

# El Método de los Elementos Finitos en problemas electromagnéticos: planteamiento y aplicaciones

Josep Sarrate y Ramon Clarisó

Universidad Politécnica de Cataluña  
ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Departamento de Matemática Aplicada III  
Jordi Girona 1–3, Edificio C2, Campus Norte  
08034 Barcelona, España  
Tel.: 34-93-401 69 11, Fax: 34-93-401 18 25  
e-mail: jose.sarrate@upc.es

## Resumen

En el presente trabajo se analizan y comparan diferentes alternativas para resolver mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF) problemas electromagnéticos. Asimismo, se repasan diversos conceptos físicos a fin de justificar los posteriores desarrollos numéricos. Las formulaciones para la resolución de dichos problemas se clasifican en dos grandes grupos: 1. formulaciones basadas en potenciales escalares y/o vectoriales y 2. formulaciones basadas en la resolución de las ecuaciones de Maxwell. Puesto que la mayoría de aplicaciones industriales requieren un cálculo preciso de las fuerzas electromagnéticas, en este trabajo también se analizan diferentes métodos para calcularlas. Finalmente, se presentan diversos ejemplos numéricos que ilustran algunos de los métodos presentados. Estos ejemplos incluyen desde problemas académicos hasta aplicaciones industriales.

## **Palabras clave:**

*Ecuación de Maxwell, electromagnetismo, fuerzas magnéticas, Método de los Elementos Finitos.*

## **FINITE ELEMENT METHOD ON ELECTROMAGNETICS: AN OVERVIEW AND APPLICATIONS**

## Summary

This work reviews and compares different methods of solving electromagnetic problems by means of the Finite Element Method (FEM). In order to justify the numerical developments, a brief review on the physics of the problem is given. Numerical techniques are classified into two main categories: 1. methods that use scalar and vectorial potentials and 2. methods that solve directly the Maxwell equations. Moreover, in engineering applications, the design of electromagnetic devices requires accurate calculation of magnetic forces. Therefore, different methods for computing the magnetic forces are analyzed in this paper. Finally, several magnetostatic examples, that range from academic problems to industrial applications, are included in order to illustrate some of the described methods.

## **Keywords:**

*Maxwell equations, electromagnetism, magnetic forces, finite element method.*

## INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la inferencia de los fenómenos electromagnéticos en los procesos industriales es muy importante. En particular, la inducción electromagnética se utiliza para medir, calentar, modificar, manipular y formar una amplia gama de materiales. Es más, en las últimas décadas, la demanda de nuevas aplicaciones más potentes, versátiles y económicas (como por ejemplo, la levitación de trenes mediante superconductores, el diseño de aviones capaces de minimizar el *scattering* de una onda incidente, el desarrollo de antenas de alta potencia y precisión, la utilización de láseres en sistemas de telecomunicaciones ópticas, entre otras) ha inducido un cambio radical en el diseño de diferentes aparatos y dispositivos, introduciendo nuevos materiales de mayor conductividad eléctrica o capaces de soportar mayores tensiones estructurales. En este sentido, cabe resaltar la introducción de superconductores en la fabricación de motores<sup>1</sup> o imanes para un reactor de fusión<sup>2</sup>.

La necesidad de calcular rápidamente y con precisión estas modificaciones, que generalmente también introducen cambios importantes en la geometría de los dispositivos, ha creado la necesidad de desarrollar nuevos métodos de cálculo mucho más veloces, versátiles y precisos. Las formulaciones para la resolución de problemas en electromagnetismo computacional se pueden clasificar en dos grandes grupos, según el tipo de ecuación que resuelven: 1. las basadas en potenciales escalares y/o vectoriales<sup>3,4,5,6,7,8,9</sup> y 2. las basadas en la resolución directa de las ecuaciones de Maxwell<sup>6,10,11,12,13</sup>. Las formulaciones basadas en potenciales son ampliamente utilizadas en problemas estáticos, armónicos y especialmente en problemas de corrientes de Foucault. Cabe destacar su relevancia en la resolución de problemas en electrotécnica. Además, los potenciales vectoriales presentan la gran ventaja de verificar automáticamente las ecuaciones de la divergencia (leyes de Gauss). Sin embargo, presentan una pérdida notable de precisión en el cálculo de las intensidades de campo eléctrico y magnético debido a la propagación de errores en la diferenciación numérica. Además, su utilización requiere la definición de una condición de contraste (*gauge*) adecuada que depende de la formulación utilizada. Las formulaciones basadas en la resolución directa de las ecuaciones de Maxwell se utilizan tanto en problemas estáticos como en transitorios. En este sentido, se debe mencionar que este tipo de formulaciones ocupa un lugar destacado en fenómenos de propagación de ondas como el diseño de antenas y dispositivos de microondas, entre otros. Estas formulaciones permiten hallar directamente las intensidades de campo eléctrico y magnético sin necesidad de utilizar derivación numérica, obteniendo, generalmente, resultados más exactos.

Uno de los aspectos fundamentales en el diseño y optimización de equipos electromagnéticos, como sensores, motores o electroimanes, es el cálculo de la fuerza magnética. En este sentido, el acoplamiento entre problemas mecánicos y electromagnéticos es una de las áreas de mayor interés industrial en el electromagnetismo computacional. En efecto, la mayoría de aparatos eléctricos contienen una parte cuyo movimiento es debido y está gobernado por las fuerzas magnéticas. Por consiguiente, el resultado del análisis de este problema acoplado permite al ingeniero calcular los desplazamientos, visualizar las deformaciones, evaluar las vibraciones inducidas y ensayar diferentes soluciones a fin de mejorar el rendimiento del equipo.

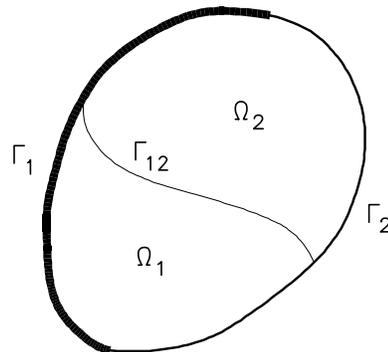
En general, la simulación y evaluación de las fuerzas magnéticas se basa en el cálculo previo del campo magnético mediante el MEF u otra técnica numérica. Por consiguiente, en este trabajo se revisan y analizan diversas formulaciones para calcular las fuerzas magnéticas en función de los valores nodales de los campos<sup>14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26</sup>. Asimismo, se presenta una clasificación de los métodos para evaluar dichas fuerzas a partir de las formulaciones anteriores. Se demuestra que estos métodos son teóricamente equivalentes. Sin embargo, también se constata que su precisión depende fuertemente de los valores de la permeabilidad relativa del medio y de los valores normales y tangenciales a la superficie de los campos previamente calculados.

La estructura del artículo es la siguiente. En la segunda sección se plantean detalladamente el dominio, las ecuaciones y las condiciones de contorno que rigen el problema electromagnético a resolver. En la tercera sección se presenta una clasificación de las formulaciones más utilizadas para la resolución de problemas de electromagnetismo. Seguidamente, en la cuarta sección se analizan y clasifican los diferentes métodos de evaluar las fuerzas electromagnéticas a partir del cálculo previo de los campos electromagnéticos mediante el MEF. En la quinta sección se utilizan algunas de las formulaciones presentadas anteriormente en la resolución de diferentes problemas prácticos que van desde ejemplos académicos hasta aplicaciones industriales. Finalmente, se presentan las conclusiones de este trabajo.

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considérese  $\Omega$  un dominio cualquiera compuesto por dos medios disjuntos,  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , cuya intercara es  $\Gamma_{12}$  (Figura 1). Sea  $\Gamma$  su contorno. De acuerdo con los dos tipos de condiciones de contorno que se imponen (por simplicidad y sin pérdida de generalidad se supondrán homogéneas) éste también se divide en dos partes,  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , tales que

$$\begin{aligned}\Gamma_1 \cup \Gamma_2 &= \Gamma \\ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 &= \emptyset\end{aligned}$$



**Figura 1.** Esquema del dominio y contornos para un problema general de electromagnetismo

Los campos electromagnéticos existentes en el dominio  $\Omega$  están gobernados por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales junto con las correspondientes condiciones de contorno sobre la intercara y sobre las fronteras exteriores <sup>5,27,6</sup>

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\mathbf{K}^{equ} && \text{en } \Omega \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{J} &= \mathbf{J}^{imp} && \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho^{imp} && \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{en } \Omega\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times \mathbf{E} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_1 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{sobre } \Gamma_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times \mathbf{H} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_2 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} &= 0 && \text{sobre } \Gamma_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1 + \mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_2 &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_{12} \\ \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{B}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{B}_2 &= 0 && \text{sobre } \Gamma_{12} \\ \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{D}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{D}_2 &= \rho_s && \text{sobre } \Gamma_{12} \\ \mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_1 + \mathbf{n}_2 \times \mathbf{H}_2 &= \mathbf{J}_s && \text{sobre } \Gamma_{12}\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  son las intensidades de campo eléctrico y magnético respectivamente,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{B}$  son las densidades de flujo eléctrico y magnético respectivamente,  $\mathbf{J}$  es la densidad de corriente,  $\rho^{imp}$  es una fuente de densidad de carga eléctrica impuesta,  $\mathbf{J}^{imp}$  es una fuente impuesta de densidad de corriente eléctrica,  $\mathbf{K}^{eqv}$  es una densidad de corriente magnética equivalente debida a truncamiento de dominios o discontinuidades de medios,  $\rho_s$  es una densidad de carga superficial y  $\mathbf{J}_s$  es una corriente eléctrica superficial en la intercara. Se debe resaltar que los valores impuestos  $\rho^{imp}$ ,  $\mathbf{J}^{imp}$  y  $\mathbf{K}^{eqv}$  deben cumplir ciertas condiciones de compatibilidad<sup>11</sup>.

Las cuatro primeras ecuaciones de (1) constituyen las ecuaciones de Maxwell: ley de Faraday, ley de Maxwell–Ampere, ley de Gauss para el campo eléctrico y ley de Gauss para el campo magnético.

El sistema (1) queda completamente definido al especificar las ecuaciones constitutivas de los materiales que configuran los medios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon(\mathbf{E})\mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu(\mathbf{H})\mathbf{H} \\ \mathbf{J} &= \sigma(\mathbf{E})\mathbf{E}\end{aligned}\tag{2}$$

donde  $\varepsilon$  es la permitividad,  $\mu$  es la permeabilidad y  $\sigma$  es la conductividad. Frecuentemente, la segunda expresión de (2) se escribe como  $\mathbf{H} = \nu\mathbf{B}$ , siendo  $\nu = 1/\mu$  la reluctividad del medio. En general, estos parámetros constitutivos pueden depender de la posición, de la orientación, del tiempo y de la intensidad del campo correspondiente. Si dichos parámetros no dependen de la intensidad de campo, se obtiene un comportamiento lineal del medio (que conducirá en el problema discreto a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales). Si además el medio es isótropo y homogéneo, dichos parámetros son constantes. Por el contrario, si dependen de la intensidad de campo se obtiene un comportamiento no lineal (que en el problema discreto implicará la resolución de sistemas no lineales de ecuaciones). Esta relación no lineal generalmente se conoce experimentalmente o mediante la teoría microscópica de la materia. Por ejemplo, para materiales ferromagnéticos la permeabilidad depende fuertemente de la intensidad de campo y de su historia (curvas de histéresis) como muestra la Figura 2. En el modelado de estos materiales, el valor del campo coercitivo desempeña un papel fundamental. Por último, debe resaltarse que puede existir otro tipo de no linealidad, generada por ejemplo mediante fuentes de carga no lineales.

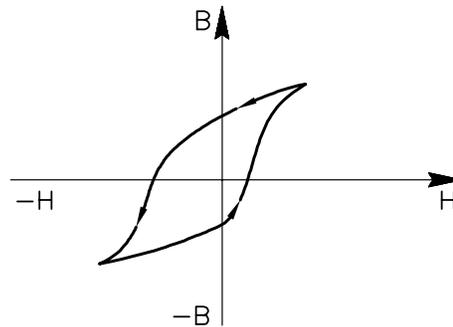


Figura 2. Curva de histéresis para un material ferromagnético

## CLASIFICACIÓN DE LAS FORMULACIONES PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ELECTROMAGNÉTICOS

Las formulaciones para la resolución de problemas de campo en electromagnetismo computacional se pueden clasificar según el tipo de ecuación diferencial en derivadas parciales que resuelven. En general, se pueden dividir en dos grandes grupos: las formulaciones que utilizan potenciales escalares y/o vectoriales y las formulaciones basadas en la resolución de las ecuaciones de Maxwell u otro sistema equivalente.

### Basadas en potenciales escalares y/o vectoriales

Las formulaciones basadas en la utilización de potenciales son ampliamente utilizadas en el cálculo numérico de campos electromagnéticos. Básicamente se utilizan en problemas estáticos o armónicos y especialmente en problemas de corrientes de Foucault<sup>4,3</sup>. Esto se debe a dos motivos: por una parte, en problemas estáticos y armónicos, los términos temporales de las ecuaciones de Maxwell (1) pueden tratarse de forma algebraica; y por otra parte, las ecuaciones en términos de potenciales vectoriales no incluyen de forma explícita las ecuaciones en divergencia (leyes de Gauss) puesto que éstas se verifican automáticamente.

Un ejemplo de esta aproximación para problemas de corrientes de Foucault en dominios acotados puede hallarse en la referencia<sup>3</sup>, para dominios no acotados ver la referencia<sup>8</sup>. En ambos trabajos y con el objetivo de asegurar la unicidad de la solución se presentan varias formulaciones, en las que se introducen diferentes tipos de potencial dependiendo del número de materiales que se consideren. La nomenclatura utilizada para distinguir las diferentes formulaciones se basa en los siguientes criterios:

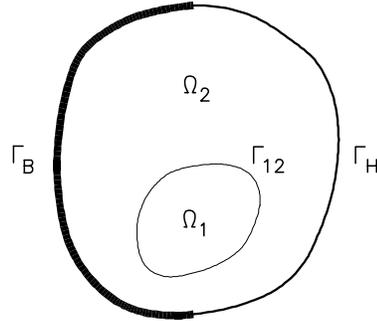
1. los potenciales vectores se denotan mediante letras mayúsculas y en negrita, ( $\mathbf{A}$ ), mientras que para los potenciales escalares se utilizan símbolos romanos o griegos ( $A, \phi, \dots$ );
2. los potenciales se ordenan según el medio al que están asignados, separando cada medio por un guión (-);
3. el primer grupo de potenciales se referirá siempre al medio conductor, mientras que el resto de potenciales estarán asignados a las regiones no conductoras.

La primera formulación se denomina  $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ , donde en el medio conductor se utiliza un potencial vector  $\mathbf{A}$  y un potencial escalar  $V$ , mientras que en la región no conductora sólo se emplea el potencial vector. En este caso, los potenciales se definen como

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (4)$$

Este tipo de formulaciones se aplica generalmente a problemas compuestos por dos medios: un material conductor  $\Omega_1$ , donde aparecen las corrientes de Foucault, rodeado por otro medio no conductor  $\Omega_2$ , que puede contener fuentes de corriente pero que está libre de corrientes de Foucault (Figura 3). La intercara entre ambos medios se denota por  $\Gamma_{12}$ . El contorno exterior de  $\Omega_2$  se divide en dos partes según el tipo de condición de contorno que se impone:  $\Gamma_B$  donde se prescribe componente normal de la densidad de flujo magnético nula ( $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ ) y  $\Gamma_H$  donde se prescribe componente tangencial de la intensidad de campo magnético nula ( $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$ ). Es importante resaltar la relación existente entre el presente enunciado y el problema general planteado en la segunda sección (Figura 1). Puesto que  $\Omega_2$  es un medio libre de corrientes de Foucault,  $\mathbf{E}$  no aparece en las condiciones de contorno sobre la frontera exterior. Por consiguiente, los contornos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  de la Figura 1 se reducen a los contornos  $\Gamma_B$  y  $\Gamma_H$  respectivamente y ambos problemas coinciden.



**Figura 3.** Dominio y condiciones de contorno para un problema de corrientes de Foucault compuesto por dos medios

Reescribiendo el sistema (1) en términos de los potenciales (3) y (4) se obtiene la siguiente formulación, ver detalles en la referencia<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \nu \nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \nabla V &= \mathbf{0} && \text{en } \Omega_1 \\
 \nabla \cdot \left( -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \nabla V \right) &= 0 && \text{en } \Omega_1 \\
 \nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \nu \nabla \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{J}^{imp} && \text{en } \Omega_2 \\
 \mathbf{n} \times \mathbf{A} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_B \\
 \nu \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0 && \text{sobre } \Gamma_B \\
 \nu \nabla \times \mathbf{A} \times \mathbf{n} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_H \\
 \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} &= 0 && \text{sobre } \Gamma_H \\
 \mathbf{A}_1 &= \mathbf{A}_2 && \text{sobre } \Gamma_{12} \\
 \nu_1 \nabla \times \mathbf{A}_1 \times \mathbf{n}_1 + \nu_2 \nabla \times \mathbf{A}_2 \times \mathbf{n}_2 &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_{12} \\
 \nu_1 \nabla \cdot \mathbf{A}_1 - \nu_2 \nabla \cdot \mathbf{A}_2 &= 0 && \text{sobre } \Gamma_{12} \\
 \mathbf{n} \cdot \left( -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \nabla V \right) &= 0 && \text{sobre } \Gamma_{12}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Esta formulación es una de las más utilizadas, puesto que para medios lineales, isótropos y homogéneos,  $\nu$  es constante. En consecuencia, en la primera y tercera ecuación de (5), el término:  $\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \nu \nabla \cdot \mathbf{A}$  se reduce a:  $-\nu \Delta \mathbf{A}$  que es fácilmente implementable en un código de elementos finitos. Esta simplificación se utiliza en la resolución de alguno de los problemas presentados en los ejemplos numéricos. Es más, en problemas magnetostáticos bidimensionales las ecuaciones de Maxwell (1) se reducen a<sup>6,5</sup>

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}^{imp} \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7)$$

con  $\mathbf{J}^{imp}$  sólo en la dirección del eje z. Además, no existe potencial eléctrico y el potencial vector magnético es  $\mathbf{A} = (0, 0, A_z)$  constante respecto al tiempo. Entonces, de (6) se deduce que  $\mathbf{A}$  verifica la ecuación de Poisson:  $\nabla \times (\nabla \times (0, 0, A_z)) = \mu(0, 0, J_z^{imp})$ . Por consiguiente, después de imponer la condición de contraste (gauge de Coulomb)  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , necesaria para asegurar unicidad de la solución, el sistema de ecuaciones anterior se reduce a<sup>6</sup>

$$-\Delta A_z = \mu J_z^{imp} \quad \text{en } \Omega \quad (8)$$

junto con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} A_z &= 0 && \text{sobre } \Gamma_B \\ \frac{\partial A_z}{\partial n} &= 0 && \text{sobre } \Gamma_H \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} A_{z1} &= A_{z2} && \text{sobre } \Gamma_{12} \\ \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_{z1}}{\partial n} &= \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_{z2}}{\partial n} && \text{sobre } \Gamma_{12} \end{aligned}$$

Es importante resaltar que una vez se ha hallado el potencial vector magnético, la densidad de flujo magnético se obtiene mediante diferenciación numérica de acuerdo con (3). Además, en problemas no lineales bidimensionales,  $\mu = \mu(\mathbf{B})$ , y por consiguiente la ecuación (8) es  $-\Delta A_z = \mu(\mathbf{B}) J_z^{imp}$ .

Nótese que las expresiones (8) y (9) son válidas para el problema bidimensional plano. En el caso de analizar un problema bidimensional axisimétrico, las ecuaciones anteriores se pueden escribir como (ver detalles en la referencia<sup>6</sup>).

$$-\frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho A_\varphi}{\partial \rho} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho A_\varphi}{\partial z} \right] = \mu J_\varphi^{imp} \quad \text{en } \Omega \quad (10)$$

junto con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \rho A_\varphi &= 0 && \text{sobre } \Gamma_B \\ \frac{\partial \rho A_\varphi}{\partial n} &= 0 && \text{sobre } \Gamma_H \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \rho A_{\varphi 1} &= \rho A_{\varphi 2} && \text{sobre } \Gamma_{12} \\ \frac{1}{\rho \mu_1} \frac{\partial \rho A_{\varphi 1}}{\partial n} &= \frac{1}{\rho \mu_2} \frac{\partial \rho A_{\varphi 2}}{\partial n} && \text{sobre } \Gamma_{12} \end{aligned}$$

La segunda formulación se denomina  $\mathbf{A}, V - \psi, \phi$ . La diferencia esencial respecto a la formulación anterior es la utilización en la región no conductora de potenciales escalares

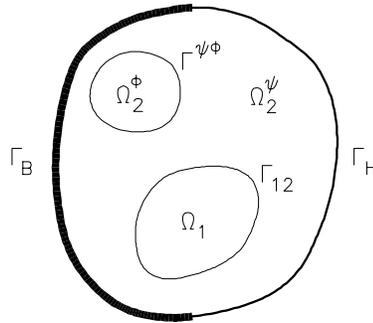
magnéticos en lugar del potencial vector magnético, ver detalles en las referencias<sup>7,3</sup>. La idea básica es descomponer la zona no conductora,  $\Omega_2$ , en dos regiones: una que contiene las fuentes de corriente,  $\Omega_2^\phi$ , y la otra compuesta por el resto del medio no conductor,  $\Omega_2^\psi$ , separadas por una intercara,  $\Gamma^{\psi\phi}$  (Figura 4). Esta formulación se utilizará en el cuarto ejemplo numérico.

En la región no conductora donde existen fuentes de corriente se define el potencial escalar reducido  $\phi$  como

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{imp} - \nabla\phi \quad (12)$$

donde  $\mathbf{H}^{imp}$  es la intensidad de campo magnético debido a las fuentes de corriente,  $\nabla \times \mathbf{H}^{imp} = \mathbf{J}^{imp}$  y es por tanto conocido. En el resto de la zona no conductora se define el potencial escalar total magnético  $\psi$  como

$$\mathbf{H} = -\nabla\psi \quad (13)$$



**Figura 4.** Dominio y condiciones de contorno para un problema de corrientes de Foucault compuesto por dos medios donde la zona no conductora se ha dividido en  $\Omega_2^\phi$  y  $\Omega_2^\psi$

La descripción del medio no conductor mediante únicamente el potencial escalar reducido  $\phi$  conduce en algunas ocasiones a errores de redondeo importantes. Puesto que  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{imp} - \nabla\phi$  y el término  $\nabla\phi$  es del mismo orden que  $\mathbf{H}^{imp}$  (ref.<sup>7</sup>), entonces los problemas de cancelación pueden conducir a valores de  $\mathbf{H}$  muy inexactos. Además, para materiales con valores altos de  $\mu$ , y de acuerdo con  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ , los errores de cancelación pueden verse drásticamente amplificados, conduciendo a valores de la densidad de flujo magnético completamente falsos.

El sistema de ecuaciones equivalente a (1) que se debe resolver en función de los nuevos potenciales es<sup>7,3</sup>

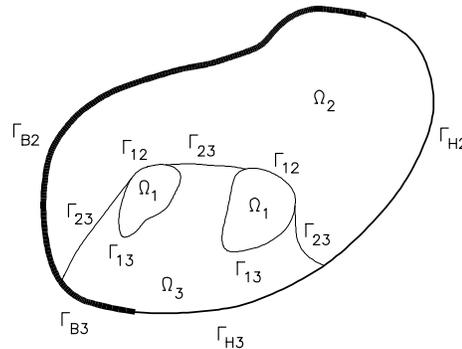
$$\begin{aligned} \nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \nu \nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \nabla V &= \mathbf{0} && \text{en } \Omega_1 \\ \nabla \cdot \left( -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \nabla V \right) &= 0 && \text{en } \Omega_1 \\ \nabla \cdot (\mu \nabla \psi) &= 0 && \text{en } \Omega_2^\psi \\ \nabla \cdot (\mu (\mathbf{H}^{imp} - \nabla \phi)) &= 0 && \text{en } \Omega_2^\phi \\ \mathbf{n} \cdot (\mu \nabla \psi) &= 0 && \text{sobre } \Gamma_B \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 \psi &= 0 && \text{sobre } \Gamma_H \\
 \mathbf{n}^{\psi\phi} \cdot (\mu_2^{\psi} \nabla \psi + \mu_2^{\phi} (\mathbf{H}^{imp} - \nabla \phi)) &= 0 && \text{sobre } \Gamma^{\psi\phi} \\
 (\nabla \psi + (\mathbf{H}^{imp} - \nabla \phi)) \times \mathbf{n}^{\psi\phi} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma^{\psi\phi} \\
 \mathbf{n}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{n}_2 \cdot \mu_2 \nabla \psi &= 0 && \text{sobre } \Gamma_{12} \\
 \nu_1 \nabla \times \mathbf{A} \times \mathbf{n}_1 - \nabla \psi \times \mathbf{n}_2 &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_{12} \\
 \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} &= 0 && \text{sobre } \Gamma_{12} \\
 \mathbf{n} \cdot \left( -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \nabla V \right) &= 0 && \text{sobre } \Gamma_{12}
 \end{aligned}$$

Es importante resaltar que, en general, debido a la utilización de  $\psi$  y  $\phi$  en lugar de  $\mathbf{A}$ , en la región no conductora se ha reducido el número de incógnitas de tres a una (nótese que, por ejemplo, en problemas bidimensionales planos con las componentes del campo en el plano de trabajo, el potencial vectorial se reduce a su componente perpendicular, y por consiguiente el ahorro anteriormente mencionado no es totalmente cierto). En la resolución del problema discreto, esto se traduce en un ahorro considerable del coste computacional. Una simplificación de esta formulación consiste en utilizar únicamente el potencial escalar total magnético  $\psi$  en la zona no conductora. Esto da lugar a una formulación denominada  $\mathbf{A}, V - \psi$  (ref.<sup>3</sup>).

Cuando estas formulaciones se utilizan sobre dominios con regiones conductoras no simplemente conexas se generan soluciones espúreas. Esto es debido a la imposibilidad de demostrar la unicidad de la solución bajo dichas condiciones. Por este motivo se introduce una tercera formulación denominada:  $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}, \psi$ . Ésta es más general y se puede entender como una combinación de las formulaciones  $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}, V - \psi$ .

En la Figura 5 se presenta un esquema del dominio y sus contornos. El dominio total  $\Omega$  se subdivide en tres regiones: la primera es una región conductora no simplemente conexa,  $\Omega_1$ ; la segunda es una región no conductora  $\Omega_3$ , tal que su unión con  $\Omega_1$  genera una región simplemente conexa; y la tercera,  $\Omega_2$ , está formada por el resto de la región no conductora. Las intercaras entre las tres regiones se denotan por:  $\Gamma_{12}$ ,  $\Gamma_{13}$  y  $\Gamma_{23}$ , mientras que los contornos exteriores de las regiones no conductoras se subdividen en dos partes a semejanza de la división realizada en la primera formulación:  $\Gamma_{B2}$ ,  $\Gamma_{H2}$ ,  $\Gamma_{B3}$  y  $\Gamma_{H3}$ . De acuerdo con la exposición presentada en la referencia<sup>3</sup>, el potencial vector magnético se utiliza en  $\Omega_3$ , mientras que en  $\Omega_2$  se utiliza el potencial escalar total magnético. El sistema de ecuaciones que conduce a la unicidad de los potenciales es<sup>3</sup>



**Figura 5.** Dominio y condiciones de contorno para un problema de corrientes de Foucault compuesto por tres medios

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \nu \nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \nabla V &= \mathbf{0} && \text{en } \Omega_1 \\
\nabla \cdot \left( -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \nabla V \right) &= 0 && \text{en } \Omega_1 \\
\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \nu \nabla \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{0} && \text{en } \Omega_3 \\
\nabla \cdot \mu \nabla \psi &= 0 && \text{en } \Omega_2 \\
\mathbf{n} \times \mathbf{A} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_{B3} \\
\nu \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0 && \text{sobre } \Gamma_{B3} \\
\nu \nabla \times \mathbf{A} \times \mathbf{n} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_{H3} \\
\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} &= 0 && \text{sobre } \Gamma_{H3} \\
\mathbf{n} \cdot \mu \nabla \psi &= 0 && \text{sobre } \Gamma_{B2} \\
\psi &= 0 && \text{sobre } \Gamma_{H2} \\
\mathbf{A}_1 &= \mathbf{A}_3 && \text{sobre } \Gamma_{13} \\
\nu_1 \nabla \times \mathbf{A}_1 \times \mathbf{n}_1 + \nu_3 \nabla \times \mathbf{A}_3 \times \mathbf{n}_3 &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_{13} \\
\nu_1 \nabla \cdot \mathbf{A}_1 - \nu_3 \nabla \cdot \mathbf{A}_3 &= 0 && \text{sobre } \Gamma_{13} \\
\mathbf{n} \cdot \left( -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \nabla V \right) &= 0 && \text{sobre } \Gamma_{12} \text{ y } \Gamma_{13} \\
\mathbf{n}_{13} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{n}_2 \cdot \mu_2 \nabla \psi &= 0 && \text{sobre } \Gamma_{12} \text{ y } \Gamma_{23} \\
\nu \nabla \times \mathbf{A} \times \mathbf{n}_{13} - \nabla \psi \times \mathbf{n}_2 &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_{12} \text{ y } \Gamma_{23} \\
\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} &= 0 && \text{sobre } \Gamma_{12} \text{ y } \Gamma_{23}
\end{aligned} \tag{15}$$

Existen varias alternativas de resolver mediante el MEF los sistemas de ecuaciones (5), (14) o (15). Una de las más utilizadas es la formulación de Galerkin, en la que coinciden las funciones de peso y las funciones de forma. Puesto que las expresiones (5) y (14) pueden ser vistas como un caso particular de la formulación (15), a continuación se presentan las ecuaciones correspondientes a la discretización mediante el MEF de la tercera formulación (15)<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_1+\Omega_3} (\nu \nabla \times \mathbf{N}_i \cdot \nabla \times \mathbf{A} + \nu \nabla \cdot \mathbf{N}_i \nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma \mathbf{N}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \mathbf{N}_i \cdot \nabla V) d\Omega - \\
& \int_{\Gamma_{12}+\Gamma_{23}} \mathbf{N}_i \cdot (\nabla \psi \times \mathbf{n}_2) d\Gamma = 0 \\
& \int_{\Omega_1} (\sigma \nabla \mathbf{N}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \nabla \mathbf{N}_i \cdot \nabla V) d\Omega = 0 \\
& \int_{\Omega_2} (\mu \nabla \mathbf{N}_i \cdot \nabla \psi) d\Omega - \int_{\Gamma_{12}+\Gamma_{23}} \mathbf{N}_i \cdot (\nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_{13}) d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

donde  $i$  es el índice asociado a los nodos de la malla y  $N_i$  son las funciones de forma.

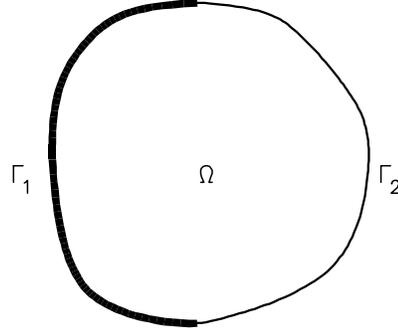
Las formulaciones basadas en potenciales permiten modelizar adecuadamente materiales no homogéneos así como discontinuidades materiales. Además, los potenciales vectoriales presentan la gran ventaja de verificar automáticamente la ecuación de la divergencia. Sin embargo, presentan una pérdida notable de precisión en el cálculo de las intensidades de campo eléctrico y magnético debido a la diferenciación numérica. Además, es preciso imponer para cada formulación el *gauge* adecuado (e.g.  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  para casos cuasiestáticos;  $\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0$  para casos acoplados o de propagación; ...).

### Basadas en la resolución de las ecuaciones de Maxwell

Desde el punto de vista computacional, la resolución numérica de las ecuaciones de Maxwell (1) puede presentar soluciones espúreas. La característica básica de estas soluciones es que no verifican las leyes de Gauss para el campo eléctrico y magnético, ecuaciones que contienen el operador divergencia en (1). En general, se ha considerado que la causa de estas discrepancias estaba en el método numérico utilizado. Sin embargo, la referencia<sup>11</sup> demuestra que la aparición de estas soluciones ficticias radica en un planteamiento erróneo del problema: tradicionalmente, las leyes de Gauss han sido vistas como ecuaciones auxiliares. Esto se debe a dos motivos. Por una parte, el sistema de ecuaciones (1) parece sobredeterminado: para el caso tridimensional el sistema presenta 8 ecuaciones y 6 incógnitas, mientras que para el caso bidimensional el sistema presenta 6 ecuaciones y 4 incógnitas. Por otra parte, si se aplica el operador divergencia a la ley de Faraday y a la ley de Maxwell-Ampere, se obtiene que las leyes de Gauss para el campo eléctrico y magnético se verifican siempre si éstas se verifican inicialmente<sup>12</sup>. Asimismo, en la referencia<sup>11</sup> se demuestra que, si se incluyen las leyes de Gauss, entonces las ecuaciones de Maxwell son equivalentes a un sistema elíptico bien determinado en el espacio. Siendo necesario, por consiguiente, tenerlas en cuenta.

En la última década, la utilización de este tipo de formulaciones en la resolución de problemas electromagnéticos ha experimentado un gran auge. Su aplicación va desde el cálculo de campos estáticos hasta problemas transitorios, pasando por problemas armónicos. En general, existen tres formulaciones para resolver (1) sin utilizar potenciales (por consiguiente, sin tener que diferenciar numéricamente para obtener  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ ). Con el objetivo de introducir las características básicas de cada una de ellas, considérese un dominio  $\Omega$ , acotado, simplemente conexo y convexo (Figura 6), donde su contorno  $\Gamma$  se divide en dos partes,  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , tales que

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 \cup \Gamma_2 &= \Gamma \\
\Gamma_1 \cap \Gamma_2 &= \emptyset
\end{aligned}$$



**Figura 6.** Dominio y condiciones de contorno para un problema de corrientes de Foucault compuesto por un único medio

En cada una de ellas, se imponen las siguientes condiciones de contorno (como en la segunda sección, por simplicidad y sin pérdida de generalidad éstas se supondrán homogéneas)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} \times \mathbf{E} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_1 \\
 \mathbf{n} \cdot (\mu \mathbf{H}) &= 0 && \text{sobre } \Gamma_1 \\
 \mathbf{n} \times \mathbf{H} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_2 \\
 \mathbf{n} \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) &= 0 && \text{sobre } \Gamma_2
 \end{aligned} \tag{17}$$

La primera formulación se basa en la resolución de ecuaciones de primer orden. Ésta se basa en la resolución directa del sistema (1) junto con las condiciones de contorno (17). Básicamente, existen dos razones por las que esta formulación es, en ocasiones, desaconsejable. La primera es la dificultad que tienen los métodos numéricos convencionales en tratar operadores no autoadjuntos. La segunda es que las intensidades de campo eléctrico y magnético aparecen acopladas en (1), aumentando considerablemente la complejidad de los cálculos.

La segunda formulación se basa en la resolución de ecuaciones de segundo orden. Ésta se deriva del sistema (1) aplicando el operador rotacional, obteniendo de esta forma un sistema de ecuaciones de segundo orden que desde el punto de vista numérico es más fácil de abordar. En la referencia<sup>11</sup> se demuestra que la resolución de (1) es equivalente a resolver

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial(\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \right) &= -\nabla \times \mathbf{K}^{eqv} - \mu \frac{\partial \mathbf{J}^{imp}}{\partial t} && \text{en } \Omega \\
 \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) &= \rho^{imp} && \text{en } \Omega \\
 \mathbf{n} \times \mathbf{E} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_1 \\
 \mathbf{n} \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) &= 0 && \text{sobre } \Gamma_2 \\
 \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\mathbf{n} \times \mathbf{K}^{eqv} && \text{sobre } \Gamma_2
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \left( \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) \frac{\partial(\mu \mathbf{H})}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{J}^{imp} - \left( \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) \mathbf{K}^{eqv} && \text{en } \Omega \\
 \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) &= 0 && \text{en } \Omega \\
 \mathbf{n} \times \mathbf{H} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_2 \\
 \mathbf{n} \cdot (\mu \mathbf{H}) &= 0 && \text{sobre } \Gamma_1 \\
 \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{H}) &= \mathbf{n} \times \mathbf{J}^{imp} && \text{sobre } \Gamma_1
 \end{aligned}$$

Como puede observarse en (18), las intensidades de campo eléctrico y magnético aparecen desacopladas simplificando considerablemente los cálculos. Sin embargo, de acuerdo con la discusión presentada en la referencia<sup>11</sup>, el sistema (18) puede presentar soluciones espúreas si no se consideran todas sus ecuaciones. Esto es debido a que generalmente las ecuaciones en divergencia, segunda y séptima ecuaciones de (18), así como las que se derivan de ellas, quinta y décima ecuaciones de (18), eran consideradas ecuaciones complementarias y no se tenían en cuenta en la resolución del problema. Bajo estas aproximaciones, el sistema(18) admite más soluciones que el sistema original (1).

La tercera formulación se basa en la resolución de la ecuación de Helmholtz. En la referencia<sup>11</sup> se demuestra que el sistema (18) es equivalente a

$$\begin{aligned}
-\Delta \mathbf{E} + \mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial(\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \right) &= -\nabla \times \mathbf{K}^{eqv} - \mu \frac{\partial \mathbf{J}^{imp}}{\partial t} - \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \nabla \rho^{imp} && \text{en } \Omega \\
\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) &= \rho^{imp} && \text{sobre } \Gamma_1 \\
\mathbf{n} \times \mathbf{E} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_1 \\
\mathbf{n} \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) &= 0 && \text{sobre } \Gamma_2 \\
\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\mathbf{n} \times \mathbf{K}^{eqv} && \text{sobre } \Gamma_2
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
-\Delta \mathbf{H} + \left( \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) \frac{\partial(\mu \mathbf{H})}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{J}^{imp} - \left( \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) \mathbf{K}^{eqv} && \text{en } \Omega \\
\nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) &= 0 && \text{sobre } \Gamma_2 \\
\mathbf{n} \times \mathbf{H} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_2 \\
\mathbf{n} \cdot (\mu \mathbf{H}) &= 0 && \text{sobre } \Gamma_1 \\
\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{H}) &= \mathbf{n} \times \mathbf{J}^{imp} && \text{sobre } \Gamma_1
\end{aligned}$$

La ventajas del sistema (19) son que: **1.** la ecuación de la divergencia no debe verificarse en todo el dominio, sino que sólo debe cumplirse en una porción del dominio y **2.** como en (18) las ecuaciones para  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  aparecen desacopladas.

Merece la pena indicar que los métodos basados en la resolución directa de las ecuaciones de Maxwell se emplean básicamente para aplicaciones donde es importante analizar el acoplamiento eléctrico y magnético, mientras que los métodos basados en potenciales se utilizan primordialmente cuando es suficiente simular la dinámica mediante corrientes inducidas.

Es importante resaltar que la resolución directa de las ecuaciones de Maxwell permite obtener directamente los vectores de intensidad eléctrica y magnética sin necesidad de utilizar derivación numérica, obteniéndose por lo tanto resultados más exactos. Además, se obtienen campos continuos a través de los elementos. También se debe resaltar que mediante este tipo de formulaciones no ha sido necesario definir ningún *gauge*.

Finalmente, debe mencionarse que de forma similar a los problemas de fluidos o sólidos incompresibles, también se han desarrollado formulaciones mixtas para problemas electromagnéticos<sup>13,12</sup>. A diferencia del trabajo presentado en la referencia<sup>11</sup>, estas formulaciones requieren la utilización de elementos de diferente orden para las incógnitas.

## FUERZAS MAGNÉTICAS

### Conceptos preliminares

Desde el punto de vista mecánico, el ingeniero está interesado en el cálculo de dos tipos de fuerzas. La primera es *la fuerza local* (también denominada en algunos ámbitos *densidad*

de fuerza). El cálculo de las fuerzas locales es básico en el estudio y análisis de sistemas formados por cuerpos deformables. En estos casos, el objetivo es conocer el comportamiento local del material. El segundo tipo de fuerzas es la fuerza total. Ésta es fundamental en el análisis del movimiento de un sólido rígido. En este caso, el objetivo es conocer el comportamiento global del cuerpo. Pero incluso en este último supuesto, el conocimiento de la distribución de fuerzas locales puede proporcionar una información muy importante en el desarrollo y mejora del diseño final.

Desde el punto de vista conceptual, ambos tipos de fuerzas se hallan relacionados mediante la siguiente expresión

$$\mathbf{F}_{\text{total}} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\text{local}} d\Omega$$

Es decir, la fuerza total se puede calcular como la suma de las fuerzas locales que actúan sobre el cuerpo. Cuando las fuerzas locales actúan sobre la superficie de un medio, la forma usual de realizar dicha suma es desacoplando la fuerza local en su componente normal y tangencial

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma} \mathbf{f}_t \cdot \mathbf{t} + \mathbf{f}_n \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

donde  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{n}$  denotan los vectores normalizados tangencial y normal a la superficie.

Con el objetivo de presentar los métodos más ampliamente utilizados en el cálculo de fuerzas electromagnéticas, a continuación se presentan tres formulaciones diferentes de calcularla<sup>27,20,22,5</sup>.

En la primera formulación, la fuerza total electromagnética  $\mathbf{F}_{em}$  se expresa en función de las cargas en movimiento, la intensidad de campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y la densidad de flujo magnético  $\mathbf{B}$ . En particular, si sólo existe una carga puntual en movimiento  $q$ , dicha relación está determinada por la ley de Lorentz

$$\mathbf{F}_{em} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (20)$$

siendo  $\mathbf{F}_e$  la fuerza eléctrica,  $\mathbf{F}_m$  la fuerza magnética y  $\mathbf{v}$  la velocidad de la partícula. En conductores, donde en lugar de partículas existen densidades de corrientes, la expresión (20) se debe modificar adecuadamente. Entonces, para una intensidad de corriente  $I$  (Amp), una densidad superficial de corriente  $\mathbf{k}$  (Amp/m) y una densidad volúmica de corriente  $\mathbf{J}$  (Amp/m<sup>2</sup>), la ecuación (20) se escribe respectivamente como

$$\mathbf{F}_m = \oint_C I d\mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (21)$$

$$\mathbf{F}_m = \int_{\Gamma} \mathbf{k} \times \mathbf{B} d\Gamma \quad (22)$$

$$\mathbf{F}_m = \int_{\Omega} \mathbf{J} \times \mathbf{B} d\Omega \quad (23)$$

En algunas aplicaciones es posible hallar expresiones más simplificadas que las ecuaciones (21), (22) y (23). Así por ejemplo, considerando que: 1. para campos eléctricos estacionarios la ley de Maxwell-Ampere en el vacío es  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$  y 2. la identidad  $\mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\frac{1}{2}\mathbf{B}^2) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ , el integrando de la ecuación (23) puede escribirse como

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\nabla\left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (24)$$

donde la cantidad  $p_m = \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}$  es la presión magnética. Integrando se obtiene

$$\mathbf{F}_m = \int_{\Omega} \mathbf{J} \times \mathbf{B} d\Omega = \int_{\Omega} -\nabla\left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} d\Omega = - \int_{\Gamma} \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2\mathbf{n} + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (25)$$

La importancia de la ecuación (25) radica en que ahora es posible calcular directamente la fuerza total a partir del campo  $\mathbf{B}$  calculado previamente mediante el MEF.

Si en el análisis, además de medios conductores se deben considerar materiales magnéticos, entonces la expresión (23) es

$$\mathbf{F}_m = \int_{\Omega} \mathbf{J} \times \mathbf{B} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{2}\nabla\mu\mathbf{H}^2 d\Omega \quad (26)$$

que a semejanza de (25) se puede expresar en términos de  $\mathbf{H}$ , calculado anteriormente mediante el MEF.

En la segunda formulación, la fuerza total se expresa en función de la energía magnética  $U$  (ref.<sup>27,22</sup>). En particular, es posible expresar la energía magnética como

$$U = \int_{\Omega} \left( \int_0^B \mathbf{H} dB \right) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2}\mu\mathbf{H}^2 d\Omega \quad (27)$$

Entonces, la fuerza magnética total en la dirección  $p$  es

$$\mathbf{F}_{m,p} = \left( -\frac{\partial U}{\partial p} \right)_{\phi} \quad (28)$$

donde  $\phi$  es una restricción de flujo constante ( $\phi = \int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\Gamma = \text{cte}$ ).

La tercera formulación se basa en reemplazar los materiales magnéticos por corrientes magnéticas o cargas magnéticas equivalentes (*Equivalent Magnetizing Currents, Equivalent Magnetizing Charges, EMC*) y es ampliamente utilizada en problemas con campos estacionarios<sup>20,22,16</sup>. En magnetostática, la densidad de flujo magnético puede expresarse como

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu_r\mathbf{H} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

donde  $\mathbf{M}$  es la densidad de magnetización y  $\mu_r$  es la permeabilidad relativa del medio. Entonces, la ley de Maxwell-Ampere,  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}^{imp}$ , puede escribirse como

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} = \mathbf{J}^{imp} + \nabla \times \mathbf{M} \quad (29)$$

En la expresión anterior, se define la densidad de corriente magnética equivalente como

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} \quad (30)$$

La importancia de esta nueva magnitud radica en que permite plantear el problema (29) en el vacío: ahora existe una nueva intensidad de campo magnético  $\bar{\mathbf{H}}$ , relacionada con la densidad de flujo magnético  $\mathbf{B}$ , mediante la permeabilidad del vacío  $\mu_0$ . Es decir, la ley constitutiva del material es:  $\mathbf{B} = \mu_0\bar{\mathbf{H}}$  y la expresión (29) puede escribirse como

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{J}^{imp} + \mathbf{J}_M$$

En consecuencia, la fuerza resultante puede calcularse mediante la ley de Biot-Savart

$$\mathbf{F}_m = \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{imp} + \mathbf{J}_M) \times \mathbf{B} d\Omega$$

En el caso de cargas magnéticas, el cálculo de la fuerza magnética se realiza mediante un desarrollo semejante al anterior definiendo la densidad de carga equivalente

$$Q_M = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M} \quad (31)$$

Puesto que  $\mu_0 \mathbf{M} = (1 - \frac{1}{\mu_r}) \mathbf{B}$ , tomando divergencia se obtiene

$$Q_M = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M} = -(1 - \frac{1}{\mu_r}) \nabla \cdot \mathbf{B} + \nabla \left( \frac{1}{\mu_r} \right) \cdot \mathbf{B}$$

Entonces, considerando la ley de Gauss para el campo magnético,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , se obtiene que:  $Q_M = \nabla \left( \frac{1}{\mu_r} \right) \cdot \mathbf{B}$ . Finalmente, la fuerza magnética se calcula mediante una analogía con la ley de Coulomb para el campo eléctrico ( $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ )

$$\mathbf{F}_m = Q_M \mathbf{H} = \nabla \left( \frac{1}{\mu_r} \right) \cdot \mathbf{B} \mathbf{H}$$

### Métodos: clasificación y descripción

El cálculo numérico de las fuerzas magnéticas generalmente se basa en el cálculo previo del campo magnético mediante el MEF. La mayoría de métodos numéricos para calcularlas se basan en las tres formulaciones presentadas en el subapartado anterior<sup>23,20,17,24</sup>. Básicamente, existen cinco métodos de calcular las fuerzas magnéticas.

El primero se denomina *método del tensor de tensiones de Maxwell* ( $\mathbf{F}_m^{Ttm}$ ). Este método se basa en integrar la expresión (25) sobre una superficie arbitraria que englobe el dominio de interés  $\Omega$ . Nótese que debido a la deducción de (25), dicha superficie debe estar situada en el vacío. El cálculo de dicha integral se realiza separando su componente tangencial:  $\mathbf{f}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{B}_n$ , de su componente normal:  $\mathbf{f}_n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_n^2 - \mu_0 \mathbf{H}_t^2 \right)$ . Debido a su simplicidad y similitud con el fenómeno físico, es uno de los métodos más utilizados. Sin embargo, es muy susceptible a errores numéricos y depende considerablemente de la superficie de integración escogida<sup>26</sup>.

El segundo es el *método del trabajo virtual de Coulomb* ( $\mathbf{F}_m^{Tvc}$ ). Este método se basa en la expresión de la fuerza en función de la energía magnética y puede ser implementado de diversas maneras. La más sencilla consiste en aproximar la expresión (28) mediante diferencias finitas. Otra posibilidad es la utilización de las matrices jacobianas de la transformación isoparamétrica del MEF en el cálculo de la integral<sup>14,15</sup> que aparece en (28). Por último, también es posible calcularla descomponiendo la fuerza en sus componentes tangencial y normal, de forma semejante a la realizada en el método del tensor de tensiones de Maxwell. En este caso<sup>20</sup>, se obtiene:  $\mathbf{f}_t = 0$ ,  $\mathbf{f}_n = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) \mathbf{B}_n^2 - (\mu_0 - \mu) \mathbf{H}_t^2 \right]$ .

El tercer método es el denominado *método de las corrientes de magnetización* ( $\mathbf{F}_m^{Jm}$ ). Éste se basa en substituir un medio magnético por un medio no magnético donde existe una distribución de corrientes magnéticas. La fuerza magnética total se calcula a partir de las componentes tangenciales y normales de la fuerza local como<sup>20</sup>:  $\mathbf{f}_t = (1 - \mu_r) \mathbf{B}_n \mathbf{H}_t$  y  $\mathbf{f}_n = \frac{\mu_0}{2} (\mu_r^2 - 1) \mathbf{H}_t^2$ . El cálculo de la fuerza local mediante este método depende fuertemente de la calidad de la malla y en general sus resultados no son muy precisos. Paralelamente, en la referencia<sup>19</sup> se presenta una versión diferente que permite mejorar los resultados.

El cuarto método es el *método de las cargas magnéticas* ( $\mathbf{F}_m^{Qm}$ ). Consiste en substituir un medio magnético por un medio no magnético donde existe una distribución de cargas

magnéticas<sup>20</sup>. A semejanza del método anterior, la fuerza magnética total se calcula a partir de  $\mathbf{f}_t = (1 - \frac{1}{\mu_r})\mathbf{B}_n\mathbf{H}_t$  y  $\mathbf{f}_n = \frac{1}{2\mu_0}(1 - \frac{1}{\mu_r^2})\mathbf{B}_n^2$ . La precisión de la fuerza total depende esencialmente del cálculo previo de  $\mathbf{B}_n$ . Por lo tanto, en la implementación del método debe realizarse especial énfasis en su cálculo<sup>20,22</sup>.

Por último, el quinto método es el *método de la densidad de fuerza superficial* ( $\mathbf{F}_m^{Dfs}$ ). Éste se deriva del método del tensor de tensiones de Maxwell, generando los mismos resultados que el método del trabajo virtual de Coulomb<sup>18,22</sup>. En este caso, la densidad de fuerza sólo depende de la componente normal:  $\mathbf{f}_t = 0$ ,  $\mathbf{f}_n = \frac{1}{2}[(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu})\mathbf{B}_n^2 - (\mu_0 - \mu)\mathbf{H}_t^2]$ .

En la Tabla I se resumen las componentes normal y tangencial de la densidad de fuerza para cada uno de los cinco métodos anteriores.

Métodos	$\mathbf{f}_t$	$\mathbf{f}_n$
$\mathbf{F}_m^{Ttm}$	$\mathbf{H}_t\mathbf{B}_n$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_n^2 - \mu_0\mathbf{H}_t^2)$
$\mathbf{F}_m^{Tvc}$	0	$\frac{1}{2}[(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu})\mathbf{B}_n^2 - (\mu_0 - \mu)\mathbf{H}_t^2]$
$\mathbf{F}_m^{Jm}$	$(1 - \mu_r)\mathbf{B}_n\mathbf{H}_t$	$\frac{\mu_0}{2}(\mu_r^2 - 1)\mathbf{H}_t^2$
$\mathbf{F}_m^{Qm}$	$(1 - \frac{1}{\mu_r})\mathbf{B}_n\mathbf{H}_t$	$\frac{1}{2\mu_0}(1 - \frac{1}{\mu_r^2})\mathbf{B}_n^2$
$\mathbf{F}_m^{Dfs}$	0	$\frac{1}{2}[(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu})\mathbf{B}_n^2 - (\mu_0 - \mu)\mathbf{H}_t^2]$

**Tabla I.** Densidades de fuerza superficiales (fuerza local) para los diferentes métodos

Es importante resaltar que teóricamente todos estos métodos son equivalentes<sup>20,22</sup>, puesto que se verifica

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_m^{Jm} &= \mathbf{F}_m^{Ttm} - \mu_r\mathbf{F}_\varepsilon \\ \mathbf{F}_m^{Qm} &= \mathbf{F}_m^{Ttm} - \left(\frac{1}{\mu_r}\right)\mathbf{F}_\varepsilon \\ \mathbf{F}_m^{Dfs} &= \mathbf{F}_m^{Ttm} - \mathbf{F}_\varepsilon \\ \mathbf{F}_m^{Dfs} &= \mathbf{F}_m^{Tvc}\end{aligned}$$

donde el término  $\mathbf{F}_\varepsilon = \oint_S (\mathbf{H}_t\mathbf{B}_n)\mathbf{t} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{B}_n^2 - \mu\mathbf{H}_t^2\right)\mathbf{n}$  es la integral sobre una superficie interior arbitraria, y por consiguiente debería ser nula<sup>22</sup>. Sin embargo, en las aplicaciones numéricas la precisión de los métodos es diferente porque éstos se basan en una aproximación previa, mediante el MEF, de  $\mathbf{B}_n$  y  $\mathbf{H}_t$ . Por consiguiente, los cinco métodos anteriores proporcionan valores diferentes de la fuerza magnética<sup>21,25</sup>.

## EJEMPLOS NUMÉRICOS

En este apartado se presentan cuatro ejemplos de cálculos magnetostáticos basados en algunas de las formulaciones expuestas anteriormente. En todos ellos, se han utilizado diferentes formulaciones basadas en el cálculo de potenciales. Asimismo, todos los cálculos se han realizado mediante el código de elementos finitos orientado al objeto CASTEM-2000. En el primer y tercer ejemplo sólo se ha estudiado un medio lineal. Por el contrario, en el segundo y cuarto ejemplo se ha considerado tanto un material con una permeabilidad  $\mu$  constante diferente de  $\mu_0$ , como un material no lineal (hierro) cuya ley constitutiva se presenta en la Figura 7.

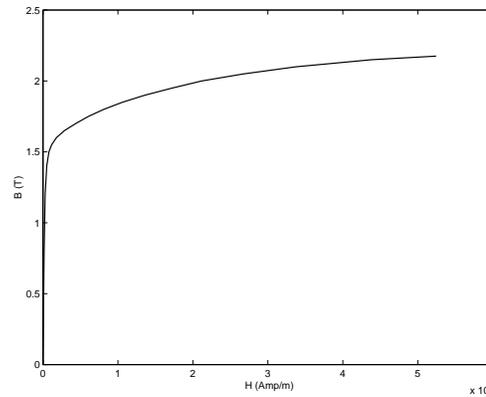


Figura 7. Ley constitutiva no lineal para el hierro

En el primer ejemplo se analiza un dipolo magnético. Este problema, extremadamente sencillo, permitirá verificar la calidad de los resultados obtenidos. En el segundo ejemplo se analiza un conductor de sección cuadrada por el que circula una corriente prescrita<sup>5</sup>. Se considera que el medio puede ser lineal o no lineal. Ambos supuestos se estudian utilizando dos mallas diferentes a fin de constatar la mejora de los resultados. Asimismo, se calcula la densidad de fuerza magnética en el interior del conductor mediante (23). El tercer ejemplo consiste en una aplicación industrial. En él se analiza un transformador de dos bobinas<sup>5</sup>. En el cuarto ejemplo se comparan los resultados obtenidos mediante el análisis axisimétrico de una bobina con los generados mediante un estudio tridimensional.

### Ejemplo 1

Como se ha comentado anteriormente, el primer ejemplo consiste en el análisis de un dipolo magnético: dos conductores paralelos e infinitamente largos que transportan una corriente de  $10^4$  Amp. En el presente estudio se analizan dos casos. En el primero se supone que las corrientes tienen sentidos opuestos, mientras que en el segundo se supone que tienen el mismo sentido. El análisis bidimensional de este problema se ha realizado de acuerdo con la aproximación potencial definida por las ecuaciones (8) y (9). La Figura 8a presenta la geometría del problema así como las condiciones de contorno. El dominio se ha discretizado mediante una malla estructurada formada por 2542 elementos cuadrangulares y 2645 nodos (Figura 8b). Puesto que este ejemplo posee solución analítica, se analiza la exactitud de los resultados numéricos. En particular, se estudia el error del potencial magnético y de la densidad de flujo magnético a lo largo de la línea de unión de los dos polos.

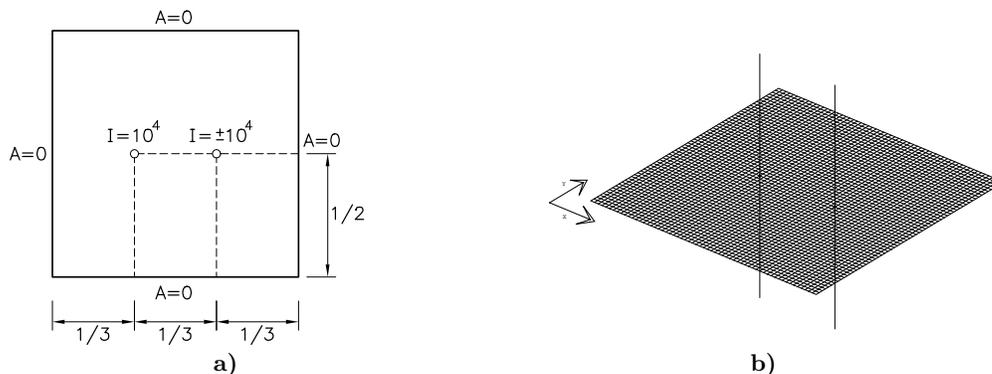
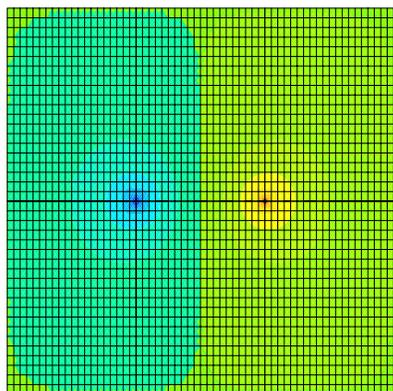
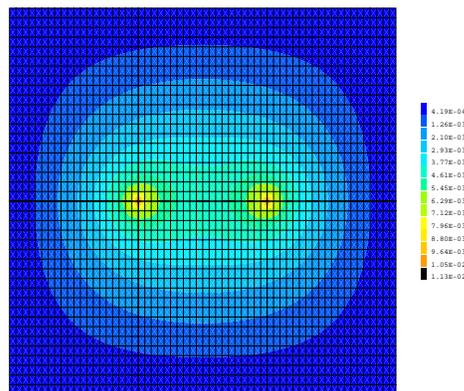


Figura 8. a) Dominio y condiciones de contorno para un dipolo magnético; b) Malla de cálculo

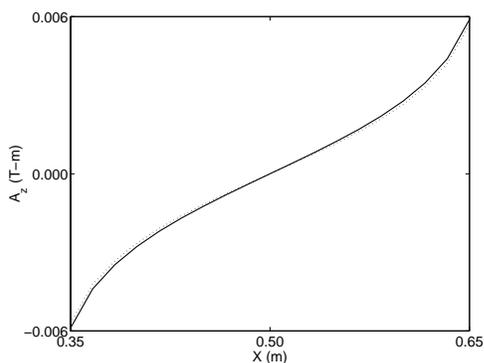
En la primera columna de la Figura 9 se presentan los resultados obtenidos considerando que las direcciones de corriente en los conductores son opuestas. Como es sabido, existe una interacción destructiva entre los dos polos. En la Figura 9a se muestran las líneas equipotenciales de  $A_z$ . Como era de esperar, se obtienen líneas equipotenciales concéntricas que parten de los polos y se anulan a lo largo del eje  $x = 0,5$ . En las Figuras 9b y 9c se muestran para  $y = 0,5$  los valores numéricos y analíticos correspondientes al potencial  $A_z$  y al módulo de la densidad de flujo magnético  $B$ .



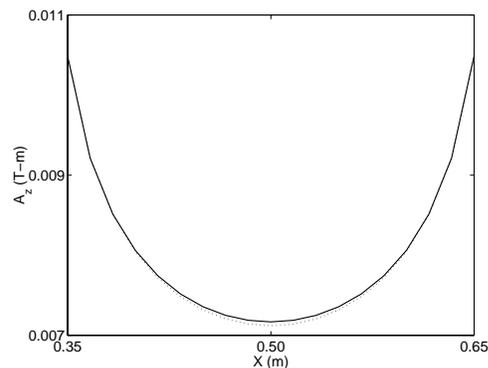
a) líneas equipotenciales para corrientes opuestas



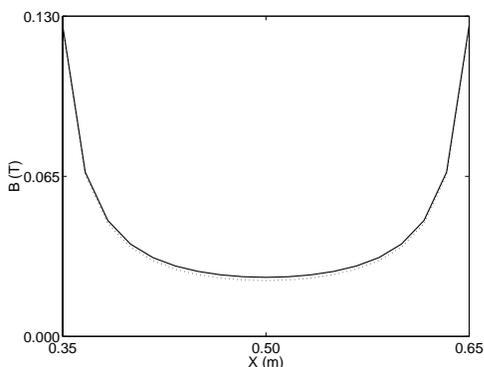
d) líneas equipotenciales para corrientes paralelas



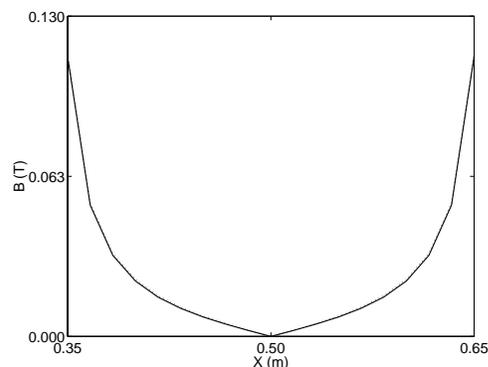
b) valor del potencial  $A_z$  en  $y = 0,5$



e) valor del potencial  $A_z$  en  $y = 0,5$



c) valor de  $B$  en  $y = 0,5$

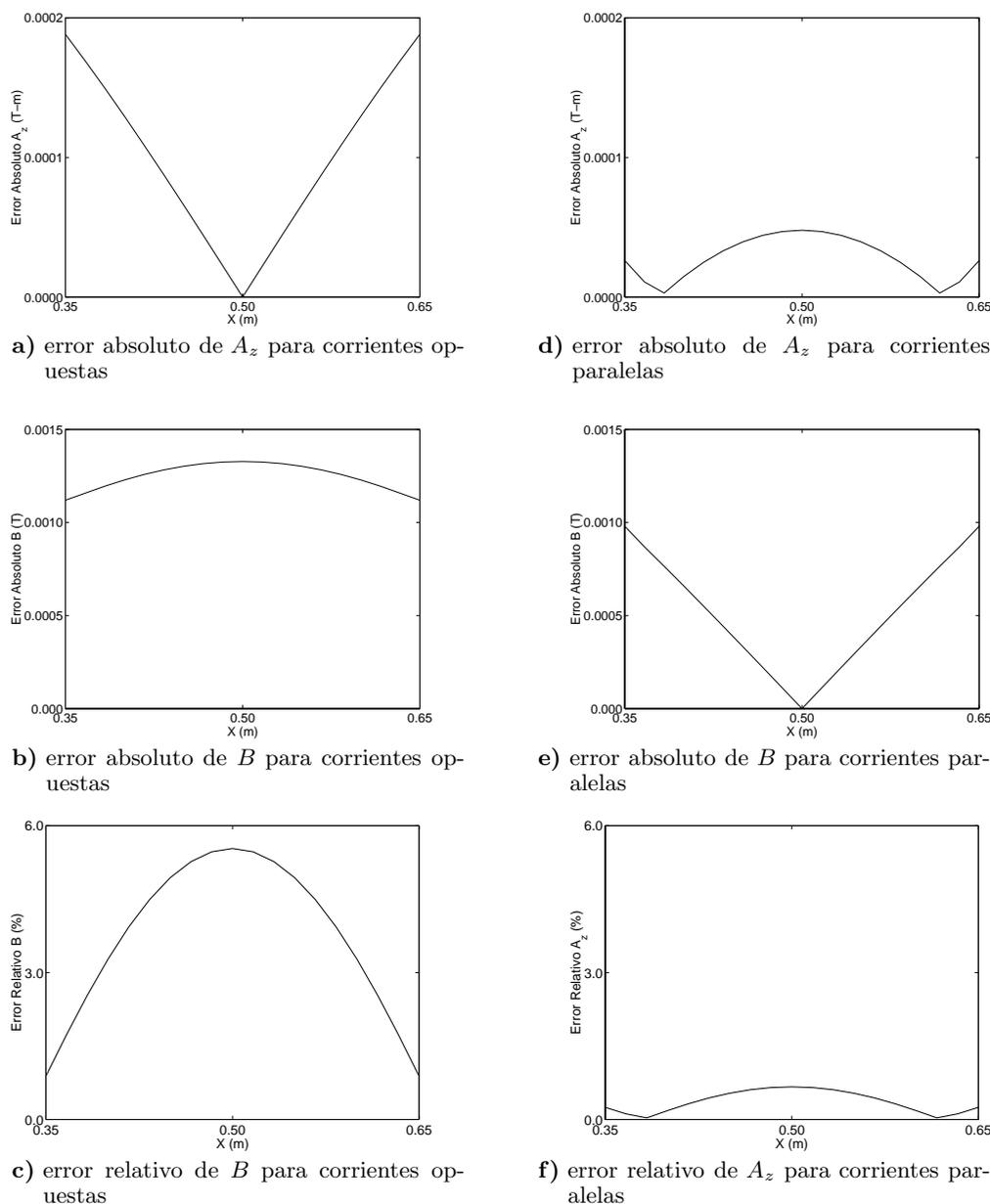


f) valor de  $B$  en  $y = 0,5$

**Figura 9.** Valores numéricos (línea continua) y valores analíticos (línea discontinua) obtenidos para el dipolo magnético

En la segunda columna de la Figura 9 se presentan los resultados obtenidos cuando la corriente en ambos conductores tiene el mismo sentido. Como en el caso anterior los resultados obtenidos coinciden con los esperados: líneas equipotenciales concéntricas que parten de los polos con interacción constructiva. Por consiguiente, el flujo fluye alrededor de los polos (Figura 9d). En las Figuras 9e y 9f se muestran para  $y = 0,5$  los valores numéricos y analíticos correspondientes al potencial  $A_z$  y al módulo de la densidad de flujo magnético  $B$ .

En la Figura 10 se analiza el error de la solución numérica respecto a la solución analítica para el caso de corrientes opuestas (primera columna) y para el caso de corrientes paralelas (segunda columna). En las Figuras 10a y 10d se presenta el error absoluto del potencial  $A_z$  para ambos casos. En las Figuras 10b y 10e se presenta el error absoluto del módulo de la densidad de flujo magnético  $B$  para ambos casos.



**Figura 10.** Comparación de los resultados obtenidos para el dipolo magnético

Para el caso de corrientes opuestas, el potencial se anula para  $x = 0,5$  y se obtiene un error relativo del potencial indeterminado. Consecuentemente en la Figura 10c sólo se muestra el error relativo de  $B$ . Éste resulta ser siempre inferior al 6 %. Para el caso de corrientes paralelas, la densidad de flujo  $B$  se anula en el punto medio  $(0,5; 0,5)$  y consecuentemente su error relativo es indeterminado. Por lo tanto, la Figura 10f sólo muestra el error relativo del potencial  $A_z$ . Como puede observarse, se calcula el potencial  $A_z$  con una precisión inferior al 1,5 %.

Debe resaltarse que los resultados numéricos reproducen cuantitativamente los valores analíticos. Asimismo, en ambos casos estos resultados conservan la simetría del problema.

Debe resaltarse que los resultados numéricos reproducen cuantitativamente los valores analíticos. Asimismo, en ambos casos estos resultados conservan la simetría del problema.

## Ejemplo 2

En el segundo ejemplo se analiza un conductor de sección cuadrada por el que circula una densidad de corriente  $\mathbf{J}^{imp} = (0, 0, J_z^{imp}) = (0, 0, 10^4)$  Amp/m<sup>2</sup>. El análisis se realiza tanto para un conductor lineal ( $\mu_r = 10$ ) como para un conductor no lineal. Nótese que la no linealidad del material está en su permeabilidad (su ley constitutiva es la presentada en la Figura 7). Como en el ejemplo anterior, mediante las ecuaciones (8) y (9) se ha realizado el análisis bidimensional de este problema. Debido a la simetría del problema sólo se ha estudiado un cuarto del problema. En la Figura 11 se presenta la geometría del modelo y las condiciones de contorno. El problema se ha discretizado utilizando dos mallas diferentes a fin de observar la mejora obtenida en la solución.

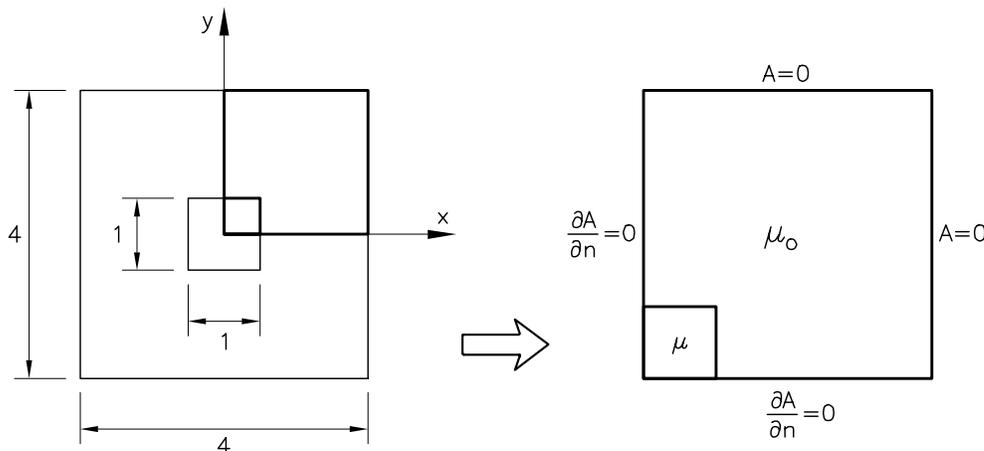


Figura 11. Dominio y condiciones de contorno para un conductor de sección cuadrada

En la Figura 12 se presentan las líneas equipotenciales obtenidas utilizando ambas mallas tanto para un conductor lineal como no lineal. En ambos casos, al aumentar la discretización del dominio se captura mejor el gradiente del potencial. En particular, para el problema lineal los resultados concuerdan con los presentados en la referencia<sup>5</sup> y la mayor parte del gradiente del potencial magnético se concentra en el interior del conductor.

Los vectores de densidad de fuerza en el interior del conductor, calculados de acuerdo con (24) y utilizando la malla fina, se presentan superpuestos a las líneas de equipotencial magnético en la Figura 13. Como puede observarse, el vector de densidad de fuerza es ortogonal a las líneas de equipotencial magnético y su sentido está determinado por el signo del potencial: puesto que en este ejemplo  $J_z^{imp} > 0$ , el vector densidad de fuerza está orientado hacia el centro del conductor.

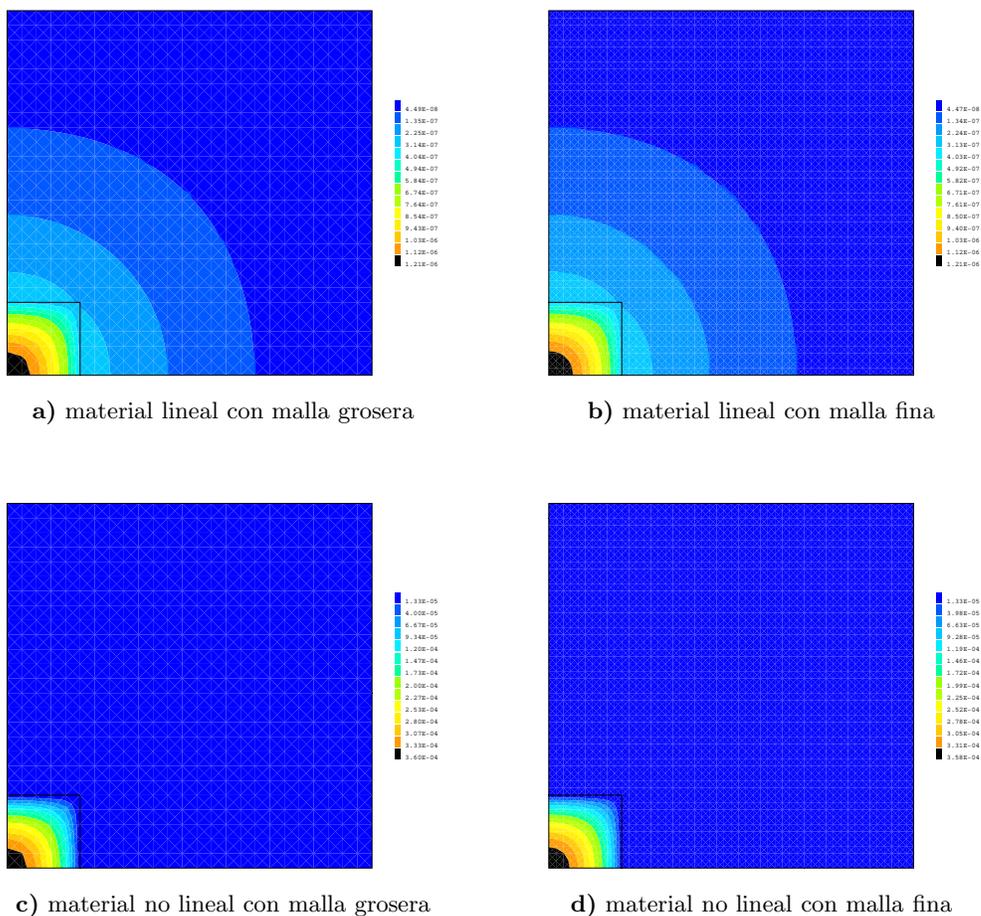


Figura 12. Líneas equipotenciales correspondientes al conductor de sección cuadrada del segundo ejemplo

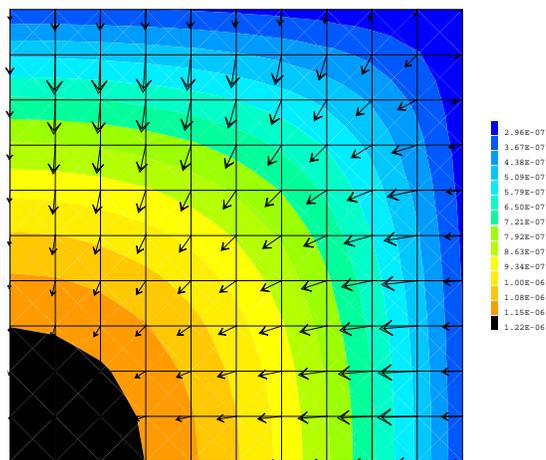


Figura 13. Densidad de fuerza y líneas equipotenciales en el conductor de sección cuadrada del segundo ejemplo

### Ejemplo 3

El tercer ejemplo consiste en una aplicación industrial<sup>5</sup>. En particular se analiza el flujo magnético generado en un transformador de doble bobina de  $3 \times 4 \times 10$  cm. Puesto que la longitud del transformador es mayor que el resto de medidas, es posible estudiar su comportamiento mediante un análisis bidimensional. La Figura 14 presenta una sección del mismo. El análisis de este problema se ha realizado mediante las ecuaciones (8) y (9).

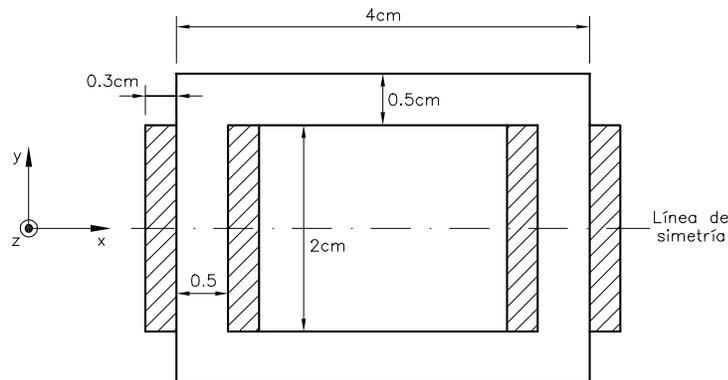


Figura 14. Sección del transformador correspondiente al tercer ejemplo

En este ejemplo sólo se considera un acero de permeabilidad relativa  $\mu_r = 100$ . Por la bobina primaria circula una densidad de corriente de  $100 \text{ Amp/cm}^2$  en una sección de  $0,6 \text{ cm}^2$ . Para que el flujo magnético esté orientado en el sentido de las manecillas del reloj dentro del acero, la corriente eléctrica debe entrar en el papel (dirección de  $Z$  negativa) en el lado derecho del transformador y salir del papel (dirección de  $Z$  positiva) en el lado izquierdo del mismo. La densidad de corriente en el lado derecho de la bobina primaria es de  $-100 \text{ Amp/cm}^2$ , mientras que en el lado izquierdo es de  $100 \text{ Amp/cm}^2$ . Puesto que el problema es simétrico respecto al eje de abscisas, sólo se analiza la mitad del problema. En la Figura 15 se presentan las condiciones de contorno.

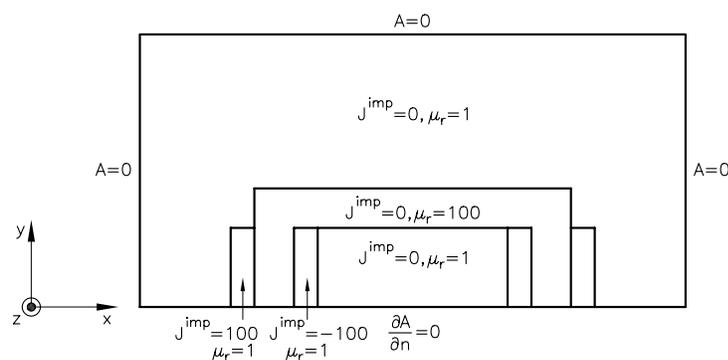


Figura 15. Dominio computacional y condiciones de contorno para el transformador presentado en el tercer ejemplo

El problema se ha discretizado utilizando una malla estructurada formada por 3000 elementos cuadrangulares y 3131 nodos. En la Figura 16 se presenta la densidad de flujo magnético. Estos resultados concuerdan con los presentados por la referencia<sup>5</sup>.

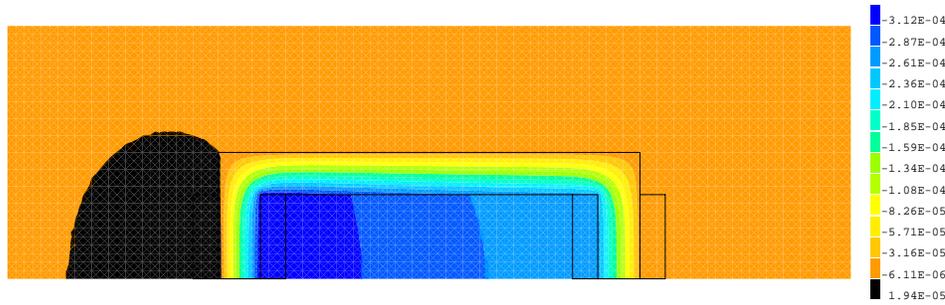


Figura 16. Líneas de densidad de flujo magnético en el interior del transformador

#### Ejemplo 4

En el cuarto ejemplo se analiza el campo magnético dentro y alrededor de un cilindro de hierro con una bobina en su interior por la que circula una densidad de corriente de  $800 \text{ Amp/mm}^2$ . Se considera tanto el problema de un material lineal ( $\mu_r = 2900$ ) como el de material no lineal (Figura 7). La Figura 17 presenta un esquema del modelo.

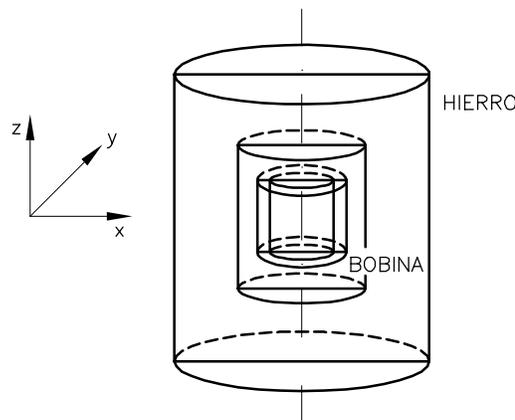


Figura 17. Modelo geométrico correspondiente a la bobina presentada en el cuarto ejemplo

Puesto que el problema es axisimétrico, en este ejemplo se comparan los resultados obtenidos mediante un cálculo bidimensional axisimétrico en el plano  $X - Z$  (coincidiendo la coordenada radial  $\rho$  con el eje  $X$ ) con los obtenidos mediante un cálculo tridimensional.

El análisis bidimensional axisimétrico de este problema se ha realizado de acuerdo con la aproximación potencial definida por las ecuaciones (10) y (11). Las condiciones de contorno para el problema bidimensional axisimétrico se presentan en la Figura 18. Se ha impuesto potencial nulo en las fronteras exteriores (lejos del conductor), condiciones de Neumann homogéneas en la línea de simetría y potencial nulo en el eje de simetría, puesto que en él debe aparecer una línea de flujo y ésta ha de ser paralela a las líneas de equipotencial (como consecuencia directa de imponer simetría de revolución). El problema se ha discretizado utilizando una malla estructurada compuesta por 1216 cuadriláteros y 1287 nodos.

En la Figura 19a se presentan las líneas de equipotencial para un material lineal y en la Figura 19b para un material no lineal. Puesto que la única diferencia entre ambos casos es el tipo de hierro, la diferencia entre ambas figuras se centra en el hierro y no en la región interna de aire o en la bobina.

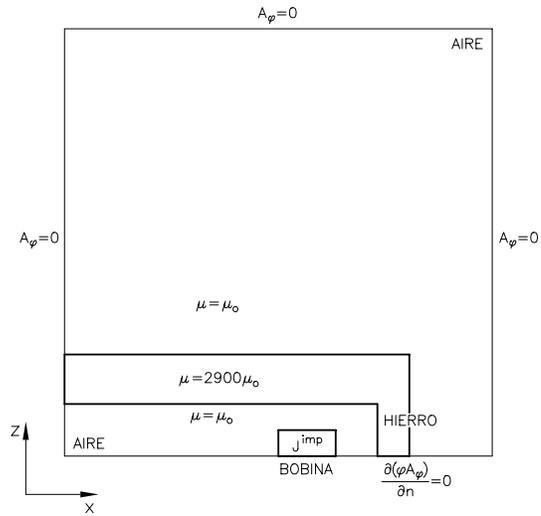


Figura 18. Condiciones de contorno para el análisis axisimétrico de la bobina

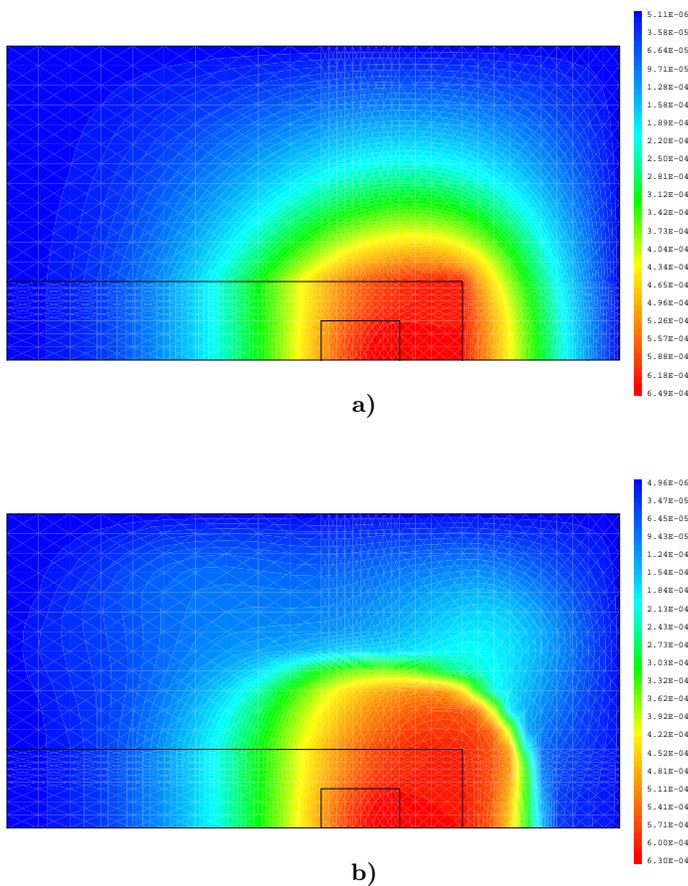


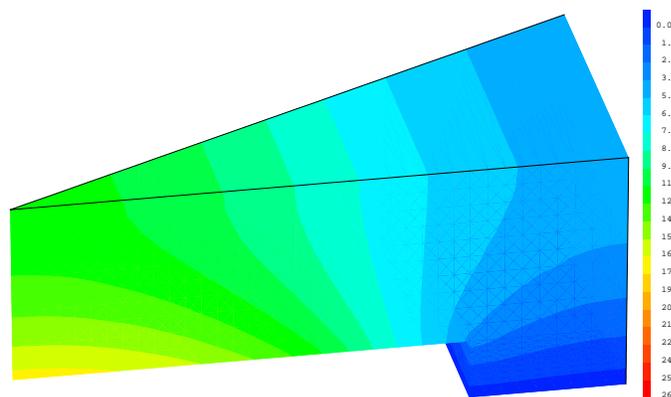
Figura 19. Análisis axisimétrico de la bobina. Líneas equipotenciales en la zona hierro–aire–bobina: a) material lineal; b) material no lineal



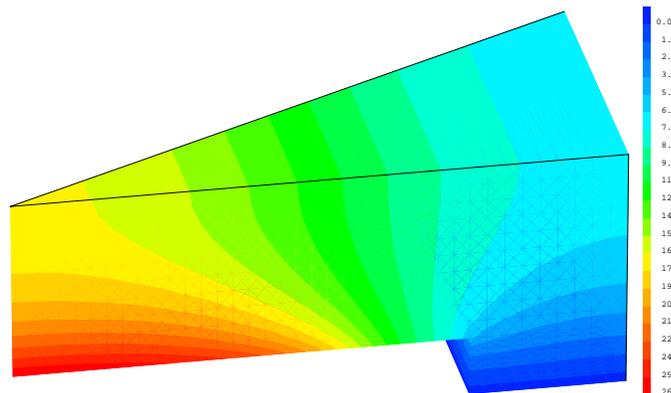
Los cálculos tridimensionales se han realizado en una región formada por un corte de  $20^\circ$  utilizando la formulación  $\psi$ - $\phi$  presentada en las ecuaciones(14) de la tercera sección. Puesto que se trata de un problema magnetostático, no existe la zona  $\Omega_1$ . La región  $\Omega_2^\phi$  contiene la bobina y parte de la zona de aire interior. La región  $\Omega_2^\psi$  está formada por el resto del dominio (Figura 20).

La malla está formada por 2699 elementos y 5452 nodos. La región donde se define el potencial  $\phi$  ( $\Omega_2^\phi$ ) está formada por 270 elementos y 616 nodos. En la Figura 21a y 21b se presenta la distribución del potencial  $\phi$  en el dominio  $\Omega_2^\phi$  para el modelo lineal y no lineal respectivamente. Debido a que esta zona no incluye el hierro ambos resultados son muy similares.

En la Figura 22a y 22b se presenta el potencial  $\psi$  sobre el hierro. Por consiguiente, en esta zona ambas distribuciones difieren substancialmente.



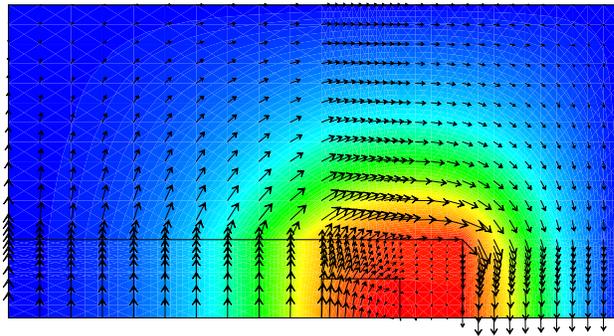
a)



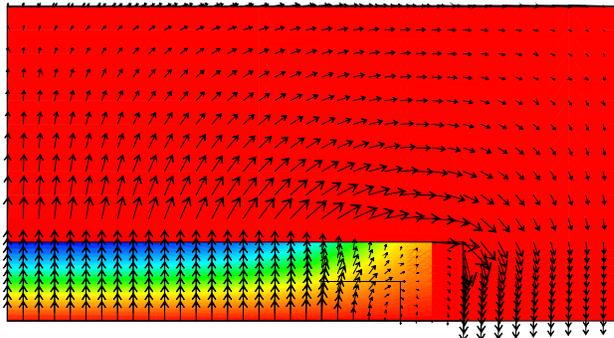
b)

**Figura 22.** Análisis tridimensional de la bobina. Líneas equipotenciales en el hierro:  
a) material lineal; b) material no lineal

En la Figura 23a se muestra, para el análisis bidimensional axisimétrico con material lineal, la densidad de flujo magnético representado sobre las líneas de equipotencial  $A_\varphi$ . En la Figura 23b se muestra, para el análisis tridimensional con material lineal, la densidad de flujo magnético representado sobre las líneas de equipotencial  $\phi$  y  $\psi$ , en la sección  $y = 0$ . Como puede observarse, los valores y la distribución de los potenciales son totalmente distintos, puesto que su definición es diferente (ecuación (3) para el potencial  $\mathbf{A}$  y ecuaciones (12) y (13) para los potenciales  $\phi$  y  $\psi$ , respectivamente). Sin embargo, el comportamiento de la densidad de flujo magnético coincide satisfactoriamente tanto cualitativa como cuantitativamente.



a)



b)

**Figura 23.** Densidad de flujo magnético y líneas equipotenciales en la zona hierro–aire–bobina: a) cálculo 2D lineal utilizando potencial  $A_\varphi$ ; b) cálculo 3D lineal utilizando potenciales  $\phi$  y  $\psi$

## CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado una clasificación de las formulaciones más relevantes para la resolución de problemas en electromagnetismo computacional. Éstas se han clasificado en dos grandes grupos: **1.** las formulaciones que utilizan potenciales y **2.** las formulaciones que resuelven directamente las ecuaciones de Maxwell. Asimismo, se ha realizado una presentación de las características básicas de cada una de ellas, discutiendo sus ventajas y limitaciones. También se han presentado tres formulaciones diferentes para el cálculo de fuerzas electromagnéticas. A la vista de estos resultados, se han analizado y clasificado los métodos más utilizados en el cálculo de dichas fuerzas. Finalmente se han presentado cuatro

ejemplos numéricos que incluyen problemas lineales y no lineales, tanto en dos como en tres dimensiones. En su resolución mediante el MEF se han utilizado dos de las formulaciones presentadas anteriormente que se basan en diferentes potenciales magnéticos. Los resultados obtenidos concuerdan tanto con la solución analítica como con las soluciones halladas en estudios anteriores.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto TAP98-0421 de la CICYT.

## REFERENCIAS

- 1 J. Pallarés, X. Granados, R. Bosch y X. Obradors, "1 kW bearingless superconducting motor with axial field excitation", *4th. European Conference on Applied Superconductivity*, Sitges, Spain, (1999).
- 2 H. Hashizume, T. Sugiura, K. Miya y S. Toda, "Numerical analysis of electromagnetic phenomena in superconductors", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **25**, pp. 3145–3159, (1989).
- 3 O. Bíró y K. Preis, "On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **25**, pp. 3145–3159, (1989).
- 4 J. Donea, S. Giuliani y A. Philippe, "Finite elements in the solution of electromagnetic induction Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **8**, pp. 359–367, (1974).
- 5 S. Hoole y P. Hoole, "*A modern short course in engineering electromagnetics*", Oxford University Press, New York, (1996).
- 6 J. Jin, "*The finite element method in electromagnetics*", John Wiley and Sons, New York, (1993).
- 7 J. Simkin y C. W. Trowbridge, "On the use of the total scalar potential in the numerical solution of field problems in electromagnetics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **14**, pp. 423–440, (1979).
- 8 L. Hui L. y S. Saigal, "Mapped infinite elements for 3-D vector potential problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **37**, pp. 343–356, (1994).
- 9 P.P. Silvester y R.L. Ferrari, "*Finite elements for electrical engineers*", Cambridge University Press, Cambridge, (1983).
- 10 C.W. Steele, "*Numerical Computation of Electric and Magnetic Fields*", Van Nostrand Reinhold Cop., New York, (1987).
- 11 B.N. Jiang, J. Wu y L.A. Povinelli, "The origin of spurious solutions in computational electromagnetics", *Journal of Computational Physics*, Vol. **125**, pp. 104–123, (1996).
- 12 F. Assous, P. Degond, E. Heintze, P. A. Raviart y J. Seger, "On a finite-element method for solving the three-dimensional Maxwell equations", *Journal of Computational Physics*, Vol. **109**, pp. 222–237, (1993).
- 13 P. Monk, "A comparison of three mixed methods for the time-dependent Maxwell's equations", *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Vol. **13**, pp. 1097–1122, (1992).

- 14 J.L. Coulomb, "A methodology for the determination of global electromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **19**, pp. 2514–2519, (1983).
- 15 J.L. Coulomb y G. Meunier, "Finite element implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **20**, pp. 1894–1896, (1984).
- 16 T. Kabashima, A. Kawahara y T. Goto, "Force calculation using magnetizing currents", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **24**, pp. 451–454, (1988).
- 17 W. Müller, "Comparison of different methods of force calculation", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **26**, pp. 1058–1061, (1990).
- 18 G. Henneberger, P.K. Sattler, W. Hadrys y D. Shen, "Procedure for the numerical computation of mechanical vibrations in electrical machines", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **28**, pp. 1351–1354, (1992).
- 19 G. Henneberger, P.K. Sattler y D. Shen, "Nature of the equivalent magnetizing current for the force calculation", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **28**, pp. 1068–1071, (1992).
- 20 N. Sadowski, Y. Lefèvre, M. Lajoie-Mazenc y J.P.A. Bastos, "Sur le calcul des forces magnétiques", *J. Physique III*, Vol. **2**, pp. 859–870, (1992).
- 21 M. Bartsch y T. Weiland, "2D and 3D calculation of forces", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **30**, pp. 3467–3470, (1994).
- 22 Z. Ren, "Comparison of different force calculation methods in 3D finite element modelling", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **30**, pp. 3471–3474, (1994).
- 23 M. Kasper y J. Franz, "Highly accurate computation of field quantities and forces by superconvergence in finite elements", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **31**, pp. 1424–1427, (1995).
- 24 K. Komezá, A. Pelikant, J. Tegopoulos y S. Wiak, "Comparative computation of forces and torques of electromagnetic devices by means of different formulae", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **30**, pp. 3475–3477, (1994).
- 25 R. Mertens, U. Pahner, K. Hameyer y R. Belmans, "Force calculation based on a local solution of Laplace's equation", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **33**, pp. 1216–1218, (1997).
- 26 S. Salon, S. Bhatia y D. Burow, "Some aspects of torque calculations in electrical machines", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **33**, pp. 2018–2021, (1997).
- 27 J.R. Reitz, F.J. Milford y R.W. Christy, "*Fundamentos de la teoría electromagnética*", Addison-Wesley, Wilmington, (1986).