

SINTESIS DISCRETA DE PORTICOS METALICOS PLANOS INCLUYENDO EL EFECTO P-DELTA

PIOTR BERKOWSKI*
MANUEL S. DOBLARE**

y
LUIS GRACIA**

**Instituto de Construcciones, Politécnica de Wroclaw,
Wybrzeze St. Wyspianskiego 27, 50-370 Wroclaw, Polonia.*

*Departamento de Ingeniería Mecánica,
C.P.S. de Ingenieros, Univ. de Zaragoza,
María de Luna 3, 50015 Zaragoza.*

RESUMEN

En este artículo se presenta un modelo matemático para la síntesis discreta de pórticos metálicos. El modelo de optimización está formulado en la forma de programación no lineal con restricciones. El problema de diseño consiste en la minimización del peso de la estructura. Se ha aplicado un método de análisis estructural teniendo en cuenta el efecto $P - \delta$. Se adjuntan ejemplos para determinar la influencia de los efectos geométricos de segundo orden a la hora de obtener la estructura óptima.

SUMMARY

A mathematical model of discrete synthesis of steel frameworks is presented in this paper. The optimization model is formulated in terms of a nonlinear programming problem with constraints. The design problem consists of minimizing the weight of the structure. The structural analysis method takes into account $P - \delta$ effects. Example analyses are conducted to estimate the influence of second-order geometrical effects on material distribution in the optimal structure.

INTRODUCCION

En el análisis estructural de pórticos multiplantas en edificios de gran altura hay que tener en cuenta la influencia de los efectos geométricos no lineales debidos al acoplamiento entre esfuerzo axil y flexión. Estos efectos adicionales de segundo orden se traducen generalmente en un incremento de los momentos flectores que aparecen en la estructura, y ser denominan efecto $P - \delta$ (Rutenberg¹, Neuss et al², Gaiotti et al³, Berkowski⁴). Puesto que este efecto influye en la distribución final de esfuerzos en la estructura, es evidente su influencia en los resultados obtenidos para el problema de optimización (Berkowski^{5,6}, Hall⁷).

Recibido: Marzo 1991

El problema de diseño se formula pues como la minimización del peso de la estructura teniendo en cuenta la influencia de los efectos $P - \delta$ (Berkowski^{5,6}). El método presentado tiene las siguientes características:

- Se consideran pórticos planos multiplanta y multivano.
- Las secciones de las barras son perfiles tipo I soldados.
- Las barras son rectas y de sección constante.
- Las dimensiones de los perfiles corresponden a valores normalizados.

Todas las restricciones que forman el espacio de diseño se han obtenido de la Norma Polaca de Diseño de las Estructuras de Acero⁸ (restricciones en tensiones, desplazamientos horizontales y verticales y restricciones en las dimensiones geométricas de las secciones de barras). De acuerdo con dicha Norma, las restricciones en desplazamientos se han considerado para cargas características, mientras que las restantes se han planteado para cargas ponderadas. La Norma⁸ polaca está basada en la teoría de estados límites de capacidad y servicio. La extensión a cualquier otra normativa sería inmediata sin más que modificar los coeficientes de seguridad incluyendo las restricciones pertinentes.

Las cargas que actúan sobre la estructura son conservativas y estáticas. En el programa presentado en este artículo sólo se considera una hipótesis de carga, pero la versión para múltiples hipótesis de carga puede implementarse sin ningún inconveniente.

En ningún punto de la estructura se sobrepasa la fase elástica del material, y se asume que no se produce el pandeo global de la misma. Los coeficientes de pandeo para los pilares de los pórticos traslacionales están calculados usando el diagrama del American Institution of Steel Constructions (Duan et al⁹). Se han considerado los fenómenos de pandeo lateral en forma de restricciones de carácter geométrico, y de pandeo local y de abolladura del alma en forma de restricciones de carácter geométrico y tensional de acuerdo a la Norma⁸. Asimismo, no se ha considerado el comportamiento anelástico del acero en los fenómenos de pandeo lateral y abolladura y tampoco el incremento de rigidez de paneles por efecto de la no linealidad geométrica.

El programa de ordenador incluye tanto a la obtención de la estructura óptima como los distintos tipos de análisis requeridos: análisis estructural lineal, análisis aproximado de segundo orden incluyendo el efecto $P - \delta$ y análisis con la matriz de rigidez de segundo orden con las funciones de estabilidad¹⁰.

El programa está escrito en FORTRAN 5.0 para ordenadores de tipo IBM PC AT/386, bajo sistema operativo MS-DOS.

MODELO MATEMATICO DE OPTIMIZACION

En el modelo presentado en este artículo se consideran como variables de diseño X . Para la sección soldada bisimétrica I se consideran las cuatro variables presentadas en la Figura 1.

El vector P de parámetros comprende el módulo de elasticidad del material (E), el coeficiente de Poisson (ν), la tensión admisible (R), las longitudes de las barras, las coordenadas de los nudos y la topología de la estructura.

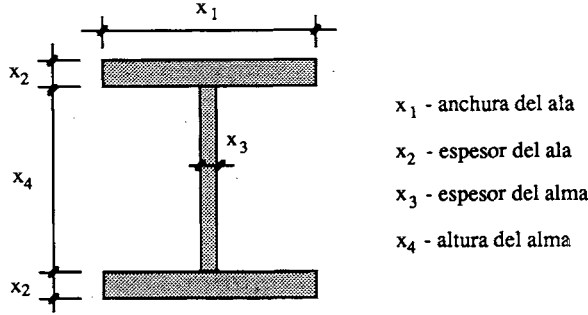


Figura 1. Variables de diseño.

El espacio de diseño está limitado por dos tipos de restricciones: restricciones explícitas (restricciones laterales), que se imponen directamente en una variable o grupo de variables y restricciones implícitas (restricciones en comportamiento), como limitaciones en tensiones y desplazamientos.

Todas las restricciones se pueden presentar de manera detallada en la forma siguiente:

1. Restricciones geométricas: $Q_g(\mathbf{X}, \mathbf{P})$:

$$x_{imin} = x_{il} < x_{i\eta} < x_{ik} = x_{imax}$$

$$\begin{aligned} x_{i\eta} - x_{i\eta-1} &= \delta x_1 \\ x_{imax} - x_{imin} &= 2^q \delta x_1 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\eta = 1(\min), \dots, k(\max), \quad i = 1, \dots, j, \quad q \in \{\mathbf{I}\}$$

2. Restricciones en tensiones: $Q_s(\mathbf{X}, \mathbf{P})$:

$$\frac{\sigma_k(\mathbf{X}, \mathbf{P})}{R_k} - 1 \leq 0 \quad k = 1, \dots, c \quad (2)$$

3. Restricciones de pandeo local y abolladura del alma: $Q_{lj}(\mathbf{X}, \mathbf{P})$:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_l(\mathbf{X}, \mathbf{P})}{R_l} - 1 &\leq 0 \quad l = 1, \dots, d \\ f_t(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &\leq a_t \quad t = 1, \dots, e \end{aligned} \quad (3)$$

4. Restricciones de pandeo lateral: $Q_{pl}(\mathbf{X}, \mathbf{P})$:

$$f_s(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \leq a_s \quad s = 1, \dots, f \quad (4)$$

5. Restricciones en desplazamientos: $Q_d(\mathbf{X}, \mathbf{P})$:

$$\begin{aligned} v_{mh}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &< v_{mhp} \quad m = 1, \dots, g \\ v_{nv}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &< v_{nvp} \quad n = 1, \dots, h \end{aligned} \quad (5)$$

donde $x_{imin}(= x_{i1}), x_{imax}(= x_{ik}), \delta x_i$ son el valor mínimo y máximo de la variable i y el valor de crecimiento discreto de la variable i , respectivamente; x_{in} es el valor actual de la variable de diseño i ; σ_k, R_k son el valor real de la tensión y su valor admisible para las restricciones en tensiones, respectivamente; σ_l, R_l son el valor real de la tensión y su valor admisible para las restricciones de pandeo local; f_a, f_t son el valor real del parámetro geométrico y su valor admisible para las restricciones de abolladura del alma; f_s, a_s son el valor real del parámetro geométrico y su valor admisible para las restricciones de pandeo lateral; v_{mh}, v_{mhp} son los valores reales de los desplazamientos horizontales y sus valores admisibles; v_{nv}, V_{nvp} son los valores reales de los desplazamientos verticales y sus valores admisibles.

El espacio de diseño viene definido por

$$EDD = Q_g \cap Q_s \cap Q_{ls} \cap Q_{pl} \cap Q_d \neq \{\emptyset\} \quad (6)$$

La función objetivo para el modelo de optimización presentado en este artículo es el peso de la estructura. Dicha función se puede expresar como:

$$FOG(X, P) = \gamma \left\{ \sum_p^{LP} A_p(X, P) L_p + \sum_p^{LP} V_p(X, P) \right\} \quad p = 1, \dots, LP \quad (7)$$

donde $FOG, LP, A_p, L_p, V_p, \gamma$ son la función objetivo global, el número de barras, el área de la sección de cada barra, la longitud de cada barra, el volumen de los posibles rigidizadores transversales en cada barra y el peso específico del material usado para la estructura ($\gamma = 78,7 kN/m^3$), respectivamente. Los dimensionamientos de los rigidizadores transversales se han conducido de acuerdo con el presentado por Annamalai et al¹¹.

En términos algebraicos, el problema de diseño de la estructura de peso mínimo en el espacio definido por la expresión (6) es el siguiente

$$FOG(X^*, P) = \min_{X^* \in EDD} FOG(X, P) \quad (8)$$

donde X^* es el vector óptimo de variables de diseño.

METODO DE PROGRAMACION MATEMATICA

Para resolver el problema de optimización directa planteado, se ha aplicado el método de programación matemática para variables discretas denominado "backtrack". Este método combinatorio puede ser usado para resolver problemas de minimización de funciones no lineales con restricciones. El algoritmo del método "backtrack" para la búsqueda del vector óptimo para cuatro variables se presenta en la Figura 2. El método "backtrack" es muy efectivo en problemas cuya resolución da lugar a una disminución progresiva de la función objetivo. Para reducir el número de iteraciones en el proceso de optimización se ha aplicado un método de "interval halving". El algoritmo utilizado se presenta en la Figura 3.

Ambos métodos han sido aplicados con gran éxito por Farkas¹², para resolver problemas de optimización de peso o de coste mínimo.

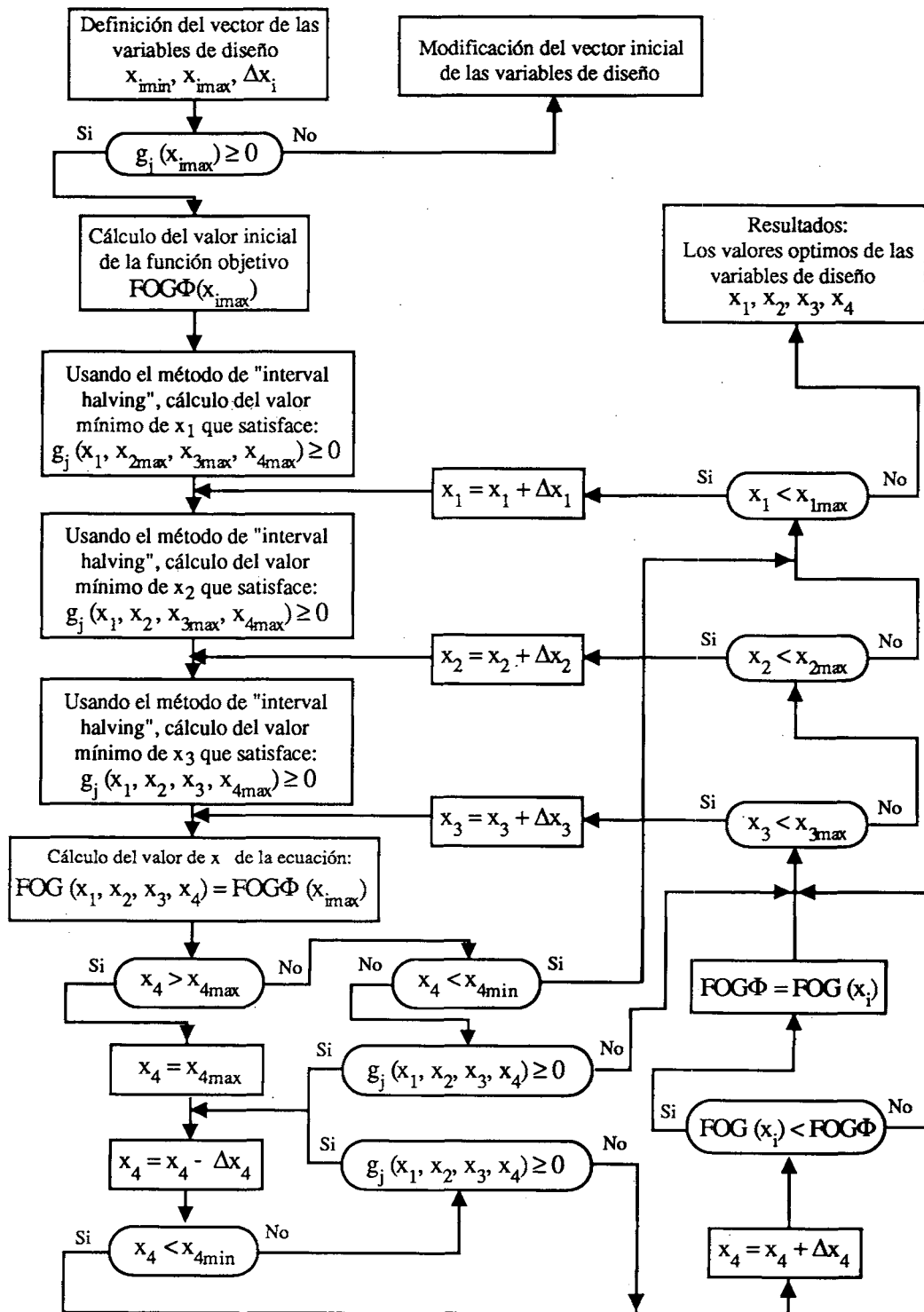


Figura 2. Algoritmo del método "backtrack" para cuatro variables de diseño.

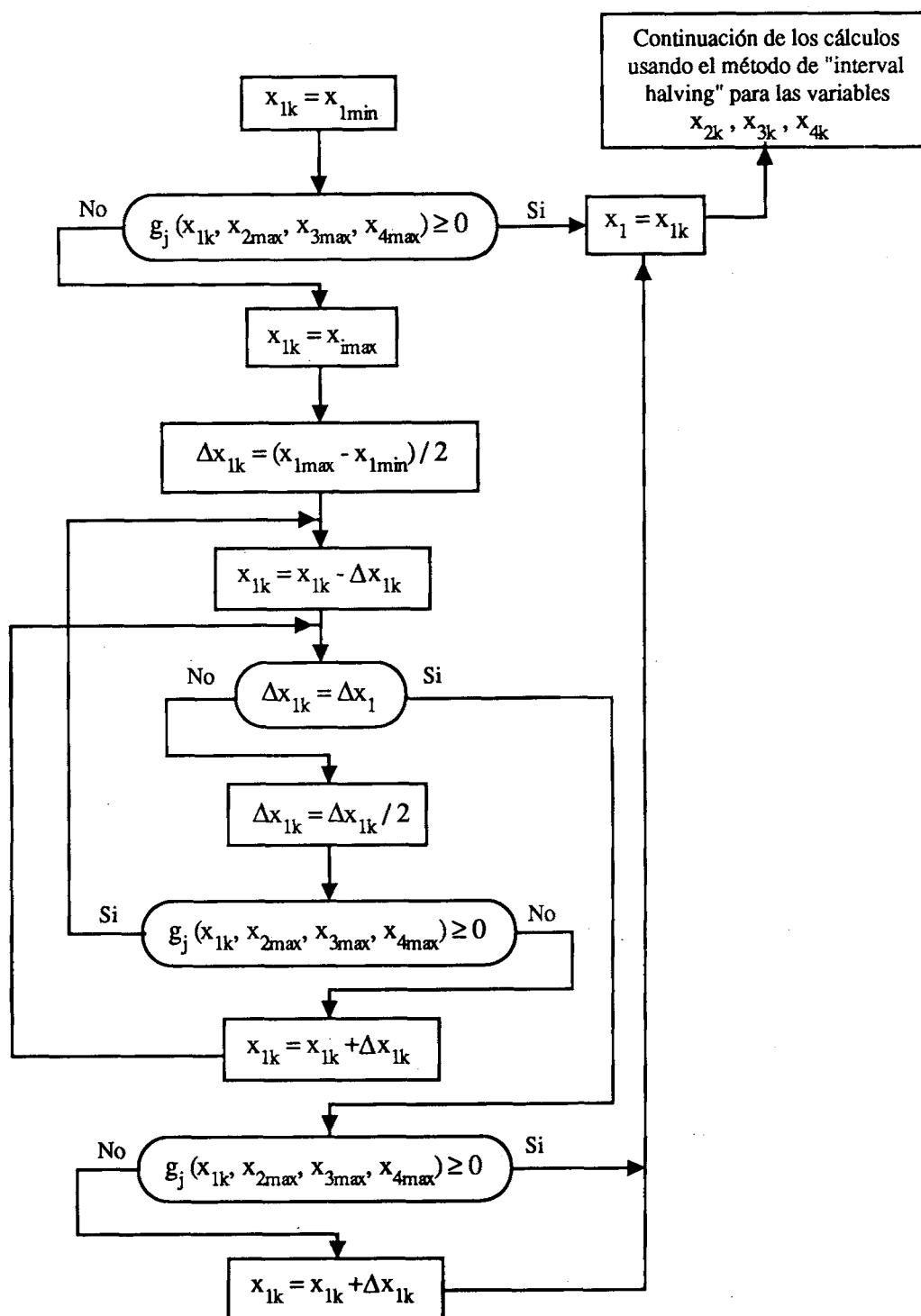


Figura 3. Algoritmo del método "interval halving" para una variable de diseño.

ANALISIS DE SEGUNDO ORDEN INCLUYENDO EL EFECTO P-DELTA

Para obtener los valores de desplazamientos y esfuerzos en la estructura debidos a los efectos de segundo orden (efecto *P - delta*) se ha utilizado un método aproximado propuesto por Rutenberg¹, Gaiotti et al³. En este método iterativo el efecto de la influencia de la acción de las cargas verticales sobre la geometría deformada de la estructura es transformado mediante iteraciones sucesivas en cargas laterales equivalentes.

En este método, el efecto *P - delta*, se tiene en cuenta añadiendo un momento flector de segundo orden M_i en cada planta i del pórtico (Figura 4). Este momento se calcula como:

$$M_i = \left(\sum_{j=1}^k N_{i,j} \right) (v_i - v_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n \quad (9)$$

donde $N_{i,j}$ es el esfuerzo axil en el pilar j de la planta i ; v_i y v_{i-1} son los desplazamientos horizontales en las plantas i e $i - 1$, respectivamente; k es el número de pilares en la planta i ; y n es el número de plantas. Estos momentos adicionales de segundo orden se introducen a través de cargas laterales equivalentes H_i en cada planta (Figura 4).

$$H_i = M_i / h_i = \left(\sum_{j=1}^k N_{i,j} \right) (v_i - v_{i-1}) / h_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

donde h_i es la altura de la planta, y el vector de los esfuerzos laterales queda en la forma

$$\mathbf{H}^T = (H_i \ H_{i-1} \dots H_2 \ H_1 \ H_1 - H_2) \quad (11)$$

donde i es el número de la planta.

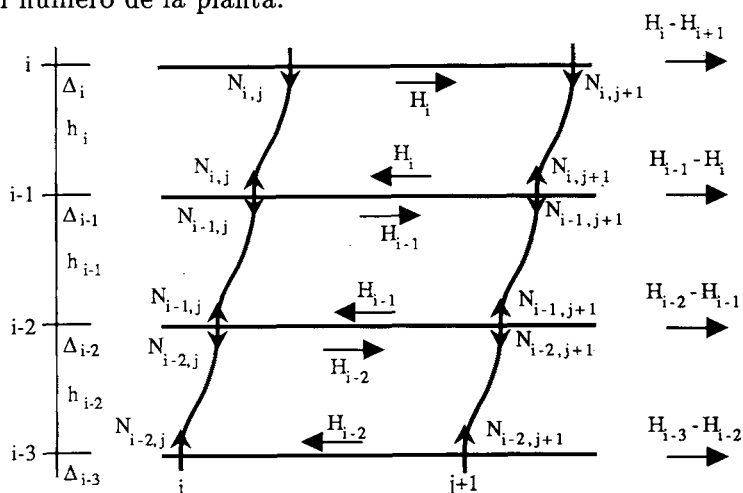


Figura 4. Esfuerzos laterales equivalentes en el método *P - delta*.

Este vector de esfuerzos adicionales H , se añade a los valores de las cargas laterales F , para obtener el vector de cargas globales, y la ecuación de equilibrio que se plantea es

$$F + H = Kv \quad (12)$$

donde K es la matriz de rigidez global de la estructura; v es el vector de desplazamientos; y F es el vector de cargas laterales equivalentes.

En este método, el eje de la barra se aproxima mediante una curva (Rutemberg¹, Berkowski⁴). Para tener en cuenta los efectos adicionales causados por la curvatura del eje (flexión adicional de los pilares con el resultado de una disminución de rigidez a flexión debido a la influencia de los esfuerzos axiales), se introduce un coeficiente α , que depende de los desplazamientos de las plantas y de la rigidez de las barras, y que se calcula para cada planta como un valor promedio del correspondiente a los pilares de dicha planta

$$\alpha_{ij} = 1 + 0.2 \left[1 - (\bar{\theta}_{1j} + \bar{\theta}_{2j}) - 2(\bar{\theta}_{1j}^2 + \bar{\theta}_{2j}^2 - 0.5\bar{\theta}_{1j} + \bar{\theta}_{2j})/3 \right] \quad (13a)$$

$$\alpha_i = \frac{\sum_j \alpha_{ij}}{j} \quad (13b)$$

donde α_i es el coeficiente para el pilar j de la planta i ; $\bar{\theta}_{1j} = \theta_{1j}/\psi_j$, $\bar{\theta}_{2j} = \theta_{2j}/\psi_j$, y θ_{1j} , θ_{2j} , ψ_j son los valores de las rotaciones totales en los nudos superior e inferior de cada barra, y los valores de las rotaciones en la cuerda, respectivamente.

Para la iteración inicial del método $P - \delta$ modificado los valores de θ_{1j} , θ_{2j} y ψ_j están tomados del análisis lineal, y para las iteraciones siguientes del análisis de segundo orden.

De acuerdo con este planteamiento, la ecuación (10) toma la forma

$$H_i = \alpha_i M_i / h_i = \alpha_i \left(\sum_{j=1}^k N_{i,j} \right) (v_i - v_{i-1}) / h_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (14)$$

El proceso iterativo del método $P - \delta$ se presenta en la Figura 5, donde la línea curva representa la dependencia real entre los desplazamientos y las cargas, y las ecuaciones correspondientes son

- Paso 1

$$v_1 = K^{-1} F_1 \quad (15)$$

- Paso r

$$v_r = K^{-1} [F_1 + H_r] K^{-1} F_r \quad (16)$$

El proceso iterativo termina cuando

$$v - v_{r-1} > EPS \quad (17)$$

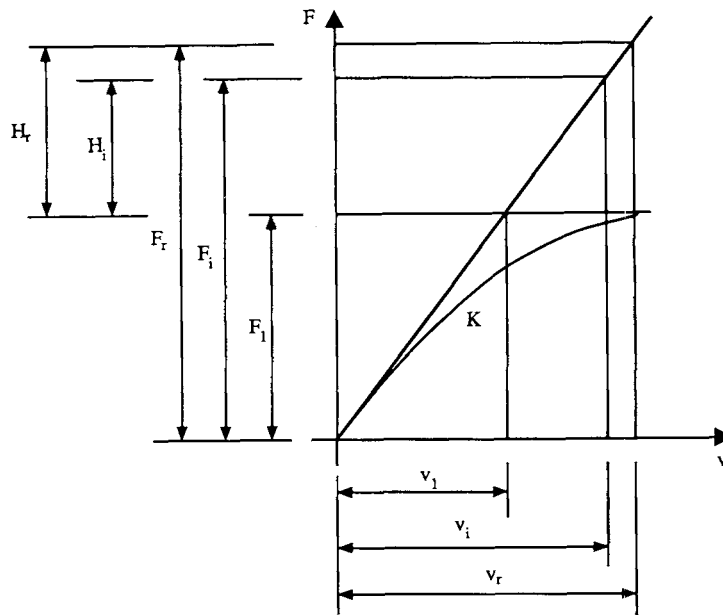


Figura 5. Proceso iterativo del método $P - \delta$.

donde EPS es la tolerancia (en este trabajo se ha tomado el valor de 0.1%).

El número de iteraciones se ha limitado a cinco, porque cuando el proceso de iteración del método $P - \delta$ necesita más de cinco pasos es señal de que la estructura puede pandear (Gaiotti et al³).

PROCESO DE SINTESIS OPTIMA

El proceso de síntesis discreta de pórticos se puede resumir en las siguientes etapas:

- 1.- Se forma el vector inicial de variables de diseño, de acuerdo con las exigencias del método "backtrack". Este vector tiene que satisfacer todas las restricciones. Se calcula el valor inicial de la función objetivo.
- 2.- Se realiza el análisis estructural para los valores máximos del vector de las variables de diseño.
- 3.- Las restricciones en tensiones (para las cargas ponderadas) y en desplazamientos para las cargas características deben verificarse. Cuando no se satisfacen, hay que modificar el vector inicial de variables de diseño.
- 4.- Usando el método "backtrack" con el procedimiento de "interval halving" para cada variable, se busca el valor mínimo que satisface todas las restricciones. Los cálculos se realizan para los esfuerzos obtenidos en el análisis estructural del paso 2. También se calcula el valor actual de la función objetivo, y cuando es menor que el valor del paso anterior, se toma el valor actual.
- 5.- Se realiza el análisis estructural para el vector actual de las variables de diseño.
- 6.- Se repite el paso 4, pero con los esfuerzos calculados en el paso 5.
- 7.- El proceso de síntesis termina cuando la diferencia entre el valor de la función

objetivo global en dos pasos consecutivos respecto al valor del último paso considerado, $(FOG_m - FOG_{m+1})/FOG_{m+1}$, es menor que la tolerancia permitida.

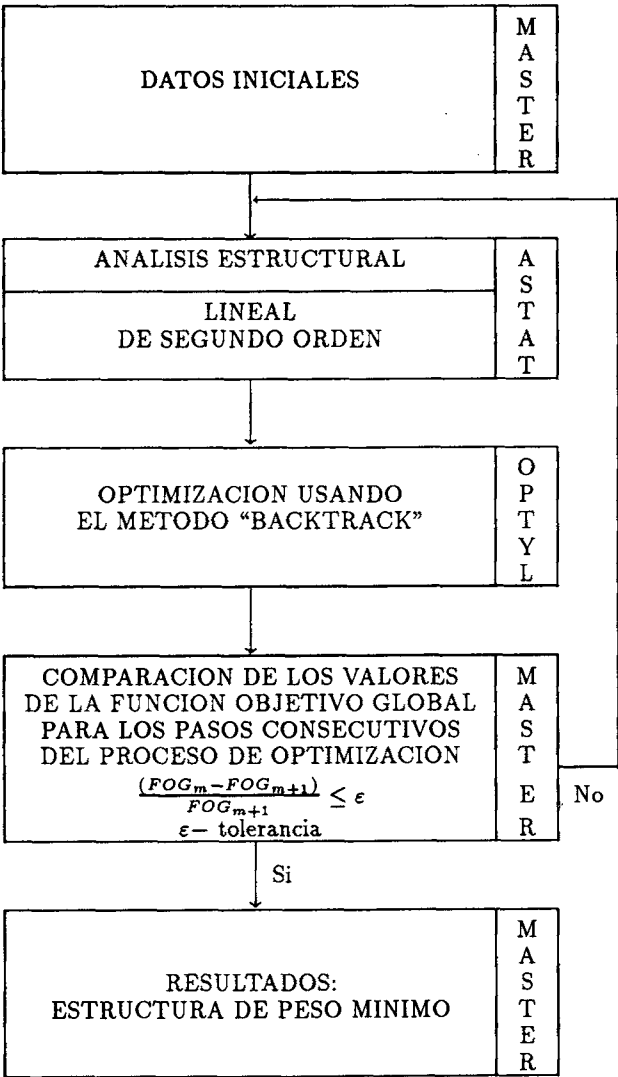


Figura 6. Algoritmo del proceso de optimización.

RESULTADOS

A continuación se incluyen algunos ejemplos a los que se aplica la formulación presentada. El primero de ellos corresponde al pórtico del la Figura 7 (Hall et al⁷). Se han realizado dos diseños para dos grupos de identificación de las barras (Tablas I, II y III). En el ejemplo 1a se ha supuesto que todas las vigas tienen las mismas

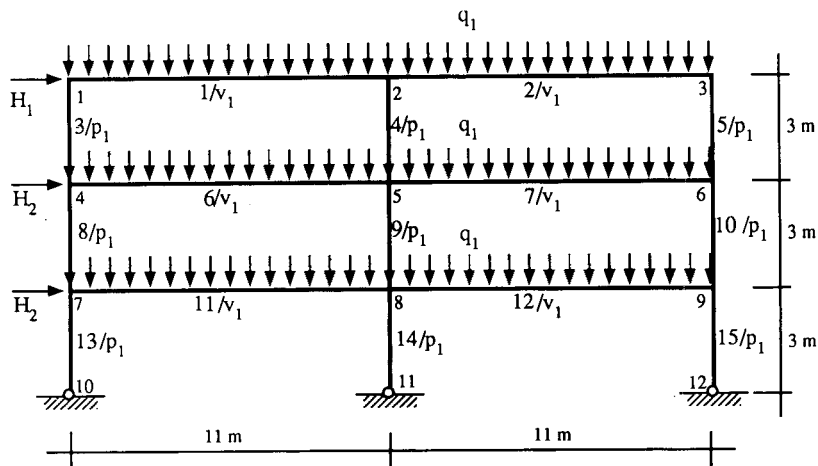


Figura 7. Pórtico con tres plantas y tres vanos.

Número de datos	$x_1 = s$ max min Δx_1	$x_2 = t$ max min Δx_2	$x_3 = g$ max min Δx_3	$x_4 = h$ max min Δx_4
	mm	mm	mm	mm
v_1	420 100 5	28 12 1	18 10 1	840 240 10
p_1	360 200 5	24 8 1	16 8 1	360 200 10
x_1 - anchura del ala				-s
x_2 - espesor del ala				-t
x_3 - espesor del alma				-g
x_4 - altura del alma				-h

Tabla I. Vector inicial de variables. Ejemplo 1.

dimensiones (grupo de identificación 1), así como los pilares (grupo de identificación 2) (Tabla II). En el ejemplo 1b todas las vigas pertenecen al grupo 1, y los pilares se han dividido en los tres grupos siguientes: 2, 3 y 4 (Tabla III). Para ambos casos se ha realizado el análisis lineal y el análisis incluyendo los efectos $P - \delta$ ($\alpha = 1.0$). Se han

Número de barra	Caso de diseño óptimo	σ (MPa)		σ/R	
		Análisis estructural de		$R = 215 \text{ MPa}$	
		1. orden	2. orden	1. orden	2. orden
1	2	3	4	5	6
Ejemplo 2a 24	Análisis de 1. orden	214.7	217.9	0.999	1.013
30	1. orden	212.9	216.1	0.990	1.005
Ejemplo 2b 18	Análisis de 1. orden	213.3	216.0	0.992	1.005
24	1. orden	213.2	216.4	0.992	1.007
27	1. orden	213.8	217.1	0.994	1.010
30	1. orden	213.8	217.0	0.994	1.009

Tabla X. Resultados de diseño: tensiones. Ejemplo 2.

REFERENCIAS

1. A. Rutenberg, "A Direct $P - \delta$ Analysis Using Standard Plane Frame Computer Programs", *Comp. & Struct.*, Vol. 1-2 (14), pp. 97-102, (1981).
2. F.C. Neuss y B.F. Masson, "Analysis for $P - \delta$ Effects in Seismic Response of Buildings", *Comp. & Struct.*, Vol. 3 (19), pp. 369-380, (1984).
3. R. Gaiotti y B.S. Smith, " $P - \delta$ Analysis of Building Structures", *J. Struct. Eng.*, Vol. 4 (115), pp. 755-770, (1989).
4. P. Berkowski, "Approximate Second Order analysis of Unbraced Multistory Steel Frames", *VIII International Conference on Metal Structures*, pp. 139-146, Gdansk, Poland, (1989).
5. P. Berkowski, "Optimización de los pórticos incluyendo los efectos de segundo orden en el Análisis Estructural", *Archiwum Inżynierii Ladowej*, Vol. 2, pp. 219-234, (1988).
6. P. Berkowski, "Discrete Synthesis of Steel Frameworks Accounting for $P - \delta$ Effects",

- IX Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, pp. 191-197, (1990).
7. S.K. Hall, G.E. Cameron y D.E. Grierson, "Least-Weight Design of Steel Frameworks Accounting for $P - \delta$ Effects", *J. Struc. Eng.*, Vol. 6 (115), pp. 1463-1475, (1989).
 8. Norma Polaca PN-80/B-03200. 1980: "Estructuras de acero. Análisis Estructural y diseño.
 9. L. Duan y Ch. Wai-Fah, "Effective Length Factor for Columns in Unbraced Frames", *J. Struct. Eng.*, Vol. 1 (115), (1989).
 10. E. Krynicki y Z. Mazurkiewicz, "Ramy z pretow o zmiennych sztywnosciach", PW N, Warszawa, (1966).
 11. N. Annamalai, A.D.M. Lewis y J.E. Goldberg, "Cost Optimization of Welded Plate Girders", *J. Struc. Div. Proc ASCE*, Vol. 98, pp. 2235-2246, (1972).
 12. J. Farkas, "Optimum Design of Metal Structures". Ellis Horwood Ltd. Publishers, (1984).