadura para las estructuras que presentan armaduras circunferenciales y/o meridionales modificando adecuadamente la matriz \mathbf{C} de las capas en cuestión para dejar sólo los términos útiles.

En el caso de un problema dinámico, el término inercial del trabajo virtual externo (2.4) se escribe como

$$L_{ext}^i = - \int_V \delta \mathbf{u}'^T \rho \ddot{\mathbf{u}}' dV = - \int_V \delta \mathbf{u}'^T \mathbf{S}_u^T \rho \mathbf{S}_u \ddot{\mathbf{u}}' dV = -2\pi \int_0^\ell \delta \mathbf{u}'^T \hat{\rho} \ddot{\mathbf{u}}' x dx' \quad (2.51)$$

obteniéndose la expresión de la matriz de densidad seccional $\hat{\rho}$

$$\hat{\rho} = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{S}_u^T \rho \mathbf{S}_u dz' \quad (2.52)$$

con las mismas propiedades que la matriz $\hat{\mathbf{C}}$.

Las funciones de forma siguen dadas por la ecuación (2.21), los desplazamientos $\mathbf{u}' = \mathbf{N}\mathbf{a}$ como en (2.29) y la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{LN}$ se obtiene empleando la relación (2.44). La matriz de transformación del sistema local de coordenadas al global \mathbf{T} tiene la misma expresión dada en (2.28) para el elemento de barra 2D.

La expresión de la condición de equilibrio en trabajos virtuales (2.34) se deduce haciendo $\hat{\mathbf{f}}^m = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{S}_u^T \mathbf{f}^m dz'$ y $\mathbf{f}^{d,m} = \mathbf{f}^d + \hat{\mathbf{f}}^m$

$$2\pi \int_0^\ell \delta \mathbf{u}'^T \hat{\rho} \ddot{\mathbf{u}}' x dx' + 2\pi \int_0^\ell \delta \hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{e}} x dx' = 2\pi \int_0^\ell \delta \mathbf{u}'^T \mathbf{f}^{d,m} x dx' + \sum_j \delta u_{o,j} f_j \quad (2.53)$$

Siguiendo los mismos pasos de las ecuaciones (2.32)-(2.35), se obtienen las expresiones de las matrices de masa, rigidez y fuerzas de un elemento en ejes globales como

$$\mathbf{M}^e = 2\pi \int_0^\ell \mathbf{N}^T \hat{\rho} \mathbf{N} x dx' \quad (2.54)$$

$$\mathbf{K}^e = 2\pi \int_0^\ell \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{B} x dx' \quad (2.55)$$

$$\mathbf{f}^e = 2\pi \int_0^\ell \mathbf{N}^T \mathbf{f}^{d,m} x dx' + \sum_j \mathbf{N}^T(\zeta_j) \mathbf{f}_j \quad (2.56)$$

En la ecuación (2.56) se debe tener en cuenta que $\mathbf{f}_j = 2\pi x \mathbf{f}_j^*$ si $x \neq 0$, debido al hecho que una fuerza concentrada que no actúa en el eje de revolución actúa en realidad sobre un círculo de radio x por lo que debe tener dimensiones de fuerza distribuida sobre una línea. Las fuerzas $\mathbf{f}^{d,m}$ tendrán dimensiones de fuerza distribuida sobre una superficie.

La integración numérica empleada es la misma que para el elemento de barra y el efecto de bloqueo del cortante se elimina de nuevo con la integración reducida de dos puntos para los términos de cortante de la matriz de rigidez.

2.5 ELEMENTO FINITO DE BARRA 3D

El elemento de barra 3D ha sido desarrollado a partir del elemento de barra de Timoshenko descrito en el apartado 2.3 de este capítulo. Este elemento permite modelizar el comportamiento de una pieza prismática bajo carga cualquiera mientras el anterior sólo puede tratar con cargas contenidas en uno de sus planes principales de inercia (Hangau et al. 1993a).

Se trata de un elemento finito lagrangiano de continuidad C^0 de tres nodos y seis grados de libertad nodales. El hecho de que el modelo constitutivo precisa información a nivel de tensión-deformación, hace necesaria una discretización de la sección transversal en una retícula rectangular (Figura 2.5).

A diferencia del elemento de Timoshenko de barra plana, este elemento cuenta con los tres desplazamientos y los tres giros de un cuerpo tridimensional. Sin embargo el estado tensional es parecido puesto que ahora se añade sólo una tensión tangencial de manera que hay una tensión axial y dos tensiones tangenciales que actúan todas en la sección transversal de la barra. En cuanto a los esfuerzos seccionales, su número es de seis: a los tres del caso plano se añaden otra fuerza cortante, otro momento flector y un momento de torsión.

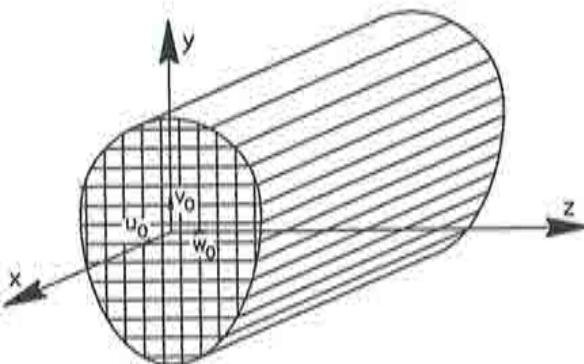


Figura 2.5 Barra 3D con sección dividida mediante una retícula. Ejes locales y globales.

El desarrollo siguiente describe las relaciones existentes entre las variables puntuales y las seccionales. La barra se considera en su sistema local de coordenadas, con su eje x' formando con las restantes dos ejes un triángulo recto. Se supone asimismo que los ejes y', z' son principales de inercia de cada sección. El convenio de signos para desplazamientos y giros es el de la mecánica clásica, igual que en los apartados anteriores. En coordenadas locales, los campos de desplazamientos y de deformación son

$$\mathbf{u}^p = \begin{Bmatrix} u^p \\ v^p \\ w^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u' + z\theta_y - y'\theta_{z'} \\ v' - z'\theta_{x'} \\ w' + y'\theta_{x'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z' & -y' \\ 0 & 1 & 0 & -z' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y' & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ \theta_{x'} \\ \theta_{y'} \\ \theta_{z'} \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \mathbf{u}' \quad (2.57)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^p}{\partial x'} \\ \frac{\partial u^p}{\partial y'} + \frac{\partial v^p}{\partial x'} \\ \frac{\partial u^p}{\partial z'} + \frac{\partial w^p}{\partial x'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du'}{dx'} + z \frac{d\theta_{y'}}{dx'} - y \frac{d\theta_{z'}}{dx'} \\ \frac{dv'}{dx'} - \theta_{z'} - z \frac{d\theta_{x'}}{dx'} \\ \frac{dw'}{dx'} + \theta_{y'} + y \frac{d\theta_{x'}}{dx'} \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.58)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left\{ \frac{du'}{dx'} \quad \frac{dv'}{dx'} - \theta_{z'} \quad \frac{dw'}{dx'} + \theta_{y'} \quad \frac{d\theta_{x'}}{dx'} \quad \frac{d\theta_{y'}}{dx'} \quad \frac{d\theta_{z'}}{dx'} \right\}^T$$

donde las variables que intervienen tienen el siguiente significado: \mathbf{u}^p – vector de desplazamientos locales de un punto cualquiera de la sección; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – vector de deformaciones; \mathbf{u}' – vector de desplazamientos en coordenadas locales del elemento finito de barra 3D, correspondiente al eje de la sección; $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – vector de deformaciones seccionales; \mathbf{S} – matriz geométrica de relación punto-sección.

Utilizando el principio de los desplazamientos virtuales para escribir las ecuaciones de equilibrio, el trabajo virtual interno L_{int} – ecuación (2.2) – correspondiente a un campo deformación virtual $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} L_{int} &= \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_o^\ell \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \left[\int_A \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dA \right] dx \\ &= \int_o^\ell \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dx' = \int_o^\ell \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dx' \end{aligned} \quad (2.59)$$

En la relación anterior ha vuelto a aparecer el vector de esfuerzos seccionales $\boldsymbol{\sigma}$ como el conjugado energético del vector de deformaciones seccionales, de

manera completamente análoga a la ecuación (2.16). La única diferencia es que la matriz $\mathbf{S} = \mathbf{S}(y, z)$ varía ahora en las dos direcciones de la sección

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= \int_A \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dA = \int_A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z' & -y' \\ 0 & 1 & 0 & -z' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y' & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} dA \\ &= \int_A \{ \sigma_{x'} \quad \tau_{x'y'} \quad \tau_{x'z'} \quad -z' \tau_{x'y'} + y \tau_{x'z'} \quad z' \sigma_{x'} \quad -y' \sigma_{x'} \}^T dA \quad (2.60) \\ &= \{ N_{x'} \quad Q_{y'} \quad Q_{z'} \quad T_{x'} \quad M_{y'} \quad M_{z'} \}^T\end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$, siendo \mathbf{C} el tensor constitutivo de rigidez local cuyo valor es

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Empleando las relaciones (2.58), se tiene

$$\hat{\sigma} = \int_A \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dA = \int_A \mathbf{S}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dA = \int_A \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dA = \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.62)$$

A partir de esta última relación se deduce el valor de la matriz constitutiva seccional $\hat{\mathbf{C}}$ que relaciona las deformaciones y los esfuerzos seccionales. Asimismo, de manera completamente análoga, puede deducirse una matriz de densidad seccional $\hat{\rho}$, que relaciona las fuerzas seccionales iniciales con el vector de aceleraciones $\ddot{\mathbf{u}}$, que se obtiene derivando dos veces con respecto al tiempo la ecuación (2.57)

$$\hat{\mathbf{C}} = \int_A \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} dA ; \quad \hat{\rho} = \int_A \mathbf{S}^T \rho \mathbf{S} dA \quad (2.63)$$

Las ecuaciones (2.63) tienen la misma forma que en el caso de los elementos presentados con anterioridad en este capítulo, con la salvedad que la integración se hace ahora sobre la cuadrícula de soporte 3D y no sobre las capas del caso 2D. El cálculo detallado de $\hat{\mathbf{C}}$ es

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{C}} &= \int_A \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & z'E & -y'E \\ 0 & G & 0 & -z'G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & y'G & 0 & 0 \\ 0 & -z'G & y'G & (z'^2 + y'^2)G & 0 & 0 \\ z'E & 0 & 0 & 0 & z'^2E & -y'z'E \\ -y'E & 0 & 0 & 0 & -y'z'E & y'^2E \end{bmatrix} dA \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{y'_i}^{y'_{i+1}} \int_{z'_i}^{z'_{i+1}} \begin{bmatrix} E_i & 0 & 0 & 0 & z'E_i & -y'E_i \\ 0 & G_i & 0 & -z'G_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_i & y'G_i & 0 & 0 \\ 0 & -z'G_i & y'G_i & (z'^2 + y'^2)G_i & 0 & 0 \\ z'E_i & 0 & 0 & 0 & z'^2E_i & -y'z'E_i \\ -y'E_i & 0 & 0 & 0 & -y'z'E_i & y'^2E_i \end{bmatrix} dy' dz' \quad (2.64)
 \end{aligned}$$

Dado que las cuadrículas son rectángulos con los lados paralelos a los ejes de inercia, las integrales dobles se pueden integrar de manera independiente en función de cada variable.

El elemento finito está definido por 3 nodos con 6 grados de libertad cada uno. Se emplean las mismas funciones de forma que en el caso plano. La matriz de funciones de forma \mathbf{N}' y el vector de desplazamientos nodales \mathbf{a}' tienen la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}'_i &= N_i \mathbf{I}_6 \quad ; \quad \mathbf{N}' = \{ \mathbf{N}'_1 \quad \mathbf{N}'_2 \quad \mathbf{N}'_3 \} \\
 \mathbf{a}'_i &= \{ u'_i \quad v'_i \quad w'_i \quad \theta_{x'i} \quad \theta_{y'i} \quad \theta_{z'i} \}^T \quad ; \quad \mathbf{a}' = \{ \mathbf{a}'_1 \quad \mathbf{a}'_2 \quad \mathbf{a}'_3 \}^T \quad (2.65)
 \end{aligned}$$

donde \mathbf{I}_6 es la matriz unidad de rango 6. De la ecuación (2.58) se deduce el valor de la matriz \mathbf{B}' como

$$\mathbf{B}'_i = \begin{bmatrix} \frac{dN_i}{dx'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dN_i}{dx'} & 0 & 0 & 0 & -N_i \\ 0 & 0 & \frac{dN_i}{dx'} & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{dN_i}{dx'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dN_i}{dx'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dN_i}{dx'} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B}' = \{ \mathbf{B}'_1 \quad \mathbf{B}'_2 \quad \mathbf{B}'_3 \} \quad (2.66)$$

La transformación del sistema local al sistema global de coordenadas se obtiene observando que las tres translaciones y los tres giros forman dos vectores espaciales que se proyectan en el sistema global de coordenadas a través de la transformación \mathbf{T}_0 definida a continuación. Las notaciones son las mismas que las utilizadas en la descripción del elemento de barra 2D.

$$\mathbf{a}'_i = \mathbf{T} \mathbf{a}_i ; \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{T}_0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} \cos(x',x) & \cos(x',y) & \cos(x',z) \\ \cos(y',x) & \cos(y',y) & \cos(y',z) \\ \cos(z',x) & \cos(z',y) & \cos(z',z) \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Con esto, se obtienen las expresiones de las matrices \mathbf{N}_i y \mathbf{B}_i

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{N}'_i \mathbf{T} ; \quad \mathbf{B}_i = \mathbf{B}'_i \mathbf{T} \quad (2.68)$$

y finalmente

$$\mathbf{u}' = \mathbf{N} \mathbf{a} ; \quad \ddot{\mathbf{u}}' = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{a}} ; \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (2.69)$$

Siguiendo los mismos pasos descritos para el elemento 2D, se obtienen las expresiones de los vectores de fuerzas internas elásticas \mathbf{F}_e e iniciales \mathbf{F}_d

$$\mathbf{F}_e = \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dx = \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} dx' ; \quad \mathbf{F}_d = \int_{\ell} \mathbf{N}^T \hat{\rho} \ddot{\mathbf{u}}' dx' \quad (2.70)$$

donde ℓ es la longitud del elemento finito. Con estas últimas transformaciones, las fuerzas elásticas e iniciales quedan

$$\mathbf{F}_e = \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{B} dx' \mathbf{a} = \mathbf{K} \mathbf{a} ; \quad \mathbf{F}_d = \int_{\ell} \mathbf{N}^T \hat{\rho} \mathbf{N} dx' \ddot{\mathbf{a}} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} \quad (2.71)$$

de donde pueden extraerse las matrices elementales de rigidez y masa globales, \mathbf{K} y \mathbf{M} , respectivamente. Éstas se integran con una cuadratura gaussiana reducida de 2 puntos para los términos de cortante para evitar efectos de bloqueo de cortante.

El proceso de cálculo no lineal consiste en la evaluación de las deformaciones seccionales $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ correspondientes a los desplazamientos \mathbf{a} , tal como puede verse en la ecuación (2.69). Con éstas se evalúan las deformaciones puntuales $\boldsymbol{\epsilon}$ mediante la ecuación (2.58) y las tensiones correspondientes, que luego se corrigen dentro del modelo constitutivo, y luego integrarlas sobre la sección, mediante la relación (2.60), a fin de obtener los esfuerzos seccionales correspondientes. De esta

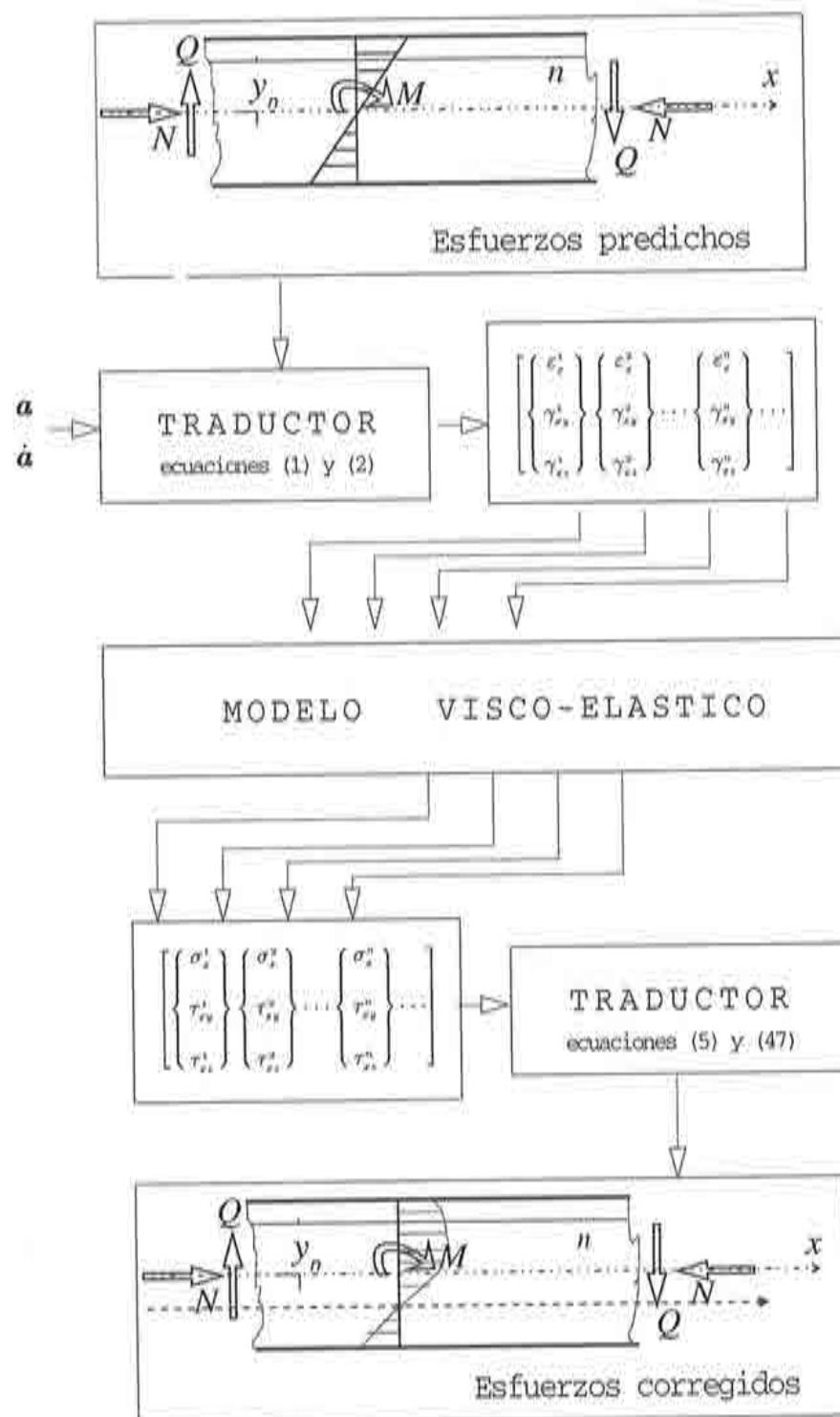


Tabla 2.1 Algoritmo de cálculo no lineal (Barbat et al. 1997)

manera pueden calcularse ahora las fuerzas residuales con algoritmos estandar. Este procedimiento se recoge sintéticamente en la Tabla 2.1.

La sección de la viga está discretizada mediante una cuadrícula ortogonal no homogénea. Los ejes de la cuadrícula deben ser paralelos a las direcciones principales de inercia de la sección. Cada rectángulo de la cuadrícula puede estar caracterizado por un material y dimensiones geométricas distintas. Las cuatro esquinas de cada rectángulo son los puntos de cálculo de las deformaciones y tensiones. Para integrar las tensiones seccionales a partir de las tensiones suministradas por el modelo constitutivo, se considera que todas las tensiones involucradas tienen una variación lineal dentro de una celda de la cuadrícula. Esto obliga a resolver para cada cuadrícula y cada tensión un sistema sobre determinado de cuatro ecuaciones con tres incógnitas, obteniendo de esta manera la ecuación del plano que aproxima por mínimos cuadrados la variación de cada componente del tensor de tensiones. Esta misma cuadrícula sirve también para calcular todas las demás características seccionales como momentos de inercia y estáticos mecánicos, eje neutro, etc.

2.6 ELEMENTO DE SÓLIDO 3D DE HORMIGÓN ARMADO

En muchos casos la complejidad de las características geométricas, mecánicas o de las cargas no permite la utilización de modelos de cálculo simplificados como barras, sólidos 2D o de revolución. En esos casos se debe utilizar la teoría general tridimensional del sólido aunque el coste de su aplicación sea más elevado. Plantear los elementos de sólido 3D no presenta ninguna dificultad teórica puesto que se utilizan conceptos generales de la elasticidad tridimensional que no requieren el esfuerzo de particularización y simplificación propio a las formulaciones uni y bidimensionales.

En este apartado se analiza brevemente el elemento de sólido isoparamétrico hexaédrico serendípito de 20 nodos (tri-cuadrático) (Cervera y Hinton 1986; Cervera et al. 1987, 1988, 1990). Cada nodo tiene como grados de libertad 3 desplazamientos. Dicho elemento tridimensional está formado por una matriz de material homogéneo que puede ser el hormigón y capas de otros materiales anisótropos que pueden ser distintos tipos de acero, que modelizan la armadura.

El campo de desplazamientos en un punto cualquiera del sólido en el sistema de coordenadas global es

$$\mathbf{u} = \{ u \quad v \quad w \}^T \quad (2.72)$$

donde u , v y w son los desplazamiento del punto según los ejes cartesianos globales x , y , z , respectivamente.

El campo de deformaciones se obtiene, de acuerdo con la elasticidad tridimensional, como un vector de seis componentes

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (2.73)$$

El campo de tensiones es

$$\boldsymbol{\sigma} = \{ \sigma_x \ \ \sigma_y \ \ \sigma_z \ \ \tau_{xy} \ \ \tau_{xz} \ \ \tau_{yz} \ }^T = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.74)$$

donde \mathbf{C} es la matriz constitutiva general para un material isótropo dada por la ecuación (2.13).

La formulación de elementos finitos parte del discretización nodal y describe los campos elementales en función de los valores nodales de los desplazamientos. Por consiguiente, el campo elemental de desplazamientos es

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{20} \begin{Bmatrix} N_i u_i \\ N_i v_i \\ N_i w_i \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{20} \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{Na} \quad (2.75)$$

donde han sido utilizadas las notaciones habituales

$$\mathbf{N}_i = N_i \mathbf{I}_3 \ ; \ \mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \ ; \ \mathbf{N} = \{ \mathbf{N}_1 \ \ \mathbf{N}_2 \ \ ... \ \ \mathbf{N}_{20} \} \ ; \ \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ ... \\ \mathbf{a}_{20} \end{Bmatrix} \quad (2.76)$$

en las cuales \mathbf{N} es la matriz de funciones de forma y \mathbf{a} es el vector de desplazamientos nodales. Las funciones de forma N_i en coordenadas locales normalizadas del elemento serendipitó de 20 nodos pueden encontrarse en Oñate (1992).

La relación entre las incógnitas nodales \mathbf{a} y las deformaciones $\boldsymbol{\epsilon}$ se obtiene de las ecuaciones (2.73) y (2.75)

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{LN}\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{20} \mathbf{B}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{B}\mathbf{a} \quad (2.77)$$

de donde se obtiene la expresión de la matriz de deformación \mathbf{B}_i

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{LN}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \{ \mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \dots \quad \mathbf{B}_{20} \} \quad (2.78)$$

La obtención de la matriz de rigidez \mathbf{K}_c de la parte de hormigón del elemento y la matriz de masa \mathbf{M} se realiza en la forma habitual, utilizándose las siguientes expresiones:

$$\mathbf{K}_c = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C}_c \mathbf{B} dV; \quad \mathbf{M} = \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \quad (2.79)$$

donde \mathbf{C}_c es la matriz constitutiva del material base, ρ es su densidad y la integral se extiende sobre el volumen del elemento considerado.

Normalmente, la integración de los elementos isoparamétricos hexaédricos de 20 nodos se realiza usando las reglas de Gauss-Legendre o de Lobatto con $3 \times 3 \times 3$ puntos. La regla de Gauss es más precisa, mientras que la de Lobatto tiene puntos de integración sobre las caras de los elementos, donde se producen normalmente los picos de tensión. En los análisis que se realizaron en la monografía se aplica una regla de integración distinta, que es a la vez precisa y eficiente. Esta regla, de sólo 15 puntos de integración, se puede expresar como (Cervera y Hinton 1986):

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3 = A f(0, 0, 0) +$$

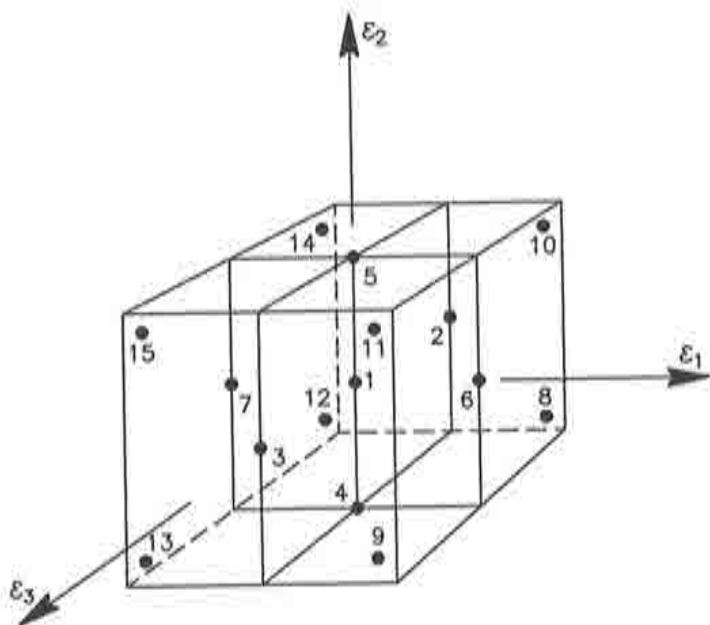


Figura 2.6 Distribución de los puntos de integración en el elemento sólido hexaédrico.

$$+B[f(-b, 0, 0) + f(b, 0, 0) + \dots] + C[f(-c, -c, -c) + f(-c, -c, c) + \dots] \quad (2.80)$$

donde e_1, e_2 y e_3 son las coordenadas naturales normalizadas, y los respectivos coeficientes de peso y posiciones son: $A = 1.564444$, $B = 0.3555556$, $C = 0.5377778$, $b = 1.000000$ y $c = 0.6741000$. Como se puede ver en la Figura 5.6 la distribución de puntos de integración en esta regla es tal que hay 6 puntos en los centros de las caras de los elementos.

Para la incorporación de las armaduras, se supone adherencia perfecta entre las barras de acero de las armaduras y el hormigón circundante. Esta hipótesis de compatibilidad de desplazamientos y deformaciones entre el acero y el hormigón permite tratar la armadura como parte integrante del elemento sólido.

Cada conjunto de barras de armadura se distribuye como una capa bidimensional de membrana de espesor equivalente, colocada en el interior del elemento de hormigón en una posición tal que una de las coordenadas isoparamétricas sea constante, como se muestra en la Figura 2.7 (Cervera y Hinton 1986). El ángulo que forman las barras con el eje x de un sistema cartesiano local tangente a la capa de acero en cada punto de integración puede variar y se introduce como dato.

Las matrices de rigidez de las capas de acero, \mathbf{K}_s^i , se suman a la del hormigón, \mathbf{K}_c , para obtener la matriz de rigidez total del elemento, de la forma

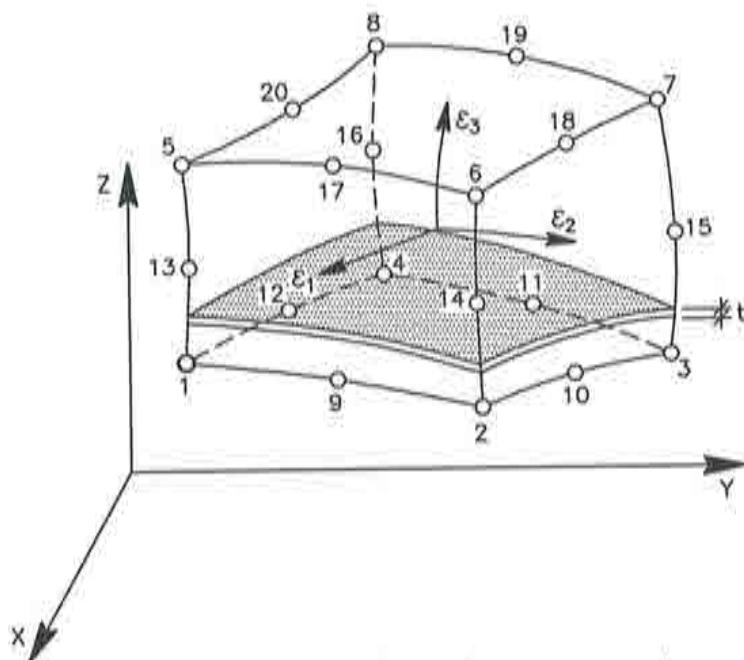


Figura 2.7 Elemento de hormigón con una capa de armadura.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c + \sum_i \mathbf{K}_s^i \quad (2.81)$$

La contribución de la rigidez de una capa acero se calcula de la forma

$$\mathbf{K}_s^i = \int \int_{\Omega^i} \mathbf{T}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}_s^i \mathbf{B} \mathbf{T} t d\Omega \quad (2.82)$$

donde \mathbf{C}_s^i es la matriz constitutiva del acero de la capa i , \mathbf{T} es la matriz de transformación del sistema local de referencia propio de la capa al sistema global y t es el espesor equivalente de la capa de armadura. La integral se extiende sobre la sección del elemento Ω^i perpendicular a la coordenada local que da la ecuación del plano de la capa. Esta integral utiliza la misma matriz \mathbf{B} que la ecuación (2.79) puesto que la capa es parte integrante del elemento finito debido a la compatibilidad de deformaciones. Para la integración numérica se emplea una cuadratura de Gauss de 3×3 puntos de integración distribuidos en el plano de la capa.

Como las capas de acero substituyen la presencia real de barras de armadura, la matriz constitutiva \mathbf{C}_s tiene esto en cuenta tomando características de rigidez unidimensionales, es decir hay rigidez sólo en la dirección de la barra. El sistema de referencia local de la capa está orientado con el primer eje a lo largo de la

barra de manera que sólo un término de \mathbf{C}_s será no nulo. Su expresión es la siguiente:

$$\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

donde E es el modulo elástico del material de la capa.

CAPÍTULO 3

MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO ISÓTROPO

3.1 EL CONCEPTO DE DAÑO

Es sabido que la microfisuración en el hormigón y la mampostería ocurre a niveles de carga bajos debido a la pérdida de cohesión entre las partículas de mortero y el árido o por fisuración del mismo mortero (ASCE 1981). La fisuración progresó siguiendo caminos no homogéneos que combinan los mecanismos arriba mencionados con el crecimiento y la conexión de las microfisuras en varias direcciones. Los experimentos sobre mortero han evidenciado que la distribución de las microfisuras es altamente discontinua con orientaciones arbitrarias (Bažant 1986; Area y Ingraffea 1981). Este hecho está demostrado por muchos experimentos que muestran que la fisuración puede ser considerada un fenómeno no direccional y que la propagación de las fisuras sigue caminos aleatorios que dependen del tamaño de las partículas del árido. De esta manera, las direcciones de fisuración dominantes pueden interpretarse como el lugar geométrico de las trayectorias de los puntos dañados del material (véase la Figura 3.1).

Los conceptos anteriores apoyan la idea de que el comportamiento no lineal del hormigón y la mampostería pueden modelizarse utilizando la teoría del daño si se define una función de daño adecuada que tenga en cuenta la diferencia de respuesta de estos materiales en tracción y compresión (Oller 1991; Oñate et al. 1988; Lubliner et al. 1989; Lemaître 1984, 1985; Simó y Ju 1987a, 1987b; Kachanov 1980; Wastiels 1979). La fisuración se interpreta en este caso como un efecto de daño local definido por la evolución de parámetros conocidos de material y de una o varias funciones que controlan la aparición y evolución del daño.

Una de las ventajas de un modelo de este tipo es la independencia del análisis de las direcciones de fisuración que pueden identificarse "a posteriori" una vez se haya obtenido la solución no lineal (Oller 1991; Oñate et al. 1988; Lubliner et al. 1989). En esta monografía ha sido utilizada una extensión del modelo

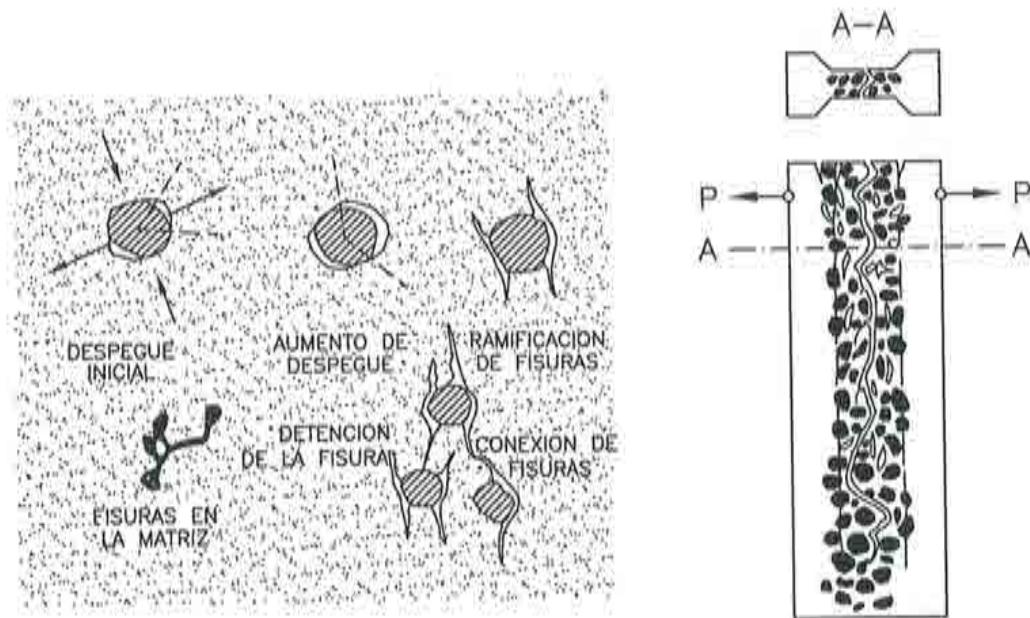


Figure 3.1 Mecánica del daño y propagación de una fisura macroscópica en hormigón en masa.

de daño isotrópico desarrollado en los últimos años (Oller 1991; Mang et al. 1994; Oñate et al. 1988; Lubliner et al. 1989; Barbat et al. 1992a; Hanganu et al. 1993b; Cervera et al. 1990; Oliver et al. 1990; Oñate et al. 1986) para el análisis del comportamiento no lineal de estructuras de hormigón. El modelo mencionado tiene en cuenta todos los aspectos importantes que deben considerarse en un análisis no lineal de estructuras de hormigón y mampostería, tales como la diferencia de comportamiento en tracción y compresión, el efecto de la degradación de la rigidez debido a causas mecánicas y la objetividad de la respuesta con respecto a diferentes mallas de elementos finitos.

Para aclarar mejor el concepto de daño, se considera una superficie elemental en un volumen de material degradado. Dicha superficie es suficientemente grande para tener un número representativo de defectos, pero al mismo tiempo puede todavía considerarse como perteneciente a un punto material específico. En la Figura 3.2, S_n es el área de toda la sección, \bar{S}_n el área resistente efectiva ($S_n - \bar{S}_n$ siendo el área ocupada por los huecos) y, como consecuencia, la variable de daño d_n asociada a esta superficie es

$$d_n = \frac{S_n - \bar{S}_n}{S_n} = 1 - \frac{\bar{S}_n}{S_n} \quad (3.1)$$

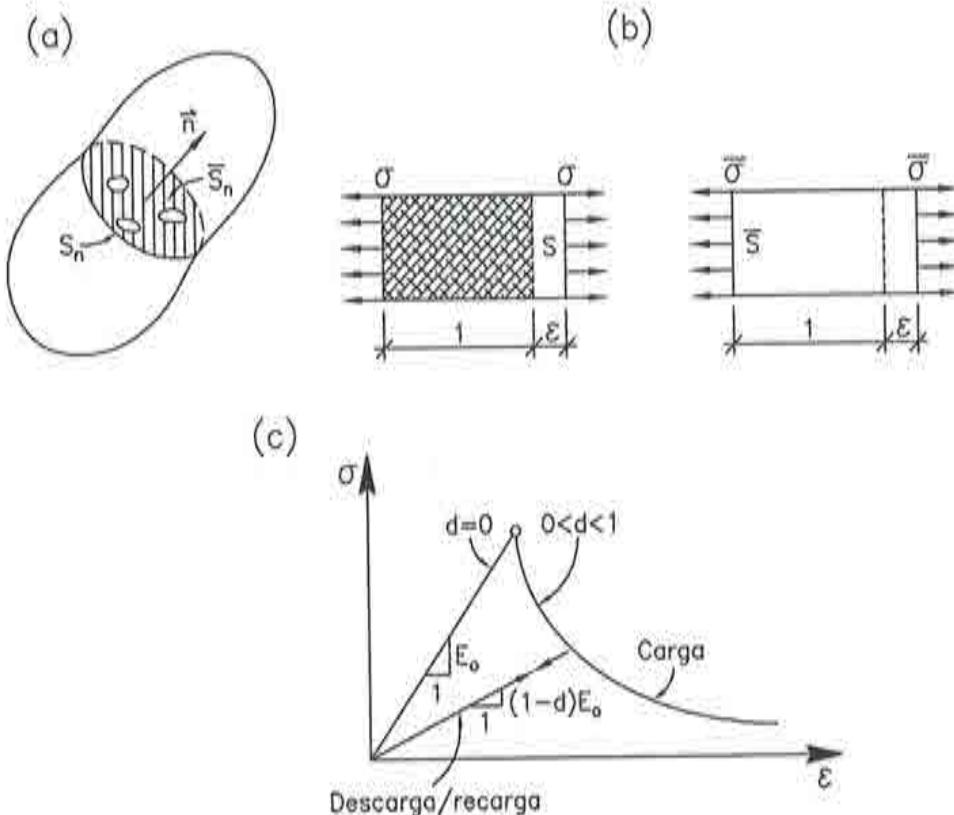


Figure 3.2 (a) Superficie dañada; (b) Tensión de Cauchy σ y tensión efectiva $\bar{\sigma}$; (c) Evolución de la curva uniaxial tensión-deformación.

En la relación anterior d_n representa la densidad de los defectos del material y tendrá el valor cero en el estado inicial no dañado. A medida que la fisuración avanza d_n tenderá hacia un valor crítico cercano a la unidad que corresponde a la completa desaparición del área resistente \bar{S}_n . En la mayoría de los casos es suficiente una representación escalar del daño ($d_n = d$) para asegurar la modelización realista del material. En este caso las microfisuras no tienen una dirección particular y la fisura macroscópica se define posteriormente como el lugar geométrico de los puntos dañados.

Un concepto útil para entender el efecto del daño es el de tensión efectiva. La relación de equilibrio entre la tensión de Cauchy estandar σ y la tensión efectiva $\bar{\sigma}$ en el caso de la probeta dañada de la Figura 3.2 es

$$\sigma S = \bar{\sigma} \bar{S} \quad (3.2)$$

y utilizando (3.1) and (3.2) se obtiene

$$\sigma = (1 - d)\bar{\sigma} = (1 - d)E\epsilon \quad (3.3)$$

Durante un proceso de degradación en desarrollo, es el área efectiva la que soporta la carga exterior y, por este motivo, $\bar{\sigma}$ es un parámetro más representativo físicamente que σ .

3.2 CONSIDERACIONES SOBRE LOS MODELOS DE DAÑO

Los modelos de daño continuo son relaciones constitutivas en las cuales el efecto de la fisuración y del crecimiento de microhuecos en la masa del hormigón se introducen a través de variables internas de estado que actúan sobre la rigidez elástica del material.

Los modelos de daño tienen una formulación relativamente sencilla y, a la vez, rigurosa desde el punto de vista termodinámico. Ellos describen el comportamiento no lineal mediante una o varias variables internas de daño, que miden la pérdida de rigidez secante del material y que se normalizan con respecto a la unidad, la cual corresponde al daño máximo. En la Figura 3.3 puede verse la representación unidimensional del comportamiento de un punto de un material dañado. El efecto de daño se traduce en una disminución del módulo de rigidez secante.

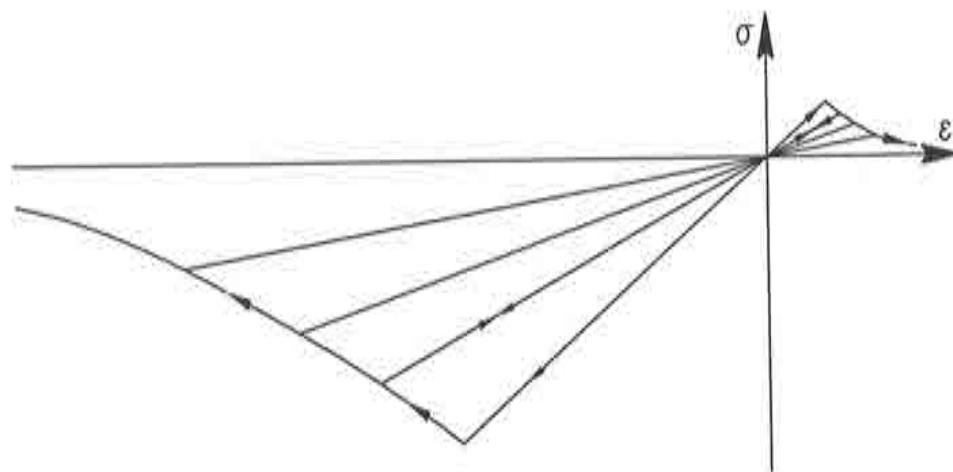


Figura 3.3 Representación unidimensional de la pérdida de rigidez por daño local.

El modelo considerado en esta tesis es un modelo constitutivo de daño basado en la mecánica del sólido deformable y tiene una sola variable interna. Por consiguiente, se trata de un modelo de daño isótropo y se basa en la teoría

de Kachanov (1958). En este modelo se han incluido experiencias posteriores en la modelización del daño como las de Simó y Ju (1987a, 1987b), Lubliner et al. (1989) y Oliver et al. (1990). Dicha formulación es un compromiso entre la complejidad necesaria para modelizar el comportamiento del hormigón y la versatilidad que se precisa para calcular problemas grandes. Esto asegura buenos resultados y soluciones de bajo coste en el estudio de problemas no lineales.

3.3 CARACTERÍSTICAS DEL MODELO

3.3.1 Consideraciones energéticas

El modelo se formula, para problemas térmicamente estables, en la configuración material lagrangiana para pequeñas deformaciones y desplazamientos. Para este caso particular se considera la siguiente expresión matemática para la energía libre Ψ , en la cual su parte elástica no degradada se escribe como una función escalar cuadrática de argumentos tensoriales:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}; d) = (1 - d)\Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) = (1 - d) \left(\frac{1}{2m_0} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}^0 \right) = (1 - d) \left(\frac{1}{2m_0} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}^0 \boldsymbol{\varepsilon} \right) \quad (3.4)$$

El tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ es la variable libre del problema, d ($0 \leq d \leq 1$) es la variable interna de daño, m_0 es la densidad en la configuración material y \mathbf{C}^0 es el tensor de rigidez del material en el estado inicial no dañado.

3.3.2 Inecuación de Clasius-Planck. Disipación mecánica

Para problemas térmicamente estables es válida la inecuación de Clasius-Planck para representar la dissipación $\dot{\Xi}_m$, que establece que ésta es siempre creciente, es decir, la potencia disipativa $\dot{\Xi}_m$ de un punto es siempre positiva y tiene la siguiente forma local lagrangiana:

$$\dot{\Xi}_m = \frac{1}{m_0} \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (3.5)$$

o bien†

† Las derivadas vectoriales simbólicas obedecen a la siguiente regla: la derivada de un escalar con respecto a un vector columna es un vector linea y, viceversa, la derivada de un escalar con respecto a un vector linea es un vector columna. Extrapolando esta regla a la derivada de un vector columna con respecto a otro vector columna, se obtiene que el resultado es una matriz con tantas líneas cuantos componentes tiene el vector "numerador" y tantas columnas cuantos componentes hay en el vector "denominador".

$$\dot{\Xi}_m = \frac{1}{m_0} \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \right) \geq 0 \quad (3.6)$$

y, finalmente,

$$\dot{\Xi}_m = \left(\frac{1}{m_0} \boldsymbol{\sigma}^T - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad (3.7)$$

Esta última expresión de la potencia disipativa permite hacer las siguientes observaciones:

a) La inecuación (3.7) debe cumplirse para cualquier variación temporal arbitraria de la variable libre $\boldsymbol{\epsilon}$, con lo cual el multiplicador de $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ tiene que ser cero. Esta condición proporciona la ley constitutiva hiperelástica secante para el problema de daño estudiado, que es

$$\frac{1}{m_0} \boldsymbol{\sigma}^T - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = m_0 \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right\}^T = (1-d) \boldsymbol{C}^0 \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{C}^s \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.8)$$

$$\boxed{\boldsymbol{C}^s = (1-d) \boldsymbol{C}^0}$$

donde \boldsymbol{C}^s es la matriz constitutiva secante del material dañado.

b) Considerando la última ecuación, la potencia disipativa queda

$$\dot{\Xi}_m = - \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} = \Psi_0 \dot{d} \geq 0 \quad (3.9)$$

lo que es equivalente a $\dot{d} \geq 0$, es decir el daño local nunca puede disminuir.

3.3.3 Criterio umbral de degradación o daño

El umbral de daño se define como una función de la energía libre del material no dañado que, a su vez, está escrita en función de las tensiones principales no dañadas $\sigma_i^{p,0}$

$$F = K(\boldsymbol{\sigma}^{p,0}) \sqrt{2m_0 \Psi_0} - 1 = \frac{K(\boldsymbol{\sigma}^{p,0})}{\sqrt{E^0}} \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^{p,0})^2} - 1 \leq 0 \quad (3.10)$$

cuyos términos tienen el siguiente significado:

$$K(\sigma^{p,o}) = \frac{r}{\sqrt{2m_o(\Psi_t^o)_L}} + \frac{1-r}{\sqrt{2m_o(\Psi_c^o)_L}} ; \quad r = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i^{p,o} \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i^{p,o}|}$$

$$2m_o(\Psi_{t,c}^o)_L = \sum_{i=1}^3 \langle \pm \sigma_i^{p,o} \rangle \varepsilon_i ; \quad (\Psi_o)_L = (\Psi_t^o)_L + (\Psi_c^o)_L$$

En estas ecuaciones $(\Psi_{t,c}^o)_L$ representa la parte de la energía libre desarrollada cuando se alcanza el límite de resistencia a tracción o compresión del material y $\langle \pm x \rangle = \frac{1}{2}(|x| \pm x)$ es la función de McAuley. La variable r es un escalar que en el caso de un estado de compresión pura toma el valor 0, en el caso de tracción pura el valor 1 y valores intermedios en los demás casos de manera que indica el estado tensional dominante según está más cerca de un límite u otro. Su papel es el de unificar en un único criterio de daño los límites de degradación diferentes en tracción y compresión.

Teniendo en cuenta que las resistencias a tracción y compresión son $f_t = (2m_o \Psi_t^o E^o)_L^{1/2}$ y $f_c = (2m_o \Psi_c^o E^o)_L^{1/2}$ respectivamente, la función umbral de daño puede escribirse como

$$F = \bar{\sigma} - f_c = [1 + r(n-1)] \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^{p,o})^2} - f_c \leq 0 \quad (3.11)$$

con $n = f_c/f_t$. En el caso de un estado de tracción triaxial la primera parte del segundo miembro de la ecuación (3.11) toma el valor n , es decir la tensión equivalente se debe multiplicar por este valor para poder compararla con el umbral de daño f_c . En un caso de compresión triaxial su valor es 1.

Esta función de umbral de daño, expresada en el espacio de tensiones principales no dañadas, permite una gran diversidad de soluciones distintas. La ventaja del criterio de daño (3.11) consiste en la posibilidad de emplear cualquier función F siempre cuando ésta sea homogénea y de primer grado en tensiones, como, por ejemplo, las de Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, Lubliner (1990), etc. La forma dada en la ecuación (3.11) cumple con los requisitos antes mencionados; además, es sencilla y satisfactoria en resultados dentro del rango de trabajo que utiliza el modelo y, por esta razón, es la expresión escalar que define la tensión uniaxial equivalente $\bar{\sigma}$. Una representación de la superficie de degradación puede verse en la Figura 3.4.

Una expresión totalmente equivalente a (3.11), propuesta por Simó y Ju (1987a) a fin de simplificar la deducción matemática de la variable de daño

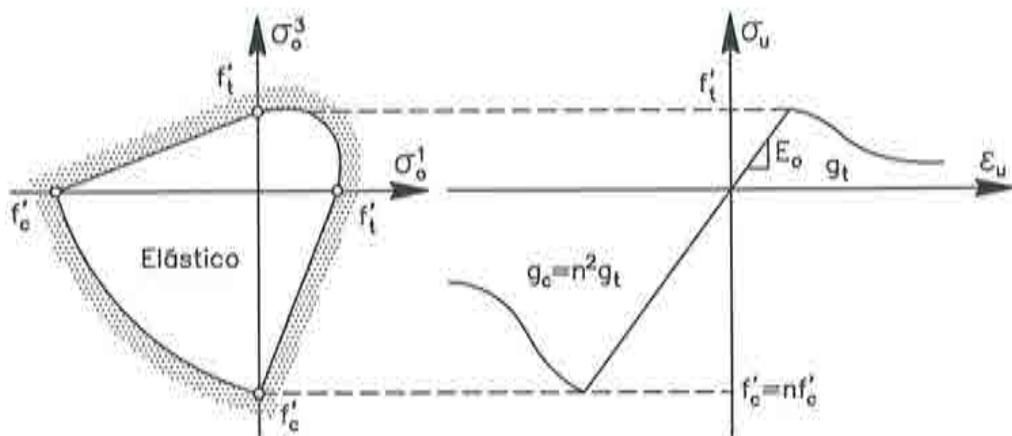


Figura 3.4 Función umbral de daño en el plano principal $\sigma_1 - \sigma_2$.

del modelo, es la siguiente:

$$\bar{F} = G(\bar{\sigma}) - G(f_c) \leq 0 \quad (3.12)$$

donde $G(\chi)$ es una función escalar, invertible, positiva y de derivada positiva, a determinar. Su forma se escogerá de una manera conveniente para el desarrollo ulterior del modelo de daño.

3.3.4 Regla de evolución de la variable interna de daño

Se utiliza la siguiente forma matemática para definir la regla de evolución de la variable interna de daño, análoga a la regla de flujo plástico

$$\dot{d} = \dot{\eta} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}} = \dot{\eta} \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \quad (3.13)$$

donde $\dot{\eta}$ es un escalar no negativo llamado parámetro de consistencia de daño, análogo al parámetro de consistencia plástica λ de la plasticidad.

3.3.5 Condición de consistencia de daño

El valor del parámetro de consistencia de daño se obtiene a partir de unas condiciones análogas al segundo postulado de Drucker en plasticidad que, en los modelos de daño, son las condiciones de Ilyushin. Estas condiciones requieren que para que haya desarrollo de procesos de daño, el punto debe encontrarse sobre la superficie umbral de daño ($\bar{F} = 0$) y permanecer sobre ella durante

dichos procesos ($\dot{\bar{F}} = 0$, lo que significa que \bar{F} mantiene en el tiempo su valor nulo). Estas condiciones conducen a la siguiente serie de deducciones:

$$\bar{F} = 0 \Rightarrow G(\bar{\sigma}) - G(f_e) = 0 \Rightarrow G(\bar{\sigma}) = G(f_e) \quad (3.14)$$

Debido a las propiedades de invertibilidad y derivabilidad de la función $G(\chi)$ se obtiene

$$G(\bar{\sigma}) = G(f_e) \Rightarrow \bar{\sigma} = f_e \Rightarrow \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} = \frac{dG(f_e)}{df_e} \quad (3.15)$$

Por otra parte, de la condición de permanencia sobre la superficie umbral de daño se deduce que

$$\dot{\bar{F}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial f_e} \dot{f}_e = \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} - \frac{dG(f_e)}{df_e} \dot{f}_e = 0 \quad (3.16)$$

de donde resulta

$$\frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} = \frac{dG(f_e)}{df_e} \dot{f}_e \Rightarrow \dot{\bar{\sigma}} = \dot{f}_e \quad (3.17)$$

La primera parte de la relación anterior puede ponerse en la siguiente forma alternativa:

$$\frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} = \frac{dG(f_e)}{df_e} \dot{f}_e = \frac{dG(f_e)}{df_e} \frac{df_e}{d(d)} \dot{d} = \frac{dG(f_e)}{d(d)} \dot{\eta} \frac{d\bar{G}(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \quad (3.18)$$

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{dG(f_e)}{d(d)} \dot{\eta} \quad (3.19)$$

Adoptándose la función $G(f_e)$ como la función que describe la evolución del daño ($d = G(f_e)$), queda determinado el parámetro de consistencia de daño $\dot{\eta}$ como

$$\dot{\eta} = \dot{\bar{\sigma}} = \dot{f}_e = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^0} \dot{\sigma}^0 = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^0} \mathbf{C}^0 \dot{\epsilon} \quad (3.20)$$

Substituyendo esta última ecuación en (3.13) y luego en (3.9), se obtienen las expresiones que formulan la evolución temporal de las variables de daño y de disipación

$$\dot{d} = \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} = \dot{G}(\bar{\sigma}) \Rightarrow d = \int_0^t \dot{d} dt \equiv \int_0^t \dot{G}(\bar{\sigma}) dt = G(\bar{\sigma}) \quad (3.21)$$

$$\dot{\Xi}_m = \Psi_0 \dot{G}(\bar{\sigma}) = \Psi_0 \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} = \Psi_0 \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^0} C^0 \dot{\epsilon} \quad (3.22)$$

3.3.6 Condición de carga/descarga

La condición de carga/descarga se deriva de las relaciones de Kuhn-Tucker formuladas para problemas con restricciones unilaterales (Oller 1988):

- (a) $\dot{\eta} \geq 0$;
- (b) $\bar{F} \leq 0$;
- (c) $\dot{\eta}\bar{F} = 0$.

A partir de éstas, si $\bar{F} < 0$ la tercera condición hace que $\dot{\eta} = 0$ o, lo que es lo mismo, hace que no puedan desarrollarse procesos de daño y, si $\dot{\eta} > 0$, la misma condición requiere que $\bar{F} = 0$, es decir, que se ha alcanzado la superficie umbral de daño y que se están desarrollando fenómenos de degradación.

3.3.7 Particularización de la función $G(\bar{\sigma})$

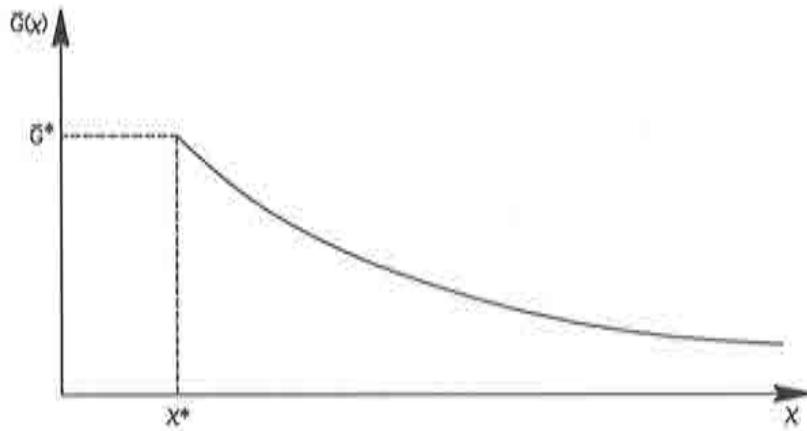
Entre las diversas alternativas para definir la función de evolución de daño $G(\bar{\sigma})$, se elige la siguiente (Oliver et al. 1990):

$$G(\bar{\sigma}) = 1 - \frac{\bar{G}(\bar{\sigma})}{\bar{\sigma}} \quad (3.23)$$

donde $\bar{G}(\bar{\sigma})$ describe una función similar a la presentada en la Figura 3.5, de manera que para $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^*$ la tensión de compresión umbral inicial es \bar{G}^* y para $\bar{\sigma} \rightarrow \infty$ la resistencia final $\bar{G} \rightarrow 0$. De este modo, recorriendo todo el camino, el punto habrá disipado una energía equivalente a su energía de fractura específica. Este función define la evolución del umbral de daño que es una magnitud análoga a la superficie de fluencia en la plasticidad.

En esta monografía se utiliza la función $\bar{G}(\bar{\sigma})$ exponencial propuesta por Oliver et al. (1990)

$$\bar{G}(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}^* e^{A(1 - \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^*})}; \quad G(\bar{\sigma}) = 1 - \frac{\bar{\sigma}^*}{\bar{\sigma}} e^{A(1 - \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^*})} \quad (3.24)$$

Figura 3.5 Representación de la función $\tilde{G}(\bar{\sigma})$ elegida.

3.3.8 Obtención del parámetro A

Para un proceso de tracción uniaxial, bajo carga monótona creciente, se tiene que el cambio temporal de la disipación viene dado por la ecuación (3.22), con $\bar{\sigma} = n\sigma_t$, $\Psi_0 = \frac{1}{2m_0}\varepsilon_t E^0 \varepsilon_t = \frac{(\sigma_t)^2}{2m_0 E^0} = \frac{\bar{\sigma}^2}{2m_0 n^2 E^0}$. Integrando (3.22) en el tiempo, a través de la tensión equivalente no dañada $\bar{\sigma}$, que depende del tiempo, se calcula que la disipación total al final del proceso de tracción uniaxial es

$$\Xi_t^{max} = \int_{\bar{\sigma}^*}^{\infty} \frac{\bar{\sigma}^2}{2m_0 n^2 E^0} \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} d\bar{\sigma} = \int_{\bar{\sigma}^*}^{\infty} \frac{\bar{\sigma}^2}{2m_0 n^2 E^0} dG(\bar{\sigma}) \quad (3.25)$$

$$\Xi_t^{max} = \left[\frac{\bar{\sigma}^2}{2m_0 n^2 E^0} G(\bar{\sigma}) \right]_{\bar{\sigma}^*}^{\infty} - \int_{\bar{\sigma}^*}^{\infty} G(\bar{\sigma}) \frac{\bar{\sigma}}{m_0 n^2 E^0} d\bar{\sigma} \quad (3.26)$$

$$\Xi_t^{max} = \frac{(\bar{\sigma}^*)^2}{m_0 n^2 E^0} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{A} \right] \Rightarrow A = \frac{1}{\frac{\Xi_t^{max} m_0 n^2 E^0}{(\bar{\sigma}^*)^2} - \frac{1}{2}} \geq 0 \quad (3.27)$$

donde $\bar{\sigma}^*$ es la tensión umbral de daño inicial. Haciendo las mismas hipótesis para un proceso de compresión uniaxial y postulando que el parámetro A debe ser el mismo en los dos casos, se deduce que

$$A = \frac{1}{\frac{\Xi_c^{max} m_0 E^0}{(\bar{\sigma}^*)^2} - \frac{1}{2}} \geq 0 \Rightarrow \Xi_c^{max} = n^2 \Xi_t^{max} \quad (3.28)$$

El valor de la disipación máxima a tracción Ξ_t^{max} es igual a la densidad de energía de fractura g_f , parámetro derivado de la mecánica de fractura (Oliver et al. 1990) como $g_f = G_f/\ell_c$, que es la energía de fractura G_f (constante de material) normalizada a la longitud característica ℓ_c del dominio finito fracturado (Lubliner et al. 1989).

La longitud característica tiene un papel fundamental en asegurar la objetividad con respecto a la malla de elementos finitos de la respuesta estructural. Sin embargo se introduce una dependencia de la malla en cuanto al parámetro A y a través de éste el mismo daño local d se ve afectado por el tamaño del elemento finito a cual pertenece el punto de integración analizado. Esto se debe a que cada punto de integración es representativo de un cierto volumen de material y debe disipar sólo la energía que le corresponde a ese volumen. A mayor tamaño de elemento finito mayor será la energía asignada a un punto de integración numérica ya que todos los elementos de un mismo tipo utilizan la misma regla de integración. Sin embargo esto asegura que en la estructura entera se disipa la misma energía independientemente de la malla de elementos finitos empleada asegurando así la objetividad de la respuesta.

Si además se impone la condición de que la disipación total no pueda ser menor que la energía libre que se tenía acumulada en el material en el momento en el cual el punto había alcanzado por primera vez el umbral de daño, se obtiene que

$$\Xi_t^{max} = \Xi_t^{min} + \Delta\Xi_t^{max} \quad (3.29)$$

donde $\Delta\Xi_t^{max} \geq 0$ y

$$\Xi_t^{min} = \Psi_o^* = \frac{(\bar{\sigma}^*)^2}{2m_o n^2 E^o} \quad (3.30)$$

Si se substituye la relación (3.29) en la ecuación (3.27), que define el parámetro A , se obtiene

$$A = \frac{(\bar{\sigma}^*)^2}{\Delta\Xi_t^{max} m_o n^2 E^o} = \frac{2\Xi_t^{min}}{\Delta\Xi_t^{max}} \quad (3.31)$$

expresión que pone de relieve el carácter no negativo de dicho parámetro.

3.3.9 Aspectos energéticos del fenómeno de degradación

Considérese un proceso de tracción uniaxial, tal como se muestra en la Figura 3.6. Para un punto que haya superado el umbral de degradación y tenga la deformación ε , la tensión normal σ es menor que la tensión σ^0 correspondiente al caso en el cual no ocurriera degradación alguna. La definición de las energías potenciales relacionadas con las dos situaciones antes descritas son

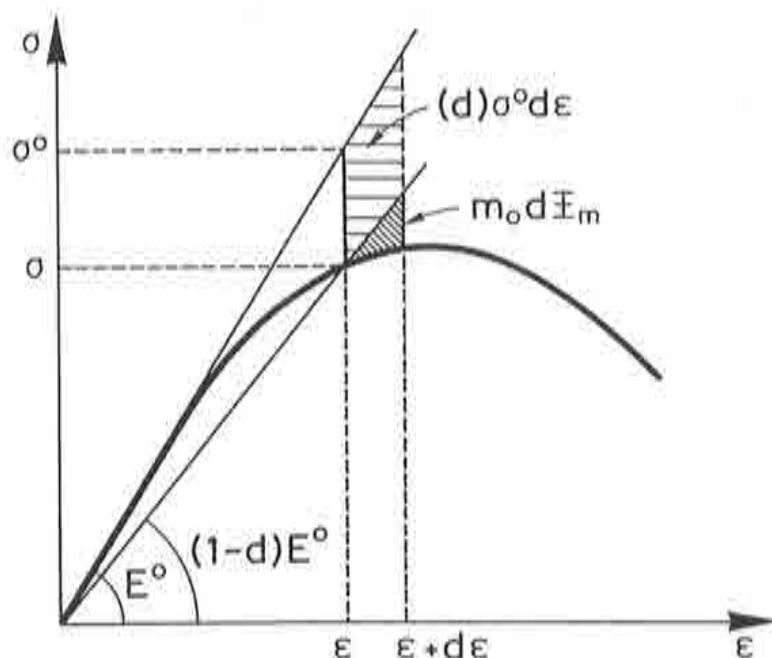


Figura 3.6 Desacoplamiento de la pérdida de energía δW_p .

$$W_p^0 = \frac{1}{2} \sigma^0 \varepsilon \quad ; \quad W_p = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (3.32)$$

donde $\sigma = (1 - d)\sigma^0$ tal como ya se ha visto en la relación (3.8). Diferenciando las expresiones de las dos energías potenciales, se obtienen sus variaciones infinitesimales como

$$dW_p^0 = \frac{1}{2} (d\sigma^0 \varepsilon + \sigma^0 d\varepsilon) = \frac{1}{2} (E^0 d\varepsilon \varepsilon + \sigma^0 d\varepsilon) = \sigma^0 d\varepsilon \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} dW_p &= \frac{1}{2} (\sigma d\varepsilon + d\sigma \varepsilon) = \frac{1}{2} [(1 - d) \sigma^0 d\varepsilon + (1 - d) d\sigma^0 \varepsilon - \sigma^0 \varepsilon d(d)] \\ &= (1 - d) \sigma^0 d\varepsilon - \frac{1}{2} \sigma^0 \varepsilon d(d) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Sin embargo, la ecuación (3.9), que define la variación temporal de la disipación, puede escribirse en la forma

$$d\Xi_m = \Psi_o d(d) = \frac{1}{2m_o} \sigma^0 \varepsilon d(d) \quad (3.35)$$

de donde

$$dW_p = (1 - d) \sigma^0 d\varepsilon - m_o d \Xi_m \quad (3.36)$$

En conclusión, debido a los fenómenos de degradación, se tiene una pérdida de energía potencial δW_p , cuya valor es

$$\delta W_p = dW_p^0 - dW_p = (d) \sigma^0 d\varepsilon + m_o d \Xi_m \quad (3.37)$$

Esta última relación está representada gráficamente en la Figura 3.6, donde pueden verse también, de modo separado, los dos términos energéticos. El primero corresponde a una situación de daño constante, mientras el segundo mide la disipación que se desarrolla durante este mismo incremento de deformación $d\varepsilon$, como efecto del aumento del daño.

La energía disipada acumulada hasta un instante de tiempo, caracterizado por un daño d y una tensión equivalente $\bar{\sigma}$, se obtiene siguiendo un procedimiento análogo al empleado para obtener el valor del parámetro A (véanse las relaciones 3.25-3.27) en la forma

$$\Xi_t = \int_{\bar{\sigma}^*}^{\bar{\sigma}} \frac{\bar{\sigma}^2}{2m_o n^2 E^0} \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} d\bar{\sigma} = \Xi_t^{max} \left[1 - (1 - d) \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^*} \frac{2 + \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^*} A}{2 + A} \right] \quad (3.38)$$

3.3.10 Matriz tangente del modelo de daño

I. Deducción de la matriz tangente

A partir de la relación (3.8), la variación virtual del tensor de tensiones y, finalmente, el tensor constitutivo tangente no simétrico \mathbf{C}^s del modelo de daño isótropo, pueden deducirse como

$$\delta\sigma = \mathbf{C}^s \delta\varepsilon + \delta\mathbf{C}^s \varepsilon; \quad \delta\mathbf{C}^s = \frac{\partial \mathbf{C}^s}{\partial d} \delta d = -\mathbf{C}^0 \delta d \quad (3.39)$$

$$\varepsilon = (\mathbf{C}^0)^{-1} \sigma^0 \Rightarrow \delta\sigma = (1 - d) \mathbf{C}^0 \delta\varepsilon - \sigma^0 \delta d \quad (3.40)$$

$$\delta\sigma = C^o \delta\varepsilon = \left[(1-d) I - \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \sigma^o \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma^o} \right] C^o \delta\varepsilon \quad (3.41)$$

$$C^o = \left[(1-d) I - \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \sigma^o \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma^o} \right] C^o = (I - D) C^o \quad (3.42)$$

$$D = dI + \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \sigma^o \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma^o} \quad (3.43)$$

En estas ecuaciones, I es la matriz idéntica del mismo orden que C^o y D es una matriz no simétrica que depende sólo del vector de tensiones no dañadas σ^o , puesto que la variable de daño también depende implícitamente de dicho vector de tensiones a través de la tensión equivalente $\bar{\sigma}$.

II. Cálculo de la matriz tangente

El cálculo de la matriz tangente supone encontrar los valores de todos los términos de la ecuación (3.44). Teniendo en cuenta la relación (3.24), se obtiene

$$d = G(\bar{\sigma}) = 1 - \frac{\bar{\sigma}^*}{\bar{\sigma}} e^{A(1-\frac{\bar{\sigma}^*}{\bar{\sigma}})} \Rightarrow \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} = (1-d) \left(\frac{1}{\bar{\sigma}} + \frac{A}{\bar{\sigma}^*} \right) \quad (3.44)$$

Por otra parte, como la tensión equivalente es función del tensor de tensiones principales $\sigma^{p,o}$, su derivada con respecto al vector de tensiones σ^o tiene la siguiente descomposición:

$$\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma^o} = \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma^{p,o}} \frac{\partial\sigma^{p,o}}{\partial\sigma^o} \quad (3.45)$$

El cálculo del primer factor se basa en la definición (3.11), de donde resulta

$$\bar{\sigma} = [1 + r(n-1)] \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^{p,o})^2} = [1 + r(n-1)] u_1 \quad (3.46)$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i^{p,o} \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i^{p,o}|} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^3 \sigma_i^{p,o}}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i^{p,o}|} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{u_2}{u_3} \quad (3.47)$$

donde

$$u_1 = \frac{\bar{\sigma}}{1+r(n-1)} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^{p,o})^2} \Rightarrow \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T = \frac{\sigma^{p,o}}{u_1} \quad (3.48)$$

$$u_2 = I_1 = \sum_{i=1}^3 \sigma_i^{p,o} \Rightarrow \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T = \mathbf{1}_3 \quad (3.49)$$

$$u_3 = \frac{I_1}{2r-1} = \sum_{i=1}^3 |\sigma_i^{p,o}| \Rightarrow \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T = \text{sign}(\sigma^{p,o}) \quad (3.50)$$

donde I_1 es el primer invariante del tensor de tensiones y $\mathbf{1}_3$ es el vector columna unidad de tres componentes. A partir de las ecuaciones anteriores pueden deducirse fácilmente las siguientes relaciones:

$$\left\{ \frac{\partial r}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T = \frac{\partial r}{\partial u_2} \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T + \frac{\partial r}{\partial u_3} \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T = \frac{1}{2u_3} \mathbf{1}_3 - \frac{u_2}{2u_3^2} \text{sign}(\sigma^{p,o}) \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T &= \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial u_1} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T \\ &= \frac{(n-1)u_1}{2u_3} \mathbf{1}_3 - \frac{(n-1)u_1u_2}{2u_3^2} \text{sign}(\sigma^{p,o}) + \frac{1+r(n-1)}{u_1} \sigma^{p,o} \\ &= \frac{(n-1)(2r-1)}{2[1+r(n-1)]} \frac{\bar{\sigma}}{I_1} [\mathbf{1}_3 - (2r-1)\text{sign}(\sigma^{p,o})] + \frac{[1+r(n-1)]^2}{\bar{\sigma}} \sigma^{p,o} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Con esto, sólo queda por determinar el segundo factor de la ecuación (3.45), por lo cual se escribe el vector de tensiones principales en la siguiente forma:

$$\sigma^{p,o} = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin(\theta) \\ \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{Bmatrix} + \frac{I_1}{3} \mathbf{1}_3 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \sin(\theta) + \frac{I_1}{3} \mathbf{1}_3 \quad (3.53)$$

donde J_2 y θ son las variables utilizadas en el Anexo 3-1, que desarrolla los vectores de flujo de Nayak-Zienkiewicz. Para el cálculo de la derivada del vector de tensiones principales $\sigma^{p,o}$ con respecto al vector de tensiones σ^o se

emplea un procedimiento completamente análogo, que parte de la relación (3.32) modificada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial \sigma^0} = \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma^0} + \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma^0} + \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma^0} = \mathbf{C} \mathbf{V} \quad (3.54)$$

Considerando las relaciones (3.34) se obtiene que la matriz \mathbf{V} contiene tres vectores linea y tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma^0} \\ \frac{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma^0} \\ \frac{\partial J_3}{\partial \sigma^0} \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

y, según las fórmulas (3.35), la matriz cuadrada \mathbf{C} tiene los componentes

$$\mathbf{C} = \{ \mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 \} \quad (3.56)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial I_1} = \frac{1}{3} \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{c}_2 &= \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial \theta} \frac{\operatorname{tg}(3\theta)}{(J_2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} [\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{tang}(3\theta) \cos(\theta)] \\ &= \frac{2}{\sqrt{3} \cos(3\theta)} \operatorname{sen}(\theta - 3\theta) \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{c}_3 &= \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial \theta} \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta)} \frac{1}{(J_2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{J_2 \cos(3\theta)} \cos(\theta) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Para concluir, el cálculo de la matriz de daño \mathbf{D} supone la realización de las siguientes operaciones matriciales:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= d \quad \mathbf{I} \quad + \quad \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \quad \sigma^0 \quad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^{p,0}} \quad \mathbf{C} \quad \mathbf{V} \\ (6 \times 6) &= (1 \times 1) \quad (6 \times 6) \quad + \quad (1 \times 1) \quad (6 \times 1) \quad \{[(1 \times 3) \quad (3 \times 3)] \quad (3 \times 6)\} \end{aligned} \quad (3.58)$$

donde se indican debajo las dimensiones de las matrices involucradas y, con los corchetes, el orden de multiplicación aconsejado para optimizar el esfuerzo de cálculo.

3.3.11 Direcciones de fisuración y aplastamiento

El modelo de daño descrito en este capítulo es isotrópico, es decir una vez un punto se ha dañado todos los componentes del tensor constitutivo se ven afectados por la misma reducción porcentual de la rigidez. Sin embargo, el daño es producido en general por una solicitud dominante, siendo muy raro que el punto se halle sometido a solicitudes triaxiales equilibradas entre sí.

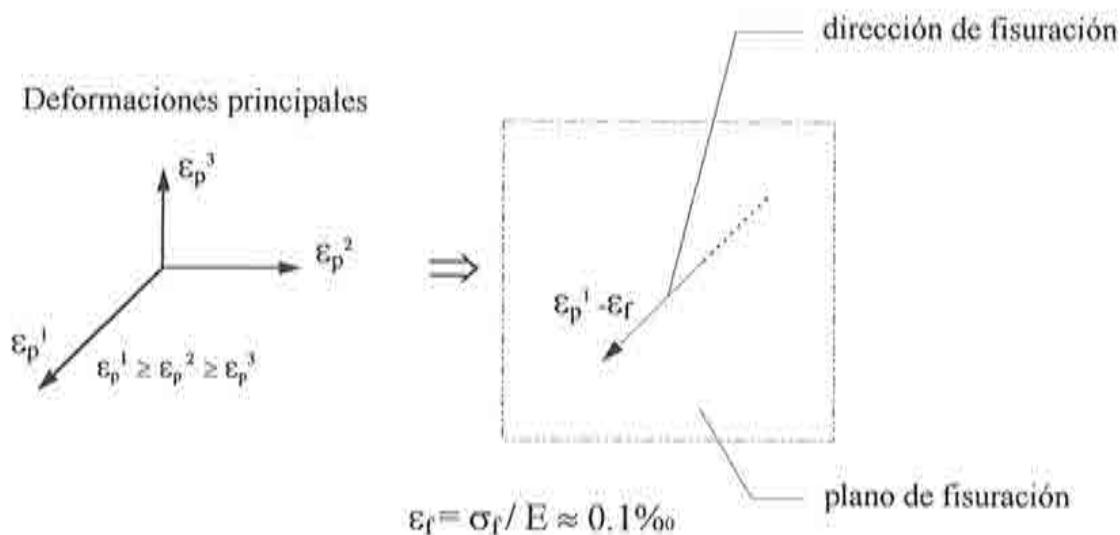


Figura 3.7 Obtención de la dirección de fisuración a partir de las deformaciones principales.

Esto hace pensar que es posible determinar cual es la orientación de la fisura si el daño ha sido producido por tracción o la dirección de aplastamiento, en el caso en que ha sido la compresión la causa de la degradación. En cada punto de integración que ha sufrido daño puede saberse si lo ha producido la tracción o la compresión en función del valor de la variable r (que interviene en la definición del umbral de daño) dependiendo si r es mayor o menor que 0.55 (ver el Apartado 3.3.3). Calculando las direcciones principales de tensor de deformación total ϵ ya se tiene una buena aproximación de la dirección de la fisuración o bien del aplastamiento del material. Éstas corresponderán a la deformación principal máxima si se trata de fisuración o la deformación principal mínima si por el contrario domina la compresión.

3.4 ANÁLISIS DINÁMICO

3.4.1 Modelo de daño visco-elástico

En cálculos dinámicos, el movimiento de una estructura sufre amortiguamientos por rozamiento interno y por efectos viscosos dentro del material. En el rango no lineal estas fuerzas de amortiguamiento no se mantienen al mismo nivel que en el caso que el material está sin dañar, sino decrecen a medida que el daño estructural aumenta, hasta llegar a desaparecer en un punto completamente dañado (Barbat et al. 1993). Esto ha llevado a la formulación del modelo de daño visco-elástico que incluye el fenómeno del amortiguamiento. En el Anexo 3-2 se encuentra la descripción de la integración en el tiempo de las ecuaciones de movimiento correspondientes a problemas dinámicos mediante el método de Newmark. En dicho anexo se explican ampliamente todas las notaciones utilizadas a continuación, así como la deducción del algoritmo dinámico tangente desarrollado a partir del modelo visco-elástico.

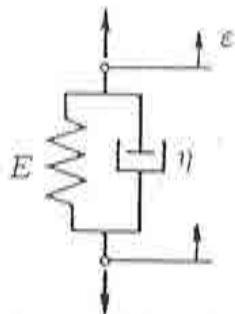


Figure 3.7 Modelo de Kelvin.

El efecto de amortiguamiento del movimiento de la estructura se simula a través del modelo de Kelvin que consiste en colocar un amortiguador en paralelo con la estructura hiperelástica estudiada anteriormente (véase la Figura 3.7). Como la estructura y el amortiguador mantienen la misma deformación ϵ , la tensión total del sistema será la suma de una tensión estructural σ^{str} y una tensión viscosa σ^{vis} que, según la ley de Newton, tiene la siguiente expresión (Barbat et al. 1995b):

$$\sigma = \sigma^{str} + \sigma^{vis} = C^s \epsilon + \eta^s \dot{\epsilon} \quad (3.59)$$

donde η^s es la matriz constitutiva viscosa secante definida por

$$\eta^s = \frac{\eta}{E^s} C^s = \alpha C^s \quad (3.60)$$

En esta ecuación η es el parámetro viscoso unidimensional y α el tiempo de retardo, definido como el tiempo necesario para que el sistema estructura-amortiguador llegue a una configuración estable en el estado no dañado.

En estos supuestos, el comportamiento del sistema bajo variaciones virtuales de las variables libres (deformaciones y velocidades de deformación) puede obtenerse como

$$\begin{aligned}\delta\sigma &= \delta\sigma^{ste} + \delta\sigma^{vis} = C^D \delta\epsilon + \alpha (C^S \delta\dot{\epsilon} + \delta C^S \dot{\epsilon}) \\ &= C^D \delta\epsilon + \alpha (C^S \delta\dot{\epsilon} - C^0 \dot{\epsilon} \delta d)\end{aligned}\quad (3.61)$$

Introduciendo la notación $\sigma_v^0 = \alpha C^0 \dot{\epsilon}$ y utilizando la relación (3.42), la relación incremental visco-elástica se obtiene como

$$\delta\sigma = C_v^D \delta\epsilon + \alpha C^S \delta\dot{\epsilon} = (I - D_v) C^0 \delta\epsilon + \alpha C^S \delta\dot{\epsilon} \quad (3.62)$$

donde D_v toma la siguiente forma (análoga a la relación 3.43):

$$D_v = dI + \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} (\sigma^0 + \sigma_v^0) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^0} \quad (3.63)$$

Siguiéndose el mismo procedimiento que en el caso de las fuerzas iniciales y elásticas pueden deducirse las expresiones de la matriz constitutiva viscosa generalizada $\hat{\eta}$ (para elementos de barra 2D, 3D y de láminas de revolución) y del vector elemental de fuerzas viscosas \mathbf{F}_v , como

$$\hat{\eta} = \int_A S^T \eta S dA \Rightarrow \mathbf{F}_v = \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\sigma}^{vis} dx = \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\eta} \mathbf{B} dx \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{A} \dot{\mathbf{a}} \quad (3.64)$$

donde \mathbf{A} es la matriz de amortiguamiento de un elemento finito unidimensional que se va a utilizar en el análisis dinámico.

El modelo de Kelvin, junto con el modelo de daño propuesto, permite la descomposición de la tensión total actuando en un punto de la estructura en una parte hiperelástica y una parte viscosa. Estos términos introducidos dentro de un esquema de elementos finitos producen las matrices clásicas de amortiguamiento y de rigidez.

3.4.2 Integración temporal de las ecuaciones dinámicas

La ecuación de equilibrio dinámico, correspondiente a este modelo de daño viscoso, escrita para el instante $t = t_{i+1}$, toma la siguiente forma, análoga a la relación (Barbat y Canet 1989 y A3-2.11, Anexo 3-2):

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_{i+1} + \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1} dx = \mathbf{f}(t_{i+1}) \quad (3.65)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1}$ es el vector de tensiones seccionales totales que puede descomponerse en una parte estructural y otra parte viscosa. Según las relaciones (3.59) y (3.61), pueden obtenerse las siguientes expresiones para este vector y para su incremento temporal:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^{str} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^{vis} = \hat{\mathbf{C}}^b \mathbf{B} \mathbf{a}_i + \hat{\boldsymbol{\eta}}^s \mathbf{B} \dot{\mathbf{a}}_i \quad (3.66)$$

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1} = \hat{\mathbf{C}}_v^D \mathbf{B} \Delta \mathbf{a}_{i+1} + \hat{\boldsymbol{\eta}}^s \mathbf{B} \Delta \dot{\mathbf{a}}_{i+1} \quad (3.67)$$

donde $(\hat{}) = \int_A S^T (\cdot) S dA$ son matrices seccionales en el caso de elementos finitos de barra o lámina de revolución. Si se subsituye la relación $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i + \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1}$ junto con las relaciones (3-2.24 a 3-2.26) del Anexo 3-2 de este capítulo y (3.66-3.67) en la ecuación (3.65), la ecuación de equilibrio se convierte en

$$\hat{\mathbf{K}} \Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(1)} = \hat{\mathbf{f}}_{i+1}^{(1)} \quad (3.68)$$

donde el índice superior indica el número de la iteración. Se han introducido las siguientes notaciones:

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{A} + \mathbf{K}_r \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{i+1}^{(1)} &= \mathbf{f}(t_{i+1}) + \mathbf{M} \left[\frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{a}}_i + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}_i \right] \\ &\quad - \mathbf{A} \left[\left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{a}}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{a}}_i \right] - \mathbf{K}_s \mathbf{a}_i \end{aligned} \quad (3.70)$$

En las relaciones de arriba aparecen conjuntamente tanto matrices secantes como tangentes, cuyas expresiones son

Tabla 3.1 Algoritmo de integración de las ecuaciones dinámicas.

A. Primera iteración (paso desde el incremento de tiempo i a i+1)

– se actualizan

$$\boxed{K_S = \int_{\ell} B^T \hat{C}^S B dx ; \quad K_T = \int_{\ell} B^T \hat{C}_v^D B dx ; \quad A = \int_{\ell} B^T \hat{\eta}^S B dx}$$

– se recalculan

$$\boxed{\hat{K} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} A + K_T}$$

$$\boxed{\hat{f}_{i+1}^{(0)} = f(t_{i+1}) + M \left[\frac{1}{\beta \Delta t} \ddot{a}_i + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \dot{a}_i \right] - A \left[\left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{a}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{a}_i \right] - K_S a_i}$$

– se calculan las primeras aproximaciones para el incremento i+1:

$$\boxed{\Delta a_{i+1}^{(0)} = \hat{K}^{-1} \hat{f}_{i+1}^{(0)}}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{i+1}^{(0)} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta a_{i+1}^{(0)} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{a}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{a}_i \\ \dot{a}_{i+1}^{(0)} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta a_{i+1}^{(0)} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{a}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{a}_i \\ a_{i+1}^{(0)} &= \Delta a_{i+1}^{(0)} + a_i \end{aligned}$$

B. Siguientes iteraciones (se busca el equilibrio para el incremento i+1)

I. se actualizan

$$\boxed{K_S = \int_{\ell} B^T \hat{C}^S B dx ; \quad K_T = \int_{\ell} B^T \hat{C}_v^D B dx ; \quad A = \int_{\ell} B^T \hat{\eta}^S B dx}$$

$$\boxed{\hat{K} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} A + K_T}$$

$$\boxed{\hat{f}_{i+1}^{(j+1)} = \Psi_{i+1}^{(j)} = f(t_{i+1}) - M \ddot{a}_{i+1}^{(j)} - A \dot{a}_{i+1}^{(j)} - K_S a_{i+1}^{(j)}}$$

II. Si $\Psi_{i+1}^{(j)}$ no es suficientemente pequeño, se calcula:

$$\boxed{\delta a_{i+1}^{(j+1)} = \hat{K}^{-1} \hat{f}_{i+1}^{(j+1)}}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{i+1}^{(j+1)} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \delta a_{i+1}^{(j+1)} + \ddot{a}_{i+1}^{(j)} \\ \dot{a}_{i+1}^{(j+1)} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \delta a_{i+1}^{(j+1)} + \dot{a}_{i+1}^{(j)} \\ a_{i+1}^{(j+1)} &= \delta a_{i+1}^{(j+1)} + a_{i+1}^{(j)} \end{aligned}$$

III. Volver al paso I.

$$\mathbf{K}_s = \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}}^s \mathbf{B} dx ; \quad \mathbf{K}_r = \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}}_v^a \mathbf{B} dx ; \quad \mathbf{A} = \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\eta}}^s \mathbf{B} dx \quad (3.71)$$

y las tres dependen del nivel de daño, es decir, son variables en el tiempo.

Resolviendo el sistema linealizado (3.68) se obtienen los incrementos de desplazamientos $\Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(1)}$ y luego todas las demás variables, que corresponden a la primera iteración del paso de tiempo ($i+1$). Si el nivel de degradación hubiera cambiado, se actualizan las matrices (3.71) y esto implica la aparición probable de unas fuerzas de desequilibrio dinámico. Estas son las fuerzas residuales $\Psi_{i+1}^{(1)}$, cuyas valores se obtienen por la diferencia entre el estado tensional previsto $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i + \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1}^{(1)}$, y el estado tensional real $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1}^{(1)}$, calculado utilizando las matrices actualizadas de amortiguamiento y de rigidez

$$\begin{aligned} \Psi_{i+1}^{(1)} &= \mathbf{f}(t_{i+1}) - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(1)} - \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1}^{(1)} dx \\ &= \int_{\ell} \mathbf{B}^T \left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i + \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1}^{(1)} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1}^{(1)} \right) dx \end{aligned} \quad (3.72)$$

Esta fuerza residual se aplica como segundo miembro de la ecuación (3.68) y resolviendo luego el sistema después de haber actualizado la matriz $\hat{\mathbf{K}}$, se obtiene una nueva corrección del incremento de desplazamientos. Este proceso iterativo finaliza cuando la norma de las fuerzas residuales se reduce por debajo de la tolerancia impuesta. En la Tabla 3.1 se describe el diagrama de flujo del algoritmo de integración temporal utilizado en la monografía.

3.5 FACTOR DE RETENCIÓN DEL CORTE

Es conocido que la capacidad de transferir y resistir fuerzas cortantes no siempre está condicionada por el estado de fisuración del material. De hecho se tiene evidencia experimental (*ACI-ASCE Committee 426*, 1973) de que en vigas sometidas a momentos flectores y esfuerzos cortantes la capacidad cortante es notablemente mayor que la que correspondería solamente a la zona comprimida. Esto se debe a la fricción entre las superficies de la fisura y al fenómeno de "interrelación" de los áridos que está generado por su falta de homogenidad en lo que respecta el tamaño de los granos del hormigón.

En Walraven (1978) se identifican varios mecanismos de transferencia de la tensión cortante que no precisan de armadura transversal. Uno de los más

importantes es la transferencia de cortante en la interfaz de la fisura por fricción, lo que genera una capacidad resistente a corte entre dos superficies deslizando una sobre otra. Esta capacidad residual es función de la geometría y el estado de la superficie de contacto y es independiente de las características de material y actúa incluso en una fisura abierta.

Esta fenomenología llevada al modelo de daño isótropo en su forma clásica descrita en este capítulo se materializa en la introducción del factor de retención de corte β que afecta las tensiones cortantes degradadas como

$$\sigma_c = (1 - \beta d)\sigma_c^0 \quad (3.63)$$

El factor β es un escalar positivo menor que la unidad que asegura que cuando el valor del índice de daño d tiende a la unidad las tensiones de corte no se anulan, sino tienden a una fracción de las tensiones no dañadas σ_c^0 .

3.6 ÍNDICE GLOBAL DE DAÑO

Los modelos de daño pueden clasificarse en dos grupos: por una parte, los utilizados mayoritariamente en la ingeniería sísmica, para estructuras de barras, que evalúan el índice de daño a partir de magnitudes como esfuerzos seccionales, ductilidad o energía potencial de los elementos estructurales; el segundo grupo lo constituyen los modelos de daño continuo que describen directamente el estado del material de un punto material y que están fundamentados en los principios de la termodinámica, tal como el modelo descrito en los apartados anteriores.

La necesidad de utilizar índices de daño ha sido reconocida desde hace ya algún tiempo en el ámbito de la ingeniería sísmica, en el marco de la cual se han desarrollado diversas fórmulas para evaluar el estado de elementos estructurales de barras (Lybas y Sozen 1977; Banon et al. 1981; Meyer y Roufael 1983; Park et al. 1984). Dichas fórmulas se basan en conceptos como deformación plástica cumulativa en cargas cíclicas (Banon et al. 1981), relación entre el momento flector máximo y el alcanzado durante el terremoto (Lybas y Sozen 1977) o la muy utilizada en la actualidad función de daño de Park y Ang (1985), la cual relaciona la ductilidad de los elementos estructurales con la energía disipada en cargas cíclicas. Todos estos índices están adecuados al cálculo sísmico y no son aplicables directamente a otros tipos de análisis.

En las definiciones de los índices globales de daño de toda una estructura realizadas en estudios anteriores se ha partido casi siempre de la idea de promediar los índices así llamados "locales" de las partes componentes de las estructuras con diferentes pesos específicos como, por ejemplo, el volumen del elemento, el porcentaje de la energía potencial almacenada en cada elemento con respecto

a la total, la importancia asignada a juicio de expertos al elemento estructural e incluso con si mismos (Bracci et al. 1989; Chung et al. 1988; Aguiar et al. 1993; Kunnath et al. 1989; Mørk 1992; Park et al. 1984, 1987, 1988; Rahman y Grigorin 1994, 1997; Reihorn et al. 1989; Rodriguez 1990; Rodriguez y Çakmak 1990; Rodriguez et al. 1991; Skjærbaek et al. 1996, 1997; Stephens y Yao 1987; Williams y Sexsmith 1995). DiPasquale y Çakmak (1987, 1988, 1990) proponen el primer índice global de daño de una estructura entera basado en conceptos no empíricos, relacionandolo con el deterioro del período fundamental de la estructura, lo que le da una base objetiva (Hassotis y Jeong 1993). Sin embargo, no es posible aplicar este procedimiento de cálculo a sólo una zona de la estructura y, además dicho índice tiene la dificultad añadida de requerir la evaluación del período fundamental de la estructura en cada instante, lo que presenta dificultades y es costoso puesto que necesita determinar la expresión de la matriz de rigidez tangente. Otros autores proponen medir el ablandamiento del material como indicador del deterioro (Nielsen y Çakmak 1991, 1992; Nielsen et al. 1992, 1995).

El punto de partida para deducir un índice global de daño estructural en esta monografía es la ecuación (3.4), que relaciona la energía libre real del material degradado Ψ con la energía libre hipotéticamente elástica Ψ_0 . La idea del índice global propuesta en esta monografía consiste en integrar la relación (3.4) sobre toda la masa de la estructura. Dicha integral se transforma en otra sobre el volumen, teniendo en cuenta que $dm = m_0 dV$ con lo cual se obtiene

$$\Psi = (1 - d)\Psi_0 \Rightarrow W_p = \int_V m_0 \Psi dV = \int_V (1 - d)m_0 \Psi_0 dV = (1 - D)W_p^0 \quad (3.73)$$

donde D es el índice de daño global, $W_p^0 = \int_V m_0 \Psi_0 dV$ es la energía potencial total de la estructura correspondiente al caso que ésta no estuviera dañada y W_p es la energía potencial total correspondiente al caso real, es decir, en el supuesto que hayan ocurrido procesos de daño. Resolviendo la ecuación (3.73), se obtiene la siguiente expresión final para D :

$$D = 1 - \frac{W_p}{W_p^0} = \frac{\int_V m_0 \Psi_0 dV - \int_V (1 - d)m_0 \Psi_0 dV}{\int_V m_0 \Psi_0 dV} = \frac{\int_V d m_0 \Psi_0 dV}{\int_V m_0 \Psi_0 dV} \quad (3.74)$$

Si se requiere calcular el índice global de daño sólo para una parte de la estructura (como, por ejemplo, un piso, algún grupo de pilares, etc), la integración se efectúa únicamente sobre el volumen de la parte que interesa.

Dentro de un esquema de elementos finitos, en el caso de una estructura discretizada en barras con capas (ver Capítulo 2), el índice global de daño D_p

de un punto de integración numérica se obtiene de la misma manera que el índice global de daño total, sólo que esta vez se integra sobre la superficie de la sección transversal de la barra, con $m_0 \Psi_0 = \frac{1}{2} \hat{\epsilon}^T \hat{\sigma}^0$ y $\hat{\epsilon} = S \hat{\epsilon}$

$$D_p = 1 - \frac{\hat{\epsilon}^T \hat{\sigma}}{\hat{\epsilon}^T \hat{\sigma}^0}; \quad \hat{\sigma} = \int_A S^T \sigma dA = \int_A (1-d) S^T \sigma^0 dA \quad (3.75)$$

donde $\hat{\epsilon}$ y $\hat{\sigma}$ son, respectivamente, las deformaciones y los esfuerzos seccionales en dicho punto de la barra. En el caso de estructuras modelizadas mediante elementos finitos de barra el índice global de daño toma la siguiente forma particular:

$$D = 1 - \frac{\sum_e \mathbf{a}^T \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\sigma} dx}{\sum_e \mathbf{a}^T \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\sigma}^0 dx} \quad (3.76)$$

En el caso de elementos tridimensionales de sólido, la expresión (3.76) es válida cambiando el dominio de integración al volumen del elemento y considerando el vector de tensiones de Cauchy (ver el Apartado 2.6). Dicha expresión, que depende únicamente de las tensiones no lineales calculadas por el modelo constitutivo y de las hipotéticamente lineales, es absolutamente general, y puede utilizarse dentro de cualquier estrategia de solución de problemas estructurales no lineales.

En conclusión, el índice global de daño se define como la relación entre la energía potencial que la estructura no puede almacenar en el estado poselástico y la energía potencial que la estructura almacenaría si hubiese mantenido sus características elásticas iniciales.

En lo que a la objetividad se refiere, el índice global de daño propuesto aquí tiene la misma objetividad que la respuesta estructural, puesto que se calcula a través de integrales sobre los volúmenes de los elementos de la estructura (ver el Apartado 3.3.8). Esto hace que el índice global dependa de la energía disipada en toda la estructura o parte de la misma que, a su vez, no depende del tamaño de la malla de elementos finitos utilizada en el análisis. Lógicamente, si la respuesta estructural es objetiva, también lo será el índice global de daño calculado según la metodología propuesta en este apartado.

El comportamiento resistente de una estructura es determinado por un conjunto de factores que en una modelización por elementos finitos se hallan sintetizados en los términos de la matriz de rigidez. Dichos términos representan cada uno la fuerza que se debe aplicar en una cierta dirección para obtenerse un desplazamiento unitario en otra o la misma dirección.

Todo esto lleva a la idea de que la respuesta estructural está altamente condicionada por la solicitación aplicada. La implicación inmediata es que el índice global de daño es a su vez una medida de la pérdida de rigidez de la estructura con respecto a la carga que ha determinado el daño. Si después de descargar la estructura se le aplica otra carga de características diferentes es posible obtener un nivel de daño global diferente, mayor o menor, en función de si la nueva carga necesita más o menos la contribución de los términos de rigidez afectados por la primera carga aplicada, aun siendo irreversible el fenómeno del daño.

Teóricamente es posible imaginar una configuración estructural tal que existan cargas completamente independientes desde el punto de vista del daño, es decir que el daño producido en un caso no repercute nada en otro. Esta dificultad añadida imposibilita la descripción general del estado de una estructura a través del índice global de daño independientemente de la carga que lo ha inducido.

En la realidad suele existir un nivel de correlación no nulo entre las diversas cargas a las que se encuentra sometida una estructura. Por ejemplo, un daño producido en un edificio por un terremoto (cargas horizontales) suele afectar la respuesta estructural bajo las cargas de servicio (cargas verticales), pero casi nunca se translada íntegramente el nivel de daño o, lo que lo mismo, el índice global de daño no será el mismo cambiando de tipo de carga.

Las propiedades del índice global de daño calculado según la metodología descrita en este capítulo permiten estudiar la evolución de la capacidad estructural a lo largo de la historia de carga de estructuras complejas. El índice global de daño indica siempre, de manera sintética, qué parte de la resistencia inicial de la estructura frente a una determinada carga ha sido deteriorada durante el proceso debido a efectos inelásticos en los materiales constituyentes.

3.7 EJEMPLOS DE VALIDACIÓN

3.7.1 Análisis de objetividad

El objetivo de este análisis es analizar un mismo problema mediante tres mallas distintas y comparar los resultados para averiguar si hay o no dependencia de la malla, como en la mayoría de los modelos de ablandamiento del material. Este test viene a comprobar las consideraciones teóricas de los Apartados 3.3.8 y 3.6 sobre la objetividad de la respuesta y del índice global de daño.

El problema considerado es el de una viga biarticulada solicitada con una fuerza concentrada en el centro de la luz. Se han analizado tres mallas de elementos finitos de barra 2D discretizados por capas, una de 10 elementos, otra de 20 elementos y la última de 40 elementos finitos. Sobre la barra han sido aplicados desplazamientos verticales para poder seguir con facilidad su historia

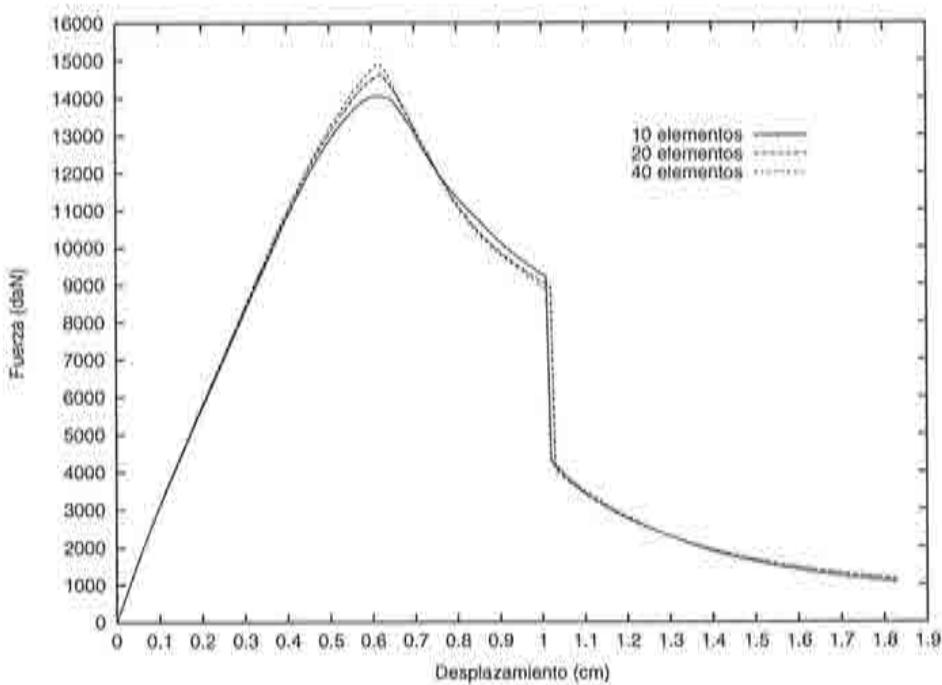


Figura 3.8 Respuesta fuerza-flecha para tres mallas distintas.

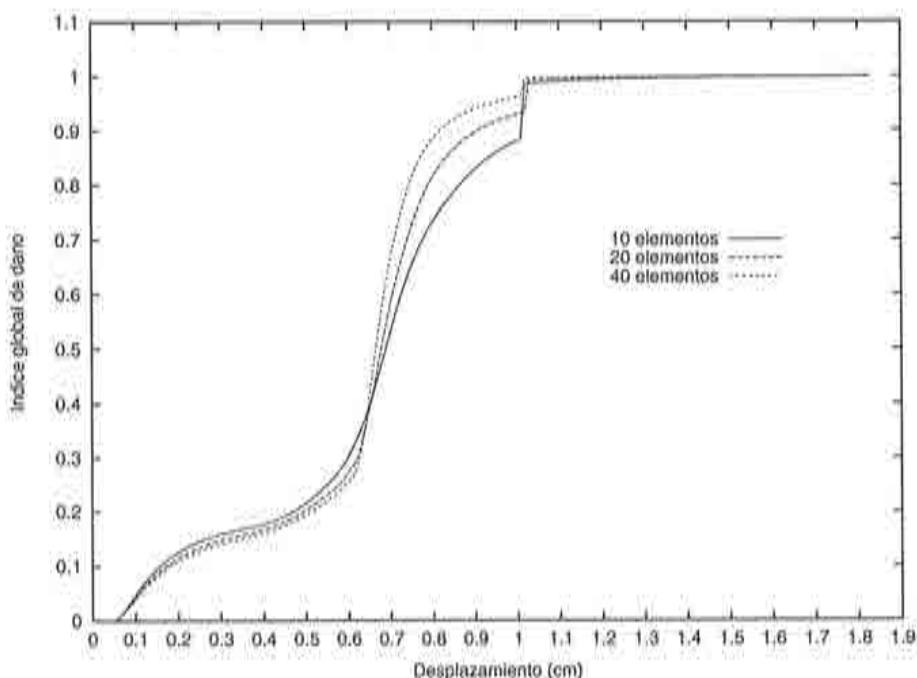


Figura 3.9 Evolución de los índices globales de daño en función de la flecha para las tres mallas analizadas.

de carga hasta el colapso, que corresponde al agotamiento de su capacidad de resistencia, donde la fuerza aplicada se aproxima a cero. Los elementos tienen 19 capas de hormigón y una capa de acero del lado que trabaja en tracción, es decir del lado opuesto la carga.

La Figura 3.8 muestra la respuesta de la viga cargada con desplazamientos para las tres mallas distintas de elementos finitos. Se observa que el modelo de daño es prácticamente objetivo con respecto al tamaño de los elementos finitos utilizados, en lo que a la respuesta fuerza-flecha se refiere. Las diferencias observadas en el pico de la fuerza y en la parte decreciente antes de la caída de la fuerza se deben a hecho que cuanto más fina es la malla más cercano está un punto de integración del punto de aplicación de la carga (que también coincide con el momento flector máximo) y mejor se puede determinar el pico real de la fuerza equivalente al desplazamiento impuesto.

La mencionada viga biarticulada tiene dos tipos de comportamiento muy distintos en su historia de deformación. En el primero trabaja principalmente en flexión y se extiende hasta un desplazamiento en el centro de la luz de 1 cm y en el segundo, después de la pérdida total de rigidez a flexión, trabaja en tracción dado que en el centro de la luz se forma una rótula y la estructura se transforma en isostática al perder un grado de libertad. Cabe destacar también que el área debajo de cada una de las tres curvas fuerza-desplazamiento de la Figura 3.8 es la misma lo que significa que en todos los casos la energía disipada es constante, es decir la energía total disipada es independiente de la malla.

En la Figura 3.9 puede verse una comparación entre los índices globales de daño de la viga para las tres mallas. Se observa que en los tramos donde las curvas fuerza-desplazamiento se cruzan, los índices globales de daño también lo hacen respetando siempre la siguiente regla: a mayor fuerza para un desplazamiento dado menor índice global de daño. Las diferencias máximas entre los tres índices globales se dan antes de la caída correspondiente a la pérdida total de rigidez a flexión y se deben al hecho que el índice global de daño es una medida de la energía disipada por la estructura hasta ese momento. En el momento de dicha caída se cierran las tres áreas y los tres índices globales de daño vuelven a coincidir.

3.7.2 Validación del factor de retención de corte

La Figura 3.10 muestra la viga de hormigón armado ensayada experimentalmente por Walvern (1978). Esta viga no tiene armadura inclinada de cortante y, durante los ensayos, se observó que el fallo se debe precisamente a los esfuerzos cortantes, dado que se produjeron fisuras diagonales en la zona cercana a los puntos de aplicación de la fuerza y la carga última fue de unos 70 KN. La fuerza exterior se aplica monótonamente y se miden los desplazamientos en el

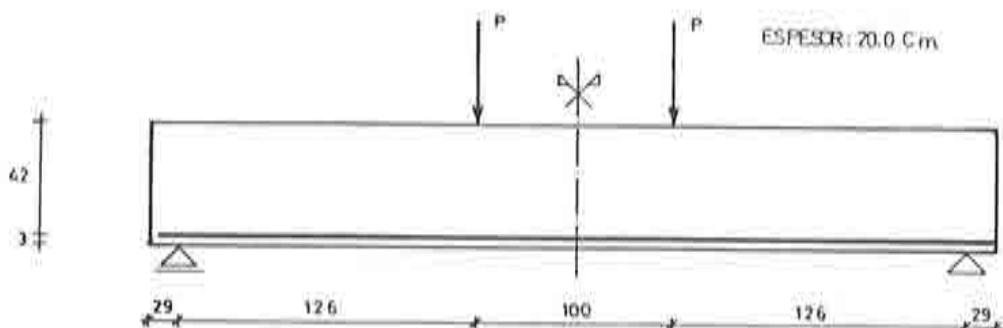


Figura 3.10 Geometría de la viga. Ensayo a flexión en cuatro puntos.

misimo punto de aplicación dela fuerza.

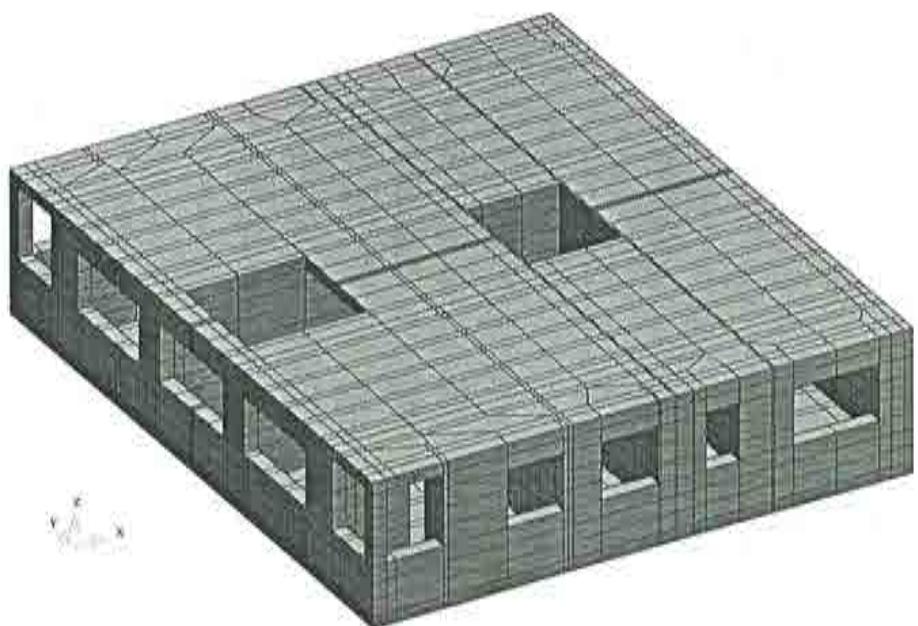
El problema se ha reproducido numéricamente modelizando la mitad de la viga aprovechando la simetría de la geometría y de la carga. Se ha utilizando una malla de 80 elementos finitos isoparamétricos tridimensionales de 20 nodos, dispuestos $16 \times 5 \times 1$ en longitud, altura y ancho de la viga. El espesor del elemento es de 20 cm, igual al de la viga ensayada. El refuerzo de acero se añadió a la penúltima fila de elementos de abajo en su posición exacta.

Las propiedades de material del hormigón consideradas son: módulo de Young $E=28\text{GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.2$, resistencia a tracción uniaxial $f_t=2.5\text{MPa}$, resistencia a compresión uniaxial $f_c=30\text{MPa}$ y la energía de fractura $G_f=50\text{N/m}$. El acero tiene las siguientes propiedades de material: $E=170\text{GPa}$, tensión de fluencia $\sigma_y=440\text{MPa}$, deformación de rotura $\varepsilon_u=0.8\%$ y parámetro de endurecimiento $H=20\text{GPa}$. El valor del módulo de elasticidad del acero se ajustó al valor mencionado, más bajo que el valor medido de $E=206\text{GPa}$, para poder ajustar la pendiente elástica de la curva numérica fuerza-desplazamiento a la experimental. La explicación encontrada es que al suponer adherencia perfecta entre el hormigón y el acero se introduce una rigidez artificial en desacuerdo con la realidad. La disminución del módulo de elasticidad del acero rectifica la rigidez global y permite seguir la curva experimental incluso en el dominio no elástico.

Este ejemplo permite evaluar la efectividad del factor de retención de corte dado que en el punto de aplicación de la fuerza se producen a la vez los valores máximos del momento flector y del esfuerzo cortante, situación relativamente poco frecuente en estructuras continuas. Debido a este hecho, en dicho punto ocurría el fallo estructural que, además, está determinado por el agotamiento de la resistencia a corte dado que el momento es constante y máximo en toda una zona, mientras sólo en el punto de fallo mencionado es esfuerzo cortante es máximo.

Metodología de evaluación del deterioro en estructuras de hormigón armado

**A.D. Hanganu
A.H. Barbat
E. Oñate**



**Metodología de evaluación del deterioro
en estructuras de hormigón armado**

**Metodología de evaluación del deterioro
en estructuras de hormigón armado**

**Metodología de evaluación del deterioro
en estructuras de hormigón armado**

A.D. Hanganu A.H. Barbat E. Oñate

A.D. Hanganu A.H. Barbat E. Oñate

A.D. Hanganu A.H. Barbat E. Oñate

39

39

39

Metodología de evaluación del deterioro en estructuras de hormigón armado

Alex D. Hanganu

Alex H. Barbat

Eugenio Oñate

Monografía CIMNE N° 39, Julio 1997

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España

Diseño de la cubierta: Jordi Pallí

Primera Edición, Julio 1997

© Los autores

Edita:

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería
Edificio C1, Campus Norte UPC
Gran Capitán, s/n
08034 Barcelona, España

ISBN: 84-89925-01-1

Depósito Legal: B-35360-97

ÍNDICE

1 INTRODUCCIÓN	1
2 TECNOLOGÍA DE ELEMENTOS FINITOS	9
2.1 Introducción	9
2.2 Ecuaciones de equilibrio del sólido continuo	10
2.3 Elemento finito de barra 2D de Timoshenko	12
2.3.1 Hipótesis de la formulación de viga de Timoshenko	12
2.3.2 Campo de desplazamientos	13
2.3.3 Campo de deformación y aceleración	14
2.3.4 Campo de tensión e inercia	15
2.3.5 Campos de esfuerzos seccionales	16
2.3.6 Discretización del medio continuo en elementos finitos	19
2.3.7 Funciones de forma y relaciones derivadas	19
2.3.8 Ecuaciones de equilibrio para un elemento finito	22
2.3.9 Sistema global de ecuaciones	23
2.4 Elemento finito de lámina de revolución	24
2.5 Elemento finito de barra 3D	29
2.6 Elemento de sólido 3D de hormigón armado	35
3 MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO ISÓTROPO	41
3.1 El concepto de daño	41
3.2 Consideraciones sobre los modelos de daño	44
3.3 Características del modelo	45
3.3.1 Consideraciones energéticas	45
3.3.2 Inecuación de Clasius-Planck. Disipación mecánica	45
3.3.3 Criterio umbral de degradación o daño	46
3.3.4 Regla de evolución de la variable interna	48
3.3.5 Condición de consistencia del daño	48
3.3.6 Condición de carga/descarga	50
3.3.7 Particularización de la función $G(\bar{\sigma})$	50
3.3.8 Obtención del parámetro A	51
3.3.9 Aspectos energéticos del fenómeno de degradación	53

METODOLOGÍA DE EVALUACIÓN DEL DETERIORO EN ESTRUCTURAS

3.3.10	Matriz tangente del modelo de daño	54
3.3.11	Direcciones de fisuración y aplastamiento	58
3.4	Análisis dinámico	59
3.4.1	Modelo de daño visco-elástico	59
3.4.2	Integración temporal de las ecuaciones dinámicas	61
3.5	Factor de retención del corte	63
3.6	Índice global de daño	64
3.7	Ejemplos de validación	66
3.7.1	Análisis de objetividad	66
3.7.2	Validación del factor de retención de corte	68
Anexo 3-1 CONCEPTOS DE ELASTO-PLASTICIDAD		75
1	Introducción	75
2	Conceptos de plasticidad general	75
2.1	Función de fluencia	77
2.2	Descomposición de la deformación total. Regla de flujo	77
2.3	Superficie de carga plástica. Edurecimiento plástico	78
2.4	Relación tensión-deformación generalizada	79
3	Vectores de flujo de Nayak-Zienkiewicz	81
Anexo 3-2 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DINÁMICO. MÉTODO DE NEWMARK		85
1	Ecuaciones de diferencias finitas en el tiempo	85
2	Ánalisis lineal	87
3	Aproximación y estabilidad	89
4	Análisis no lineal - Método de la rigidez inicial	91
4 APLICACIÓN DEL ÍNDICE GLOBAL DE DAÑO AL ESTUDIO DE PATOLOGÍAS EN EDIFICIOS		95
4.1	Estructuras porticadas	95
4.1.1	Introducción	95
4.1.2	Pórtico plano sometido a acciones estáticas y dinámicas	95
4.1.3	Pórtico tridimensional sometido a una acción sísmica	104
4.2	Edificios de viviendas	107
4.2.1	Introducción	107
4.2.2	Descripción de la estructura	109
4.2.3	Resultados	109

INDICE

5 APPLICACIÓN DEL ÍNDICE GLOBAL DE DAÑO AL ESTUDIO DE LA SEGURIDAD DE EDIFICIOS DE CONTENCIÓN DE CENTRALES NUCLEARES	117
5.1 Objetivos y alcance del estudio	117
5.2 Descripción de la estructura	119
5.3 Análisis de revolución	121
5.3.1 Análisis estático	121
5.3.2 Análisis dinámico	122
5.4 Metodología del análisis tridimensional	125
5.4.1 Características del modelo de cálculo	126
5.4.2 Modelo de elementos finitos	128
5.5 Calibración del modelo	130
5.6 Efecto de la losa de cimentación sobre la presión de fallo	133
5.7 Estudio dinámico	146
5.7.1 Presión interna dinámica	146
5.7.2 Análisis sísmico	146
5.8 Efecto de la carga térmica	149
5.8.1 Introducción	149
5.8.2 Tratamiento numérico del efecto de la temperatura	151
5.8.3 Definición de la acción térmica	152
5.8.4 Resultados	153
5.9 Estudio probabilista de la presión de fallo	159
5.10 Conclusiones	165
Anexo 5-1 SISTEMA DE POSTESADO EN UN EDIFICIO DE CONTENCIÓN	167
1 Introducción	167
2 Evaluación de las pérdidas de fuerza de pretensado	168
3 Cálculo de las fuerzas de tensión	171
3.1 Cables horizontales	171
3.2 Cables verticales	174
4 Cálculo de las presiones equivalentes	175
4.1 Cables horizontales en el cilindro	176
4.2 Cables horizontales en la cúpula	176
4.3 Cables verticales de dirección N-S	177
4.4 Cables verticales de dirección E-O	177
5 Conclusiones	178

METODOLOGÍA DE EVALUACIÓN DEL DETERIORO EN ESTRUCTURAS

6 APLICACIÓN DEL ÍNDICE GLOBAL DE DAÑO AL ESTUDIO DE CONSTRUCCIONES HISTÓRICAS	183
6.1 Introducción	183
6.2 Análisis de la basílica de San Marcos de Venecia	184
6.2.1 Descripción	184
6.2.2 Objectivo y metodología de análisis	184
6.3 Resultados	188
REFERENCIAS	205
AGRADECIMIENTOS	219

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Hace tres décadas que Ngo y Scordelis (1967) publicaron su trabajo sobre análisis de vigas de hormigón armado por el método de elementos finitos. Todo el período de tiempo transcurrido desde entonces se ha caracterizado por investigaciones extensivas en el campo de la modelización constitutiva del hormigón en masa y armado y por el desarrollo de potentes algoritmos de solución de los problemas de elementos finitos no lineales. Sin embargo, el impacto de estos adelantos científicos sobre la práctica de la ingeniería ha sido menos significativo, puesto que su implementación en el diseño de estructuras reales es escasa. En muchos casos, el diseño se basa todavía en hipótesis muy restrictivas, que consideran el hormigón armado no fisurado, homogéneo, isotropo y lineal elástico.

Desde que en los años 80 el cálculo estructural ha empezado a incluir con mayor frecuencia la no linealidad del material en el diseño, el ingeniero dispone de información detallada sobre los fenómenos que se producen cuando se sobrepasa el límite elástico del material. Se llega a disponer de datos sobre el estado del material, punto a punto, pero estos no son de fácil extrapolación a toda una estructura y tampoco describen con suficiente detalle el estado general de la misma. Asimismo, la importancia del hecho de que una cierta zona estructural esté más o menos deteriorada es de difícil cuantificación a partir de la información local proporcionada por los programas de análisis no lineal tradicionales.

El estudio del comportamiento del hormigón a nivel macroscópico se ha fundamentado tradicionalmente en los modelos de fisuración en tracción, combinados con modelos de aplastamiento en compresión (Hofstetter y Mang 1995). En los últimos años se están imponiendo como alternativa viable los modelos de daño que aportan un tratamiento unificado del comportamiento del hormigón tanto en tracción como en compresión y reducen sustancialmente el esfuerzo de cálculo. Ello los convierte en apropiados a la hora de afrontar estudios de estructuras de gran tamaño y complejidad, puesto que, en muchos modelos de

daño, la integración de la ley constitutiva se reduce a un cálculo analítico.

Los modelos de daño pueden clasificarse en dos grupos: por una parte, los utilizados mayoritariamente en la ingeniería sísmica, para estructuras de barras, que evalúan el índice de daño a partir de magnitudes como esfuerzos seccionales, ductilidad o energía potencial de los elementos estructurales; el segundo grupo lo constituyen los modelos de daño continuo que describen directamente el estado del material de un punto material y que están fundamentados en los principios de la termodinámica.

En relación con los índices de daño se usa la terminología de local y global. La acepción general del término "local" se refiere a secciones, elementos o partes estructurales mientras que por "global" se entiende un índice que expresa el estado de toda la estructura. La necesidad de utilizar índices de daño ha sido reconocida desde hace ya algún tiempo en el ámbito de la ingeniería sísmica, en el marco de la cual se han desarrollado diversas fórmulas para evaluar el estado de elementos estructurales de barras (Lybas y Sozen 1977, Banon et al. 1981, Park et al. 1984). Dichas fórmulas se basan en conceptos como deformación plástica cumulativa en cargas cíclicas (Banon et al. 1981), relación entre el momento flector máximo y el alcanzado durante el terremoto (Lybas y Sozen 1977) o la muy utilizada en la actualidad función de daño de Park y Ang (1985), la cual relaciona la ductilidad de los elementos estructurales con la energía disipada en cargas cíclicas. Todos estos índices están adecuados al cálculo sísmico y no son aplicables directamente a otros tipos de análisis.

En las definiciones de los índices globales de daño de toda una estructura realizadas en estudios anteriores se ha partido casi siempre de la idea de promediar los índices así llamados "locales" de las partes componentes de las estructuras con diferentes pesos específicos como, por ejemplo, el volumen del elemento, el porcentaje de la energía potencial almacenada en cada elemento con respecto a la total o incluso la importancia asignada a juicio de expertos al elemento estructural. DiPasquale y Çakmak (1987, 1988, 1990) proponen el primer índice global de daño de una estructura entera basado en conceptos no empíricos, relacionándolo con el deterioro del período fundamental de la estructura, lo que le da una base objetiva. Sin embargo, no es posible aplicar este procedimiento de cálculo a sólo una zona de la estructura y, además dicho índice tiene la dificultad añadida de requerir la evaluación del período fundamental de la estructura en cada instante, lo que presenta dificultades y es costoso puesto que necesita determinar la expresión de la matriz de rigidez tangente.

A partir de estas consideraciones se identifican algunos problemas de gran interés práctico en el campo de la ingeniería estructural, cuya solución adecuada representaría un importante avance en el análisis no lineal de estructuras de

hormigón armado. Entre estos problemas pueden enumerarse los siguientes:

- 1) La evaluación sintética del estado global de una estructura y/o de cualquiera de sus partes componentes, durante y después de una acción excepcional estática o dinámica;
- 2) La evaluación de la carga última en estructuras grandes y complejas en las mismas condiciones de carga que en el punto anterior;
- 3) El estudio de las patologías de estructuras.

En este sentido, el propósito de esta monografía es el de encontrar una solución unificada a los problemas arriba mencionados en el marco de los modelos de daño. La solución tendría que proporcionar un indicador sintético del estado global de una estructura después de estar sometida a acciones que le provocan un comportamiento más allá del dominio lineal elástico. Dicho indicador, denominado *índice global de daño*, podría constituir una herramienta adecuada a emplear a la hora de evaluar el estado de degradación tanto de una estructura entera como de cualquiera de sus partes componentes, así como para determinar la carga última de la estructura y, mediante la observación de sus valores en cada zona estructural, identificar sus patologías y zonas débiles. Para que sea útil en resolver todos estos problemas, un índice global de daño debería ser general, objetivo respecto a la malla de elementos finitos y económico desde el punto de vista computacional.

En esta monografía se denominarán índices locales de daño sólo los que se refieren al estado de un punto mientras todos los demás se considerarán índices globales de daño. En este sentido, pueden definirse índices globales para una sección de barra, para un elemento finito o estructural, para zonas de la estructura (por ejemplo una planta de edificio) y, finalmente, para toda la estructura en su conjunto. Con esta denominación, los índices "locales" de daño utilizados en la ingeniería sísmica tendrán tratamiento de globales de una sección de barra o incluso de un elemento estructural como un pilar o una viga.

La idea del índice global de daño propuesto en esta monografía ha surgido del estudio de los modelos de daño continuo, que son modelos constitutivos capaces de calcular el nivel de deterioro de un punto del material. Generalizando los conceptos de equilibrio termodinámico y energía libre en un punto, en los cuales se basan los modelos de daño local (nivel microscópico) y utilizando el concepto de energía potencial de la estructura (nivel macroscópico), se ha llegado a la definición del índice global de daño como indicador de la capacidad resistente actual de una estructura o parte de la misma frente a su capacidad resistente inicial.

La aplicación de este plantamiento a una variada tipología de estructuras requiere adaptaciones y mejoras en el marco del método de los elementos finitos, que constituyen los objetivos secundarios de la monografía detallados a continuación. Asimismo, para estructuras de barras como los pórticos, se necesita, por requerimientos de aplicación del modelo de daño, desarrollar elementos finitos que permitan acceso a información a nivel de tensiones y deformaciones, puesto que no es suficiente conocer únicamente los esfuerzos y deformaciones seccionales. Esto requiere subdiscretizar la sección transversal de dichos elementos finitos de barra a través de un sistema de capas en estructuras bidimensionales o mediante una cuadrícula en estructuras tridimensionales. La necesidad de estudiar estructuras de hormigón armado que presentan simetría de revolución ha llevado a formular un elemento de lámina de revolución dividido por capas capaz de modelizar la ortotropía de la armadura.

La utilización del modelo de daño en el entorno del análisis dinámico llevó a la necesidad de desarrollar un modelo de daño visco-elástico a través del cual se pueda calcular el amortiguamiento dinámico de manera rigurosa. También ha sido desarrollada una formulación de la matriz tangente del modelo de daño presentado, la cual ha sido implementada en un esquema de integración en el tiempo de las ecuaciones de equilibrio dinámico.

Evidentemente, el índice global de daño propuesto necesita ser validado en la resolución de problemas prácticos y demostrar su utilidad con respecto a las metas propuestas anteriormente. También se debe verificar, mediante ejemplos sencillos, si cumple los requisitos de objetividad y sensibilidad. En la presente monografía la validación se ha realizado mediante simulación de ensayos experimentales.

La metodología desarrollada se ha aplicado al estudio del comportamiento no lineal de un amplio tipo de estructuras, tales como edificios de viviendas, edificios de contención de centrales nucleares y construcciones históricas sometidas a cargas estáticas y dinámicas.

La monografía se estructura en dos partes principales: una parte teórica formada por los Capítulos 2 y 3 y otra de aplicaciones prácticas, constituida por los Capítulos 4, 5 y 6. En esta última parte de la monografía se demuestra de manera práctica la utilidad y propiedades del índice global de daño propuesto como herramienta de evaluación del estado estructural. Todo ello en el marco de estudios completos de problemas de evaluación de la seguridad y degradación de varias tipologías estructurales, que van desde pórticos planos hasta estructuras tan relevantes como edificios de contención de centrales nucleares o construcciones históricas como la basílica de San Marcos en Venecia.

En el Capítulo 2 se desarrollan varios tipos de elementos finitos adaptados al uso de un modelo constitutivo tridimensional de daño y adecuados al estudio de estructuras de hormigón armado. Todos los elementos finitos descritos han sido empleados en el proceso de evaluación del índice global de daño propuesto en la monografía. En la primera parte del capítulo se establecen las ecuaciones de equilibrio dinámico generales de un sólido continuo.

A continuación, se desarrollan en detalle las características del elemento finito de barra 2D de Timoshenko con la sección transversal subdividida en capas de distinto material. Ello permite modelizar barras con materiales no homogéneos y en particular el hormigón armado. El segundo elemento finito descrito es el de lámina de revolución basado en la teoría de Timoshenko con una discretización en capas similar al caso de vigas anterior. Dicho elemento permite analizar estructuras de revolución de láminas delgadas constituidas de materiales no homogéneos tales como hormigón armado y permite incluir efectos de ortotropía. A continuación se desarrolla la formulación de un elemento de barra 3D que es la generalización del elemento de barra 2D para permitir cargas cualesquiera, con flexión y cortante en los dos planes de inercia y torsión. En este elemento, las capas se substituyen por una cuadrícula rectangular para subdiscretizar la sección. Ello permite estudiar estructuras tales como pórticos tridimensionales sometidos a carga sísmica. El cuarto y último elemento finito empleado en esta monografía es el de sólido 3D de 20 nodos isoparamétrico, con capas de armadura en cualquiera de las tres direcciones locales. Este elemento permite modelizar cualquier estructura de hormigón armado y permite eliminar todas las hipótesis simplificativas necesarias en las formulaciones de los elementos de barra y axisimétrico descritos anteriormente a cambio de un aumento significativo del esfuerzo computacional. Este es el elemento empleado en el análisis de grandes estructuras en esta monografía.

El Capítulo 3 está dedicado al modelo constitutivo de daño local empleado para la simulación del comportamiento no lineal del hormigón y de la maçonería. Se detallan los aspectos esenciales del mismo, tales como el criterio de degradación, la condición de consistencia y la expresión de la función de daño. A continuación se introduce el modelo de daño viscoso de especial relevancia en problemas dinámicos. Luego se desarrolla la metodología para tratar el efecto de retención de cortante en el modelo de daño que puede ser útil a la hora de resolver ciertos tipos de problemas donde es crítico conservar capacidad de resistencia a corte.

Uno de los desarrollos más importantes en esta monografía es el índice global de daño que se describe en el tercer capítulo. Dicho índice global es a la vez riguroso desde el punto de vista teórico y sencillo en su formulación y se

basa en conceptos energéticos igual que el índice local de daño. La diferencia fundamental entre ambos índices es que mientras el índice local de daño está formulado en función de la energía libre de un punto material, el índice global de daño se desarrolla a partir de la energía potencial de volúmenes de material de escala macroscópica. Ello convierte al índice global de daño propuesto en una herramienta eficaz a la hora de examinar el estado y los mecanismos de degradación y fallo de estructuras enteras y de sus partes significativas.

El tercer capítulo concluye con unos ejemplos que ilustran las características más destacadas del modelo de daño local y del índice de daño global asociado. En la primera aplicación se demuestra la propiedad de objetividad, respecto a la malla empleada, de la respuesta fuerza-desplazamiento y del índice global de daño. En la segunda aplicación se presenta la validación del factor de retención de corte desarrollado en esta monografía en el marco del modelo de daño local descrito. El ejemplo elegido proviene de un ensayo experimental de una viga de hormigón armado y los resultados numéricos se comparan con los del ensayo. Este capítulo incluye los Anexos 3-1 y 3-2 que sintetizan conceptos de elastoplasticidad útiles a la hora de entender las analogías del modelo de daño con la teoría de la plasticidad clásica y describen brevemente el esquema de Newmark de integración en el tiempo de las ecuaciones de movimiento dinámico utilizadas en la implementación del modelo de daño visco-elástico propuesto en esta monografía.

La parte de aplicaciones prácticas comienza con el Capítulo 4 que está dedicado a estructuras de edificación. El primer problema resuelto es un pórtico plano sometido a acciones estáticas y dinámicas en el que se analiza detenidamente el comportamiento del índice global de daño de la estructura entera y de sus zonas más destacadas desde el punto de vista de la capacidad resistente frente a las acciones mencionadas. El segundo análisis es el de un pórtico tridimensional sometido a un terremoto artificial y confirma el buen comportamiento del modelo constitutivo y la capacidad del índice global de daño de describir la evolución del estado estructural a lo largo de la historia de deformación.

La última parte del Capítulo 4 está dedicada a un estudio de una planta entera de un edificio real de viviendas. Este edificio presentaba problemas de fisuración de los tabiques y el propósito del análisis ha sido reproducir la degradación real observada a través de simulación numérica y averiguar cuáles son las zonas estructurales en las que dicha degradación es más importante. El índice global de daño permite separar los efectos que las distintas zonas de la estructura tienen sobre su rigidez total.

El Capítulo 5 trata con detalle el estudio de la presión de fallo en el edificio

de contención de una central nuclear. El capítulo cuenta con el Anexo 5-1 que da detalles sobre el tratamiento y cálculo del complejo sistema de postesado. Dicho anexo contiene consideraciones teóricas sobre el efecto de los diferentes sistema de postesado sobre el comportamiento estructural y aportaciones originales en cuanto al cálculo riguroso de la presión equivalente al postesado en una estructura de este tipo. El estudio del edificio de contención comienza por una breve descripción del mismo seguido por un análisis de revolución preliminar para determinar una primera aproximación de la presión de fallo. Dicho análisis se divide en uno estático donde la presión interior se aplica de manera quasi estática, y en uno dinámico en el cual se estudia si la aplicación de la presión interna como impulsos dinámicos modifica el resultado del análisis estático.

En la sección central del Capítulo 5 se describe el análisis tridimensional que contiene la calibración del modelo numérico, el estudio del efecto de la losa de cimentación sobre la presión de fallo, un estudio dinámico del aumento de presión interna y un estudio sísmico de la central sometida al terremoto de El Centro de 1940 escalado a diferentes niveles de acción. A continuación se presentan los resultados del estudio térmico y finalmente se realiza un estudio probabilista de la presión de fallo. En todos estos análisis, se ha determinado tanto el comportamiento de la estructura como el de sus distintas zonas calculándose la evolución de los respectivos índices globales de daño, lo que permite entender en profundidad el desarrollo del proceso de degradación y establecer la influencia de las distintas zonas estructurales en el comportamiento general del edificio de contención. El índice global de daño demostró ser una potente herramienta a la hora de comprender la importancia de la degradación de una zona específica para el conjunto de la estructura.

El Capítulo sexto contiene el análisis de la basílica de San Marcos de Venecia, una construcción histórica de gran importancia. En la primera parte se presenta el análisis estático y dinámico de una sola cúpula y se describe con detalle su historial de degradación, observando las evoluciones de los índices globales de daño elementales. En el caso estático la carga considerada ha sido el peso propio incrementado hasta el fallo, mientras que en el caso dinámico la acción considerada ha sido la de un terremoto artificial. La segunda parte del capítulo muestra los resultados del análisis de la cubierta entera de la basílica que comprende cinco cúpulas. A través de los índices globales de daño puede seguirse todo el historial de degradación estructural hasta el fallo total.

CAPÍTULO 2

TECNOLOGÍA DE ELEMENTOS FINITOS

2.1 INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se describen brevemente los diferentes elementos finitos que se utilizarán en los estudios de degradación de estructuras presentados más adelante en esta monografía.

Los desarrollos que se realizan en este capítulo parten de la obtención de las ecuaciones de equilibrio dinámicas de un sólido sometido a cargas mecánicas a partir del principio de los trabajos virtuales (Flies 1975). Esto facilitará el desarrollo de las formulaciones específicas de cada elemento finito utilizado.

En la segunda parte del capítulo se hace una descripción detallada del elemento de barra de Timoshenko que es la base sobre la cual se desarrollan los primeros tres elementos finitos presentados: barra 1D, lámina de revolución 2D y barra 3D. Se enuncian las hipótesis de Timoshenko para barras, se describen los campos de desplazamientos, de deformación y aceleración, de tensión e inercia, de deformaciones y tensiones seccionales, la discretización con las funciones de forma y la particularización de las magnitudes elementales. Todo el desarrollo está enfocado hacia la deducción de las características del elemento de barra subdiscretizado en capas, de cara a la utilización ulterior de un modelo constitutivo tridimensional general que requiere información a nivel de cada punto de la sección y no de solamente en el eje de la barra, como es habitual en los elementos de barra convencionales.

En la tercera parte del capítulo se muestra la formulación del elemento finito de lámina de revolución basada en la metodología de capas utilizada en el elemento de barra 2D y que tiene la misma ventaja de poder utilizarse conjuntamente con el modelo constitutivo tridimensional de daño.

En la cuarta parte del capítulo se presenta un elemento de barra 3D que tiene seis grados de libertad por nodo (tres translaciones y tres giros), admite cargas cualesquiera y que cambia la subdivisión por capas de la sección transversal con otra generada por una retícula.

El último apartado describe brevemente el elemento de sólido 3D serendipito de 20 nodos que tiene como particularidad la posibilidad de tratar armaduras como capas de material añadidas. Ello permite modelizar con mucha versatilidad el comportamiento del hormigón armado y también materiales en masa donde el espesor es suficientemente importante para que no se pueda reducir su formulación a láminas o placas sin perder exactitud.

Estos cuatro tipos de elementos finitos han sido empleados en la monografía para estudiar las propiedades y ventajas de la tecnología propuesta de cálculo de degradación de estructuras, bajo acciones más allá del límite de comportamiento elástico del material.

2.2 ECUACIONES DE EQUILIBRIO DEL SÓLIDO CONTINUO

Todas las ecuaciones de equilibrio en forma discreta se deducirán en esta monografía a partir del conocido principio de trabajos virtuales. Dicho principio establece que un sólido deformable está en equilibrio si, aplicándole un campo de desplazamientos virtuales compatible con las condiciones de vínculo, el trabajo producido por las fuerzas internas, L_{int} , es igual al trabajo de las fuerzas externas, L_{ext} (Donea 1980)

$$L_{int} = L_{ext} \quad (2.1)$$

Por fuerzas internas se entienden aquellas fuerzas generadas dentro del sólido deformable como respuesta a su propio estado de deformación. En consecuencia, las únicas fuerzas internas que aquí se consideran son las tensiones provocadas por deformación. Por otra parte, las fuerzas externas incluyen todo tipo de acciones exteriores, que no dependen del estado deformacional del sólido. Pueden ser acciones exteriores las fuerzas concentradas puntuales, las fuerzas distribuidas a lo largo del contorno o las fuerzas máscicas generadas por campos exteriores al cuerpo, como, por ejemplo, campos magnéticos, eléctricos, gravitatorios, térmicos u otros.

El principio de los trabajos virtuales conduce a la siguiente expresión del trabajo virtual interno L_{int} (Owen y Hinton 1980)

$$L_{int} = \int_V \delta \epsilon^T \sigma dV = \int_V \delta \epsilon^T \mathbf{C} \epsilon dV \quad (2.2)$$

donde V es el volumen del sólido, δ señala una variación virtual, ϵ es el tensor de deformaciones, σ el tensor de tensiones y \mathbf{C} es la matriz constitutiva.

El trabajo virtual externo L_{ext} debe contener las contribuciones de las fuerzas concentradas f_j , de las fuerzas distribuidas \mathbf{f}^d aplicadas directamente sobre el

contorno del dominio S y también un término debido a la acción de las fuerzas másicas \mathbf{f}^m que actúan en cada punto del volumen. Esta expresión es

$$L_{ext} = \sum_j \delta u_j f_j + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^d dS + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^m dV \quad (2.3)$$

donde \mathbf{u} es el campo de desplazamiento.

Todas las fuerzas exteriores que intervienen en la anterior relación pueden ser estáticas o dinámicas. Su naturaleza determina si el tipo de cálculo a desarrollar debe ser estático o dinámico, teniéndose en cuenta que basta una sola fuerza dinámica para que el problema sea dinámico.

Cuando se trata de problemas dinámicos, el principio de d'Alembert asegura que, a fin de conseguir el equilibrio dinámico, las seudofuerzas de inercia pueden ser consideradas como fuerzas reales que actúan sobre el cuerpo. En consecuencia, las fuerzas másicas debidas a efectos iniciales son $-\rho \ddot{\mathbf{u}}$, el cambio de signo proveniente del sentido opuesto al campo de aceleraciones $\ddot{\mathbf{u}}$. Con estas explicaciones, el término inercial del trabajo virtual externo L_{ext}^i , que está incluido en el último término de la relación (2.3), se expresa como (Hangau et al. 1994a)

$$L_{ext}^i = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^{m,i} dV = - \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV = - \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \dot{\mathbf{u}} dV \quad (2.4)$$

donde ρ es la densidad. En consecuencia, la expresión del trabajo virtual exterior es

$$L_{ext} = \sum_j \delta u_j f_j + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^d dS + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^m dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \dot{\mathbf{u}} dV \quad (2.5)$$

La expresión anterior permite expresar el principio de los trabajos virtuales en la forma

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \dot{\mathbf{u}} dV + \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} dV = \sum_j \delta u_j f_j + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^d dS + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^m dV \quad (2.6)$$

Se ha deducido la ecuación funcional integral, expresada en desplazamientos, que rige el comportamiento de una estructura en régimen dinámico. Para hallar el campo de desplazamientos \mathbf{u} , que es la incógnita del problema, habrá que recurrir a otros procedimientos, puesto que la mecánica del continuo supone soluciones pertenecientes al espacio de funciones continuas de dimensión infinita

(un cuerpo mecánico continuo tiene una infinidad de grados de libertad). Uno de los procedimientos para reducir a un número finito el número de dimensiones del espacio de funciones, dentro de cual se buscan las soluciones, es el método de los elementos finitos.

2.3 ELEMENTO FINITO DE BARRA 2D DE TIMOSHENKO

En el cálculo de las estructuras porticadas se utilizaron, en sus comienzos, modelos basados en elementos de construcción unidimensionales sencillos – vigas y pilares – llamados genéricamente *barras*. La aparición del método de los elementos finitos ha permitido un gran avance debido a su capacidad de desarrollar modelos estáticos y dinámicos más generales y de permitir el cambio de las hipótesis de comportamiento del material de los elementos estructurales, debido a una base teórica más rigurosa y amplia que la de los anteriores métodos matriciales (Zienkiewicz 1980).

Entre las formulaciones de elementos estructurales unidimensionales hay dos que merecen especial atención. La primera, conocida como Teoría de Euler-Bernoulli (Oñate 1992), está muy próxima a las teorías clásicas de la Resistencia de Materiales y permite el análisis de la flexión de vigas esbeltas prescindiendo del efecto de los esfuerzos cortante y axil en el estudio de su deformación. La segunda formulación es la teoría de Timoshenko (Oñate 1992) y en ella se apoyan los elementos finitos de barra y de lámina de revolución utilizados en esta monografía. Su rasgo específico es la consideración del efecto del esfuerzo cortante en la deformación (Feodosiev 1978).

En este apartado se hace, primeramente, una breve síntesis de las características de la formulación de Timoshenko para elementos unidimensionales bajo cargas estáticas y/o dinámicas. A continuación se desarrollan las ecuaciones de equilibrio de una barra, partiendo de la Mecánica del Medio Continuo Deformable, es decir, considerando dicha barra como un sólido continuo deformable (Hirschfeld 1986). Luego se describe la solución del problema mediante el método de los elementos finitos (Mang et al. 1994).

2.3.1 Hipótesis de la formulación de viga de Timoshenko

Se considera una barra de longitud ℓ y de sección transversal de área A variable, representada en su sistema local de coordenadas (véase la Figura 2.1), sobre la cual actúan cargas en el plano local vertical. La teoría de Timoshenko se basa en las hipótesis siguientes (Oñate 1992):

- I. Los desplazamientos verticales de todos los puntos de una sección transversal son pequeños e iguales a los del eje de la viga.

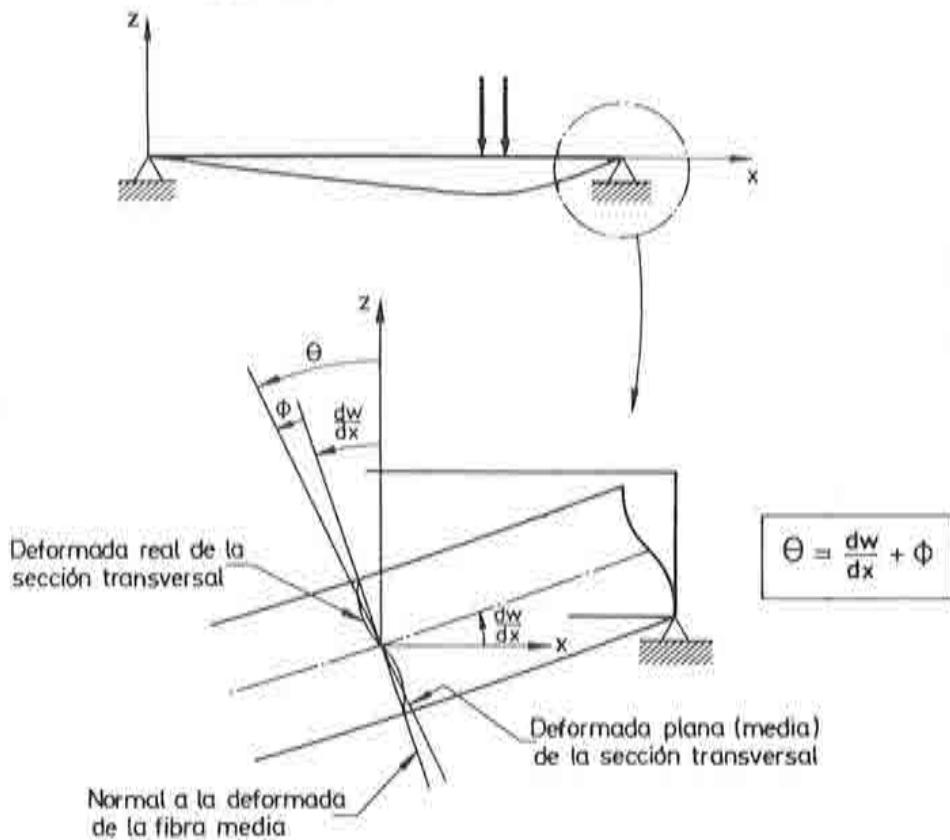


Figura 2.1 Teoría de viga de Timoshenko. Giro de la sección normal a la fibra media (Oñate 1992).

- II. Los desplazamientos laterales son nulos.
- III. Las secciones planas normales al eje de la viga antes de la deformación permanecen planas, pero no necesariamente normales al eje después de la deformación, tal como puede verse en la Figura 2.1.

Esta última hipótesis supone tomar un giro medio para la sección transversal, de manera que ésta pueda considerarse plana. Las primeras dos hipótesis son compartidas con la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, mientras que la tercera difiere en lo que se refiere a la ortogonalidad de la sección respecto al eje en el estado deformado.

2.3.2 Campo de desplazamientos

De los seis desplazamientos generalizados de un punto del espacio, en este caso sólo hay dos relevantes, debido al carácter plano del problema y a las hipótesis hechas anteriormente. Éstas son u^y y w^y que son, respectivamente,

el desplazamiento horizontal y el vertical en el sistema local de coordenadas (véase la Figura 2.1). Por otra parte, el campo de desplazamientos de una sección transversal cualquiera está descrito por la translación horizontal u' , la vertical w' del eje de la barra y por el giro medio de la sección θ (véase la Figura 2.1). El movimiento de cualquier punto del cuerpo puede expresarse en función del movimiento del eje de la sección a la cual pertenece dicho punto, así como resulta de la siguiente ecuación (Oñate 1991):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^p(x', z') &= \begin{Bmatrix} u^p(x', z') \\ w^p(x') \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'(x') - z'\theta(x') \\ w'(x') \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z' \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'(x') \\ w'(x') \\ \theta(x') \end{Bmatrix} = \mathbf{S}(z') \mathbf{u}'(x') \end{aligned} \quad (2.7)$$

Las variables de esta ecuación tienen el siguiente significado:

- $\mathbf{u}^p(x', z')$ – vector de desplazamientos de un punto cualquiera de una sección transversal de la barra. Se considera que estos desplazamientos no varían a lo largo de la dirección normal al plano de flexión (hipótesis I, II);
- $\mathbf{u}'(x')$ – vector de movimientos seccionales de la barra en ejes locales;
- $\mathbf{S}(z')$ – matriz de conversión de los movimientos del eje a los desplazamientos puntuales en función de la altura z' del punto (Oñate 1991).

2.3.3 Campo de deformación y aceleración

Considerando la hipótesis de pequeñas deformaciones, a partir del campo de desplazamientos –relación (2.7)– pueden deducirse fácilmente las deformaciones. Conforme a las hipótesis utilizadas, las únicas deformaciones no nulas son

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \frac{du^p}{dx'} = \frac{du'}{dx'} - z' \frac{d\theta}{dx'} \\ \gamma_{x'z'} &= \frac{du^p}{dz'} + \frac{dw^p}{dx'} = \frac{dw'}{dx'} - \theta \end{aligned} \quad (2.8)$$

Las ecuaciones (2.8) pueden escribirse matricialmente como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z' \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{du'}{dx'} \\ \frac{dw'}{dx'} - \theta \\ \frac{d\theta}{dx'} \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.9)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ es el vector de *deformaciones seccionales*, $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el vector de deformaciones puntuales y \mathbf{S} es la matriz de transformación ya mencionada que también relaciona $\boldsymbol{\varepsilon}$ con $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$. A su vez, las deformaciones seccionales $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ se relacionan con los desplazamientos seccionales a través de la matriz de operadores diferenciales \mathbf{L}

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \frac{du'}{dx'} \\ \frac{dw'}{dx'} - \theta \\ \frac{d\theta}{dx'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx'} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ w' \\ \theta \end{Bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{u}' \quad (2.10)$$

En los estudios dinámicos interesa establecer la relación entre un campo de aceleración que actúa sobre los puntos de una sección transversal de la viga y el campo de aceleración seccional. Dicha relación se deduce de forma inmediata derivando dos veces en función del tiempo la ecuación (2.7), si se considera que los desplazamientos varían explícitamente con el tiempo, es decir, $\mathbf{u}'' = \mathbf{u}''(x', z', t)$ y $\mathbf{u}' = \mathbf{u}'(x', t)$

$$\ddot{\mathbf{u}}'' = \mathbf{S} \ddot{\mathbf{u}}' \quad (2.11)$$

2.3.4 Campos de tensión e inercia

Las hipótesis propias del estudio de estructuras de barras en general y las de Timoshenko en particular hacen que del total de seis componentes simétricas distintas del tensor de tensiones sólo dos sean no nulas. Estas son la tensión normal a la sección $\sigma_{x'}$ y la tensión tangencial $\tau_{x'z'}$, que se relacionan con las deformaciones mediante la ecuación constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.12)$$

donde \mathbf{C} es el tensor constitutivo. En el caso lineal elástico, éste es función de las características del material – módulo de elasticidad longitudinal E , coeficiente

de Poisson ν y módulo de elasticidad transversal $G = E/2(1 + \nu)$. De las seis deformaciones independientes del tensor de deformaciones serán diferentes de cero $\varepsilon_{x'}$ y $\gamma_{x'z'}$ y también $\varepsilon_{y'}$ y $\varepsilon_{z'}$. Esto se demuestra partiendo de la relación general entre el tensor de tensiones y el de deformaciones, que tiene la siguiente forma (Zienkiewicz 1980):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{z'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.13)$$

Si en esta última relación se imponen las condiciones $\sigma_{y'} = \sigma_{z'} = 0$, se obtienen $\varepsilon_{y'} = \varepsilon_{z'} = -\nu\varepsilon_{x'}$, lo que demuestra que $\varepsilon_{y'}$ y $\varepsilon_{z'}$ no son variables independientes del problema. Si estos valores se utilizaran ahora para calcular $\sigma_{x'}$, se encuentra precisamente el valor dado por la ecuación (2.12). La imposición de tensiones tangenciales nulas conduce evidentemente a deformaciones tangenciales nulas, con lo cual la única deformación tangencial de interés es $\gamma_{x'z'}$.

En el caso en el cual el punto estudiado esté sometido al campo de aceleraciones visto en el apartado anterior, aparecen fuerzas másicas iniciales y, según estipula la segunda ley de Newton, éstas son proporcionales a la masa y a la aceleración de dicho punto material. Por consiguiente, pueden escribirse las siguientes relaciones:

$$\boldsymbol{\varrho} = \begin{Bmatrix} \varrho_{x'} \\ \varrho_{z'} \end{Bmatrix} = \rho \begin{Bmatrix} \ddot{u}^p \\ \ddot{w}^p \end{Bmatrix} = \rho \ddot{\mathbf{u}}^p \quad (2.14)$$

donde $\boldsymbol{\varrho}$ es el vector de fuerzas másicas que actúan sobre un elemento diferencial de volumen y ρ es la densidad del material.

2.3.5 Campos de esfuerzos seccionales

Debido a las tensiones, en cada sección transversal de una barra aparecen esfuerzos, fuerzas y momentos que, en las condiciones de la viga cargada en uno de sus planos principales de inercia, son sólo tres: esfuerzo axil N , esfuerzo cortante Q y momento flector M . Utilizando la relación (2.9), la expresión del trabajo virtual interno L_{int} se modifica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L_{int} &= \int_V \delta \epsilon^T \sigma dV = \int_V \delta \hat{\epsilon}^T S^T \sigma dV \\ &= \int_o^\ell \delta \hat{\epsilon}^T \left[\int_A S^T \sigma dA \right] dx' = \int_o^\ell \delta \hat{\epsilon}^T \hat{\sigma} dx' \end{aligned} \quad (2.15)$$

En la relación anterior se ha introducido el vector de esfuerzos seccionales $\hat{\sigma}$ como el conjugado energético del vector de deformaciones seccionales $\hat{\epsilon}$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \int_A S^T \sigma dA = \int_A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -z' & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} dA = \int_A \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \tau_{x'z'} \\ -z\sigma_{x'} \end{Bmatrix} dA \\ &= \int_A S^T C \epsilon dA = \int_A S^T C S \hat{\epsilon} dA = \hat{C} \hat{\epsilon} = \begin{Bmatrix} N \\ Q \\ M \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

de donde resulta la expresión de la *matriz constitutiva seccional* \hat{C} como

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \int_A S^T C S dA = \int_A \begin{bmatrix} E & 0 & -z'E \\ 0 & G & 0 \\ -z'E & 0 & z'^2E \end{bmatrix} dA \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} b_i E_i (z'_{i+1} - z'_i) & 0 & -\frac{1}{2} b_i E_i (z'^2_{i+1} - z'^2_i) \\ 0 & b_i G_i (z'_{i+1} - z'_i) & 0 \\ -\frac{1}{2} b_i E_i (z'^2_{i+1} - z'^2_i) & 0 & \frac{1}{3} b_i E_i (z'^3_{i+1} - z'^3_i) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde b_i , E_i y G_i son el ancho y los módulos elásticos de la capa i que se extiende en altura entre las cotas z'_i y z'_{i+1} . Esta última ecuación permite, debido a su gran generalidad, hallar la matriz constitutiva seccional \hat{C} , que relaciona $\hat{\sigma}$ con $\hat{\epsilon}$, cuando las características del material o su estado termodinámico varían a través del espesor de la viga.

En la Figura 2.2 se representa la barra dividida en capas utilizada conjuntamente con el modelo de daño para simulaciones en aplicaciones concretas (Hanganu 1991).

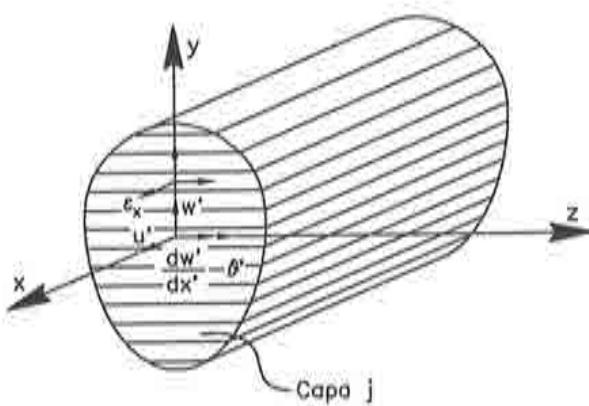


Figura 2.2 Barra de sección no homogénea dividida en capas. Ejes locales y globales

En el caso dinámico, sobre cada elemento de superficie \$dA\$ de una sección transversal cualquiera de la viga actúan dos aceleraciones \$\ddot{u}^p\$ y \$\ddot{w}^p\$ en las direcciones \$x'\$ y \$z'\$. Dichas aceleraciones producen fuerzas de inercia elementales \$\varrho_{x'}\$ y \$\varrho_{z'}\$. Al integrarlas a través de la sección, de manera similar al procedimiento utilizado para tensiones, se obtienen los esfuerzos seccionales \$\hat{\varrho}\$ debidos a la inercia a partir de la ecuación (2.3)

$$\begin{aligned} L_{ext}^i &= - \int_V \delta \mathbf{u}'^T \varrho dV = - \int_V \delta \mathbf{u}'^T \mathbf{S}^T \varrho dV \\ &= \int_0^\ell \delta \mathbf{u}'^T \left[\int_A \mathbf{S}^T \varrho dA \right] dx' = \int_0^\ell \delta \mathbf{u}'^T \hat{\varrho} dx' \end{aligned} \quad (2.18)$$

Haciendo uso de la ecuación (2.14) y agrupando términos se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\varrho} &= \int_A \mathbf{S}^T \varrho dA = \int_A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -z' & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varrho_{x'} \\ \varrho_{z'} \end{array} \right\} dA = \int_A \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varrho_{x'}}{\varrho_{z'}} \\ -z' \frac{\varrho_{x'}}{\varrho_{z'}} \end{array} \right\} dA \\ &= \int_A \mathbf{S}^T \rho \bar{\mathbf{u}}' dA = \int_A \mathbf{S}^T \rho \mathbf{S} \bar{\mathbf{u}} dA = \hat{\rho} \bar{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

de donde resulta la expresión de la *matriz de densidad seccional* \$\hat{\rho}\$

$$\hat{\rho} = \int_A \mathbf{S}^T \rho \mathbf{S} dA \quad (2.20)$$

Esta última ecuación permite calcular la matriz de densidad seccional $\hat{\rho}$ cuando las características del material varían a través del espesor de la viga. La utilización de un modelo de capas conduce a una expresión similar a la (2.17).

2.3.6 Discretización del medio continuo en elementos finitos

La formulación continua considerada hasta este momento tiene el inconveniente del número infinito de grados de libertad correspondiente a un sólido continuo. El método de los elementos finitos proporciona la ventaja de limitar el número de grados de libertad y de minimizar el error producido en esta operación. La discretización es la operación de prefijar un número finito de puntos en los que se desea obtener la información acerca del proceso. El elemento finito es la entidad estructural básica. Dentro del elemento se definen los campos continuos de las variables independientes del proceso que son los desplazamientos \mathbf{u} . Como consecuencia del proceso de discretización, todas las integrales que en el caso continuo abarcaban el dominio entero se transforman en sumas de integrales sobre elementos. La variación dentro de cada elemento se expresa mediante campos continuos que dependen únicamente de los valores de las variables independientes en los nodos del elemento. Los elementos están interconectados sólo en los nodos. Es evidente que los valores de las variables independientes en un nodo son idénticas en todos los elementos que coinciden en este nodo. Sin embargo, no ocurre lo mismo con las variables dependientes debido al hecho de que la continuidad está asegurada sólo dentro de cada elemento.

2.3.7 Funciones de forma y relaciones derivadas

Las variables independientes de las ecuaciones de movimiento de una barra están agrupadas en el vector \mathbf{u} . Las funciones de forma definen el campo continuo elemental, interpolando los valores nodales. Se utilizan funciones cuadráticas lagrangianas correspondientes a un elemento de barra de tres nodos. Cada nodo tiene asociada una función de forma de manera que ésta vale uno en dicho nodo y cero en los demás (véase la Figura 2.3).

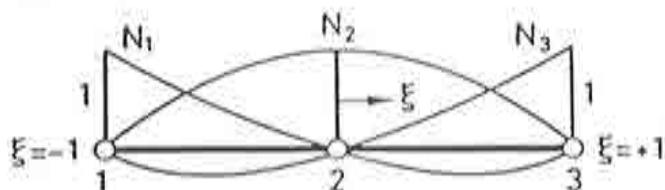


Figura 2.3 Representación de las funciones de forma.

Las funciones de forma de un elemento unidimensional se expresan como función de una variable normalizada ζ , que varía entre -1 y 1. Sus expresiones son (Oñate 1992)

$$N_1(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta(\zeta - 1) ; N_2(\zeta) = 1 - \zeta^2 ; N_3(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta(\zeta + 1) \quad (2.21)$$

Los desplazamientos se interpolan con las funciones (2.21)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' = \begin{Bmatrix} u' \\ w' \\ \theta \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} N_1 u'_1 + N_2 u'_2 + N_3 u'_3 \\ N_1 w'_1 + N_2 w'_2 + N_3 w'_3 \\ N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + N_3 \theta_3 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}'_i \mathbf{a}'_i = \mathbf{N}' \mathbf{a}' \end{aligned} \quad (2.22)$$

y, empleando las siguientes notaciones:

$$\mathbf{N}'_i = N_i \mathbf{I}_3 ; \mathbf{a}'_i = \begin{Bmatrix} u'_i \\ w'_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} ; \mathbf{N}' = \{ \mathbf{N}'_1 \quad \mathbf{N}'_2 \quad \mathbf{N}'_3 \} ; \mathbf{a}' = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}'_2 \\ \mathbf{a}'_3 \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

donde \mathbf{N}' es la matriz de funciones de forma y \mathbf{a}' el vector de desplazamientos nodales en el sistema de coordenadas local.

La relación entre las incógnitas nodales y las deformaciones seccionales $\hat{\mathbf{e}}$ se halla teniendo en cuenta las ecuaciones (2.10) y (2.22)

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{L}\mathbf{u}' = \mathbf{L}\mathbf{N}'\mathbf{a}' = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}'_i \mathbf{a}'_i = \mathbf{B}' \mathbf{a}' ; \mathbf{B}'_i = \mathbf{L}\mathbf{N}'_i \quad (2.24)$$

y, tras operar, se obtiene la expresión de la matriz de correspondencia \mathbf{B}'_i

$$\mathbf{B}'_i = \begin{bmatrix} \frac{dN_i}{dx'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dN_i}{dx'} & -N_i \\ 0 & 0 & \frac{dN_i}{dx'} \end{bmatrix} ; \mathbf{B}' = \{ \mathbf{B}'_1 \quad \mathbf{B}'_2 \quad \mathbf{B}'_3 \} \quad (2.25)$$

Las derivadas cartesianas de las funciones de forma son

$$\frac{d\mathbf{N}'}{dx'} = \frac{d\mathbf{N}'}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dx'} = \frac{d\zeta}{dx'} \begin{Bmatrix} \frac{2\zeta-1}{2} \\ -2\zeta \\ \frac{2\zeta+1}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

y para hallar $d\zeta/dx'$ se utiliza la representación isoparamétrica que conduce a la siguiente serie de operaciones:

$$\begin{aligned} x' &= N_1 x'_1 + N_2 x'_2 + N_3 x'_3 \\ \frac{dx'}{d\zeta} &= \frac{dN_1}{d\zeta} x'_1 + \frac{dN_2}{d\zeta} x'_2 + \frac{dN_3}{d\zeta} x'_3 = \frac{1}{2} [x'_3 - x'_1 + 2\zeta(x'_1 + x'_3 - 2x'_2)] \end{aligned} \quad (2.27)$$

De esta manera, se ha definido completamente la matriz \mathbf{B}' en cualquier sección transversal del elemento (para cualquier $\zeta \in [-1, 1]$). Se observa que cuando $x'_2 = (x'_1 + x'_3)/2$, entonces $d\zeta/dx' = 2/\ell$.

Hasta aquí se ha utilizado exclusivamente el sistema local de coordenadas. Pasar al sistema global requiere encontrar la proyección del vector de desplazamiento nodal \mathbf{a}'_i a través de la matriz de transformación \mathbf{T} ,

$$\mathbf{a}'_i = \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) & 0 \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{a}_i = \mathbf{T}\mathbf{a}_i \quad (2.28)$$

donde \mathbf{a}_i es el vector de desplazamientos del nodo i en el sistema global y $\cos(x', x)$ es el coseno del ángulo entre la dirección local x' y la dirección global x . Sólo se modifican las translaciones ya que el ángulo θ es el mismo en cualquier sistema de coordenadas cartesiano. Con esto se pueden escribir en el sistema global todas las magnitudes calculadas hasta ahora:

$$\mathbf{u}' = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}'_i \mathbf{a}'_i = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}'_i \mathbf{T} \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{N} \mathbf{a} ; \quad \mathbf{N}_i = \mathbf{N}'_i \mathbf{T} \quad (2.29)$$

$$\hat{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}'_i \mathbf{a}'_i = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}'_i \mathbf{T} \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{B} \mathbf{a} ; \quad \mathbf{B}_i = \mathbf{B}'_i \mathbf{T} \quad (2.30)$$

El campo de aceleraciones se deduce a partir de la relaciones anteriores, considerando que las funciones de forma son invariantes en el tiempo

$$\ddot{\mathbf{u}}' = \mathbf{N}' \ddot{\mathbf{a}}' = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{a}} \quad (2.31)$$

2.3.8 Ecuaciones de equilibrio para un elemento finito

Las ecuaciones de equilibrio para un elemento de barra se obtienen modificando la ecuación de equilibrio de trabajo virtual (2.5) para el caso unidimensional. Siguiendo el procedimiento del subapartado 2.3.5 de transformación de las integrales de volumen en integrales de línea a través de integraciones parciales sobre la sección de la barra, puede decirse que cualquier fuerza másica \mathbf{f}^m puede transformarse en una fuerza distribuida $\hat{\mathbf{f}}^m = \int_A S^T \mathbf{f}^m dA$, lo que es lo mismo que calcular los esfuerzos seccionales equivalentes a dichas fuerzas másicas. En consecuencia, la ecuación (2.5) toma la siguiente forma particularizada al caso de las barras

$$\int_0^\ell \delta \mathbf{u}'^T \hat{\rho} \ddot{\mathbf{u}}' dx' + \int_0^\ell \delta \hat{\varepsilon}'^T \hat{\mathbf{C}} \hat{\varepsilon} dx' = \int_0^\ell \delta \mathbf{u}'^T (\mathbf{f}^d + \hat{\mathbf{f}}^m) dx' + \sum_j \delta u'_j f_j \quad (2.32)$$

Utilizando las expresiones para \mathbf{u}' , $\ddot{\mathbf{u}}'$ y $\hat{\varepsilon}$ proporcionadas por (2.29), (2.30) y (2.31) se obtiene

$$\delta \mathbf{a}^T \int_0^\ell \mathbf{N}^T \hat{\rho} \mathbf{N} dx' \ddot{\mathbf{a}} + \delta \mathbf{a}^T \int_0^\ell \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{B} dx' \mathbf{a} = \delta \mathbf{a}^T \int_0^\ell \mathbf{N}^T \mathbf{f}^{d,m} dx' + \delta \mathbf{a}^T \sum_j \mathbf{N}^T(\zeta_j) \mathbf{f}_j \quad (2.33)$$

donde $\mathbf{f}^{d,m} = \mathbf{f}^d + \hat{\mathbf{f}}^m$ es el vector de fuerzas distribuidas totales y \mathbf{f}_j es el vector que contiene las tres componentes (axil, cortante y momento flector) de la fuerza concentrada f_j que se aplica sobre el elemento finito en el punto de coordenada paramétrica ζ_j . Como la ecuación (2.33) tiene que ser válida para cualquier desplazamiento virtual $\delta \mathbf{a}$, se tiene

$$\int_0^\ell \mathbf{N}^T \hat{\rho} \mathbf{N} dx' \ddot{\mathbf{a}} + \int_0^\ell \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{B} dx' \mathbf{a} = \int_0^\ell \mathbf{N}^T \mathbf{f}^{d,m} dx' + \sum_j \mathbf{N}^T(\zeta_j) \mathbf{f}_j \quad (2.34)$$

o

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}^e \mathbf{a} = \mathbf{f}^e \quad (2.35)$$

donde

$$\mathbf{M}^e = \int_0^\ell \mathbf{N}^T \hat{\rho} \mathbf{N} dx' \quad (2.36)$$

$$\mathbf{K}^e = \int_0^l \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{B} dx' \quad (2.37)$$

$$\mathbf{f}^e = \int_0^l \mathbf{N}^T \mathbf{f}^{d,m} dx' + \sum_j \mathbf{N}^T(\zeta_j) \mathbf{f}_j \quad (2.38)$$

\mathbf{M}^e , \mathbf{K}^e y \mathbf{f}^e son la matriz de masa elemental, la matriz de rigidez elemental y el vector de fuerzas nodales elementales, respectivamente. La integración de estas variables matriciales se hace, en la gran mayoría de los casos, mediante integración numérica. Para ello se elige un número de puntos de integración en concordancia con el grado de los polinomios a integrar. Los pesos correspondientes a cada punto se obtienen de las tablas (Oñate 1992), luego se multiplican los valores del argumento calculado en los puntos de integración con los pesos correspondientes y se suman los productos así obtenidos.

El efecto de bloqueo típico en elementos de Timoshenko se ha evitado con la técnica de integración reducida utilizando una cuadratura de Gauss de 2 puntos para integrar los términos de cortante de la matriz de rigidez (Oñate 1992).

2.3.9 Sistema global de ecuaciones

Una vez obtenidas las matrices \mathbf{M}^e , \mathbf{K}^e y \mathbf{f}^e para todos los elementos, se procede al ensamblaje, que consiste en sumar todas las ecuaciones elementales cuyos términos libres tienen el significado de fuerzas aplicadas en la dirección del mismo grado de libertad del mismo nodo. De esta manera, a cada grado de libertad de cada nodo le corresponderá ahora un sólo elemento del vector global de fuerzas \mathbf{f} , obteniéndose así el sistema global de ecuaciones, que se escribe en forma matricial como (Bathe 1982)

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (2.39)$$

donde \mathbf{M} es la *matriz global de masa*, \mathbf{K} es la *matriz global de rigidez* y \mathbf{f} es el *vector global de fuerzas nodales*.

La solución de problemas dinámicos se plantea a través de esquemas de integración en el tiempo (ver Anexo 3.2) que transforman el sistema de ecuaciones (2.39) en un sistema lineal que tiene como incógnitas sólo los desplazamientos. Dicho sistema expresa el equilibrio dinámico en cada instante de tiempo t y puede escribirse genéricamente de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{K}}(t) \mathbf{a}(t) = \hat{\mathbf{f}}(t) \quad (2.40)$$

Evidentemente, como el cálculo estático es una particularización del cálculo dinámico, las ecuaciones de equilibrio estático se obtienen considerándose $\ddot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ en todas las ecuaciones anteriores.

Tras resolver el sistema (2.40) se obtienen los desplazamientos nodales \mathbf{a} . Se calculan las deformaciones seccionales $\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{B}\mathbf{a}$ y luego las deformaciones en cualquier punto de la barra $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$. Con esto se dispone de información a nivel tensión-deformación, con lo que se puede aplicar cualquier modelo constitutivo general. Se calculan las tensiones de prueba $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}$ que se modifican de acuerdo con el modelo constitutivo $\boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}'$. Con las tensiones corregidas se calculan las tensiones seccionales $\hat{\boldsymbol{\sigma}}' = \int_A \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma}' dA$ y, finalmente, las fuerzas nodales correspondientes $\mathbf{f}' = \int_o \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}' dx'$ que se utilizan para evaluar las fuerzas residuales que son necesarias para la siguiente iteración.

2.4 ELEMENTO FINITO DE LÁMINA DE REVOLUCIÓN

La formulación utilizada está basada en la teoría de láminas de revolución de Reissner-Mindlin que es similar a la teoría de Timoshenko para barras completada con la formulación por capas (Hanganu et al. 1993b). Este elemento de lámina se obtiene rotando el elemento descrito en el apartado 2.3 y empleando la misma metodología general. Aunque se conservan los mismos grados de libertad (dos translaciones y un giro), las mismas funciones de forma y la descomposición por capas, el resto de la formulación adquiere características específicas (véase la Figura 2.4).

El campo de desplazamientos tiene formalmente la misma expresión que para la barra 2D

$$\mathbf{u}^p = \begin{Bmatrix} u^p \\ w^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u' - z'\theta \\ w' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z' \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ w' \\ \theta \end{Bmatrix} = \mathbf{S}_u \mathbf{u}' \quad (2.41)$$

donde \mathbf{u}^p es el vector de desplazamientos punitual, las magnitudes señaladas con $(\cdot)'$ se refieren al eje de la barra en coordenadas locales, \mathbf{u}' es el vector de desplazamientos y \mathbf{S}_u es la matriz de reducción de los desplazamientos al eje central. El campo de deformación es (Oñate 1992)

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_\varphi \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^p}{\partial x'} \\ \frac{u}{x} \\ \frac{\partial u^p}{\partial z'} + \frac{\partial w^p}{\partial x'} \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

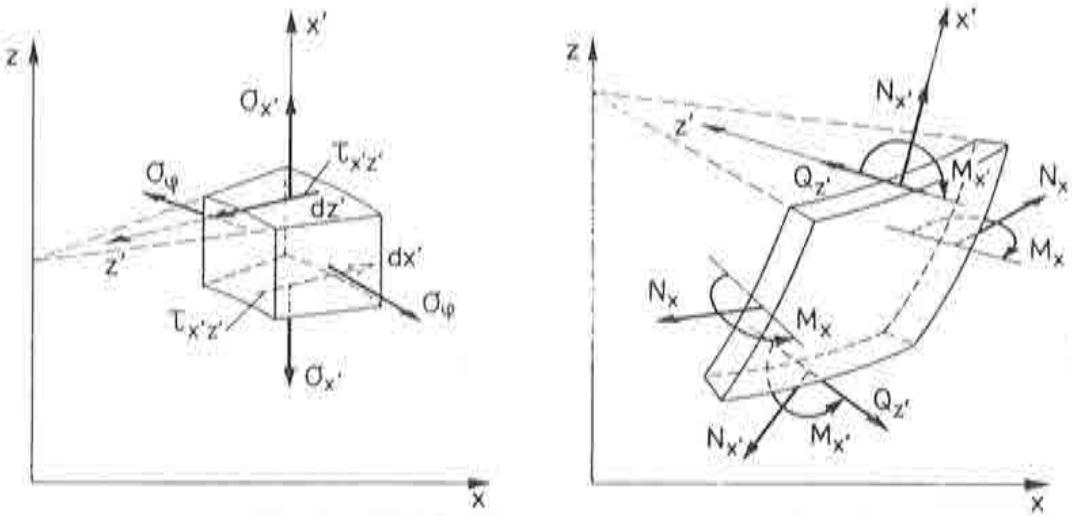


Figura 2.4 Elemento de lámina de revolución.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \frac{du'}{dx'} - z' \frac{d\theta}{dx'} \\ \frac{u' \cos\phi - w' \sin\phi}{x} \\ \frac{dw'}{dx'} - \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du'}{dx'} - z' \frac{d\theta}{dx'} \\ \frac{u' \cos\phi - w' \sin\phi - z' \theta \cos\phi}{x} \\ \frac{dw'}{dx'} - \theta \end{Bmatrix} \quad (2.42')$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{du'}{dx'} \\ \frac{u' \cos\phi - w' \sin\phi}{x} \\ -\frac{d\theta}{dx'} \\ -\frac{\theta \cos\phi}{x} \\ \frac{dw'}{dx'} - \theta \end{Bmatrix} = \boldsymbol{S} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.43)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el vector de deformaciones, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ es el vector de deformaciones seccionales, \boldsymbol{S} es la matriz de transformación $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}$ y ϕ es el ángulo entre el eje local x' y el eje global x (x es el radio de revolución de la lámina). La relación entre las deformaciones seccionales y los desplazamientos seccionales es

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} \frac{du'}{dx'} \\ \frac{u' \cos\phi - w' \sin\phi}{x} \\ -\frac{d\theta}{dx'} \\ -\frac{\theta \cos\phi}{x} \\ \frac{dw'}{dx'} - \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx'} & 0 & 0 \\ \frac{\cos\phi}{x} & -\frac{\sin\phi}{x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d}{dx'} \\ 0 & 0 & -\frac{\cos\phi}{x} \\ 0 & \frac{d}{dx'} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ w' \\ \theta \end{Bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{u}' \quad (2.44)$$

donde \mathbf{L} es la matriz de operadores diferenciales.

El trabajo virtual interno se escribe en este caso como

$$\begin{aligned} L_{int} &= \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T \left[\int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dz' \right] x d\varphi dx' \\ &= 2\pi \int_0^\ell \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} x dx' = 2\pi \int_0^\ell \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} x dx' \end{aligned} \quad (2.45)$$

donde ℓ y t son la longitud de la barra generatriz y su altura (espesor de la lámina) respectivamente. En la relación anterior se ha introducido el vector de esfuerzos seccionales $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ como el conjugado energético del vector de deformaciones seccionales $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\sigma}} &= \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dz' = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ z' & 0 & 0 \\ 0 & z' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_\varphi \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} dz' \\ &= \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_\varphi \\ z' \sigma_{x'} \\ z' \sigma_\varphi \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} dz' = \begin{Bmatrix} N_{x'} \\ N_\varphi \\ M_{x'} \\ M_\varphi \\ Q_{z'} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el vector de tensiones que se relaciona con el vector de deformaciones a través de la matriz constitutiva \mathbf{C}

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_\varphi \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_\varphi \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.47)$$

La expresión de las tensiones seccionales (2.46) puede transformarse utilizando la relación (2.47) de la manera siguiente

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dz' = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{S}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dz' = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dz' = \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.48)$$

obteniéndose la expresión de la matriz constitutiva seccional $\hat{\mathbf{C}}$

$$\hat{\mathbf{C}} = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} dz' = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} E & 0 & z'E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & z'E & 0 \\ z'E & 0 & z'^2E & 0 & 0 \\ 0 & z'E & 0 & z'^2E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} dz' \quad (2.49)$$

Utilizando la misma notación y desarrollo del elemento de barra, se obtiene

$$\hat{\mathbf{C}} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} b_i E_i (z'_{i+1} - z'_i) & 0 & \frac{1}{2} b_i E_i (z'^2_{i+1} - z'^2_i) & 0 & 0 \\ 0 & b_i E_i (z'_{i+1} - z'_i) & 0 & \frac{1}{2} b_i E_i (z'^2_{i+1} - z'^2_i) & 0 \\ \frac{1}{2} b_i E_i (z'^2_{i+1} - z'^2_i) & 0 & \frac{1}{3} b_i E_i (z'^3_{i+1} - z'^3_i) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} b_i E_i (z'^2_{i+1} - z'^2_i) & 0 & \frac{1}{3} b_i E_i (z'^3_{i+1} - z'^3_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_i G_i (z'_{i+1} - z'_i) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Dicha matriz sirve para incluir el efecto de la no homogenidad del material. También puede considerarse el efecto de la ortotropía de la armadura para las estructuras que presentan armaduras circunferenciales y/o meridionales modificando adecuadamente la matriz \mathbf{C} de las capas en cuestión para dejar sólo los términos útiles.

En el caso de un problema dinámico, el término inercial del trabajo virtual externo (2.4) se escribe como

$$L_{ext}^i = - \int_V \delta \mathbf{u}'^T \rho \ddot{\mathbf{u}}' dV = - \int_V \delta \mathbf{u}'^T \mathbf{S}_u^T \rho \mathbf{S}_u \ddot{\mathbf{u}}' dV = -2\pi \int_0^\ell \delta \mathbf{u}'^T \hat{\rho} \ddot{\mathbf{u}}' x dx' \quad (2.51)$$

obteniéndose la expresión de la matriz de densidad seccional $\hat{\rho}$

$$\hat{\rho} = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{S}_u^T \rho \mathbf{S}_u dz' \quad (2.52)$$

con las mismas propiedades que la matriz $\hat{\mathbf{C}}$.

Las funciones de forma siguen dadas por la ecuación (2.21), los desplazamientos $\mathbf{u}' = \mathbf{N}\boldsymbol{\alpha}$ como en (2.29) y la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{LN}$ se obtiene empleando la relación (2.44). La matriz de transformación del sistema local de coordenadas al global \mathbf{T} tiene la misma expresión dada en (2.28) para el elemento de barra 2D.

La expresión de la condición de equilibrio en trabajos virtuales (2.34) se deduce haciendo $\hat{\mathbf{f}}^m = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{S}_u^T \mathbf{f}^m dz'$ y $\mathbf{f}^{d,m} = \mathbf{f}^d + \hat{\mathbf{f}}^m$

$$2\pi \int_0^\ell \delta \mathbf{u}'^T \hat{\rho} \ddot{\mathbf{u}}' x dx' + 2\pi \int_0^\ell \delta \dot{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{e}} x dx' = 2\pi \int_0^\ell \delta \mathbf{u}'^T \mathbf{f}^{d,m} x dx' + \sum_j \delta u_{o,j} f_j \quad (2.53)$$

Siguiendo los mismos pasos de las ecuaciones (2.32)-(2.35), se obtienen las expresiones de las matrices de masa, rigidez y fuerzas de un elemento en ejes globales como

$$\mathbf{M}^e = 2\pi \int_0^\ell \mathbf{N}^T \hat{\rho} \mathbf{N} x dx' \quad (2.54)$$

$$\mathbf{K}^e = 2\pi \int_0^\ell \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{B} x dx' \quad (2.55)$$

$$\mathbf{f}^e = 2\pi \int_0^\ell \mathbf{N}^T \mathbf{f}^{d,m} x dx' + \sum_j \mathbf{N}^T(\zeta_j) \mathbf{f}_j \quad (2.56)$$

En la ecuación (2.56) se debe tener en cuenta que $\mathbf{f}_j = 2\pi x \mathbf{f}_j^*$ si $x \neq 0$, debido al hecho que una fuerza concentrada que no actúa en el eje de revolución actúa en realidad sobre un círculo de radio x por lo que debe tener dimensiones de fuerza distribuida sobre una línea. Las fuerzas $\mathbf{f}^{d,m}$ tendrán dimensiones de fuerza distribuida sobre una superficie.

La integración numérica empleada es la misma que para el elemento de barra y el efecto de bloqueo del cortante se elimina de nuevo con la integración reducida de dos puntos para los términos de cortante de la matriz de rigidez.

2.5 ELEMENTO FINITO DE BARRA 3D

El elemento de barra 3D ha sido desarrollado a partir del elemento de barra de Timoshenko descrito en el apartado 2.3 de este capítulo. Este elemento permite modelizar el comportamiento de una pieza prismática bajo carga cualquiera mientras el anterior sólo puede tratar con cargas contenidas en uno de sus planos principales de inercia (Hanganu et al. 1993a).

Se trata de un elemento finito lagrangiano de continuidad C^0 de tres nodos y seis grados de libertad nodales. El hecho de que el modelo constitutivo precisa información a nivel de tensión-deformación, hace necesaria una discretización de la sección transversal en una retícula rectangular (Figura 2.5).

A diferencia del elemento de Timoshenko de barra plana, este elemento cuenta con los tres desplazamientos y los tres giros de un cuerpo tridimensional. Sin embargo el estado tensional es parecido puesto que ahora se añade sólo una tensión tangencial de manera que hay una tensión axial y dos tensiones tangenciales que actúan todas en la sección transversal de la barra. En cuanto a los esfuerzos seccionales, su número es de seis: a los tres del caso plano se añaden otra fuerza cortante, otro momento flector y un momento de torsión.

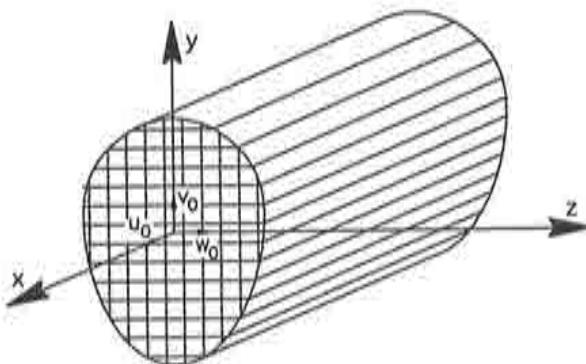


Figura 2.5 Barra 3D con sección dividida mediante una retícula. Ejes locales y globales.

El desarrollo siguiente describe las relaciones existentes entre las variables puntuales y las seccionales. La barra se considera en su sistema local de coordenadas, con su eje x' formando con las restantes dos ejes un triángulo recto. Se supone asimismo que los ejes y', z' son principales de inercia de cada sección. El convenio de signos para desplazamientos y giros es el de la mecánica clásica, igual que en los apartados anteriores. En coordenadas locales, los campos de desplazamientos y de deformación son

$$\mathbf{u}^p = \begin{Bmatrix} u^p \\ v^p \\ w^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u' + z\theta_y - y'\theta_{z'} \\ v' - z'\theta_{x'} \\ w' + y'\theta_{x'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z' & -y' \\ 0 & 1 & 0 & -z' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y' & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ \theta_{x'} \\ \theta_{y'} \\ \theta_{z'} \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \mathbf{u}' \quad (2.57)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^p}{\partial x'} \\ \frac{\partial u^p}{\partial y'} + \frac{\partial v^p}{\partial x'} \\ \frac{\partial u^p}{\partial z'} + \frac{\partial w^p}{\partial x'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du'}{dx'} + z \frac{d\theta_{y'}}{dx'} - y \frac{d\theta_{z'}}{dx'} \\ \frac{dv'}{dx'} - \theta_{z'} - z \frac{d\theta_{x'}}{dx'} \\ \frac{dw'}{dx'} + \theta_{y'} + y \frac{d\theta_{x'}}{dx'} \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.58)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left\{ \frac{du'}{dx'} \quad \frac{dv'}{dx'} - \theta_{z'} \quad \frac{dw'}{dx'} + \theta_{y'} \quad \frac{d\theta_{x'}}{dx'} \quad \frac{d\theta_{y'}}{dx'} \quad \frac{d\theta_{z'}}{dx'} \right\}^T$$

donde las variables que intervienen tienen el siguiente significado: \mathbf{u}^p – vector de desplazamientos locales de un punto cualquiera de la sección; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – vector de deformaciones; \mathbf{u}' – vector de desplazamientos en coordenadas locales del elemento finito de barra 3D, correspondiente al eje de la sección; $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – vector de deformaciones seccionales; \mathbf{S} – matriz geométrica de relación punto-sección.

Utilizando el principio de los desplazamientos virtuales para escribir las ecuaciones de equilibrio, el trabajo virtual interno L_{int} – ecuación (2.2) – correspondiente a un campo deformación virtual $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} L_{int} &= \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_o^\ell \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \left[\int_A \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dA \right] dx \\ &= \int_o^\ell \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dx' = \int_o^\ell \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dx' \end{aligned} \quad (2.59)$$

En la relación anterior ha vuelto a aparecer el vector de esfuerzos seccionales $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ como el conjugado energético del vector de deformaciones seccionales, de

manera completamente análoga a la ecuación (2.16). La única diferencia es que la matriz $S = S(y, z)$ varía ahora en las dos direcciones de la sección

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= \int_A S^T \sigma dA = \int_A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z' & -y' \\ 0 & 1 & 0 & -z' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y' & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} dA \\ &= \int_A \{ \sigma_{x'} \quad \tau_{x'y'} \quad \tau_{x'z'} \quad -z' \tau_{x'y'} + y \tau_{x'z'} \quad z' \sigma_{x'} \quad -y' \sigma_{x'} \}^T dA \quad (2.60) \\ &= \{ N_{x'} \quad Q_{y'} \quad Q_{z'} \quad T_{x'} \quad M_{y'} \quad M_{z'} \}^T\end{aligned}$$

donde $\sigma = C\varepsilon$, siendo C el tensor constitutivo de rigidez local cuyo valor es

$$C = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Empleando las relaciones (2.58), se tiene

$$\hat{\sigma} = \int_A S^T \sigma dA = \int_A S^T C \varepsilon dA = \int_A S^T C S \hat{\varepsilon} dA = \hat{C} \hat{\varepsilon} \quad (2.62)$$

A partir de esta última relación se deduce el valor de la matriz constitutiva seccional \hat{C} que relaciona las deformaciones y los esfuerzos seccionales. Asimismo, de manera completamente análoga, puede deducirse una matriz de densidad seccional $\hat{\rho}$, que relaciona las fuerzas seccionales iniciales con el vector de aceleraciones \ddot{u}' , que se obtiene derivando dos veces con respecto al tiempo la ecuación (2.57)

$$\hat{C} = \int_A S^T C S dA ; \quad \hat{\rho} = \int_A S^T \rho S dA \quad (2.63)$$

Las ecuaciones (2.63) tienen la misma forma que en el caso de los elementos presentados con anterioridad en este capítulo, con la salvedad que la integración se hace ahora sobre la cuadrícula de soporte 3D y no sobre las capas del caso 2D. El cálculo detallado de \hat{C} es

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{C}} &= \int_A \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & z'E & -y'E \\ 0 & G & 0 & -z'G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & y'G & 0 & 0 \\ 0 & -z'G & y'G & (z'^2 + y'^2)G & 0 & 0 \\ z'E & 0 & 0 & 0 & z'^2E & -y'z'E \\ -y'E & 0 & 0 & 0 & -y'z'E & y'^2E \end{bmatrix} dA \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{y'_i}^{y'_{i+1}} \int_{z'_i}^{z'_{i+1}} \begin{bmatrix} E_i & 0 & 0 & 0 & z'E_i & -y'E_i \\ 0 & G_i & 0 & -z'G_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_i & y'G_i & 0 & 0 \\ 0 & -z'G_i & y'G_i & (z'^2 + y'^2)G_i & 0 & 0 \\ z'E_i & 0 & 0 & 0 & z'^2E_i & -y'z'E_i \\ -y'E_i & 0 & 0 & 0 & -y'z'E_i & y'^2E_i \end{bmatrix} dy' dz' \quad (2.64)
 \end{aligned}$$

Dado que las cuadrículas son rectángulos con los lados paralelos a los ejes de inercia, las integrales dobles se pueden integrar de manera independiente en función de cada variable.

El elemento finito está definido por 3 nodos con 6 grados de libertad cada uno. Se emplean las mismas funciones de forma que en el caso plano. La matriz de funciones de forma \mathbf{N}' y el vector de desplazamientos nodales \mathbf{a}' tienen la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}'_i &= N_i \mathbf{I}_6 \quad ; \quad \mathbf{N}' = \{ N'_1 \quad N'_2 \quad N'_3 \} \\
 \mathbf{a}'_i &= \{ u'_i \quad v'_i \quad w'_i \quad \theta_{x'i} \quad \theta_{y'i} \quad \theta_{z'i} \}^T \quad ; \quad \mathbf{a}' = \{ a'_1 \quad a'_2 \quad a'_3 \}^T \quad (2.65)
 \end{aligned}$$

donde \mathbf{I}_6 es la matriz unidad de rango 6. De la ecuación (2.58) se deduce el valor de la matriz \mathbf{B}' como

$$\mathbf{B}'_i = \begin{bmatrix} \frac{dN_i}{dx'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dN_i}{dx'} & 0 & 0 & 0 & -N_i \\ 0 & 0 & \frac{dN_i}{dx'} & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{dN_i}{dx'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dN_i}{dx'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dN_i}{dx'} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B}' = \{ B'_1 \quad B'_2 \quad B'_3 \} \quad (2.66)$$

La transformación del sistema local al sistema global de coordenadas se obtiene observando que las tres translaciones y los tres giros forman dos vectores espaciales que se proyectan en el sistema global de coordenadas a través de la transformación \mathbf{T}_0 definida a continuación. Las notaciones son las mismas que las utilizadas en la descripción del elemento de barra 2D.

$$\mathbf{a}'_i = \mathbf{T} \mathbf{a}_i ; \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{T}_0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) & \cos(x', z) \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) & \cos(y', z) \\ \cos(z', x) & \cos(z', y) & \cos(z', z) \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Con esto, se obtienen las expresiones de las matrices \mathbf{N}_i y \mathbf{B}_i

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{N}'_i \mathbf{T} ; \quad \mathbf{B}_i = \mathbf{B}'_i \mathbf{T} \quad (2.68)$$

y finalmente

$$\mathbf{u}' = \mathbf{N} \mathbf{a} ; \quad \ddot{\mathbf{u}}' = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{a}} ; \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (2.69)$$

Siguiendo los mismos pasos descritos para el elemento 2D, se obtienen las expresiones de los vectores de fuerzas internas elásticas \mathbf{F}_e e iniciales \mathbf{F}_d

$$\mathbf{F}_e = \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dx = \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} dx' ; \quad \mathbf{F}_d = \int_{\ell} \mathbf{N}^T \hat{\rho} \ddot{\mathbf{u}}' dx' \quad (2.70)$$

donde ℓ es la longitud del elemento finito. Con estas últimas transformaciones, las fuerzas elásticas e iniciales quedan

$$\mathbf{F}_e = \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{B} dx' \mathbf{a} = \mathbf{K} \mathbf{a} ; \quad \mathbf{F}_d = \int_{\ell} \mathbf{N}^T \hat{\rho} \mathbf{N} dx' \ddot{\mathbf{a}} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} \quad (2.71)$$

de donde pueden extraerse las matrices elementales de rigidez y masa globales, \mathbf{K} y \mathbf{M} , respectivamente. Éstas se integran con una cuadratura gaussiana reducida de 2 puntos para los términos de cortante para evitar efectos de bloqueo de cortante.

El proceso de cálculo no lineal consiste en la evaluación de las deformaciones seccionales $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ correspondientes a los desplazamientos \mathbf{a} , tal como puede verse en la ecuación (2.69). Con éstas se evalúan las deformaciones puntuales $\boldsymbol{\epsilon}$ mediante la ecuación (2.58) y las tensiones correspondientes, que luego se corrigen dentro del modelo constitutivo, y luego integrarlas sobre la sección, mediante la relación (2.60), a fin de obtener los esfuerzos seccionales correspondientes. De esta

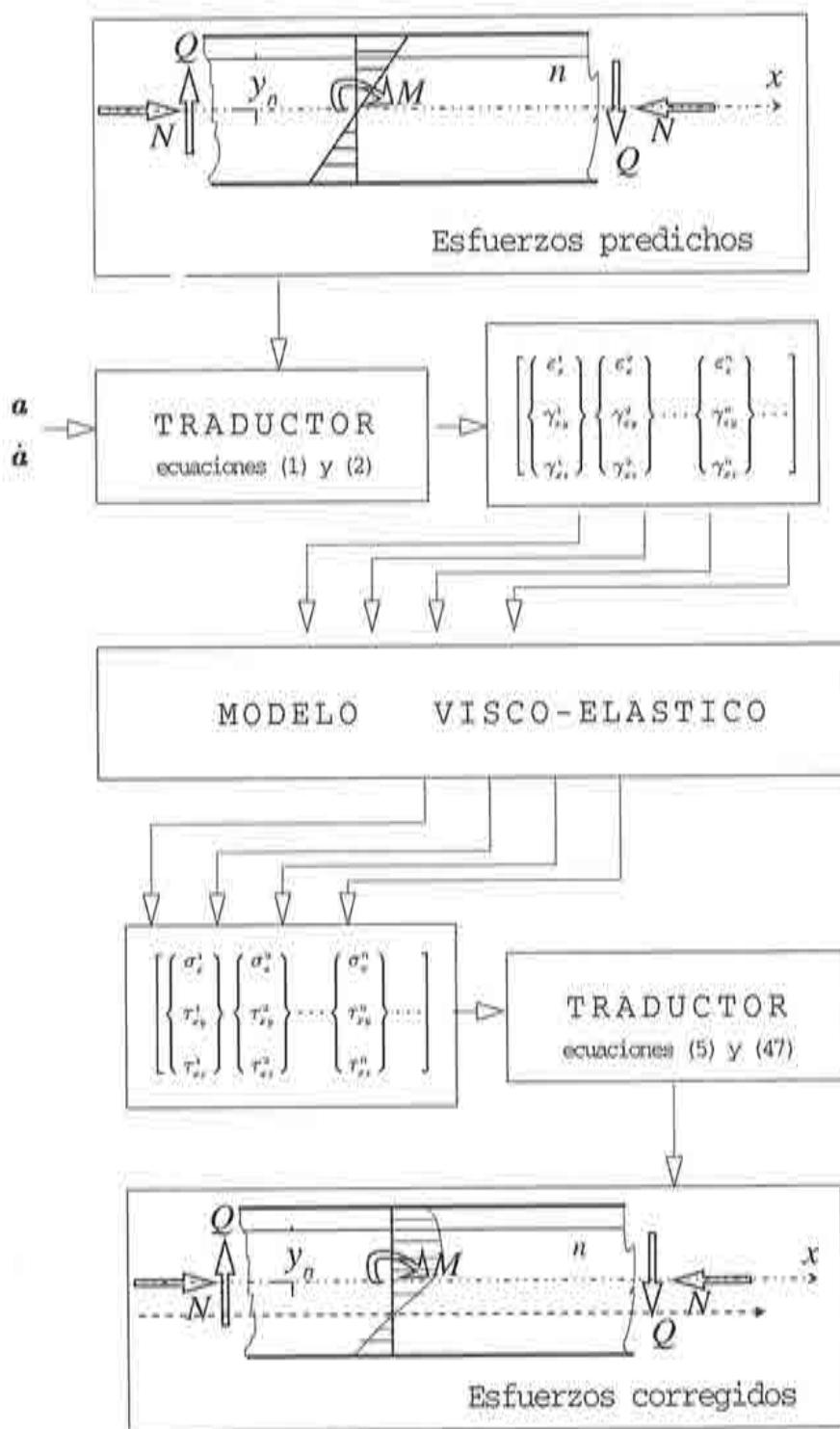


Tabla 2.1 Algoritmo de cálculo no lineal (Barbat et al. 1997)

manera pueden calcularse ahora las fuerzas residuales con algoritmos estandar. Este procedimiento se recoge sintéticamente en la Tabla 2.1.

La sección de la viga está discretizada mediante una cuadrícula ortogonal no homogénea. Los ejes de la cuadrícula deben ser paralelos a las direcciones principales de inercia de la sección. Cada rectángulo de la cuadrícula puede estar caracterizado por un material y dimensiones geométricas distintas. Las cuatro esquinas de cada rectángulo son los puntos de cálculo de las deformaciones y tensiones. Para integrar las tensiones seccionales a partir de las tensiones suministradas por el modelo constitutivo, se considera que todas las tensiones involucradas tienen una variación lineal dentro de una celda de la cuadrícula. Esto obliga a resolver para cada cuadrícula y cada tensión un sistema sobre determinado de cuatro ecuaciones con tres incógnitas, obteniendo de esta manera la ecuación del plano que aproxima por mínimos cuadrados la variación de cada componente del tensor de tensiones. Esta misma cuadrícula sirve también para calcular todas las demás características seccionales como momentos de inercia y estáticos mecánicos, eje neutro, etc.

2.6 ELEMENTO DE SÓLIDO 3D DE HORMIGÓN ARMADO

En muchos casos la complejidad de las características geométricas, mecánicas o de las cargas no permite la utilización de modelos de cálculo simplificados como barras, sólidos 2D o de revolución. En esos casos se debe utilizar la teoría general tridimensional del sólido aunque el coste de su aplicación sea más elevado. Plantear los elementos de sólido 3D no presenta ninguna dificultad teórica puesto que se utilizan conceptos generales de la elasticidad tridimensional que no requieren el esfuerzo de particularización y simplificación propio a las formulaciones uni y bidimensionales.

En este apartado se analiza brevemente el elemento de sólido isoparamétrico hexaédrico serendípito de 20 nodos (tri-cuadrático) (Cervera y Hinton 1986; Cervera et al. 1987, 1988, 1990). Cada nodo tiene como grados de libertad 3 desplazamientos. Dicho elemento tridimensional está formado por una matriz de material homogéneo que puede ser el hormigón y capas de otros materiales anisótropos que pueden ser distintos tipos de acero, que modelizan la armadura.

El campo de desplazamientos en un punto cualquiera del sólido en el sistema de coordenadas global es

$$\mathbf{u} = \{ u \quad v \quad w \}^T \quad (2.72)$$

donde u , v y w son los desplazamiento del punto según los ejes cartesianos globales x , y , z , respectivamente.

El campo de deformaciones se obtiene, de acuerdo con la elasticidad tridimensional, como un vector de seis componentes

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (2.73)$$

El campo de tensiones es

$$\boldsymbol{\sigma} = \{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \}^T = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.74)$$

donde \mathbf{C} es la matriz constitutiva general para un material isótropo dada por la ecuación (2.13).

La formulación de elementos finitos parte del discretización nodal y describe los campos elementales en función de los valores nodales de los desplazamientos. Por consiguiente, el campo elemental de desplazamientos es

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{20} \begin{Bmatrix} N_i u_i \\ N_i v_i \\ N_i w_i \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{20} \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{Na} \quad (2.75)$$

donde han sido utilizadas las notaciones habituales

$$\mathbf{N}_i = N_i \mathbf{I}_3 ; \mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} ; \mathbf{N} = \{ \mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \dots \quad \mathbf{N}_{20} \} ; \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \dots \\ \mathbf{a}_{20} \end{Bmatrix} \quad (2.76)$$

en las cuales \mathbf{N} es la matriz de funciones de forma y \mathbf{a} es el vector de desplazamientos nodales. Las funciones de forma N_i en coordenadas locales normalizadas del elemento serendipítico de 20 nodos pueden encontrarse en Oñate (1992).

La relación entre las incógnitas nodales \mathbf{a} y las deformaciones $\boldsymbol{\epsilon}$ se obtiene de las ecuaciones (2.73) y (2.75)

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{LN}\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{20} \mathbf{B}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{Ba} \quad (2.77)$$

de donde se obtiene la expresión de la matriz de deformación \mathbf{B}_i

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{LN}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \{ \mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \dots \quad \mathbf{B}_{20} \} \quad (2.78)$$

La obtención de la matriz de rigidez \mathbf{K}_c de la parte de hormigón del elemento y la matriz de masa \mathbf{M} se realiza en la forma habitual, utilizando las siguientes expresiones:

$$\mathbf{K}_c = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C}_c \mathbf{B} dV; \quad \mathbf{M} = \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \quad (2.79)$$

donde \mathbf{C}_c es la matriz constitutiva del material base, ρ es su densidad y la integral se extiende sobre el volumen del elemento considerado.

Normalmente, la integración de los elementos isoparamétricos hexaédricos de 20 nodos se realiza usando las reglas de Gauss-Legendre o de Lobatto con $3 \times 3 \times 3$ puntos. La regla de Gauss es más precisa, mientras que la de Lobatto tiene puntos de integración sobre las caras de los elementos, donde se producen normalmente los picos de tensión. En los análisis que se realizaron en la monografía se aplica una regla de integración distinta, que es a la vez precisa y eficiente. Esta regla, de sólo 15 puntos de integración, se puede expresar como (Cervera y Hinton 1986):

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3 = Af(0, 0, 0) +$$

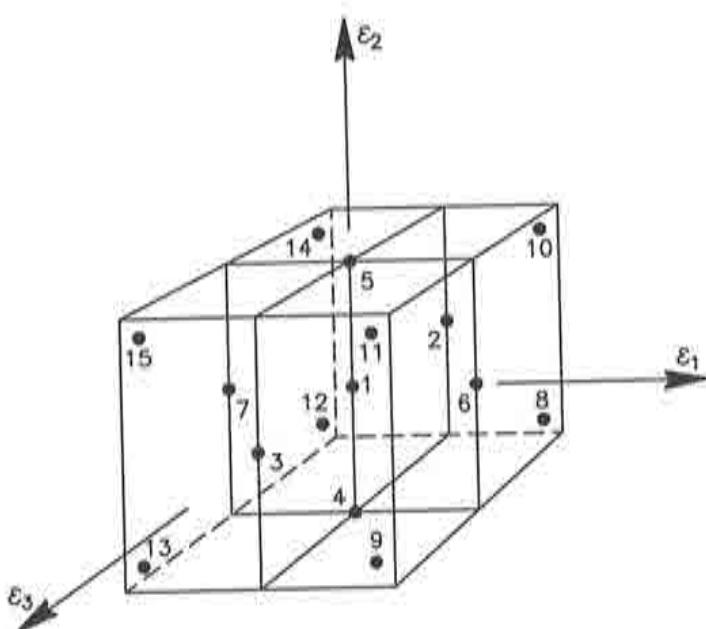


Figura 2.6 Distribución de los puntos de integración en el elemento sólido hexaédrico.

$$+B[f(-b, 0, 0) + f(b, 0, 0) + \dots] + C[f(-c, -c, -c) + f(-c, -c, c) + \dots] \quad (2.80)$$

donde ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 son las coordenadas naturales normalizadas, y los respectivos coeficientes de peso y posiciones son: $A = 1.564444, B = 0.3555556, C = 0.5377778, b = 1.000000$ y $c = 0.6741000$. Como se puede ver en la Figura 5.6 la distribución de puntos de integración en esta regla es tal que hay 6 puntos en los centros de las caras de los elementos.

Para la incorporación de las armaduras, se supone adherencia perfecta entre las barras de acero de las armaduras y el hormigón circundante. Esta hipótesis de compatibilidad de desplazamientos y deformaciones entre el acero y el hormigón permite tratar la armadura como parte integrante del elemento sólido.

Cada conjunto de barras de armadura se distribuye como una capa bidimensional de membrana de espesor equivalente, colocada en el interior del elemento de hormigón en una posición tal que una de las coordenadas isoparamétricas sea constante, como se muestra en la Figura 2.7 (Cervera y Hinton 1986). El ángulo que forman las barras con el eje x de un sistema cartesiano local tangente a la capa de acero en cada punto de integración puede variar y se introduce como dato.

Las matrices de rigidez de las capas de acero, \mathbf{K}_s^i , se suman a la del hormigón, \mathbf{K}_c , para obtener la matriz de rigidez total del elemento, de la forma

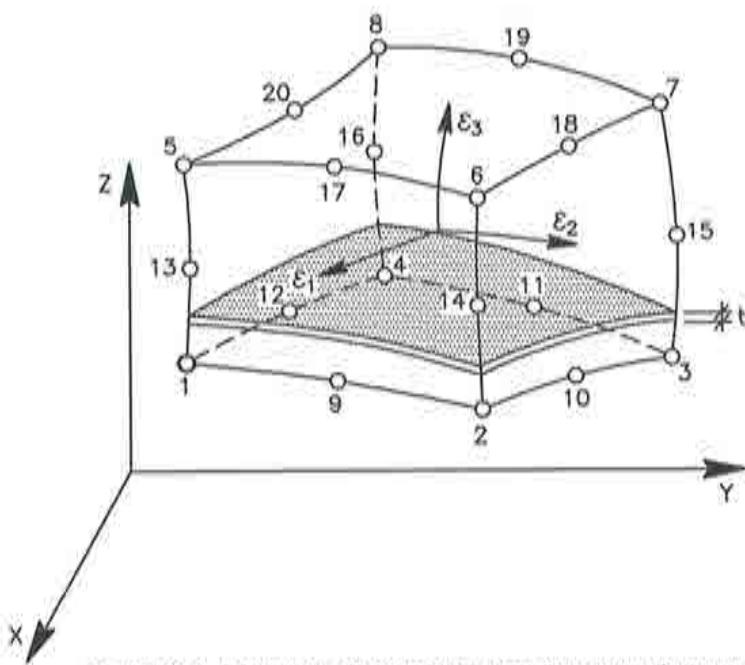


Figura 2.7 Elemento de hormigón con una capa de armadura.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c + \sum_i \mathbf{K}_s^i \quad (2.81)$$

La contribución de la rigidez de una capa acero se calcula de la forma

$$\mathbf{K}_s^i = \int \int_{\Omega^i} \mathbf{T}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}_s^i \mathbf{B} \mathbf{T} t d\Omega \quad (2.82)$$

donde \mathbf{C}_s^i es la matriz constitutiva del acero de la capa i , \mathbf{T} es la matriz de transformación del sistema local de referencia propio de la capa al sistema global y t es el espesor equivalente de la capa de armadura. La integral se extiende sobre la sección del elemento Ω^i perpendicular a la coordenada local que da la ecuación del plano de la capa. Esta integral utiliza la misma matriz \mathbf{B} que la ecuación (2.79) puesto que la capa es parte integrante del elemento finito debido a la compatibilidad de deformaciones. Para la integración numérica se emplea una cuadratura de Gauss de 3×3 puntos de integración distribuidos en el plano de la capa.

Como las capas de acero substituyen la presencia real de barras de armadura, la matriz constitutiva \mathbf{C}_s tiene esto en cuenta tomando características de rigidez unidimensionales, es decir hay rigidez sólo en la dirección de la barra. El sistema de referencia local de la capa está orientado con el primer eje a lo largo de la

barra de manera que sólo un término de \mathbf{C}_s será no nulo. Su expresión es la siguiente:

$$\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

donde E es el modulo elástico del material de la capa.

CAPÍTULO 3

MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO ISÓTROPO

3.1 EL CONCEPTO DE DAÑO

Es sabido que la microfisuración en el hormigón y la mampostería ocurre a niveles de carga bajos debido a la pérdida de cohesión entre las partículas de mortero y el árido o por fisuración del mismo mortero (*ASCE* 1981). La fisuración progresiva sigue caminos no homogéneos que combinan los mecanismos arriba mencionados con el crecimiento y la conexión de las microfisuras en varias direcciones. Los experimentos sobre mortero han evidenciado que la distribución de las microfisuras es altamente discontinua con orientaciones arbitrarias (Bažant 1986; Area y Ingraffea 1981). Este hecho está demostrado por muchos experimentos que muestran que la fisuración puede ser considerada un fenómeno no direccional y que la propagación de las fisuras sigue caminos aleatorios que dependen del tamaño de las partículas del árido. De esta manera, las direcciones de fisuración dominantes pueden interpretarse como el lugar geométrico de las trayectorias de los puntos dañados del material (véase la Figura 3.1).

Los conceptos anteriores apoyan la idea de que el comportamiento no lineal del hormigón y la mampostería pueden modelizarse utilizando la teoría del daño si se define una función de daño adecuada que tenga en cuenta la diferencia de respuesta de estos materiales en tracción y compresión (Oller 1991; Oñate et al. 1988; Lubliner et al. 1989; Lemaître 1984, 1985; Simó y Ju 1987a, 1987b; Kachanov 1980; Wastiels 1979). La fisuración se interpreta en este caso como un efecto de daño local definido por la evolución de parámetros conocidos de material y de una o varias funciones que controlan la aparición y evolución del daño.

Una de las ventajas de un modelo de este tipo es la independencia del análisis de las direcciones de fisuración que pueden identificarse “a posteriori” una vez se haya obtenido la solución no lineal (Oller 1991; Oñate et al. 1988; Lubliner et al. 1989). En esta monografía ha sido utilizada una extensión del modelo

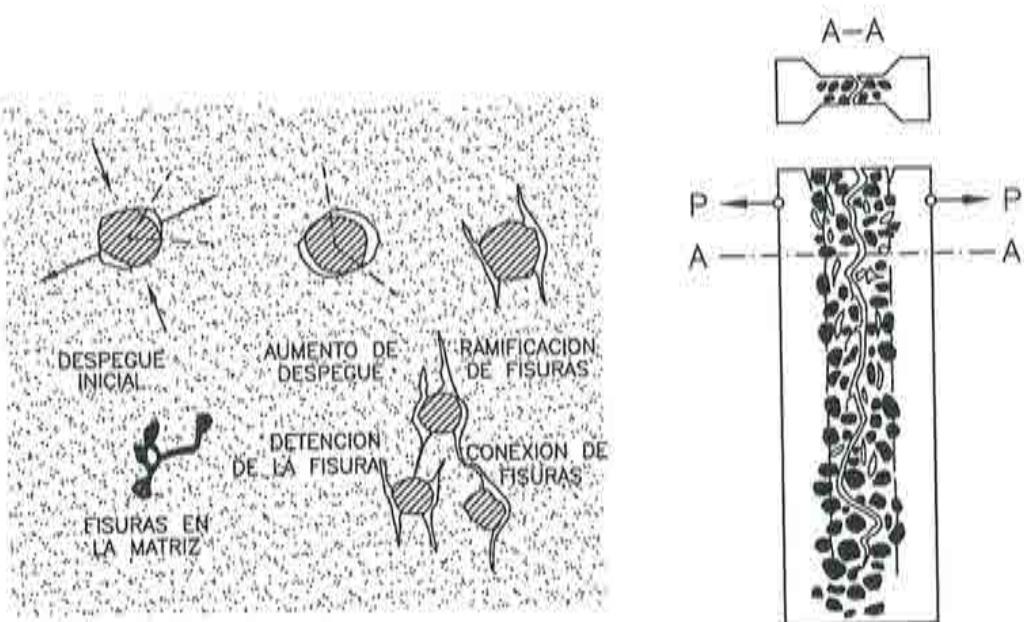


Figure 3.1 Mecánica del daño y propagación de una fisura macroscópica en hormigón en masa.

de daño isotrópico desarrollado en los últimos años (Oller 1991; Mang et al. 1994; Oñate et al. 1988; Lubliner et al. 1989; Barbat et al. 1992a; Hanganu et al. 1993b; Cervera et al. 1990; Oliver et al. 1990; Oñate et al. 1986) para el análisis del comportamiento no lineal de estructuras de hormigón. El modelo mencionado tiene en cuenta todos los aspectos importantes que deben considerarse en un análisis no lineal de estructuras de hormigón y mampostería, tales como la diferencia de comportamiento en tracción y compresión, el efecto de la degradación de la rigidez debido a causas mecánicas y la objetividad de la respuesta con respecto a diferentes mallas de elementos finitos.

Para aclarar mejor el concepto de daño, se considera una superficie elemental en un volumen de material degradado. Dicha superficie es suficientemente grande para tener un número representativo de defectos, pero al mismo tiempo puede todavía considerarse como perteneciente a un punto material específico. En la Figura 3.2, S_n es el área de toda la sección, \bar{S}_n el área resistente efectiva ($S_n - \bar{S}_n$ siendo el área ocupada por los huecos) y, como consecuencia, la variable de daño d_n asociada a esta superficie es

$$d_n = \frac{S_n - \bar{S}_n}{S_n} = 1 - \frac{\bar{S}_n}{S_n} \quad (3.1)$$

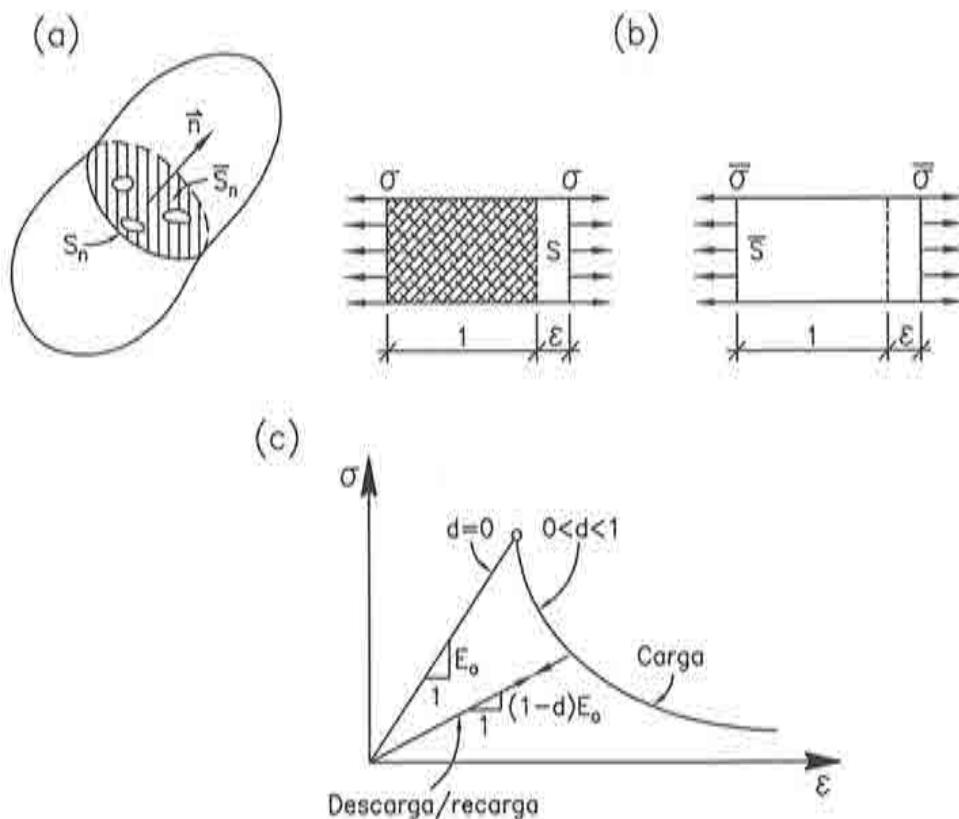


Figure 3.2 (a) Superficie dañada; (b) Tensión de Cauchy σ y tensión efectiva $\bar{\sigma}$; (c) Evolución de la curva uniaxial tensión-deformación.

En la relación anterior d_n representa la densidad de los defectos del material y tendrá el valor cero en el estado inicial no dañado. A medida que la fisuración avanza d_n tenderá hacia un valor crítico cercano a la unidad que corresponde a la completa desaparición del área resistente \bar{S}_n . En la mayoría de los casos es suficiente una representación escalar del daño ($d_n = d$) para asegurar la modelización realista del material. En este caso las microfisuras no tienen una dirección particular y la fisura macroscópica se define posteriormente como el lugar geométrico de los puntos dañados.

Un concepto útil para entender el efecto del daño es el de tensión efectiva. La relación de equilibrio entre la tensión de Cauchy estandar σ y la tensión efectiva $\bar{\sigma}$ en el caso de la probeta dañada de la Figura 3.2 es

$$\sigma S = \bar{\sigma} \bar{S} \quad (3.2)$$

y utilizando (3.1) and (3.2) se obtiene

$$\sigma = (1 - d)\bar{\sigma} = (1 - d)E\varepsilon \quad (3.3)$$

Durante un proceso de degradación en desarrollo, es el área efectiva la que soporta la carga exterior y, por este motivo, $\bar{\sigma}$ es un parámetro más representativo físicamente que σ .

3.2 CONSIDERACIONES SOBRE LOS MODELOS DE DAÑO

Los modelos de daño continuo son relaciones constitutivas en las cuales el efecto de la fisuración y del crecimiento de microhuecos en la masa del hormigón se introducen a través de variables internas de estado que actúan sobre la rigidez elástica del material.

Los modelos de daño tienen una formulación relativamente sencilla y, a la vez, rigurosa desde el punto de vista termodinámico. Ellos describen el comportamiento no lineal mediante una o varias variables internas de daño, que miden la pérdida de rigidez secante del material y que se normalizan con respecto a la unidad, la cual corresponde al daño máximo. En la Figura 3.3 puede verse la representación unidimensional del comportamiento de un punto de un material dañado. El efecto de daño se traduce en una disminución del módulo de rigidez secante.

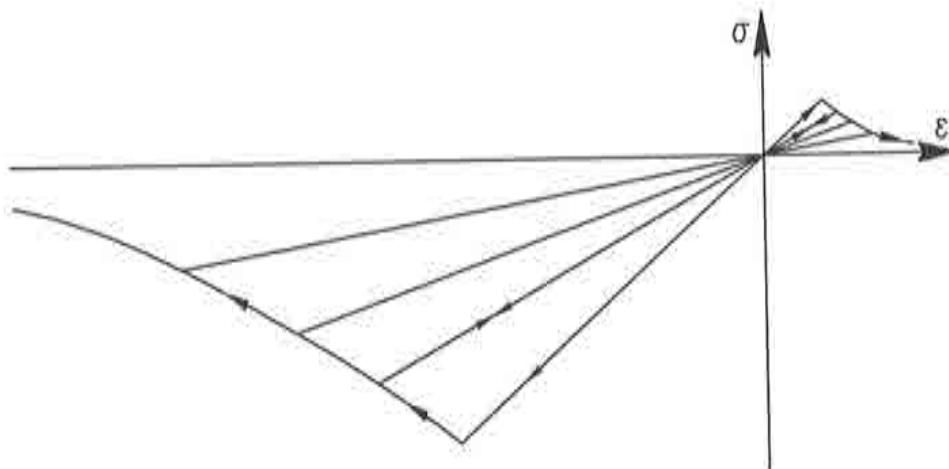


Figura 3.3 Representación unidimensional de la pérdida de rigidez por daño local.

El modelo considerado en esta tesis es un modelo constitutivo de daño basado en la mecánica del sólido deformable y tiene una sola variable interna. Por consiguiente, se trata de un modelo de daño isótropo y se basa en la teoría

de Kachanov (1958). En este modelo se han incluido experiencias posteriores en la modelización del daño como las de Simó y Ju (1987a,1987b), Lubliner et al. (1989) y Oliver et al. (1990). Dicha formulación es un compromiso entre la complejidad necesaria para modelizar el comportamiento del hormigón y la versatilidad que se precisa para calcular problemas grandes. Esto asegura buenos resultados y soluciones de bajo coste en el estudio de problemas no lineales.

3.3 CARÁCTERÍSTICAS DEL MODELO

3.3.1 Consideraciones energéticas

El modelo se formula, para problemas térmicamente estables, en la configuración material lagrangiana para pequeñas deformaciones y desplazamientos. Para este caso particular se considera la siguiente expresión matemática para la energía libre Ψ , en la cual su parte elástica no degradada se escribe como una función escalar cuadrática de argumentos tensoriales:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}; d) = (1 - d)\Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) = (1 - d) \left(\frac{1}{2m_0} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}^0 \right) = (1 - d) \left(\frac{1}{2m_0} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}^0 \boldsymbol{\varepsilon} \right) \quad (3.4)$$

El tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ es la variable libre del problema, d ($0 \leq d \leq 1$) es la variable interna de daño, m_0 es la densidad en la configuración material y \mathbf{C}^0 es el tensor de rigidez del material en el estado inicial no dañado.

3.3.2 Inecuación de Clasius-Planck. Disipación mecánica

Para problemas térmicamente estables es válida la inecuación de Clasius-Planck para representar la dissipación Ξ_m , que establece que ésta es siempre creciente, es decir, la potencia dissipativa $\dot{\Xi}_m$ de un punto es siempre positiva y tiene la siguiente forma local lagrangiana:

$$\dot{\Xi}_m = \frac{1}{m_0} \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (3.5)$$

o bien†

† Las derivadas vectoriales simbólicas obedecen a la siguiente regla: la derivada de un escalar con respecto a un vector columna es un vector linea y, viceversa, la derivada de un escalar con respecto a un vector linea es un vector columna. Extrapolando esta regla a la derivada de un vector columna con respecto a otro vector columna, se obtiene que el resultado es una matriz con tantas líneas cuantos componentes tiene el vector "numerador" y tantas columnas cuantos componentes hay en el vector "denominador".

$$\dot{\Xi}_m = \frac{1}{m_0} \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \right) \geq 0 \quad (3.6)$$

y, finalmente,

$$\dot{\Xi}_m = \left(\frac{1}{m_0} \boldsymbol{\sigma}^T - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad (3.7)$$

Esta última expresión de la potencia disipativa permite hacer las siguientes observaciones:

a) La inecuación (3.7) debe cumplirse para cualquier variación temporal arbitraria de la variable libre $\boldsymbol{\epsilon}$, con lo cual el multiplicador de $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ tiene que ser cero. Esta condición proporciona la ley constitutiva hiperelástica secante para el problema de daño estudiado, que es

$$\frac{1}{m_0} \boldsymbol{\sigma}^T - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = m_0 \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right\}^T = (1-d) \boldsymbol{C}^0 \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{C}^s \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.8)$$

$$\boxed{\boldsymbol{C}^s = (1-d) \boldsymbol{C}^0}$$

donde \boldsymbol{C}^s es la matriz constitutiva secante del material dañado.

b) Considerando la última ecuación, la potencia disipativa queda

$$\dot{\Xi}_m = - \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} = \Psi_0 \dot{d} \geq 0 \quad (3.9)$$

lo que es equivalente a $\dot{d} \geq 0$, es decir el daño local nunca puede disminuir.

3.3.3 Criterio umbral de degradación o daño

El umbral de daño se define como una función de la energía libre del material no dañado que, a su vez, está escrita en función de las tensiones principales no dañadas $\sigma_i^{p,0}$

$$F = K(\boldsymbol{\sigma}^{p,0}) \sqrt{2m_0 \Psi_0} - 1 = \frac{K(\boldsymbol{\sigma}^{p,0})}{\sqrt{E^0}} \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^{p,0})^2} - 1 \leq 0 \quad (3.10)$$

cuyos términos tienen el siguiente significado:

$$K(\sigma^{p,0}) = \frac{r}{\sqrt{2m_0(\Psi_t^0)_L}} + \frac{1-r}{\sqrt{2m_0(\Psi_c^0)_L}} ; \quad r = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i^{p,0} \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i^{p,0}|}$$

$$2m_0(\Psi_{t,c}^0)_L = \sum_{i=1}^3 \langle \pm \sigma_i^{p,0} \rangle \varepsilon_i ; \quad (\Psi_0)_L = (\Psi_t^0)_L + (\Psi_c^0)_L$$

En estas ecuaciones $(\Psi_{t,c}^0)_L$ representa la parte de la energía libre desarrollada cuando se alcanza el límite de resistencia a tracción o compresión del material y $\langle \pm x \rangle = \frac{1}{2}(|x| \pm x)$ es la función de McAuley. La variable r es un escalar que en el caso de un estado de compresión pura toma el valor 0, en el caso de tracción pura el valor 1 y valores intermedios en los demás casos de manera que indica el estado tensional dominante según está más cerca de un límite u otro. Su papel es el de unificar en un único criterio de daño los límites de degradación diferentes en tracción y compresión.

Teniendo en cuenta que las resistencias a tracción y compresión son $f_t = (2m_0\Psi_t^0 E^0)_L^{1/2}$ y $f_c = (2m_0\Psi_c^0 E^0)_L^{1/2}$ respectivamente, la función umbral de daño puede escribirse como

$$F = \bar{\sigma} - f_c = [1 + r(n-1)] \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^{p,0})^2} - f_c \leq 0 \quad (3.11)$$

con $n = f_c/f_t$. En el caso de un estado de tracción triaxial la primera parte del segundo miembro de la ecuación (3.11) toma el valor n , es decir la tensión equivalente se debe multiplicar por este valor para poder compararla con el umbral de daño f_c . En un caso de compresión triaxial su valor es 1.

Esta función de umbral de daño, expresada en el espacio de tensiones principales no dañadas, permite una gran diversidad de soluciones distintas. La ventaja del criterio de daño (3.11) consiste en la posibilidad de emplear cualquier función F siempre cuando ésta sea homogénea y de primer grado en tensiones, como, por ejemplo, las de Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, Lubliner (1990), etc. La forma dada en la ecuación (3.11) cumple con los requisitos antes mencionados; además, es sencilla y satisfactoria en resultados dentro del rango de trabajo que utiliza el modelo y, por esta razón, es la expresión escalar que define la tensión uniaxial equivalente $\bar{\sigma}$. Una representación de la superficie de degradación puede verse en la Figura 3.4.

Una expresión totalmente equivalente a (3.11), propuesta por Simó y Ju (1987a) a fin de simplificar la deducción matemática de la variable de daño

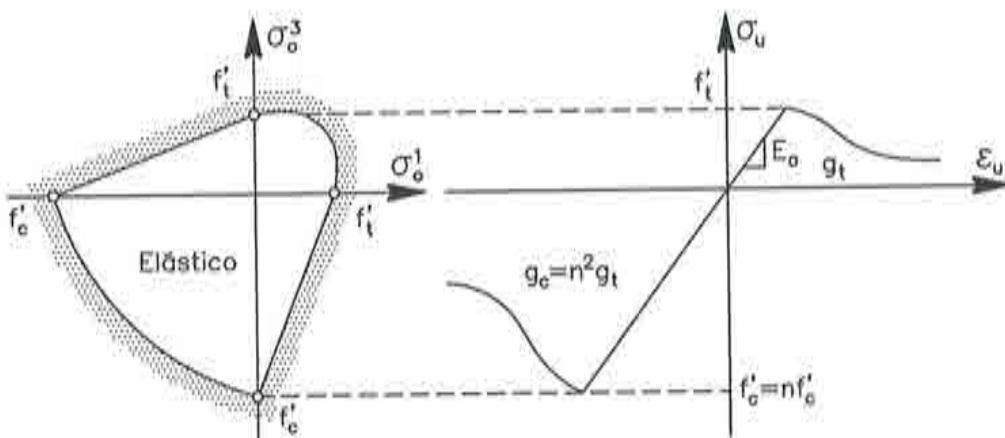


Figura 3.4 Función umbral de daño en el plano principal $\sigma_1 - \sigma_2$.

del modelo, es la siguiente:

$$\bar{F} = G(\bar{\sigma}) - G(f_c) \leq 0 \quad (3.12)$$

donde $G(\chi)$ es una función escalar, invertible, positiva y de derivada positiva, a determinar. Su forma se escogerá de una manera conveniente para el desarrollo ulterior del modelo de daño.

3.3.4 Regla de evolución de la variable interna de daño

Se utiliza la siguiente forma matemática para definir la regla de evolución de la variable interna de daño, análoga a la regla de flujo plástico

$$\dot{d} = \dot{\eta} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}} = \dot{\eta} \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \quad (3.13)$$

donde $\dot{\eta}$ es un escalar no negativo llamado parámetro de consistencia de daño, análogo al parámetro de consistencia plástica λ de la plasticidad.

3.3.5 Condición de consistencia de daño

El valor del parámetro de consistencia de daño se obtiene a partir de unas condiciones análogas al segundo postulado de Drucker en plasticidad que, en los modelos de daño, son las condiciones de Ilyushin. Estas condiciones requieren que para que haya desarrollo de procesos de daño, el punto debe encontrarse sobre la superficie umbral de daño ($\bar{F} = 0$) y permanecer sobre ella durante

dichos procesos ($\dot{\bar{F}} = 0$, lo que significa que \bar{F} mantiene en el tiempo su valor nulo). Estas condiciones conducen a la siguiente serie de deducciones:

$$\bar{F} = 0 \Rightarrow G(\bar{\sigma}) - G(f_e) = 0 \Rightarrow G(\bar{\sigma}) = G(f_e) \quad (3.14)$$

Debido a las propiedades de invertibilidad y derivabilidad de la función $G(x)$ se obtiene

$$G(\bar{\sigma}) = G(f_e) \Rightarrow \bar{\sigma} = f_e \Rightarrow \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} = \frac{dG(f_e)}{df_e} \quad (3.15)$$

Por otra parte, de la condición de permanencia sobre la superficie umbral de daño se deduce que

$$\dot{\bar{F}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial f_e} \dot{f}_e = \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} - \frac{dG(f_e)}{df_e} \dot{f}_e = 0 \quad (3.16)$$

de donde resulta

$$\frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} = \frac{dG(f_e)}{df_e} \dot{f}_e \Rightarrow \dot{\bar{\sigma}} = \dot{f}_e \quad (3.17)$$

La primera parte de la relación anterior puede ponerse en la siguiente forma alternativa:

$$\frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} = \frac{dG(f_e)}{df_e} \dot{f}_e = \frac{dG(f_e)}{df_e} \frac{df_e}{d(d)} \dot{d} = \frac{dG(f_e)}{d(d)} \dot{\eta} \frac{d\bar{G}(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \quad (3.18)$$

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{dG(f_e)}{d(d)} \dot{\eta} \quad (3.19)$$

Adoptándose la función $G(f_e)$ como la función que describe la evolución del daño ($d = G(f_e)$), queda determinado el parámetro de consistencia de daño $\dot{\eta}$ como

$$\dot{\eta} = \dot{\bar{\sigma}} = \dot{f}_e = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^o} \dot{\sigma}^o = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^o} C^o \dot{\epsilon} \quad (3.20)$$

Substituyendo esta última ecuación en (3.13) y luego en (3.9), se obtienen las expresiones que formulan la evolución temporal de las variables de daño y de disipación

$$\dot{d} = \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} = \dot{G}(\bar{\sigma}) \Rightarrow d = \int_0^t \dot{d} dt \equiv \int_0^t \dot{G}(\bar{\sigma}) dt = G(\bar{\sigma}) \quad (3.21)$$

$$\dot{\Xi}_m = \Psi_o \dot{G}(\bar{\sigma}) = \Psi_o \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} = \Psi_o \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^o} C^o \dot{e} \quad (3.22)$$

3.3.6 Condición de carga/descarga

La condición de carga/descarga se deriva de las relaciones de Kuhn-Tucker formuladas para problemas con restricciones unilaterales (Oller 1988):

- (a) $\dot{\eta} \geq 0$;
- (b) $\bar{F} \leq 0$;
- (c) $\dot{\eta}\bar{F} = 0$.

A partir de éstas, si $\bar{F} < 0$ la tercera condición hace que $\dot{\eta} = 0$ o, lo que es lo mismo, hace que no puedan desarrollarse procesos de daño y, si $\dot{\eta} > 0$, la misma condición requiere que $\bar{F} = 0$, es decir, que se ha alcanzado la superficie umbral de daño y que se están desarrollando fenómenos de degradación.

3.3.7 Particularización de la función $G(\bar{\sigma})$

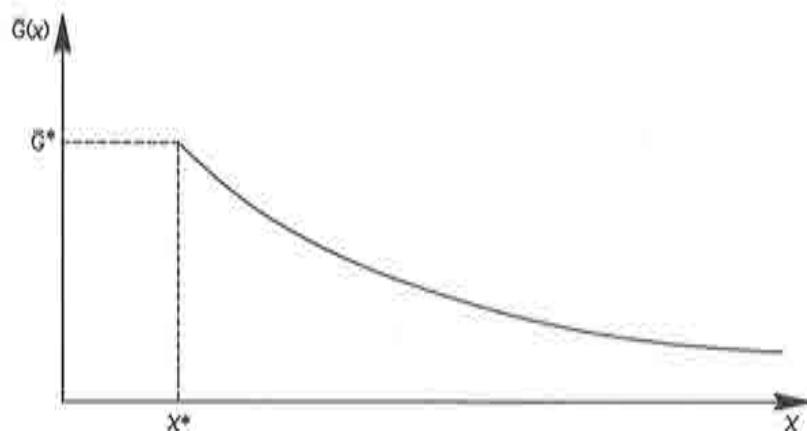
Entre las diversas alternativas para definir la función de evolución de daño $G(\bar{\sigma})$, se elige la siguiente (Oliver et al. 1990):

$$G(\bar{\sigma}) = 1 - \frac{\bar{G}(\bar{\sigma})}{\bar{\sigma}} \quad (3.23)$$

donde $\bar{G}(\bar{\sigma})$ describe una función similar a la presentada en la Figura 3.5, de manera que para $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^*$ la tensión de compresión umbral inicial es \bar{G}^* y para $\bar{\sigma} \rightarrow \infty$ la resistencia final $\bar{G} \rightarrow 0$. De este modo, recorriendo todo el camino, el punto habrá disipado una energía equivalente a su energía de fractura específica. Este función define la evolución del umbral de daño que es una magnitud análoga a la superficie de fluencia en la plasticidad.

En esta monografía se utiliza la función $\bar{G}(\bar{\sigma})$ exponencial propuesta por Oliver et al. (1990)

$$\bar{G}(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}^* e^{A(1 - \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^*})}; \quad G(\bar{\sigma}) = 1 - \frac{\bar{\sigma}^*}{\bar{\sigma}} e^{A(1 - \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^*})} \quad (3.24)$$

Figura 3.5 Representación de la función $G(\bar{\sigma})$ elegida.

3.3.8 Obtención del parámetro A

Para un proceso de tracción uniaxial, bajo carga monótona creciente, se tiene que el cambio temporal de la disipación viene dado por la ecuación (3.22), con $\bar{\sigma} = n\sigma_t$, $\Psi_0 = \frac{1}{2m_0}\varepsilon_t E^0 \varepsilon_t = \frac{(\sigma_t)^2}{2m_0 E^0} = \frac{\bar{\sigma}^2}{2m_0 n^2 E^0}$. Integrando (3.22) en el tiempo, a través de la tensión equivalente no dañada $\bar{\sigma}$, que depende del tiempo, se calcula que la disipación total al final del proceso de tracción uniaxial es

$$\Xi_t^{max} = \int_{\bar{\sigma}^*}^{\infty} \frac{\bar{\sigma}^2}{2m_0 n^2 E^0} \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} d\bar{\sigma} = \int_{\bar{\sigma}^*}^{\infty} \frac{\bar{\sigma}^2}{2m_0 n^2 E^0} dG(\bar{\sigma}) \quad (3.25)$$

$$\Xi_t^{max} = \left[\frac{\bar{\sigma}^2}{2m_0 n^2 E^0} G(\bar{\sigma}) \right]_{\bar{\sigma}^*}^{\infty} - \int_{\bar{\sigma}^*}^{\infty} G(\bar{\sigma}) \frac{\bar{\sigma}}{m_0 n^2 E^0} d\bar{\sigma} \quad (3.26)$$

$$\Xi_t^{max} = \frac{(\bar{\sigma}^*)^2}{m_0 n^2 E^0} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{A} \right] \Rightarrow A = \frac{1}{\frac{\Xi_t^{max} m_0 E^0}{(\bar{\sigma}^*)^2} - \frac{1}{2}} \geq 0 \quad (3.27)$$

donde $\bar{\sigma}^*$ es la tensión umbral de daño inicial. Haciendo las mismas hipótesis para un proceso de compresión uniaxial y postulando que el parámetro A debe ser el mismo en los dos casos, se deduce que

$$A = \frac{1}{\frac{\Xi_c^{max} m_0 E^0}{(\bar{\sigma}^*)^2} - \frac{1}{2}} \geq 0 \Rightarrow \Xi_c^{max} = n^2 \Xi_t^{max} \quad (3.28)$$

El valor de la disipación máxima a tracción Ξ_t^{max} es igual a la densidad de energía de fractura g_f , parámetro derivado de la mecánica de fractura (Oliver et al. 1990) como $g_f = G_f/\ell_c$, que es la energía de fractura G_f (constante de material) normalizada a la longitud característica ℓ_c del dominio finito fracturado (Lubliner et al. 1989).

La longitud característica tiene un papel fundamental en asegurar la objetividad con respecto a la malla de elementos finitos de la respuesta estructural. Sin embargo se introduce una dependencia de la malla en cuanto al parámetro A y a través de éste el mismo daño local d se ve afectado por el tamaño del elemento finito a cual pertenece el punto de integración analizado. Esto se debe a que cada punto de integración es representativo de un cierto volumen de material y debe disipar sólo la energía que le corresponde a ese volumen. A mayor tamaño de elemento finito mayor será la energía asignada a un punto de integración numérica ya que todos los elementos de un mismo tipo utilizan la misma regla de integración. Sin embargo esto asegura que en la estructura entera se disipa la misma energía independientemente de la malla de elementos finitos empleada asegurando así la objetividad de la respuesta.

Si además se impone la condición de que la disipación total no pueda ser menor que la energía libre que se tenía acumulada en el material en el momento en el cual el punto había alcanzado por primera vez el umbral de daño, se obtiene que

$$\Xi_t^{max} = \Xi_t^{min} + \Delta\Xi_t^{max} \quad (3.29)$$

donde $\Delta\Xi_t^{max} \geq 0$ y

$$\Xi_t^{min} = \bar{\Psi}_o^* = \frac{(\bar{\sigma}^*)^2}{2m_o n^2 E^o} \quad (3.30)$$

Si se substituye la relación (3.29) en la ecuación (3.27), que define el parámetro A , se obtiene

$$A = \frac{(\bar{\sigma}^*)^2}{\Delta\Xi_t^{max} m_o n^2 E^o} = \frac{2\Xi_t^{min}}{\Delta\Xi_t^{max}} \quad (3.31)$$

expresión que pone de relieve el carácter no negativo de dicho parámetro.

3.3.9 Aspectos energéticos del fenómeno de degradación

Considérese un proceso de tracción uniaxial, tal como se muestra en la Figura 3.6. Para un punto que haya superado el umbral de degradación y tenga la deformación ε , la tensión normal σ es menor que la tensión σ^0 correspondiente al caso en el cual no ocurriera degradación alguna. La definición de las energías potenciales relacionadas con las dos situaciones antes descritas son

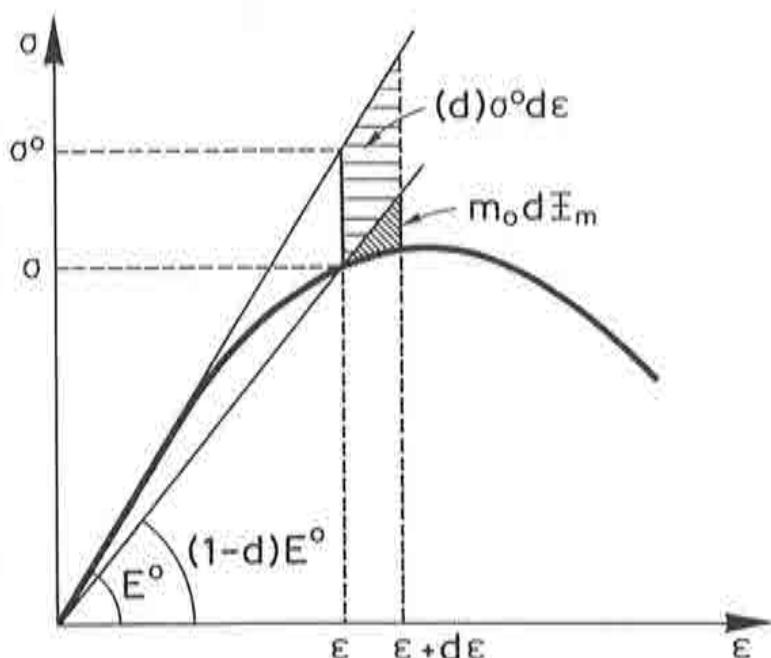


Figura 3.6 Desacoplamiento de la pérdida de energía δW_p .

$$W_p^0 = \frac{1}{2} \sigma^0 \varepsilon \quad ; \quad W_p = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (3.32)$$

donde $\sigma = (1 - d)\sigma^0$ tal como ya se ha visto en la relación (3.8). Diferenciando las expresiones de las dos energías potenciales, se obtienen sus variaciones infinitesimales como

$$dW_p^0 = \frac{1}{2} (d\sigma^0 \varepsilon + \sigma^0 d\varepsilon) = \frac{1}{2} (E^0 d\varepsilon \varepsilon + \sigma^0 d\varepsilon) = \sigma^0 d\varepsilon \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} dW_p &= \frac{1}{2} (\sigma d\varepsilon + d\sigma \varepsilon) = \frac{1}{2} [(1 - d) \sigma^0 d\varepsilon + (1 - d) d\sigma^0 \varepsilon - \sigma^0 \varepsilon d(d)] \\ &= (1 - d) \sigma^0 d\varepsilon - \frac{1}{2} \sigma^0 \varepsilon d(d) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Sin embargo, la ecuación (3.9), que define la variación temporal de la disipación, puede escribirse en la forma

$$d\Xi_m = \Psi_0 d(d) = \frac{1}{2m_0} \sigma^0 \varepsilon d(d) \quad (3.35)$$

de donde

$$dW_p = (1 - d) \sigma^0 d\varepsilon - m_0 d\Xi_m \quad (3.36)$$

En conclusión, debido a los fenómenos de degradación, se tiene una pérdida de energía potencial δW_p , cuya valor es

$$\delta W_p = dW_p^0 - dW_p = (d) \sigma^0 d\varepsilon + m_0 d\Xi_m \quad (3.37)$$

Esta última relación está representada gráficamente en la Figura 3.6, donde pueden verse también, de modo separado, los dos términos energéticos. El primero corresponde a una situación de daño constante, mientras el segundo mide la disipación que se desarrolla durante este mismo incremento de deformación $d\varepsilon$, como efecto del aumento del daño.

La energía disipada acumulada hasta un instante de tiempo, caracterizado por un daño d y una tensión equivalente $\bar{\sigma}$, se obtiene siguiendo un procedimiento análogo al empleado para obtener el valor del parámetro A (véanse las relaciones 3.25-3.27) en la forma

$$\Xi_t = \int_{\bar{\sigma}^*}^{\bar{\sigma}} \frac{\bar{\sigma}^2}{2m_0 n^2 E^0} \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} d\bar{\sigma} = \Xi_t^{max} \left[1 - (1 - d) \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^*} \frac{2 + \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^*} A}{2 + A} \right] \quad (3.38)$$

3.3.10 Matriz tangente del modelo de daño

I. Deducción de la matriz tangente

A partir de la relación (3.8), la variación virtual del tensor de tensiones y, finalmente, el tensor constitutivo tangente no simétrico \mathbf{C}^T del modelo de daño isótropo, pueden deducirse como

$$\delta\sigma = \mathbf{C}^S \delta\varepsilon + \delta\mathbf{C}^S \varepsilon; \quad \delta\mathbf{C}^S = \frac{\partial\mathbf{C}^S}{\partial d} \delta d = -\mathbf{C}^0 \delta d \quad (3.39)$$

$$\varepsilon = (\mathbf{C}^0)^{-1} \sigma^0 \Rightarrow \delta\sigma = (1 - d) \mathbf{C}^0 \delta\varepsilon - \sigma^0 \delta d \quad (3.40)$$

$$\delta\sigma = C^p \delta\varepsilon = \left[(1-d) I - \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \sigma^0 \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma^0} \right] C^0 \delta\varepsilon \quad (3.41)$$

$$C^p = \left[(1-d) I - \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \sigma^0 \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma^0} \right] C^0 = (I - D) C^0 \quad (3.42)$$

$$D = dI + \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \sigma^0 \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma^0} \quad (3.43)$$

En estas ecuaciones, I es la matriz idéntica del mismo orden que C^0 y D es una matriz no simétrica que depende sólo del vector de tensiones no dañadas σ^0 , puesto que la variable de daño también depende implícitamente de dicho vector de tensiones a través de la tensión equivalente $\bar{\sigma}$.

II. Cálculo de la matriz tangente

El cálculo de la matriz tangente supone encontrar los valores de todos los términos de la ecuación (3.44). Teniendo en cuenta la relación (3.24), se obtiene

$$d = G(\bar{\sigma}) = 1 - \frac{\bar{\sigma}^*}{\bar{\sigma}} e^{A(1-\frac{\bar{\sigma}^*}{\bar{\sigma}})} \Rightarrow \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} = (1-d) \left(\frac{1}{\bar{\sigma}} + \frac{A}{\bar{\sigma}^*} \right) \quad (3.44)$$

Por otra parte, como la tensión equivalente es función del tensor de tensiones principales $\sigma^{p,0}$, su derivada con respecto al vector de tensiones σ^0 tiene la siguiente descomposición:

$$\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma^0} = \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma^{p,0}} \frac{\partial\sigma^{p,0}}{\partial\sigma^0} \quad (3.45)$$

El cálculo del primer factor se basa en la definición (3.11), de donde resulta

$$\bar{\sigma} = [1 + r(n-1)] \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^{p,0})^2} = [1 + r(n-1)] u_1 \quad (3.46)$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i^{p,0} \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i^{p,0}|} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^3 \sigma_i^{p,0}}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i^{p,0}|} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{u_2}{u_3} \quad (3.47)$$

dónde

$$u_1 = \frac{\bar{\sigma}}{1+r(n-1)} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^{p,o})^2} \Rightarrow \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T = \frac{\sigma^{p,o}}{u_1} \quad (3.48)$$

$$u_2 = I_1 = \sum_{i=1}^3 \sigma_i^{p,o} \Rightarrow \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T = \mathbf{1}_3 \quad (3.49)$$

$$u_3 = \frac{I_1}{2r-1} = \sum_{i=1}^3 |\sigma_i^{p,o}| \Rightarrow \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T = \text{sign}(\sigma^{p,o}) \quad (3.50)$$

donde I_1 es el primer invariante del tensor de tensiones y $\mathbf{1}_3$ es el vector columna unidad de tres componentes. A partir de las ecuaciones anteriores pueden deducirse fácilmente las siguientes relaciones:

$$\left\{ \frac{\partial r}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T = \frac{\partial r}{\partial u_2} \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T + \frac{\partial r}{\partial u_3} \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T = \frac{1}{2u_3} \mathbf{1}_3 - \frac{u_2}{2u_3^2} \text{sign}(\sigma^{p,o}) \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T &= \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial u_1} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T \\ &= \frac{(n-1)u_1}{2u_3} \mathbf{1}_3 - \frac{(n-1)u_1 u_2}{2u_3^2} \text{sign}(\sigma^{p,o}) + \frac{1+r(n-1)}{u_1} \sigma^{p,o} \\ &= \frac{(n-1)(2r-1)}{2[1+r(n-1)]} \frac{\bar{\sigma}}{I_1} [\mathbf{1}_3 - (2r-1)\text{sign}(\sigma^{p,o})] + \frac{[1+r(n-1)]^2}{\bar{\sigma}} \sigma^{p,o} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Con esto, sólo queda por determinar el segundo factor de la ecuación (3.45), por lo cual se escribe el vector de tensiones principales en la siguiente forma:

$$\sigma^{p,o} = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin(\theta) \\ \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{Bmatrix} + \frac{I_1}{3} \mathbf{1}_3 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \sin(\theta) + \frac{I_1}{3} \mathbf{1}_3 \quad (3.53)$$

donde J_2 y θ son las variables utilizadas en el Anexo 3-1, que desarrolla los vectores de flujo de Nayak-Zienkiewicz. Para el cálculo de la derivada del vector de tensiones principales $\sigma^{p,o}$ con respecto al vector de tensiones σ^o se

emplea un procedimiento completamente análogo, que parte de la relación (3.32) modificada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial \sigma^0} = \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma^0} + \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma^0} + \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma^0} = \mathbf{C} \mathbf{V} \quad (3.54)$$

Considerando las relaciones (3.34) se obtiene que la matriz \mathbf{V} contiene tres vectores linea y tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{V} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma^0} \\ \frac{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma^0} \\ \frac{\partial J_3}{\partial \sigma^0} \end{array} \right\} \quad (3.55)$$

y, según las fórmulas (3.35), la matriz cuadrada \mathbf{C} tiene los componentes

$$\mathbf{C} = \{ \mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 \} \quad (3.56)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial I_1} = \frac{1}{3} \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{c}_2 &= \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial \theta} \frac{\operatorname{tg}(3\theta)}{(J_2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} [\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{tang}(3\theta) \cos(\theta)] \\ &= \frac{2}{\sqrt{3} \cos(3\theta)} \operatorname{sen}(\theta - 3\theta \mathbf{1}_3) \\ \mathbf{c}_3 &= \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial \theta} \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta)} \frac{1}{(J_2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{J_2 \cos(3\theta)} \cos(\theta) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Para concluir, el cálculo de la matriz de daño \mathbf{D} supone la realización de las siguientes operaciones matriciales:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= d \quad \mathbf{I} \quad + \quad \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \quad \sigma^0 \quad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^{p,0}} \quad \mathbf{C} \quad \mathbf{V} \\ (6 \times 6) &= (1 \times 1) \quad (6 \times 6) \quad + \quad (1 \times 1) \quad (6 \times 1) \quad \{[(1 \times 3) \quad (3 \times 3)] \quad (3 \times 6)\} \end{aligned} \quad (3.58)$$

donde se indican debajo las dimensiones de las matrices involucradas y, con los corchetes, el orden de multiplicación aconsejado para optimizar el esfuerzo de cálculo.

3.3.11 Direcciones de fisuración y aplastamiento

El modelo de daño descrito en este capítulo es isotrópico, es decir una vez un punto se ha dañado todos los componentes del tensor constitutivo se ven afectados por la misma reducción porcentual de la rigidez. Sin embargo, el daño es producido en general por una solicitud dominante, siendo muy raro que el punto se halle sometido a solicitudes triaxiales equilibradas entre si.

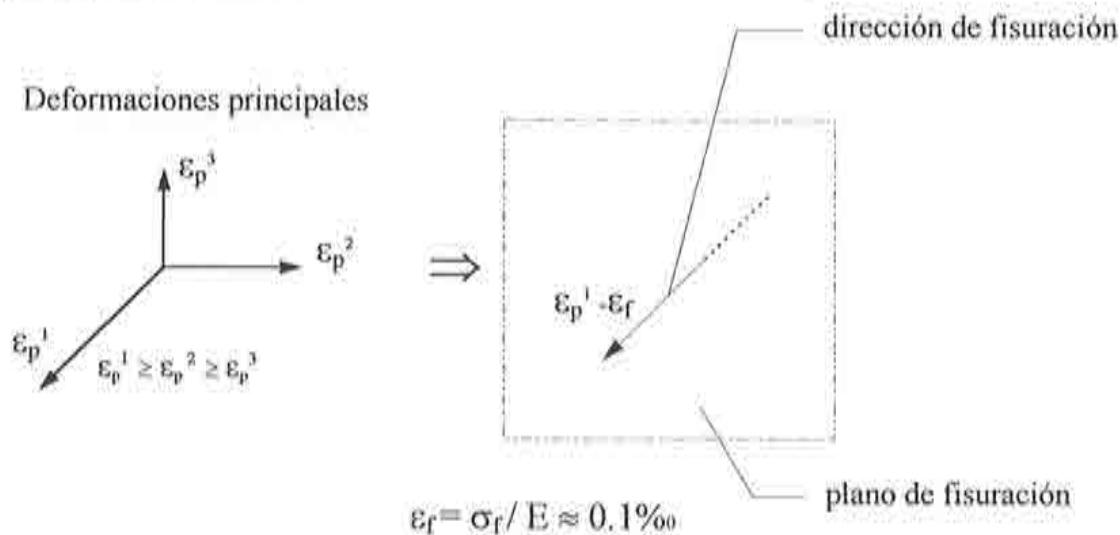


Figura 3.7 Obtención de la dirección de fisuración a partir de las deformaciones principales.

Esto hace pensar que es posible determinar cual es la orientación de la fisura si el daño ha sido producido por tracción o la dirección de aplastamiento, en el caso en que ha sido la compresión la causa de la degradación. En cada punto de integración que ha sufrido daño puede saberse si lo ha producido la tracción o la compresión en función del valor de la variable r (que interviene en la definición del umbral de daño) dependiendo si r es mayor o menor que 0.55 (ver el Apartado 3.3.3). Calculando las direcciones principales de tensor de deformación total ε ya se tiene una buena aproximación de la dirección de la fisuración o bien del aplastamiento del material. Éstas corresponderán a la deformación principal máxima si se trata de fisuración o la deformación principal mínima si por el contrario domina la compresión.

3.4 ANÁLISIS DINÁMICO

3.4.1 Modelo de daño visco-elástico

En cálculos dinámicos, el movimiento de una estructura sufre amortiguamientos por rozamiento interno y por efectos viscosos dentro del material. En el rango no lineal estas fuerzas de amortiguamiento no se mantienen al mismo nivel que en el caso que el material está sin dañar, sino decrecen a medida que el daño estructural aumenta, hasta llegar a desaparecer en un punto completamente dañado (Barbat et al. 1993). Esto ha llevado a la formulación del modelo de daño visco-elástico que incluye el fenómeno del amortiguamiento. En el Anexo 3-2 se encuentra la descripción de la integración en el tiempo de las ecuaciones de movimiento correspondientes a problemas dinámicos mediante el método de Newmark. En dicho anexo se explican ampliamente todas las notaciones utilizadas a continuación, así como la deducción del algoritmo dinámico tangente desarrollado a partir del modelo visco-elástico.

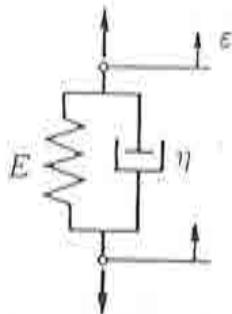


Figure 3.7 Modelo de Kelvin.

El efecto de amortiguamiento del movimiento de la estructura se simula a través del modelo de Kelvin que consiste en colocar un amortiguador en paralelo con la estructura hiperelástica estudiada anteriormente (véase la Figura 3.7). Como la estructura y el amortiguador mantienen la misma deformación ϵ , la tensión total del sistema será la suma de una tensión estructural σ^{str} y una tensión viscosa σ^{vis} que, según la ley de Newton, tiene la siguiente expresión (Barbat et al. 1995b):

$$\sigma = \sigma^{str} + \sigma^{vis} = C^s \epsilon + \eta^s \dot{\epsilon} \quad (3.59)$$

donde η^s es la matriz constitutiva viscosa secante definida por

$$\eta^s = \frac{\eta}{E^0} C^s = \alpha C^s \quad (3.60)$$

En esta ecuación η es el parámetro viscoso unidimensional y α el tiempo de retardo, definido como el tiempo necesario para el sistema estructura-amortiguador para llegar a una configuración estable en el estado no dañado.

En estos supuestos, el comportamiento del sistema bajo variaciones virtuales de las variables libres (deformaciones y velocidades de deformación) puede obtenerse como

$$\begin{aligned}\delta\sigma &= \delta\sigma^{str} + \delta\sigma^{vis} = C^p \delta\varepsilon + \alpha (C^s \delta\dot{\varepsilon} + \delta C^s \dot{\varepsilon}) \\ &= C^p \delta\varepsilon + \alpha (C^s \delta\dot{\varepsilon} - C^o \dot{\varepsilon} \delta d)\end{aligned}\quad (3.61)$$

Introduciendo la notación $\sigma_v^o = \alpha C^o \dot{\varepsilon}$ y utilizando la relación (3.42), la relación incremental visco-elástica se obtiene como

$$\delta\sigma = C_v^p \delta\varepsilon + \alpha C^s \delta\dot{\varepsilon} = (I - D_v) C^o \delta\varepsilon + \alpha C^s \delta\dot{\varepsilon} \quad (3.62)$$

donde D_v toma la siguiente forma (análoga a la relación 3.43):

$$D_v = dI + \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} (\sigma^o + \sigma_v^o) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^o} \quad (3.63)$$

Siguiéndose el mismo procedimiento que en el caso de las fuerzas iniciales y elásticas pueden deducirse las expresiones de la matriz constitutiva viscosa generalizada $\hat{\eta}$ (para elementos de barra 2D, 3D y de láminas de revolución) y del vector elemental de fuerzas viscosas \mathbf{F}_v , como

$$\hat{\eta} = \int_A S^T \eta S dA \Rightarrow \mathbf{F}_v = \int_\ell B^T \hat{\sigma}^{vis} dx = \int_\ell B^T \hat{\eta} B dx \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{A} \dot{\mathbf{a}} \quad (3.64)$$

donde \mathbf{A} es la matriz de amortiguamiento de un elemento finito unidimensional que se va a utilizar en el análisis dinámico.

El modelo de Kelvin, junto con el modelo de daño propuesto, permite la descomposición de la tensión total actuando en un punto de la estructura en una parte hiperelástica y una parte viscosa. Estos términos introducidos dentro de un esquema de elementos finitos producen las matrices clásicas de amortiguamiento y de rigidez.

3.4.2 Integración temporal de las ecuaciones dinámicas

La ecuación de equilibrio dinámico, correspondiente a este modelo de daño viscoso, escrita para el instante $t = t_{i+1}$, toma la siguiente forma, análoga a la relación (Barbat y Canet 1989 y A3-2.11, Anexo 3-2):

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_{i+1} + \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1} dx = \mathbf{f}(t_{i+1}) \quad (3.65)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1}$ es el vector de tensiones seccionales totales que puede descomponerse en una parte estructural y otra parte viscosa. Según las relaciones (3.59) y (3.61), pueden obtenerse las siguientes expresiones para este vector y para su incremento temporal:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^{str} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^{vis} = \hat{\mathbf{C}}^s \mathbf{B} \mathbf{a}_i + \hat{\boldsymbol{\eta}}^s \mathbf{B} \dot{\mathbf{a}}_i \quad (3.66)$$

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1} = \hat{\mathbf{C}}_v^p \mathbf{B} \Delta \mathbf{a}_{i+1} + \hat{\boldsymbol{\eta}}^s \mathbf{B} \Delta \dot{\mathbf{a}}_{i+1} \quad (3.67)$$

donde $(\cdot) = \int_A S^T (\cdot) S dA$ son matrices seccionales en el caso de elementos finitos de barra o lámina de revolución. Si se subsituye la relación $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i + \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1}$ junto con las relaciones (3-2.24 a 3-2.26) del Anexo 3-2 de este capítulo y (3.66-3.67) en la ecuación (3.65), la ecuación de equilibrio se convierte en

$$\hat{\mathbf{K}} \Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(1)} = \hat{\mathbf{f}}_{i+1}^{(1)} \quad (3.68)$$

donde el índice superior indica el número de la iteración. Se han introducido las siguientes notaciones:

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{A} + \mathbf{K}_r \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{i+1}^{(1)} &= \mathbf{f}(t_{i+1}) + \mathbf{M} \left[\frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{a}}_i + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}_i \right] \\ &\quad - \mathbf{A} \left[\left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{a}}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{a}}_i \right] - \mathbf{K}_s \mathbf{a}_i \end{aligned} \quad (3.70)$$

En las relaciones de arriba aparecen conjuntamente tanto matrices secantes como tangentes, cuyas expresiones son

Tabla 3.1 Algoritmo de integración de las ecuaciones dinámicas.

A. Primera iteración (paso desde el incremento de tiempo i a i+1)

- se actualizan

$$\boxed{K_S = \int_t B^T \hat{C}^S B dx ; \quad K_T = \int_t B^T \hat{C}_v^D B dx ; \quad A = \int_t B^T \hat{\eta}^S B dx}$$

- se recalculan

$$\boxed{\hat{K} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} A + K_T}$$

$$\boxed{\hat{f}_{i+1}^{(0)} = f(t_{i+1}) + M \left[\frac{1}{\beta \Delta t} \ddot{a}_i + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \dot{a}_i \right] - A \left[\left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{a}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{a}_i \right] - K_S a_i}$$

- se calculan las primeras aproximaciones para el incremento i+1:

$$\boxed{\Delta a_{i+1}^{(1)} = \hat{K}^{-1} \hat{f}_{i+1}^{(0)}}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{i+1}^{(1)} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta a_{i+1}^{(1)} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{a}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{a}_i \\ \dot{a}_{i+1}^{(1)} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta a_{i+1}^{(1)} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{a}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{a}_i \\ a_{i+1}^{(1)} &= \Delta a_{i+1}^{(1)} + a_i \end{aligned}$$

B. Siguientes iteraciones (se busca el equilibrio para el incremento i+1)

I. se actualizan

$$\boxed{K_S = \int_t B^T \hat{C}^S B dx ; \quad K_T = \int_t B^T \hat{C}_v^D B dx ; \quad A = \int_t B^T \hat{\eta}^S B dx}$$

$$\boxed{\hat{K} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} A + K_T}$$

$$\boxed{\hat{f}_{i+1}^{(j+1)} = \Psi_{i+1}^{(j)} = f(t_{i+1}) - M \dot{a}_{i+1}^{(j)} - A \ddot{a}_{i+1}^{(j)} - K_S a_{i+1}^{(j)}}$$

II. Si $\Psi_{i+1}^{(j)}$ no es suficientemente pequeño, se calcula:

$$\boxed{\delta a_{i+1}^{(j+1)} = \hat{K}^{-1} \hat{f}_{i+1}^{(j+1)}}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{i+1}^{(j+1)} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \delta a_{i+1}^{(j+1)} + \ddot{a}_{i+1}^{(j)} \\ \dot{a}_{i+1}^{(j+1)} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \delta a_{i+1}^{(j+1)} + \dot{a}_{i+1}^{(j)} \\ a_{i+1}^{(j+1)} &= \delta a_{i+1}^{(j+1)} + a_{i+1}^{(j)} \end{aligned}$$

III. Volver al paso I.

$$\mathbf{K}_s = \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}}^s \mathbf{B} dx ; \quad \mathbf{K}_r = \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}}_v^r \mathbf{B} dx ; \quad \mathbf{A} = \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\eta}}^s \mathbf{B} dx \quad (3.71)$$

y las tres dependen del nivel de daño, es decir, son variables en el tiempo.

Resolviendo el sistema linealizado (3.68) se obtienen los incrementos de desplazamientos $\Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(1)}$ y luego todas las demás variables, que corresponden a la primera iteración del paso de tiempo ($i+1$). Si el nivel de degradación hubiera cambiado, se actualizan las matrices (3.71) y esto implica la aparición probable de unas fuerzas de desequilibrio dinámico. Estas son las fuerzas residuales $\Psi_{i+1}^{(1)}$, cuyas valores se obtienen por la diferencia entre el estado tensional previsto $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i + \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1}^{(1)}$, y el estado tensional real $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1}^{(1)}$, calculado utilizando las matrices actualizadas de amortiguamiento y de rigidez

$$\begin{aligned} \Psi_{i+1}^{(1)} &= \mathbf{f}(t_{i+1}) - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(1)} - \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1}^{(1)} dx \\ &= \int_{\ell} \mathbf{B}^T \left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i + \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1}^{(1)} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1}^{(1)} \right) dx \end{aligned} \quad (3.72)$$

Esta fuerza residual se aplica como segundo miembro de la ecuación (3.68) y resolviendo luego el sistema después de haber actualizado la matriz $\hat{\mathbf{K}}$, se obtiene una nueva corrección del incremento de desplazamientos. Este proceso iterativo finaliza cuando la norma de las fuerzas residuales se reduce por debajo de la tolerancia impuesta. En la Tabla 3.1 se describe el diagrama de flujo del algoritmo de integración temporal utilizado en la monografía.

3.5 FACTOR DE RETENCIÓN DEL CORTE

Es conocido que la capacidad de transferir y resistir fuerzas cortantes no siempre está condicionada por el estado de fisuración del material. De hecho se tiene evidencia experimental (*ACI-ASCE Committee 426*, 1973) de que en vigas sometidas a momentos flectores y esfuerzos cortantes la capacidad cortante es notablemente mayor que la que correspondería solamente a la zona comprimida. Esto se debe a la fricción entre las superficies de la fisura y al fenómeno de "interrelación" de los áridos que está generado por su falta de homogenidad en lo que respecta al tamaño de los granos del hormigón.

En Walraven (1978) se identifican varios mecanismos de transferencia de la tensión cortante que no precisan de armadura transversal. Uno de los más

importantes es la transferencia de cortante en la interfaz de la fisura por fricción, lo que genera una capacidad resistente a corte entre dos superficies deslizando una sobre otra. Esta capacidad residual es función de la geometría y el estado de la superficie de contacto y es independiente de las características de material y actúa incluso en una fisura abierta.

Esta fenomenología llevada al modelo de daño isótropo en su forma clásica descrita en este capítulo se materializa en la introducción del factor de retención de corte β que afecta las tensiones cortantes degradadas como

$$\sigma_c = (1 - \beta d)\sigma_c^0 \quad (3.63)$$

El factor β es un escalar positivo menor que la unidad que asegura que cuando el valor del índice de daño d tiende a la unidad las tensiones de corte no se anulan, sino tienden a una fracción de las tensiones no dañadas σ_c^0 .

3.6 ÍNDICE GLOBAL DE DAÑO

Los modelos de daño pueden clasificarse en dos grupos: por una parte, los utilizados mayoritariamente en la ingeniería sísmica, para estructuras de barras, que evalúan el índice de daño a partir de magnitudes como esfuerzos seccionales, ductilidad o energía potencial de los elementos estructurales; el segundo grupo lo constituyen los modelos de daño continuo que describen directamente el estado del material de un punto material y que están fundamentados en los principios de la termodinámica, tal como el modelo descrito en los apartados anteriores.

La necesidad de utilizar índices de daño ha sido reconocida desde hace ya algún tiempo en el ámbito de la ingeniería sísmica, en el marco de la cual se han desarrollado diversas fórmulas para evaluar el estado de elementos estructurales de barras (Lybas y Sozen 1977; Banon et al. 1981; Meyer y Roufaiel 1983; Park et al. 1984). Dichas fórmulas se basan en conceptos como deformación plástica cumulativa en cargas cíclicas (Banon et al. 1981), relación entre el momento flector máximo y el alcanzado durante el terremoto (Lybas y Sozen 1977) o la muy utilizada en la actualidad función de daño de Park y Ang (1985), la cual relaciona la ductilidad de los elementos estructurales con la energía disipada en cargas cíclicas. Todos estos índices están adecuados al cálculo sísmico y no son aplicables directamente a otros tipos de análisis.

En las definiciones de los índices globales de daño de toda una estructura realizadas en estudios anteriores se ha partido casi siempre de la idea de promediar los índices así llamados “locales” de las partes componentes de las estructuras con diferentes pesos específicos como, por ejemplo, el volumen del elemento, el porcentaje de la energía potencial almacenada en cada elemento con respecto

a la total, la importancia asignada a juicio de expertos al elemento estructural e incluso con si mismos (Bracci et al. 1989; Chung et al. 1988; Aguiar et al. 1993; Kunath et al. 1989; Mørk 1992; Park et al. 1984, 1987, 1988; Rahman y Grigoriu 1994, 1997; Reihorn et al. 1989; Rodriguez 1990; Rodriguez y Çakmak 1990; Rodriguez et al. 1991; Skjærbaek et al. 1996, 1997; Stephens y Yao 1987; Williams y Sexsmith 1995). DiPasquale y Çakmak (1987, 1988, 1990) proponen el primer índice global de daño de una estructura entera basado en conceptos no empíricos, relacionandolo con el deterioro del período fundamental de la estructura, lo que le da una base objetiva (Hassotis y Jeong 1993). Sin embargo, no es posible aplicar este procedimiento de cálculo a sólo una zona de la estructura y, además dicho índice tiene la dificultad añadida de requerir la evaluación del período fundamental de la estructura en cada instante, lo que presenta dificultades y es costoso puesto que necesita determinar la expresión de la matriz de rigidez tangente. Otros autores proponen medir el ablandamiento del material como indicador del deterioro (Nielsen y Çakmak 1991, 1992; Nielsen et al. 1992, 1995).

El punto de partida para deducir un índice global de daño estructural en esta monografía es la ecuación (3.4), que relaciona la energía libre real del material degradado Ψ con la energía libre hipotéticamente elástica Ψ_0 . La idea del índice global propuesta en esta monografía consiste en integrar la relación (3.4) sobre toda la masa de la estructura. Dicha integral se transforma en otra sobre el volumen, teniendo en cuenta que $dm = m_0 dV$ con lo cual se obtiene

$$\Psi = (1 - d)\Psi_0 \Rightarrow W_p = \int_V m_0 \Psi dV = \int_V (1 - d)m_0 \Psi_0 dV = (1 - D)W_p^0 \quad (3.73)$$

donde D es el índice de daño global, $W_p^0 = \int_V m_0 \Psi_0 dV$ es la energía potencial total de la estructura correspondiente al caso que ésta no estuviera dañada y W_p es la energía potencial total correspondiente al caso real, es decir, en el supuesto que hayan ocurrido procesos de daño. Resolviendo la ecuación (3.73), se obtiene la siguiente expresión final para D :

$$D = 1 - \frac{W_p}{W_p^0} = \frac{\int_V m_0 \Psi_0 dV - \int_V (1 - d)m_0 \Psi_0 dV}{\int_V m_0 \Psi_0 dV} = \frac{\int_V d m_0 \Psi_0 dV}{\int_V m_0 \Psi_0 dV} \quad (3.74)$$

Si se requiere calcular el índice global de daño sólo para una parte de la estructura (como, por ejemplo, un piso, algún grupo de pilares, etc), la integración se efectúa únicamente sobre el volumen de la parte que interesa.

Dentro de un esquema de elementos finitos, en el caso de una estructura discretizada en barras con capas (ver Capítulo 2), el índice global de daño D_p

de un punto de integración numérica se obtiene de la misma manera que el índice global de daño total, sólo que esta vez se integra sobre la superficie de la sección transversal de la barra, con $m_0 \Psi_0 = \frac{1}{2} \hat{\epsilon}^T \hat{\sigma}^0$ y $\epsilon = S \hat{\epsilon}$

$$D_p = 1 - \frac{\hat{\epsilon}^T \hat{\sigma}}{\hat{\epsilon}^T \hat{\sigma}^0}; \quad \hat{\sigma} = \int_A S^T \sigma dA = \int_A (1-d) S^T \sigma^0 dA \quad (3.75)$$

donde $\hat{\epsilon}$ y $\hat{\sigma}$ son, respectivamente, las deformaciones y los esfuerzos seccionales en dicho punto de la barra. En el caso de estructuras modelizadas mediante elementos finitos de barra el índice global de daño toma la siguiente forma particular:

$$D = 1 - \frac{\sum_e \mathbf{a}^T \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\sigma} dx}{\sum_e \mathbf{a}^T \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\sigma}^0 dx} \quad (3.76)$$

En el caso de elementos tridimensionales de sólido, la expresión (3.76) es válida cambiando el dominio de integración al volumen del elemento y considerando el vector de tensiones de Cauchy (ver el Apartado 2.6). Dicha expresión, que depende únicamente de las tensiones no lineales calculadas por el modelo constitutivo y de las hipotéticamente lineales, es absolutamente general, y puede utilizarse dentro de cualquier estrategia de solución de problemas estructurales no lineales.

En conclusión, el índice global de daño se define como la relación entre la energía potencial que la estructura no puede almacenar en el estado poselástico y la energía potencial que la estructura almacenaría si hubiese mantenido sus características elásticas iniciales.

En lo que a la objetividad se refiere, el índice global de daño propuesto aquí tiene la misma objetividad que la respuesta estructural, puesto que se calcula a través de integrales sobre los volúmenes de los elementos de la estructura (ver el Apartado 3.3.8). Esto hace que el índice global dependa de la energía disipada en toda la estructura o parte de la misma que, a su vez, no depende del tamaño de la malla de elementos finitos utilizada en el análisis. Lógicamente, si la respuesta estructural es objetiva, también lo será el índice global de daño calculado según la metodología propuesta en este apartado.

El comportamiento resistente de una estructura es determinado por un conjunto de factores que en una modelización por elementos finitos se hallan sintetizados en los términos de la matriz de rigidez. Dichos términos representan cada uno la fuerza que se debe aplicar en una cierta dirección para obtenerse un desplazamiento unitario en otra o la misma dirección.

Todo esto lleva a la idea de que la respuesta estructural está altamente condicionada por la solicitación aplicada. La implicación inmediata es que el índice global de daño es a su vez una medida de la pérdida de rigidez de la estructura con respecto a la carga que ha determinado el daño. Si después de descargar la estructura se le aplica otra carga de características diferentes es posible obtener un nivel de daño global diferente, mayor o menor, en función de si la nueva carga necesita más o menos la contribución de los términos de rigidez afectados por la primera carga aplicada, aun siendo irreversible el fenómeno del daño.

Teóricamente es posible imaginar una configuración estructural tal que existan cargas completamente independientes desde el punto de vista del daño, es decir que el daño producido en un caso no repercute nada en otro. Esta dificultad añadida imposibilita la descripción general del estado de una estructura a través del índice global de daño independientemente de la carga que lo ha inducido.

En la realidad suele existir un nivel de correlación no nulo entre las diversas cargas a las que se encuentra sometida una estructura. Por ejemplo, un daño producido en un edificio por un terremoto (cargas horizontales) suele afectar la respuesta estructural bajo las cargas de servicio (cargas verticales), pero casi nunca se translada íntegramente el nivel de daño o, lo que lo mismo, el índice global de daño no será el mismo cambiando de tipo de carga.

Las propiedades del índice global de daño calculado según la metodología descrita en este capítulo permiten estudiar la evolución de la capacidad estructural a lo largo de la historia de carga de estructuras complejas. El índice global de daño indica siempre, de manera sintética, qué parte de la resistencia inicial de la estructura frente a una determinada carga ha sido deteriorada durante el proceso debido a efectos inelásticos en los materiales constituyentes.

3.7 EJEMPLOS DE VALIDACIÓN

3.7.1 Análisis de objetividad

El objetivo de este análisis es analizar un mismo problema mediante tres mallas distintas y comparar los resultados para averiguar si hay o no dependencia de la malla, como en la mayoría de los modelos de ablandamiento del material. Este test viene a comprobar las consideraciones teóricas de los Apartados 3.3.8 y 3.6 sobre la objetividad de la respuesta y del índice global de daño.

El problema considerado es el de una viga biarticulada solicitada con una fuerza concentrada en el centro de la luz. Se han analizado tres mallas de elementos finitos de barra 2D discretizados por capas, una de 10 elementos, otra de 20 elementos y la última de 40 elementos finitos. Sobre la barra han sido aplicados desplazamientos verticales para poder seguir con facilidad su historia

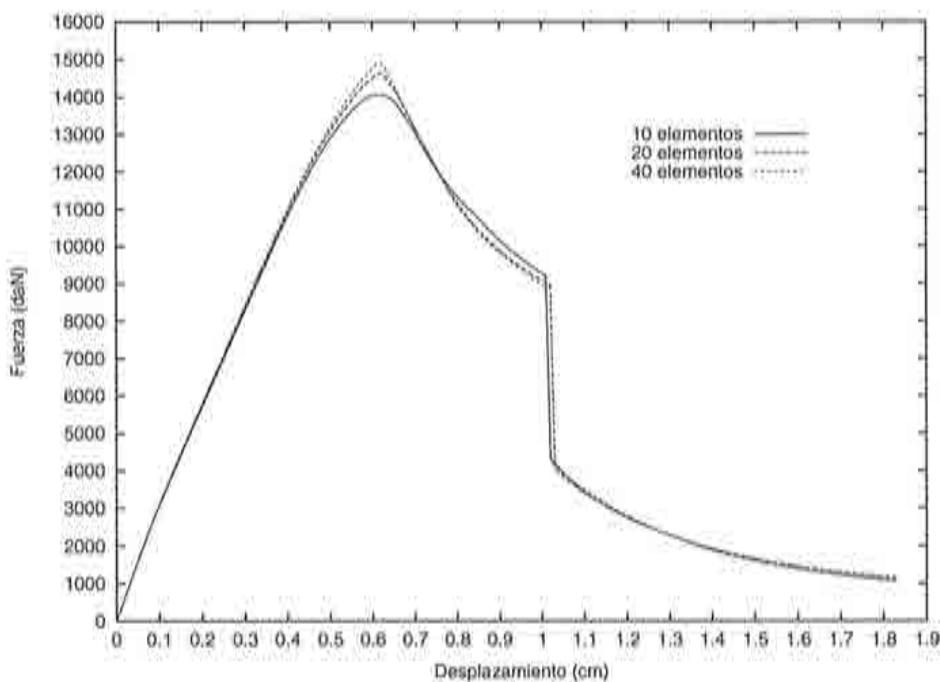


Figura 3.8 Respuesta fuerza-flecha para tres mallas distintas.

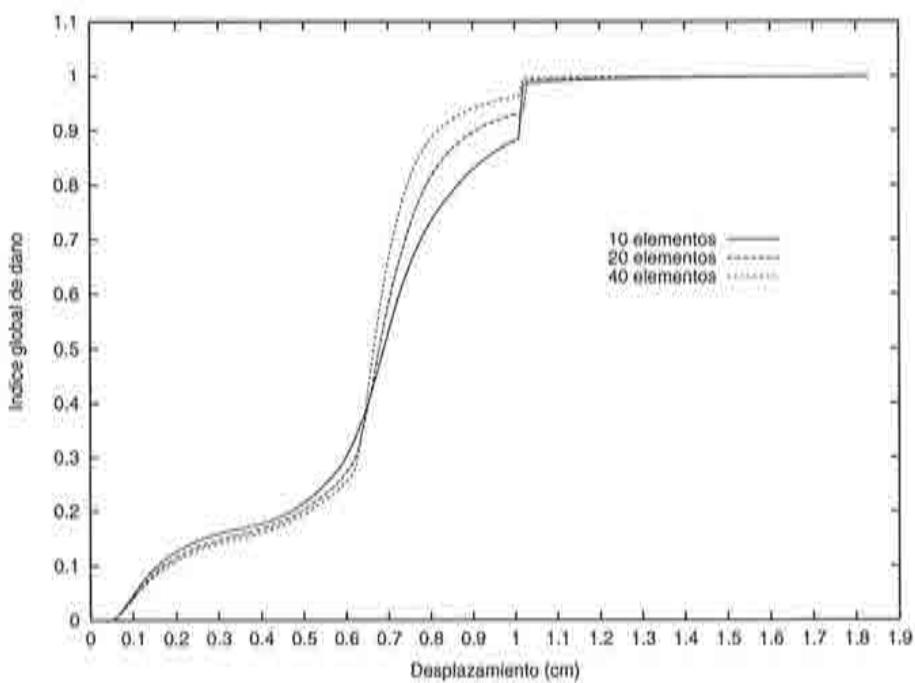


Figura 3.9 Evolución de los índices globales de daño en función de la flecha para las tres mallas analizadas.

de carga hasta el colapso, que corresponde al agotamiento de su capacidad de resistencia, donde la fuerza aplicada se aproxima a cero. Los elementos tienen 19 capas de hormigón y una capa de acero del lado que trabaja en tracción, es decir del lado opuesto la carga.

La Figura 3.8 muestra la respuesta de la viga cargada con desplazamientos para las tres mallas distintas de elementos finitos. Se observa que el modelo de daño es prácticamente objetivo con respecto al tamaño de los elementos finitos utilizados, en lo que a la respuesta fuerza-flecha se refiere. Las diferencias observadas en el pico de la fuerza y en la parte decreciente antes de la caída de la fuerza se deben a hecho que cuanto más fina es la malla más cercano está un punto de integración del punto de aplicación de la carga (que también coincide con el momento flector máximo) y mejor se puede determinar el pico real de la fuerza equivalente al desplazamiento impuesto.

La mencionada viga biarticulada tiene dos tipos de comportamiento muy distintos en su historia de deformación. En el primero trabaja principalmente en flexión y se extiende hasta un desplazamiento en el centro de la luz de 1 cm y en el segundo, después de la pérdida total de rigidez a flexión, trabaja en tracción dado que en el centro de la luz se forma una rótula y la estructura se transforma en isostática al perder un grado de libertad. Cabe destacar también que el área debajo de cada una de las tres curvas fuerza-desplazamiento de la Figura 3.8 es la misma lo que significa que en todos los casos la energía disipada es constante, es decir la energía total disipada es independiente de la malla.

En la Figura 3.9 puede verse una comparación entre los índices globales de daño de la viga para las tres mallas. Se observa que en los tramos donde las curvas fuerza-desplazamiento se cruzan, los índices globales de daño también lo hacen respetando siempre la siguiente regla: a mayor fuerza para un desplazamiento dado menor índice global de daño. Las diferencias máximas entre los tres índices globales se dan antes de la caída correspondiente a la pérdida total de rigidez a flexión y se deben al hecho que el índice global de daño es una medida de la energía disipada por la estructura hasta ese momento. En el momento de dicha caída se cierran las tres áreas y los tres índices globales de daño vuelven a coincidir.

3.7.2 Validación del factor de retención de corte

La Figura 3.10 muestra la viga de hormigón armado ensayada experimentalmente por Walvern (1978). Esta viga no tiene armadura inclinada de cortante y, durante los ensayos, se observó que el fallo se debe precisamente a los esfuerzos cortantes, dado que se produjeron fisuras diagonales en la zona cercana a los puntos de aplicación de la fuerza y la carga última fue de unos 70 KN. La fuerza exterior se aplica monótonamente y se miden los desplazamientos en el

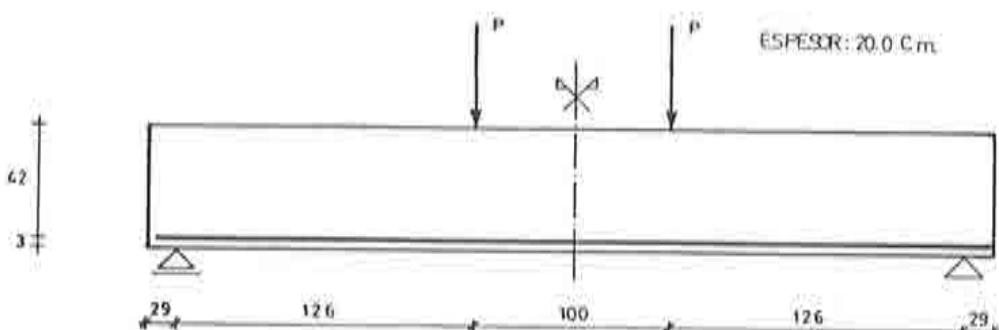


Figura 3.10 Geometría de la viga. Ensayo a flexión en cuatro puntos.

el mismo punto de aplicación de la fuerza.

El problema se ha reproducido numéricamente modelizando la mitad de la viga aprovechando la simetría de la geometría y de la carga. Se ha utilizando una malla de 80 elementos finitos isoparamétricos tridimensionales de 20 nodos, dispuestos $16 \times 5 \times 1$ en longitud, altura y ancho de la viga. El espesor del elemento es de 20 cm, igual al de la viga ensayada. El refuerzo de acero se añadió a la penúltima fila de elementos de abajo en su posición exacta.

Las propiedades de material del hormigón consideradas son: módulo de Young $E=28\text{GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.2$, resistencia a tracción uniaxial $f_t=2.5\text{MPa}$, resistencia a compresión uniaxial $f_c=30\text{MPa}$ y la energía de fractura $G_f=50\text{N/m}$. El acero tiene las siguientes propiedades de material: $E=170\text{GPa}$, tensión de fluencia $\sigma_y=440\text{MPa}$, deformación de rotura $\varepsilon_u=0.8\%$ y parámetro de endurecimiento $H=20\text{GPa}$. El valor del módulo de elasticidad del acero se ajustó al valor mencionado, más bajo que el valor medido de $E=206\text{GPa}$, para poder ajustar la pendiente elástica de la curva numérica fuerza-desplazamiento a la experimental. La explicación encontrada es que al suponer adherencia perfecta entre el hormigón y el acero se introduce una rigidez artificial en desacuerdo con la realidad. La disminución del módulo de elasticidad del acero rectifica la rigidez global y permite seguir la curva experimental incluso en el dominio no elástico.

Este ejemplo permite evaluar la efectividad del factor de retención de corte dado que en el punto de aplicación de la fuerza se producen a la vez los valores máximos del momento flector y del esfuerzo cortante, situación relativamente poco frecuente en estructuras continuas. Debido a este hecho, en dicho punto ocurría el fallo estructural que, además, está determinado por el agotamiento de la resistencia a corte dado que el momento es constante y máximo en toda una zona, mientras sólo en el punto de fallo mencionado es esfuerzo cortante es máximo.

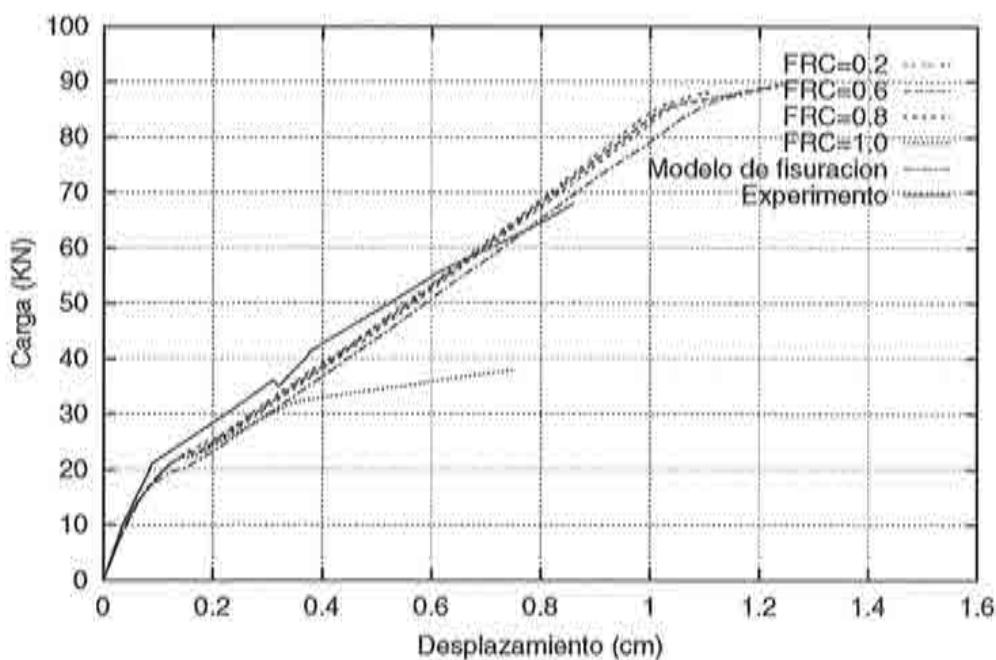


Figura 3.11 Comparación de las curvas fuerza-desplazamiento en el punto de aplicación de la fuerza.

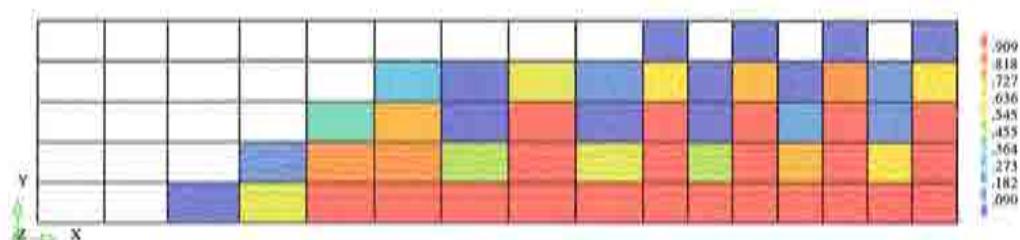


Figura 3.12 Zonas dañada al colapso con retención de corte $\beta = 0.6$.

Se han hecho varios ensayos numéricos variando el valor del factor de retención de corte β desde 1 (que es equivalente al modelo de daño estándar, sin retención de cortante) hasta 0.2 en pasos de 0.2. Los resultados se presentan en la Figura 3.11 donde se añaden además la curva experimental y la obtenida empleando un modelo de fisuración. Se observa que para valores de β de 0.2, 0.4, 0.6 y 0.8 los resultados son prácticamente identicos entre sí y bastante coincidentes con el experimento. El peor comportamiento es el del modelo de daño original que se aleja inmediatamente después del tramo elástico de la solución experimental.

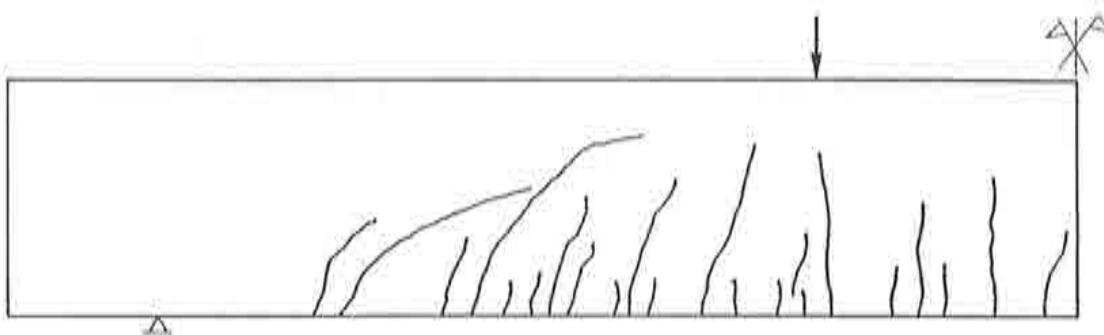


Figura 3.13 Fisuras experimentales de la viga en el momento del fallo.

Este ejemplo pone de manifiesto que un coeficiente β diferente de la unidad que asegure un mínimo de retención de cortante inhibe parcialmente el mecanismo de fallo por cortante y permite el desarrollo del proceso de fallo por flexión. Las franjas de elementos dañados alternando con elementos no tan degradados que pueden verse en la Figura 3.12, demuestran que la zona donde el momento flector es constante y máximo sufre una degradación importante. La Figura 3.13, que presenta el estado de fisuración real obtenido tras el experimento, es muy similar a la Figura 3.12 puesto que las fisuras importantes ocurren en las zonas donde los elementos finitos muestran mayores daños.

Todos los ensayos numéricos con el modelo de daño con retención de cortante dieron como carga de fallo alrededor de 87 KN, mayor que los 70 KN alcanzados en el experimento. La explicación de esta diferencia puede deberse a que el ensayo se detuvo en el momento de la pérdida de cohesión entre armadura y hormigón, efecto no contemplado en el presente modelo. La excepción es el modelo sin retención de corte ($\beta = 1$) que falla para un carga de 38 KN y tiene un comportamiento muy diferente a los demás. Para un valor de la fuerza cercano de 32 KN, el daño desarrollado reduce drásticamente la resistencia a cortante de la viga y produce el fallo mucho antes que en el experimento.

Para $\beta = 1$, el análisis numérico confirma la observación experimental que fisuras verticales se forman primero en la zona central donde el momento flector es máximo y constante. En los pasos de carga siguientes, las tensiones rotan y se forman nuevas fisuras entre el punto de apoyo y el punto de aplicación de la carga (véanse las Figuras 3.14 y 3.15). Al inicio del fallo aparece una banda diagonal a 45° , como en el caso del experimento, que penetra en la zona comprimida y lleva al fallo estructural. Se observa una transición progresiva de una distribución de tensiones de compresión de tipo Saint Venant para las cargas bajas hacia un esquema resistente de tipo Morsch para la carga última.

La distribución del daño local para el caso de $\beta = 0.6$ se presenta en la Figura

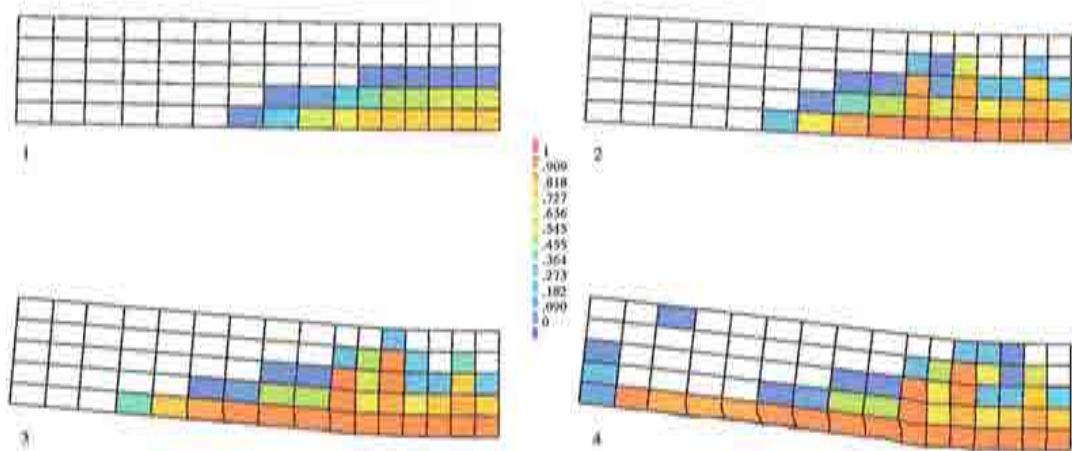


Figura 3.14 Distribución de daño elemental para las cargas de 21, 30, 34 y 38 KN para $\beta = 1$ (sin retención de cortante).

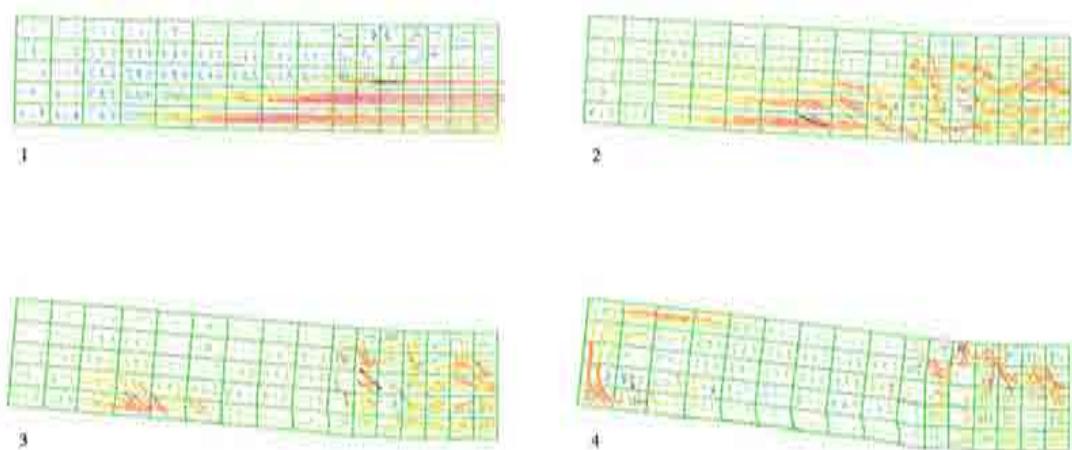


Figura 3.15 Tensión principal mínima (tracción) para las cargas de 21, 30, 34 y 38 KN para $\beta = 1$ (sin retención de cortante).

3.16 junto con las tensiones en la armadura. En este caso la formación de bandas inclinadas de daño es menos evidente que en el caso anterior y aparecen más cerca del apoyo. La dependencia de la malla de elementos finitos se pone en evidencia por la alternancia de elementos completamente dañados y otros menos dañados. Sin embargo, las pruebas experimentales están bien reproducidas por el modelo matemático dado que tanto el hormigón comprimido como el acero están lejos de las tensiones últimas, lo que implica que el fallo se debe a los

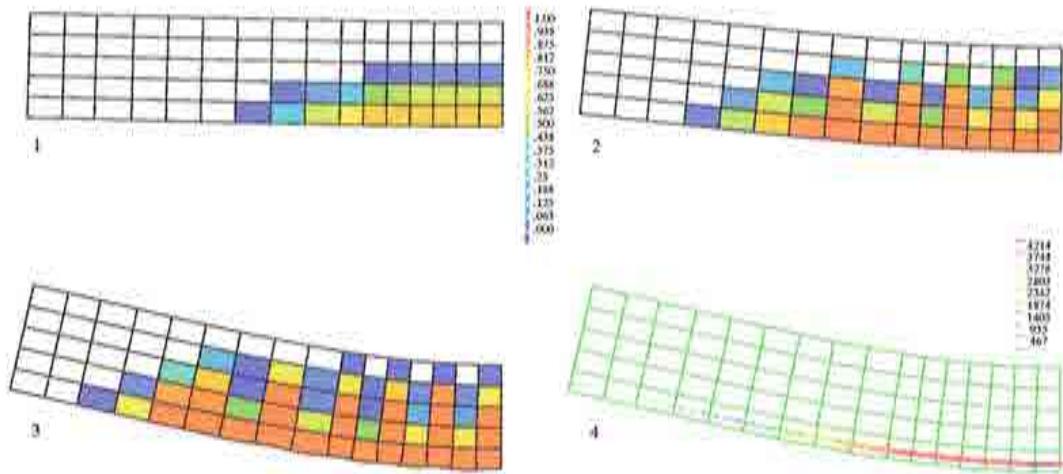


Figura 3.16 Distribución de daño elemental para las cargas de 20, 50 y 90 KN para ($\beta = 0.6$). Tensión en la armadura en el momento del fallo.

esfuerzos cortantes. Una evaluación de la fuerza última, basada únicamente en la resistencia a flexión, daría una fuerza de 120 KN, muy por encima de los 70 KN del experimento.

Paralelamente se ha hecho una simulación empleando el modelo de fisuración propuesto por Cervera y Hinton (1986) utilizando los mismos parámetros de material. En la Figura 3.10 está ya incluida la curva fuerza-desplazamiento correspondiente a este caso. Los resultados están en concordancia con los del modelo de daño con factor de retención de corte, cercano a los 90 KN, puesto que se utiliza una metodología de retener la capacidad del cortante parecida a la descrita aquí.

ANEXO 3-1

CONCEPTOS DE ELASTO-PLASTICIDAD

1. INTRODUCCIÓN

La solución de problemas que presentan no linealidades del material necesita un procedimiento para describir el comportamiento del material después del límite elástico. Este problema se soluciona mediante el desarrollo de modelos constitutivos basados en estudios experimentales. En este anexo se hace una breve revisión de los elementos generales de plasticidad que son imprescindibles para comprender las teorías de los modelos constitutivos.

2. CONCEPTOS DE PLASTICIDAD GENERAL

Todos los sólidos tienen, durante el proceso de deformación, una zona en la cual su comportamiento es elástico, es decir en que la tensión en un punto depende solamente del valor de su deformación y no de la historia seguida por ésta durante el proceso de carga. Un sólido elástico ideal se caracteriza por deformaciones totalmente recuperables y por tensiones obtenidas según el modelo constitutivo más simple que es la ley de Hooke generalizada, en la siguiente forma (Owen y Hinton 1980; Oller 1988, Lubliner et al. 1989):

$$\sigma = C_s \varepsilon \quad (3-1.1)$$

La ecuación (3-1.1) expresa una relación secante total entre el tensor de tensiones σ y el tensor de deformaciones ε , mediante la matriz constitutiva elástica secante C_s .

La teoría de la plasticidad se basa en la mecánica de los medios continuos y describe el comportamiento físico macroscópico de los sólidos ideales, suponiendo dos estados de comportamiento mecánico:

- Uno lineal elástico;
- Uno elasto-plástico, que sigue al estado inicial lineal elástico, donde el campo de tensiones no crece en forma proporcional al campo de deformaciones y donde estas deformaciones resultan de sumar una parte recuperable (elástica)

y otra parte irrecuperable (plástica). Esta parte plástica puede evidenciarse al iniciar un proceso de descarga, que siempre es elástico.

El límite que marca la separación entre estos dos estados se denomina *límite de fluencia* y es definido a través de una función en el espacio de tensiones que se llama *función de fluencia* (Massonet 1966).

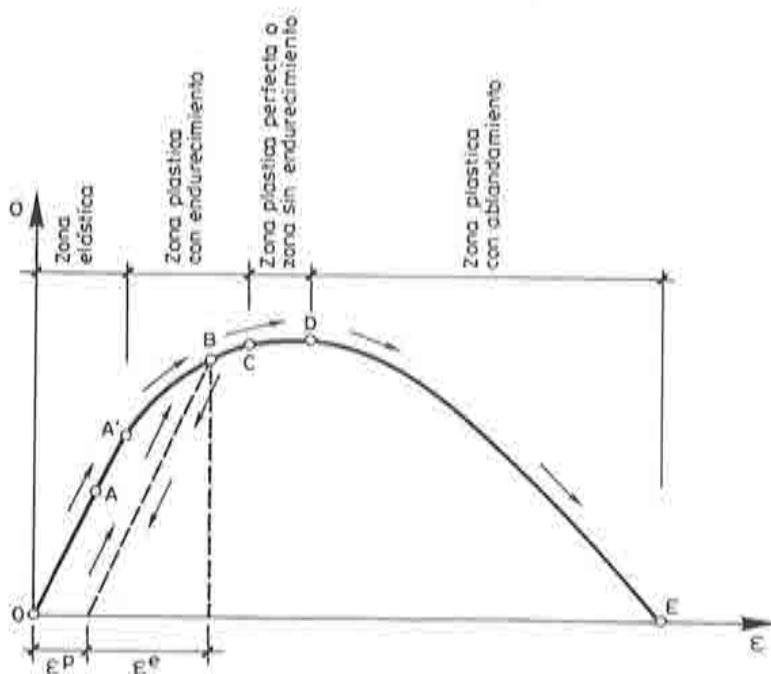


Figura 3-1.1 Comportamiento uniaxial de un material elasto-plástico (Oller 1988).

En la Figura 3-1.1 se muestra el comportamiento uniaxial de un punto correspondiente a un material elasto-plástico, para las distintas zonas del proceso. En el punto A' se alcanza el límite de fluencia después de lo que comienza un proceso de reducción de la rigidez debido a la acción de mecanismos inelásticos irreversibles. Si se inicia ahora un proceso de descarga se recupera sólo la parte elástica ϵ^e del total de la deformación ϵ sufrida, quedando otra parte remanente no recuperable denominada *deformación plástica* ϵ^p . Pueden distinguirse los tres tipos básicos de comportamiento elasto-plástico: endurecimiento, ablandamiento y elasto-plástico perfecto. Este modelo elasto-plástico ideal puede representar bastante bien el comportamiento de distintos materiales reales (metálicos o no metálicos) mediante un simple reajuste de los límites definidos anteriormente.

Dos grandes aspectos deben definirse dentro de la teoría de la plasticidad (Oller 1988):

- el criterio de fluencia, que establece el comienzo del proceso inelástico y la posterior evolución de las fronteras del dominio elástico en el espacio de tensiones;
- el comportamiento elasto-plástico, que tiene que explicar la descomposición de las deformaciones en una parte elástica y en una plástica, la regla de flujo plástico y la variación de ciertas variables internas \mathbf{q} .

2.1 Función de fluencia

En un proceso uniaxial es muy fácil encontrar el límite donde empieza la discontinuidad, por tratarse de la tensión en el límite elástico. Sin embargo, para estados multiaxiales de tensión no resulta nada fácil la definición de dicho límite. Para solucionar este problema se formula a partir de estudios experimentales, una función de fluencia que depende del estado tensional y de las variables internas (Oller 1988)

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}[\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{q}(t)] = 0 \quad (3-1.2)$$

Utilizando esta función, la condición de consistencia de Prager (Figura 3-1.2) define inequívocamente el estado en el cual se encuentra un punto del sólido:

- Estado elástico si se cumplen las condiciones

$$\mathcal{F}[\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{q}(t)] < 0 \quad o \quad \dot{\mathcal{F}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} < 0 \quad (\text{descarga}) \quad (3-1.3)$$

- Estado elasto-plástico si se cumplen las condiciones

$$\mathcal{F}[\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{q}(t)] = 0 \quad y \quad \dot{\mathcal{F}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (\text{carga}) \quad (3-1.4)$$

2.2 Descomposición de la deformación total. Regla de flujo.

Cuando el estado tensional en un punto alcanza el criterio de discontinuidad inicial $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$ y a la vez cumple con la condición de consistencia plástica $\dot{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$, se admite que el punto se encuentra en estado elasto-plástico. Para solucionar el problema, se adopta como válida la hipótesis de Prandtl-Reus respecto a la descomposición de la deformación total $\boldsymbol{\varepsilon}$,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{C}_o^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3-1.5)$$

y se define una regla de flujo que considera que el incremento temporal de deformación plástica $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ es proporcional a un tensor de flujo plástico \mathbf{g} definido en el espacio de tensiones (Oller 1988)

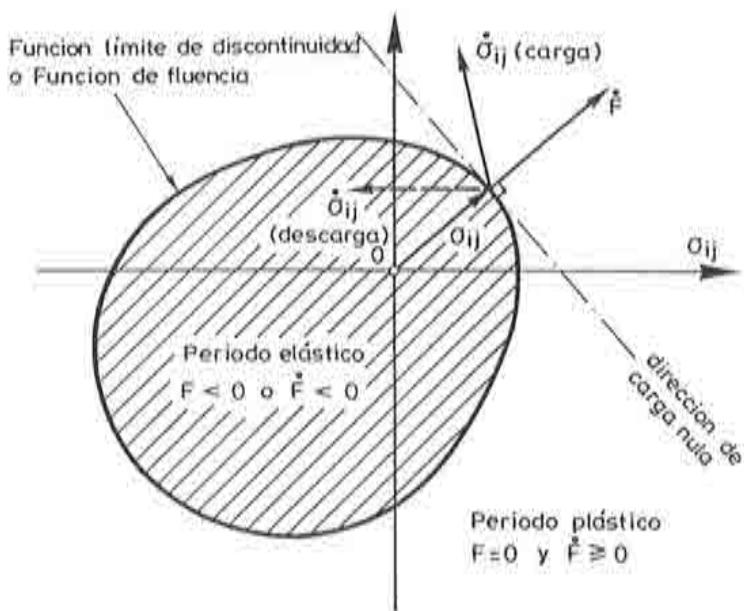


Figura 3-1.2 Representación de la condición de consistencia plástica de Prager (Oller 1988).

$$\dot{\epsilon}^p = \lambda \frac{\partial G(\sigma, q)}{\partial \sigma} = \lambda g \quad (3-1.6)$$

Esta expresión tiene el nombre de *regla de normalidad* respecto a la superficie de potencial plástico $G(\sigma, q)$, que determina de esta manera la dirección del incremento temporal de deformación plástica $\dot{\epsilon}^p$. La variable λ , que es un escalar no negativo llamado *parámetro de consistencia plástica*, se determina a partir de la condición de consistencia de Prager y da la magnitud del incremento temporal de deformación plástica $\dot{\epsilon}^p$.

En el caso en el cual se considera como superficie de potencial plástico la superficie de fluencia plástica, se habla de una regla de flujo asociada a la superficie de fluencia. En caso contrario se habla de una regla de flujo no asociada a la superficie de fluencia, lo que es el caso más general.

2.3 Superficie de carga plástica. Endurecimiento plástico.

En la gráfica que describe el comportamiento uniaxial de un sólido elasto-plástico ideal de la Figura 3-1.1, se reconocen cuatro zonas de comportamiento distinto, una elástica y las otras tres que son de naturaleza elasto-plástica. El límite entre la zona elástica y la zona plástica se establece mediante la su-

superficie de fluencia. Este límite no es fijo, como puede observarse si se considera un proceso de descarga después de la superación por primera vez del límite elástico y se continua el proceso cargando de nuevo la estructura. Extrapolando este resultado a casos de cargas multiaxiales, se deduce que la superficie de fluencia adquiere movilidad en el espacio de tensiones, a medida que evoluciona el proceso plástico, transformándose en la denominada *superficie de carga plástica*. Esta función es la actualización de la función límite elástico dependiendo del estado de las variables internas \mathbf{q} . El fenómeno que genera este cambio de posición de la superficie de carga plástica se conoce como *endurecimiento plástico* y puede ser de dos tipos: isotrópico si hay movimiento homotético de la superficie de carga plástica o cinemático si hay movimiento de traslación de la misma superficie. A su vez, el endurecimiento isotrópico puede ser positivo (endurecimiento verdadero), nulo (proceso elasto-plástico perfecto) o negativo (ablandamiento).

El endurecimiento isotrópico está controlado por la evolución de la *función de endurecimiento plástico* $\mathcal{K}(\kappa)$, que depende de la *variable interna de endurecimiento plástico* κ . La variación de κ sigue una regla de evolución explícita en función de $\dot{\epsilon}^p$

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} H_\kappa(\sigma, \mathbf{q}) \equiv \dot{\lambda} \left[\mathbf{h}_\kappa^T(\sigma, \kappa) \frac{\partial \mathcal{G}(\sigma, \kappa)}{\partial \sigma} \right] \quad (3-1.7)$$

$$\dot{\kappa} = \mathbf{h}_\kappa^T(\sigma, \kappa) \dot{\epsilon}^p$$

donde $\mathbf{h}_\kappa^T(\sigma, \kappa)$ es un tensor de segundo orden, que depende del tensor de tensiones y de la variable de endurecimiento plástico.

2.4 Relación tensión-deformación generalizada

La ley constitutiva elasto-plástica incremental tangente $\dot{\sigma} = \mathbf{C}_T \dot{\epsilon}$ y el parámetro de consistencia plástica $\dot{\lambda}$ pueden formularse a partir del criterio general de fluencia plástica de Prager. Se supone una función de fluencia de una forma menos general, pero justificada por los datos experimentales (Oller 1988):

$$\mathcal{F}(\sigma, \kappa) = f(\sigma) - \mathcal{K}(\kappa) = 0 \quad (3-1.8)$$

y, como consecuencia, su variación temporal $\dot{\mathcal{F}}$ queda

$$\dot{\mathcal{F}} = \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \dot{\sigma} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = 0 \quad (3-1.9)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (3-1.8), (3-1.9) se expresa como

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \dot{\sigma} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \kappa} \dot{\kappa} \quad (3-1.10)$$

Substituyendo la ecuación (3-1.7) en (3-1.10), resulta

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \dot{\sigma} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \left(\mathbf{h}_\kappa^T \dot{\epsilon}^p \right) \quad (3-1.11)$$

y, substituyendo en la última ecuación la regla de flujo generalizada dada por la ecuación (3-1.6), se tiene

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \dot{\sigma} = - \lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \left(\mathbf{h}_\kappa^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right) \quad (3-1.12)$$

El incremento de tensión, que se obtiene derivando en función del tiempo la ecuación (3-1.5), puede escribirse como

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}_o (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) = \mathbf{C}_o \left(\dot{\epsilon} - \lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right) \quad (3-1.13)$$

siendo \mathbf{C}_o el tensor de rigidez inicial del material. Substituyendo la ecuación (3-1.13) en la ecuación (3-1.12) resulta

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_o \dot{\epsilon} - \lambda \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_o \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} = - \lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \left(\mathbf{h}_\kappa^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right) \quad (3-1.14)$$

Agrupando términos se obtiene

$$\lambda \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_o \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \left(\mathbf{h}_\kappa^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right) \right] = \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_o \dot{\epsilon} \quad (3-1.15)$$

lo que permite expresar λ en la forma

$$\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_o \dot{\epsilon}}{A + \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_o \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma}} \quad (3-1.16)$$

donde A es el parámetro de endurecimiento plástico:

$$A = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \left(\mathbf{h}_\kappa^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \quad (3-1.17)$$

Substituyendo la ecuación (3-1.16) en la ecuación (3-1.13), resulta la relación incremental tensión - deformación:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_o \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\mathbf{C}_o \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{C}_o}{A + \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{C}_o \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (3-1.18)$$

pudiéndose escribir, a partir de ésta última, la *ley constitutiva incremental tangente*

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_t^{ep} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (3-1.19)$$

siendo \mathbf{C}_t^{ep} el tensor de rigidez elasto-plástico tangente del material

$$\mathbf{C}_t^{ep} = \mathbf{C}_o - \frac{\mathbf{C}_o \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{C}_o}{A + \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{C}_o \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (3-1.20)$$

3. Vectores de flujo de Nayak-Zienkiewicz

Los vectores de flujo se obtienen como derivadas de una cierta función escalar de tensiones - \mathcal{F} o \mathcal{G} - con respecto al tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$. Si este tensor de tensiones es simétrico, el vector de flujo tiene sólo seis componentes distintas. En el caso del vector de flujo plástico, estos son (Oller 1988)

$$\mathbf{g} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_{11}} \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_{22}} \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_{33}} \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_{12}} \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_{13}} \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_{23}} \right]^T \quad (3-1.21)$$

El cálculo de este vector se basa en admitir que el flujo plástico resulta de una combinación lineal de tres vectores, definidos respectivamente en función del primer invariante, I_1 , del tensor de tensiones y de los invariantes segundo y tercero, J_2 y J_3 , del tensor desviador de tensiones

$$\mathbf{g} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3-1.22)$$

Usándose la definición del ángulo de similaridad de Lode

$$\operatorname{sen} (3\theta) = \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

y operando algebráicamente en la ecuación (3-1.22), resulta

$$\mathbf{g} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} = C_1 \mathbf{g}_1 + C_2 \mathbf{g}_2 + C_3 \mathbf{g}_3 \quad (3-1.23)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} = \{ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ }^T \\ \mathbf{g}_2 &= \frac{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma} = \frac{1}{2(J_2)^{\frac{1}{2}}} \{ s_{11} \ s_{22} \ s_{33} \ 2s_{23} \ 2s_{31} \ 2s_{12} \ }^T \quad (3-1.24) \\ \mathbf{g}_3 &= \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = \left\{ \begin{array}{l} s_{22}s_{33} - s_{23}^2 \\ s_{11}s_{33} - s_{13}^2 \\ s_{11}s_{22} - s_{12}^2 \\ 2(s_{13}s_{12} - s_{11}s_{23}) \\ 2(s_{12}s_{23} - s_{22}s_{13}) \\ 2(s_{23}s_{12} - s_{33}s_{12}) \end{array} \right\} + \frac{J_2}{3} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial I_1} \\ C_2 &= \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \frac{\operatorname{tg} (3\theta)}{(J_2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3-1.25) \\ C_3 &= \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \frac{\sqrt{3}}{2 \cos (3\theta)} \frac{1}{(J_2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

De esta manera, para cada función de potencial plástico, es necesario definir sólo las constantes C_1, C_2 y C_3 para calcular el vector de flujo plástico.

ANEXO 3-2

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DINÁMICO. MÉTODO DE NEWMARK

1. ECUACIONES DE DIFERENCIAS FINITAS EN EL TIEMPO

Considérese la variación del vector de aceleraciones de la estructura $\ddot{\mathbf{a}}(t)$ entre los instantes de tiempo t_i y $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ (Figura 3-2.1). Se realiza el cambio de variable $\tau = t - t_i$ de tal forma que para $t = t_i$ el valor de τ sea cero y para $t = t_{i+1}$, τ valga Δt . Supóngase a continuación que el valor del vector aceleración de respuesta en un instante $\tau \leq \Delta t$ se expresa como (Barbat y Canet 1989; Donea 1980)

$$\ddot{\mathbf{a}}(\tau) = \ddot{\mathbf{a}}_i + f(\tau) (\ddot{\mathbf{a}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{a}}_i) \quad (3-2.1)$$

de tal manera que la función $f(\tau)$ sea cero para $\tau = 0$ y valga 1 para $\tau = \Delta t$. Como fácilmente se ve, la expresión (3-2.1) supone que la ley de variación de las aceleraciones en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ es la misma para todos los grados de libertad.

La velocidad $\dot{\mathbf{a}}(\tau)$ puede expresarse integrando la aceleración dada por la ecuación (3-2.1). Se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}(\tau) &= \dot{\mathbf{a}}_i + \int_0^\tau \ddot{\mathbf{a}}(\tau) d\tau \\ &= \dot{\mathbf{a}}_i + \int_0^\tau \dot{\mathbf{a}}_i d\tau + \int_0^\tau (\ddot{\mathbf{a}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{a}}_i) f(\tau) d\tau \\ &= \dot{\mathbf{a}}_i + \dot{\mathbf{a}}_i \tau + (\ddot{\mathbf{a}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{a}}_i) \int_0^\tau f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3-2.2)$$

Realizando la sustitución

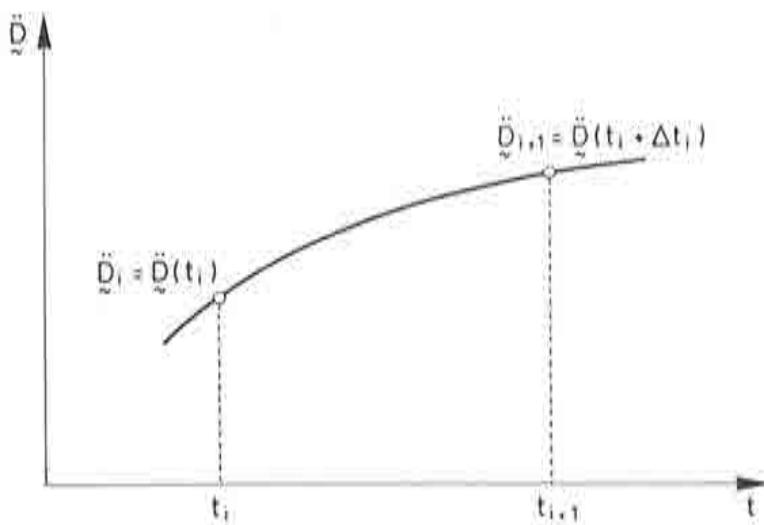


Figura 3-2.1 Variación de la aceleración con el tiempo.

$$g(\tau) = \int_0^\tau f(\tau) d\tau \quad (3-2.3)$$

y también

$$\gamma \Delta t = \int_0^{\Delta t} f(\tau) d\tau \quad (3-2.4)$$

la expresión (3-2.2) queda

$$\dot{a}(\tau) = \dot{a}_i + \ddot{a}_i \tau + (\ddot{a}_{i+1} - \ddot{a}_i) g(\tau) \quad (3-2.5)$$

y para $\tau = \Delta t$ resulta de (3-2.5) y (3-2.4)

$$\begin{aligned} \dot{a}_{i+1} &= \dot{a}_i + \ddot{a}_i \Delta t + (\ddot{a}_{i+1} - \ddot{a}_i) \gamma \Delta t \\ &= \dot{a}_i + [(1 - \gamma) \ddot{a}_i + \gamma \ddot{a}_{i+1}] \Delta t \end{aligned} \quad (3-2.6)$$

Para calcular los desplazamientos se integra (3-2.5), lo que proporciona la expresión

$$a(\tau) = a_i + \dot{a}_i \tau + \ddot{a}_i \frac{\tau^2}{2} + (\ddot{a}_{i+1} - \ddot{a}_i) \int_0^\tau g(\tau) d\tau \quad (3-2.7)$$

Particularizando para $\tau = \Delta t$ y llamando

$$\beta \Delta t^2 = \int_0^{\Delta t} g(\tau) d\tau \quad (3-2.8)$$

se obtiene la relación final⁽⁹⁾

$$\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{a}_i + \dot{\mathbf{a}}_i \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{a}}_i + \beta \ddot{\mathbf{a}}_{i+1} \right] \Delta t^2 \quad (3-2.9)$$

Las expresiones (3-2.5) y (3-2.9) constituyen las ecuaciones en diferencias de Newmark, las cuales, juntamente con la ecuación diferencial del movimiento (2.39), permiten hallar los vectores desplazamientos, velocidad y aceleración en t_{i+1} en función únicamente de estos valores en el tiempo t_i .

Nótese que el método de Newmark depende de los parámetros γ y β . Las condiciones que deben cumplir estos parámetros para que el algoritmo sea incondicionalmente estable se verán en los apartados siguientes.

2. ANÁLISIS LINEAL

La ecuación de equilibrio (2.39), deducida en el Capítulo 2, tenía en el segundo miembro términos de fuerzas de naturaleza dinámica, siendo los aspectos estáticos tratados como caso particular de los dinámicos. En este capítulo se hace una separación de dichas fuerzas en estáticas y puramente dinámicas y se considera como única acción puramente dinámica la sísmica. Esta particularización no restringe la generalidad del esquema presentado, puesto que a cualquier otra carga dinámica se le puede aplicar el mismo tratamiento que a la acción sísmica. Generalizando, de esta manera, la formulación dada por la expresión (2.39) y además incluyendo un término de amortiguamiento (en base a alguna hipótesis como, por ejemplo, la de Rayleigh), la ecuación que rige el movimiento de una estructura con varios grados de libertad en régimen elástico es

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} - \mathbf{M}\mathbf{j}\ddot{\mathbf{a}}_g(t) \quad (3-2.10)$$

En esta ecuación \mathbf{M} es la matriz de masa, \mathbf{A} la de amortiguamiento, \mathbf{K} la de rigidez, \mathbf{f} el vector de fuerzas externas estáticas, \mathbf{j} un vector que selecciona los grados de libertad activos para la excitación sísmica exterior y $\ddot{\mathbf{a}}_g$ es la aceleración del terreno. Esta ecuación, para el tiempo $t = t_{i+1}$, toma la forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}}_{i+1} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{a}}_{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{f} - \mathbf{M}\mathbf{j}\ddot{\mathbf{a}}_{g,i+1} \quad (3-2.11)$$

De las ecuaciones en diferencias de Newmark (3-2.5) y (3-2.9) se obtiene

$$\ddot{\mathbf{a}}_{i+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} [\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i - \dot{\mathbf{a}}_i \Delta t] - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}_i \quad (3-2.12)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{a}}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{a}}_i \quad (3-2.13)$$

y introduciendo estas expresiones en la ecuación del movimiento (3-2.11) se obtiene la variante de la ecuación genérica (1.36) correspondiente al método de Newmark, que puede expresarse de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{K}} \mathbf{a}_{i+1} = \hat{\mathbf{f}}_{i+1} \quad (3-2.14)$$

en donde

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{A} \quad (3-2.15)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{i+1} = & \mathbf{f} - \mathbf{M} \mathbf{j} \ddot{\mathbf{a}}_{g,i+1} + \mathbf{M} \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{a}_i + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{a}}_i + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}_i \right] \\ & + \mathbf{A} \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{a}_i + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{a}}_i + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{a}}_i \right] \end{aligned} \quad (3-2.16)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas lineales (3-2.14) se obtienen los desplazamientos \mathbf{a}_{i+1} y una vez calculado este valor, sustituyendo en (3-2.12) y (3-2.6), resultan las aceleraciones y las velocidades para el instante de tiempo t_{i+1} .

Es interesante observar que para el primer instante de tiempo $t = t_1 = \Delta t$ en que se calcula la respuesta es preciso conocer los valores del desplazamiento, de la velocidad y de la aceleración en el instante cero, es decir \mathbf{a}_0 , $\dot{\mathbf{a}}_0$ y $\ddot{\mathbf{a}}_0$, respectivamente. Habitualmente las condiciones iniciales corresponden a velocidad nula. La aceleración $\ddot{\mathbf{a}}_0$ y el desplazamiento \mathbf{a}_0 deberán cumplir la ecuación (3-2.10) y, por tanto

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_0 = -\mathbf{M} \mathbf{j} \ddot{\mathbf{a}}_{g,0} ; \quad \mathbf{K} \mathbf{a}_0 = \mathbf{f} \quad (3-2.17)$$

expresiones que permiten completar las condiciones iniciales del problema y que toman en cuenta el hecho de que, en el instante inicial, la estructura se encuentra ya bajo la acción de las fuerzas estáticas.

3. APROXIMACIÓN Y ESTABILIDAD

En el caso de una estructura con un solo grado de libertad la ecuación (3-2.11) se reduce a

$$\ddot{x}_{i+1} + 2\nu\omega\dot{x}_{i+1} + \omega^2x_{i+1} = -\ddot{x}_{g,i+1} \quad (3-2.18)$$

Las ecuaciones en diferencias de Newmark (3-2.5) y (3-2.9) serán

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + [(1-\gamma)\ddot{x}_i + \gamma\ddot{x}_{i+1}]\Delta t \quad (3-2.19)$$

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{x}_i + \beta \ddot{x}_{i+1} \right] \Delta t^2 \quad (3-2.20)$$

De estas tres ecuaciones es fácil deducir la relación entre el estado $i+1$ y el anterior i . Para $\nu = 0$ y cuando las fuerzas externas son nulas, esta relación será

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ \dot{x}_{i+1} \\ \ddot{x}_{i+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_i \\ \dot{x}_i \\ \ddot{x}_i \end{bmatrix}$$

en donde

$$A = \frac{1}{B} \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \\ -\gamma\omega^2\Delta t & 1 - (\gamma - \beta)\omega^2\Delta t^2 & \left[1 - \gamma - \left(\frac{1}{2}\gamma - \beta \right) \Delta t^2\omega^2 \right] \Delta t \\ -\omega^2 & -\omega^2\Delta t & -\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \omega^2\Delta t^2 \end{bmatrix} \quad (3-2.21)$$

siendo

$$B = 1 + \beta\omega^2\Delta t^2$$

Puede demostrarse que el esquema es incondicionalmente estable para

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad (3-2.22)$$

$$\beta \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \gamma \right)^2 \quad (3-2.23)$$

El grado de amortiguamiento artificial del esquema de integración viene dado por el parámetro γ , siendo mayor a medida que dicho valor aumenta. En la Figura 3-2.2 puede observarse la variación del radio espectral ρ en función de $\Delta t/T$ para diversos valores de γ y β . Como puede observarse, para $\gamma = 0.5$ y $\beta = 0.25$ el amortiguamiento artificial introducido por el algoritmo es nulo, cualquiera que sea el incremento de tiempo elegido. Para valores de $\gamma > 0.5$ el amortiguamiento es excesivamente grande, por lo que se producen imprecisiones en los resultados, a menos que se elija un Δt muy pequeño y por lo tanto poco económico para un esquema implícito. Habitualmente se toma $\gamma = 0.5$ y $\beta = 0.25$.

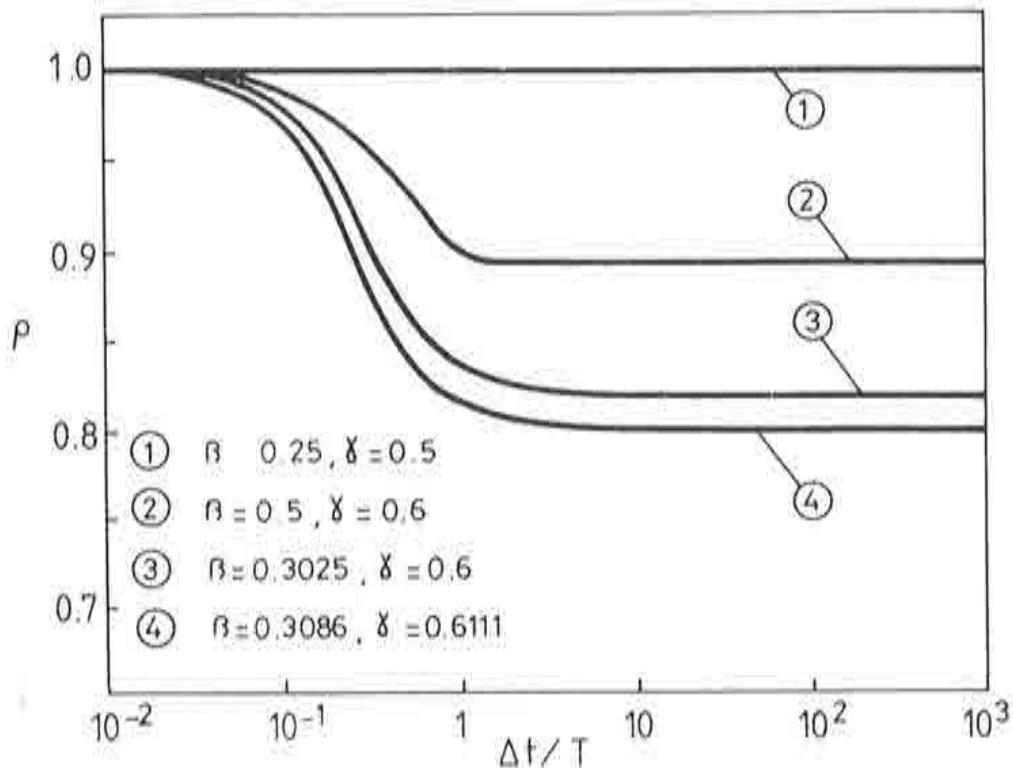


Figura 3-2.2 Método de Newmark. Variación del radio espectral en función de $\Delta t/T$.

4. ANÁLISIS NO LINEAL - MÉTODO DE LA RIGIDEZ INICIAL

En el caso de análisis no lineal (Barbat y Canet 1989) que aquí se trata, la matriz \mathbf{C} de la expresión (2.2) ya no es constante, por lo que se tendrá que recurrir a la formulación dada por (2.39) adaptada al método de solución no lineal que se prefiere. Aquí se detallará la implementación del método de la rigidez inicial.

Como puede observarse, la resolución de la ecuación (2.39) supone también preparar la ecuación (3.2.11) para el procedimiento iterativo. Esto se consigue reescribiendo el sistema (3.2.11) en función del incremento $\Delta\mathbf{a}_{i+1}$ del vector de desplazamientos nodales. Modificando en este sentido las relaciones (3.2.12) y (3.2.13), éstas quedan

$$\ddot{\mathbf{a}}_{i+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta\mathbf{a}_{i+1} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{a}}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}_i \quad (3.2.24)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta\mathbf{a}_{i+1} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{a}}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{a}}_i \quad (3.2.25)$$

$$\mathbf{a}_{i+1} = \Delta\mathbf{a}_{i+1} + \mathbf{a}_i \quad (3.2.26)$$

Con ello puede empezarse ya la iteración (véase la Figura 3-2.3). En la primera etapa se sustituye (3.2.24), (3.2.25) y (3.2.26) en (3.2.11) quedando

$$\hat{\mathbf{K}} \Delta\mathbf{a}_{i+1}^{(1)} = \hat{\mathbf{f}}_{i+1}^{(1)} \quad (3.2.27)$$

donde se han introducido las notaciones

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{A} + \mathbf{K}_0 \quad (3.2.28)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{i+1}^{(1)} &= \mathbf{f} - \mathbf{M} \mathbf{j} \ddot{\mathbf{a}}_{g,i+1} + \mathbf{M} \left[\frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{a}}_i + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}_i \right] \\ &\quad - \mathbf{A} \left[\left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{a}}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{a}}_i \right] - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_i dV \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

donde \mathbf{K}_0 es la matriz de rigidez elástica inicial. El término $\int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_i dV$ ha reemplazado el término $\mathbf{K} \mathbf{a}_i$ que se obtuviera al substituir (3.2.26) en (3.2.11). En el dominio de comportamiento elástico los dos términos son exactamente

iguales (véase el capítulo 2) mientras que en la zona no lineal dicha igualdad cesa de existir. La razón de dicho reemplazo es la optimización del algoritmo de integración aprovechando el estado tensional no lineal ya calculado para el paso de tiempo anterior, de esta manera disminuyéndose el número de iteraciones necesarias para conseguir el equilibrio (véase la Figura 3-2.3).

Se resuelve el sistema lineal (3-2.27) obteniéndose el valor $\Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(1)}$

$$\Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(1)} = \hat{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{f}}_{i+1}^{(1)} \quad (3-2.30)$$

Las aceleraciones y velocidades se calculan mediante las expresiones

$$\ddot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(1)} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(1)} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{a}}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}_i \quad (3-2.31)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(1)} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(1)} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{a}}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{a}}_i \quad (3-2.32)$$

y los desplazamientos totales se obtienen en la forma

$$\mathbf{a}_{i+1}^{(1)} = \mathbf{a}_i + \Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(1)} \quad (3-2.33)$$

Sin embargo, al no ser éste, en general, el valor correcto, tendrán que realizarse sucesivas iteraciones. Para ello hay que hallar las fuerzas residuales correspondientes a esta primera etapa. Ello se consigue calculando las tensiones $\sigma_{i+1}^{(1)}$, correspondientes a los desplazamientos $\mathbf{a}_{i+1}^{(1)}$, según el modelo constitutivo adoptado. Las fuerzas residuales valdrán (relación 1.55)

$$\Psi_{i+1}^{(1)} = \mathbf{K}_0 \Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(1)} + \int_V \mathbf{B}^T \sigma_i dV - \int_V \mathbf{B}^T \sigma_{i+1}^{(1)} dV \quad (3-2.34)$$

En general, al resolver la etapa (j) se partirá de los resultados obtenidos en la etapa ($j - 1$). Las expresiones (3-2.12) y (3-2.13) para esta etapa (j) se escribirán

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(j)} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(j)} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{a}}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}_i \\ &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \delta \mathbf{a}^{(j)} + \ddot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(j-1)} \end{aligned} \quad (3-2.35)$$

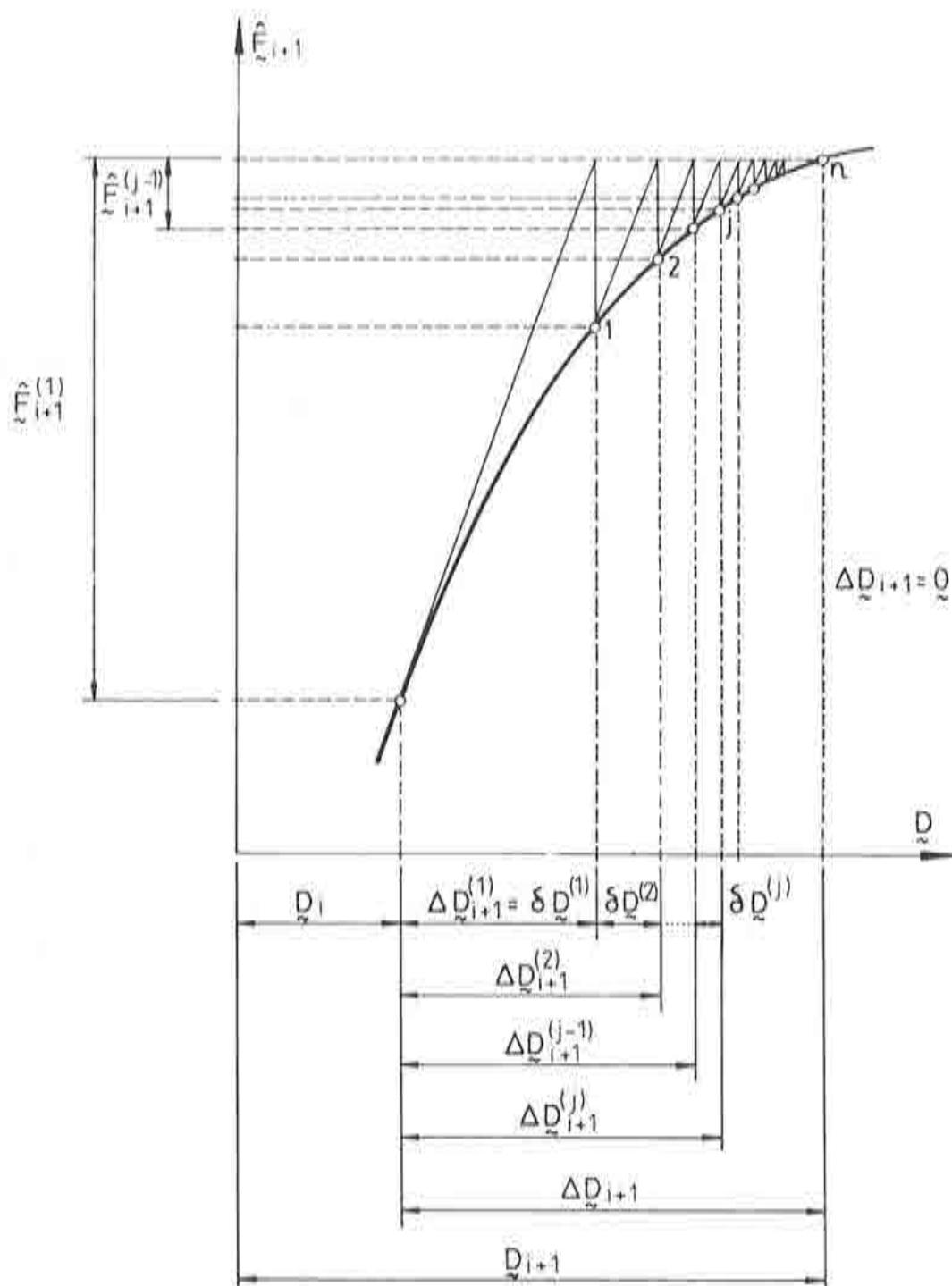


Figura 3-2.3 Esquema de iteración en un problema dinámico no lineal.

$$\begin{aligned}\dot{\ddot{\mathbf{a}}}_{i+1}^{(j)} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \ddot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(j)} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\ddot{\mathbf{a}}}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{\mathbf{a}}_i \\ &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \delta \mathbf{a}^{(j)} + \dot{\ddot{\mathbf{a}}}_{i+1}^{(j-1)}\end{aligned}\quad (3-2.36)$$

siendo

$$\delta \mathbf{a}^{(j)} = \Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(j)} - \Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(j-1)} = \mathbf{a}_{i+1}^{(j)} - \mathbf{a}_{i+1}^{(j-1)} \quad (3-2.37)$$

Las ecuaciones del movimiento se escribirán para la iteración (j) en la forma

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(j)} + \mathbf{A} \dot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(j)} + \left[\mathbf{K}_0 \delta \mathbf{a}^{(j)} + \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{(j-1)} dV \right] = \mathbf{f} - \mathbf{M} \mathbf{j} \ddot{\mathbf{a}}_{g,i+1} \quad (3-2.38)$$

en donde $\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{(j-1)}$ es el vector que representa las tensiones debidas al vector de desplazamientos $\mathbf{a}_{i+1}^{(j-1)}$. Introduciendo (3-2.35) y (3-2.36) en (3-2.38) se obtiene

$$\hat{\mathbf{K}} \delta \mathbf{a}^{(j)} = \hat{\mathbf{f}}_{i+1}^{(j)} \quad (3-2.39)$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{f}}_{i+1}^{(j)} &= \mathbf{f} - \mathbf{M} \mathbf{j} \ddot{\mathbf{a}}_{g,i+1} - \left[\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(j-1)} + \mathbf{A} \dot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(j-1)} + \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{(j-1)} dV \right] \\ &\equiv \Psi_{i+1}^{(j-1)} = \mathbf{K}_0 \delta \mathbf{a}^{(j-1)} + \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{(j-2)} dV - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{(j-1)} dV\end{aligned}\quad (3-2.40)$$

La resolución del sistema lineal (3-2.39) a la vez que el posterior empleo del modelo constitutivo proporcionan las aceleraciones, las velocidades, los desplazamientos y las tensiones $\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{(j)}$, preparándose de esta manera las condiciones para poder pasarse a la iteración siguiente. El proceso iterativo finaliza una vez alcanzada la tolerancia deseada, es decir cuando

$$\frac{|\Psi_{i+1}^{(j)}|}{|\mathbf{f} - \mathbf{M} \mathbf{j} \ddot{\mathbf{a}}_{g,i+1}|} \leq \text{Tolerancia} \quad (3-2.41)$$

CAPÍTULO 4

APLICACIÓN DEL ÍNDICE GLOBAL DE DAÑO AL ESTUDIO DE PATOLOGÍAS EN EDIFICIOS

4.1 ESTRUCTURAS PORTICADAS

4.1.1 Introducción

Esta primera parte de este capítulo está dedicada a demostrar la capacidad del modelo de daño visco-elástico descrito en el Capítulo 3 en describir el comportamiento estático y dinámico de estructuras porticadas. Los conceptos analizados en dicho capítulo han sido incorporados en programas de cálculo de elementos finitos especialmente desarrollados en el marco de esta monografía, que incluyen los elementos finitos de barra 2D y 3D subdiscretizados por capas o cuadrículas descritos en el Capítulo 1. Los dos ejemplos se enmarcan dentro del análisis dinámico no lineal de estructuras con no linealidad de material sometidas a terremotos. El primero es un pórtico plano con cargas en su plano y el segundo un pórtico espacial sometido a cargas cualesquiera.

4.1.2 Pórtico plano sometido a acciones estáticas y dinámicas

El elemento finito de barra 2D de Timoshenko discretizado por capas ha sido empleado en el estudio de la evolución del proceso de daño del pórtico plano de hormigón armado de la Figura 4.1 sometido a cargas estáticas y sísmicas (Barbat et al. 1992a, 1992b, 1994; Oller et al. 1992). El pórtico tiene una altura de 9 metros, un ancho de 6 metros y es de 3 niveles. Los pilares tienen una sección transversal de 30cm por 30cm de hormigón armado con una cuantía de 4.35% de acero. Las vigas tienen un canto de 40cm y un ancho de 30cm con

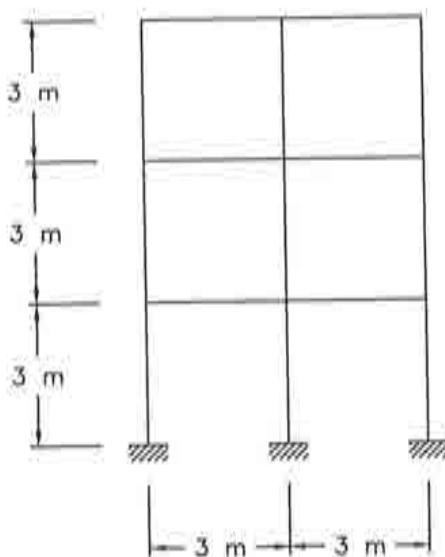


Figura 4.1 Geometría del pórtico estudiado.

una cuantía de armado de 5.3%. La estructura se discretiza en 45 elementos finitos cuadráticos de barra, de tres nodos y con dos puntos de integración de Gauss cada uno. De esta manera, el modelo dinámico del pórtico tiene 87 nodos, con tres grados de libertad por nodo. Cada elemento finito tiene una longitud de 1.0m y su sección está dividida en 20 capas de igual espesor. La segunda y la decimonovena capa son de acero y las demás son de hormigón. La cuantía de acero se controla variando el ancho de las capas de acero. El estado del material se verifica en los puntos de contacto entre capas, de manera separada en cada capa y luego se interpola linealmente sobre el espesor de la capa. Esto proporciona 40 puntos de control en la sección de la barra correspondiente a cada punto de integración.

Los materiales tienen las siguientes propiedades físicas:

Acero:

$$\begin{aligned}E &= 2.1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2; \\ \sigma^o &= 4200 \text{ daN/cm}^2; \\ \nu &= 0.25; \\ \rho &= 8 \text{ g/cm}^3.\end{aligned}$$

Hormigón:

$$\begin{aligned}E &= 2.0 \cdot 10^5 \text{ daN/cm}^2; \\ \sigma^o &= 300 \text{ daN/cm}^2; \\ \nu &= 0.17; \\ \rho &= 2.5 \text{ g/cm}^3.\end{aligned}$$

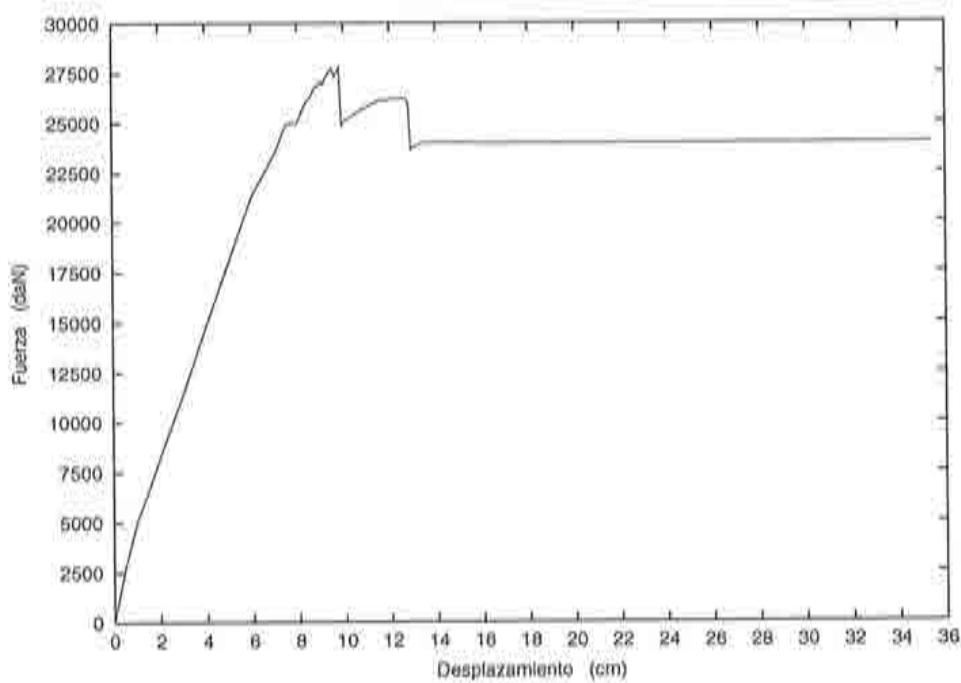


Figura 4.2 Curva fuerza-desplazamiento para el ensayo estático.

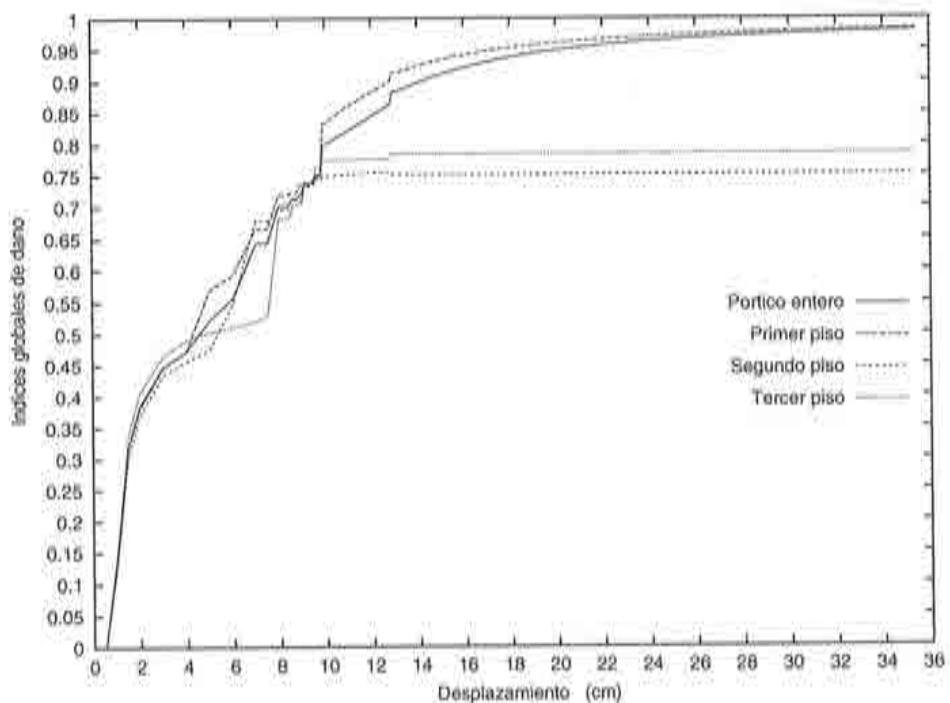


Figura 4.3 Evolución de los índices globales de daño de los tres pisos y de la estructura entera.

Análisis estático

El primer análisis realizado ha sido estático, tratando de simular un ensayo típico de empuje lateral aplicando un desplazamiento horizontal en el extremo superior izquierdo del pórtico hasta un valor de 4% de la altura total del mismo, que es el rango admisible de variación en una prueba de este tipo. En este estudio se considera para el acero un comportamiento elasto-plástico perfecto.

La Figura 4.2 muestra la evolución de la fuerza resistente del pórtico en función del desplazamiento del punto de aplicación de la carga. La evolución de los índices globales de daño de los pisos y del pórtico entero se presenta en la Figura 4.3. El estudio conjunto de estos dos gráficos permite observar que hay dos tramos donde la reducción brusca de la fuerza aplicada se corresponde con aumentos instantáneos de los índices globales de daño total y del primer piso y, en mucho menor medida, de los demás pisos. La explicación se encuentra en la historia de degradación del pórtico que puede verse detalladamente en la Figura 4.4.

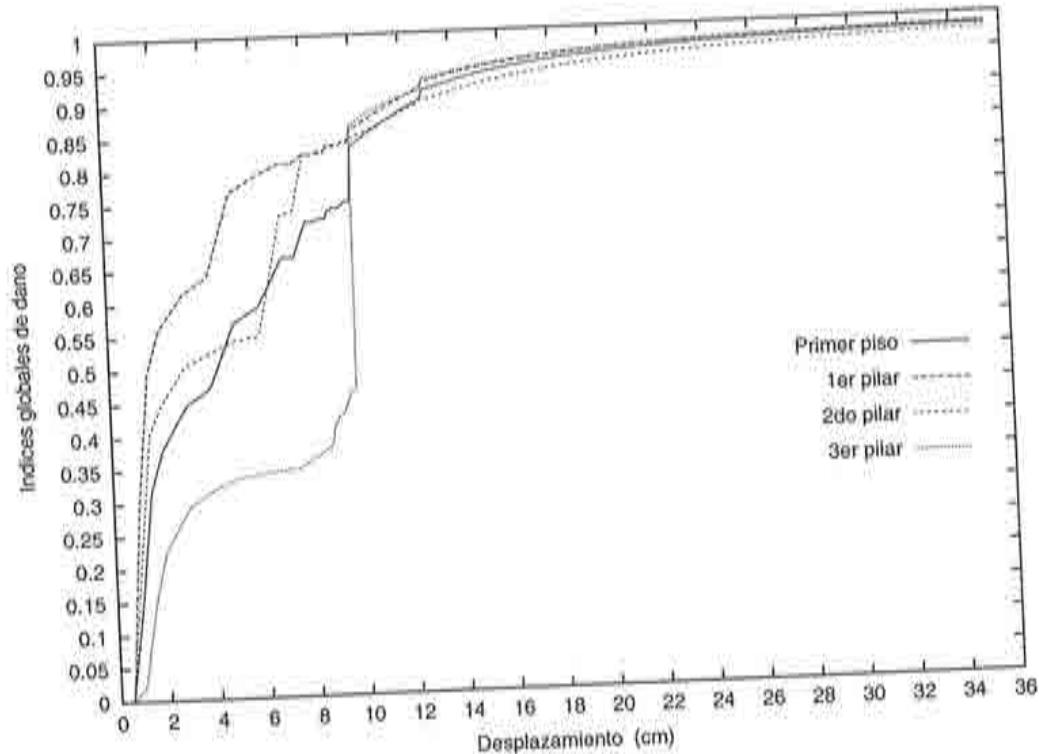


Figura 4.4 Evolución de los índices globales de daño del primer piso y de sus tres pilares.

Los pilares del primer piso son evidentemente las zonas donde ocurrirá el fallo estructural, puesto que el momento flector alcanza su máximo en la unión

con la base de sustentación. Sin embargo, los pilares no fallarán a la vez, ya que el más solicitado es el primero por la izquierda, que soporta además del momento flector el mayor esfuerzo axial de tracción. Los esfuerzos de tracción son relevantes aquí debido a la resistencia menor del hormigón a este tipo de solicitación. El primer pilar es el más solicitado y, a medida que va cediendo, el segundo pilar va absorbiendo su carga. A partir de cierto nivel de carga, el hormigón cede fragilmente en estos dos pilares con la consiguiente transferencia de carga hacia el tercero, que sufre una degradación paulatina. Este es el momento de la primera discontinuidad en la curva fuerza-desplazamiento. La segunda discontinuidad ocurre algo más tarde, cuando el hormigón del tercer pilar sufre el mismo fenómeno y prácticamente desaparece a efectos de rigidez.

El análisis efectuado permite destacar la capacidad del índice global de daño propuesto de describir adecuadamente el estado estructural. Se observa que el índice de daño global sigue de cerca la evolución del índice del primer piso que es el que define el estado de fallo global de la estructura. El significado de este resultado es que el índice global de daño de la estructura se comporta como si tuviera asignados pesos en función de la importancia de las distintas zonas estructurales.

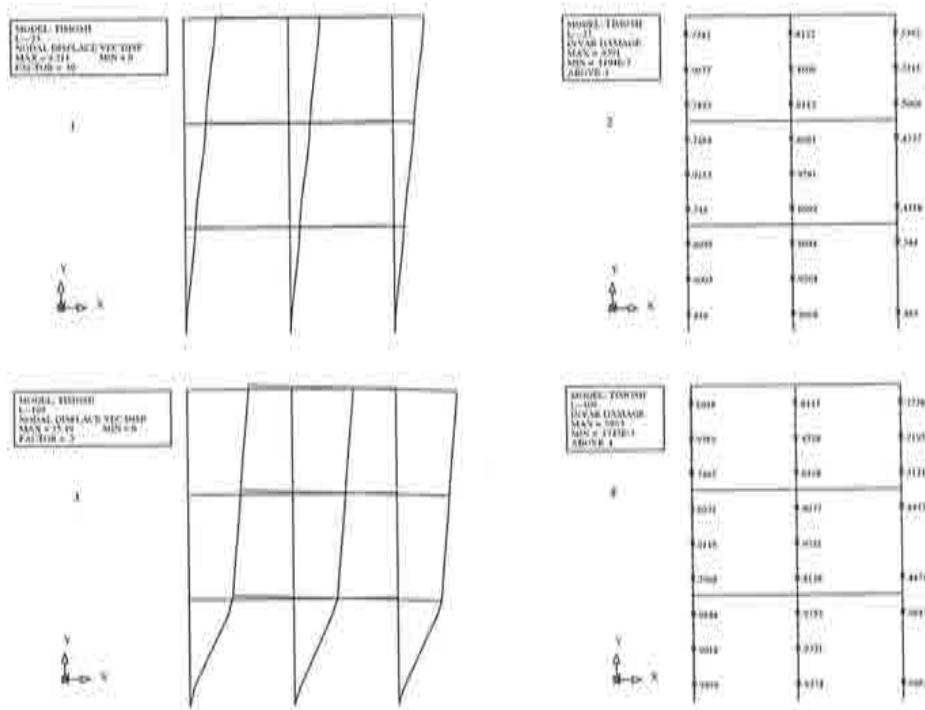


Figura 4.5 Deformada y distribución de daño en dos momentos característicos de la historia de carga.

En la Figura 4.5 se presentan dos deformadas con sus correspondientes distribuciones de daño elemental, es decir, de los índices globales de daño de un elemento finito. La primera deformada recoge el momento anterior al primer salto en la curva fuerza-desplazamiento, cuando todavía se mantiene la forma característica al estado elástico y una distribución casi uniforme del daño. La segunda deformada corresponde al momento final, donde pueden apreciarse las rótulas plásticas en las extremidades de los tres pilares del primer piso. Las distribuciones de daño elemental muestran máximos en los elementos que contienen dichas rótulas.

Análisis sísmico

En un segundo ejemplo de cálculo del mismo pórtico, se consideró como acción el acelerograma de la Figura 4.6. Las ecuaciones de movimiento dinámicas se resolvieron utilizando el algoritmo de integración en el tiempo de Newmark, con $\beta = 0.25$ y $\gamma = 0.5$, tal como se describe en el Anexo 3-2 del Capítulo 3. El paso de tiempo que se utilizó fue $T/30$, donde T es el período fundamental de la estructura, cuyo valor es de 0.14 segundos.

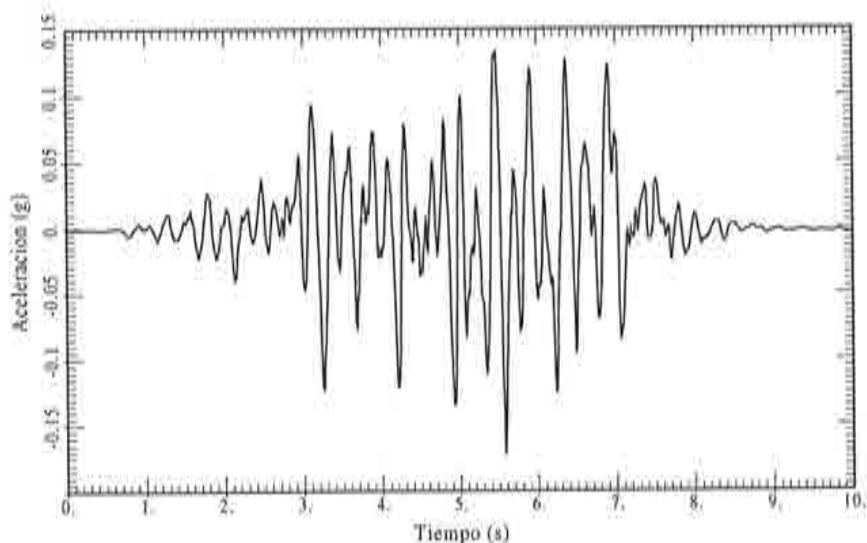


Figura 4.6 Acelerograma sintético.

El acelerograma sintético de la Figura 4.6 es de frecuencia dominante de 4 Hz y tiene una amplitud máxima de 0.175 g. El cálculo del pórtico ha sido realizado para dos casos: (a) sin considerar efectos de viscosidad del material (Figura 4.7a) y (b) tomando en cuenta dichos efectos a través de un tiempo de retardo $\alpha = 0.001$ s (Figura 4.7b). Dichas figuras muestran la evolución de los índices de daño global de toda la estructura y de los tres pisos del pórtico por

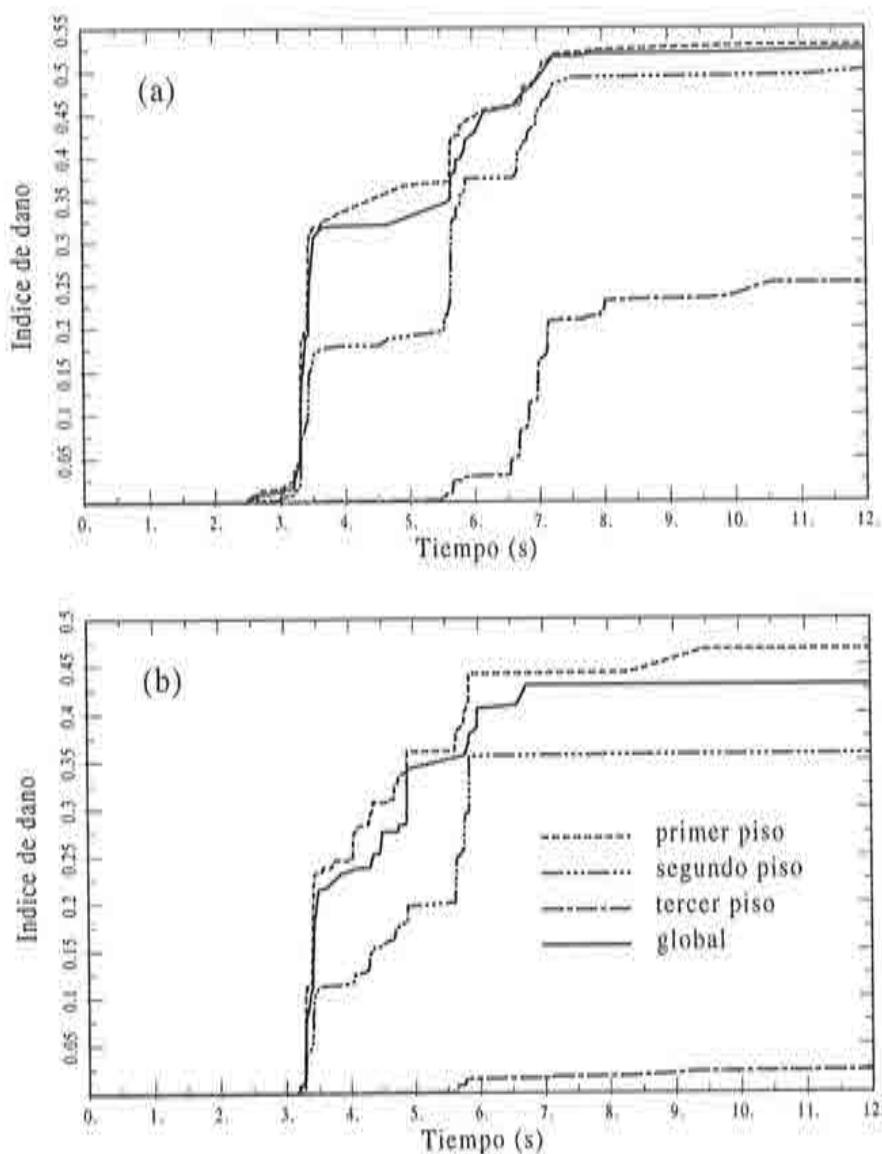


Figura 4.7 Indices de daño de los 3 pisos y de la estructura entera. a) Sin considerar efectos viscosos; b) Considerando efectos viscosos.

separado. Un piso se define como el conjunto de los pilares simples y sus vigas superiores del mismo nivel.

En las Figuras 4.10 y 4.11 se muestra la distribución del daño seccional a lo largo de los elementos de la estructura, de acuerdo con la fórmula (3.72). La primera figura corresponde al terremoto mediano descrito por el acelorograma de la Figura 4.6 y la segunda figura a otro destructivo obtenido multiplicando por dos las amplitudes del primero; en ninguno de los dos casos han sido considerados efectos viscosos. El mayor grado de degradación se observa en las zonas

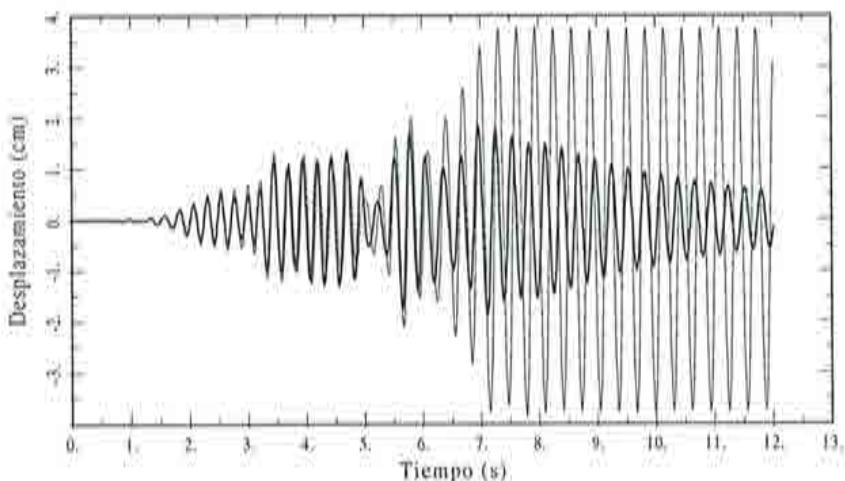


Figura 4.8 Evolución del desplazamiento horizontal del tercer piso con y sin amortiguamiento viscoso.

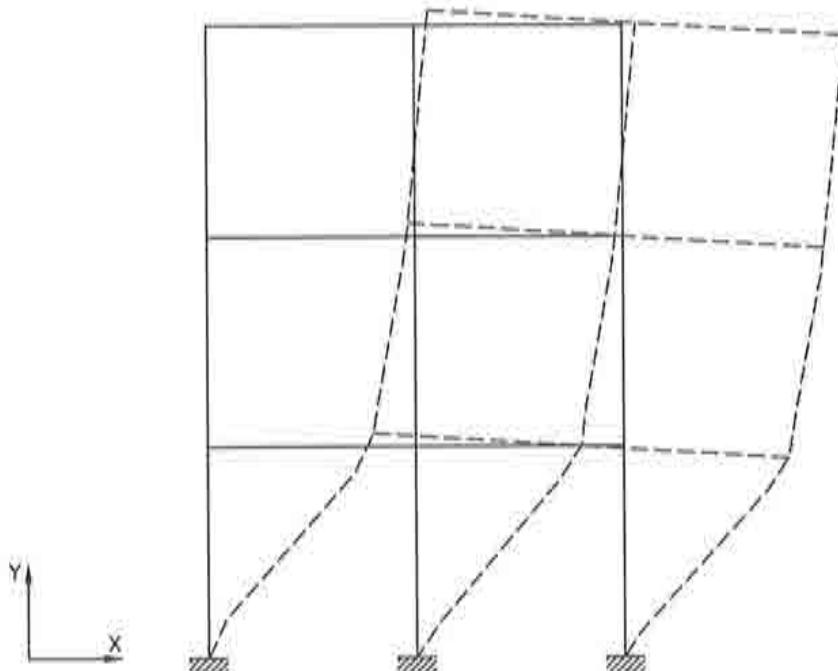


Figura 4.9 Deformada de la estructura cerca al momento del colapso.

de unión entre forjados y pilares, que es exactamente la localización esperada para este tipo de estructura y carga. Comparando los valores de los índices de daño locales con la evolución de los índices de daño globales, se observa que estos últimos toman valores ligeramente menores que los daños seccionales máximos que ocurren en la base de los pilares.

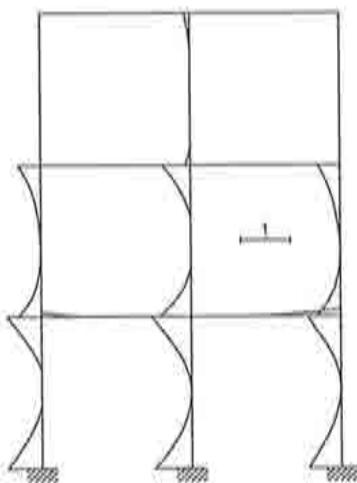


Figura 4.10 Distribución del daño seccional D_r , después de la acción del terremoto del caso a).

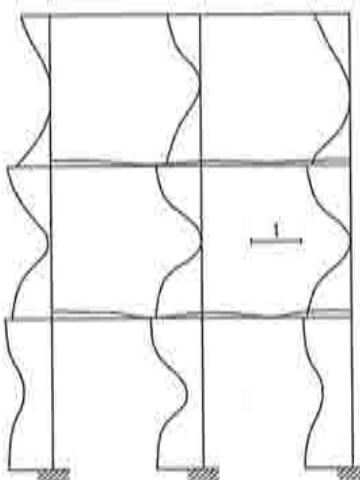


Figura 4.11 Distribución del daño seccional D_r , después de la acción de un terremoto igual que en el caso a), con amplitudes dobladas.

Las líneas interrumpidas en las Figuras 4.7 grafican las evoluciones de los índices de daño correspondientes a los distintos pisos. El índice de daño de la estructura entera sigue de cerca la evolución del índice de daño del primer piso, tomando valores ligeramente mayores debido al hecho de que éste es el piso más afectado, mientras que el segundo y el tercer piso presentan niveles de degradación sensiblemente menores, describiéndose de esta manera el conocido comportamiento sísmico de los edificios de acuerdo al cual el daño decrece con la altura del edificio.

En este ejemplo se destaca la capacidad del índice global de daño propuesto en esta monografía para describir adecuadamente el estado de una estructura

entera frente a una determinada acción sísmica. La parte más importante de la estructura que caracteriza la capacidad de resistencia global del pórtico frente a movimientos sísmicos horizontales es el estado de la base de los pilares del primer piso y, por extensión, de todo el primer piso. El hecho de que el índice global de daño de la estructura entera reproduce el comportamiento del índice del primer piso a un nivel algo más bajo, confirma que el mencionado índice es un parámetro adecuado para medir el estado global de la estructura puesto que es equivalente a un promedio de los daños locales ponderados por su importancia para la capacidad resistente total.

Otra propiedad importante del índice de daño es que permite predecir el mecanismo de fallo de una estructura. Esto se consigue observando la evolución de los índices de daño de en ciertos puntos de la estructura y comparándolos continuamente con el valor del índice global de la misma. Cuando este último índice empieza a tomar valores cercanos al valor máximo de un índice local y los demás puntos no se degradan más, esto significa que han sido identificados los puntos críticos de la estructura. El fallo de estos puntos conduce a la formación de un mecanismo, lo que provoca el colapso del edificio. Mientras haya *nuevos* puntos que se incorporen y se queden en el grupo de puntos cuyos índices de daño sigue aumentando significa que la estructura aún tiene reservas de resistencia. Cuando el número de puntos dañados se estabiliza y el índice global sigue aumentando, la estructura se transforma en un mecanismo, con lo cual el fallo puede considerarse total. Estos criterios pueden permitir tomar decisiones acerca de la posibilidad de reparar una cierta estructura que haya sido sometida a acciones por encima de los límites previstos en el proyecto.

4.1.3 Pórtico tridimensional sometido a una acción sísmica

La misma metodología ha sido utilizada para estudiar el comportamiento de un pórtico tridimensional sometido al efecto del mismo acelerograma sintético de frecuencia dominante de 4Hz y una amplitud máxima de 0.175 g de la Figura 4.6, accionando en la dirección *x*.

El pórtico tiene una altura de 6 metros dividida en dos pisos iguales y una base cuadrada de 6 metros de lado. Los pilares tienen una sección transversal cuadrada de 30cm×30cm y las vigas tienen un ancho de 30cm y un canto de 15cm. Todas las barras tienen una cuantía de armadura de 8%, con 4 redondos dispuestos en doble simetría en las esquinas de las secciones dejando una cobertura de 3cm de hormigón. La densidad del hormigón de las vigas ha sido aumentada para tomar en cuenta el efecto de la inercia del piso y ademas las vigas del plano *y*=6m tienen densidad doble, para provocar efectos de torsión global de la estructura (Hangau et al. 1993).

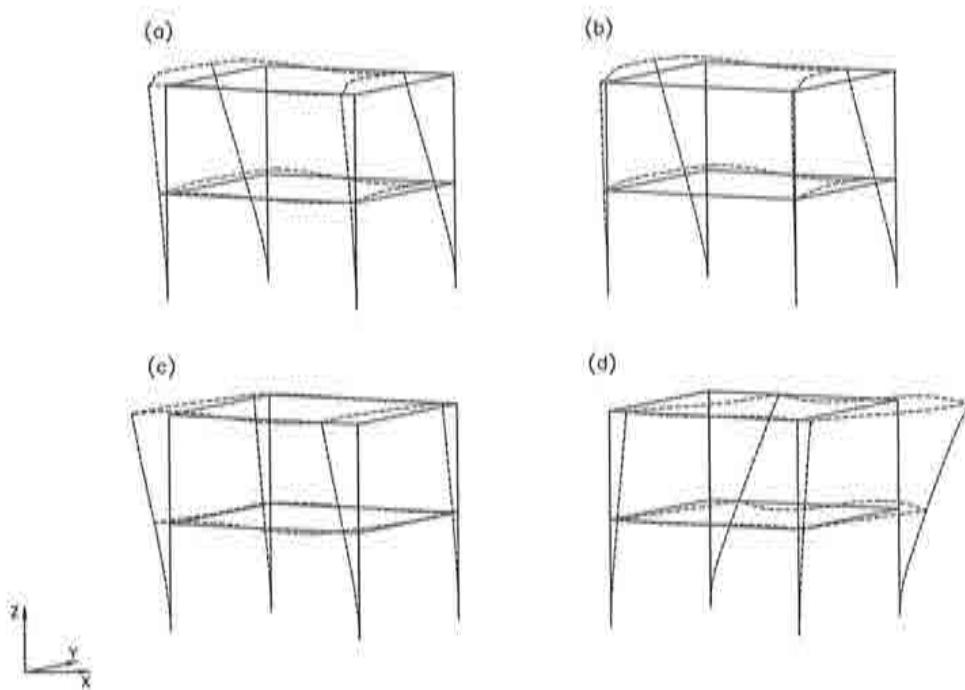


Figura 4.12 Deformadas del pórtico durante el terremoto

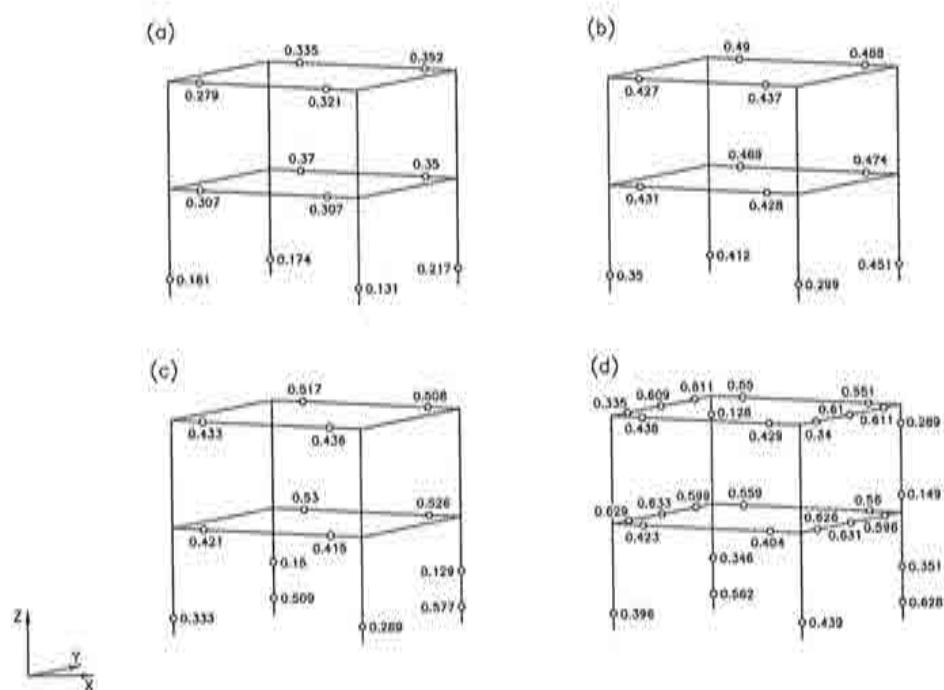


Figura 4.13 Evolución del nivel de degradación estructural.

La estructura se ha discretizado en 48 elementos de barra cuadráticos de tres nodos con dos puntos de Gauss cada uno. El modelo dinámico resultante tiene 92 nodos con 6 grados de libertad por nodo. Los elementos correspondientes a los pilares tienen 1m de largo mientras que los elementos que simulan las vigas tienen 2 metros. Todas las secciones están subdiscretizadas mediante una cuadrícula de 10×10 , lo que genera 400 esquinas por punto de integración numérica donde se evalúa el estado del material. La cuantía de armadura se controla a través de las dimensiones de cada celda de la cuadrícula. Los materiales tienen las mismas propiedades mecánicas que en el primer ejemplo.

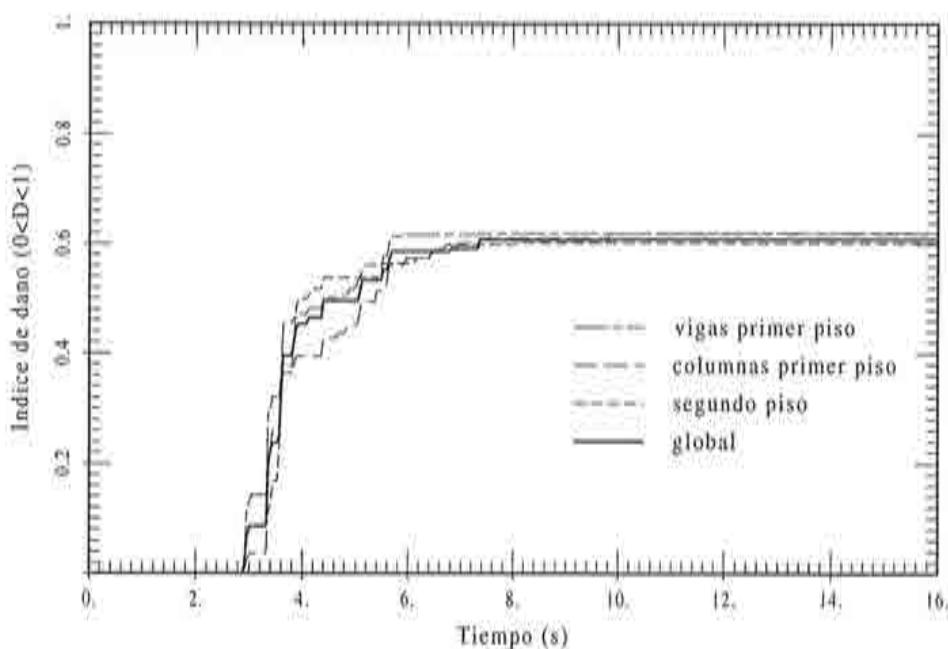


Figura 4.14 Evolución de los índices de daño global y de los pisos.

Las ecuaciones dinámicas de movimiento han sido resueltas utilizando el algoritmo de Newmark, con $\beta = 0.25$ y $\gamma = 0.5$.

En la Figura 4.12 pueden verse cuatro deformadas de la estructura obtenidas para diferentes instantes de tiempo a lo largo del terremoto. Se observa que el muro correspondiente al plano $y=6\text{m}$, más pesado, oscila con más amplitud que el otro, que es más ligero. La Figura 4.13 muestra la distribución del daño elemental de todos los elementos de la estructura. Primeramente se dañan las vigas debido a sus inertias mayores. Los pilares están muy degradados en su parte inferiores, como es de esperar. En la Figura 4.14 puede observarse que toda la estructura se daña casi a la vez y que los distintos índices de daño evolucionan simultáneamente. Al final del terremoto puede decirse que la estructura

está dañada en un 60% y que además no presenta una localización del deterioro, sino éste está generalizado en toda la estructura, lo que la vuelve difícilmente reparable. En el ejemplo del pórtico plano la eventual reparación consistiría en cambiar las partes degradadas de los pilares. De esta manera, los índices globales de daño total y elemental pueden cuantificar y orientar las decisiones acerca del estado de una estructura después de sufrir acciones importantes, mayores que las de diseño.

4.2 EDIFICIOS DE VIVIENDAS

4.2.1 Introducción

Los edificios de viviendas plantean a menudo problemas después de su construcción cuando, debido a fallos en el proceso de construcción, acciones excepcionales, como terremotos, o accidentes posteriores, como por ejemplo, movimientos del terreno, se deben tomar decisiones sobre su reparabilidad. Estas estructuras no tienen la transcendencia cultural de las construcciones históricas ni la importancia industrial de las centrales nucleares, que hacen objeto de los Capítulos 5 y 6, pero su impacto social es grande puesto que la vivienda es un bien básico y su pérdida o deterioro altera de manera importante la vida humana.



Figure 4.15 Fachada del edificio Marina Besós.

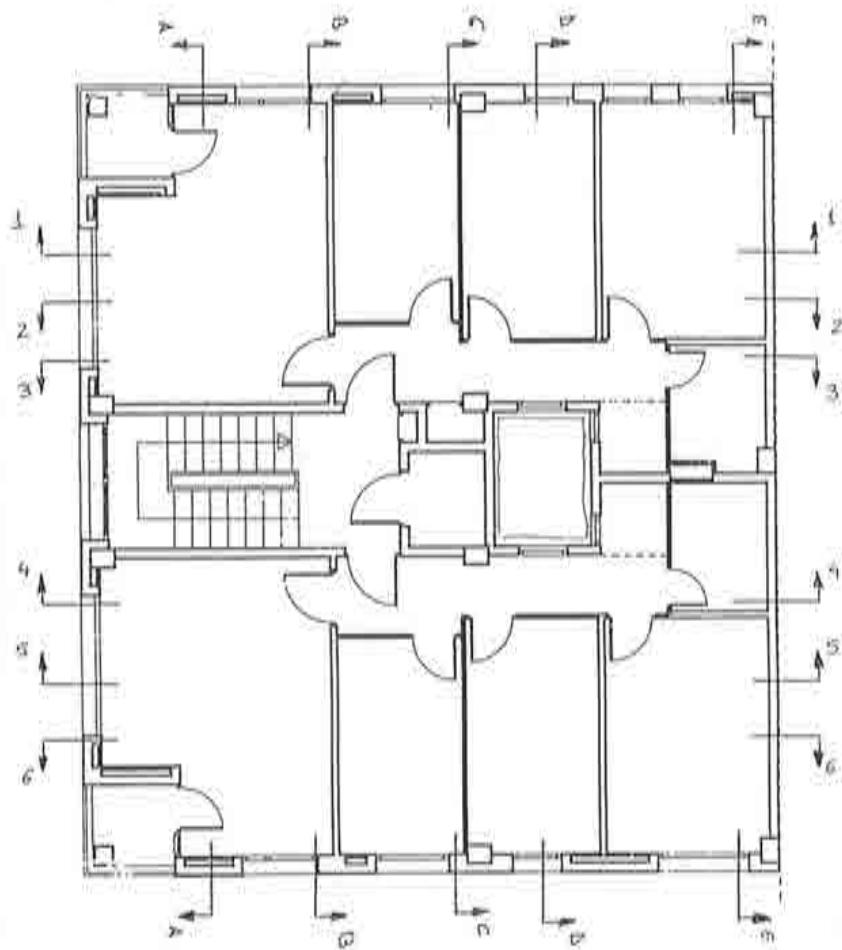


Figure 4.16 Plano de la tercera planta.

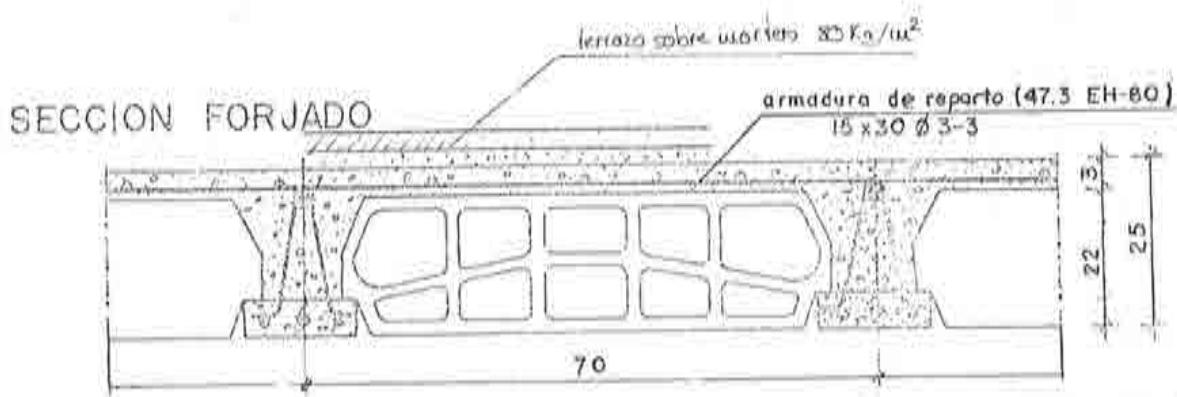


Figure 4.17 Sección del forjado. Dimensiones y disposición de las viguetas.

La metodología propuesta aquí se basa en reconstituir a través del modelo numérico el estado real de la estructura dañada observado a partir de su inspección y poder, de esta manera, explicar las causas del deterioro y cuantificarlo con la ayuda de los índices globales de daño. Dichos índices indican las zonas más débiles de la estructura y dan la medida de la pérdida de rigidez experimentada. Cuando se obtiene una configuración parecida al estado real del edificio estudiado, se pueden sacar conclusiones acerca de las rigideces reales empleando las técnicas de semejanza que se mencionarán en el capítulo 5.

Simulaciones numéricas efectuadas con el modelo de daño desarrollado en esta monografía pueden valorar reparaciones propuestas y ayudar a definir la intervención óptima, siendo de esta manera un instrumento eficaz tanto para la diagnosis como para la reabilitación de los edificios de viviendas.

4.2.2 Descripción de la estructura

La estructura analizada es un edificio del polígono Marina Besós de Sant Adrià del Besós, ciudad cercana a Barcelona, cuya fachada puede verse en la Figura 4.15. La estructura está formada por 5 plantas, con 2 viviendas simétricas por escalera. La Figura 4.16 muestra la distribución del espacio interior en la tercera planta.

La sección del forjado de la Figura 4.17 que define la estructura resistente de hormigón armado condiciona la malla de elementos finitos representada en la Figura 4.18, de manera que hay un esqueleto resistente (Figura 4.19) formado por viguetas de 15 cm de ancho alternando con elementos de relleno (entre-viguetas) de 55 cm de ancho. Los elementos estructurales armados son dichas viguetas junto con las vigas planas contenidas en el forjado de 28 cm de altura y entre 50 y 80 cm de ancho y los pilares cuyas secciones son de 50×50 cm.

4.2.3 Resultados

La problemática de este edificio es que a poco tiempo después de acabarse su construcción y siendo ya habitado han aparecido fisuras que han ido aumentando hasta que en la actualidad se han transformado en grietas importantes. Este hecho ha requerido un estudio de la estructura en su totalidad que se realizó en dos etapas: reconocimiento y observación del estado de la estructura y modelización matemática de la estructura para poder simular numéricamente su comportamiento. La carga aplicada en la simulación numérica ha consistido del peso propio de la estructura más una presión de 100kg/m² sobre el forjado y el techo. Dicha presión corresponde a un factor de carga de 1 y es ella quien ha sido aumentada hasta producirse el fallo estructural.

Las Figuras 4.20 muestran las grietas levantadas en distintas plantas durante la inspección. La planta más afectada es la tercera y ha sido ésta la que



Figure 4.18 Malla de una planta entera.

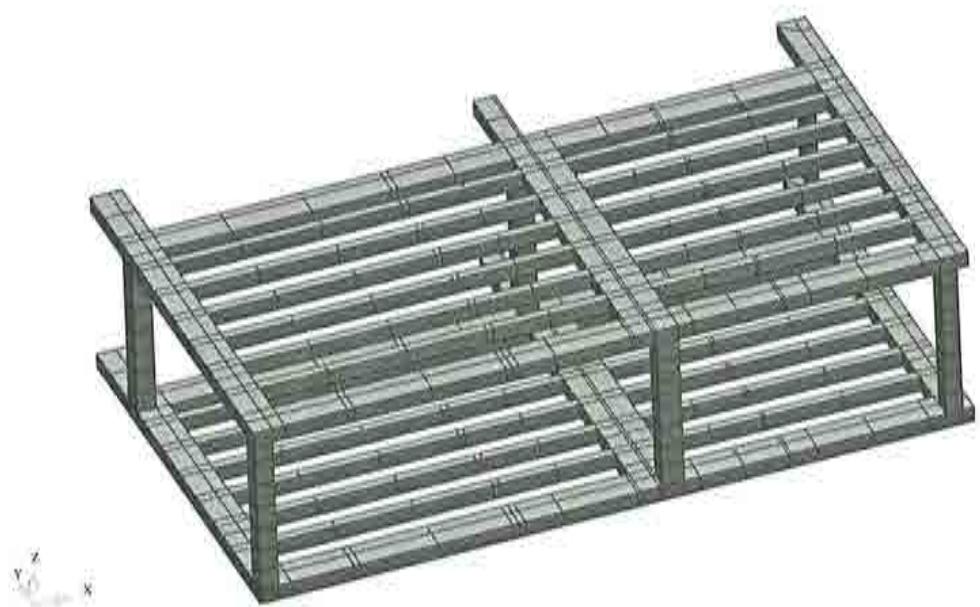


Figure 4.19 Elementos finitos con armadura de una semiestructura.

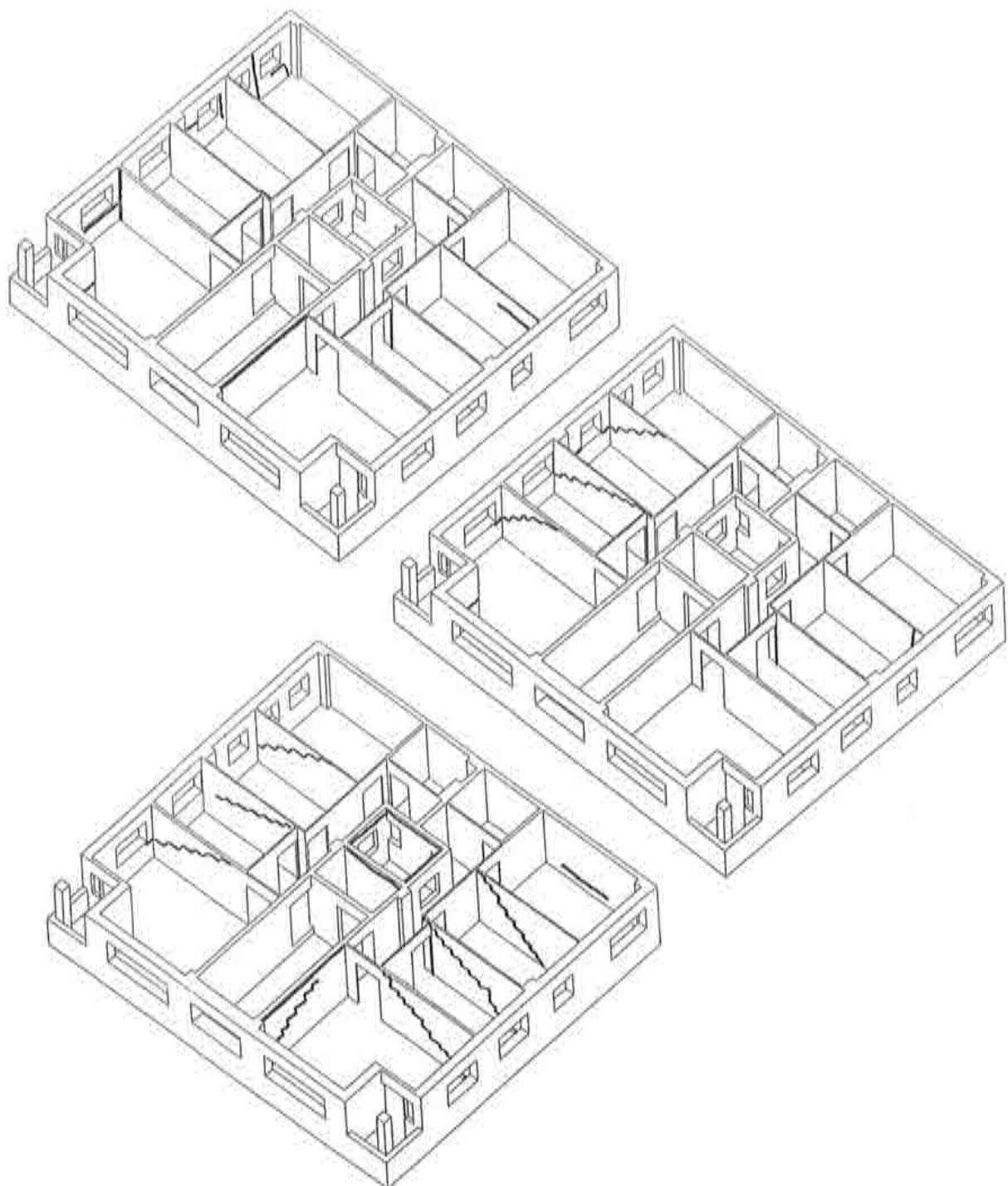


Figure 4.20 Grietas observadas en las plantas primera, segunda y tercera.

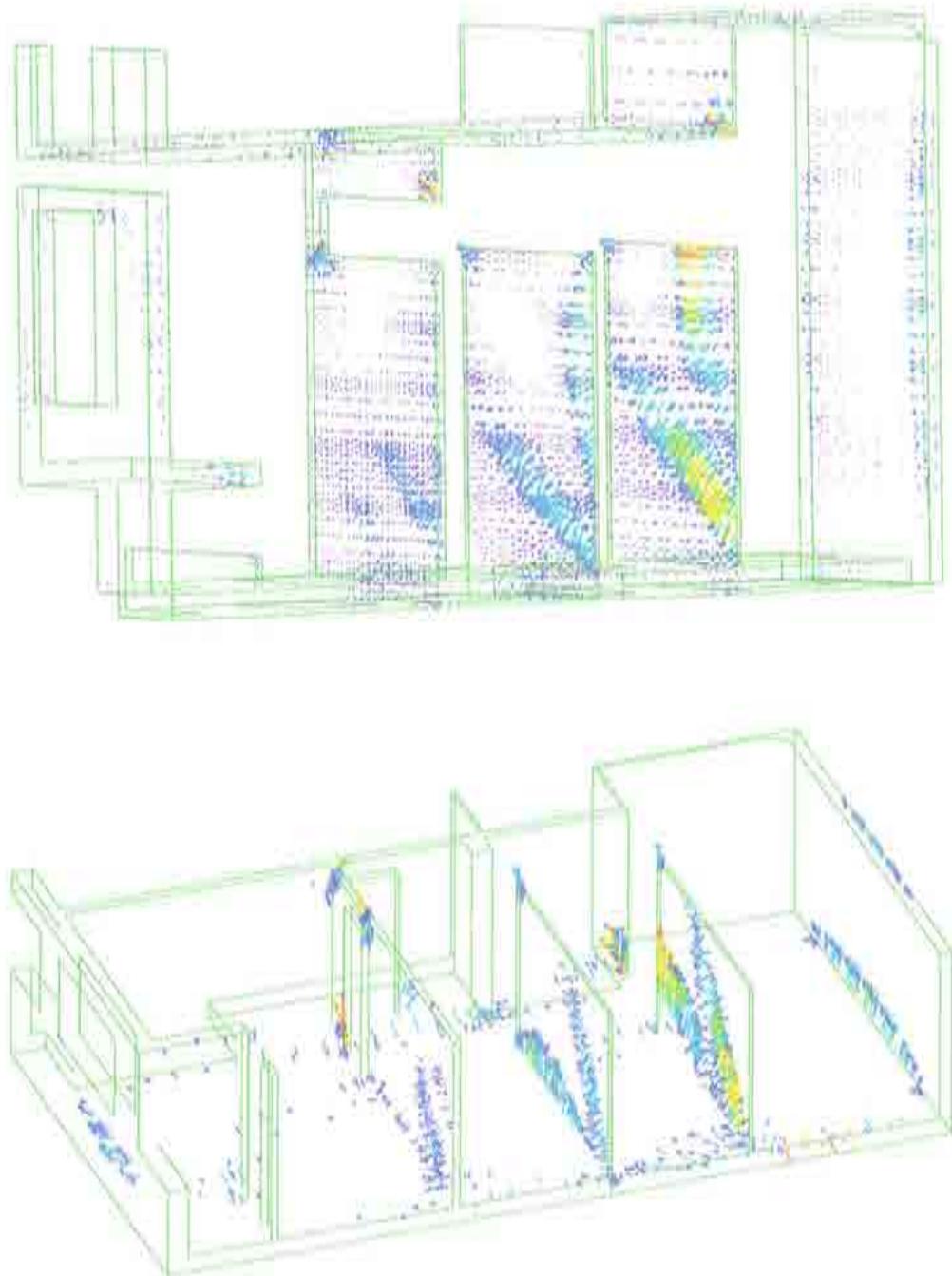


Figure 4.21 Lugar geométrico de los puntos más dañados en la simulación numérica.

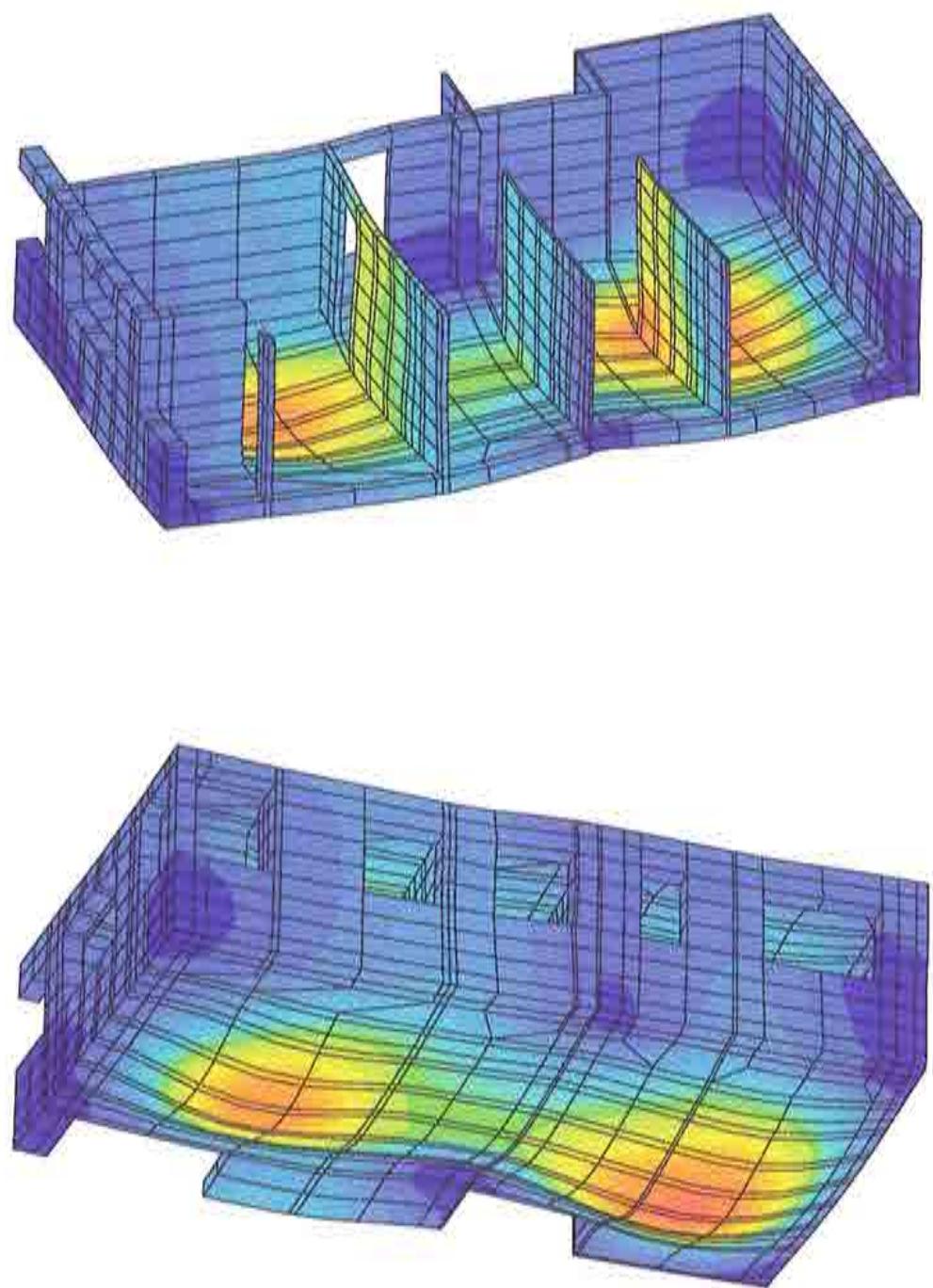


Figure 4.22 Vistas de la deformada estructural para la carga última.

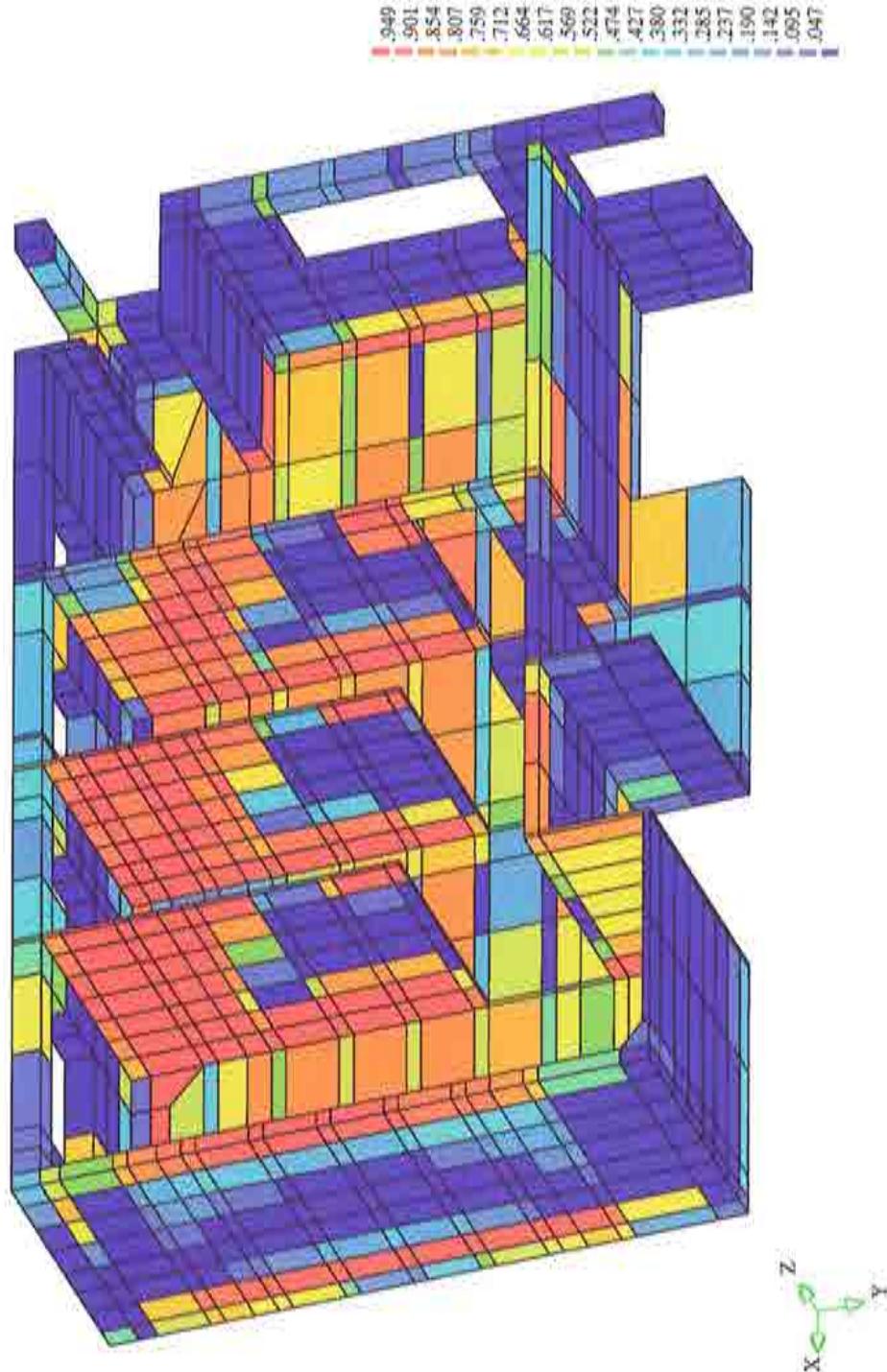


Figure 4.23 Contornos de daño para la carga última.

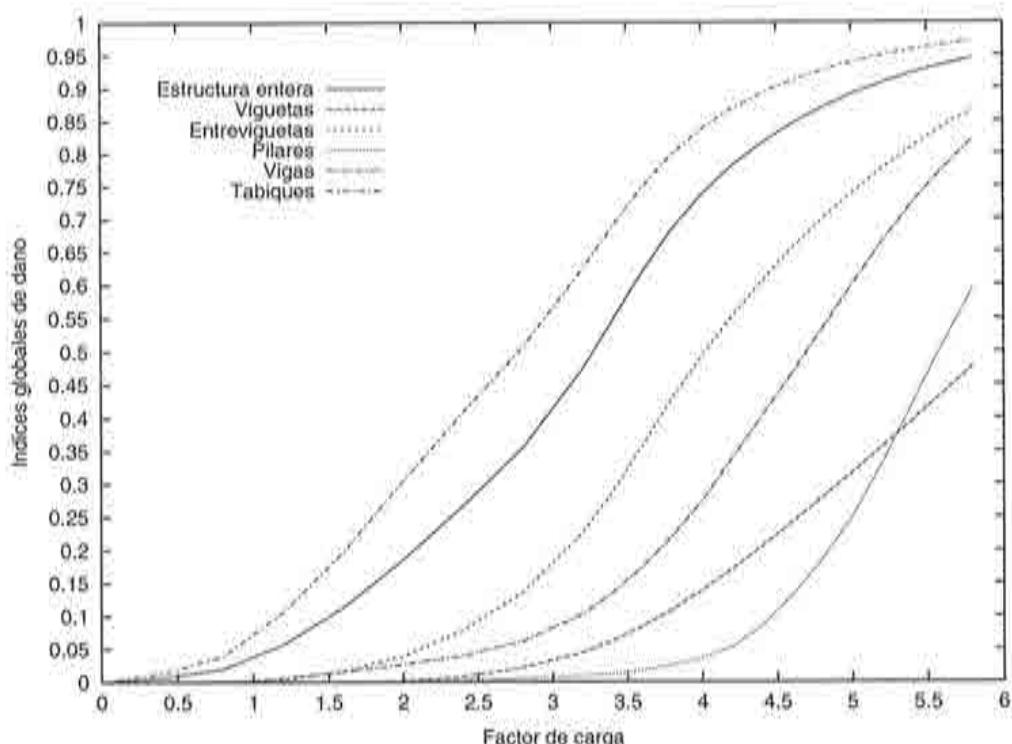


Figure 4.24 Evolución de varios índices globales de daño

finalmente se ha modelizado.

Para las grietas más importantes que se han producido en los tabiques se ha obtenido una excelente correlación entre los resultados del cálculo (Figura 4.21) y los levantamientos, en la misma localización que la observada, pero para un factor de carga de 4 veces la carga de servicio. Esto significa que el forjado de la planta es mucho más flexible de lo esperado, ya que los tabiques interiores no están sostenidos por ninguna columna. Dado que la carga última ha sido de 5.9 veces el peso propio puede concluirse que la estructura tiene de un índice de seguridad de 1.45 y que el estado real y las rigideces de los elementos estructurales son los correspondientes a la configuración calculada para 4 veces el peso propio.

Basándose en este resultado se ha iniciado una campaña de verificación del estado del forjado y sobre todo de las viguetas que son su principal elemento de rigidez. Los resultados del muestreo entre las viguetas han mostrado importantes desviaciones con respecto las prescripciones de proyecto sobre distancia entre armaduras (ver Figura 4.17), lo que disminuye la rigidez de las viguetas de manera importante.

La Figura 4.22 muestra la deformada obtenida en el ensayo numérico. Puede notarse que los mayores desplazamientos se producen en el centro del forjado,

con un gradiente muy importante a lo largo de los tabiques, lo que provoca una solitación importante de cortante en estos últimos con la rotura característica a 45° (ver también la Figura 4.21).

En la Figura 4.23 se ha representado la distribución del daño elemental y se presenta la misma información que en la Figura 4.21 en una forma alternativa. También es evidente la coincidencia de las zonas con daño máximo con las zonas donde hay grietas en la estructura real.

La evolución de los índices globales de daño de toda la planta y de sus componentes se muestra en Figura 4.24. El índice global de daño dominante es el de los tabiques, puesto que el índice global total sigue su trayectoria desde el principio de la historia de carga. Esto pone en evidencia la importancia de los tabiques para la resistencia del conjunto estructural. Aunque los elementos de hormigón armado (vigas, viguetas y pilares) tienen índices globales de daño mucho más bajos, el índice de toda la estructura se ve fuertemente influido por las zonas sin armar (tabiques y entreviguetas). Esto demuestra que estos últimos elementos estructurales tienen un papel fundamental en el comportamiento del conjunto y de su estado depende la funcionalidad de la vivienda estudiada.

CAPÍTULO 5

APLICACIÓN DEL ÍNDICE GLOBAL DE DAÑO DE AL ESTUDIO DE LA SEGURIDAD DE EDIFICIOS DE CONTENCIÓN EN CENTRALES NUCLEARES

5.1 OBJETIVOS Y ALCANCE DEL ESTUDIO

El estudio del comportamiento de una estructura de gran tamaño utilizando el modelo de daño y el índice global de daño definido en esta monografía permite demostrar la capacidad de la metodología propuesta en solucionar problemas reales. El estudio de la misma estructura utilizando el modelo de fisuración desarrollado en Cervera y Hinton (1986) y Cervera et al. (1987) puede encontrarse en Barbat et al. 1995a; Cervera et al. 1995; Cirauqui et al. 1994; Hanganu et al. 1994b, 1994c, 1994d, 1995, Postek et al. 1994a, 1994b; Roca y Hanganu 1994.

Como es sabido, el edificio de contención es la última de las barreras de seguridad del sistema de "defensa en profundidad" de una central nuclear frente a la liberación de productos de fisión. La seguridad de dicha central está verdaderamente puesta a prueba en el caso de accidentes, situación en la cual es esencial mantener la integridad de la contención a fin de evitar las fugas de material radioactivo o, al menos, de retrasar el instante del fallo de la estructura, si éste es inevitable, para que se puedan tomar ciertas medidas (Speiss y Eltawila 1992). Un posible escenario de accidente que puede dar lugar a daño al núcleo, sería el iniciado por una rotura en el sistema de refrigeración del reactor, con fallo de todos los sistemas de inyección de agua al núcleo y fallo adicional de todos los sistemas de extracción de energía y despresurización del edificio de contención. Como consecuencia de este accidente se produce una

presurización estática y/o dinámica del edificio de contención acompañada por efectos térmicos (De Boeck 1992), que es el caso que se considera en el presente capítulo.

En estudios anteriores (*IDCOR* 1983; Parks et al. 1992) se ha demostrado la capacidad de los edificios de contención de resistir presiones interiores de accidente 2.5 hasta 3 veces mayores que las de diseño. Estos coeficientes de seguridad permiten afirmar que los edificios de contención usuales pueden sobrevivir a la mayoría de las acciones producidas accidentes graves (Speiss y Eltawila 1992). Sin embargo, es imprescindible estudiar la posibilidad de que en algún tipo de contención puedan producirse mecanismos de fallo bajo la acción de presiones internas más bajas que las mencionadas. En este sentido, el objetivo principal de este capítulo es demostrar la aplicabilidad del modelo de daño y del índice global de daño desarrollado en la monografía al análisis no lineal del comportamiento del edificio de contención de una central nuclear del tipo PWR-W Tres Lazos bajo la acción de una presión interna creciente producida por un accidente a fin de determinar su presión de fallo (Hanganu et al. 1995).

El primer método utilizado para la evaluación del fallo estructural se basa en el modelo de lámina de revolución descrito en el Apartado 2.4 del Capítulo 2. Este planteamiento se ha empleado básicamente para estudiar si la naturaleza del problema es estática o dinámica. Dado que el esfuerzo computacional es reducido en un cálculo de revolución, se ha podido analizar un gran número de formas y magnitudes de impulsos de presión interior y se ha podido demostrar que, para los escenarios de accidente previsibles en una central nuclear, las cargas se pueden considerar como estáticas.

El segundo método que se ha elegido para calcular la presión de fallo se basa en el modelo de sólido tridimensional de elementos finitos (descrito en el Apartado 2.5 del Capítulo 2) que permite considerar en el análisis las características que alteran la simetría de revolución del edificio de contención. Éstas son: los tres contrafuertes, las penetraciones, la falta de simetría de revolución de las fuerzas de postesado y la armadura adicional existente en las zonas donde se encuentran penetraciones. El algoritmo de cálculo describe al proceso rotura de la armadura eliminando completamente la rigidez de la barra o del grupo de barras que hayan alcanzado un cierto límites de deformación. Además, el hormigón sufre una pérdida gradual de rigidez hasta llegar a ser total en ciertas zonas de la estructura. Esto genera fuerzas adicionales que se redistribuyen a las zonas adyacentes, que reciben de esta manera una carga adicional. El proceso de fallo continua desarrollándose en cadena, hasta el momento en que dichas fuerzas no pueden equilibrarse. Esto se traduce, a nivel del algoritmo de cálculo, en un aumento de las fuerzas residuales, lo que provoca una divergencia

de naturaleza no numérica de la solución. Este es el instante en que se considera que la estructura ha fallado.

En primer lugar se hace la descripción de la estructura, se detallan la metodología de análisis y el modelo estructural. En segundo lugar se describe la calibración del modelo y se analiza el efecto que tiene sobre la presión de fallo la inclusión en el modelo de cálculo de la losa de cimentación. En tercer lugar se estudia el efecto de la carga inducidas por la temperatura en la presión de fallo y al final se incluyen resultados de un estudio probabilista de simulación de la presión de fallo.

5.2 DESCRIPCIÓN DE LA ESTRUCTURA

El edificio de contención alberga el núcleo del reactor y su sistema de refrigeración y constituye la última barrera para impedir el escape de productos de fisión al exterior. Por consiguiente, se diseña para mantener dentro de límites aceptables la tasa de fugas en las condiciones de presión y temperatura provocadas por el accidente base de diseño. El edificio de contención está formado por una losa de cimentación sobre la que se sustenta una pared cilíndrica vertical, cerrada en su parte superior mediante una cúpula hemisférica. La estructura es de hormigón armado y tiene también un sistema de postensado de la pared cilíndrica y de la cúpula realizado mediante tendones no adherentes. Toda la superficie interior del edificio está recubierta por una chapa de revestimiento ("liner") que tiene funciones de estanqueidad. En la Figura 5.1 pueden verse una sección vertical y otra horizontal del edificio de contención, con sus principales características geométricas. Las principales dimensiones de la estructura son: diámetro interior: 40 m, altura interior total: 63.4 m, altura interior a línea tangencial con la cúpula: 43.4 m, espesor losa cimentación: 3 m, espesor de la pared cilíndrica: 1.15 m, espesor de la cúpula en línea tangencial: 1.15 m, espesor de la cúpula en clave: 0.95 m, espesor de la chapa de revestimiento: 6.5 mm.

La cimentación del edificio de contención es una losa de hormigón armado de forma básicamente circular, de 22.4 m de radio y 3 m de espesor. En su parte central se encuentra la cavidad del reactor. En la parte inferior de la losa se encuentra una galería perimetral, utilizada para el tesado de los tendones verticales de postesado.

La pared cilíndrica tiene 20 m de radio interior, 43.20 m de altura y 1.15 m de espesor. Dicha pared es más gruesa sólo en la zona en torno a la compuerta de equipos para permitir el paso de los tendones de postensado desviados por dicha penetración. A lo largo de la pared se encuentran tres contrafuertes, situados cada 120°, que sirven para el anclaje de los tendones horizontales del

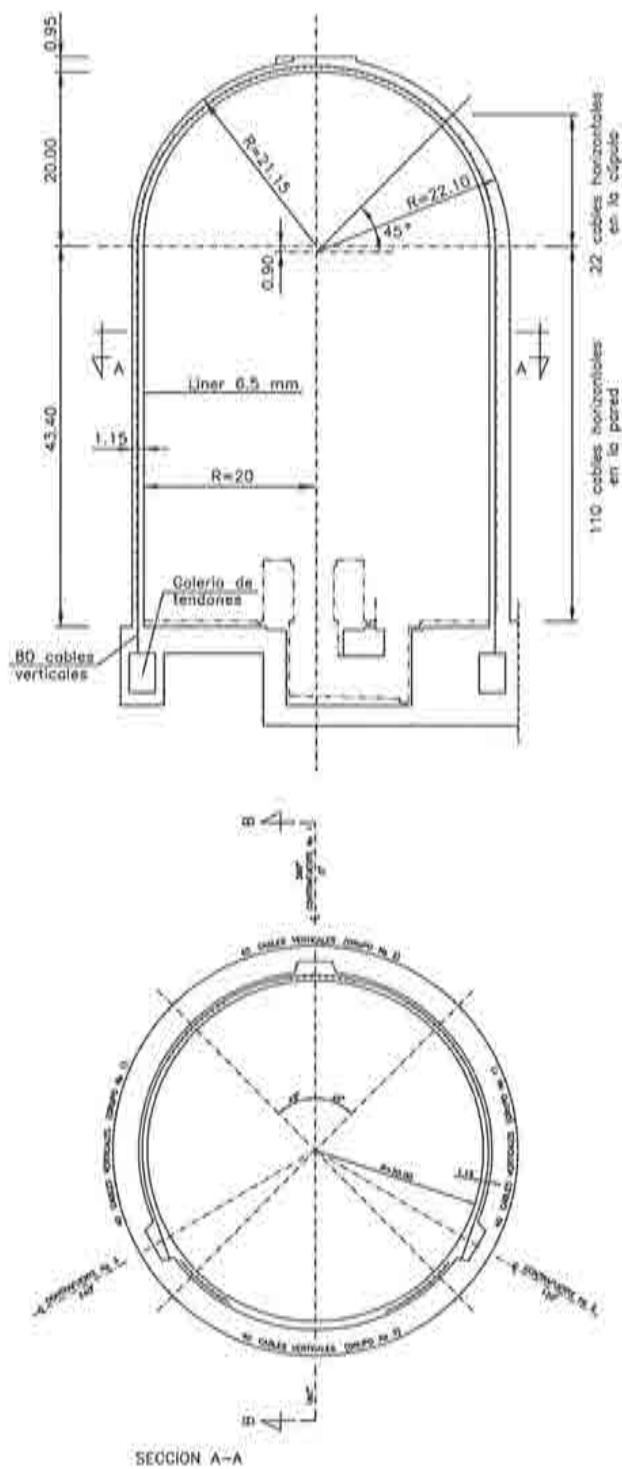


Figura 5.1 Edificio de contención – secciones vertical y horizontal.

sistema de postesado. Las penetraciones en la pared cilíndrica de mayor relevancia en el comportamiento estructural del edificio de contención son las siguientes: compuerta de personal, compuerta de equipos, compuerta de emergencia, la penetración de vapor principal, la penetración de purga del edificio y la penetración de transferencia de combustible.

La cúpula esférica tiene un radio interior de 20 m y su espesor varía desde 1.15 m en su arranque hasta 0.95 m en su coronación, donde se encuentra una plataforma de hormigón armado que no tiene misión estructural. Los tres contrafuertes de tesado se prolongan en toda la cúpula, hasta encontrarse con la plataforma superior; sin embargo, se utilizan para anclar tendones sólo en la zona de la cúpula que se halla entre la línea de tangencia con la pared y un ángulo de 45° con la horizontal. A partir de dicho ángulo, los contrafuertes tienen únicamente misión estética.

Además de la armadura pasiva, existe un sistema de postesado, realizado mediante tendones de tipo no adherente, que genera acciones que contrarrestan las tracciones producidas en las paredes y cúpula por la presión interna. El postensado es doble – horizontal y vertical – tal como puede verse en la Figura 5.1. La pared cilíndrica y los primeros 45° de la cúpula están postensados por medio de 132 tendones horizontales que abarcan 240° , anclándose en los tres contrafuertes. Los 80 tendones verticales tienen forma de *U* invertida, anclándose sus extremos en la galería de tendones. En la cúpula estos tendones forman dos familias que se cruzan ortogonalmente.

El paramento interior de la contención va revestido por una chapa de acero con un espesor de 6.5 mm que, junto con las penetraciones, esclusas de personal, emergencia y equipos, constituyen una barrera de estanqueidad. Su objeto es mantener las fugas del edificio a menos del 0.1 % del volumen libre interior al día, en las condiciones de presión posteriores a un accidente base de diseño. En las zonas en las que el revestimiento debe soportar cargas locales, es sustituido por otro, de mayor espesor.

5.3 ANÁLISIS DE REVOLUCIÓN

5.3.1 Análisis estático

En esta etapa preliminar se ha discretizado la estructura mediante una malla de 17 elementos de lámina de revolución subdivididos en capas de hormigón y acero (Postek et al. 1994a, 1994b). Las capas que describen las armaduras están constituidas por un material ortotropo que tiene rigidez sólo en la dirección de los refuerzos. El efecto del postesado se ha incluido aplicando sobre la estructura presiones equivalentes promediadas puesto que, tal como se verá más adelante,

el efecto del postesado es muy desigual y no presenta simetría de revolución (Hanganu et al. 1993b).

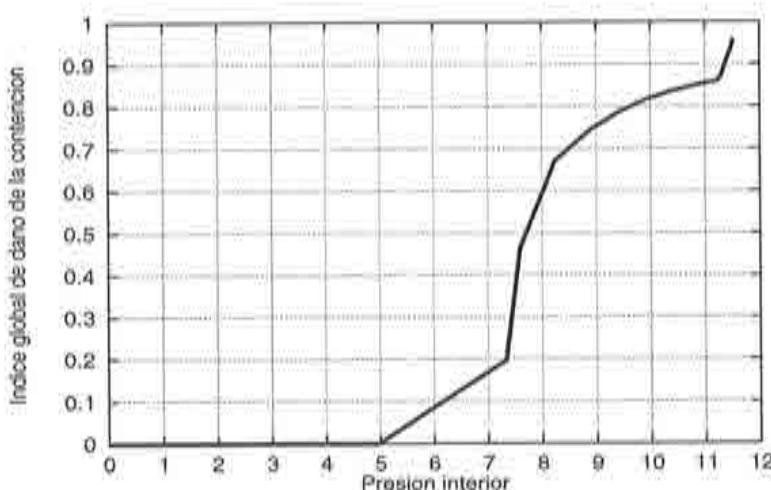


Figura 5.2 Variación del índice de daño global en función de la presión interna.

El objetivo principal del análisis estático de la estructura bajo la hipótesis de la simetría axial es el de obtener una primera aproximación de la presión de fallo. Se considera que el fallo del edificio de contención se produce cuando en las capas de acero consideradas en la modelización de la armadura pasiva, de los cables de pretensado y de la chapa de revestimiento se alcanza la deformación de 0.8%. Este es un límite a partir del cual las deformaciones se incrementan rápidamente, bajo una presión interna prácticamente constante, poniéndose en peligro la integridad de El análisis proporciona también información acerca de la evolución del daño provocado al incrementar la presión interna en la estructura hasta el colapso. Esto permite describir el mecanismo de fallo simplificado del mencionado edificio.

El comportamiento del hormigón fisurado se describe mediante el modelo de daño descrito en el Capítulo 3, mientras que el acero se simula como un material elasto-plástico con endurecimiento, cuyas características vienen descritas por la función de fluencia de von Mises.

En la Figura 5.2 puede verse la evolución del índice global de daño. Se observa que los primeros efectos no lineales se manifiestan a 5 kg/cm^2 y que alrededor de 11 kg/cm^2 la presión interna se bloquea y el daño crece paulatinamente, dado que la estructura se acerca al fallo. Unas deformadas representativas de la deformación sufrida por la central durante el proceso de presurización hasta el colapso pueden verse en la Figura 5.3.

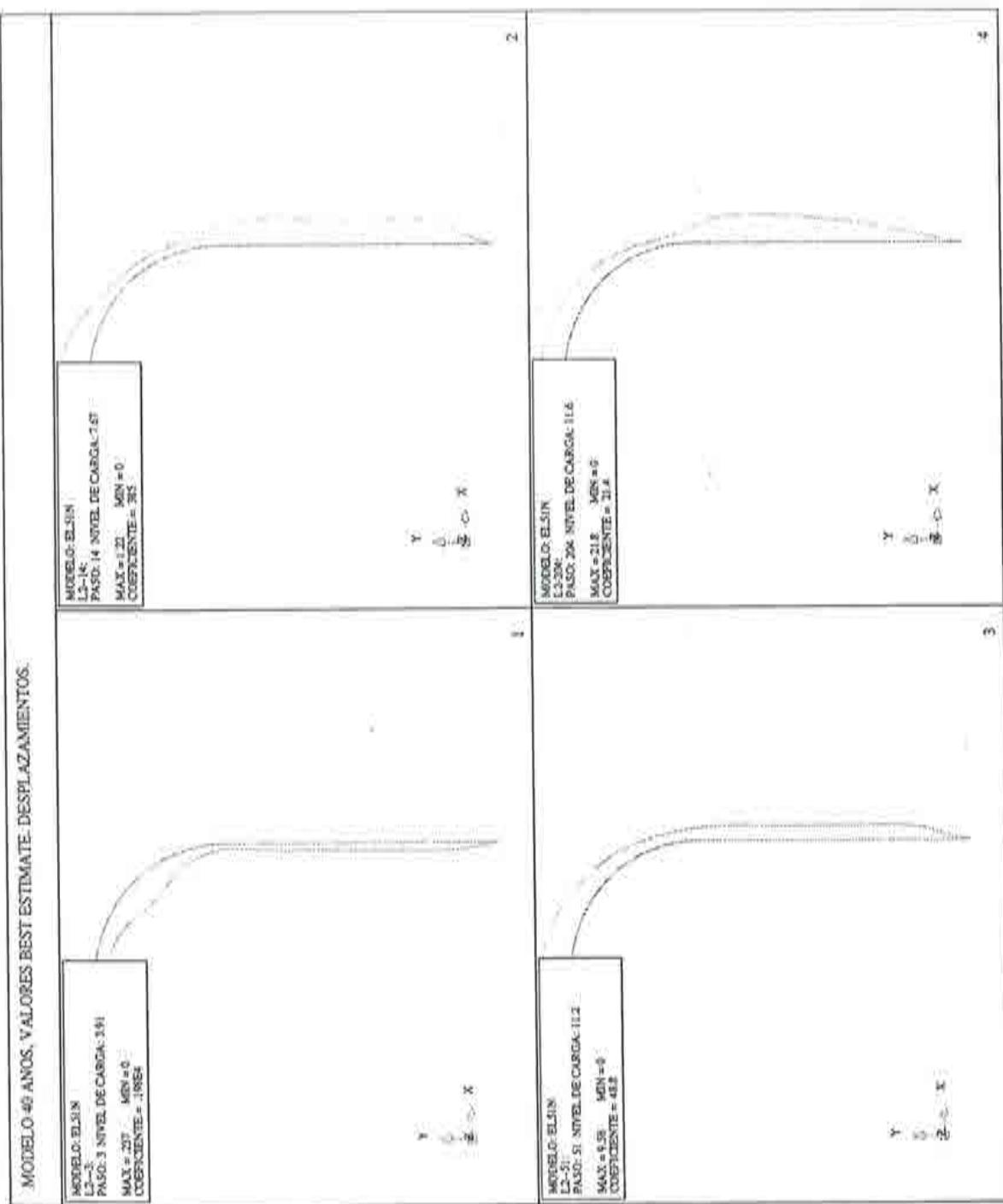
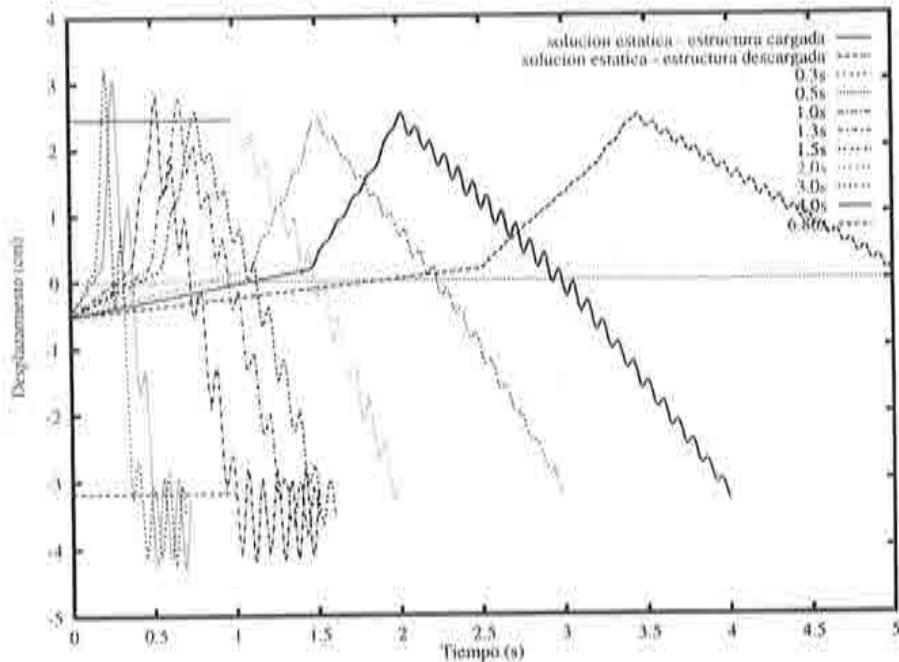
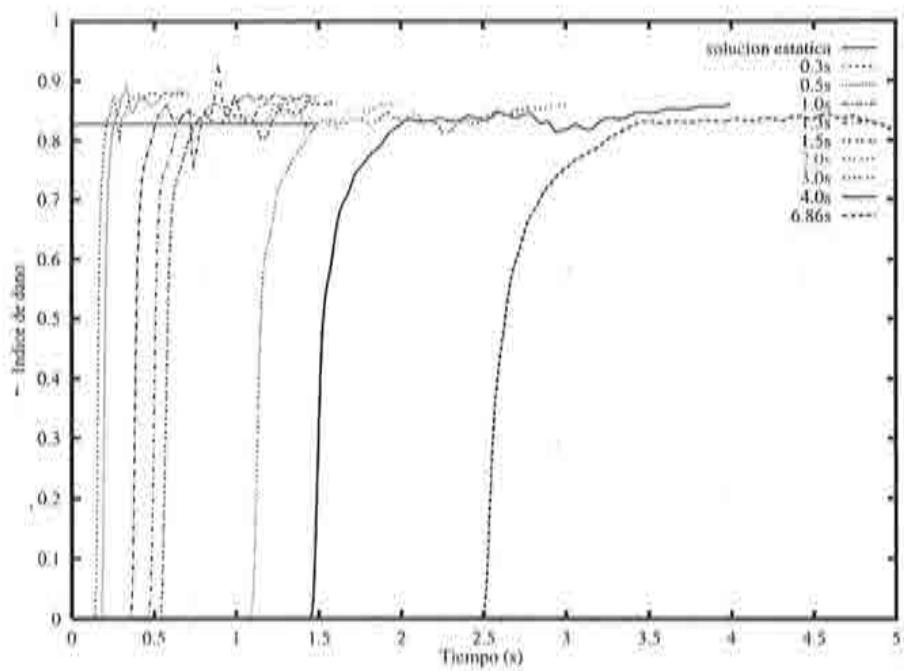


Figura 5.3 Formas deformadas – análisis estático.



(a) Respuesta en desplazamientos



(b) Índices globales de daño

Figura 5.4 Impulsos triangulares dinámicos de presión.

5.3.2 Análisis dinámico

Los objetivos del estudio de la estructura sometida a presión interna dinámica han sido los siguientes: (a) la evaluación de la respuesta estructural cuando se considera una determinada evolución en el tiempo de la presión interior y las características de dicha presión para las cuales la respuesta dinámica empieza a alejarse de la estática; (b) el análisis de la respuesta de la estructura bajo una serie de cargas consistiendo en impulsos triangulares y rampa. Otro objetivo es determinar para qué tipos de evolución temporal de la presión interior del edificio de contención, la respuesta del mismo es asimilable a la de una carga estática (Hangau et al. 1994b).

Después de analizar la evolución de algunas variables características frente a tres tipos de funciones temporales describiendo la presión interna (rampa, impulso triangular y carga de presión interior proveniente de un escenario de accidente) se ha podido concluir que para duraciones del impulso de presión mayores a 1.5s la respuesta es estática. Como la presión de accidente se aplica en 3.43s, el análisis estático está plenamente justificado. En la Figura 5.4(a) se presentan las respuestas en desplazamientos para impulsos triangulares de presión interna de varias duraciones. Las evoluciones de los índices de daño global correspondientes se muestran en la Figura 5.4(b).

5.4 METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL

El análisis no lineal de la estructura sometida a la acción simultánea de presión interna creciente y aumento de la temperatura interior ha sido realizado mediante utilización de un modelo de elementos finitos tridimensional. Se obtuvo de esta forma la respuesta estructural completa para toda la secuencia de presión interna hasta llegar a la situación de fallo correspondiente al caso de accidente severo (Hangau et al. 1994b). Se define la presión de fallo (y, por tanto, el fallo estructural) como aquella para la que se alcanza el agotamiento de los materiales, es decir, un determinado límite de deformación en la armadura pasiva, en los cables de postensado o en la chapa de revestimiento interior de la estructura.

La razón para utilizar un modelo tridimensional como alternativa a uno de revolución radica principalmente en la existencia de detalles estructurales que rompen la aparente simetría de revolución; éstos son (Cervera et al. 1995):

- los tres contrafuertes de anclaje del sistema de cables de postensado;
- la falta de simetría de revolución de las fuerzas generadas sobre la estructura por el sistema de postensado;

- las penetraciones existentes, algunas de ellas de gran tamaño, y su irregular disposición;
- la existencia, en torno a las zonas de penetraciones, de cantidades significativas de armadura adicional.

Estos detalles constructivos tienen una influencia decisiva en los modos de deformación de la estructura, así como en los cambios de forma y en los movimientos de las penetraciones y sólo pueden ser detectados y estudiados por medio de un modelo tridimensional.

La metodología seguida para la evaluación de la presión de fallo de la estructura de contención descrita en la sección anterior se puede esquematizar en los siguientes puntos:

- Definir las características básicas del modelo de cálculo, necesarias para simular el comportamiento estructural en las fases previas y hasta alcanzar la condición de fallo.
- Construir a partir de éstas características un modelo estructural discreto que represente adecuadamente la estructura real.
- Calibrar el modelo estructural mediante la simulación numérica de las pruebas de integridad de la contención.
- Simular un escenario de accidente en el que la presión interior aumenta progresivamente hasta alcanzar la condición de fallo.
- Estudiar la sensibilidad de los resultados frente a dos circunstancias relevantes: las condiciones de cimentación y el efecto de la temperatura en la definición del escenario de accidente.
- Estudiar la sensibilidad de los resultados frente a las incertidumbres en las propiedades de los materiales.

Los condicionantes y detalles correspondientes a cada uno de los puntos anteriores se detallan en los apartados siguientes.

Las conclusiones alcanzadas, especialmente respecto a la sensibilidad de los resultados frente a ciertos parámetros, pueden ser muy útiles a la hora de plantear futuros análisis para estructuras similares.

5.4.1 Características del modelo de cálculo

Un análisis realizado mediante el programa de cálculo desarrollado en la monografía proporciona no sólo la presión de fallo (carga última) de la contención, sino también el estado de tensiones y deformaciones en todos los elementos componentes de la estructura y una descripción del estado de degradación del hormigón y de fluencia del acero de las armaduras activas y pasivas, así como sobre su agotamiento. Se llega a disponer, de esta forma, de una completa in-

formación acerca de la evolución de la pérdida de capacidad resistente que se produce en la estructura a lo largo de todo el proceso de carga, hasta llegar al colapso; todo el proceso está sintetizado en la descripción del mecanismo de fallo de la contención a través del índice global de daño.

Se describen brevemente a continuación el tratamiento del sistema de postesado y el modelo constitutivo para el acero de la armadura. El Anexo 5-1 está dedicado en exclusividad a aspectos relacionados con el sistema de postesado puesto que de su correcta modelización depende en gran medida el valor de la presión de fallo, su efecto siendo contrario al de la presión interna. A pesar de que dichos aspectos hayan sido incluidos en el anexo, tratamiento del postesado del edificio de contención estudiado constituye en una aportación técnica original de esta monografía.

Idealización de la armadura activa.

Las armaduras activas presentes en una estructura del tipo aquí estudiado están normalmente constituidas por tendones de tipo no adherente, engrasados y enfilados en vainas de acero embebidas en el hormigón. Del conjunto de los efectos que estas armaduras introducen a lo largo del proceso de carga cabe distinguir dos contribuciones: el efecto activo y el efecto pasivo (Roca y Marí 1993a, 1993b).

El *efecto activo* del sistema de fuerzas (o cargas equivalentes) que el pretensado, al ser puestos en tensión y anclados los tendones, introduce sobre la estructura es, con gran diferencia, el más importante en la determinación de la carga última de ésta, pues equivale, aproximadamente, a una presión externa que compensa directamente la presión interna susceptible de aparecer durante una eventual presurización accidental del edificio (Mang y Meschke 1991). Estas fuerzas se deben a la curvatura de los cables, al rozamiento de éstos con las vainas y al anclaje de los extremos de los tendones en los paramentos de la estructura. Una vez aplicado, el sistema de fuerzas equivalentes de pretensado puede considerarse constante y, salvo algunos efectos secundarios derivados de las pérdidas instantáneas y diferidas, no depende del grado de adherencia entre acero y vaina (Roca y Hanganu 1994). El Anexo 5-1 contiene una descripción de la problemática asociada a los tendones pretensados y al el cálculo detallado de la presión equivalente al efecto activo de los tendones pretensados.

Por otra parte, el *efecto pasivo*, o contribución resistente de las armaduras de pretensado, viene dado por el incremento de fuerza que experimentan los tendones al deformarse ante acciones posteriores a su instalación. Particularmente, una presión interior producirá un alargamiento neto de todas las familias de tendones y, por tanto, un aumento de la fuerza de pretensado, con el consiguiente

incremento de la presión que los cables ejercen sobre la estructura. El efecto pasivo es distinto para tendones adherentes y no adherentes. Los primeros admiten claramente un tratamiento análogo al de las armaduras pasivas. En los segundos, el incremento de tensión no es función del incremento de deformación local, sino del alargamiento neto del tendón, fruto de la deformación global de la estructura. Sin embargo, el límite de la contribución pasiva en ambos casos se alcanza cuando el acero de los tendones plastifica y alcanza su deformación de agotamiento.

El tratamiento final del efecto pasivo de las distintas familias de tendones no adherentes existentes en la estructura se basa en un estudio determinista sobre la sensibilidad de la presión última del edificio con respecto a la variación de la cuantía de acero en cada una de las familias. Así, los tendones circunferenciales se han tratado como armadura adherente, pues la geometría y el modo de deformación de la estructura lo justifica. *A posteriori* se observa que dichos tendones están plastificados en toda su longitud cuando se alcanza la presión de fallo. Por otro lado, se comprueba que los tendones meridionales no tienen un efecto pasivo perceptible sobre la estructura, ya que su trazado es recto en las paredes verticales, por lo cual no han sido incluidos como armadura pasiva.

Modelo constitutivo del acero

En este análisis se ha supuesto que tanto el acero de las barras de armadura pasiva como el de los tendones de los cables de postensado tiene propiedades uniaxiales en la dirección de las barras o de los tendones. La chapa de revestimiento interior de la estructura se supone que tiene propiedades biaxiales isótropas.

Como ecuación constitutiva para el acero se adopta en todos los casos un modelo elasto-plástico con endurecimiento lineal después de la fluencia. Se supone que la descarga se produce de forma elástica. Se ha considerado también el agotamiento del acero por deformación, cuando, después de plastificar, se alcanza la deformación de rotura del material de 0.8%.

5.4.2 Modelo de elementos finitos

Los modelos de elementos finitos tridimensionales del edificio de contención utilizados en este estudio han sido dos: (a) modelo tridimensional con losa de cimentación y (b) modelo tridimensional sin losa. El modelo (a) se muestra en la Figura 5.5, mientras que el modelo (b) es idéntico, pero sin la losa de cimentación y con la pared cilíndrica empotrada en la base. En dicha figura

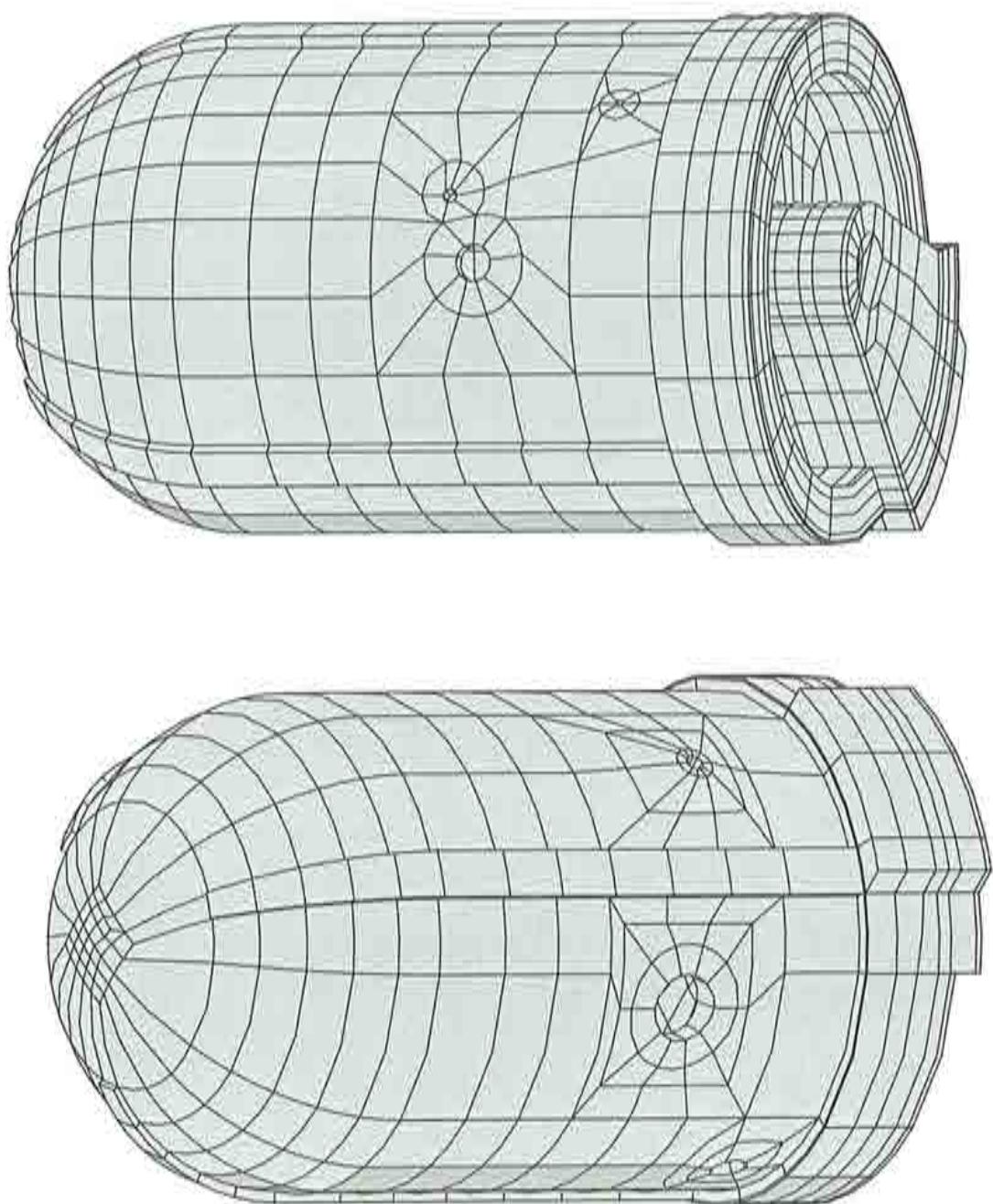


Figura 5.5 Modelo discreto del edificio de contención con losa de cimentación.

se observan claramente las características de la estructura, así como los contrafuertes y las penetraciones. En la primera vista se observan la compuerta de equipos, la de emergencia y la de vapor principal. En la segunda se observa el macizo de la cavidad del reactor y las compuertas de personal, purga de contención y tubo de transferencia de combustible. Ha sido necesario definir un número de 120 "materiales" distintos para describir adecuadamente el complejo sistema de armado de la estructura, teniendo en cuenta que una variación en la cuantía de armadura requiere la definición de un nuevo "material".

El modelo (a) tiene 1127 elementos y 7200 nodos (21600 grados de libertad), mientras que el modelo (b) tiene 417 elementos y 3091 nodos (9273 grados de libertad). Resulta, pues, de interés determinar la influencia de inclusión de la losa en el modelo estructural, debido al notable esfuerzo de cálculo asociado a su consideración (Barbat et al., 1995a).

Las acciones consideradas en el análisis del edificio han sido las siguientes: peso propio de la estructura, presiones equivalentes generadas por el sistema de postensado y presión interior.

La distribución de presiones equivalentes al sistema de postesado sobre la pared cilíndrica y la cúpula semiesférica se ha calculado de forma analítica y punto a punto. Para ello se ha tenido en cuenta la influencia de los siguientes parámetros: coeficientes de rozamiento y de ondulación de los tendones, penetración de cuña de los anclajes, pérdidas elásticas instantáneas y diferidas de la fuerza de tesado y presencia de tramos rectos en el trazado. Se ha considerado también la localización exacta de los tendones dentro de las paredes del edificio, así como el hecho de que la presión generada es siempre normal al trazado del cable y contenida en su plano. Se han eliminado así muchas de las habituales aproximaciones en el tratamiento del postesado. Debe tenerse en cuenta que cualquier error en la evaluación de las presiones de postesado se traduce directamente en un error equivalente en la evaluación de la presión de fallo de la estructura.

Así pues, la estructura sometida a su peso propio y al sistema de fuerzas de postesado conforma el estado inicial del modelo, antes de ser sometido a las cargas propias del escenario de accidente. A partir de éste se procede a la evaluación de la presión de fallo incrementando gradualmente la presión interior más allá del accidente base de diseño y hasta alcanzar la carga última. En algunos casos se ha tenido también en cuenta el efecto del incremento de la temperatura interior según una secuencia predefinida por el escenario de accidente.

5.5 CALIBRACIÓN DEL MODELO

El objeto de la calibración es el de comparar la respuesta del modelo estructural discreto con datos disponibles de la prueba de integridad estructural del edificio de contención (Hanganu et al. 1994d). Dicha comparación ha permitido comprobar la adecuación del modelo discreto al comportamiento "real" de la estructura, así como calibrar las propiedades elásticas de los materiales utilizadas en el modelo de cálculo.

Durante esta prueba se aumenta la presión interior hasta 1.15 veces la presión de diseño, es decir hasta 4.37 kg/cm^2 , de acuerdo con una ley de evolución predeterminada, tal como puede verse en la Figura 5.6. También se han incluido los efectos térmicos según los datos tomados durante la prueba *in situ* (Figura 5.7). Para la simulación de esta prueba se ha utilizado el modelo tridimensional sin losa y con las fuerzas de pretensado en sus valores correspondientes a 0 años, es decir, en el momento de acabarse la construcción.

En las Figuras 5.8 y 5.9 se muestra la comparación entre los resultados experimentales y la simulación numérica para un sensor situado en la sección transversal $0-180^\circ$ uno situado en la sección transversal $90-270^\circ$, respectivamente. Las curvas representan la evolución de la relación desplazamiento-presión para cada uno de los sensores. Se observa una buena concordancia entre las pendientes de las curvas simuladas y las medidas experimentalmente, lo que indica que el modelo de elementos finitos reproduce adecuadamente la rigidez (y su distribución) de la estructura real. Además, puede comprobarse como el modelo reproduce el bucle provocado por la carga y descarga que ocurren durante la prueba.

La realización de esta simulación de prueba de carga ha servido para detectar la necesidad de incluir en el modelo estructural la armadura adicional existente en zonas con penetraciones no consideradas en la discretización. Su adición es necesaria para obtener una respuesta realista, dado que el debilitamiento provocado por dichas penetraciones está compensado por la existencia de armadura adicional.

5.7 EFECTO DE LA LOSA DE CIMENTACIÓN SOBRE LA PRESIÓN DE FALLO

Para poder analizar el efecto de la presencia de la losa de cimentación en el modelo estructural se ha considerado primeramente, de una manera aproximada, la interacción entre la losa y el macizo de hormigón en masa de relleno sobre el cual se apoya (Hanganu et al. 1994c). Para ello, el mencionado ma-

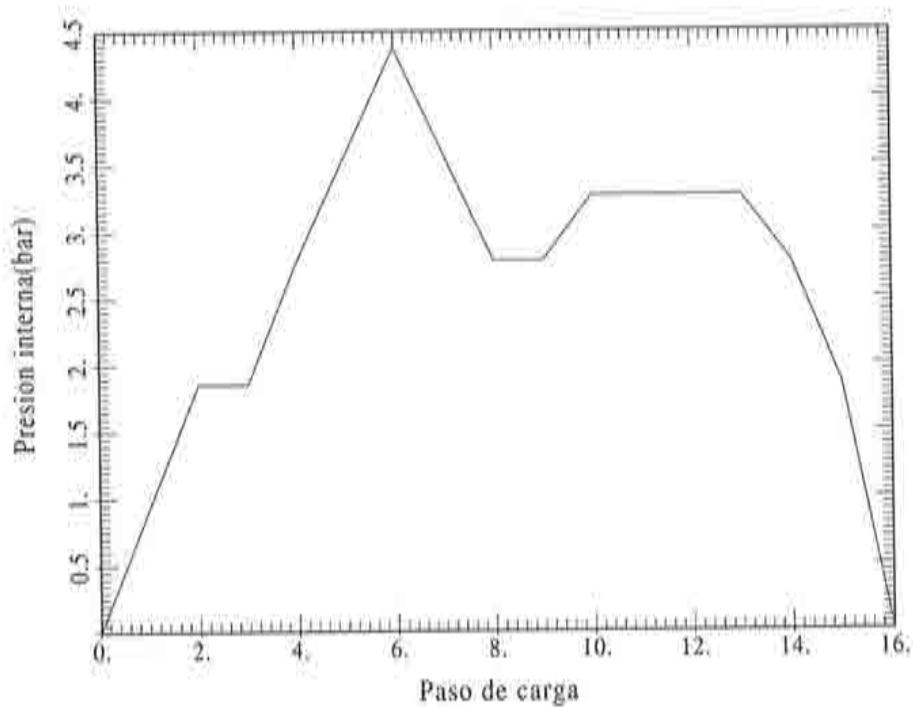


Figura 5.6. Evolución de la presión interna.

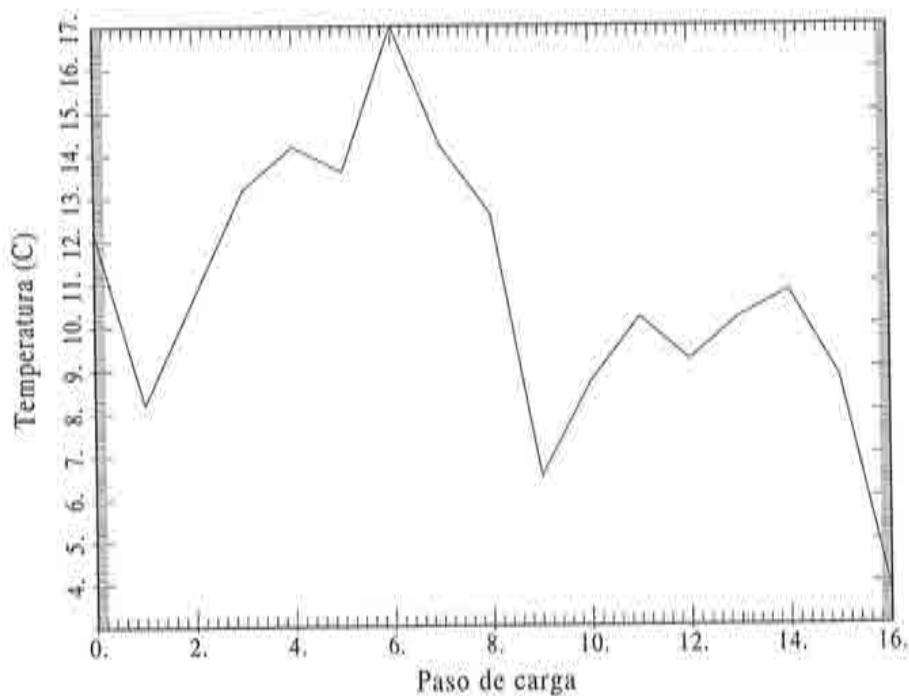


Figura 5.7. Evolución de la temperatura exterior.

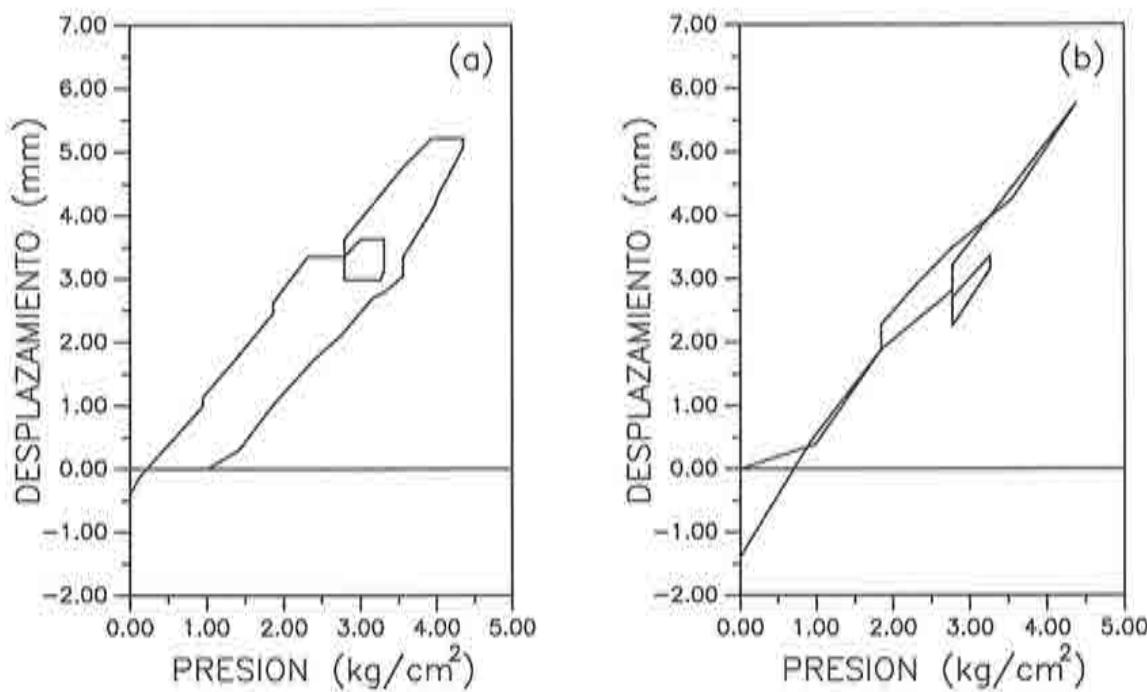


Figura 5.8 Resultado experimental (a) y de la simulación (b) de la prueba de integridad ($0-180^\circ$).

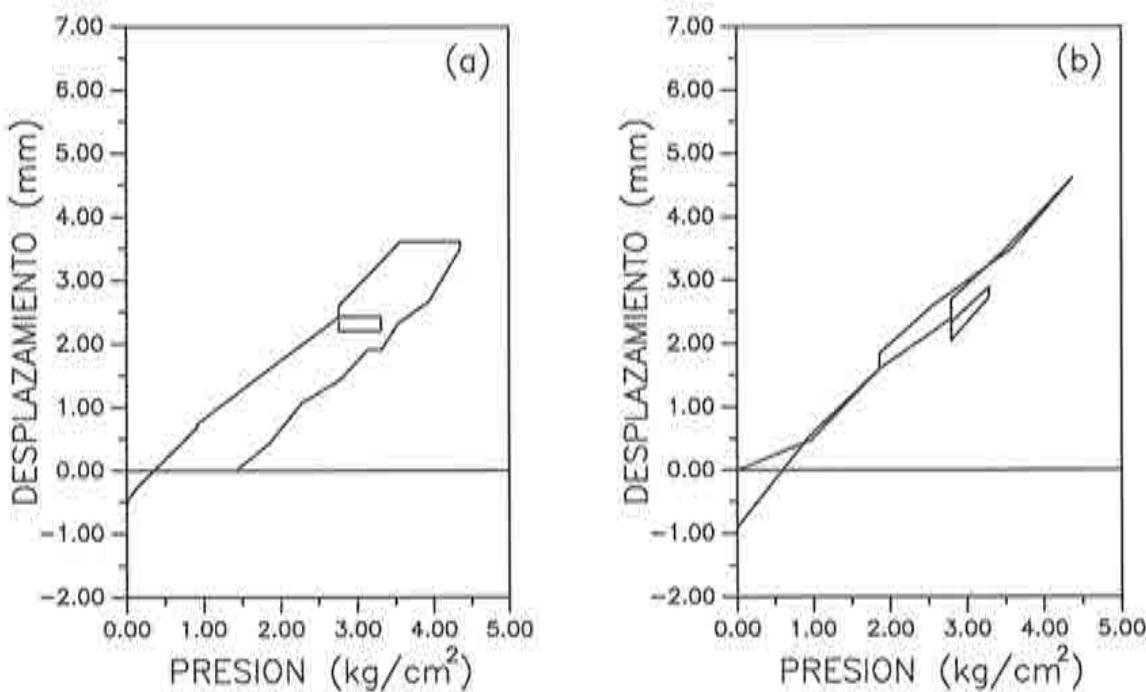


Figura 5.9 Resultado experimental (a) y de la simulación (b) de la prueba de integridad ($90-270^\circ$).

cizo, que en ciertas zonas alcanza 10 m de espesor, se ha modelizado mediante una única capa de elementos finitos que simulan las condiciones de apoyo en la base de la losa. Las propiedades consideradas para el material de dichos elementos son: un módulo de elasticidad aproximadamente 10 veces inferior al del hormigón estructural, a fin de permitir los movimientos de la losa; una resistencia a tracción de 10 kg/cm^2 , que permite simular un eventual despegue entre la losa y el hormigón de relleno.

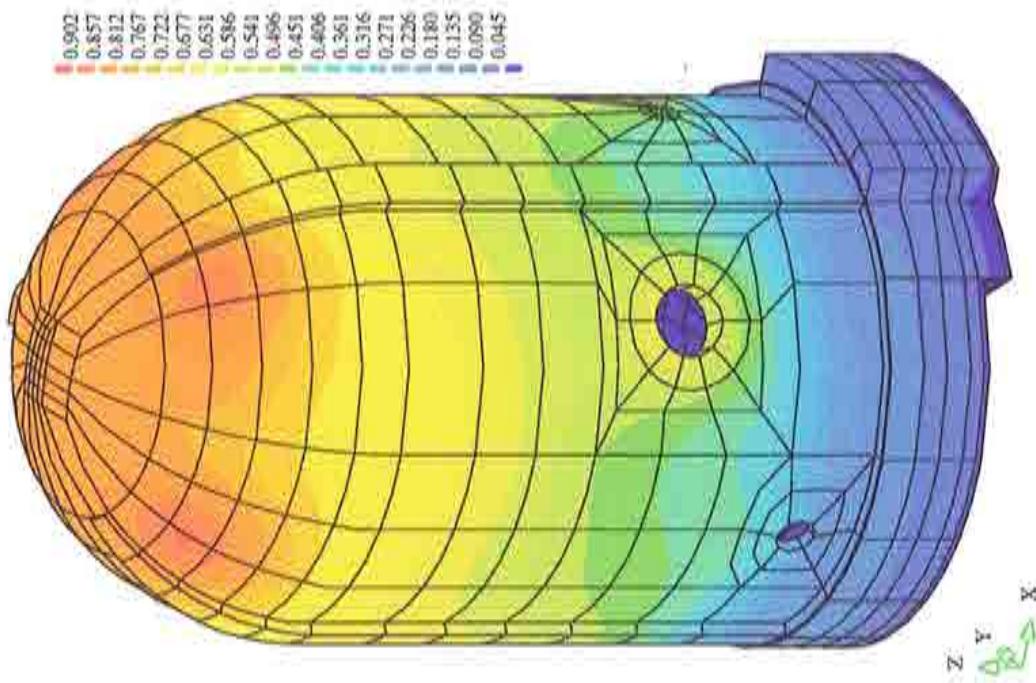
Los resultados de simulación obtenidos se presentan a continuación de tal manera que puedan compararse los correspondientes al modelo con losa con los del modelo sin losa. La Figura 5.10(a) muestra los contornos de igual desplazamiento para la carga de peso propio y postesado, que es el primer caso de carga considerado en todas las simulaciones efectuadas. El mismo resultado, pero para la situación sin losa de cimentación, puede verse en la Figura 5.10(b), apreciándose algunas diferencias no significativas entre los dos casos, provocadas por el peso propio de la losa.

En las Figuras 5.11(a) y (b) se observan los contornos de igual desplazamiento para la presión de diseño, de 3.78 kg/cm^2 . Estos últimos dibujos han tenido como configuración inicial la correspondiente a la carga de peso propio y postesado (ver la Figura 5.10). Puede observarse que los dos modelos proporcionan resultados similares: se producen las mismas localizaciones de los valores máximos y de los gradientes de desplazamiento.

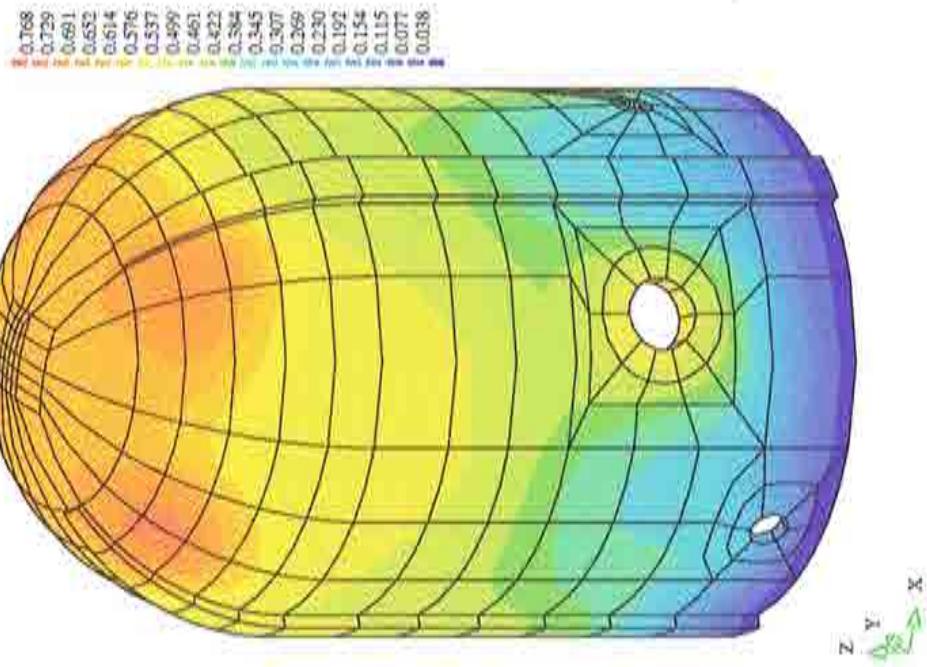
En las Figuras 5.12(a)–5.12(h) se muestra la evolución del proceso de degradación del hormigón, que se inicia a una presión de 6 kg/cm^2 y llega a generalizarse cuando se llega a 9 kg/cm^2 . Se observa que el mayor daño se produce en el segundo tercio de la altura de la pared cilíndrica; concretamente, se trata de fisuras verticales debidas a fuerzas horizontales que provocan tracción en el hormigón. Existe una completa similitud entre la evolución de la degradación en el modelo con losa y la del modelo sin losa.

En las Figuras 5.13(a) y 5.13(b) pueden verse los desplazamientos correspondientes a la presión de 11.1 kg/cm^2 relativos, para la cual ocurre el fallo estructural definido por la rotura de la armadura pasiva al alcanzarse la deformación límite. Además de obtenerse exactamente los mismos desplazamientos y localizaciones de desplazamientos máximos en los dos casos, puede observarse que los desplazamientos de la losa son insignificantes en comparación con los del resto del edificio de contención. Todos estos hechos demuestran con claridad que la losa tiene una influencia despreciable en la presión de fallo.

En las Figuras 5.14(a) y 5.14(b) se muestran las armaduras rotas al alcanzarse la presión de fallo de 11.1 kg/cm^2 . Si se imagina la pared cilíndrica formada por anillos horizontales, es evidente que éste es un proceso de rotura en cadena que conduce a la aparición de franjas verticales de armaduras circun-

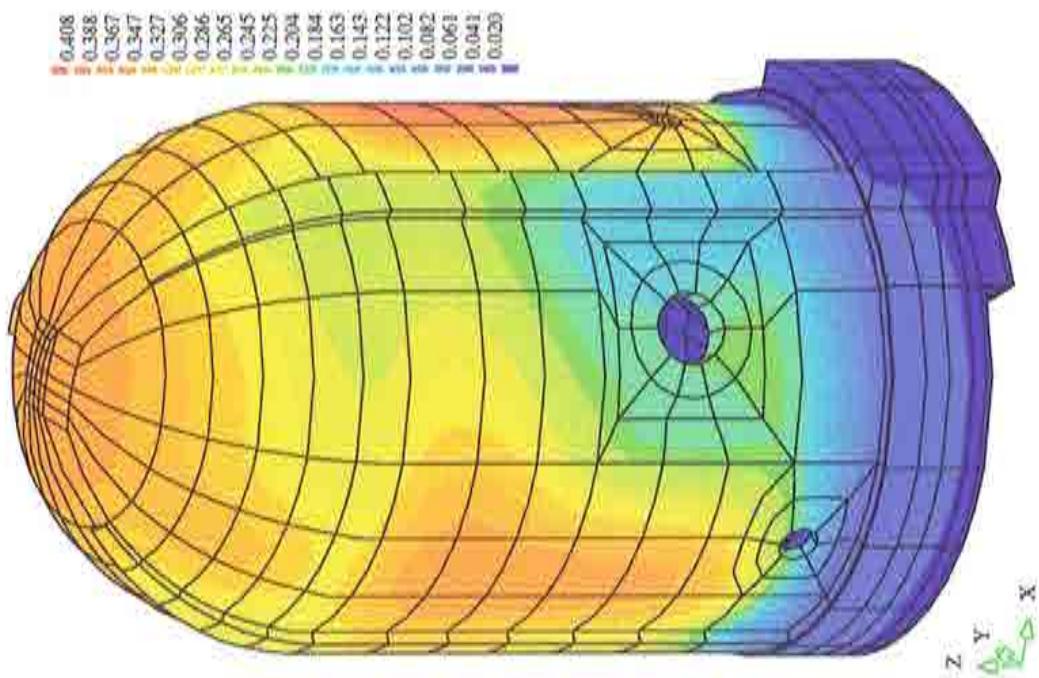


(a) Modelo con losa

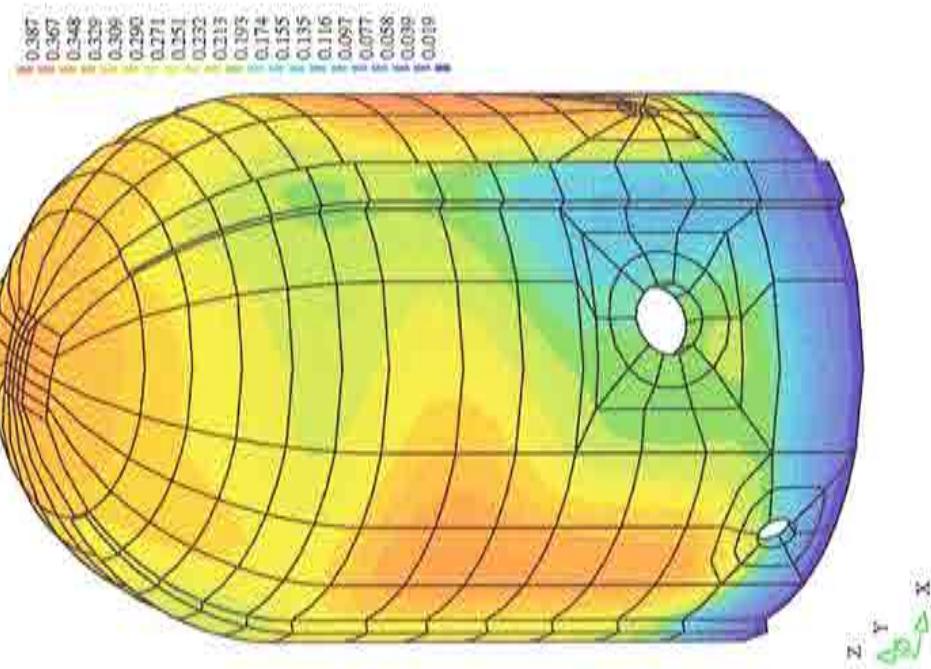


(b) Modelo sin losa

Figura 5.10. Contornos de igual desplazamiento -peso propio y postesado-



(a) Modelo con losa



(b) Modelo sin losa

Figura 5.11 Contornos de igual desplazamiento —presión de diseño—.

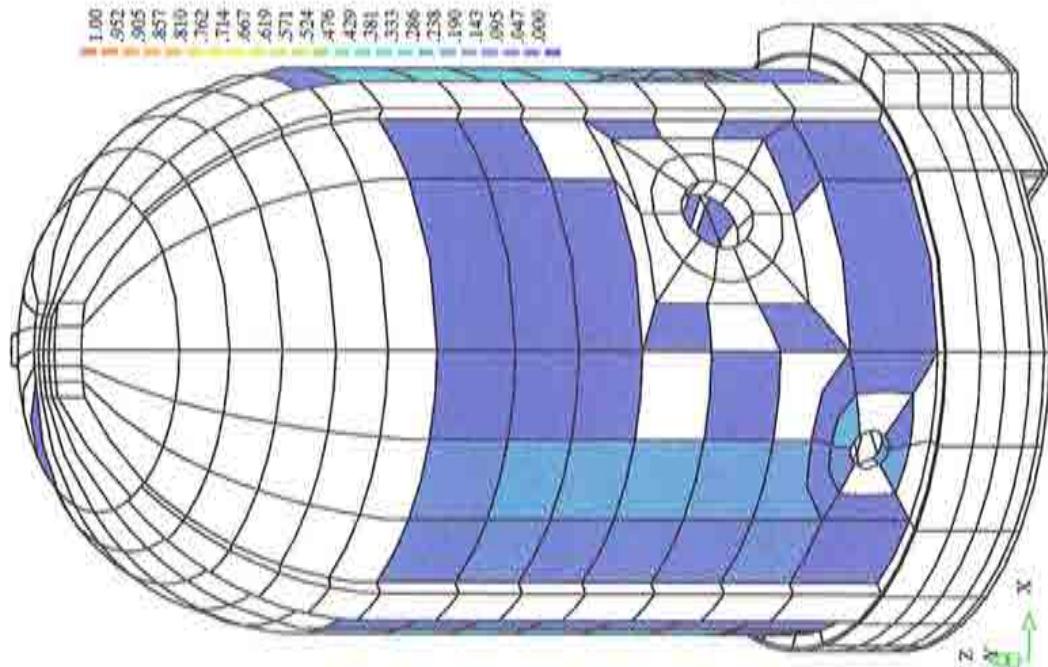
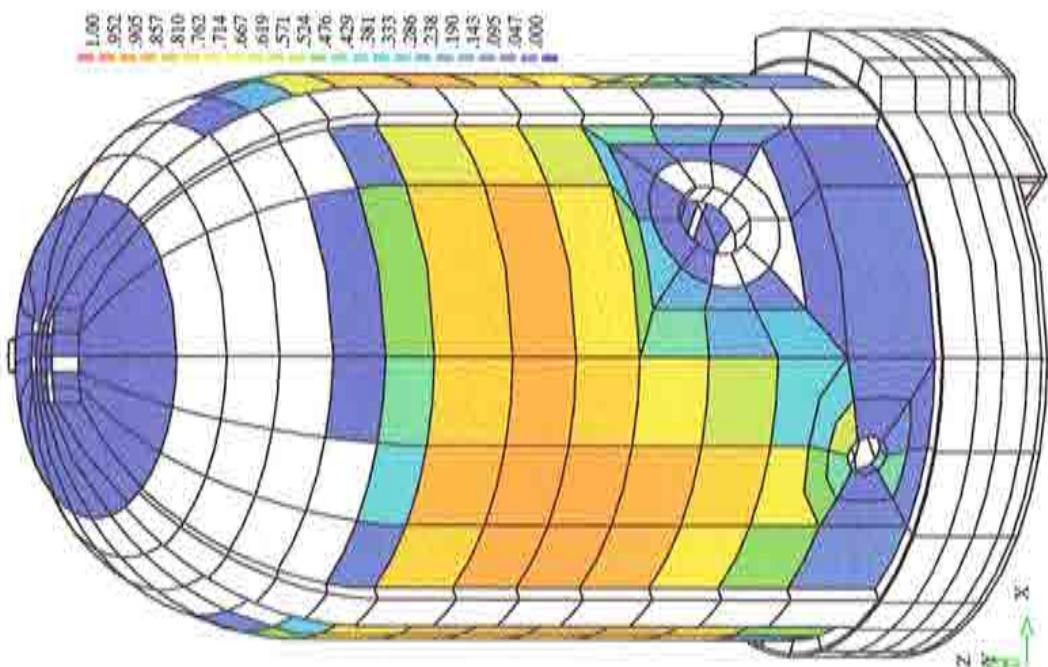
(a) $7 \text{ kg}/\text{cm}^2$ (b) $7.5 \text{ kg}/\text{cm}^2$

Figura 5.12ab Evolución del proceso de degradación en el modelo de contención con losa de cimentación al incrementarse la presión interna. (Los colores indican nivel de daño)

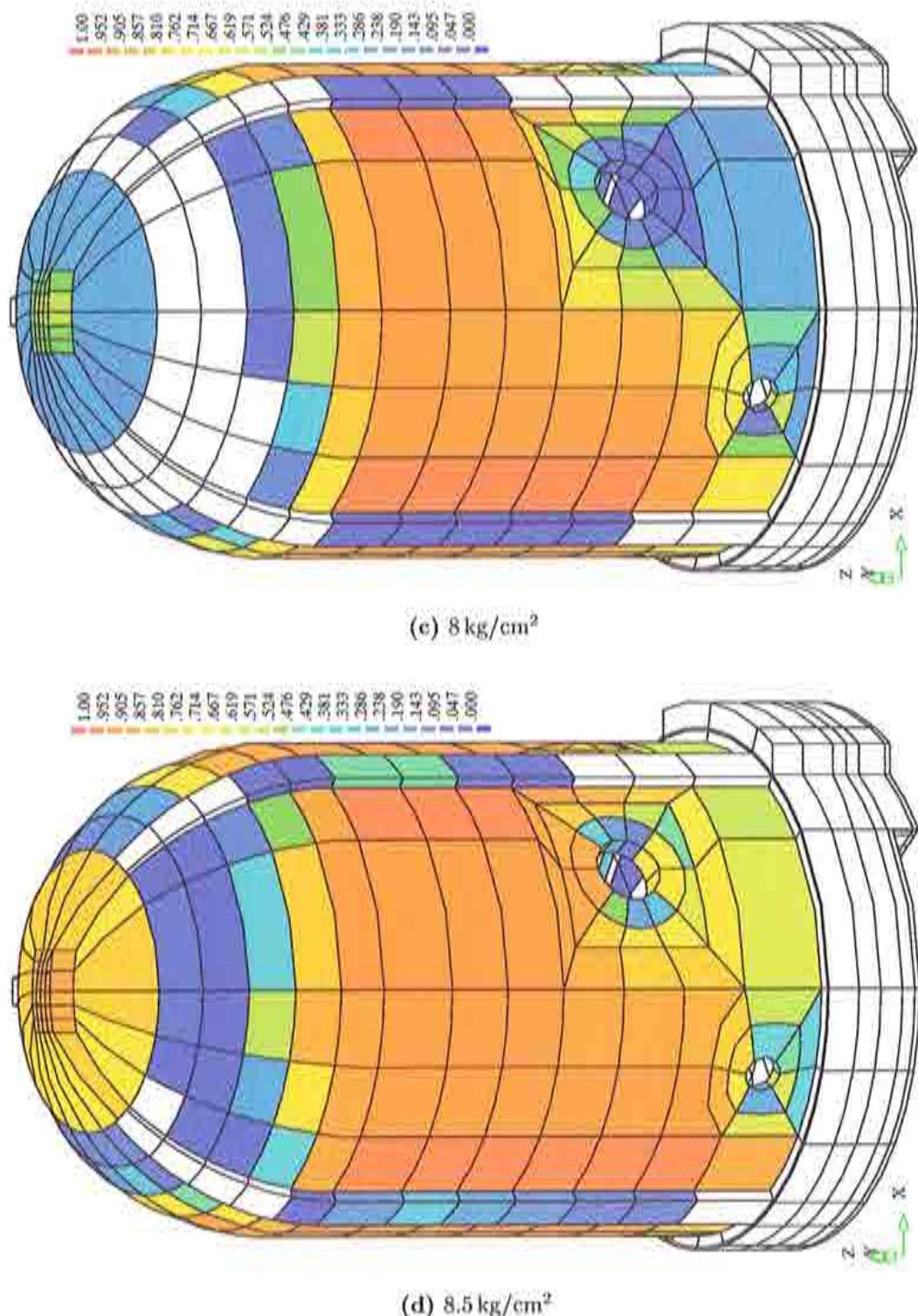


Figura 5.12cd Evolución del proceso de degradación en el modelo de contención con losa de cimentación al incrementarse la presión interna. (Los colores indican nivel de daño)

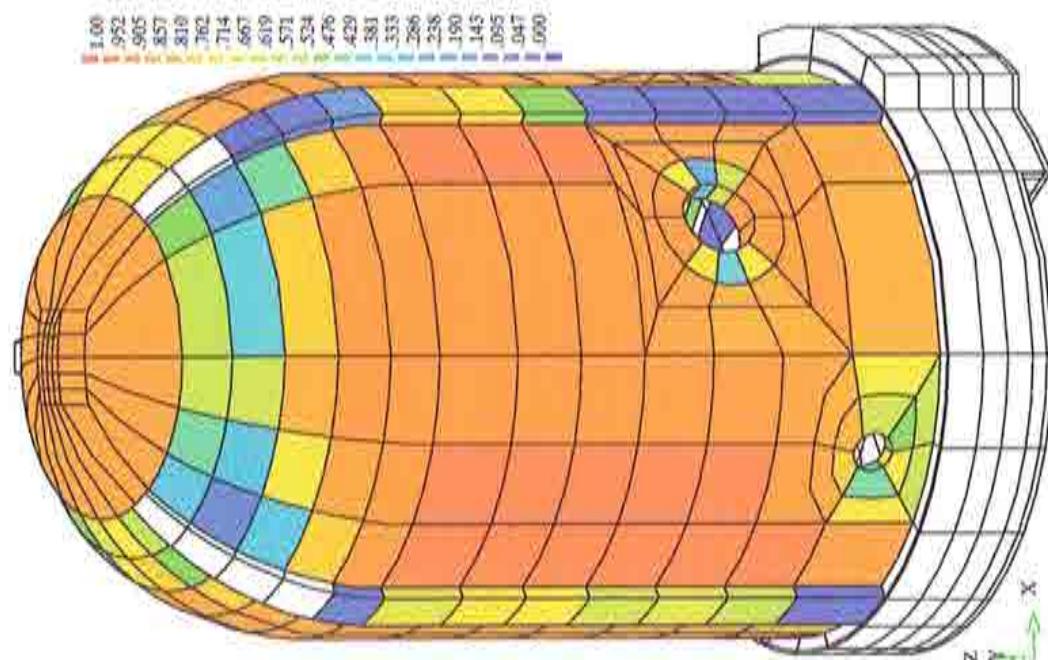
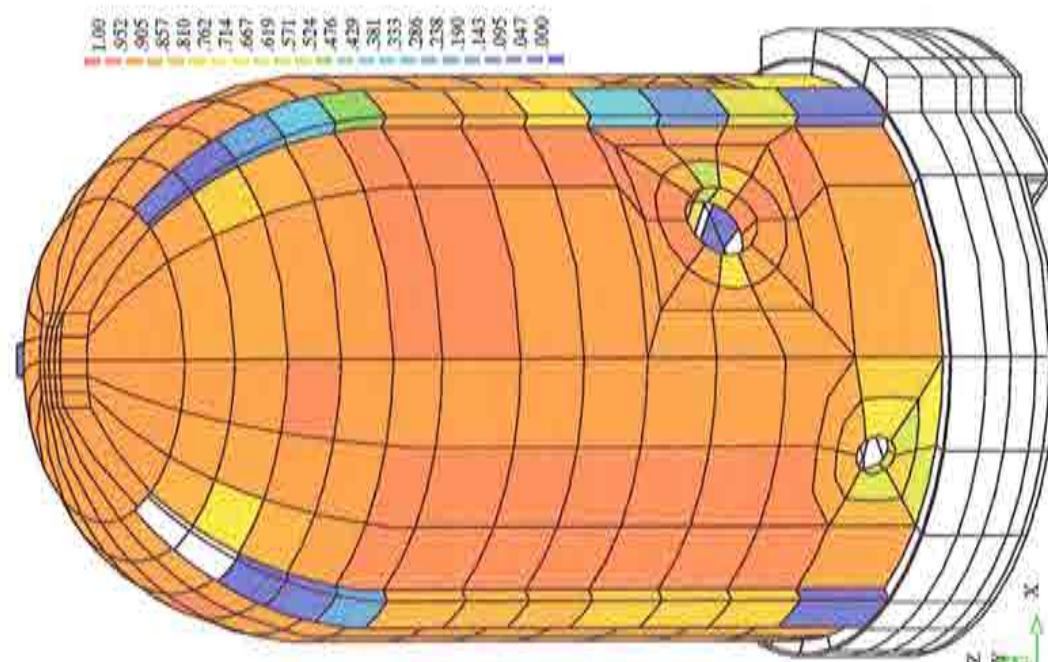
(e) 9 kg/cm^2 (f) 9.6 kg/cm^2

Figura 5.12ef Evolución del proceso de degradación en el modelo de contención con losa de cimentación al incrementarse la presión interna. (Los colores indican nivel de daño)

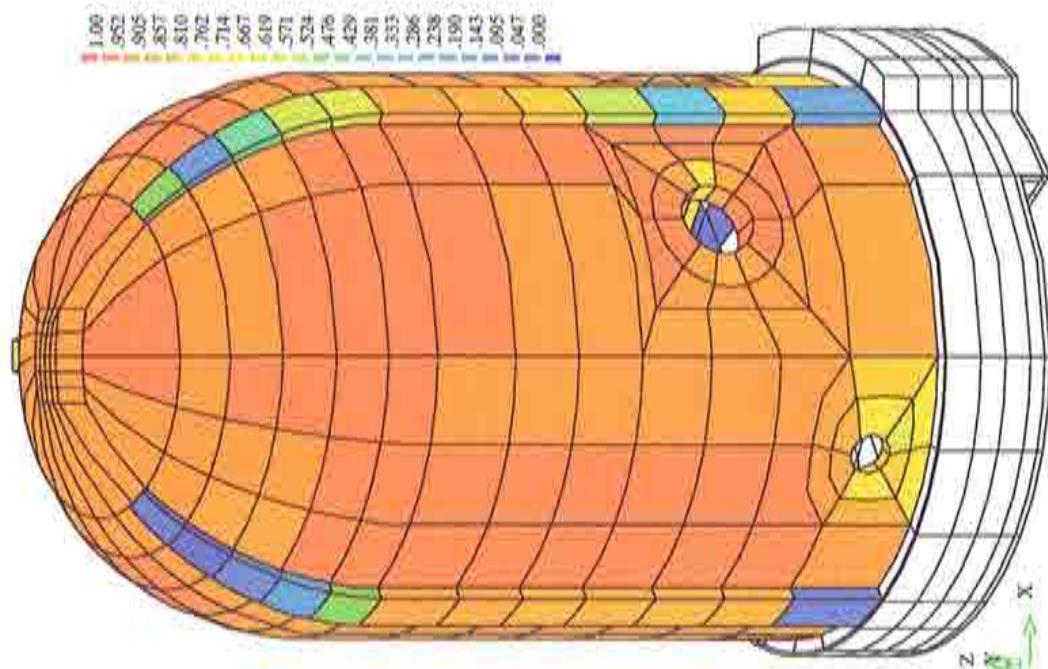
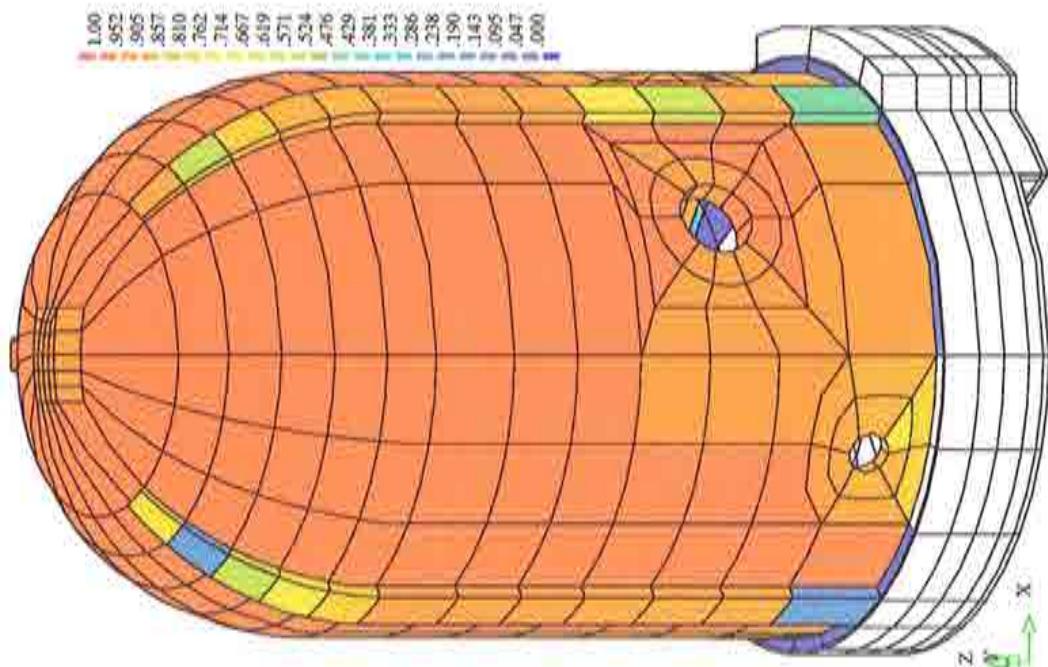
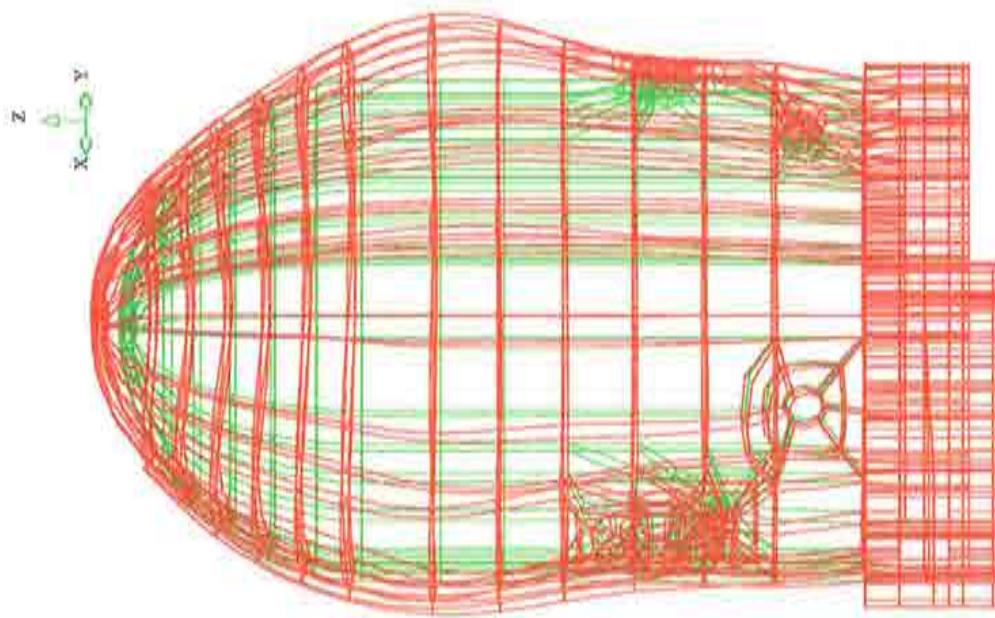
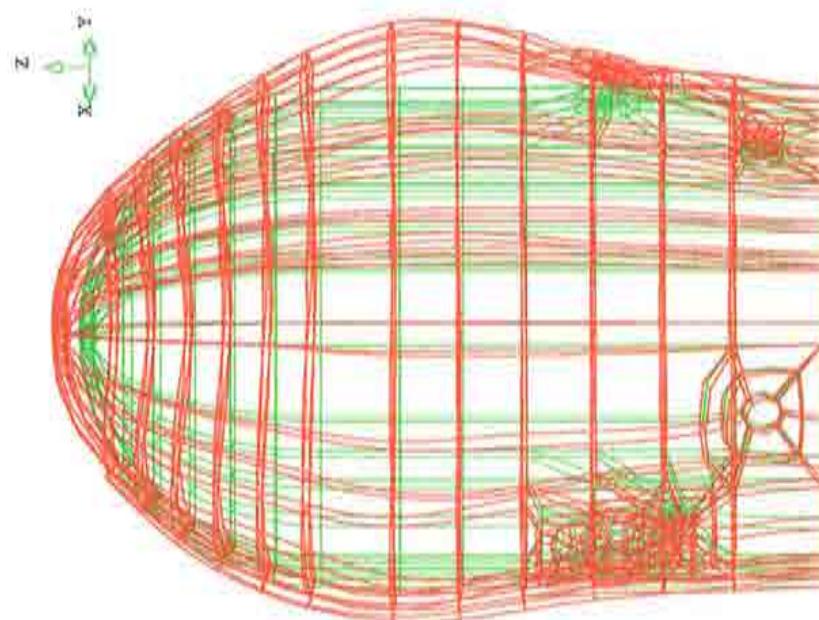
(g) 10 kg/cm^2 (h) 10.9 kg/cm^2

Figura 5.12gh Evolución del proceso de degradación en el modelo de contención con losa de cimentación al incrementarse la presión interna. (Los colores indican nivel de daño)

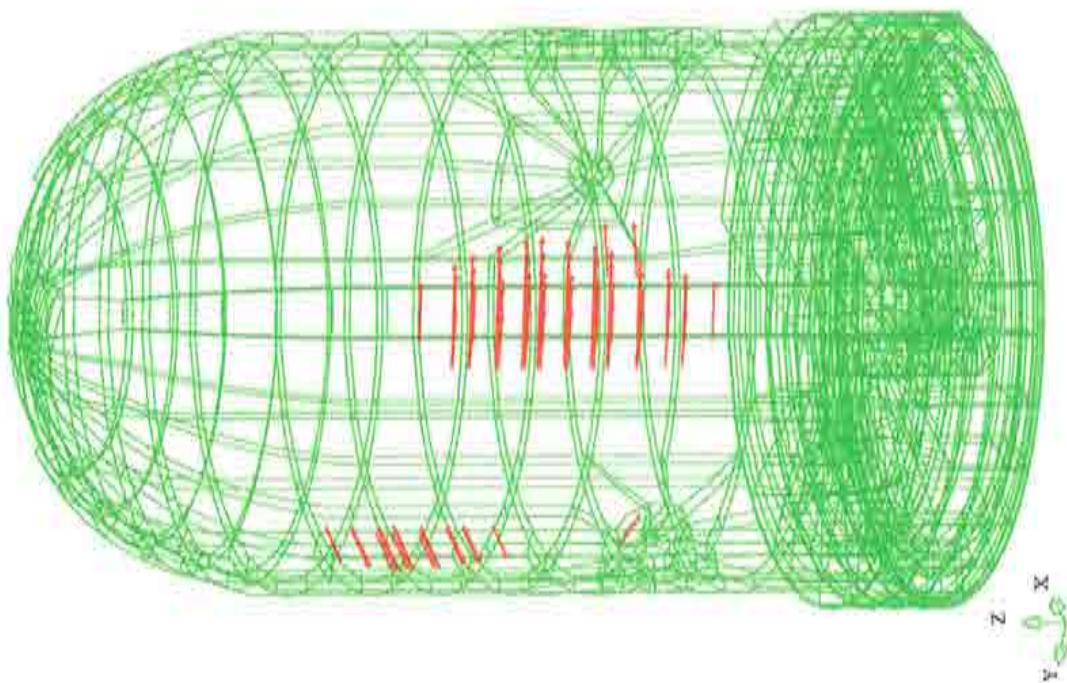


(a) Modelo con losa

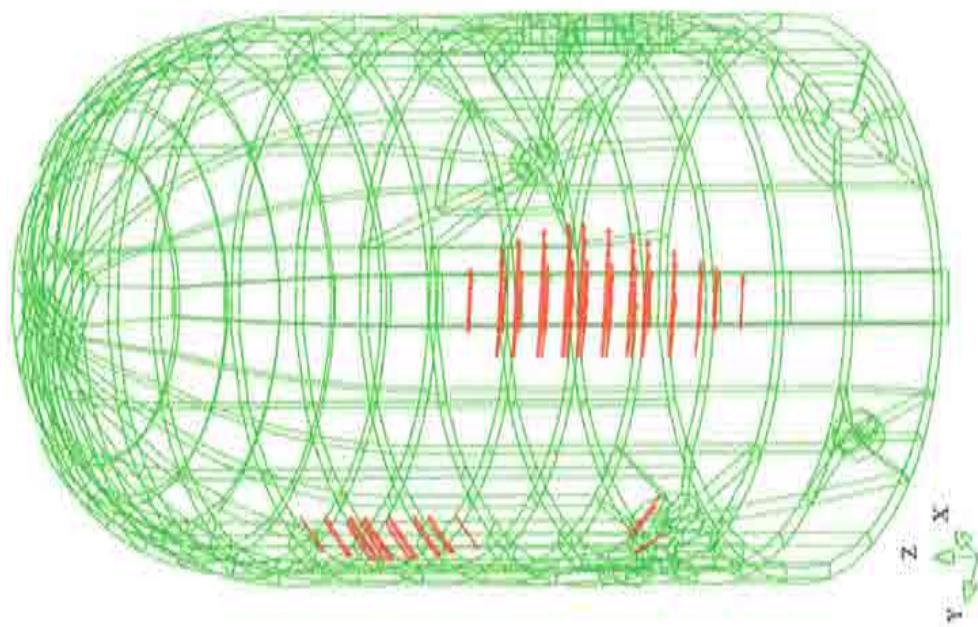


(b) Modelo sin losa

Figura 5.13 Deformada para la presión de fallo.



(a) Modelo con losa



(b) Modelo sin losa

Figura 5.14 Armadura rota para la presión de fallo.

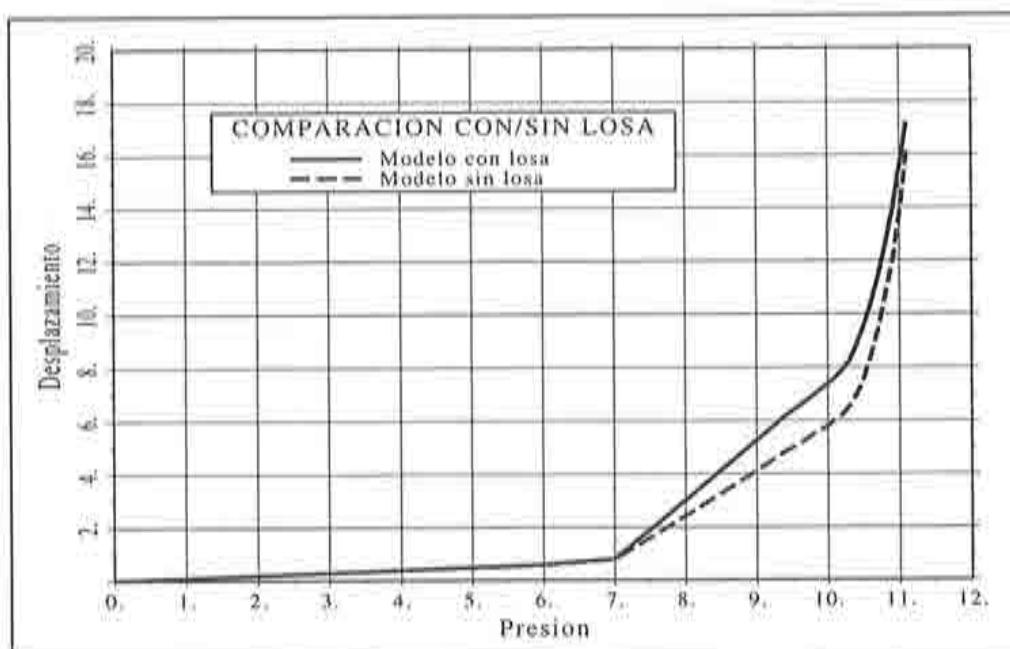


Figura 5.15 Curva presión-desplazamiento para el punto de la contención que sufre mayor desplazamiento.

ferenciales rotas. El proceso conduce a la aparición de grietas verticales al lado del contrafuerte correspondiente a la zona de la la pared cilíndrica que carece de penetraciones que motiven la colocación de armadura adicional.

En la Figura 5.15 se muestra la evolución del desplazamiento radial en función de la presión interior en el punto de mayor deformación para los modelos con y sin losa. Se observa en las dos gráficas una perfecta concordancia del comportamiento en el rango elástico, hasta los 6 kg/cm^2 aproximadamente. A partir de dicha presión, el hormigón comienza a fisurarse y la pendiente de las curvas de desplazamientos es algo distinta debido a la gran fisuración que se produce en la zona de contacto losa-pared cilíndrica. Este fenómeno afecta en mayor grado al modelo en que también se daña la losa. A partir de los 10 kg/cm^2 aproximadamente, las pendientes de las curvas vuelven a acercarse, debido a la generalización del daño en el hormigón en ambos modelos. En los dos casos, la presión de fallo obtenida es prácticamente la misma, con una ligera diferencia en los desplazamientos máximos. Se ha comprobado, asimismo, que en los dos casos se mantiene la misma localización del fallo estructural y el mismo estado de degradación del edificio.

En las Figuras 5.16a (modelo sin losa) y 5.16b (modelo con losa) puede verse la evolución de varios índices globales de daño de diversas zonas estructurales. Dado que el fallo ocurre en la pared cilíndrica, se han considerado de manera

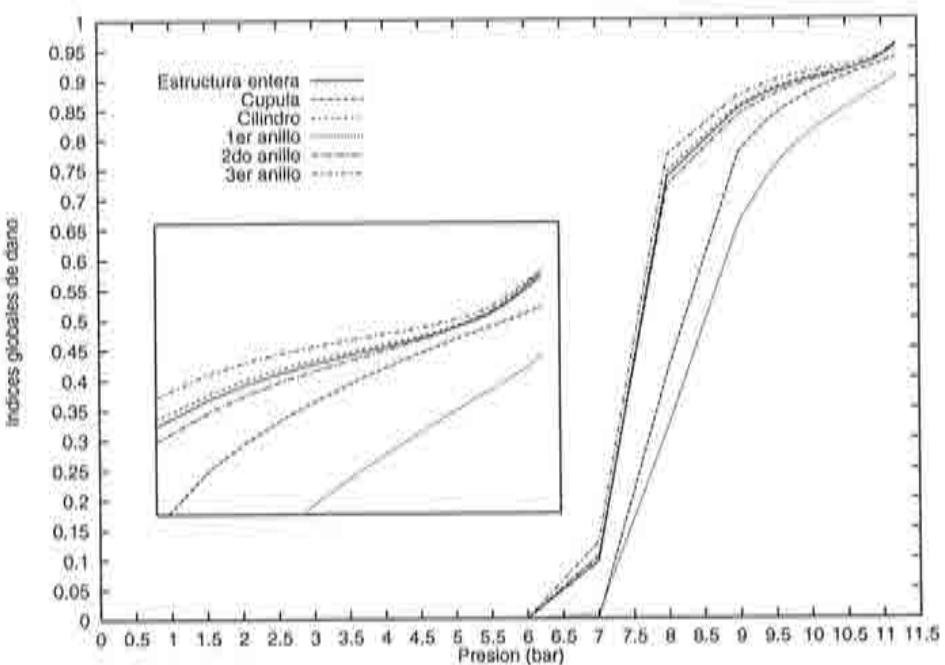


Figura 5.16a Evolución de varios índices globales de daño para el modelo sin losa (ampliación del tramo final en el recuadro).

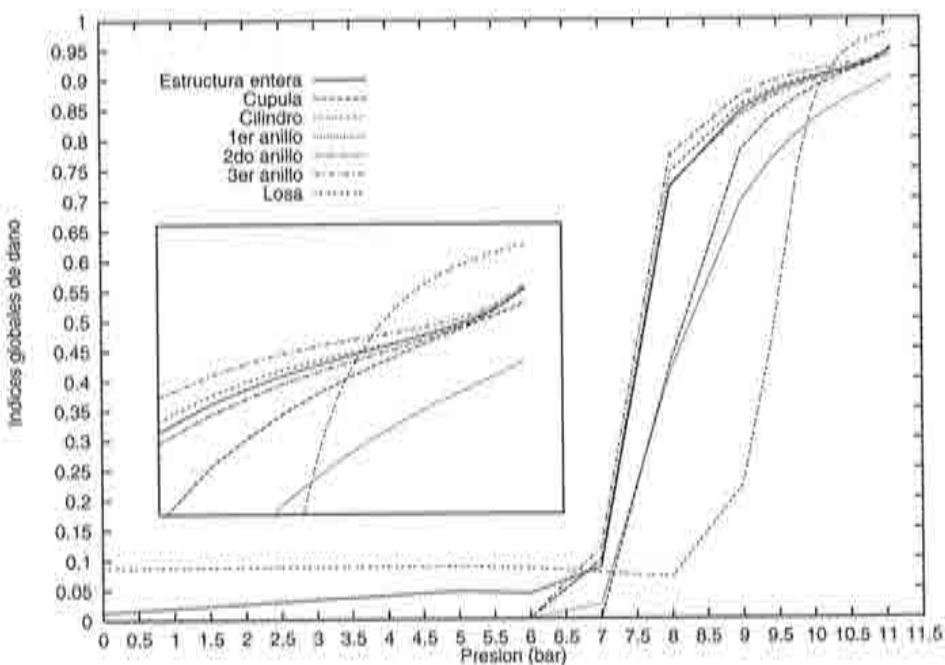


Figura 5.16b Evolución de varios índices globales de daño para el modelo con losa (ampliación del tramo final en el recuadro).

separada los índices globales de daño de tres anillos: el primero está formado por la primera fila horizontal inferior de elementos finitos, el segundo por las tres filas siguientes y el tercer anillo por las restantes tres filas de modo que el conjunto de los tres anillos constituye la totalidad de la pared cilíndrica. En total se analizan siete índices globales de daño que corresponden a las siguientes entidades: estructura entera, cúpula, pared cilíndrica, primer anillo, segundo anillo, tercer anillo y losa (cuando procede). En los dos casos se ha ampliado, en el recuadro interior de cada figura, el tramo final para poder verse en detalle lo que ocurre antes del fallo estructural.

Los índices globales de daño muestran un comportamiento casi idéntico en los dos modelos, lo que confirma que la presencia de la losa no influye en el deterioro general del edificio que se desarrolla en la zona mediana de la pared cilíndrica. Se observa que el índice global total, el de la pared cilíndrica y los del segundo y tercer anillo evolucionan siempre de la misma manera y que además toman valores muy cercanos llegando a confundirse en varios tramos y sobre todo en el tramo final. Esto significa que que el índice global de daño total tiene en cuenta casi exclusivamente lo que ocurre en dichos dos anillos y el estado del resto de la estructura influye muy poco. Prueba de ello es que aunque el índice de la losa llega a experimentar fuertes variaciones y toma al final valores bastante mayores que el índice global de daño total, éste último no se ve en ningún momento influido por el estado de la losa y sigue la pauta dada por los anillos 2 y 3 de la pared cilíndrica. El primer anillo tiene una evolución separada y tampoco influye en el índice total aunque es parte integrante de la pared cilíndrica. Lo mismo ocurre con la cúpula. La interpretación es que la presencia tanto de la losa como de la cúpula y del primer anillo no contribuye en nada en la evolución del índice global de daño de la estructura. El índice global de daño tiene la propiedad de identificar y seguir (ver Figuras 5.16) la evolución del daño de la parte más débil de la estructura en cada instante. En este contexto "débil" implica además relevancia desde el punto de vista de la capacidad de resistir las solicitudes a las cuales está sometida la estructura. Una parte estructural que no es importante para la presión de fallo, como es la losa, no tendrá influencia sobre la evolución del índice global de daño total ya que su destrucción es irrelevante de cara al fallo.

En el tramo final (ver recuadros) se observa que los índices total, de la pared cilíndrica y de los anillos 2 y 3 se agrupan todavía más y sus gráficas cambian de curvatura. Es la prueba de que el acero se está rompiendo en dichos anillos. Cabe destacar que la rotura de armaduras está muy localizada y, sin embargo, el índice global de daño de la estructura entera capta el fenómeno en toda su intensidad.

Estos hechos confirman la adecuación de la formulación de daño global prop-

uesta en esta monografía para el seguimiento de la evolución de la degradación estructural, convirtiéndolo en una potente herramienta. El hecho de que el índice global de daño total llegue en los dos casos muy cerca de unidad muestra que realmente la estructura de contención falla para la presión de 11.1 kg/cm^2 .

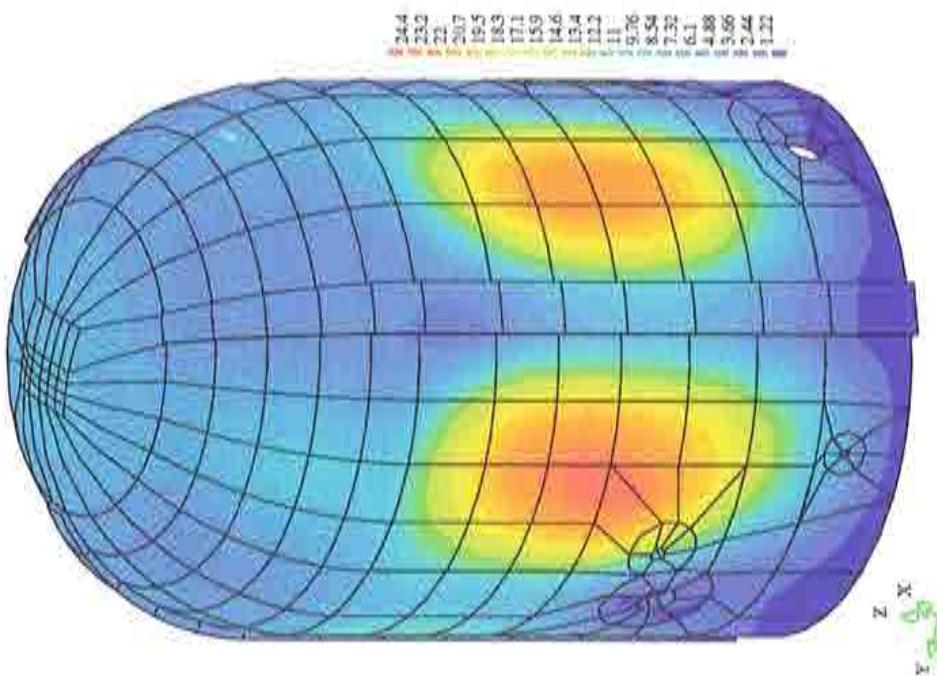
En consecuencia, se puede afirmar que es completamente justificado prescindir de la losa de cimentación en un estudio de evaluación de la presión de fallo de la estructura. Por este motivo, el estudio del efecto de la carga térmica ha sido efectuado sobre el modelo sin losa de cimentación. Sin embargo, la conclusión obtenida alcanza su especial relevancia a la hora de realizar un estudio probabilista de la presión de fallo, que requiere un gran número de análisis deterministas; como consecuencia, al prescindirse de la losa en el modelo estructural, se puede reducir de manera muy significativa el tiempo de cálculo. Se destaca asimismo que la presión de fallo obtenida con el modelo tridimensional de elementos finitos difiere en sólo 5% del valor calculado utilizando el modelo de elementos finitos de lámina de revolución y el mismo modelo constitutivo de daño para el hormigón (ver Figuras 5.2 y 5.3).

5.8 ESTUDIO DINÁMICO

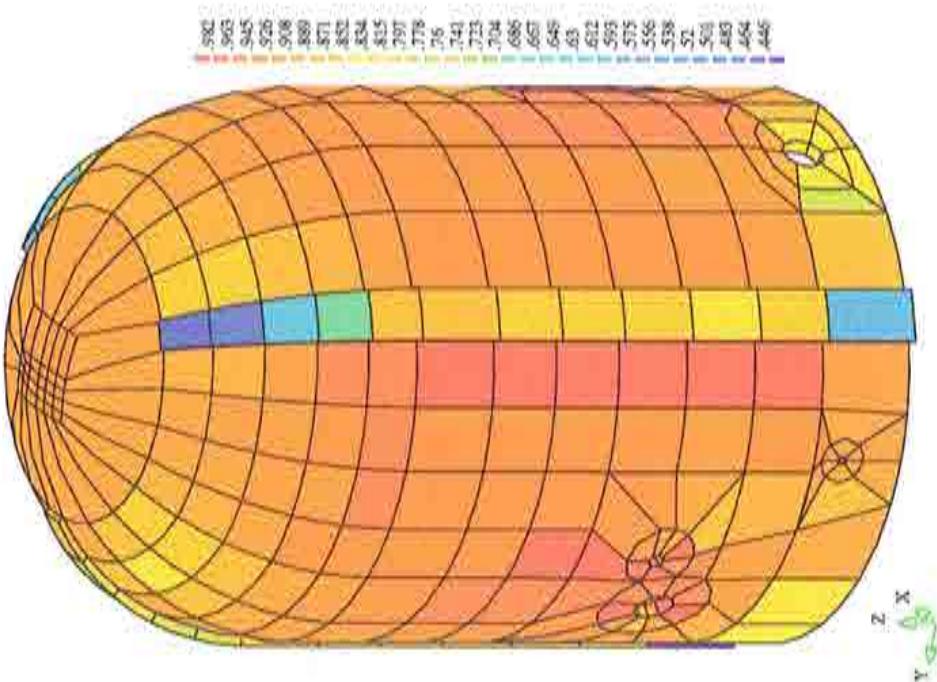
5.8.1 Presión interna dinámica

La capacidad del edificio de contención de resistir un aumento brusco de la presión interna se debe considerar de manera separada. Entre los múltiples escenarios de accidente figura como causa posible del aumento de presión una fuga y posterior combustión de hidrógeno. Esto ocurre en un intervalo relativamente corto de tiempo, de unos pocos segundos.

Esta posibilidad obliga a verificar si los efectos iniciales tienen algún impacto sobre la presión de fallo de la contención. Esto se ha llevado a cabo aplicando la presión interna de manera dinámica en un impulso de 3 segundos, tal como prescribe un escenario de accidente estandar para las centrales nucleares. Las Figuras 5.17 (a) y (b) muestran los contornos de igual desplazamiento y la distribución de daño elemental para la presión de fallo que no cambia con respecto al análisis estático, situándose en este caso también en 11.1 atmósferas. Por ello se puede descartar la influencia de los efectos dinámicos en lo que a la presión interior se refiere, lo que confirma los resultados obtenidos en el estudio de revolución.



(a) Contornos de igual desplazamiento para la presión de fallo.



(b) Distribución del daño para la presión de fallo.

Figura 5.17 Resultados del análisis dinámico de presión

5.8.2 Análisis sísmico

Ha sido estudiado también el comportamiento frente a acciones sísmicas del edificio de contención. Como terremoto de cálculo se ha elegido el de El Centro de 1940, cuyo acelerograma se muestra en la Figura 5.18, y se han hecho varios estudios variando su amplitud. Los resultados han evidenciado que el edificio de contención resiste a un terremoto de un acelograma igual a 20% de la correspondiente al sismo real de El Centro, que corresponde aproximadamente a la aceleración máxima estipulada por la normativa de diseño sismorresistente española en el emplazamiento de la central. Para intensidades mayores, la estructura falla debido a la rotura de la armadura vertical en la base de la zona cilíndrica, que sufre fuertes tracciones cuando la estructura oscila bajo las aceleraciones del terreno.

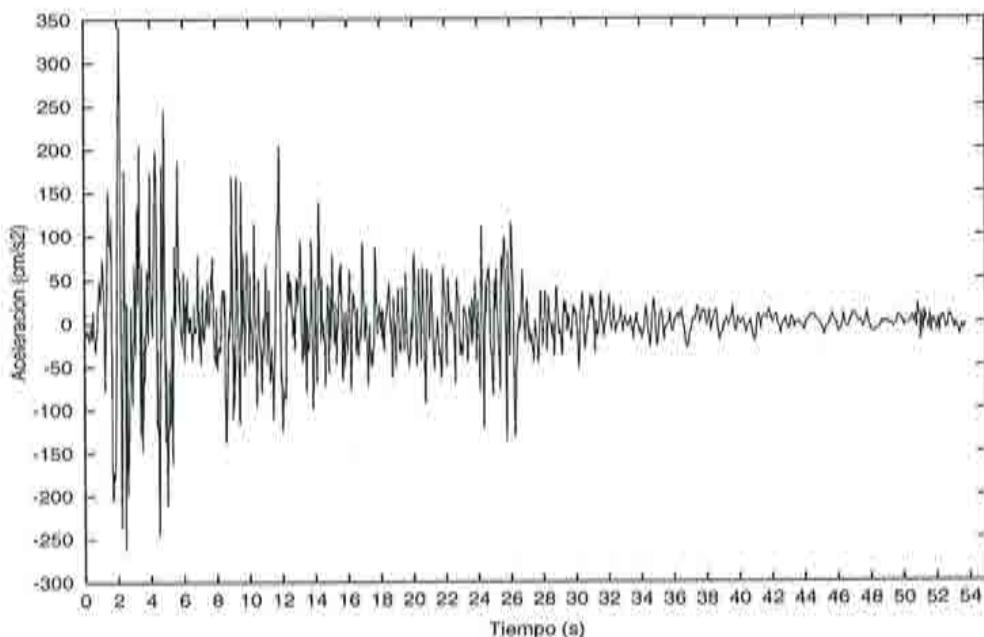


Figura 5.18 Acelerograma del terremoto El Centro.

Las Figura 5.19 muestra la distribución del daño elemental al final del terremoto con el acelerograma de 20%. Esta distribución coincide con el comportamiento esperado que consiste en la degradación severa del anillo de elementos de la base del cilindro. El daño global estructural total se acerca a la unidad aunque la parte efectivamente dañada no es más que un 10% de la masa estructural. Este comportamiento es una de las propiedades más importantes

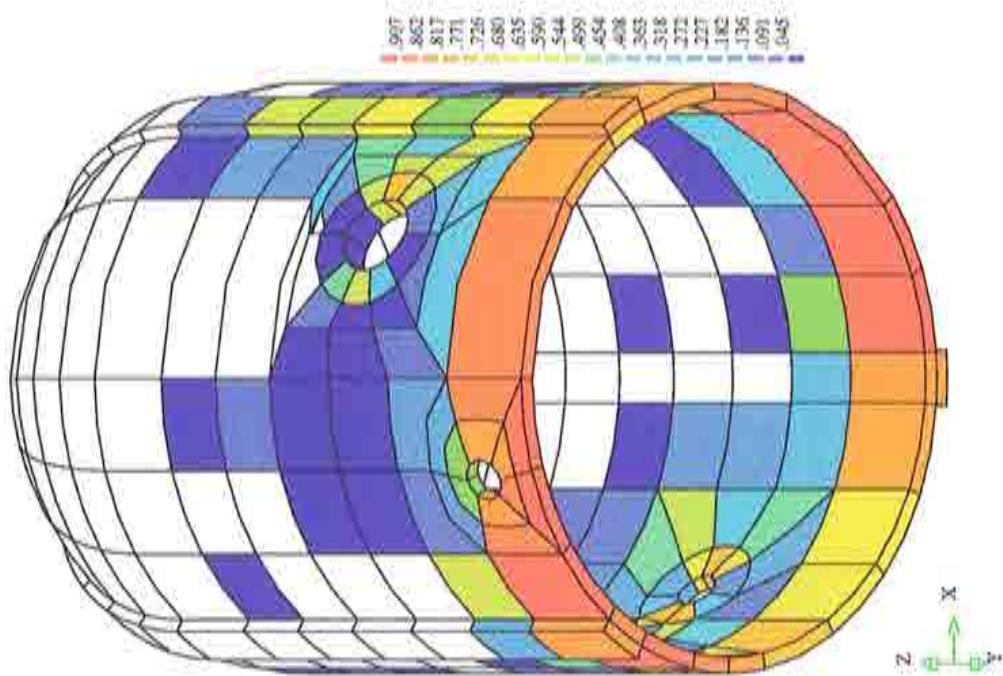


Figura 5.19 Daño elemental después del terremoto El Centro al 20% de intensidad.

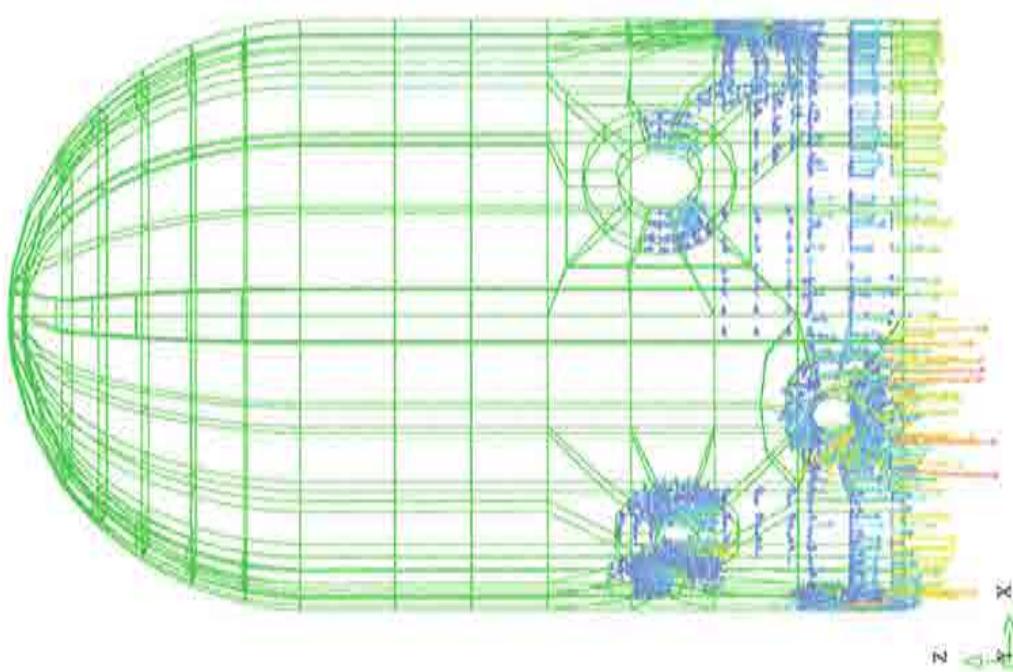


Figura 5.20 Armaduras que han fluido durante el terremoto al 20% de intensidad.

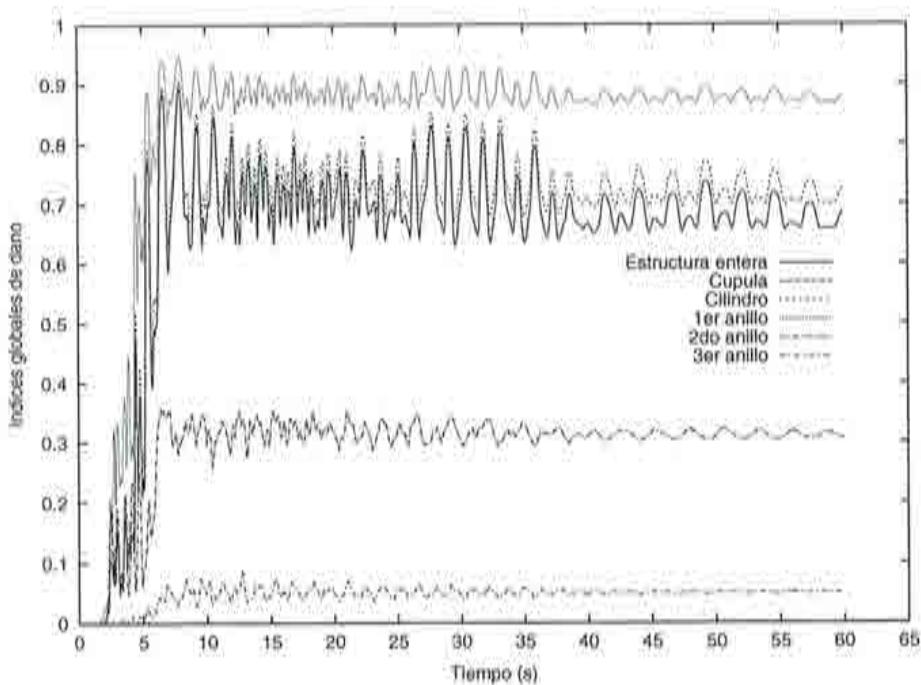


Figura 5.21 Diagrama de evolución de varios índices globales de daño para el terremoto El Centro al 20% de intensidad.

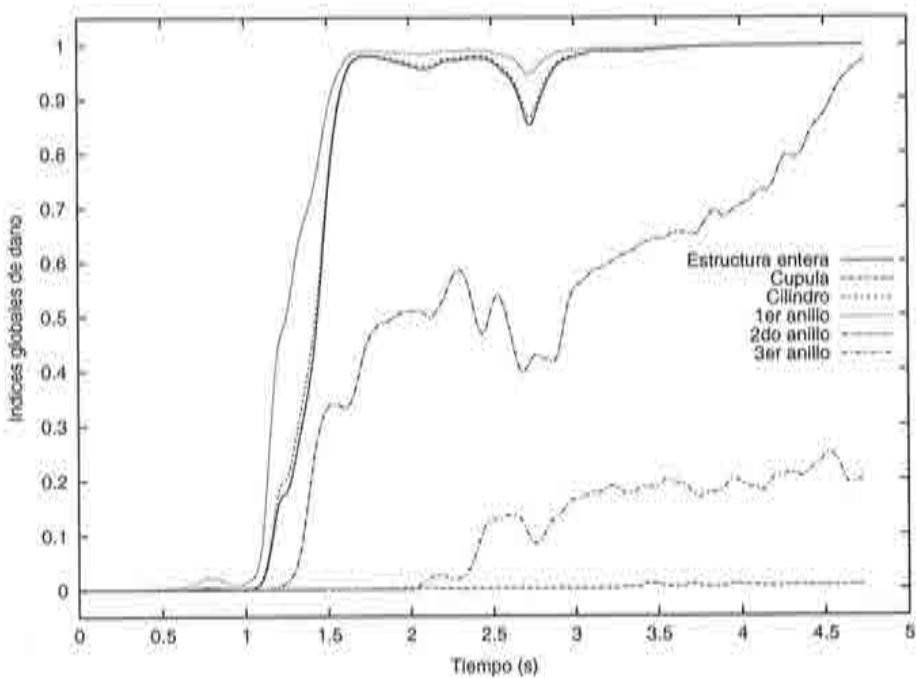


Figura 5.22 Diagrama de evolución de varios índices globales de daño para el terremoto El Centro al 100% de intensidad.

del índice global de daño propuesto en la monografía que este ejemplo destaca plenamente. En la Figura 5.20 pueden verse las armaduras que han alcanzado la fluencia sin llegar a romperse como ocurre en el caso de aplicar un terremoto más severo.

En la Figura 5.21 se presenta la evolución de los índices globales de daño de las distintas partes estructurales en función del tiempo. El índice del primer anillo de elementos finitos toma los valores más altos tal como es de esperar. Sin embargo, tanto el índice de la estructura entera como el de la pared cilíndrica tienen su evolución independiente sin que el índice global total siga al del primer anillo en ningún momento. La interpretación de este comportamiento es que la estructura soporta bien este terremoto y no llega al fallo. Lo contrario ocurre en la Figura 5.22 donde bajo el terremoto de El Centro al 100% de aceleración se observa desde el principio que el índice total sigue la evolución y los valores del índice del primer anillo. En este caso el fallo llega a los 4.75 segundos por la destrucción completa de la armadura vertical en la base y con esto desaparece toda la rigidez frente a cargas verticales.

Las oscilaciones de los índices globales vienen a confirmar las consideraciones hechas en el Apartado 3.6 sobre la dependencia del índice global de daño de la carga que lo ha producido. Aunque los índices locales de daño de cada uno de los puntos de la estructura nunca disminuyen, durante el terremoto el estado de la estructura mejora y empeora alternativamente según su capacidad de resistencia esté más o menos solicitada debido a configuraciones deformacionales que movilizan de manera no uniforme la rigidez de la estructura.

5.9 EFECTO DE LA CARGA TÉRMICA

5.9.1 Introducción

En todos los estudios de fallo de contención consultados se afirma que el efecto diferencial de la temperatura sobre la estructura no es significativo (*ID-COR* 1983). Sin embargo, no se aporta una confirmación analítica o numérica de esta conclusión. Por este motivo se ha estudiado con detalle el edificio de contención bajo el efecto de un gradiente térmico en la pared, además de las cargas habituales que son el peso propio, el postesado y la presión interior para determinar la influencia de dicho gradiente sobre la presión de fallo del edificio.

Algunos aspectos del comportamiento del hormigón sometido a temperatura no han sido tenidos en cuenta en este estudio. Primeramente, al desconocer las ecuaciones constitutivas del hormigón bajo carga térmica, el tratamiento de dicha carga se ha limitado a los efectos mecánicos de dilatación, que produce tensiones pero que no afecta a las propiedades del material. Otro aspecto que no

ha sido considerado es el efecto de la temperatura sobre la adherencia hormigón-armadura. En el modelo de cálculo, dicha adherencia se ha supuesto perfecta. Por último, hay que señalar las incertidumbres existentes en lo referente al comportamiento post-fisuración del hormigón en presencia de carga térmica, en el sentido de si la compresión del hormigón debida a la diferencia entre los valores de los coeficientes de dilatación del acero y del hormigón se relaja de forma brusca o paulatina tras la fisuración.

5.9.2 Tratamiento numérico del efecto de la temperatura

El efecto de la temperatura se incluye en la ecuación constitutiva a través del tensor de deformaciones térmicas ε_o

$$\varepsilon_o = \alpha \Delta T (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T \quad (5.1)$$

donde α es el coeficiente de dilatación térmica y ΔT el incremento de temperatura. La ecuación constitutiva se transforma en

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_o) \quad (5.2)$$

La aplicación de la ecuación constitutiva (5.2) a una estructura de hormigón armado en el rango lineal, se traduce en la aparición de un vector de carga adicional de valor $-f_y B^T D B \varepsilon_o dV$ que induce una compresión del hormigón por la armadura como consecuencia de la diferencia entre los valores de los coeficientes de dilatación lineal del hormigón y del acero de las armaduras ($10^{-5} {}^\circ\text{C}^{-1}$ para el hormigón y $1.2 \times 10^{-5} {}^\circ\text{C}^{-1}$ para el acero).

A partir del instante en que el hormigón inicia su fisuración se desconoce el comportamiento en compresión de la armadura puesto que dicha fisuración está relacionada con la adherencia entre ambos materiales. En el procedimiento de cálculo se ha representado este fenómeno mediante un aumento ficticio del coeficiente de dilatación del hormigón a partir del instante de la aparición del daño en el punto, de modo que al agotarse la energía de fractura su coeficiente de dilatación sea igual al del acero. Existe otro efecto de compresión de origen térmico, que se produce como consecuencia de la restricción de las dilataciones libres y que está directamente relacionado con la forma de la estructura y la disposición de sus apoyos. Estos dos efectos de precompresión del hormigón llevarían teóricamente a un aumento de la presión de fallo ya que es equivalente a subir las fuerzas de tensión en el sistema de postensado.

5.9.3 Definición de la acción térmica

De las múltiples evoluciones de la relación presión-temperatura que pueden producirse en el edificio de contención como consecuencia de un accidente con daño al núcleo, se ha seleccionado la representada en las Figuras 5.23(a) y (b), obtenida mediante simulación en el ordenador (Fauske & Asociantes 1990).

Los perfiles de temperatura a través del espesor de la pared de hormigón en función del tiempo se han calculado resolviendo la ecuación de conducción transitoria del calor en geometría cilíndrica. Dichos perfiles se han aplicado a los elementos finitos de la pared cilíndrica y de la cúpula, considerando la temperatura constante e igual a la exterior en los elementos que representan los contrafuertes.

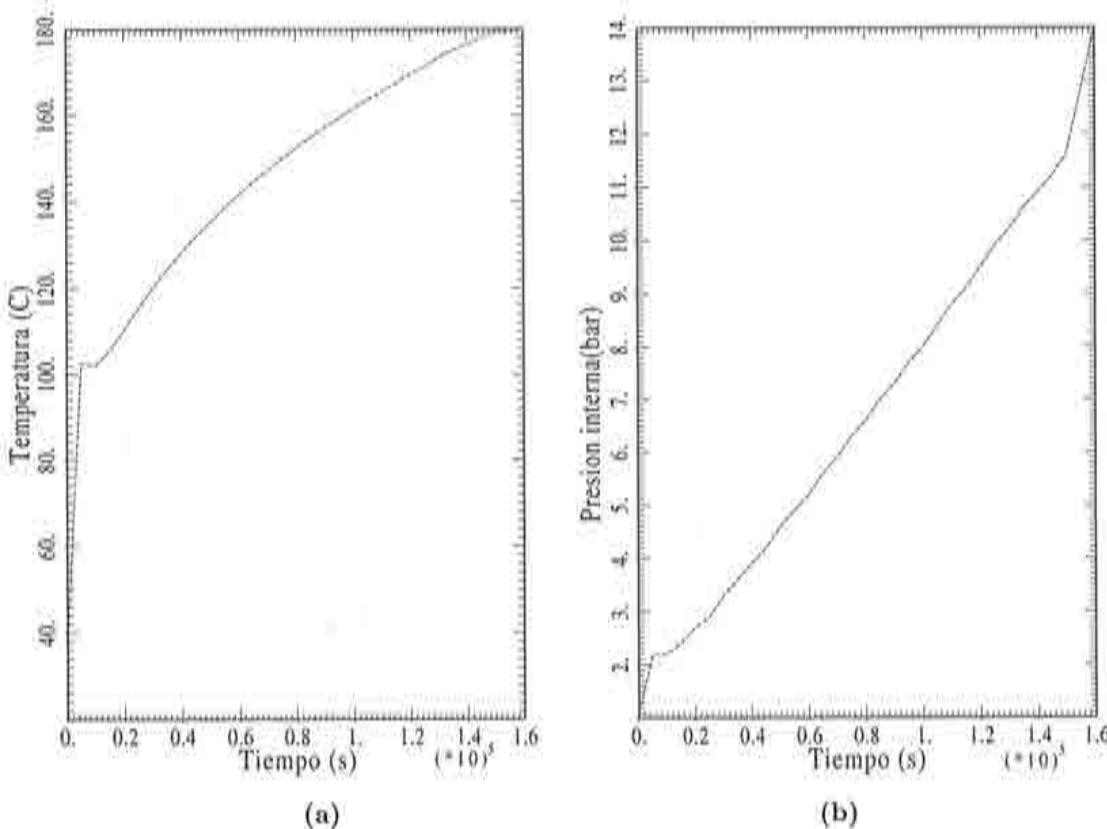


Figura 5.23 Curvas presión-temperatura debidas a un accidente simulado.
(a) Evolución de la temperatura, (b) Evolución de la presión.

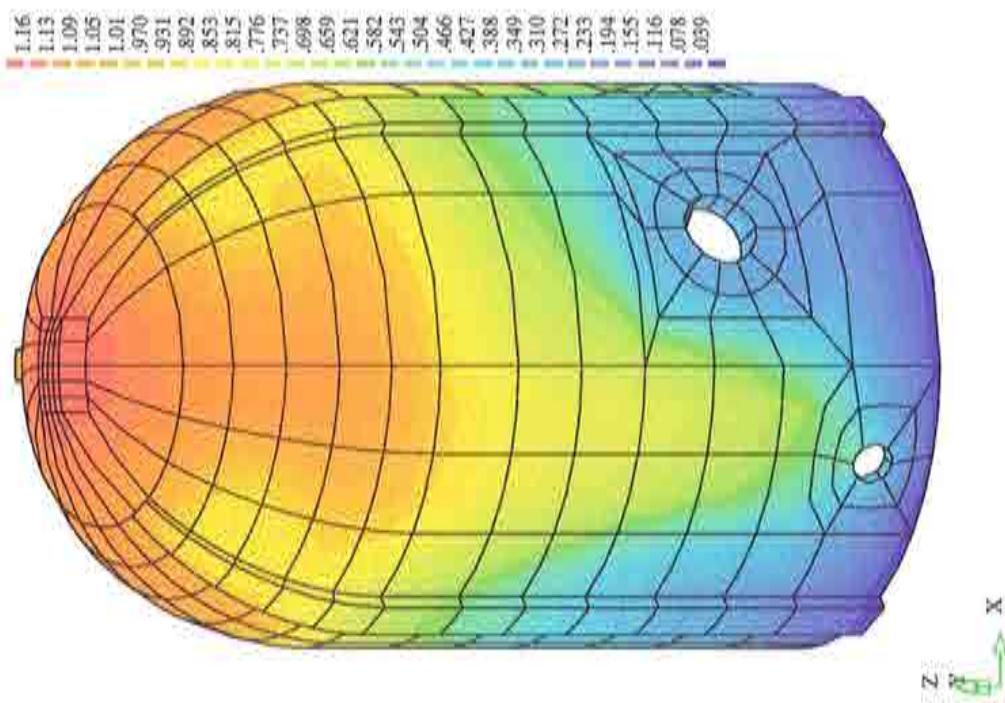
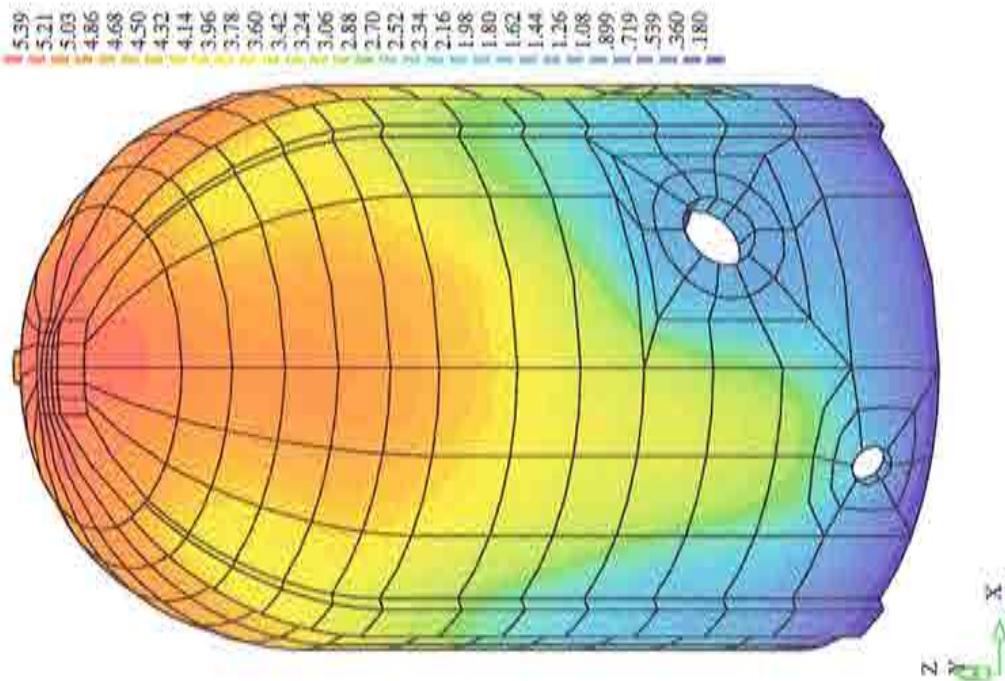
(a) 1.1 kg/cm^2 y 102°C .(b) 6.6 kg/cm^2 y 160°C .

Figura 5.24ab Contornos de igual desplazamiento para distintas fases del proceso de incremento de la presión interna y temperatura.

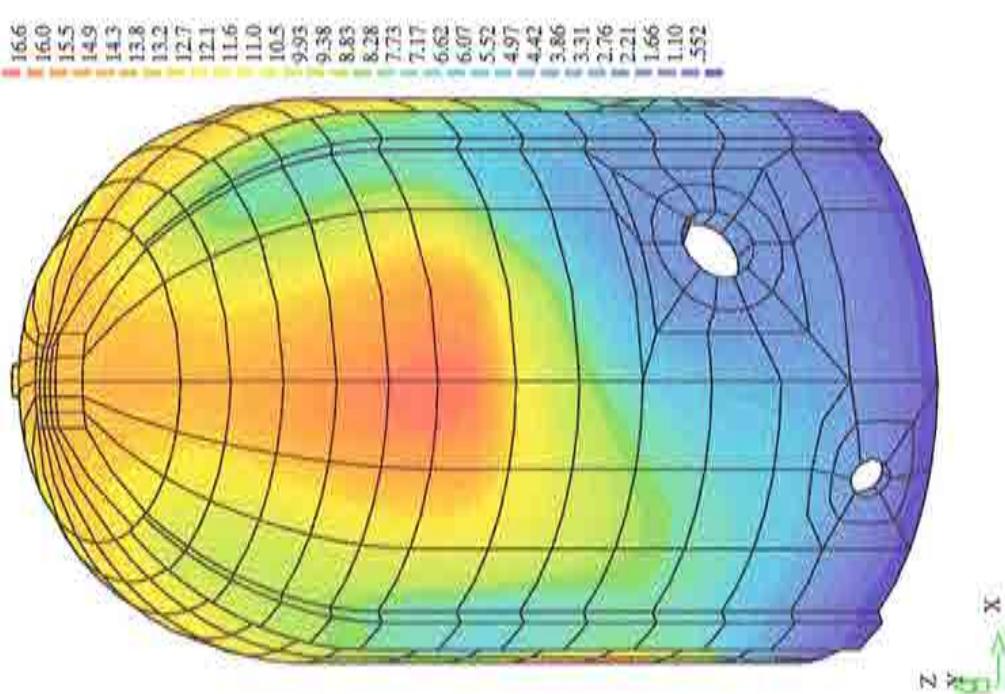
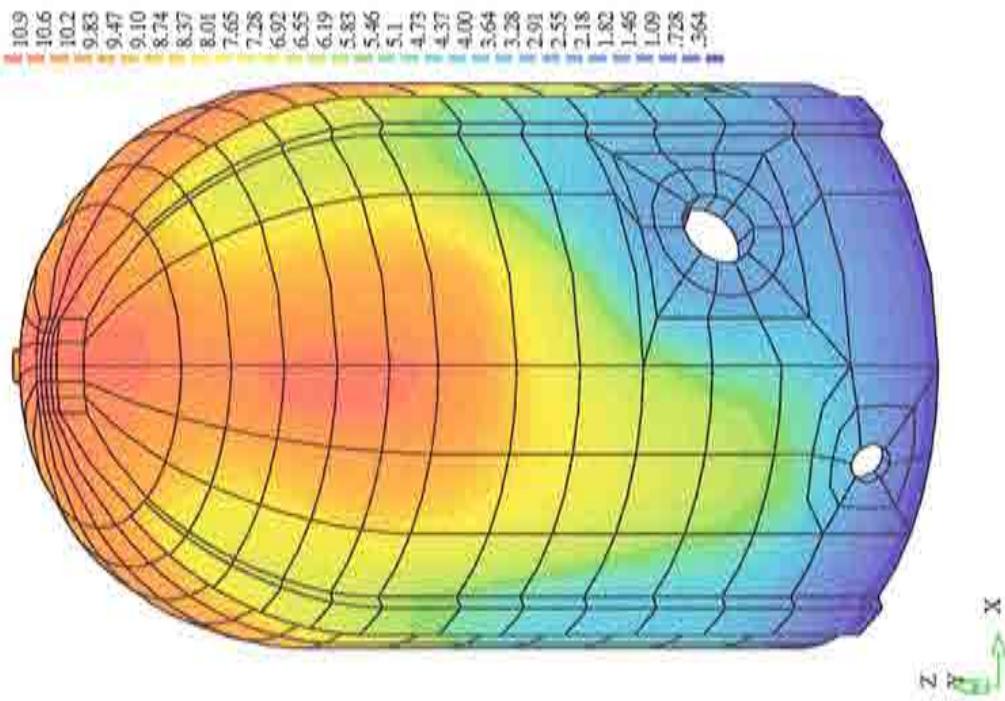
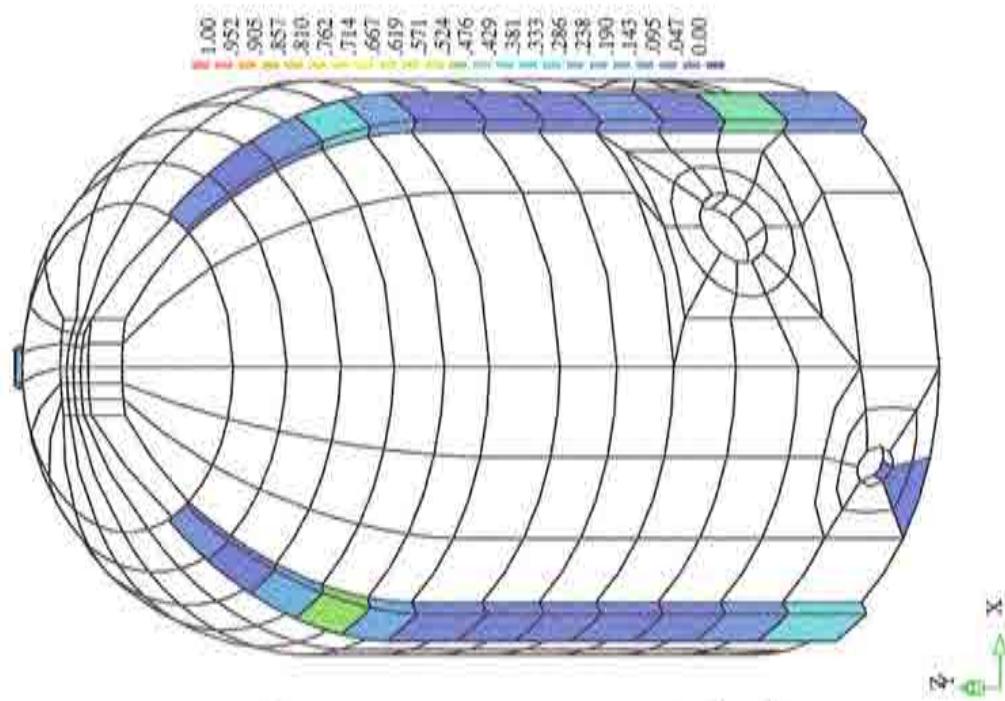
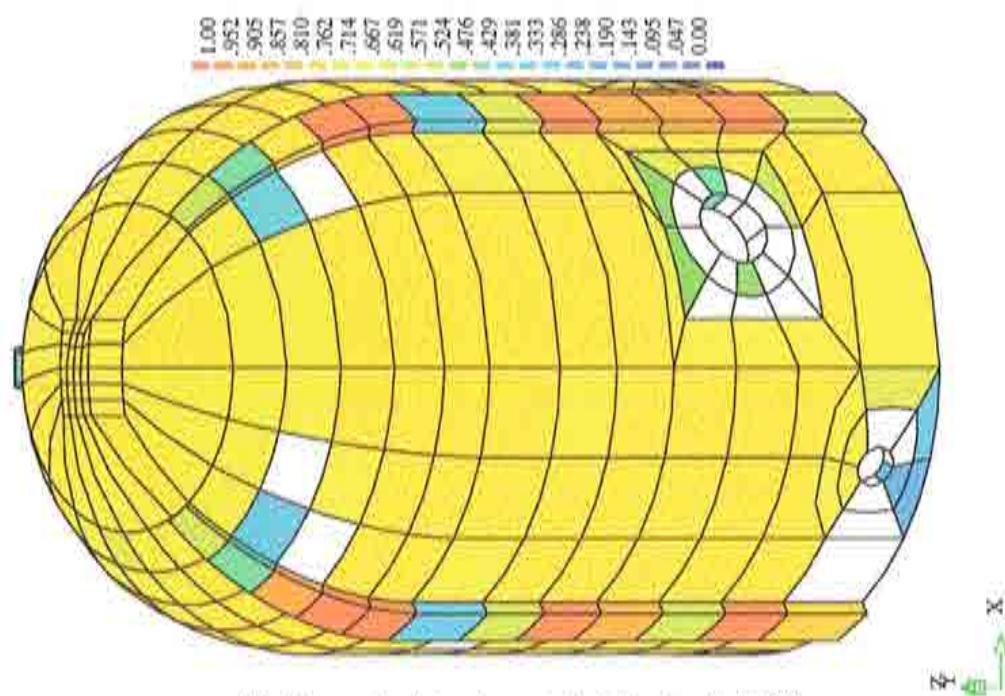


Figura 5.24cd Contornos de igual desplazamiento para distintas fases del proceso de incremento de la presión interna y temperatura.



(a) Mapas de daño elemental, 0.0 kg/cm^2 , 38°C .



(b) Mapas de daño elemental, 2.8 kg/cm^2 , 129°C .

Figura 5.25ab Proceso de degradación del hormigón y de rotura del acero que constituye la armadura del edificio. (Los colores indican nivel de daño)

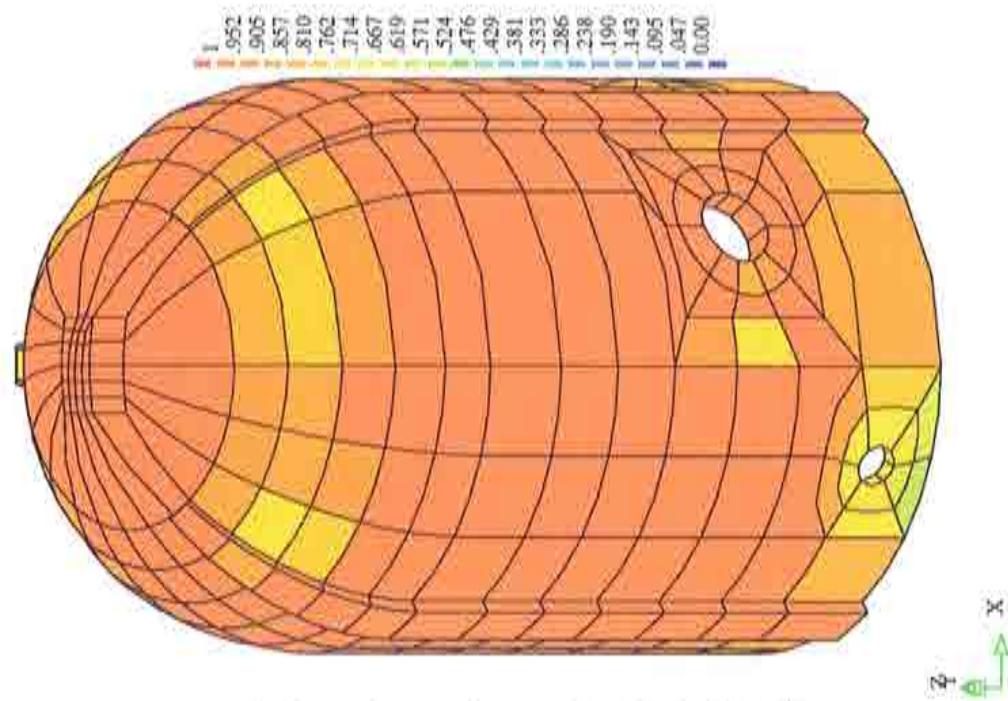
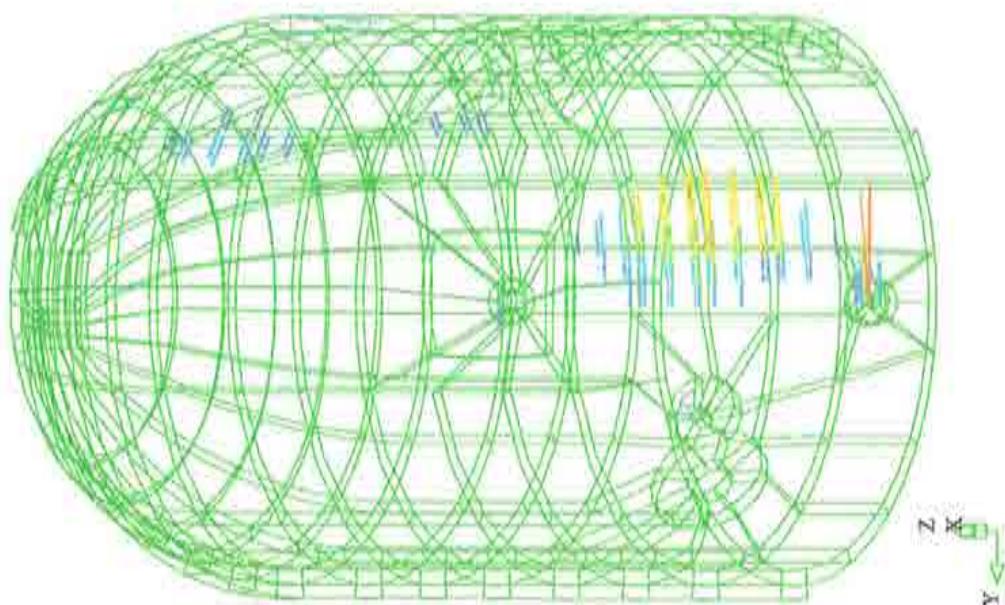
(c) Mapas de daño elemental, 13.4 kg/cm^2 , 180°C .(d) Rotura acero 13.4 kg/cm^2 , 180°C .

Figura 5.25cd Proceso de degradación del hormigón y de rotura del acero que constituye la armadura del edificio. (Los colores indican nivel de daño)

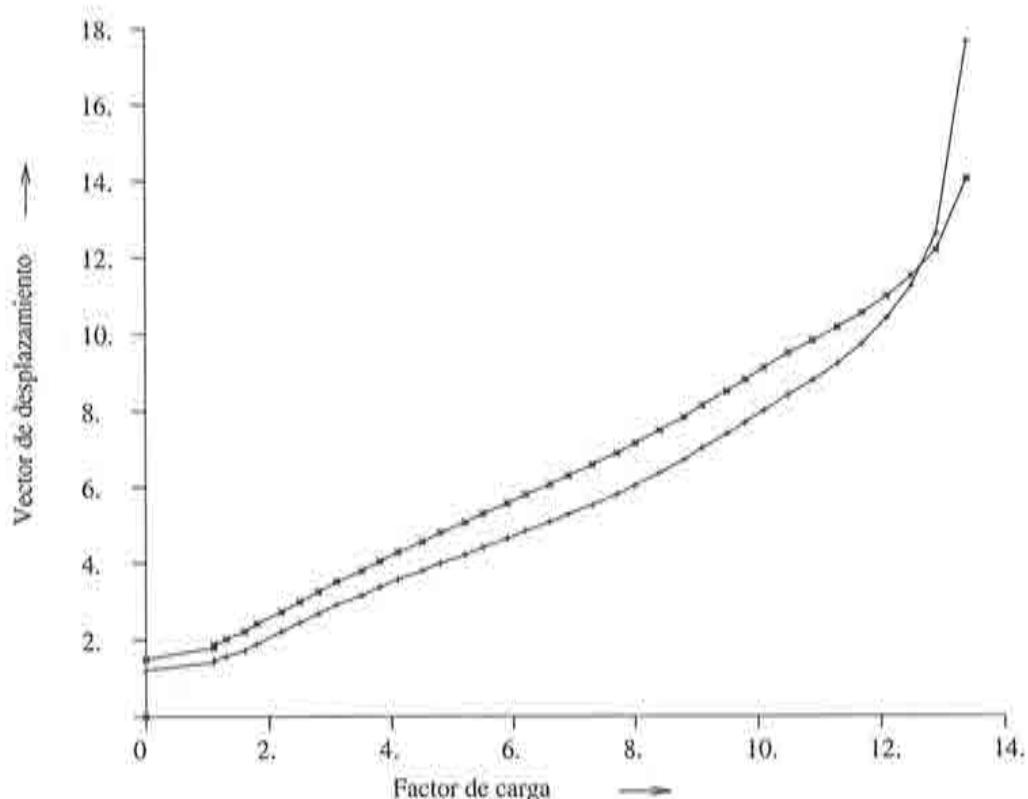


Figura 5.26 Efecto de la temperatura. Diagramas desplazamiento-presión para el punto de mayor desplazamiento y el punto más alto de la estructura.

5.9.4 Resultados

Se describen a continuación algunos de los resultados obtenidos al considerar como acciones sobre el modelo sin losa la presión interior y la temperatura, tal como vienen dadas en las Figuras 5.23(a) y (b).

En las Figuras 5.24(a)-(d) pueden verse representaciones mediante contornos de igual desplazamiento para distintas fases del proceso de carga. Aspectos de la historia de la degradación del hormigón estructural pueden verse en las Figuras 5.25(a)-(c), mientras que el estado de la armadura en el momento del fallo se muestra en la Figura 5.25(d). La presión de fallo es en este caso de 13.4 kg/cm^2 , superior en 2.3 kg/cm^2 a la del mismo modelo pero sin carga térmica. Sin embargo, la localización del fallo se mantiene en la misma posición. Finalmente, se han incluido diagramas desplazamiento-presión para el punto de mayor desplazamiento y el punto más alto de la estructura (ver la Figura 5.26).

A partir de los resultados numéricos obtenidos, se deduce que en presencia de un gradiente de temperatura en la pared del edificio aumenta la presión de fallo de la contención. Esto puede justificarse analizando un anillo circular de hormigón armado sometido a un gradiente térmico (incremento de temperatura interior) y observando que en la parte interior del anillo se producen compresiones y en la exterior tracciones, pero el efecto neto a través del espesor es de compresión sobre el anillo. En el análisis del edificio de contención este efecto de compresión neta produce un cierto retraso en la aparición de la fisuración en el hormigón y, por tanto, un ligero aumento en la presión de fallo. Además de esto, en los análisis realizados no se observa ningún impacto negativo de la carga térmica sobre el comportamiento estructural del edificio. A pesar de todo esto, las incertidumbres en el comportamiento termo-mecánico del hormigón, junto con las de la modelización, aconsejan no considerar este aumento de presión de fallo en el análisis probabilista.

5.10 ESTUDIO PROBABILISTA DE LA PRESIÓN DE FALLO

El objetivo del análisis probabilista es el de determinar lo que se denomina *curva de fragilidad* del edificio de contención de la central nuclear (Cirauqui et al. 1994). Dicha curva define la probabilidad de fallo del edificio en función de la presión interior y , en realidad, es la integral de la función de densidad de probabilidad de la variable presión de fallo. El proceso que se sigue para obtener la curva de fragilidad corresponde al *Método de Montecarlo*. Aplicar dicho método significa simular, mediante un método numérico determinista, la presión de fallo de la contención para un gran número de experimentos repetitivos a partir de datos de entrada generados de manera aleatoria, construir el histograma de los resultados de presión de fallo y buscar la distribución de probabilidad que se le ajuste (Benjamin y Cornell 1970). La curva de fragilidad es la integral de la ley de distribución ajustada.

El proceso de simulación comienza con la selección de aquellos n parámetros ($x_i, i = 1, 2, \dots, n$) que mayor influencia tienen en la presión de fallo p_f del edificio. Tanto la presión de fallo como el conjunto de parámetros x_i son tratados como variables aleatorias. Sin embargo, la expresión

$$p_f = f(x_i), i = 1, 2, \dots, n \quad (5.3)$$

no representa una función analítica, sino que describe la relación correspondiente al modelo de cálculo numérico determinista descrito en el Capítulo 2.

Los sucesivos pasos del proceso de cálculo de la curva de fragilidad del edificio de contención son los siguientes:

- a) Seleccionar todas las variables que se deben incluir en el cálculo determinista de la presión de fallo, es decir, establecer los parámetros x_i .
- b) A dichas variables se les suponen incertidumbres inherentes a cualquier modelo estructural y se les atribuye una distribución de probabilidad adecuada, bien basada en resultados de una muestra experimental de dicha variable, bien basada en datos bibliográficos. Nótese que generalmente la distribución de las variables es normal.
- c) Para cada una de las variables aleatorias se genera un conjunto de valores de acuerdo con la distribución de probabilidad asignada.
- d) Se generan conjuntos de datos de entrada, seleccionando un valor numérico de cada variable y se calcula la presión de fallo p_t del edificio de contención mediante el procedimiento determinista para cada uno de los conjuntos de datos. Se obtiene, de esta manera, una muestra de la variable aleatoria presión de fallo.
- e) Se determina el histograma de la presión de fallo y se obtiene la función de distribución de probabilidad que se le ajuste. Finalmente, la integral de dicha función es la curva de fragilidad buscada.

En el modelo de cálculo utilizado en determinar la presión de fallo del edificio de contención se han incluido 18 variables aleatorias y, para cada una de ellas, se han generado 100 muestras. Dichas variables han sido las siguientes:

Variables relacionadas con los tendones

- Módulo de elasticidad del acero de los tendones, valor medio $m = 20391 \text{ kg/mm}^2$, desviación estandar $\sigma = 119.62 \text{ kg/mm}^2$, Figura 5.27(a).
- Sección equivalente del cordón de los tendones, $m = 90.0075 \text{ mm}^2$, $\sigma = 0.3634 \text{ mm}^2$, Figura 5.27(b).
- Tensión de fluencia del acero del tendón, $m = 190.67 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma = 3.44507 \text{ kg/mm}^2$, Figura 5.27(c).
- Parámetro de endurecimiento del tendón, $m = 262.63 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma = 139.428 \text{ kg/mm}^2$, Figura 5.27(d).
- Fuerza de tesado de los tendones horizontales del cilindro (1 a 64), $m = 745.31\text{T}$, $\sigma = 14.90\text{T}$, Figura 5.27(e).
- Fuerza de tesado de los tendones horizontales del cilindro (65 a 110), $m = 731.25\text{T}$, $\sigma = 14.625\text{T}$, Figura 5.27(f).
- Fuerza de tesado de los tendones horizontales de la cúpula (111-132), $m = 702.12 \text{ T}$, $\sigma = 14.062 \text{ T}$, Figura 5.27(g).
- Fuerza de tesado de los tendones verticales, $m = 549.0 \text{ T}$, $\sigma = 11.88 \text{ T}$, Figura 5.27(h).

- Penetración de cuña, $m = 8\text{mm}$, $\sigma = 1.2\text{mm}$, Figura 5.27(i).
- Coeficiente de rozamiento, $m = 0.128$, $\sigma = 0.008576$, Figura 5.28(a).
- Coeficiente de ondulación, $m = 0.00117 \text{ m}^{-1}$, $\sigma = 0.000234\text{m}^{-1}$, Figura 5.28(b).
- Pérdidas diferidas del pretensado, Figura 5.28(c). Dichas pérdidas vienen dadas por la diferencia ΔP entre la fuerza original en el tendón, P_0 , tras las pérdidas instantáneas y la fuerza en el tendón, P , tras las pérdidas diferidas. Por razones de simplicidad del cálculo, la aleatoriedad de ΔP se ha incluido a través de una variable α en la siguiente forma:

$$\Delta P = \alpha \times (P_0 - P) \quad (5.4)$$

Para la variable α se ha considerado $m=1$ y $\sigma=0.2$.

- Acortamiento elástico del hormigón para tendones horizontales, $m = 13.2\text{T}$, $\sigma = 1.32\text{T}$, Figura 5.28(d).
- Acortamiento elástico del hormigón para tendones verticales, $m = 5.7\text{T}$, $\sigma = 0.57\text{T}$, Figura 5.28(e).

Variables relacionadas con las armaduras

- Módulo de elasticidad de la armadura, $m = 21000 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma = 1050 \text{ kg/mm}^2$, Figura 5.28(f).
- Tensión de fluencia de la armadura, $m = 50.234 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma = 2.437 \text{ kg/mm}^2$, Figura 5.28(g).
- Parámetro de endurecimiento de la armadura, $m = 3500 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma = 700 \text{ kg/mm}^2$, Figura 5.28(h).

Variables relacionadas con el hormigón

- Módulo de elasticidad del hormigón, $m = 411000 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma = 41100 \text{ kg/cm}^2$, Figura 5.28(i).

Para todas estas variables aleatorias se han considerado funciones de distribución de probabilidad normales, salvo para el endurecimiento del acero de los tendones, ya que los resultados experimentales disponibles para esta última variable se ajustan mejor a una función lognormal.

Los 100 conjuntos de 18 valores obtenidos, tomando cada una de las variables aleatorias en el mismo orden en que han sido generadas, han constituido los datos de entrada para el ensayo numérico llevado a cabo. La presión de fallo p_f obtenida mediante cada uno de estos 100 ensayos numéricos constituye una muestra de la variable aleatoria presión de fallo del edificio. En la Figura 5.29 están recogidos los 100 resultados p_f en forma de histograma. Tal como

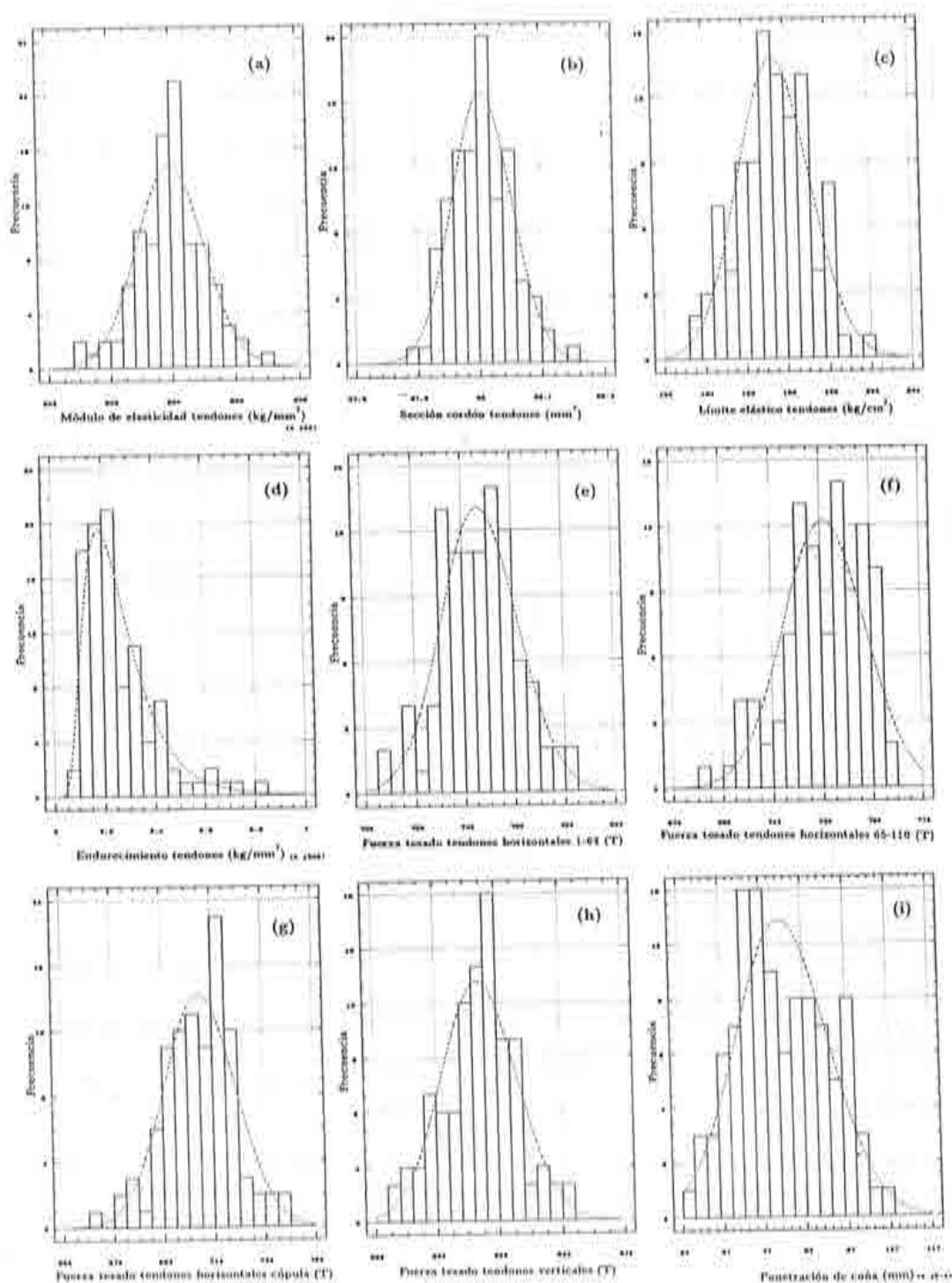


Figura 5.27 Histogramas de las variables aleatorias generadas del modelo de cálculo.

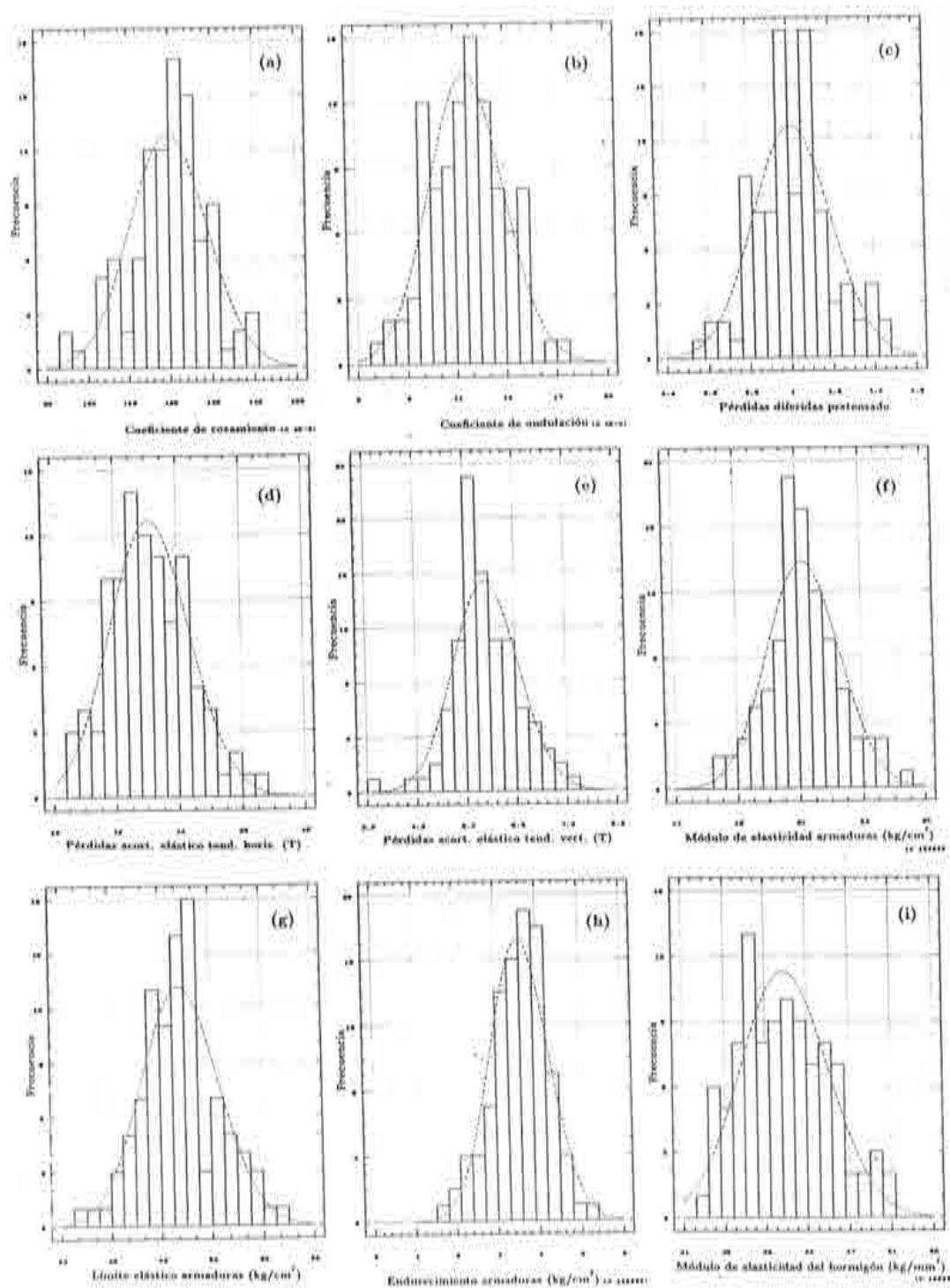


Figura 5.28 Histogramas de las variables aleatorias generadas del modelo de cálculo.

puede verse, el histograma obtenido parece, a simple vista, ajustarse a una distribución normal, lo que está de acuerdo con el *teorema central del límite*. Sin embargo, esta observación acerca del tipo de distribución ha sido confirmada de una manera rigurosa, realizando pruebas de contraste del ajuste de χ^2 de Kolmogorov-Smirnov (Benjamin y Cornell 1970; Karian y Dudewicz 1991). El valor medio obtenido para la presión de fallo ha sido de 11.087 kg/cm^2 con una desviación estandar de 0.256887 kg/cm^2 . Para un nivel de confianza del 99%, el intervalo de confianza de la media es $[11.0195, 11.1545]$, mientras que el intervalo de confianza de la desviación estandar es $[0.216788, 0.3134699]$. La curva de fragilidad se ha definido de forma conservadora sobre la base de la distribución de probabilidad correspondiente al extremo inferior del intervalo de confianza de la media ($m = 11.0195 \text{ kg/cm}^2$) y al extremo superior del intervalo de confianza de la desviación estandar ($\sigma = 0.3134699 \text{ kg/cm}^2$). En la Figura 5.30 se representa la función de densidad de distribución de probabilidad normal correspondiente a estos últimos valores m y σ .

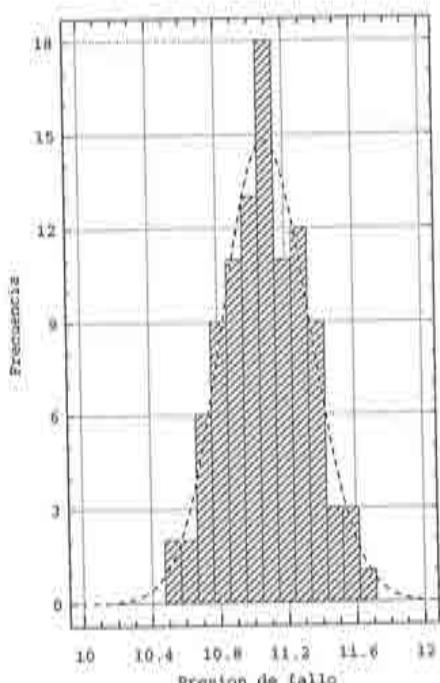


Figura 5.29 Histograma de la presión de fallo simulada y la función de densidad de distribución de probabilidad ajustada.

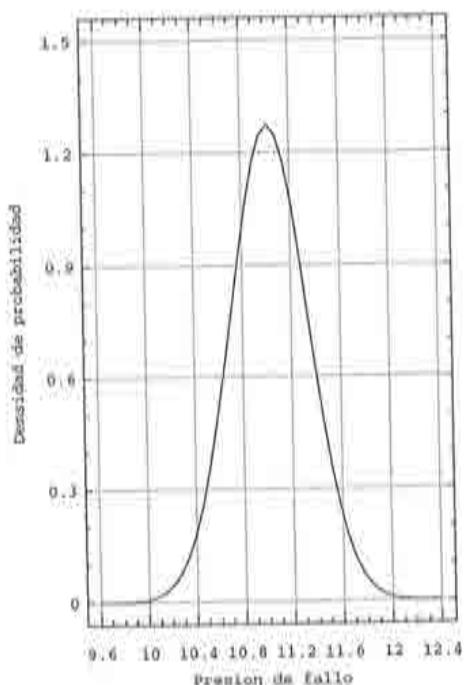


Figura 5.30 Función de densidad de distribución de probabilidad normal adoptada para la presión de fallo.

En la Figura 5.31 puede verse la integral de la función de densidad de la Figura 5.30, es decir, la curva de fragilidad del edificio de contención. Se ha

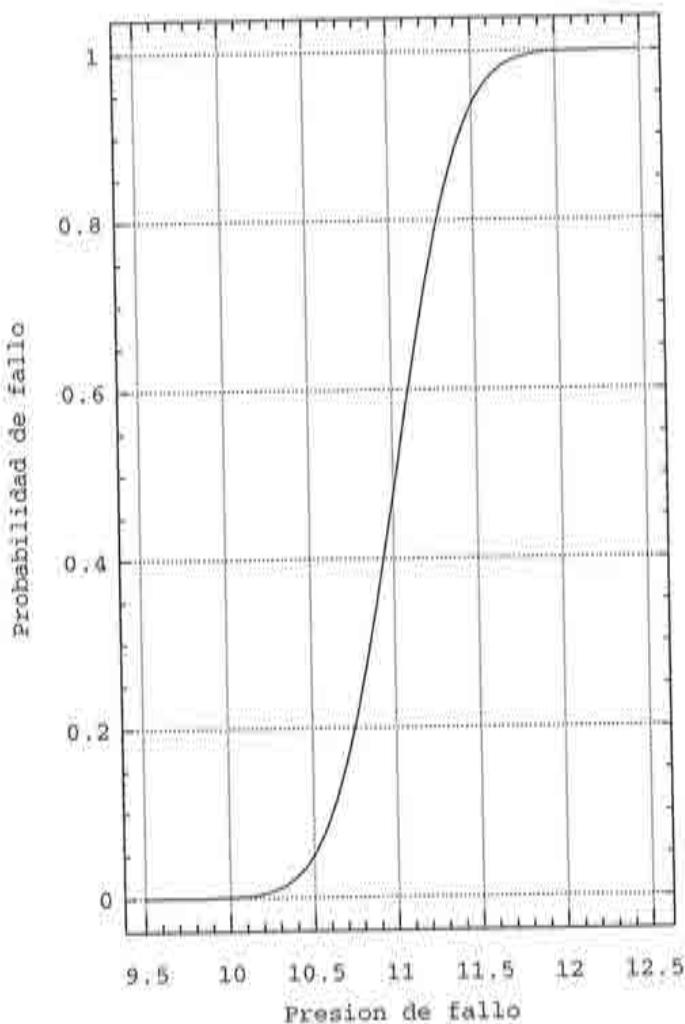


Figura 5.31 Curva de fragilidad del edificio de contención.

adoptado como presión de fallo del edificio la correspondiente a una probabilidad de fallo de 5%, por lo cual, de acuerdo con la curva de la Figura 5.31, la presión de fallo se ha establecido en 10.5 kg/cm^2 . Dado que la presión de diseño ha sido de 3.78 kg/cm^2 , se ha obtenido un factor de seguridad de 2.78.

El índice global de daño desarrollado en la monografía ha demostrado ser una herramienta eficiente para la evaluación de la presión de fallo y de la contribución de las distintas zonas a la capacidad resistente del edificio de contención de una central nuclear PWR-W tres lazos. El modelo tridimensional incluye todos aquellos aspectos que deben contemplarse para llevar a cabo la simulación numérica de los correspondientes escenarios de accidente.

ANEXO 5-1

SISTEMA DE POSTESADO EN UN EDIFICIO DE CONTENCIÓN

1 INTRODUCCIÓN

El sistema de pretensado del edificio de contención consta de tres familias de tendones (Roca y Hanganu 1994):

- 1) Tendones circunferenciales en la pared cilíndrica. Esta familia está formada por tendones cuya longitud abarca 120π de circunferencia, dispuestos de forma alternada, y anclados en los contrafuertes del edificio, igualmente situados a 120π ; contiene 124 tendones (2 de ellos de vigilancia) separados a 37.5 cm.
- 2) Una segunda familia de tendones circunferenciales embebidos en la cúpula, cuya longitud abarca también un ángulo de 120π , y anclados en la prolongación de los contrafuertes en aquélla. Consta de 27 tendones, situados en la porción de cúpula comprendida entre el arranque en la pared cilíndrica hasta la sección horizontal situada a 45π de altura con respecto a este arranque. De esta forma, el casquete comprendido entre 45π y 90π se halla desprovisto de pretensado circunferencial.
- 3) La tercera familia consta de tendones verticales, uniformemente distribuidos en la pared cilíndrica, y que en la cúpula se descomponen en dos haces ortogonales de tendones paralelos entre sí, formando una trama regular. Existen 160 tendones de este tipo separados (en la pared cilíndrica) a $2,25\pi$.

Como se ha mencionado en el Capítulo 5, la presencia de los tendones posteados produce sobre la estructura el efecto de una presión exterior que tiende a contrarrestar la presión interior que se produciría en caso de accidente en la central. Habitualmente dicha presión exterior se calcula partiendo de la hipótesis de que se mantiene su simetría axial y su normalidad a la superficie del edificio de contención. El estudio presente va más allá, considerándose el estudio de

cada tendón por separado con sus características particulares, obteniéndose de esta manera las presiones equivalentes exactas en cada punto y aplicándolas exactamente en la posición real del tendón dentro de la pared del edificio. Esto hace que desaparezca toda simetría y normalidad de las presiones equivalentes, lo que se corresponde con la situación que se da en la realidad. Estos aspectos cobran mucha importancia si se piensa que la capacidad final de la estructura de aguantar la presión interior depende fundamentalmente del efecto que tiene el postesado. Asimismo, un desequilibrio o una variación aparentemente sin importancia en las presiones exteriores puede producir un debilitamiento importante de la estructura dado que la presión interior sí que será siempre uniforme y normal a la superficie de la pared.

El cálculo práctico de las presiones equivalentes al postesado plantea dos problemas diferentes: ¿cuál es la fuerza de tensión en el cable en cada punto de su trazado y qué valor tiene el vector de presión equivalente, es decir cuáles son su módulo y su dirección? Al programa de cálculo se le han incluido rutinas específicas que tratan estas particularidades del sistema de postesado del edificio de contención de la central estudiada.

2 EVALUACIÓN DE LAS PÉRDIDAS DE FUERZA DE PRETENSADO

Se ha tenido especial cuidado en la correcta reproducción del cálculo de pérdidas a partir de los datos básicos de proyecto. La formulación utilizada para la evaluación de las pérdidas es la que define la Instrucción EP-93, que a su vez coincide fundamentalmente con lo establecido en versiones anteriores de la misma.

Un primer cálculo ha sido realizado a partir de los datos básicos de proyecto en lo relativo a coeficientes de rozamiento por curvatura (μ) y de rozamiento parásito (K), y constantes de relajación del acero ($\rho(t)$) proporcionados por el documento de "Proyecto de suministro e instalación del sistema de postensado de la estructura del edificio de contención", tomos 5-1 y 5-2 sobre "Esfuerzos y alargamientos en cables", memorandum 13912 de enero de 1986.

Para el resto de parámetros del problema se han supuesto los valores medios definidos por la norma EP-93. De esta forma se ha conseguido reproducir con gran precisión las previsiones de proyecto en lo relativo a pérdidas de pretensado en los distintos tendones, tanto para pérdidas instantáneas como para pérdidas diferidas a distitas edades.

El cálculo de pérdidas diferidas (ΔP_{dif}) ha sido llevado a cabo utilizando la siguiente expresión (Roca y Hanganu 1994):

$$\Delta P_{dif} = a A_p + b P_0$$

en la que las constantes a y b dependen de los parámetros de fluencia, retracción del hormigón y relajación del acero ademas de ciertas cantidades geométricas. P_0 es el valor característico inicial de la fuerza de pretensado y A_p es la sección de las armaduras activas. Tal expresión se justifica a continuación.

Las expresiones que permiten evaluar las pérdidas diferidas de retracción (ΔP_4), fluencia (ΔP_5) y relajación (ΔP_6) son respectivamente

$$\Delta P_4 = \varepsilon_{rt} E_p A_p$$

$$\Delta P_5 = \phi_t \sigma_{cgp} n A_p$$

$$\Delta P_6 = \rho_t [P_0 - 2\Delta P_4 - 2\Delta P_5]$$

donde ϕ_t , ε_{rt} y ρ_t refieren los coeficientes de fluencia, retracción y relajación a la edad t de cálculo. $n = E_p/E_c$ es el coeficiente de equivalencia entre los módulos de deformación del acero y del hormigón. σ_{cgp} es la tensión en el hormigón, a nivel del centro de gravedad de las armaduras activas, producida por el valor característico inicial de la fuerza de pretensado y la totalidad de las cargas permanentes. Esta última cantidad puede descomponerse en la contribución de las cargas permanentes σ_{cg} y la contribución del pretensado, σ_{cp0} , obteniéndose la expresión

$$\sigma_{cgp} = \sigma_{cg} + \sigma_{cp0} = \sigma_{cg} + (\div 1A + \div e^2 I) P_0$$

Las pérdidas diferidas totales son:

$$\Delta P_{dif} = \Delta P_4 + \Delta P_5 + \Delta P_6$$

Las anteriores ecuaciones pueden reorganizarse formando la ecuación inicial, donde

$$a = (\varepsilon_{rt} E_p + \phi_t \sigma_{cg} n)(1 - 2\rho_t)$$

y

$$b = \phi_t n (1 - 2\rho_t) (\div 1A + \div e^2 I) + \rho_t$$

Este conjunto de cálculos ha sido automatizado mediante un procedimiento en el que la variación de la fuerza, con la incidencia de todas las pérdidas, se calcula

de forma exacta en todos los puntos de integración del modelo de elementos finitos a partir de identificar las constantes a y b utilizando los valores de las fuerzas en los cables a 0 y 40 años suministradas por el constructor. En este procedimiento se procede evaluando por separado la contribución a la presión equivalente aportada por cada familia de tendones, considerando su geometría, su separación, y el cálculo particularizado de las pérdidas.

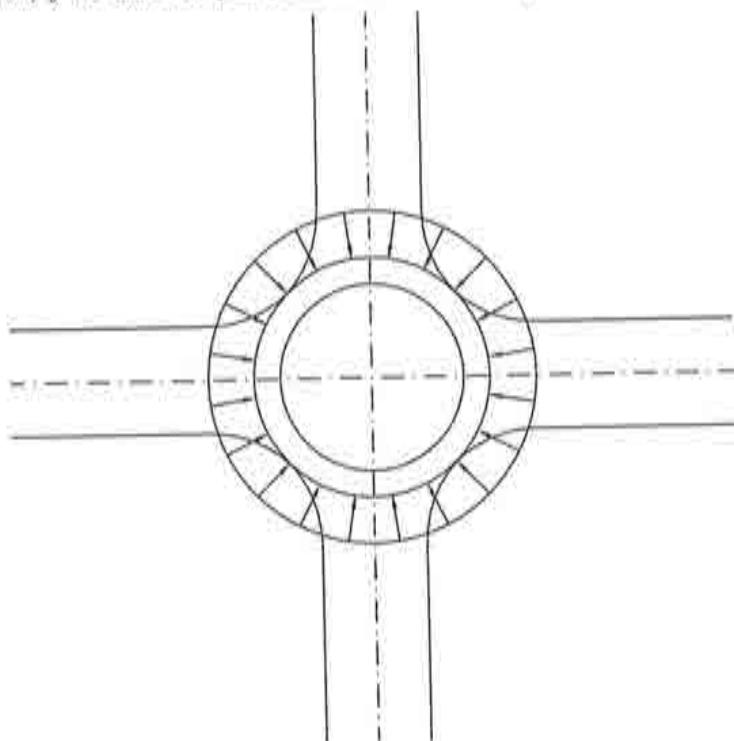


Figura 5-1.1 Modelización aproximada de las fuerzas producidas por el pretensado alrededor de una abertura.

En las zonas de influencia de los huecos de compuerta, tanto los tendones circumferenciales como los tendones meridionales experimentan importantes desviaciones en su trazado que en general implican un muy sensible aumento de su curvatura. Como consecuencia, el esquema de fuerzas de pretensado queda localmente muy alterado. En promedio, aparecen unas fuerzas concéntricas alrededor del hueco para las que, de forma aproximada, puede suponerse una distribución en corona circular concéntrica con aquél, y situada a media distancia de la banda de tendones desviados (Figura 5-1.1).

Esta aproximación ha sido aceptada para el presente estudio, habida cuenta de que el resultado buscado se refiere a la incidencia de estas alteraciones en el comportamiento global de la estructura.

3 Cálculo de las fuerzas de tensión

En la evaluación de la fuerza de tensión intervienen los siguientes parámetros (Roca y Hanganu 1994):

- la fuerza P_o aplicada en el anclaje al postesar, dada por el constructor;
- la pérdida por penetración de cuña Δa , que es un dato de proyecto;
- las pérdidas elásticas instantáneas medias ΔP , también subministradas por el constructor;
- las pérdidas por rozamiento, caracterizadas por los coeficientes de ondulación κ y de rozamiento μ ;
- las pérdidas diferidas función del tiempo, que se caracterizan mediante los parámetros a y b .

3.1 Cables horizontales

La Figura 5-1.1 presenta el diagrama de la fuerza de tensión en el cable en función de la distancia desde el anclaje para un tendón cualquiera, antes (1-2-3) y después (5-4-3) de la penetración de cuña. Desde el punto 3 hacia el centro del tendón las dos situaciones coinciden. Se distingue un primer tramo de longitud l , que se conoce a partir de consideraciones geométricas, en el cual el tendón es recto. Esta longitud se calcula desde el punto de anclaje hasta el punto donde el tendón empieza a curvarse en contacto con el cilindro. En este tramo actúan sólo las pérdidas por ondulación. Asimismo puede calcularse el ángulo θ_b que le corresponde a dicha longitud. El segundo tramo es de longitud desconocida s y corresponde a la distancia perturbada por la penetración de cuña.

La ley general de la fuerza de tensión en un cable viene dada por la siguiente relación:

$$P(x) = P_o e^{-(\kappa x + \mu \theta)} \quad (5-1.1)$$

donde x es la longitud del cable contenida entre el anclaje y el punto corriente y θ es el ángulo girado por el tendón desde el anclaje hasta el punto corriente.

Para cada punto de coordenadas (x, y, z) perteneciente a un tendón horizontal, se calculan:

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ el radio en ese punto del tendon;
- $\theta = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}; \theta \in [-180^\circ, 180^\circ]$; si $x < 0$, entonces $\theta = \theta + 360^\circ$;
- $\theta' = \theta - 120^\circ * [\theta / 120^\circ]$, donde $[]$ significa parte entera. θ' es el ángulo contenido en el intervalo $[0^\circ, 120^\circ]$ que describirá la posición del punto analizado. Aunque cada tendón horizontal abarca 240° , solamente 120° son suficientes para describir completamente la variación de la tensión en el cable (Figura 2).

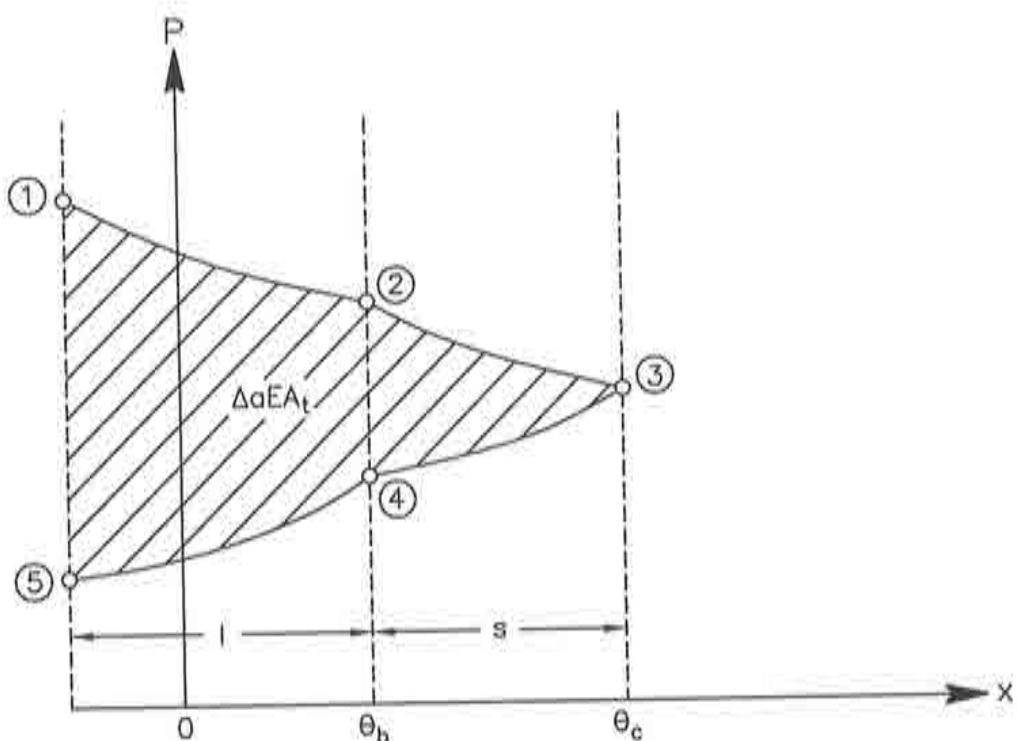


Figura 5-1.2 Efecto de la penetración de cuña sobre la zona adyacente.

Ahora se puede escribir la condición de equilibrio de trabajo mecánico que define la longitud s como sigue:

$$\int_0^l P_1 e^{-\kappa x} dx + \int_0^s P_2 e^{-\alpha x} dx + \int_s^0 P_3 e^{-\alpha x} dx + \int_l^0 P_4 e^{-\kappa x} dx = \Delta a EA_t \quad (5-1.2)$$

donde P_i son las fuerzas correspondientes a los puntos $i = 1, 2, 3, 4$ de la Figura 1, $\alpha = \kappa + \mu/r$, E es el módulo de elasticidad del tendón y A_t el área de la sección del tendon.

Introduciendo las notaciones $u = e^{-\kappa l}$ y $v = e^{-\alpha s}$, se obtiene: $P_1 = P_o$, $P_2 = P_o u$, $P_3 = P_o v$ y $P_4 = P_o uv^2$, con lo que la relación (1) se transforma en

$$P_o \frac{1-u}{\kappa} + P_o u \frac{1-v}{\alpha} - P_o uv \frac{1-v}{\alpha} - P_o uv^2 \frac{1-u}{\kappa} = \Delta a EA_t \quad (5-1.3)$$

$$\beta(1-u) + \gamma u(1-v) - \gamma uv(1-v) - \beta uv^2(1-u) = 1 \quad (5-1.4)$$

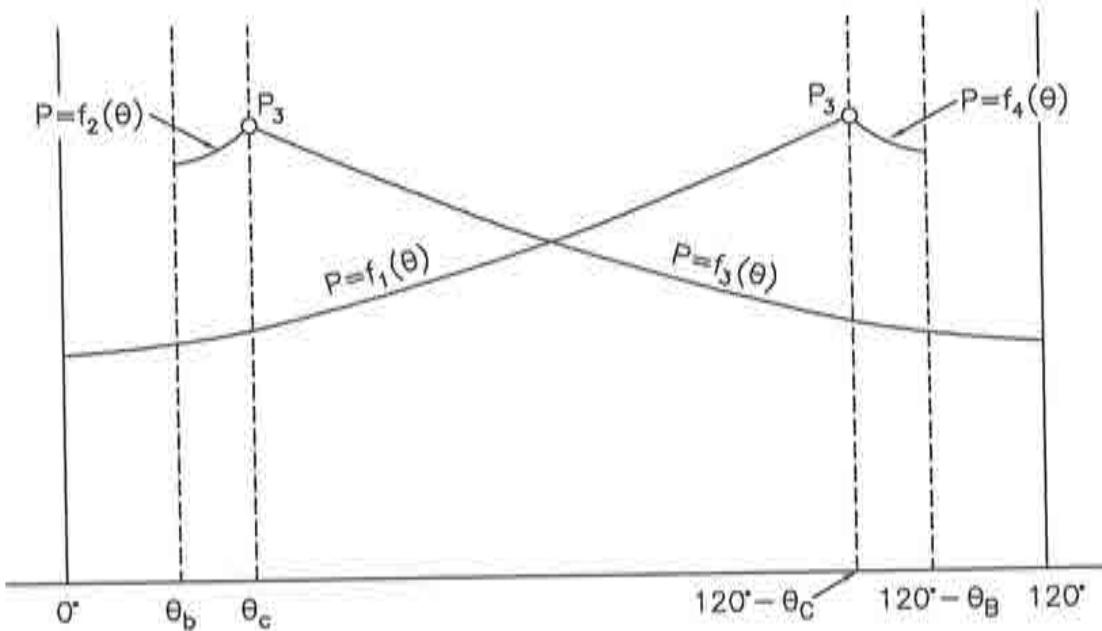


Figura 5-1.3 Distribución de fuerza de tensión en los dos cables representativos entre dos contrafuertes.

donde $\beta = \frac{P_0}{\kappa \Delta a E A_t}$ y $\gamma = \beta \kappa / \alpha$.

De la relación (5-1.3) puede despejarse v

$$v_{1,2} = \frac{\gamma u \pm \sqrt{(\gamma u)^2 - [\gamma u - \beta u(1-u)][\beta(1-u) + \gamma u - 1]}}{\gamma u - \beta u(1-u)} \quad (5-1.5)$$

Como s debe ser positivo, v tiene que ser menor que la unidad por lo cual sólo v_2 es solución válida. La longitud s se obtiene como

$$s = -\frac{1}{\alpha} \ln v \quad (5-1.6)$$

Ahora pueden conocerse analíticamente las ecuaciones f_1, f_2, f_3, f_4 de todos los tramos del desarrollo del tendón (Figura 5-1.3). Antes deben caracterizarse bien todos los parámetros involucrados. Estos son: $\alpha' = \alpha r$ y $\theta_c = \theta_b + s/r$. Con esto

$$\begin{aligned}
 f_1 &= P_3 e^{-\alpha'[(120^\circ - \theta_c) - \theta]} - \Delta P \\
 f_2 &= P_3 e^{-\alpha'(\theta_c - \theta)} - \Delta P \\
 f_3 &= P_3 e^{-\alpha'(\theta - \theta_c)} - \Delta P \\
 f_4 &= P_3 e^{-\alpha'[\theta - (120^\circ - \theta_c)]} - \Delta P
 \end{aligned} \tag{5-1.7}$$

Si se analiza el estado del tendón transcurrido un tiempo desde la instalación del sistema de postesado, se tienen que considerar las pérdidas diferidas correspondientes, lo que conduce a unas nuevas fuerzas de valor $f'_i = aAt + bf_i$, donde a, b son los parámetros de las pérdidas diferidas.

En función de la posición del punto analizado de la estructura, que se define a través del ángulo θ , hay cinco situaciones diferentes:

$$\begin{aligned}
 \theta \in [0^\circ, \theta_b] &\Rightarrow P = f'_1/3 \\
 \theta \in [\theta_b, \theta_c] &\Rightarrow P = (f'_1 + f'_2)/3 \\
 \theta \in [\theta_c, 120^\circ - \theta_c] &\Rightarrow P = (f'_1 + f'_3)/3 \\
 \theta \in [120^\circ - \theta_c, 120^\circ - \theta_b] &\Rightarrow P = (f'_3 + f'_4)/3 \\
 \theta \in [120^\circ - \theta_b, 120^\circ] &\Rightarrow P = f'_4/3
 \end{aligned} \tag{5-1.8}$$

donde P es la fuerza buscada de tensión media en el cable, que se obtiene dividiendo por 3 la suma de las fuerzas en los cables que se hallan en la posición analizada, dado que cada 3 cables horizontales dan 2 vueltas completas al cilindro.

3.2 Cables verticales

Los tendones verticales, a diferencia de los horizontales, tienen un tramo recto mucho mayor igual a la altura del cilindro más el espesor de la losa (46 metros). A continuación se estudiará el efecto de la penetración de cuña sobre un tendón de estas características.

En el caso hipotético de que dicho efecto no alcanzara la cúpula, la ecuación (5-1.2) toma la siguiente forma simplificada:

$$\int_0^l P_o e^{-\kappa x} dx + \int_l^a P_o u e^{-\kappa x} dx = \Delta a E At \tag{5-1.9}$$

o, utilizándose las mismas notaciones que en el apartado anterior,

$$\beta(1 - u) - \beta u(1 - u) = 1 \rightarrow u = 1 - 1/\sqrt{\beta} \rightarrow l = -\ln u / \kappa \tag{5-1.10}$$

Los valores de los parámetros son: $P_0 = 607.5 \text{ tf}$, $\kappa = 0.00117 \text{ m}^{-1}$, $\Delta a = 0.008 \text{ m}$, $E = 2.025 \cdot 10^7 \text{ tf/m}^2$ y $A_t = 44.415 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. Se obtiene $l = 32.424 \text{ m}$, valor que verifica la hipótesis hecha previamente.

En conclusión, la problemática en el caso de los tendones verticales se simplifica mucho debido al hecho que el efecto de la penetración de cuña no alcanza la altura de la cúpula, lo cual es equivalente a que no existiese a efectos prácticos.

Los tendones verticales interesan únicamente en la zona de la cúpula, que es donde actúan presionando hacia dentro la estructura. Se debe hacer distinción entre dos familias de cables verticales. Una primera familia se compone de cables cuyos planos se orientan en la dirección NS mientras la segunda se orienta hacia EO. Esto afecta sólo el cálculo del radio y del ángulo correspondiente según se considere el efecto de una u otra familia de cables.

Para cables orientados NS (dirección Y), $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ y $\theta = \arctg \frac{z}{y}$ mientras que para cables de orientación EO (dirección X), $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ y $\theta = \arctg \frac{z}{x}$. La base de la cúpula está en el plano $z = 0$. Si $\theta > 90^\circ$ entonces $\theta = 90^\circ - \theta$ por razones de simetría. Notándose además $\alpha = \kappa r + \mu$, se obtiene la expresión de la fuerza en el cable como

$$P = P_0 e^{-\kappa h - \alpha \theta} - \Delta P \quad (5-1.11)$$

donde h es la altura del tramo recto del cable, siendo la altura del cilindro más el espesor de la losa de cimentación. Si existen pérdidas diferidas se aplica la misma fórmula que en el caso de los tendones horizontales, $P' = aA_t + bP$.

Con esto queda explicado el proceso de obtención de las fuerzas existentes en los tendones hallados en cualquier zona de la estructura.

4. Cálculo de las presiones equivalentes

La presión ejercitada por los tendones sobre la estructura viene determinada por la posición de los planos de los tendones y de la distancia entre dichos planos. La posición del plano es importante debido al hecho de que el vector de presión generado siempre estará contenido en el plano del tendon y normal al mismo tendon. La distancia entre los planos determina la densidad de presión generada en la zona analizada. Unos planos alejados entre sí disminuirán la presión media ejercitada sobre el edificio.

Debido a estas características, se han tratado de manera individualizada las 3 familias importantes de tendones: horizontales en el cilindro, horizontales en la cúpula y verticales. Estas categorías generales se dividen en las subfamilias del grupo de los tendones horizontales cilíndricos en la zona baja y alta y los grupos de tendones verticales de dirección NS y EO. Esto hace que haya un total de 5 grupos de tendones, cada uno con sus particularidades.

La presión lineal producida por un tendón tesado con la fuerza P sobre un contorno circular de radio r viene dada por la clásica fórmula del cilindro: $p' = P/r$. Si el cilindro en cuestión tiene una altura h , la presión será $p = p'/h = P/rh$. Estas relaciones son la base de los siguientes desarrollos.

4.1 Cables horizontales en el cilindro

Los cables horizontales en la zona cilíndrica del edificio de contención están dispuestos a una distancia $d = 37.5\text{cm}$ uno del otro. Teniendo en cuenta las consideraciones del apartado anterior, sobre el cilindro se ejerce una presión p_{cil} dada por

$$p_{cil} = \frac{P_{cil}}{dr}, \quad \text{donde } r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5-1.12)$$

donde x, y son las coordenadas del punto estudiado. La relación (5-1.11) expresa el valor de la presión como escalar. Para transformarla en vector sólo hace falta multiplicarla con el versor de la normal al tendon, es decir con el versor del radio con signo cambiado para obtener el sentido de actuación de la presión

$$\bar{p}_{cil} = -p_{cil}\bar{i}_r = -p_{cil}\frac{1}{r}(x\bar{i} + y\bar{j}) = -\frac{P_{cil}}{dr^2}(x\bar{i} + y\bar{j}) \quad (5-1.13)$$

donde \bar{i} y \bar{j} son los versores de las direcciones globales x e y , respectivamente.

4.2 Cables horizontales en la cúpula

A diferencia de los cables horizontales que envuelven el cilindro, los de la cúpula definen planos que no son equidistantes. El parámetro que determina la distancia entre dos planos es la coordenada z , dado que entre dos tendones hay un ángulo fijo $\alpha_o = 2.05^\circ$, que se mide desde el centro de la esfera cuya mitad es la cúpula (Figura 5-1.4).

Para los cálculos que involucran los tendones de la cúpula se definen dos radios en cada punto del tendon: el radio de la cúpula $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y el radio del tendon $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{R^2 - z^2}$. Puede demostrarse inmediatamente que la distancia d entre dos planos es $d = \alpha_o R \cdot r/R = \alpha_o r$, con lo cual la presión sobre la estructura viene dada por

$$\bar{p}_{cup}^h = -p_{cup}^h\bar{i}_r = -p_{cup}^h\frac{1}{r}(x\bar{i} + y\bar{j}) = -\frac{P_{cup}^h}{\alpha_o r^3}(x\bar{i} + y\bar{j}) \quad (5-1.14)$$

Como los tendones horizontales existen hasta un ángulo de 45° contado desde la base de la cúpula, estas presiones se calculan sólo si $z \in [0, R\sqrt{2}/2]$.

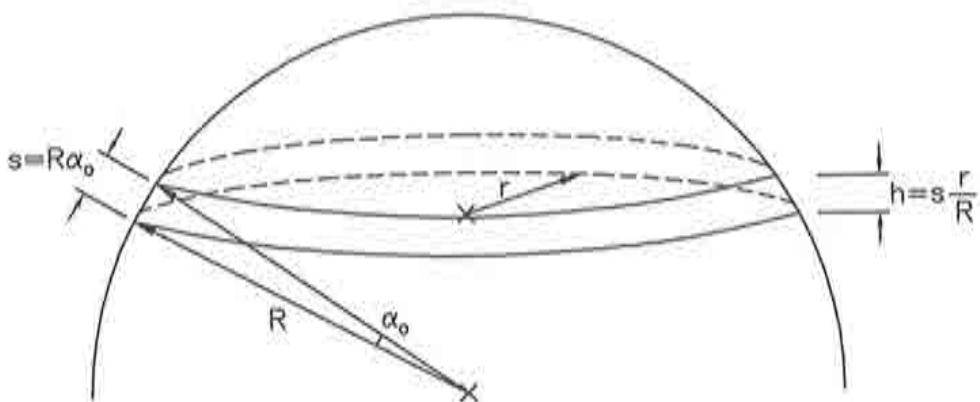


Figura 5-1.4 Cálculo de la distancia entre los planos de dos tendones.

4.3 Cables verticales de dirección NS

Los cables verticales cuyos planos tienen la proyección horizontal de dirección NS (dirección Y en el sistema de coordenadas empleados en el modelo de la central) presentan la misma situación que los cables horizontales de la cúpula. Existe una distancia variable definida por la posición del punto estudiado y un ángulo fijo $\alpha_v = 2.25^\circ$. Esta distancia viene dada por la relación $d = \alpha_v r$, exactamente como en el apartado anterior. El radio del tendón será $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ y por consiguiente la presión tomará el siguiente valor:

$$\bar{p}_{cup}^{v,y} = -p_{cup}^{v,y} \bar{i}_r = -p_{cup}^{v,y} \frac{1}{r} (y \bar{j} + z \bar{k}) = -\frac{P_{cup}^{v,y}}{\alpha_v r^3} (y \bar{j} + z \bar{k}) \quad (5-1.15)$$

donde \bar{k} es el versor de la dirección k . Debido a la disposición de estos cables, esta presión se calcula para valores $x \in [-R\sqrt{2}/2, R\sqrt{2}/2]$.

4.4 Cables verticales de dirección EO

En el caso de los cables verticales cuyos planos tienen la proyección horizontal de dirección EO (dirección X) el radio del tendón será $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ y por consiguiente la presión tomará el siguiente valor:

$$\bar{p}_{cup}^{v,x} = -p_{cup}^{v,x} \bar{i}_r = -p_{cup}^{v,x} \frac{1}{r} (x \bar{i} + z \bar{k}) = -\frac{P_{cup}^{v,x}}{\alpha_v r^3} (x \bar{i} + z \bar{k}) \quad (5-1.16)$$

Debido a la disposición de estos cables, esta presión se calcula para valores $y \in [-R\sqrt{2}/2, R\sqrt{2}/2]$.

5. Conclusiones

Las presiones detalladas en los apartados 3.1 a 3.4 se calculan siempre que el punto analizado se encuentre dentro del radio de acción del respectivo tipo de tendón. En el caso que en el mismo punto de la estructura actúan varios sistemas de postesado simultáneamente, los efectos de éstos se suman (Figura 5-1.5).

En la cúpula existen zonas donde se superponen hasta tres sistemas de postesado en la misma zona, lo que llega a producir picos de presión locales de hasta 11.9 atmósferas mientras en una zona normal de la cúpula la presión media es de aproximadamente 6 atmósferas. Las Figuras 5-1.5 y 5-1.7 muestran las distribuciones de presión en el cilindro y la cúpula, respectivamente.

La presión ejercida por el sistema de postesado horizontal sufre una caída importante en las zonas cercanas a los contrafuertes (unos tres metros de un lado y del otro del eje del contrafuerte) hasta unas 2 atmósferas, desde las 6 atm. que se dan en el resto del edificio. Esto se debe a la existencia del tramo recto entre el punto de anclaje y el punto donde el tendón empieza a curvarse, dado que en esta zona el tendon no ejerce presión sobre la pared. Sin embargo, uno de cada 3 tendones atraviesa el contrafuerte, lo que hace que no desaparezca totalmente la presión.

Las fuerzas en los anclajes se aplican en las caras laterales de los contrafuertes como presión exterior y su magnitud se calcula repartiendo dichas fuerzas en la superficie lateral de los contrafuertes.

En el modelo con penetraciones se han considerado las presiones ejercidas alrededor de las penetraciones por la desviación del sistema de postesado, que se curva en torno a las penetraciones. Estas presiones se han aplicado como unas presiones uniformes, promediando la curvatura media de los tendones y las fuerzas de tensión en los cables y utilizando la fórmula del cilindro mencionada en el apartado 3. También se han introducido en el techo de la galería de postesado las presiones equivalentes a las fuerzas de anclaje de los cables verticales.

Los datos de entrada del programa en lo referente al sistema de postesado son:

- altura donde se inicia la zona 1 del cilindro: 202 cm;
- altura donde se inicia la zona 2 del cilindro: 2602 cm;
- altura donde se inicia la cúpula: 4320 cm;
- fuerza de postesado en los tendones verticales: 594000 kgf;
- fuerza de postesado en los tendones horizontales en el cilindro, zona 1: 745310 kgf;
- fuerza de postesado en los tendones horizontales en el cilindro, zona 2: 731250 kgf;

- fuerza de postesado en los tendones horizontales en la cúpula: 703120 kgf;
- ángulo entre dos tendones verticales: 2.25° ;
- ángulo entre dos tendones horizontales de la cúpula: 2.05° ;
- distancia entre dos tendones horizontales en el cilindro: 37.5 cm;
- número de alambres de los tendones verticales: 44;
- número de alambres de los tendones horizontales del cilindro de la zona 1: 53;
- número de alambres de los tendones horizontales del cilindro de la zona 2: 52;
- número de alambres de los tendones horizontales de la cúpula: 50;
- pérdida elástica instantánea media de los tendones verticales: 5600 kgf;
- pérdida elástica instantánea media de los tendones horizontales del cilindro de la zona 1: 13500 kgf;
- pérdida elástica instantánea media de los tendones horizontales del cilindro de la zona 2: 13200 kgf;
- pérdida elástica instantánea media de los tendones horizontales de la cúpula: 6300 kgf;
- ángulo θ_b : 10.53° ;
- coeficiente κ : 0.00117 m^{-1} ;
- coeficiente μ : 0.128
- longitud del tramo recto l : 599 cm;
- penetración de cuña: 0.8 cm;
- área de un alambre: 0.997 cm^2 ;
- parámetro a de las pérdidas diferidas a 40 años: $-1196.544 \text{ kgf/cm}^2$;
- parámetro b de las pérdidas diferidas a 40 años: 0.97655.
- parámetro a de las pérdidas diferidas a 0 años: 0 kgf/cm^2 ;
- parámetro b de las pérdidas diferidas a 0 años: 1.

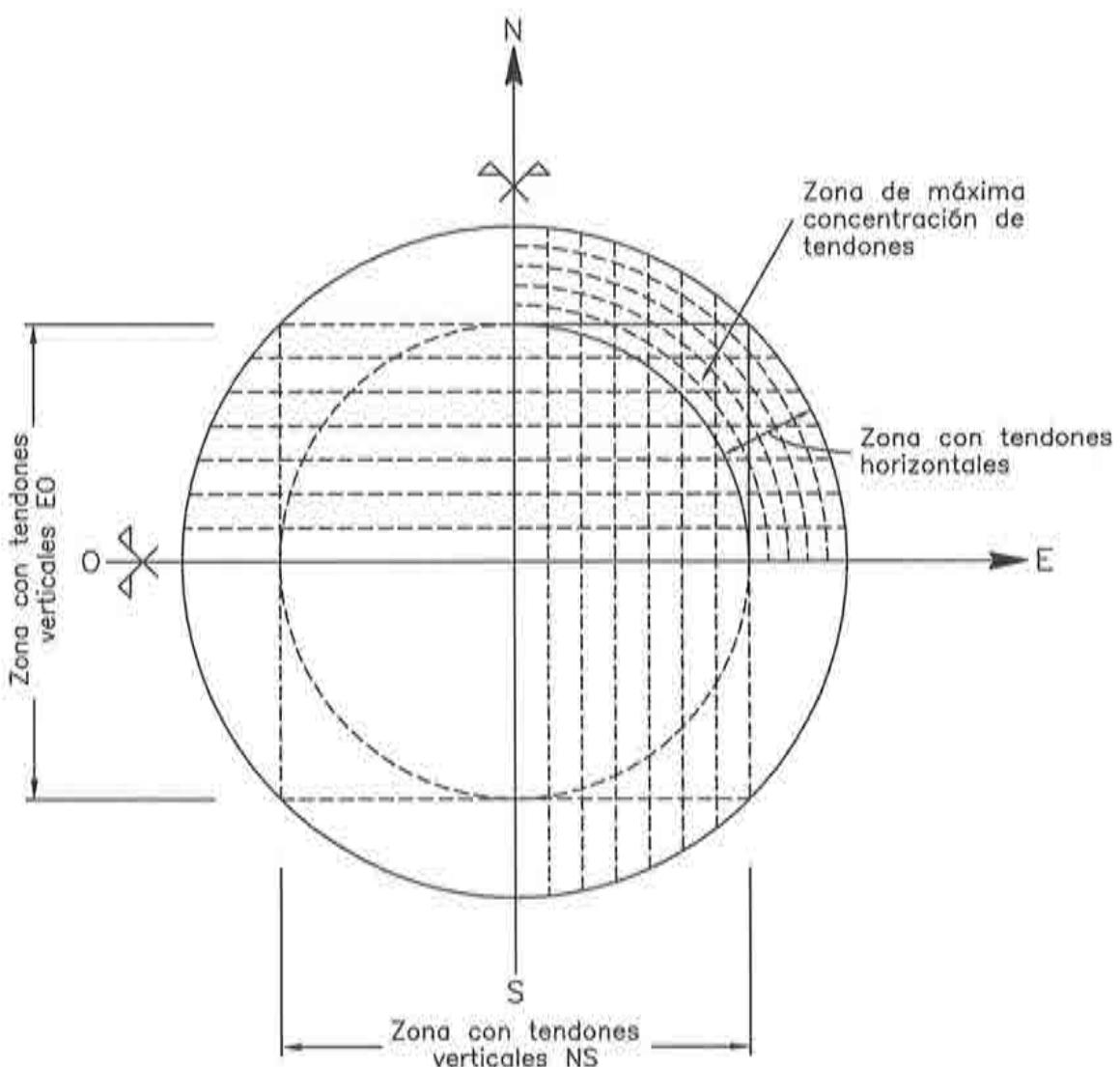


Figura 5-1.5 Superposición de los distintos tipos de cables en la cúpula.

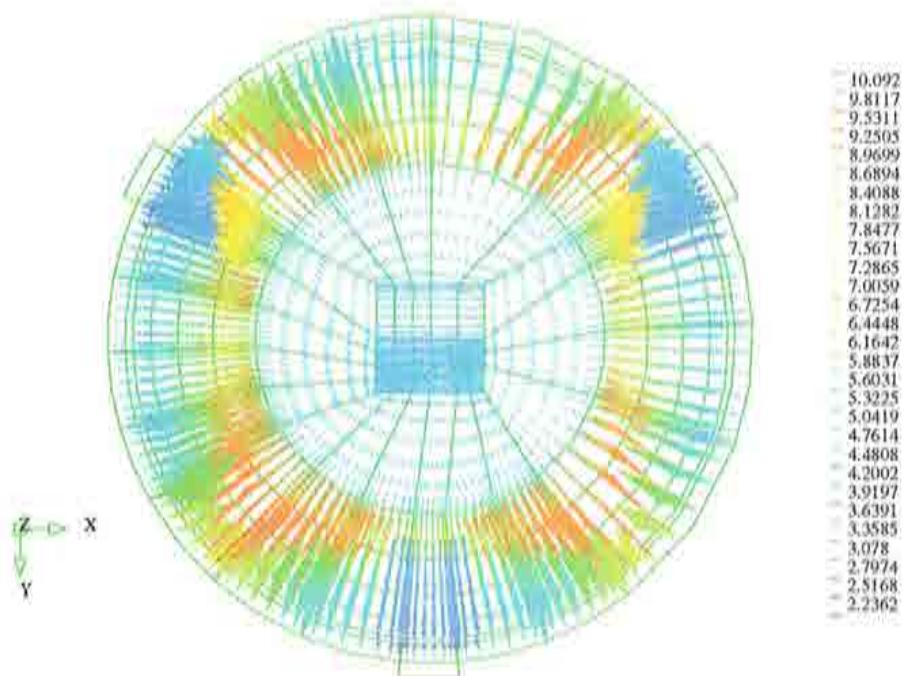


Figura 5-1.6 Los vectores de presión en la cúpula.

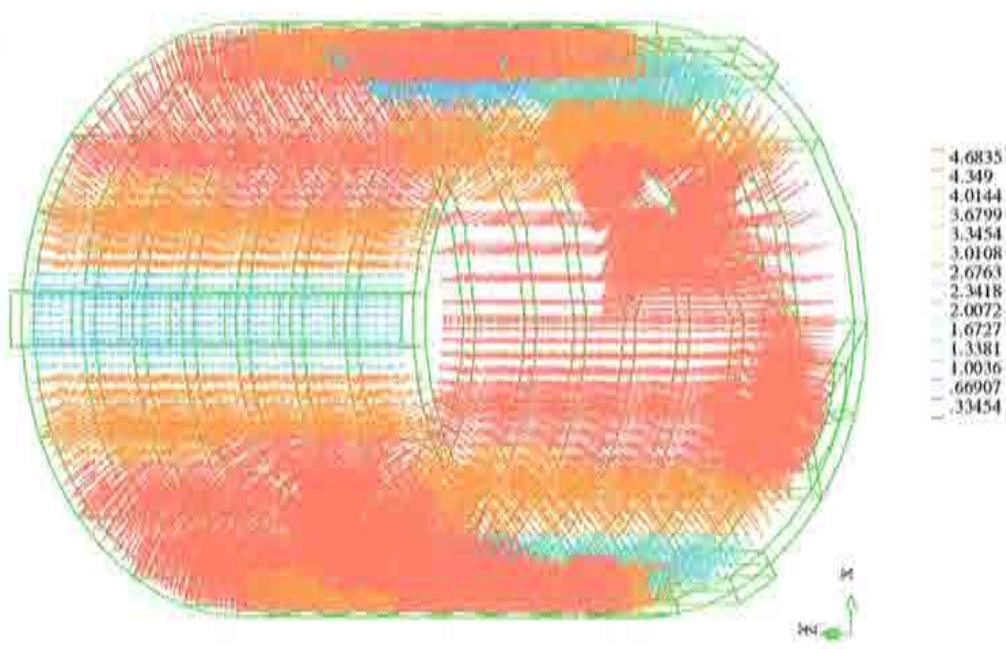


Figura 5-1.7 Los vectores de presión en el cilindro.

CAPÍTULO 6

APLICACIÓN DEL ÍNDICE GLOBAL DE DAÑO AL ESTUDIO DE CONSTRUCCIONES HISTÓRICAS

6.1 INTRODUCCIÓN

La conservación de las construcciones históricas constituye una preocupación constante en los últimos tiempos debido a su importancia cultural, histórica y sentimental para la humanidad (*ENCO* 1990; *IABSE* 1993; Brebbia y Leftheris 1995). Esta concienciación creciente de valor del patrimonio formado por las obras de los antepasados hace que cada vez más monumentos, puentes, torres, catedrales e iglesias y, en general, inmuebles relevantes de todo tipo se quieran salvaguardar y por esto la lista de monumentos históricos es año tras año cada vez más amplia. Esto hace que cada vez se destinen más recursos a su reparación y su reabilitación, lo que justifica también el desarrollo de técnicas numéricas más sofisticadas y precisas que permitan conocer el nivel de degradación de las construcciones históricas y evaluar “a priori” los efectos de la reparación o sustitución (Brebbia y Leftheris 1995).

La intervención sobre una construcción declarada histórica es completamente diferente de las técnicas de reparación tradicionales en la industria. Es condición obligatoria que la obra conserve el mensaje artístico original del monumento y que no deje huellas que alteren de algún modo sus virtudes originales (*IABSE* 1993).

El poder obrar con tanto cuidado requiere de unas herramientas muy precisas a la hora de diagnosticar el estado de la estructura, puesto que se debe buscar siempre la intervención mínima. El primer paso para llegar a ese objetivo es la predicción correcta del nivel de seguridad real de la estructura, que es función de una multitud de factores, en parte conocidos pero en la mayor parte desconocidos. La información imprescindible para evaluar el estado de la estructura incluye el conocimiento tanto del mecanismo de degradación del

material y de las componentes estructurales como de la evolución en el tiempo de dicha degradación (Collepardi et al. 1989, 1990; Cervera et al. 1991, 1992).

Las causas del deterioro pueden dividirse en dos grupos principales: agentes agresivos medioambientales y efectos mecánicos (Saetta et al. 1993a, 1993b; Creazza et al. 1995; Schreffler 1995). Este capítulo trata del segundo grupo y no entra en la problemática del primero. Sin embargo, un estudio de los factores que componen el primer grupo puede encontrarse en un estudio desarrollado recientemente por un grupo de investigadores entre los cuales se encuentra el autor de esta monografía (Oñate et al. 1997).

6.2 ANÁLISIS DE LA BASÍLICA DE SAN MARCOS DE VENECIA

6.2.1 Descripción

La basílica de San Marcos es una de las catedrales más bellas del mundo y también de las más viejas. Su construcción comenzó en el año 828 cuando se trajeron a Venecia los restos de San Marcos desde Egipto y se construyó una primera iglesia. El edificio tal como se ve hoy fue alzado 250 años más tarde, entre 1063 y 1073 pero hasta el siglo 15 no se dió por acabado. Durante este largo intervalo de más de cuatro siglos se han ido haciendo obras casi ininterumpidamente, en épocas sucesivas, lo que hace suponer que ha habido una gran heterogeneidad de los materiales y técnicas de construcción empleadas en su construcción (Mark y Çakmak 1992).

La catedral tiene 5 cúpulas de piedra visibles desde fuera pero que son inspeccionables desde el interior con gran dificultad ya que están tapadas por otras cúpulas de madera que se sostienen en las primeras a través de un complicado entramado de madera. Estas cúpulas de madera son de valor incalculable siendo imposible apartarlas para poder inspeccionar el estado de las cúpulas de piedra. Esta situación es válida para casi la entera superficie interior de la catedral con la excepción de las columnas y paredes bajos. En el exterior, las cúpulas están recubiertas con plomo, lo que también dificulta su inspección.

Sin embargo, en los pocos sitios que se hayan podido inspeccionar se observaron grietas alarmantes aunque no de desarrollo reciente (Creazza 1993). La zona afectada es la parte baja de las torres cilíndricas que forman la parte inicial de cada cúpula y también las claves de los arcos semi-cilíndricos que aguantan el peso de las cúpulas (ver Figura 6.1).

6.2.2 Objectivo y metodología del análisis

El objetivo de este análisis ha sido la evaluación de la seguridad desde el punto de vista mecánico de la basílica mediante el modelo de daño desarrollado

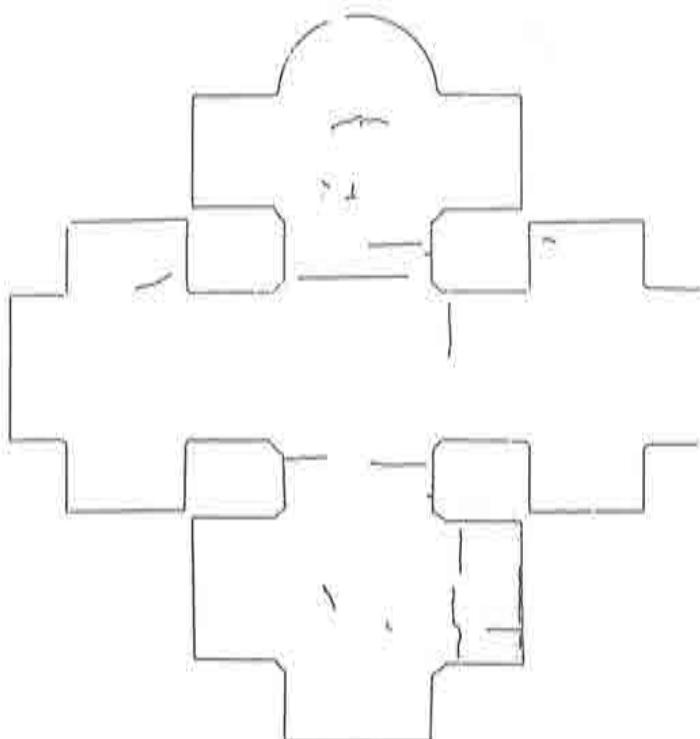


Figure 6.1 Planimetría de la cubierta con la localización de las fisuras principales encontradas.

en la monografía. Con los datos geométricos y mecánicos disponibles se ha hecho un cálculo tridimensional que ha concluido que, suponiendo como ciertos dichos datos, la estructura de resistencia no sale del rango elástico sometida a la carga del peso propio.

Dado que en la realidad se han observado fisuras, grietas e incluso desprendimientos de material en ciertas zonas, queda patente que las propiedades de material no son las medidas *en situ* y que la estructura ha sufrido degradaciones bajo el peso propio que no se han visto reflejadas en el cálculo arriba mencionado.

Los datos geométricos y las características de los materiales de la estructura han sido suministrados por un grupo de investigadores de la Universidad de Padua (Mola y Vitaliani 1997; Oñate et al. 1997) que llevaron a cabo un estudio del estado actual de la basílica. A partir de estos datos se han elaborado las mallas de elementos finitos tridimensionales correspondientes a la parte superior de la estructura que consiste de las 5 cúpulas y sus construcciones de apoyo.

Los datos sobre los materiales se reducen a unos valores medios para la piedra y la mampostería del edificio sin que se disponga de datos detallados sobre cada zona individualizada y su estado de degradación.

A la vista de los escasos datos disponibles sobre los materiales existentes en

la estructura y su estado actual, el estudio se ha orientado hacia la simulación de la degradación estructural ampliando la carga de peso propio más allá de su valor real, entendiéndose que la disminución desconocida de la resistencia de los materiales es equivalente a un aumento de la carga exterior. Esto es cierto si todos los elementos estructurales sufrieron a lo largo del tiempo unas influencias medio ambientales parecidas. Ya que se calculó sólo la parte superior de la basílica, que está uniformemente expuesta a la atmósfera, se ha considerado que esta hipótesis es lo suficientemente cierta para poder encontrar las zonas con más degradación mecánica. El propósito fue llevar a cabo un análisis no lineal desde el punto de vista del material, para poder evaluar la evolución del deterioro estructural una vez éste haya aparecido. Es una técnica similar a las de semejanza del análisis dimensional aplicada a los materiales y cargas. Aceptando esta teoría, las localizaciones de los daños no variarán al tener otros valores las constantes de material, pero manteniendo su uniformidad a lo largo de la estructura.

En conclusión, tomando los valores medidos de los parámetros de material e incrementando la carga de peso propio indefinidamente hasta alcanzar el fallo del modelo computacional, se obtendrá una historia de degradación parecida a la correspondiente a los valores reales desconocidos. A partir de un estudio de este tipo se podría evaluar el estado real de los materiales contrastándose la situación real, dada por las observaciones del deterioro existente, con la historia de degradación calculada y identificar la situación que le corresponde. Así podría conocerse *a posteriori* cual es el estado real de los materiales de construcción y extrapolando estos resultados se puede evaluar la reserva de resistencia del edificio. Como ejemplo, supongamos que la carga última calculada es de 6 veces el peso propio; pero se reconoce el estado real de degradación de la estructura en las distribuciones de daño obtenidas para una carga de 4 veces el peso propio. Como la situación real corresponde a la carga de peso propio solamente, esto significa que en la realidad la carga última es sólo 1.5 veces el peso propio ya que el presente deterioro indica una importante disminución de las rigideces reales con respecto a las hipotéticas utilizadas en el cálculo. Además, si el daño local en una zona es de 0.5 para el factor de carga de 4, esto implica que ese es su estado real. Está claro que todo este cálculo es aproximativo, puesto que se parte de una distribución de propiedades uniforme. No obstante, corrigiendo las propiedades y repitiendo el procedimiento de manera iterativa, se puede llegar a definir bien los valores reales de las propiedades de material en cada zona.

El estudio desarrollado en este trabajo parte de los valores disponibles para las propiedades de material, ya que no se ha tenido acceso a los resultados experimentales sobre la configuración del deterioro real existente en la estructura.

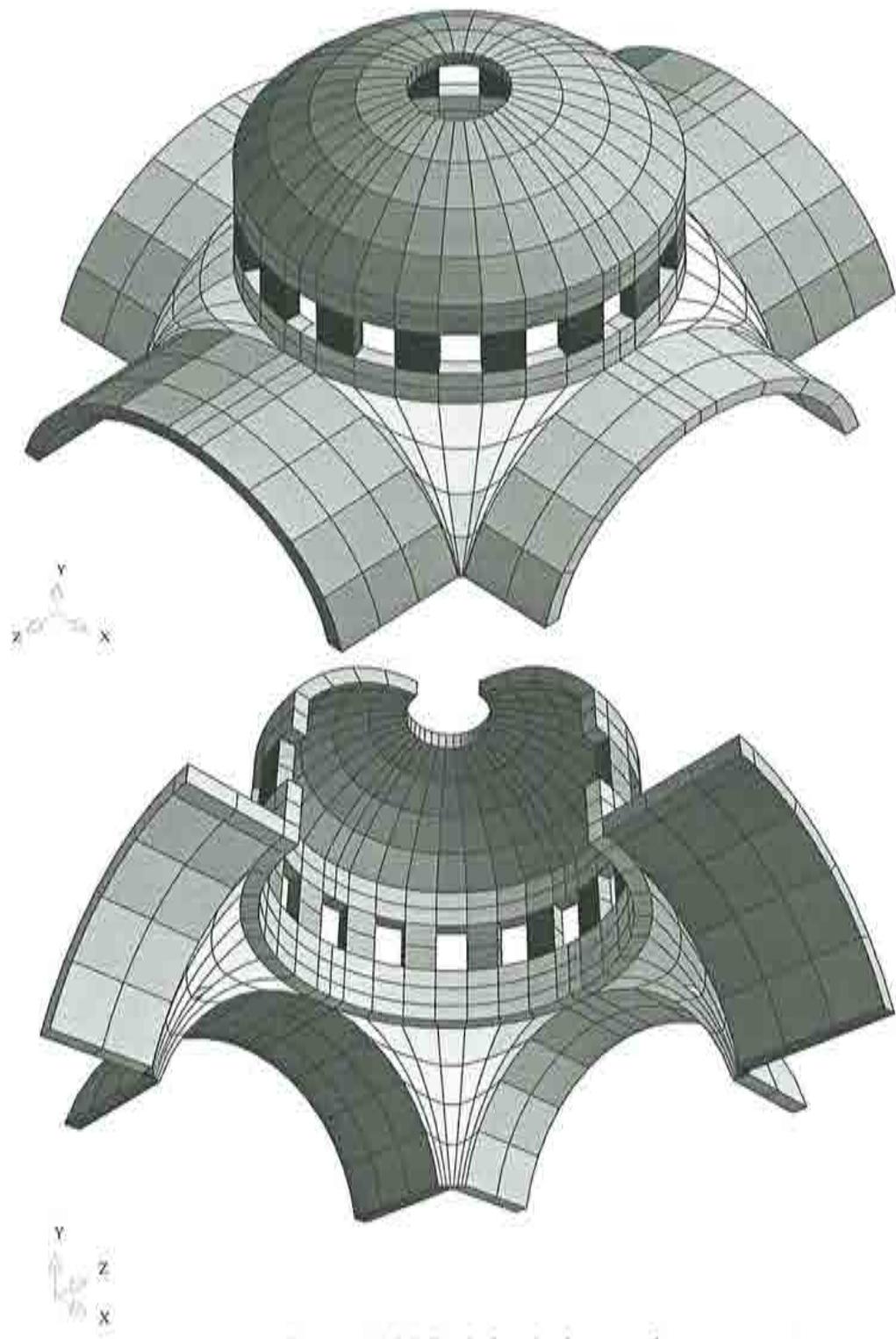


Figure 6.2 Malla de la cúpula central,

6.3 RESULTADOS

El primer ejemplo presentado es el estudio preliminar de daño de la cúpula central de la basílica bajo solicitudes estáticas y dinámicas.

La Figura 6.2 muestra diferentes vistas de la malla tridimensional de elementos finitos. Todos los nodos de la base tienen el desplazamiento vertical restringido y además se han restringido dos grados de libertad horizontales para impedir movimientos de sólido rígido.

Las propiedades de material utilizadas en este análisis son las siguientes:

Mampostería de piedra

- $E = 600.000 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=0.15$
- Resistencia a tracción = 40 kg/cm^2
- Resistencia a compresión = 400 kg/cm^2
- Densidad = 2.7 g/cm^3

Mampostería de ladrillo (las paredes verticales cilíndricas)

- $E = 200.000 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=0.15$
- Resistencia a tracción = 10 kg/cm^2
- Resistencia a compresión = 100 kg/cm^2
- Densidad = 2.4 g/cm^3

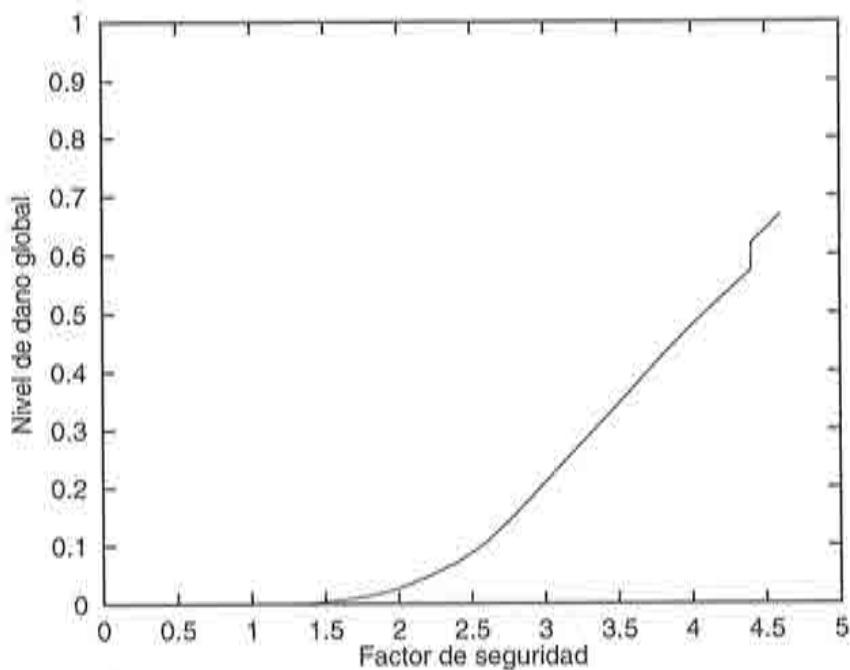


Figura 6.3 Evolución del daño global para el análisis estático.

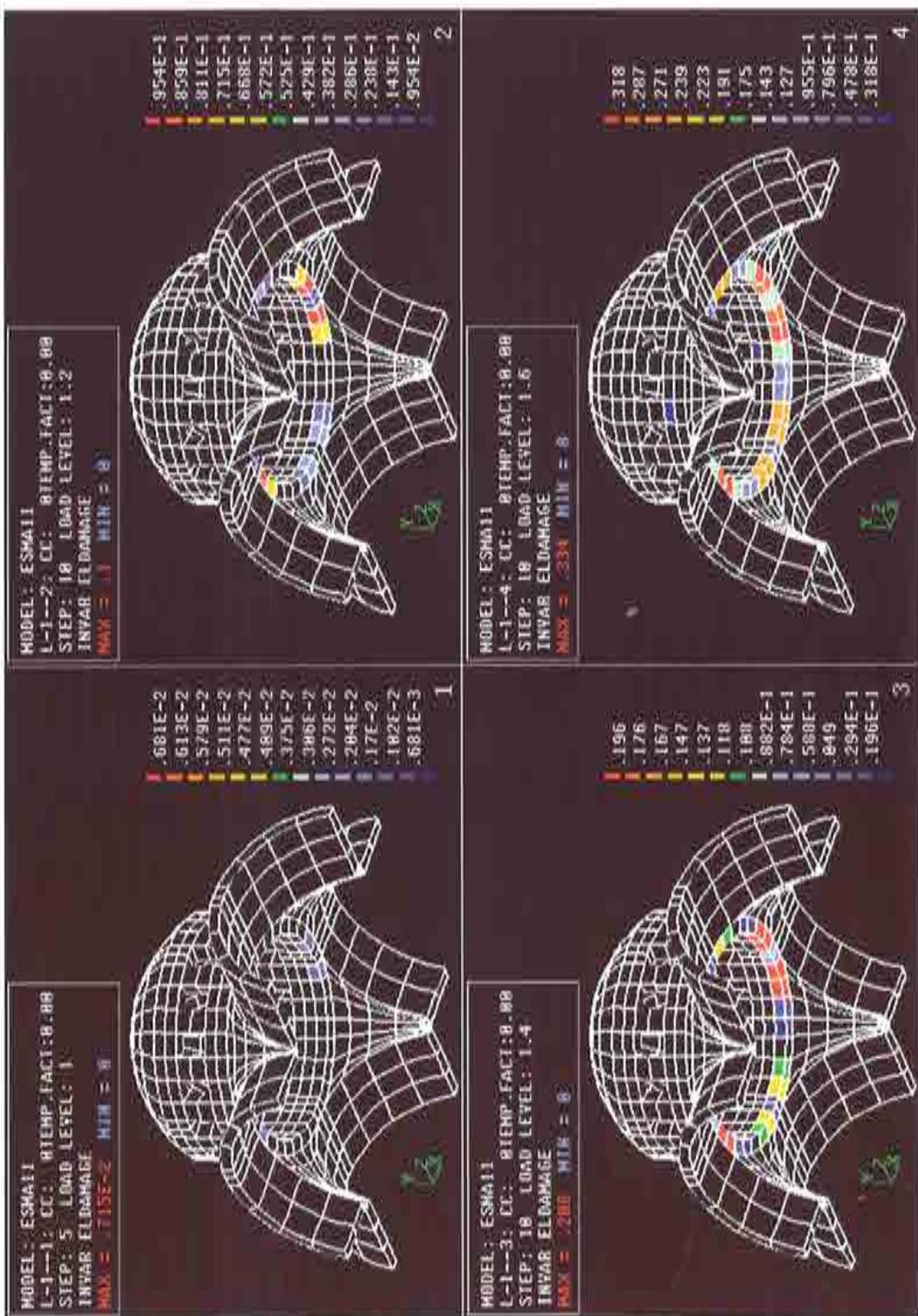


Figure 6.4a Mapas de zonas dañadas para los factores de carga de 1.0, 1.2, 1.4 y 1.6, respectivamente.

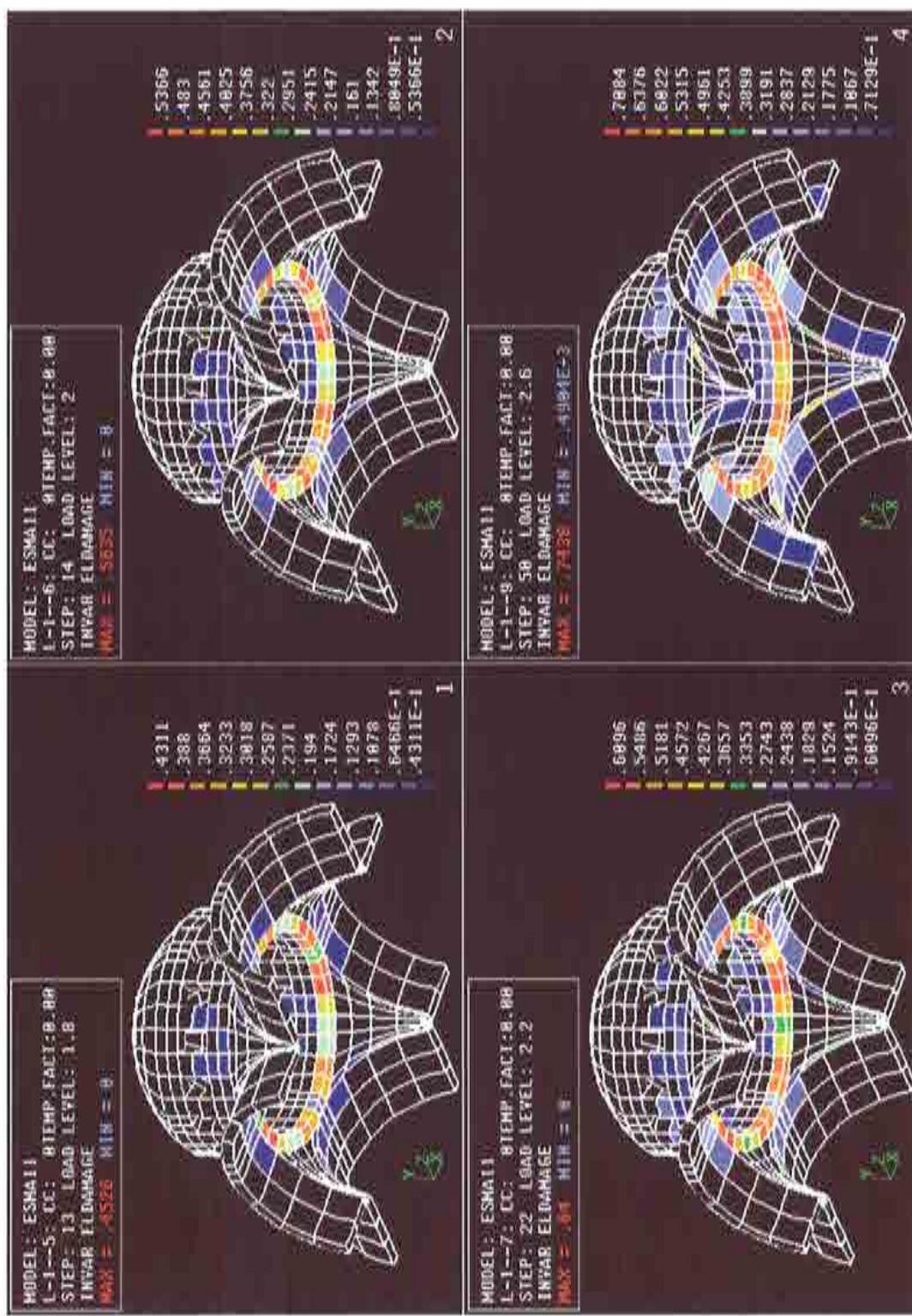


Figure 6.4b Mapas de zonas dañadas para los factores de carga de 1.8, 2.0, 2.2 y 2.6, respectivamente.

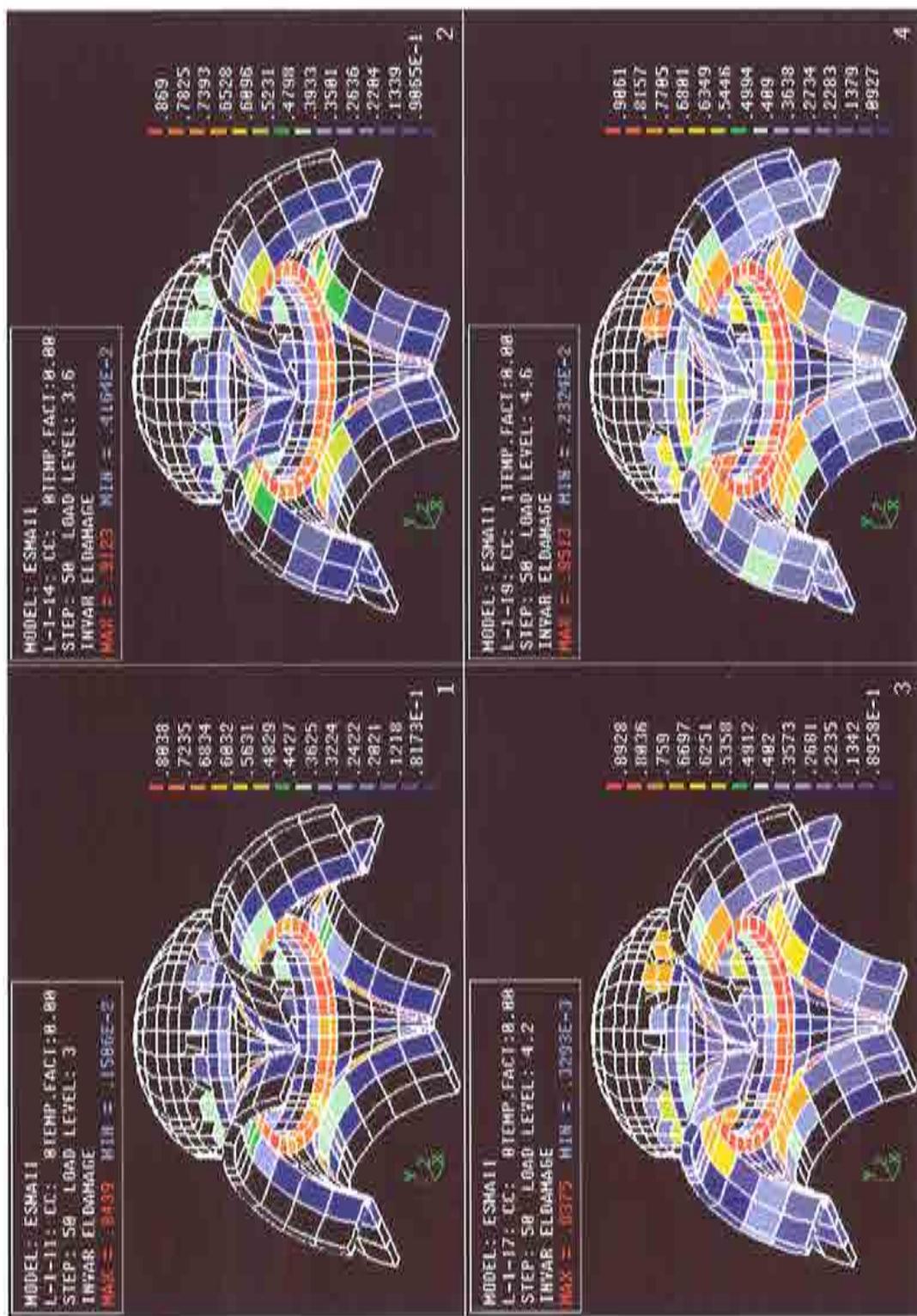


Figure 6.4c Mapas de zonas dañadas para los factores de carga de 3.0, 3.6, 4.2 y 4.6, respectivamente.

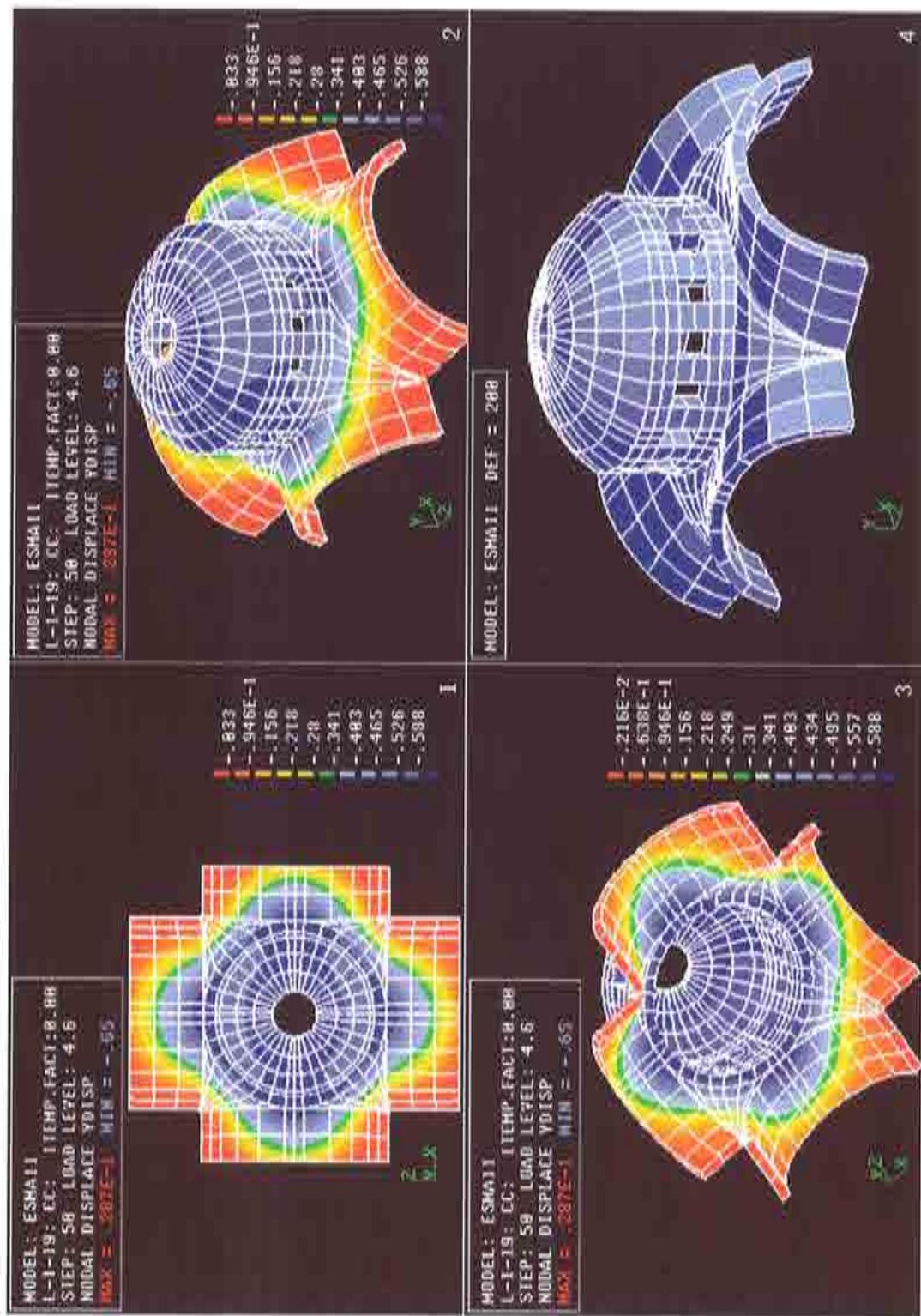


Figure 6.5 Contornos de igual desplazamiento y forma deformada al fallo.

El primer estudio numérico consiste en el análisis del factor de seguridad de la cúpula bajo peso propio. La Figura 6.3 muestra la evolución del índice global de daño D en función del factor de peso propio hasta llegar al fallo, caracterizado por un valor de D que se aproxima a la unidad. La convergencia de la solución no lineal se ha perdido para $D = 0.8$ (ya que no se ha empleado la técnica de retención de cortante) y un factor de seguridad de ≈ 4.6 . En las Figuras 6.4a-c puede observarse la evolución del daño elemental cuyo valor máximo llega a 0.95 en la base de la cúpula, que es precisamente la zona donde se han observado fisuras en la realidad. Los contornos de igual desplazamiento y la deformada en el momento del fallo se muestran en la Figura 6.5.

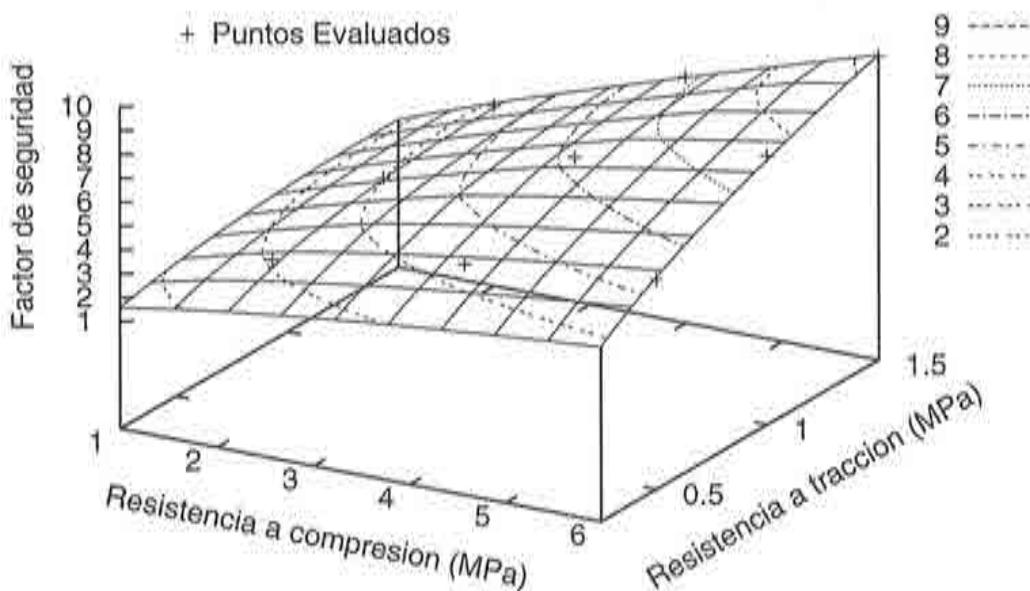


Figura 6.6 Evolución del coeficiente de seguridad respecto a la resistencia a tracción y compresión de la mampostería.

En la Figura 6.6 se muestra el resultado de un estudio paramétrico donde se han variado tanto la resistencia a tracción como a compresión de la mampostería con el fin de evaluar la sensibilidad del coeficiente de seguridad a estos parámetros de material. Este estudio ha sido necesario dada la incertidumbre en los valores reales de dichos parámetros.

El siguiente estudio es el análisis dinámico de la estructura bajo la acción de un terremoto de cálculo. Las características de material son las del caso estático descrito anteriormente. El análisis tiene dos etapas. Primero, se obtiene la

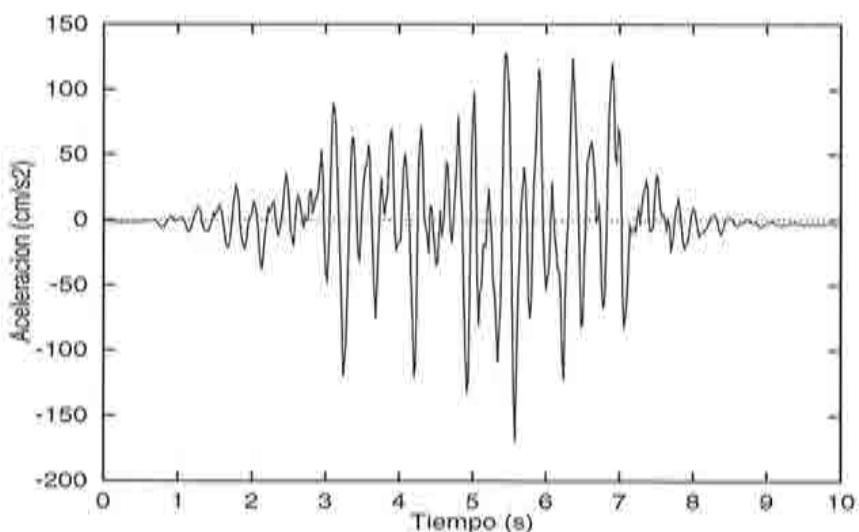


Figure 6.7 Acelerograma sintético.

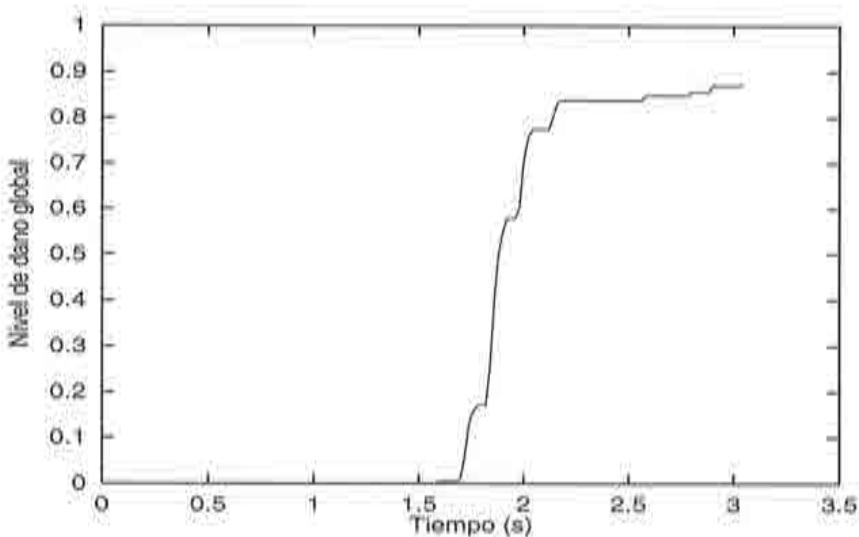


Figure 6.8 Evolución del índice global de daño para el análisis dinámico.

solución estática bajo peso propio y luego se aplica el terremoto sintético de la Figura 6.7. La evolución del índice global de daño puede verse en la Figura 6.8.

El fallo se obtiene después de 3.02 segundos y se debe a la fractura de las paredes cilíndricas a media altura tal como muestran claramente las Figuras 6.9a-b. Las formas deformadas de la estructura en diferentes instantes antes del colapso se presentan en la Figura 6.10.

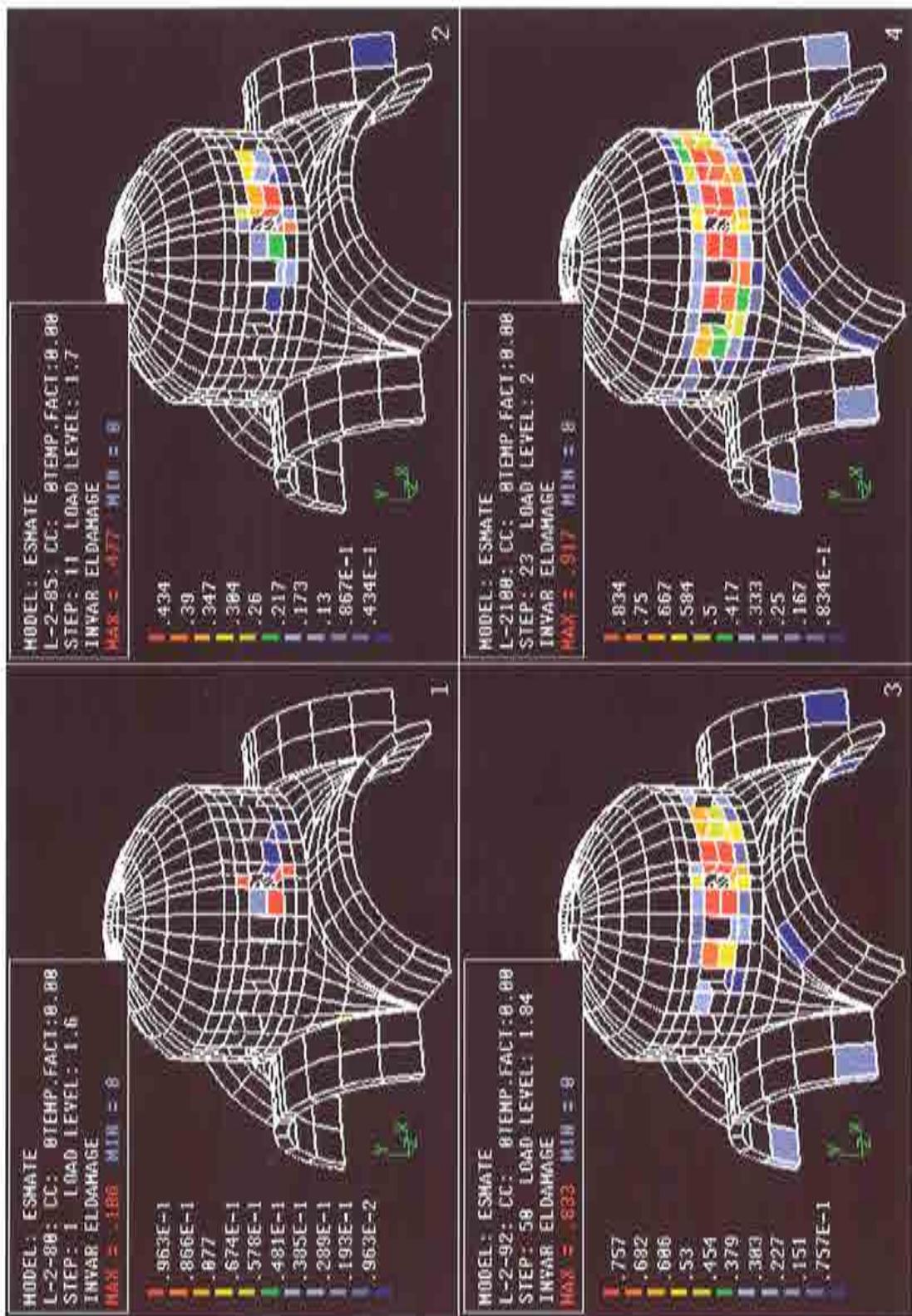


Figure 6.9a Mapas de daño durante la carga dinámica correspondiente a los instantes 1.6, 1.7, 1.84 y 2.0 segundos.

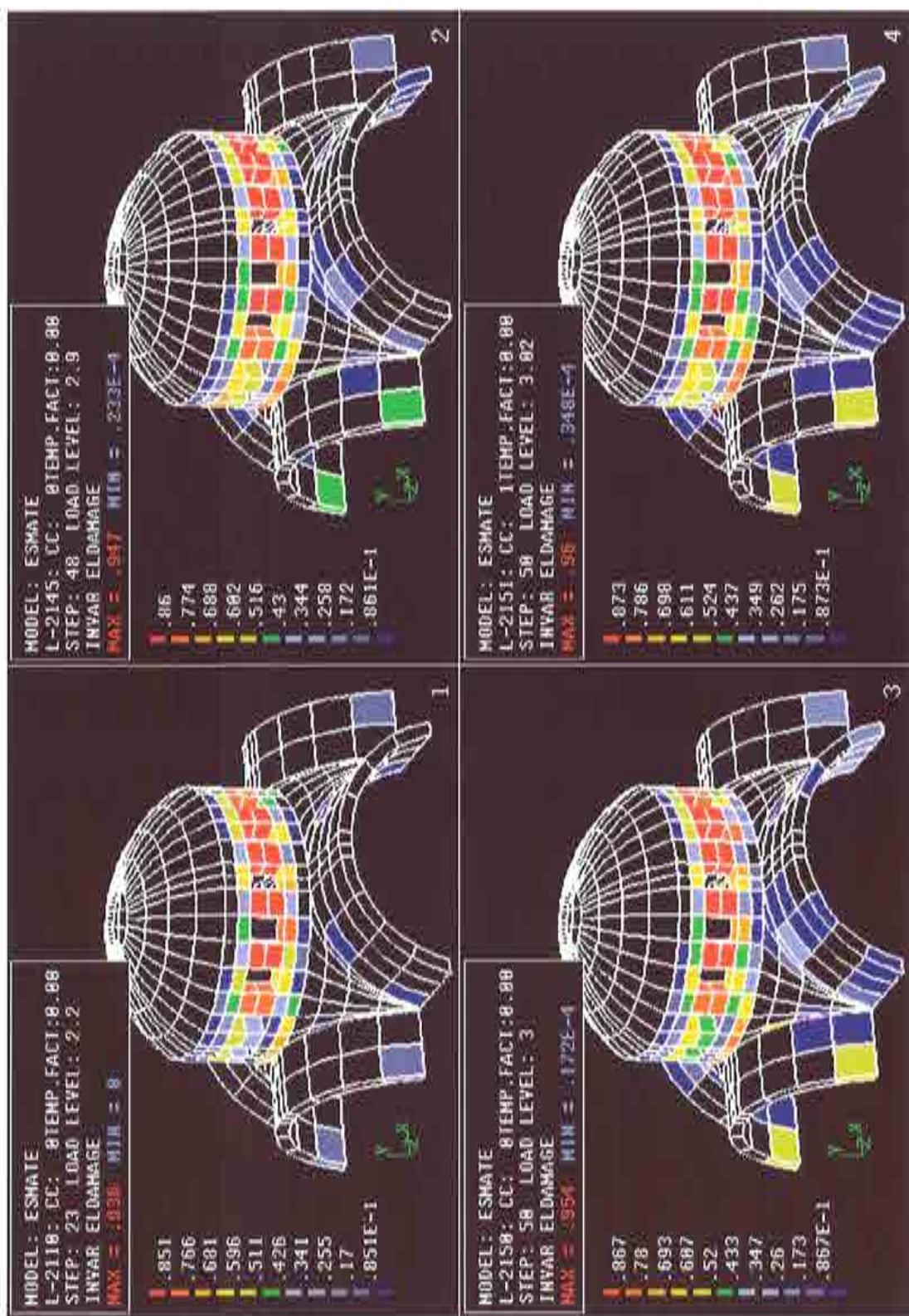


Figure 6.9b Mapas de daño durante la carga dinámica correspondiente a los instantes 2.2, 2.9, 3.0 y 3.02 segundos.

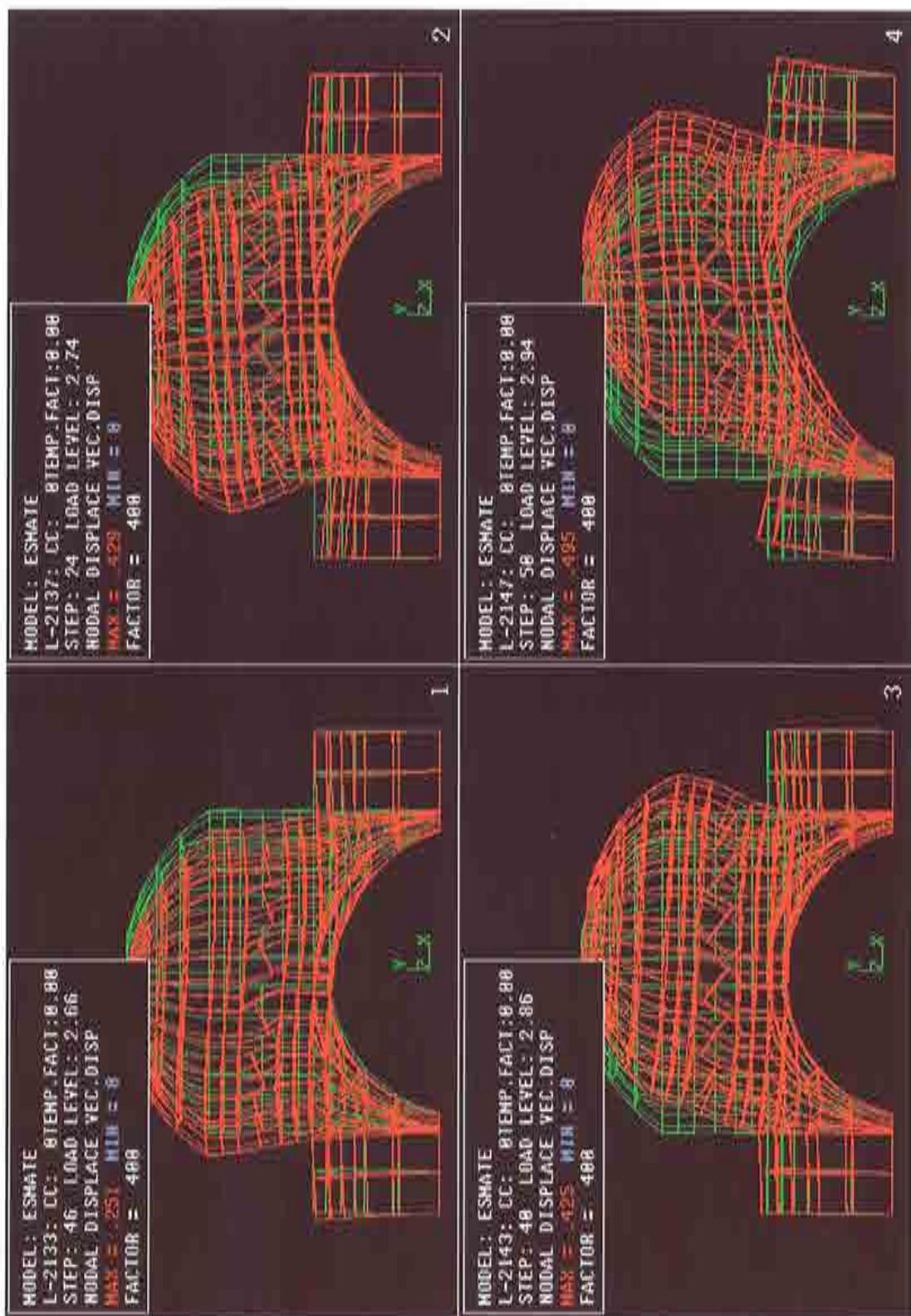


Figure 6.10 Formas deformadas correspondientes a la vibración de la estructura inmediatamente antes del colapso.

El tercer análisis corresponde a un estudio tridimensional de las 5 cúpulas de la basílica San Marco. La Figura 6.11 presenta la malla completa de la estructura, de 7676 elementos de sólido 3D con 48505 nodos. Esto incluye 2265 prismas triangulares de 15 nodos utilizados como elementos de transición en los sitios donde la discretización los ha requerido. Estos prismas han sido convertidos en elementos rectangulares de 20 nodos degenerados y se ha comprobado que no presenta problemas de estabilidad numérica.

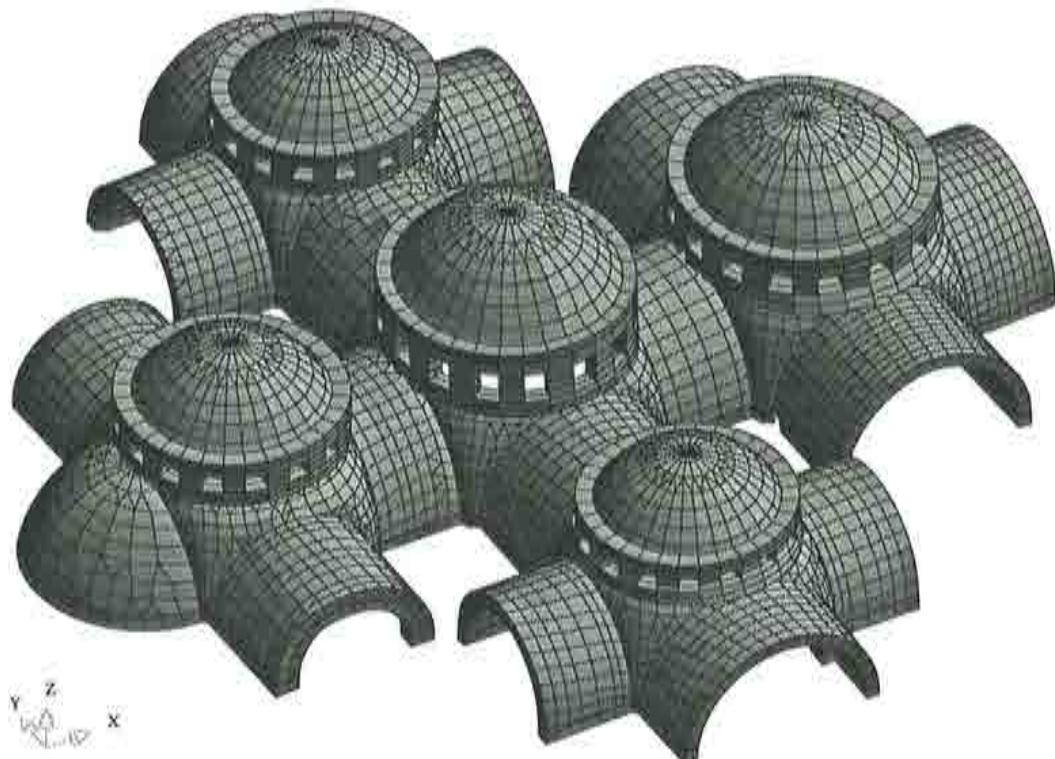


Figura 6.11 Malla de elementos finitos para el análisis completo 3D de las 5 cúpulas.

En este análisis más completo se han considerado apoyos elásticos que simulen la elasticidad de las columnas y paredes que sostienen la cubierta de la basílica. Su elasticidad se ha calculado acorde a la altura y espesor medios de los elementos estructurales no incluidos en el modelo numérico. De esta manera se han reemplazado los empotramientos considerados anteriormente con apoyos elásticos en las tres direcciones.

En este análisis, las propiedades de la piedra (arcos principales y bóvedas) y las propiedades de los 3 tipos de mampostería (arcos, cordones de refuerzo, tambores y arcos secundarios) son

- piedra $E=250000\text{kg/cm}^2$, $\nu=0.15$, $\sigma_c=300\text{kg/cm}^2$, $\sigma_t=15\text{kg/cm}^2$

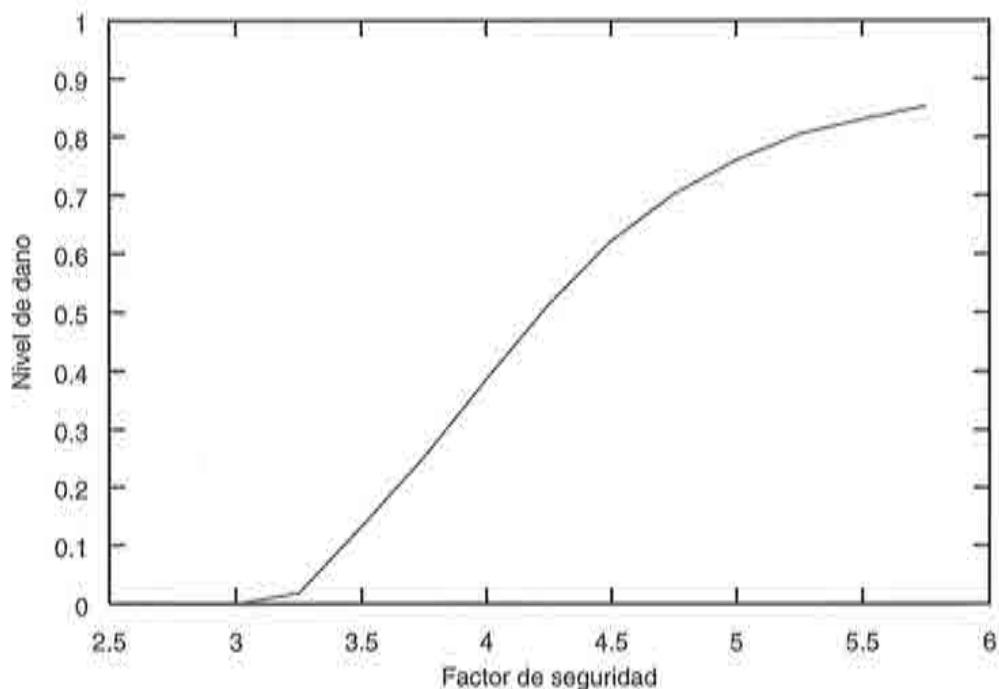


Figura 6.12 Evolución del daño global en función del factor de peso propio.

- mampostería 1 $E=30000\text{kg/cm}^2$, $\nu=0.15$, $\sigma_c=40\text{kg/cm}^2$, $\sigma_t=5\text{kg/cm}^2$
- mampostería 2 $E=60700\text{kg/cm}^2$, $\nu=0.15$, $\sigma_c=40\text{kg/cm}^2$, $\sigma_t=5\text{kg/cm}^2$
- mampostería 3 $E=90000\text{kg/cm}^2$, $\nu=0.15$, $\sigma_c=40\text{kg/cm}^2$, $\sigma_t=5\text{kg/cm}^2$

La densidad ha sido de 2.4g/cm^3 para todos los materiales.

Con estos datos se ha hecho un cálculo estático. Cabe destacar que el esfuerzo computacional requerido ha sido muy grande en términos de tiempo de cálculo y memoria (unas 240 horas de CPU y 1GB de memoria) en una máquina con procesadores R-10000 de Silicon Graphics.

La Figura 6.12 muestra la evolución del índice global de daño en función del peso propio aplicado. La convergencia del proceso numérico se pierde para un valor del índice global de daño de 0.87 y un coeficiente de seguridad de 7.11. Los contornos de igual desplazamiento para este nivel de carga (Figura 6.13) muestran que la cúpula que se encuentra encima de la entrada en la basílica en la que tiene el mayor hundimiento relativo.

Las Figuras 6.14, 6.15 y 6.16 muestran la evolución del daño elemental para las cargas de 4, 6.45 y 7.01 veces el peso propio. Dichas figuras reproducen la historia de degradación en sus instantes más representativos, suministrando

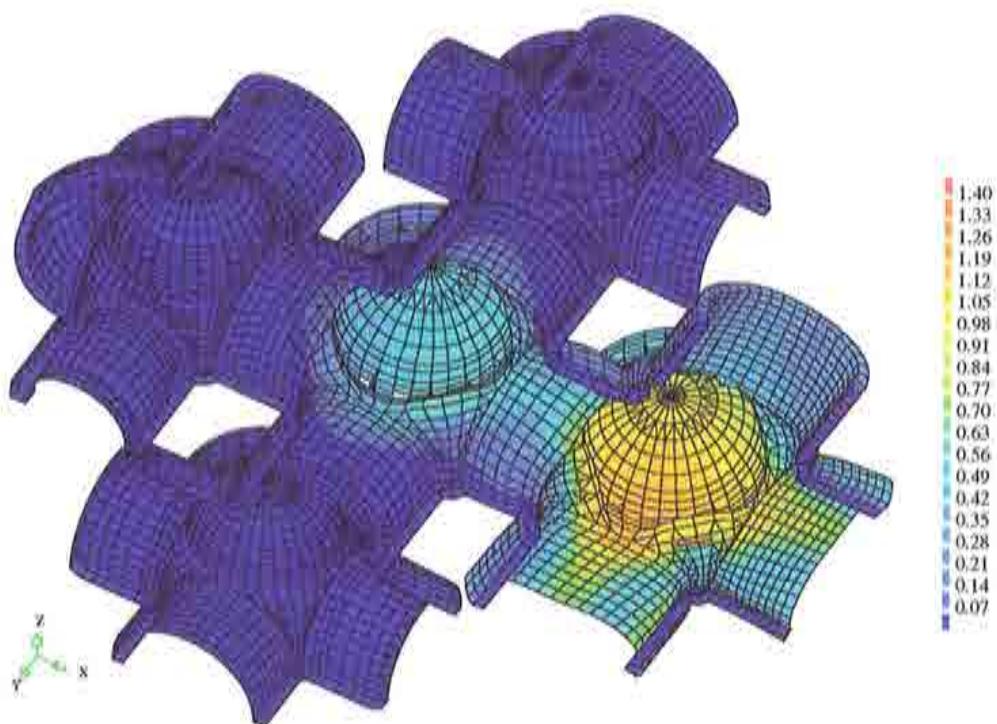


Figure 6.13 Contornos de igual desplazamiento para un factor de 7.11 (carga última) de peso propio.

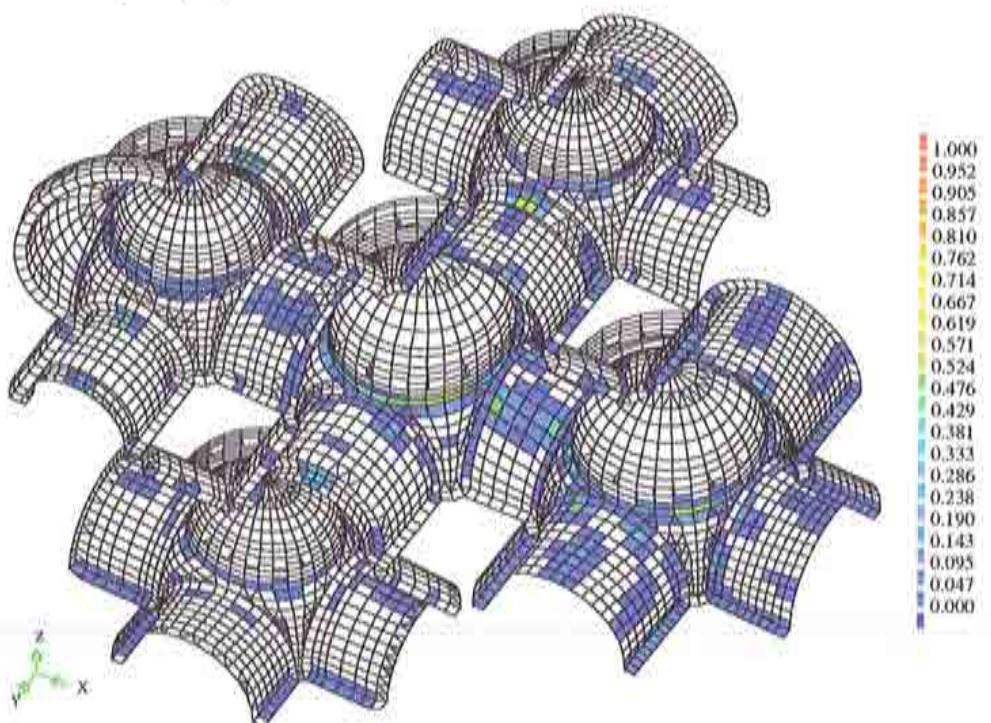


Figure 6.14 Mapas de daño elemental para un factor de 4. de peso propio.

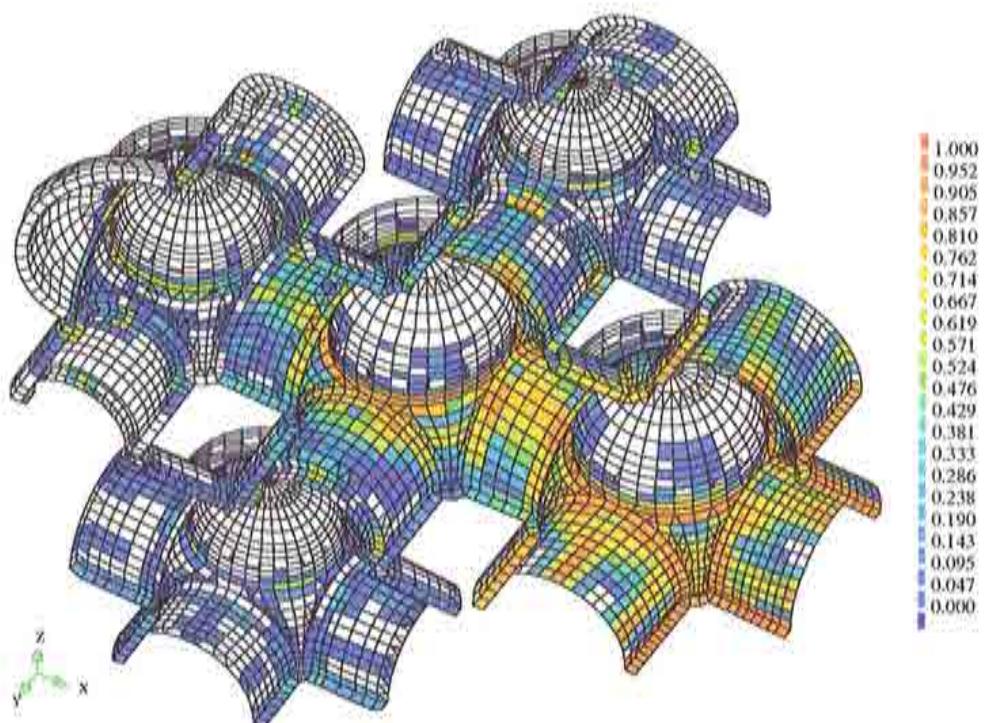


Figure 6.15 Mapas de daño elemental para un factor de 6.45 de peso propio.

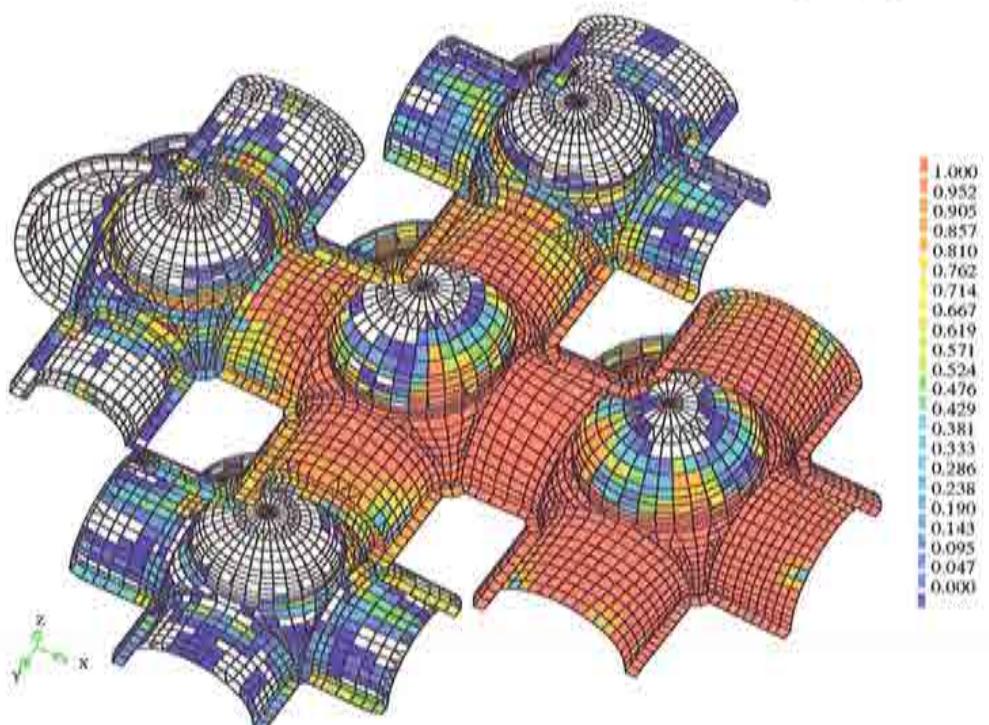


Figure 6.16 Mapas de daño elemental para un factor de 7.11 de peso propio.

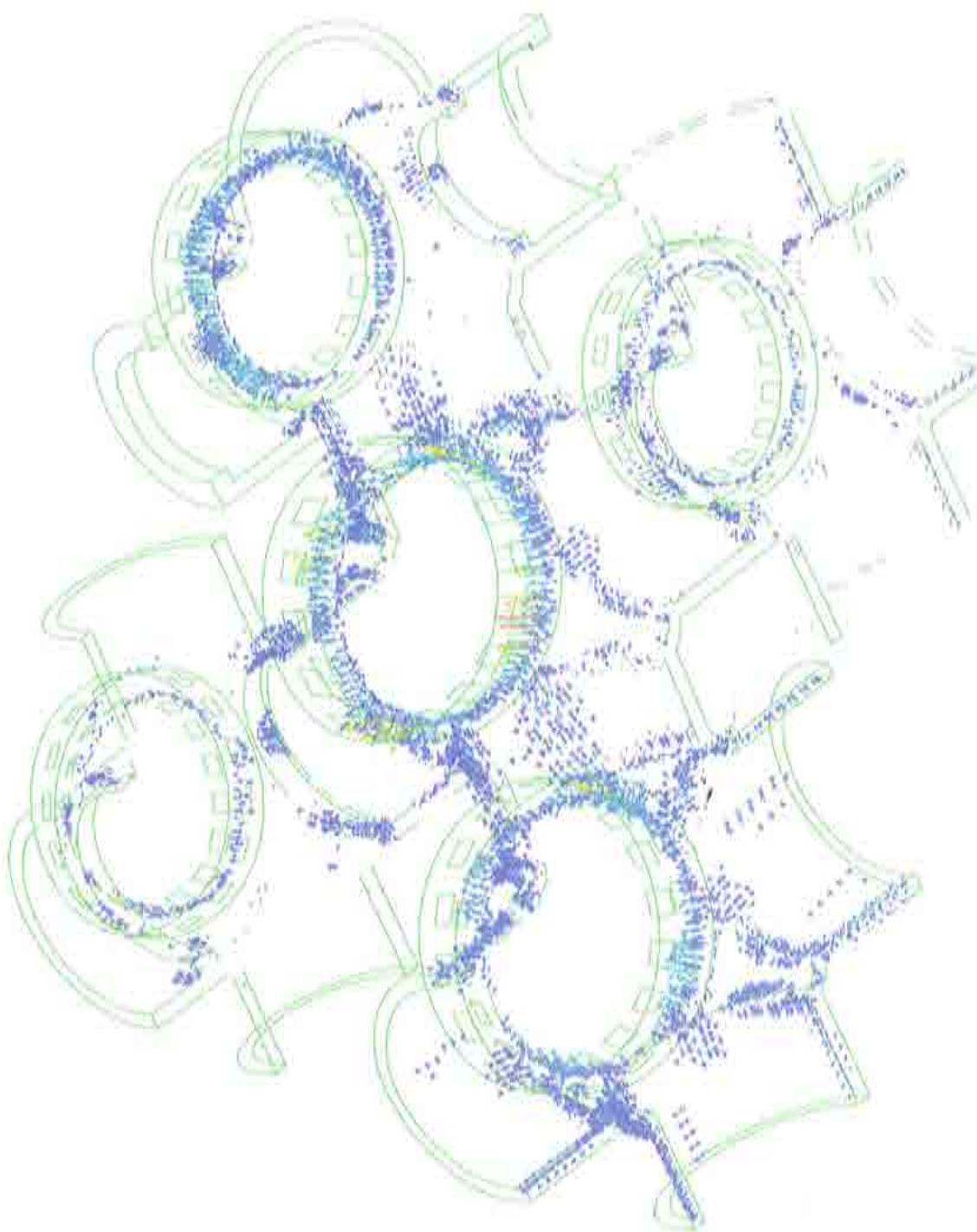


Figure 6.17 Fisuración para un factor de 5.75 de peso propio.

información acerca del orden cronológico del fallo de las distintas partes estructurales. La Figura 6.17 muestra la fisuración correspondiente a la carga de 5,75 veces el peso propio y viene a completar la información sobre las partes dañadas. Se observa que las zonas que se dañan primero son la base de las paredes cilíndricas de mampostería y los arcos de piedra centrales y comparando con la Figura 6.1 puede concluirse que el cálculo reproduce satisfactoriamente la situación real.

En este capítulo se ha empleado como herramienta de evaluación del estado estructural el índice global de daño de un elemento finito y se ha exemplificado su utilización en el análisis de patologías de la Basílica de San Marcos.

REFERENCIAS

- ACI-ASCE Committee 426 (1973). *The shear strength of reinforced concrete members*, Capítulos 1 a 4, Proceedings ASCE-Journal of Structural Division, **99**.
- Aguiar, R., Barbat, A. H., Reinhorn A. M. y Torres, C. J. (1993). *Vulnerabilidad y Daño Sísmico en Estructuras de Hormigón Armado*, Editorial ESPE, Ejecito Polytechnical School, Santa Clara, Valle de Los Chillos, Ecuador.
- Arrea, M. y Ingraffea, A. R. (1981). "Mixed Mode Crack Propagation in Mortar and Concrete", *Cornell University, Department of Structural Engineering, Report 81(13)*, Ithaca, New York.
- Aoyama, H. y Sugano, T. (1968). "A generalized inelastic analysis of reinforced concrete structures based on tests on members", *Recent Researches of Structural Mechanics*, Tokyo.
- ASCE Committee on Concrete and Masonry Structures (1981). Task Committee on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures: "A State-Of-The-Art Report on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures", *ASCE Special Publication*.
- Banon, H., Biggs, J. M. y Irvine, H. M. (1981). "Seismic Damage in Reinforced Concrete Frames", *Journal of Structural Division, ASCE*, **107(ST9)**, 1713-1729.
- Barbat, A. H. y Miquel Canet, J. (1989). *Structural Response Computations in Earthquake Engineering*, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K.
- Barbat, A. H., Oller, S., Oñate, E. y Hanganu, A. (1992a). "Simulation of Damage Phenomena in Reinforced Concrete Buildings Subjected to Seismic Actions", *Proceedings of the International Congress on Numerical Methods in Engineering. and Applied Sciences*, Concepción, Chile, H. Alder, J. C. Heinrich, S. Lavanchy, E. Oñate y B. Suárez (Editores.), CIMNE, Barcelona, **I**, 378-388.
- Barbat, A. H., Hanganu, A., Oñate, E. y Oller, S. (1992b). "Numerical Evaluation of The Seismic Damage Degree in Building Structures", *Proceedings de la Conferencia nacional "Incremento de la eficacia de las estructuras sismorresistentes"*, Iasi, Rumanía.

- Barbat, A. H., Hanganu, A., Oller, S. y Oñate, E. (1993). "Rigorous Damping Matrix for Finite Element Models with Viscous Behaviour", *Computing*, Bucarest, Rumanía, **5**, 1-4.
- Barbat, A. H., Hanganu, A., Oñate, E. y Oller, S. (1994). "Evaluation of the Damage Degree in Building Structures Subjected to Earthquakes", *Revue de Mécanique Appliquée* Bucarest, Rumanía, **39(1)**, 23-36.
- Barbat, A. H., Cervera, M., Cirauqui, C., Hanganu, A. y Oñate, E. (1995a), "Evaluación de la Presión de Fallo del Edificio de Contención de una Central Nuclear Tipo Pwr-W Tres Lazos. Parte II: Simulación Numérica", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Barcelona, **11(3)**, 451-475.
- Barbat, A. H., Oller, S., Oñate, E. y Hanganu, A. (1995b). *Viscous Damage Model for Timoshenko Beam Structures*, International Center for Numerical Methods in Engineering, Barcelona, **77**.
- Barbat, A. H., Yépez Moya, F. y Canas, J. A. (1996). "Damage Scenarios Simulation for Seismic Risk Assessment in Urban Zones", *Earthquake Spectra*, Oakland, California, **12(3)**, 371-394.
- Barbat, A. H., Oller, S., Oñate, E. y Hanganu, A. (1997). "Viscous Damage Model for Timoshenko Beam Structures", *International Journal for Solids and Structures*, en curso de publicación.
- Bathe, K. J. (1982). *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, USA.
- Bažant, Z. P. (1986). "Mechanics of Distributed Cracking", *Applied Mechanics Revue*, **39**, 676-705.
- Bažant, Z. P., Pijaudier-Cabot, G. y Berthaud, Y. (1990). "Modeling of Cracking Induced Damage in Particulate and Fiber-Reinforced Composites" (ASME Winter Annual Meeting, Dallas, Texas, Noviembre), AMD **111**, editado por G.J. Dvorak y D.C. Lagoudas, 87-94.
- Bažant, Z. P. y Carol, I. (1990). "Geometric Damage Tensor Uncoupled from Constitutive Properties and Current Status of Strain-Softening Models." en *Development in Theoretical and Applied Mechanics*, (Proceedings 15th Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics, Georgia Inst. of Tech., Atlanta), editado por S. V. Hanagud, et al., **15**, 927-933.

- Bažant, Z. P. (1991). "Physical Argument for Nonlocality of Microcracking Damage in a Continuum", *Horst Lippmann 60th Birthday Volume*, editado por O. Brüller, V. Mannl y J. Najar, Springer Verlag, Berlin.
- Bažant, Z. P. (1994). "Nonlocal Damage Theory Based on Micromechanics of Crack Interactions." *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, **120**(3), 593-617; Addendum and Errata **120**, 1401-02.
- Bažant, Z. P. y Kazemi, M. T. (1994). "Localization of Softening Damage in Frames and Implications for Earthquake Resistance". *Proceedings 5th U.S. National Conference on Earthquake Engineering* (Chicago, Julio 1994), Earthquake Engineering Research Institute, Oakland, California, **1**, 313-322.
- Bažant, Z. P. (1995). "Creep and Damage in Concrete." *Materials Science of Concrete IV*, J. Skalný y S. Mindess, Editors: American Ceramical Society, Westerville, Ohio, 355-389.
- Bažant, Z. P. y Jirásek, M. (1995). "Continuum Damage due to Interacting Propagating Microcracks: New Nonlocal Model and Localization Analysis." en *Fracture of Brittle, Disordered Materials – Concrete, Rock and Ceramics* (Proceedings IUTAM Symposium held in Brisbane, 1993), editado por G. Baker y B. L. Karihaloo, E & FN Sponsors, 423-437.
- Betten, J. (1992). "Applications of Tensor Functions in Continuum Damage Mechanics", *International Journal of Damage Mechanics*, **1**, 47-59.
- Benjamin., J. R. y Cornell, C. A. (1970). *Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers*, McGraw-Hill.
- De Boeck, B. (1992). "A Review of Containment Accidents", *Fifth Workshop on Containment Integrity*, Washington, 37-50.
- De Borst, R. y Nauta, P. (1984). *Non-Orthogonal Cracks in a Smeared Finite Element Model*, Internal Report, Institute TNO for Building Materials and Building Structures, Delft, Olanda.
- Bracci, J. M., Reinhorn, A. M., Mander, J. M. y Kunath, S. K. (1989). "Deterministic Model for Seismic Damage Evaluation of Reinforced Concrete Structures", National Center for Earthquake Engineering Research, *Technical Report NCEER-89-0033*, State University of New York at Buffalo.

- Brebbia, C.A. y Leftheris, B. (Eds.) (1995). "Structural Studies of Historical Buildings", *Computational Mechanics Publication*.
- Çakmak, A. S. y DiPasquale, E. (1990a). "Detection of Seismic Structural Damage Using Parameter-Based Global Damage Indices", *Probabilistic Engineering Mechanics*, 51(2), 60-66.
- Çakmak, A. S. y DiPasquale, E. (1990b). "On the Relation Between Global Damage Indices and Local Damage Variables: Case of Elastic Damage", *ASCE Journal Structural Engineering*, 116(5).
- Çakmak, A. S. y DiPasquale, E. (1990c). "Seismic Damage Assessment Using Linear Models", *Soil Dynamamics and Earthquake Engineering*, 91(41), 194-215.
- Çakmak, A. S. y Nielsen, S. R. K. (1991). "Evaluation of Maximum Softening as a Damage Assessment for Reinforced Concrete Under Seismic Excitation", *Computational Stochastic Mechanics*, Elsevier, London, 169-184.
- Carol, I., Bažant, Z. P. y Prat, P.C. (1991). "Geometric Damage Tensor based on Microplane Model." *Journal of Engineering Mechanics* 117 (10), 2429-2448.
- Cervera, M. y Hinton, E. (1986). "Non-linear Analysis of Reinforced Plates and Shells using a Three Dimensional Model" en *Computational Modelling of Reinforced Concrete Structures*, Pineridge Press.
- Cervera, M., Hinton E. y Bicanic, N. (1987). "Non-linear Transient Dynamic Analysis of Three Dimensional Reinforced Concrete Structures" en *Numerical Methods in Transient and Coupled Problems*, John Wiley.
- Cervera, M., Hinton, E., Bicanic, N. y Bonet, J. (1988). "Non-linear Transient Analysis of Three Dimensional Structures – A Finite Element Program for Steel and Reinforced Concrete Materials" en *Numerical Methods and Software for Dynamic Analysis of Plates and Shells*, Pineridge Press.
- Cervera, M., Oliver, J., Herrero, E. y Oñate, E. (1990). "A Computational Model for Progressive Cracking in Large Dams due to Swelling of Concrete", *Engineering Fracture Mechanics*, 35(1-3), 575-585.
- Cervera, M., Oliver, J. y Galindo, M. (1991). *Simulación Numérica de Patologías en Presas de Hormigón*, Monografía CIMNE 4, Barcelona.

- Cervera, M., Oliver, J. y Galindo, M. (1992). "Numerical Analysis of Dams with Extensive Cracking Resulting from Concrete Hydration: Simulation of a Real Case", *Dam Engineering*, Vol. **3**(1).
- Cervera, M., Barbat, A. H., Hanganu, A., Oñate, E. y Cirauqui, C. (1995), "Evaluación de la Presión de Fallo del Edificio de Contención de una Central Nuclear Tipo PWR-W Tres Lazos. Parte I: Metodología", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Barcelona, **11**(2), 271-293.
- Chung, Y. S., Meyer, C. y Shinozuka, M. (1988). "Automated Seismic Design of Reinforced Concrete Buildings", National Center for Earthquake Engineering Research, *Technical Report NCEER-88-0024*, State University of New York at Buffalo.
- Cirauqui, C., Barbat, A. H. y Hanganu, A. (1994). *Análisis de la Presión de Fallo del Edificio de Contención de la C.N. Vandellós II. Análisis Probabilista*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, **IT-132**.
- Clough, R. W., Benuska, K. L. y Wilson, E. L. (1965). "Inelastic Earthquake Response of Tall Buildings", *Proceedings of the Third World Conference on Earthquake Engineering*, Auckland, New Zealand, **2**, 68-89.
- Collepardi, M., Coppola L. y Monosi, S. (1989). "Chemical Attack of Calcium Chloride on the Portland Cement Paste", *il Cemento*, **2**, 97-104.
- Collepardi, M. (1990). "Degradation and Restoration of Masonry Walls of Historical Buildings", *Material and Structures*, **23**, 81-102.
- Cosenza, E., Manfredi, G y Ramasco, R. (1993). "The Use of Damage Functions in Earthquake Engineering: A Comparison between Different Methods", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **22**, 855-868.
- Creazza, G. (1993). "Structural Behaviour of San Marco Basilica", Venice *IABSE SEI*, **3**(1).
- Creazza, G., Saetta, A., Scotta, R., Vitaliani, R. y Oñate, E. (1995). "Mathematical Simulations of Structural Damage in Historical Buildings", *Structural Studies of Historical Buildings IV*, C.A. Brebbia and B. Leftheris (Eds.), 1 ,111.
- Crisfield, M. A. (1991). *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley.

- DiPasquale, E. y Çakmak, A. S. (1987). "Detection and Assessment of Seismic Structural Damage", National Center for Earthquake Engineering Research, *Technical Report NCEER-87-0015*, State University of New York at Buffalo.
- DiPasquale, E. y Çakmak, A. S. (1989). "On the Relation between Local and Global Damage Indices", National Center for Earthquake Engineering Research, *Technical Report NCEER-89-0034*, State University of New York at Buffalo.
- DiPasquale, E. y Çakmak, A. S. (1990). "Detection of Seismic Structural Damage Using Parameter-Based Global Indices", *Probabilistic Engineering Mechanics*, 51(2), 60-66.
- Donea, J. (editor) (1980). *Advanced Structural Dynamics*, Applied Science Publishers Limited, London, U.K.
- ENCO (ed) (1990). *Materiali negli Edifici Storici: Degrado e Restauro*, por Colleopardi, M., Coppola, L., Spresiano.
- Faria, R. y Oliver, J. (1993). *A Rate Dependent Plastic-Damage Constitutive Model for Large Scale Computation in Concrete Structures*, Monografía CIMNE, 17, Barcelona.
- Fauske & Associates, Inc. (1990). *MAAP-3.0B — Modular Accident Analysis Program for LWR Power Plants*, EPRI Report NP-7071-CCML, Palo Alto, California.
- Feodosiev, A. (1978). *Resistencia de Materiales*, Editorial Mir.
- Flies, E. (1975). *Estabilidad II*, Editorial Kapeluz.
- Hanganu, A. (1991). *Estudio de la Formulación por Capas de Estructuras de Barras de Hormigón Armado con Comportamiento Elasto-Plástico*, Tesis M.Sc., Barcelona, UPC.
- Hanganu, A., Oller, S., Oñate, E. y Barbat, A. H. (1993a). "Evaluación del Daño Sísmico en Modelos 3D de Edificios de Hormigón Armado", *Segundo Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, La Coruña, España, Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería (SEMNI), Editores: F. Navarrina y M. Casteleiro, 1, 243-252.
- Hanganu, A., Oller, S., Oñate, E. y Barbat, A. H. (1993b). "A Finite Element Model for Damage Analysis of Nuclear Reactor Containment Shells", *2nd National Conference on Boundary and Finite Element*, Sibiu, Rumanía, 2.2, 65-75.

- Hanganu, A., Barbat, A. H., Oller, S. y Oñate, E. (1994a). *Evaluación del Daño Sísmico en Estructuras de Hormigón Armado*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, **IS-4 y Laboratorio de Estructuras**, Universidad de Tucumán, San Miguel de Tucumán, Argentina, **D-03-94**.
- Hanganu, A., Cervera, M., Cirauqui, C., Martel, E., Oñate, E. y Barbat, A. H. (1994b). *Análisis de la Presión de Fallo del Edificio de Contención de la C.N. Vandellós II. Modelo Tridimensional*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, **IT-118**.
- Hanganu, A., Cirauqui, C., Cervera, M., Martel, E., Oñate, E. y Barbat, A. H. (1994c). *Análisis de la Presión de Fallo del Edificio de Contención de la C.N. Vandellós II. Modelo Tridimensional con Losa de Cimentación*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, **IT-125**.
- Hanganu, A., Cervera, M., Barbat, A. H. y Cirauqui, C. (1994d). *Análisis de la Presión de Fallo del Edificio de Contención de la C.N. Vandellós II. Simulación de la Prueba de Integridad Estructural de la Contención*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, **IT-130**.
- Hanganu, A., Cervera, M. y Oñate, E. (1994e). *Análisis de la Presión de Fallo del Edificio de Contención de la C.N. Vandellós II. Modelo Tridimensional con Carga Térmica*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, **IT-133**.
- Hanganu, A., Oñate, E., Cervera, M. y Barbat, A. H. (1995). "Failure Pressure Evaluation for the Containment Shell of a Nuclear Power Plant", *Third International Conference on Boundary and Finite Elements*, Constanța, Rumanía, **2.2**, 90-99.
- Hassotis, S. y Jeong, G. D. (1993). "Assessment of Structural Damage from Natural Frequency Measurements", *Computers and Structures*, 49(4), 679-691.
- Hirschfeld, K. (1986). *Estática en la Construcción*, Editorial Reverté.
- Hofstetter, G. y Mang, A. H. (1995). *Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures*, Editorial Vieweg, Viena, Austria.
- IABSE (ed) (1993). *Structural Preservation of the Architectural Heritage*, IABSE Symposium, Roma.

- IDCOR (1983). *Technical Report 10.1. Containment Structural Capability of Light Water Nuclear Power Plants*, The Industry Degraded Core Rulemaking Program, July.
- Kachanov, L. (1958). "Time of Rupture Process under Creep Conditions", *Izvestia Akademii Nauk* 8, 26-31 (in Russian).
- Kachanov, L.M. (1980). "Continuum Model of Medium with Cracks", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, **106(5)**, 1039-1051.
- Karian, Z. y Dudewicz, E. (1991). *Modern Statistical Systems and GPSS Simulation*, Computed Science Press, New York.
- Kunnath, S. K., Reinhorn, A. M. y Park, Y.-J. (1989). "MacroModeling of R/C Building Structures for Seismic Damage Analysis", *Proceedings of 2nd East Asia Pacific Conference on Structural Engineering and Construction*, Bangkok, Thailandia, 3, 7984.
- Kupfer, H. B. y Gerstle, K. K. (1973). "Behaviour of Concrete under Biaxial Stresses", *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, **99(4)**, 853-866.
- Lemaitre, J. (1984). "How to use Damage Mechanics", *Nuclear Engineering and Design*, **80**, 233-245.
- Lemaitre, J. (1985). "A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture", *Journal Engineering Material Techniques*, **107**, 83-89.
- Lybas, J. y Sozen, M. (1977). *Effect of Beam Strength and Stiffness on Dynamic Behaviour of Reinforced Concrete Coupled Walls*, Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 444, University of Urbana, Illinois.
- Lubliner, J., Oliver, J., Oller, S. y Oñate, E. (1989). A Plastic-Damage Model for Concrete, *International Journal of Solids and Structures* **25(3)**, 299-326.
- Lubliner, J. (1990). *Plasticity Theory*, Macmillan Publishing Company, New York.
- Mang, H. A. y Meschke, G. (1991). "Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Structures", *Engineering Structures*, **13**, 211-226.
- Mang, H. A., Bičanić, N. y de Borst, R. (Eds.) (1994). "Computer Modeling of Concrete Structures", *Proceedings EURO-C*, Innsbruck, Austria.

- Mark, R. y Çakmak, A. S. eds. (1992). "Hagia Sophia from the Age of Justinian to the Present", *Proceedings International Colloquium held at Princeton University in 1990*, New York: Cambridge University Press.
- Massonet, Ch. y Save, M. (1966). *Cálculo Plástico de las Construcciones*, Montaner y Simon S.A., Barcelona.
- Mazars, J. y Bažant, Z. P., Editors (1989), "Damage, Localization and Size Effect", *Proceedings of France-U.S. Workshop*, E.N.S., Cachan, Francia, publicado por Elsevier, Londres.
- Mazars, J. (1991). "Damage Models for Concrete and their Usefulness for Seismic Loadings", *Experimental and Numerical Methods in Earthquake Engineering*, J. Donea y P.M. Jones (editores), ECSC, EEC, EAEC, Brussels and Luxemburg, 199-221.
- Moyer, C. y Roufael, M. S. L. (1983). "Analysis of Damaged Concrete Frames for Cyclic Loads", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **11**, 207-228.
- Mola, F. y Vitaliani, R. (1997). *Analysis, Diagnosis and Preservation of Ancient Monuments: St. Mark's Basilica in Venice*, en "Structural Analysis of Historical Constructions: Possibilities of Numerical and Experimental Techniques", Editores P. Roca, J. L. González, A. R. Martí y E. Oñate, CIMNE, Barcelona, 166-188.
- Mørk, K. J. (1992). "Stochastic Analysis of Reinforced Concrete Frames under Seismic Excitation", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **11**(3).
- Ngo, D. y Scordelis, A. C. (1967). "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams", *ACI Journal*, **64**, 152-163.
- Nielsen, S. R. K. y Çakmak, A. S. (1991). "Evaluation of Maximum Softening as a Damage Indicator for Reinforced Concrete under Seismic Excitation," *Computational Stochastic Mechanics*, Elsevier, London, 169-184.
- Nielsen, S. R. K. y Çakmak, A. S. (1992). "Evaluation of Maximum Softening Damage Indicator for Reinforced Concrete Under Seismic Excitation", *Proceedings of the 1st International Conference on Computational Stochastic Mechanics*, Eds. Spanos y Brebbia, 169-184.

- Nielsen, S. R. K., Köylüoglu, H. U. y Çakmak, A. S. (1992). "One and Two-Dimensional Maximum Softening Damage Indicators for Reinforced Concrete Structures under Seismic Excitation", *Soil Dynamics Earthquake Engineering*, 11, 435-443.
- Nielsen, S. R. K., Skjærbaek, P. S., Köylüoglu, H. U. y Çakmak, A. S. (1995). "Prediction of Global Damage and Reliability based upon Sequential Identification and Updating of RC Structures subject to Earthquakes", *Proceedings of the 7th International Conference on Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Chania, Creta, Grecia.
- Oliver, J., Cervera, M., Oller, S. y Lubliner, J. (1990). Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis of Concrete. *Proceedings 2nd ICRAADCS*, Zell Am See, Austria, Pineridge Press, 2, 945-958.
- Oller, S. (1988). *Un Modelo de "Daño Continuo" para Materiales Friccionales*, Tesis doctoral, UPC-ETSECCP-Barcelona.
- Oller, S., Oliver, J., Cervera, M. y Oñate, E. (1990a). "Simulación de un Proceso de Localización en Mecánica de Sólidos mediante un Modelo Plástico". *Proceedings I Congreso Español de Métodos Numéricos*, Canarias, SEMNI, 423-431.
- Oller, S., Oñate, E., Oliver, J. y Lubliner, J. (1990b). "Finite Element Nonlinear Analysis of Concrete Structures using a Plastic-Damage Model", *Engineering Fracture Mechanics* 35(1/2/3), 219-231.
- Oller, S. (1991). *Modelización Numérica de Materiales Friccionales*, Monografía CIMNE 3.
- Oller, S., Barbat, A. H., Oñate, E. y Hanganu, A. (1992). "A Damage Model for the Seismic Analysis of Building Structures", *Proceedings Tenth World Conference on Earthquake Engineering*, Madrid. Balkema, Rotterdam, 5, 2593-2598.
- Oñate, E., Oliver, J. y Buggeda, G. (1986). "Finite Element Analysis of Nonlinear Response of Concrete Dams subject to Internal Loads", *Europe-US Symposium on Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, (Editado por Bergan, Bathe y Wunderlich) Springer Verlag.
- Oñate, E., Oller, S., Oliver, J. y Lubliner, J. (1988). "A Constitutive Model for Cracking of Concrete based on the Incremental Theory of Plasticity", *Engineering Computation*, 5, 309-320.

- Oñate, E. (1991). *Course on "Non Linear Analysis of Shells by Finite Elements"*, International Center for Mechanical Sciences, Udine, Italy, June 24th-28th.
- Oñate, E. (1992). *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE, Barcelona.
- Oñate, E. (1994). "Reliability Analysis of Concrete Structures. Numerical and Experimental Studies", *Evoluzione nella Sperimentazione per le Costruzioni*, 125-146, Seminar CISM, Merano.
- Oñate, E. y Hangam, A. (1996). *Simulación de la Corrosión de Armaduras en Elementos de Hormigón mediante un Modelo de Daño*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, 96.
- Oñate, E., Hangam, A., Barbat, A. H., Oller, S., Vitaliani, R., Saetta, A. y Scotta, R. (1997). *Structural Analysis and Durability Assessment of Historical Constructions Using a Finite Element Damage model*, en "Structural Analysis of Historical Constructions: Possibilities of Numerical and Experimental Techniques", Editores P. Roca, J. L. González, A. R. Martí y E. Oñate, CIMNE, Barcelona, 189-224.
- Owen, D. R. J. y Hinton, E. (1980). *Finite Elements in Plasticity*, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K.
- Park, Y.-J., Ang, A. H.-S. y Wen, Y. K. (1984). *Seismic Damage Analysis and Damage-Limiting Design of R.C. Buildings*, Civil Engineering Studies, Structural Research Series 516, University of Urbana, Illinois.
- Park, Y.-J. y Ang, A. H.-S. (1985). "Mechanistic Seismic Damage Model for Reinforced Concrete", ASCE, *Journal of Structural Engineering*, 111(4), 722-739.
- Park, Y.-J., Ang, A. H.-S. y Wen, Y. K. (1987). "Damage Limiting Aseismic Design of Buildings", *Earthquake Spectra*, 3(1), 1-26.
- Park, Y.-J., Reinhorn, A. M. y Kunath, S. K. (1988). "Seismic Damage Analysis of Reinforced Concrete Buildings", *Proceedings of 9th World Conference of Earthquake Engineering*, TokyoKyoto, Japan, 7, 211216.
- Parks, M. B., Spletzer, B. L., Lambert L. D. y Weatherby J. R. (1992). "Containment Performance Experiments under Severe Accident Loadings", *Sandia National Laboratories*.

- Pijaudier-Cabot, G. y Bažant, Z. P. (1987). "Nonlocal Damage Theory." *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE 113 (10), 1512–1533.
- Pijaudier-Cabot, G. y Bažant, Z. P. (1988). "Dynamic Stability Analysis with Non-local Damage." *Computers and Structures* 29 (3) 503–507.
- Postek, E., Oñate, E., Hanganu, A., Cirauqui, C. y Barbat, A. H. (1994a). *Análisis de la Presión de Fallo del Edificio de Contención de la C.N. Vandellós II. Modelo de Lámina de Revolución — Análisis Estático*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, **IT-110**.
- Postek, E., Hanganu, A., Oñate, E. y Barbat, A. H. (1994b). "Failure Analysis of Nuclear Reactor Containment Shells" *Proceedings 30th Polish Solid Mechanics Conference*, Zakopane, Polonia
- Rahman, S. y Grigoriu, M. (1994). "A Markov Model for Local and Global Damage Indices in Seismic Analysis," *Technical Report NCEER-94-0003*, National Center for Earthquake Engineering Research, Buffalo, NY.
- Rahman, S. and Grigoriu, M. (1997). "Local and Global Damage Indices in Seismic Analysis of Multi-Story Shear Buildings", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*.
- Reinhorn, A. M., Kunnath, S. K., Bracci, J. y Mander, J. (1989). "Normalized Damage Index for Evaluation of Buildings", in *Seismic Engineering: Research and Practice*, C.A. Kircher and A.K. Chopra (Editores), ASCE, New York, 507516.
- Roca, P. y Marí, A. R. (1993a). "Numerical Treatment of Prestressing Tendons on the Nonlinear Analysis of Prestressed Concrete Structures", *Computers and Structures*, **46**(5), 905-916.
- Roca, P. y Marí, A. R. (1993b). "Nonlinear Geometric and Material Analysis of Prestressed Concrete General Shell Structures", *Computers and Structures*, **46**(5), 917-929.
- Roca, P. y Hanganu, A. (1994). *Análisis de la Presión de Fallo del Edificio de Contención de la C.N. Vandellós II. Tratamiento del Sistema de Postesado*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, **IT-129**.
- Rodriguez Gomez, S. (1990). *Evaluation of Seismic Damage Indices for Reinforced Concrete Structures*, M.Sc. Tesis, Princeton University.

- Rodriguez Gomez, S. y Çakmak, A. S. (1990). "Evaluation of Seismic Damage Indices for Reinforced Concrete Structures", National Center for Earthquake Engineering Research, *Technical Report NCEER-90-0022*, State University of New York at Buffalo.
- Rodriguez Gomez, S., DiPasquale, E. y Çakmak, A. S. (1991). "Seismic Damage Assessment for Reinforced Concrete Structures", *Soil Dynamics Earthquake Engineering*, Elsevier, London, 515-544.
- Roufaiel, M. S. L. y Mayer, C. (1983). "Analysis of Damaged Concrete Buildings", *Technical Report No. NSF-CEE-81-21359-1*, Columbia University, New York.
- Saetta, A., Schreffler, B. D. y Vitaliani, R. (1993a). "The Carbonation of Concrete and the Mechanism of Moisture, Heat and Carbon Dioxide Flow through Porous Materials", *Cement and Concrete Research*, **23**, 761-772.
- Saetta, A., Scotta, R. y Vitaliani, R. (1993b). "The Numerical Analysis of Chloride Penetration in Concrete", *ACI Materials Journal*, **90**, 441-451.
- Schreffler, B. D. (1995). "Finite Elements in Environmental Engineering: Complete Thermo-Hydro-Mechanical Processes in Porous Media including Pollutant Transport", *Archives of Computational Methods in Engineering*, **2**, 3, 1-55.
- Skjærbaek, P. S., Nielsen, S. R. K. y Çakmak, A. S. (1996). "Damage Localization of Severely Damaged RC-structures based on Measured Eigenperiods from a Single Response", *Proceedings of the 4th International Conference on Localized Damage 96*, Fukuoka, Japon, 815-822.
- Skjærbaek, P. S., Nielsen, S. R. K., Kirkegaard, P. H. y Çakmak, A. S. (1997). "Case Study of Local Damage Indices Compared to Observed/Measured Damage for a 2-bay, 6-storey Model Test RC-Frame", *Proc. IMAC15: "New Horizons for Structural Damage Detection"*, Orlando, Florida, *Fracture and Dinamics*.
- Simó, J. C. y Ju, J. W. (1987a). "Strain and Stress Based Continuum Damage Models - Part I. Formulation.", *International Journal Solids and Structures*, Vol. **23**(7), 281-301.
- Simó, J. C. y Ju, J. W. (1987b). "Strain and Stress Based Continuum Damage Models - Part II. Computational Aspects", *International Journal Solids and Structures*, Vol. **23**, 841-869.

- Simó, J. C. y Hughes, T. J. R. (1988). *Elastoplasticity and Viscoplasticity, Computational Aspects*.
- Simó, J. C. y Hughes, T. (1995). *Elasto Plasticity, Computational Aspects*, Springer Verlag.
- Speis, T. y Eltawila, F. (1992). "Containment Severe Accident Phenomenology", *Fifth Workshop on Containment Integrity*, Washington, 21-31.
- Stephens, J. E. y Yao, J. P. T. (1987). "Damage Assessment Using Response Measurements", *ASCE Journal of Structural Engineering*, 113(4), 787-801.
- Walraven, J. C. (1978). *The Influence of Depth on the Shear Strength of Light-Weight Concrete Beams without Shear Reinforcement*, Report 5-78-4, Stevin Laboratory, Delft University of Technology, Delft.
- Wastiels, J. (1979). "Behaviour of Concrete under Multi-Axial Stresses: A Review", *Cement and Concrete Research*, Vol. 9, 35-44.
- Williams, M. S. y Sexsmith, R. G. (1995). "Seismic Damage Indices for Concrete Structures: A State-of-the-Art Review", *Earthquake Spectra*, 11(3), 319-349.
- Zienkiewicz, O. C. (1980). *El Método de los Elementos Finitos*, Editorial Reverté, Barcelona.
- Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L. (1991). *The Finite Element Method*, McGraw Hill.

AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren agradecer a las siguientes personas e instituciones la ayuda prestada en la realización de algunos de los ejemplos de este trabajo:

- ADIGSA
- Narcis Majó i Clavell
- Núria Ruiz i Queralt
- Agrupación Nuclear Vandellós
- Cruz Cirauqui
- Roberto Scotta
- Renato Vitaliani
- Universidad de Padua
- Universidad de Venecia

