

SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL CONFORMADO METÁLICO. EFICIENCIA NUMÉRICA EN PROCESOS DE LAMINACIÓN. PARTE I

J.J. ANZA*
y
M.A. GUTIÉRREZ**

* *Departamento de Matemática Aplicada
Universidad del País Vasco
Alameda de Urquijo s/n, 48013 Bilbao, España
Tel.: + 34-4-427 8055 Fax: + 34-4-441 4041
E-mail: mapanagj@bi.ehu.es*

** *Departamento de Mecánica y CAD-CAM
LBEIN
Cuesta de Olabeaga 16, 48013 Bilbao, España
Tel.: + 34-4-489 2400 Fax: + 34-4-411 1749
E-mail:*

RESUMEN

La simulación numérica del conformado responde a un análisis altamente no lineal en el que se combinan aspectos generales de la modelización del sólido deformable, como son elastoplasticidad, grandes deformaciones y contacto. Su resolución aproximada mediante técnicas de elementos finitos requiere un gran esfuerzo computacional contradictorio con la interactividad requerida en la aplicación industrial. En esta parte primera se describen los elementos principales de la formulación, incidiendo en la caracterización matemática y en los algoritmos numéricos asociados con su aproximación en el marco incremental iterativo del análisis no lineal, concluyendo con los resultados obtenidos en simulaciones de laminación plana en caliente. La segunda parte está dedicada al análisis de la eficiencia computacional y a la presentación de los métodos desarrollados y los resultados obtenidos.

NUMERICAL SIMULATION OF METAL FORMING. NUMERICAL EFFICIENCY IN ROLLING PROCESSES. PART I

SUMMARY

The numerical simulation of metal forming processes follows a highly non linear analysis where general aspects as elastoplasticity, finite deformation and contact mechanics are combined. Approximated solutions obtained by finite element techniques require strong computational effort, that contradicts the need of interactive industrial applications. The first part of the work deals with the description of the main elements of the formulation, with

Recibido: Diciembre 1996

attention to mathematical modelling and the approximating algorithms in the incremental iterative frame of non linear analysis, ending with the results obtained in hot rolling simulation. The second part is dedicated to computational efficiency analysis and the presentation of the related methods and results obtained in this work.

INTRODUCCIÓN

La simulación numérica de procesos industriales es una alternativa importante, en general complementaria pero también sustitutoria parcial o totalmente de los costosos procedimientos experimentales asociados al desarrollo innovador. La simulación computacional del conformado de metales proporciona información sobre fuerzas y potencias en juego, dimensiones, niveles de deformación, tensiones residuales, evolución térmica, etc. La relación entre estos conceptos y las características finales mecánicas y metalúrgicas tiene fuerte incidencia en aspectos decisivos, como el costo, los plazos y la calidad. Esta información permite influir positivamente en el diseño de los equipos conformadores, en el ahorro del material, en el abaratamiento del proceso, en la minimización de los defectos geométricos y estructurales.

La *interactividad* y la *fiabilidad* son dos condiciones necesarias para la implementación de medios de simulación computacional en entornos industriales. La aplicación de herramientas de simulación numérica de carácter general hasta la obtención de resultados valiosos en problemas concretos requiere un importante esfuerzo de desarrollo e investigación multidisciplinar que descansa en el conocimiento tecnológico del proceso, la capacidad de modelización e interpretación y la adecuada algorítmica numérica que proporcione resultados precisos en tiempos admisibles. Es en esta última línea, donde se enmarca este trabajo, en el que se distinguen dos partes: en la primera se desarrollan los elementos necesarios para la simulación de procesos de conformado metálico y en particular del proceso de laminación; la segunda está orientada al análisis de las estructuras numéricas obtenidas con el fin optimizar los tiempos de cálculo.

Entre los primeros métodos desarrollados para el análisis de procesos de conformado cabe destacar, ya en 1925 el método "slab", que proporcionaba resultados interesantes para el caso de la laminación. Posteriormente se introdujeron con mayor generalidad los métodos de las líneas de deslizamiento y del límite superior, válidos ambos en deformación plana y materiales perfectamente plásticos. Su utilización exige experiencia y un conocimiento previo de las deformaciones internas, proporcionando entonces resultados útiles pero todavía insuficientes.

Una determinación más precisa del efecto de los distintos parámetros que intervienen en el flujo del metal ha sido posible con el desarrollo del método de los elementos finitos. Las primeras formulaciones del MEF para procesos de conformado^{1,2}, se producen en 1974, basadas en la denominada *formulación de flujo*, que considera el material como un fluido viscoso newtoniano. Este enfoque ha sido posteriormente ampliado incluyendo efectos térmicos³ y añadiendo la componente elástica del flujo visco-plástico⁴. Esta formulación que se plantea en un sistema de referencia euleriano, en el cual la malla espacial permanece fija, presenta inconvenientes para el tratamiento de las superficies libres y para interacciones con grandes desplazamientos.

Más recientemente, la *formulación de sólido*, en la que se supone que el material se comporta como un sólido elastoplástico, ha sido considerada más apropiada cuando el flujo del material sufre grandes desplazamientos y rotaciones, siendo aplicada al conformado de metales por numerosos autores⁵⁻¹¹. En la formulación de sólido, el planteamiento lagrangiano permite, al considerar un mallado material, seguir de manera natural el cambio de forma y la evolución de las propiedades dependientes de la historia del material, aunque pueden producirse mallas excesivamente distorsionadas. Se consideran entonces formulaciones mixtas lagrangiana-euleriana⁸ y técnicas de remallado, simples o con estimación de error y mallado adaptativo.

En procesos de conformado, los métodos implícitos de integración han mostrado tradicionalmente un comportamiento más eficiente que los métodos explícitos. Consideraciones de estabilidad numérica reducen la utilidad de los esquemas explícitos, a procesos de corta duración, tipo impacto, como puede ser el conformado por forja. En procesos más lentos, como la *laminación*, los métodos explícitos pueden ser competitivos si se incrementa artificialmente la densidad del material hasta que el comportamiento dinámico comienza a ser significativo; de esta forma, al reducirse la velocidad de propagación de las ondas elásticas, pueden emplearse incrementos mayores de tiempo⁹. Las técnicas de integración implícita permiten incrementos de tiempo sensiblemente mayores, aunque a costa de la sucesiva resolución de sistemas de ecuaciones lineales en cada incremento. En trabajos recientes^{10,11} se presentan simulaciones implícitas muy eficaces, que incluso compiten con los métodos explícitos en procesos rápidos de impacto.

En este trabajo se estudia en detalle la etapa de deformación del proceso de laminación en caliente. Se trata de un proceso de corta duración, en el que la pérdida superficial de calor se compensa en parte con el calor generado por la deformación plástica y la variación de temperatura no es significativa. Los desarrollos realizados están basados en la formulación de sólido, bajo hipótesis de comportamiento cuasiestático isoterma e isotropo, con ley constitutiva independiente de la velocidad de deformación; el problema se resuelve de forma implícita mediante métodos iterativo incrementales tipo Newton.

FORMULACIÓN DEL CONTINUO

Consideraremos la configuración inicial del cuerpo material como un conjunto de partículas distribuidas de forma continua sobre una región V_0 . Identificaremos cada una de las partículas mediante un vector posición \mathbf{X} , con referencia a unos ejes cartesianos fijos y un instante inicial t_0 . Considerando respecto a los mismos ejes, el nuevo vector posición \mathbf{x} de cada partícula, la evolución del cuerpo en sucesivas configuraciones V se describe mediante el movimiento continuamente derivable: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ que admite la expresión inversa $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$. Se asignan letras e índices mayúsculas a las magnitudes definidas sobre la configuración inicial mediante coordenadas materiales \mathbf{X} y letras minúsculas a las definidas sobre la configuración actual mediante coordenadas espaciales \mathbf{x} . En los análisis cuasiestáticos se mantiene la variable temporal t , con significado de parámetro de carga que define las sucesivas configuraciones.

Medidas de tensión y deformación

Las medidas de tensión y deformación son las herramientas matemáticas que describen la distribución de las fuerzas y los desplazamientos en el medio continuo. Con respecto a la deformación, la relación fundamental se obtiene diferenciando las ecuaciones del movimiento

$$dx = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

El tensor mixto gradiente de deformación \mathbf{F} relaciona punto a punto los entornos respectivos de las dos configuraciones, es decir, contiene la información referente al cambio de forma del entorno del punto y la referente al movimiento de sólido rígido del mismo. Para excluir los movimientos de sólido rígido, se introducen en coordenadas materiales y espaciales, respectivamente, los tensores *Cauchy-Green derecho* $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ y *Cauchy-Green izquierdo* $\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$, que permiten evaluar el alargamiento unitario en cualquier dirección y la distorsión angular de dos direcciones cualesquiera.

Otra forma de representar matemáticamente el proceso de deformación es mediante la descomposición polar del gradiente de deformación: $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}$, donde \mathbf{R} es un tensor ortogonal y \mathbf{U} , \mathbf{v} son tensores simétricos y definidos positivos, denominados *Cauchy derecho* y *Cauchy izquierdo*, respectivamente. Excepto una rotación definida por el tensor mixto \mathbf{R} , los tensores \mathbf{U} y \mathbf{v} representan la misma deformación, pero en coordenadas materiales y espaciales, respectivamente. Los tensores \mathbf{C} y \mathbf{b} son coaxiales respectivamente con \mathbf{U} y \mathbf{v} , verificándose $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$ y $\mathbf{b} = \mathbf{v}^2$. Las cuatro medidas coinciden con el tensor unidad para movimientos de sólido rígido sin deformación.

Con valor nulo para movimientos sin deformación se definen los tensores *deformación natural o logarítmica* $\mathbf{E}^N = \log \mathbf{U}$, $\mathbf{e}^N = \log \mathbf{v}$; y los tensores de *deformación de Green-Lagrange* $\mathbf{E} = 1/2(\mathbf{C} - \mathbf{I})$ y de *Almansi* $\mathbf{e} = 1/2(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1})$. Estos últimos están relacionados entre sí mediante transformaciones asociadas al movimiento: $\mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \phi_*(\mathbf{E})$ y $\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} = \phi^*(\mathbf{e})$, denominadas respectivamente transformación hacia adelante (push forward) y hacia atrás (pull back). La generalización de esta idea¹² facilita la expresión de los conceptos en su versión espacial o material.

Se define el campo de desplazamientos $\mathbf{u} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$, y mediante derivación temporal, el campo de velocidades. A partir del campo espacial de velocidades $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, se obtiene mediante diferenciación: $d\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{l} \cdot d\mathbf{x}$, el tensor espacial gradiente de velocidades \mathbf{l} , que contiene la información correspondiente a la velocidad del cambio de forma del entorno del punto material, y a la velocidad del movimiento de sólido rígido del mismo, en ambos casos con referencia a la configuración actual. Se separa esta información en el tensor simétrico velocidad de deformación $\mathbf{d} = 1/2(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T)$ y el tensor hemisimétrico velocidad de rotación $\mathbf{w} = 1/2(\mathbf{l} - \mathbf{l}^T)$.

El tensor espacial velocidad de deformación \mathbf{d} no es la derivada temporal del tensor espacial de deformación de Almansi ($\dot{\mathbf{e}}$), debido a que el primero expresa la velocidad del cambio de forma con respecto a la configuración actual móvil, y el segundo con respecto a la configuración inicial fija. Teniendo en cuenta relaciones anteriores se observa que

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F} = \phi^*(\mathbf{d}) \Rightarrow \mathbf{d} = \phi_* \left(\frac{d}{dt} \phi^*(\mathbf{e}) \right) = \mathbf{L}_v(\mathbf{e}) \quad (1)$$

y se introduce la derivada temporal de Lie (\mathbf{L}_v) con respecto al campo \mathbf{v} de velocidades, donde la derivación temporal se realiza en los ejes coordenados materiales que permanecen fijos en el tiempo.

El concepto de tensión está asociado con la configuración actual y su descripción natural es mediante el tensor espacial, tensión σ de Cauchy o tensión verdadera. Asociado a la descripción espacial se define también el tensor de tensiones de Kirchhoff $\tau = \det(\mathbf{F})\sigma$ que expresa la tensión verdadera pero en unidades de área medidas en la configuración inicial. El segundo tensor de Piola Σ^{II} expresa la tensión verdadera en coordenadas materiales: $\Sigma^{II} = \phi^*(\tau) = \mathbf{F}^{-1} \cdot \tau \cdot \mathbf{F}^{-T}$, es decir, $\Sigma^{II} = \det(\mathbf{F})\phi^*(\sigma)$.

En deformación infinitesimal ($\nabla_x \mathbf{u} \cong 0$ $\mathbf{F} \cong \mathbf{I}$ $\dot{\mathbf{E}} \cong \mathbf{d}$) no existe diferencia entre coordenadas materiales y espaciales y sólo existe una configuración; todas las medidas de deformación coinciden en una relación lineal que es la parte simétrica del gradiente de desplazamientos $\varepsilon = 1/2((\nabla_x \mathbf{u}) + (\nabla_x \mathbf{u})^T)$ y todas las medidas de tensión coinciden en la tensión σ de Cauchy.

Leyes de conservación

Las leyes de conservación imponen restricciones a la evolución en el tiempo y el espacio de las medidas de tensión y deformación. La ley de *conservación de la masa* y la hipótesis del continuo conducen a la expresión de la evolución de la densidad de cada partícula material: $\rho(\mathbf{X}, t_0) = \rho(\mathbf{x}, t) \det(\mathbf{F})$.

Las leyes de *conservación del movimiento* condicionan los campos de tensión. La conservación del momento de la cantidad de movimiento establece la simetría del tensor σ de tensiones de Cauchy y la conservación de la cantidad del movimiento tiene su expresión natural sobre la configuración actual mediante las ecuaciones

$$\nabla_x \cdot \sigma + \mathbf{f} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

donde $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ son las fuerzas másicas por unidad de volumen. Bajo la hipótesis de comportamiento cuasiestático, el segundo miembro es nulo y las ecuaciones se denominan *ecuaciones de equilibrio*.

La ley de *conservación de la energía* establece el balance entre las distintas formas de energía y la energía interna del sistema y no afecta a la formulación puramente mecánica de este trabajo. A través de la potencia de la tensión $\dot{w} = \sigma : \mathbf{d} = \text{tr}(\sigma \cdot \mathbf{d})$ se introduce el concepto de magnitudes conjugadas (σ, \mathbf{d}) , cuyo producto representa el trabajo mecánico de deformación por unidad de volumen deformado y unidad de tiempo; también en coordenadas espaciales pero por unidad de volumen no deformado son conjugadas (τ, \mathbf{d}) y en coordenadas materiales y por unidad de volumen no deformado $(\Sigma^{II}, \dot{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{R}^T \tau \mathbf{R}, \dot{\mathbf{E}}^N)$.

La *desigualdad de Clausius-Duhem* limita la dirección de transformación de la energía. Bajo la hipótesis de comportamiento puramente mecánico, la *energía libre* Ψ representa la parte de la energía interna disponible para realizar trabajo a temperatura

constante. Si el proceso es isoterma, cuasiestático e irreversible, una parte del trabajo externo realizado sobre el sistema se disipa en forma de calor, y la otra parte, que queda almacenada como energía elástica de deformación, coincide con la energía libre. Por unidad de volumen no deformado y por unidad de tiempo se define mediante diferencia la función de disipación

$$D_p = \tau : \mathbf{d} - \frac{\partial}{\partial t} \Psi \geq 0$$

que sólo se anula en procesos reversibles.

Ecuaciones constitutivas

Las ecuaciones constitutivas completan el modelo matemático del medio continuo. En un contexto puramente mecánico descansan en cuatro principios: *determinismo*, *acción local*, *objetividad* y *simetría*. En el caso general de deformación finita el principio de objetividad adquiere especial relevancia, debido al giro de sólido rígido del entorno del punto. La formulación de las ecuaciones constitutivas, además de ser invariante con la orientación del sistema coordenado, lo que queda garantizado con el carácter tensorial de las ecuaciones debe serlo también con el cambio del referencial asociado a la configuración actual, es decir, debe ser igualmente válida para otro observador en movimiento relativo con respecto al primero¹⁵.

El principio de indiferencia u objetividad se satisface si las ecuaciones constitutivas están formuladas mediante funciones isótropas de sus argumentos y éstos son magnitudes materialmente objetivas. Teniendo en cuenta que la relación entre referenciales sólo afecta a las coordenadas espaciales \mathbf{x} , las magnitudes materiales no se alteran cuando se transforman objetivamente, las magnitudes espaciales siguen la regla tensorial de cambio de orientación de los ejes coordenados y los tensores mixtos se transforman objetivamente como vectores. Debido al giro de sólido rígido del entorno del punto, no se puede afirmar que en general las derivadas temporales de tensores espaciales objetivos sean tensores objetivos. Así, los tensores \mathbf{l} , \mathbf{w} no lo son, mientras que \mathbf{d} sí lo es. En este sentido se precisa especial atención al formular las ecuaciones constitutivas en forma de tasas temporales como ocurre en elastoplasticidad, ya que la tensión de Cauchy σ es objetiva, pero su derivada temporal $\dot{\sigma}$ no lo es.

Existen diversas formas para neutralizar la influencia del movimiento de sólido rígido y pueden definirse a partir de $\dot{\sigma}$ distintas tasas objetivas de la tensión verdadera que en todos los casos son manifestación de la derivada de Lie¹². Las derivadas de Green-Naghdi y Jaumann se obtienen sustituyendo respectivamente en (1) el gradiente de deformación \mathbf{F} por las rotaciones \mathbf{R} y \mathbf{P} (la rotación \mathbf{P} está definida por la velocidad \mathbf{w}). En ambos casos, la derivación se realiza en un sistema coordenado corrotacional, con respecto al cual la tasa objetiva de tensión puede expresarse como una simple derivada temporal.

ECUACIONES DE EQUILIBRIO. APROXIMACIÓN NUMÉRICA

El planteamiento del problema se completa con la definición de las condiciones de contorno sobre la superficie $S = S_u + S_t$ del dominio V ocupado por la configuración actual; se definen las condiciones esenciales mediante los desplazamientos impuestos sobre S_u y las condiciones naturales mediante los vectores tensión \mathbf{t} definidos sobre S_t .

Las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de contorno constituyen un problema de condiciones de contorno para el campo de tensiones que admite la siguiente formulación débil o variacional^{16,17}

$$\int_V \sigma: \nabla_x \mathbf{w} dV = \int_{S_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} dS_t + \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} dV \quad (2)$$

donde las funciones de prueba \mathbf{w} deben verificar las condiciones esenciales homogéneas y se denominan en el ámbito de la mecánica, desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{u}$; debido a la simetría de σ , se considera sólo la parte simétrica $\delta \varepsilon$ del gradiente de desplazamientos

$$\int_V \sigma: \delta \varepsilon dV = \int_{S_t} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS_t + \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV \quad (3)$$

Si el desplazamiento virtual $\delta \mathbf{u}$ es muy pequeño frente a las dimensiones del dominio, la forma débil (3) se conoce como Principio de los Trabajos Virtuales (PTV). Si las funciones de prueba son de magnitud finita, adquieren el significado de velocidad y la forma débil se denomina Principio de las Potencias Virtuales.

En cualquiera de sus dos interpretaciones, la condición integral de equilibrio (3) es válida para todo tipo de ecuación constitutiva y para deformación finita general. El carácter no lineal de la deformación se manifiesta en el desconocimiento a priori de la configuración deformada, lo que afecta al dominio de integración, a la definición espacial de los desplazamientos $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$ y al cálculo (∇_x) de las deformaciones virtuales $\delta \varepsilon$.

El PTV puede expresarse con mayor generalidad, admitiendo que la integración se realice sobre cualquier configuración de referencia V_c

$$\int_{V_c} \tilde{\tau}: \delta \tilde{\varepsilon} dV_c = \int_{S_{ct}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_c dS_c + \int_{V_c} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_c dV_c \quad (4)$$

donde $\mathbf{f}_c(\mathbf{X}) dV_c = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) dV$ y $\mathbf{t}_c dS_c = \mathbf{t} dS$. Los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{u}$ están definidos sobre la configuración de referencia y $\delta \tilde{\varepsilon}$ es la medida de deformación deducida de $\delta \mathbf{u}$ y conjugada con la medida de tensión $\tilde{\tau}$ utilizada. Si de toma como referencia la configuración inicial V_0 (formulación *total*) o cualquier configuración intermedia V_c ya resuelta (formulación *actualizada*), el dominio de integración será conocido, pero la no linealidad se manifestará en la complejidad de los integrandos¹⁹ de (4). Este trabajo está realizado de acuerdo con la primera opción (3), utilizando sobre la configuración *actual* las medidas de tensión y deformación (σ y \mathbf{d}) que son las que en forma directa describen el comportamiento elastoplástico.

Aproximación mediante elementos finitos

Mediante una aproximación de Galerkin de (4) se interpola el campo de desplazamientos en la forma: $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{U}$, donde \mathbf{N} es la matriz de funciones de forma y \mathbf{U} es el vector de desplazamientos nodales con n_{gl} grados de libertad. Cualquier medida genérica de deformación $\tilde{\varepsilon}$ se expresará como $\tilde{\varepsilon} = \tilde{B}\mathbf{U}$, donde \tilde{B} se obtiene directamente de la derivación de las funciones de forma de acuerdo con la medida de deformación empleada. Considerando la medida de tensión $\tilde{\tau}$ conjugada con la deformación y sustituyendo las anteriores aproximaciones en (4), se obtiene la versión discretizada del principio de los trabajos virtuales

$$\int_{V_c} \tilde{B}^T \cdot \tilde{\tau} dV_c = \int_{S_c} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{t} dS_c + \int_{V_c} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{f} dV_c \quad (5)$$

donde el primer miembro es el vector de fuerzas internas $F^{\text{int}}(n_{gl})$ y el segundo es el vector de fuerzas externas $F^{\text{ext}}(n_{gl})$. En deformación infinitesimal con condiciones de contorno y ecuación constitutiva de tipo lineal, el problema de condiciones de contorno es *lineal* y el problema aproximado (5) se resuelve en un solo paso. Introduciendo en (5) la relación constitutiva matricial $\sigma = \mathbf{D}\varepsilon$ se obtiene el sistema algebraico lineal que establece la igualdad entre fuerzas internas y externas en cada grado de libertad.

$$F^{\text{int}} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{U} dV = \mathbf{K} \mathbf{U} = F^{\text{ext}}$$

Tratamiento de la no linealidad

Si el problema es *no lineal*, los componentes del vector de fuerzas internas son funciones algebraicas no lineales de los componentes del vector de desplazamientos incógnita: $F^{\text{int}} = F^{\text{int}}(\mathbf{U})$ y la ecuación (5) representa un sistema algebraico de ecuaciones no lineal que se resuelve mediante el método de Newton-Raphson. Este algoritmo es convergente localmente, es decir, si el estado inicial es cercano a la solución buscada, condición que puede satisfacerse mediante una estrategia adecuada de incrementación. Parametrizadas las fuerzas externas en función de la variable t , el análisis incremental debe obtener la solución de (5) en $t + \Delta t$, a partir de la solución en t . Se trata de solucionar la ecuación vectorial

$$F^{\text{ext}}(t + \Delta t) = F^{\text{int}}(\mathbf{U}^t + \Delta \mathbf{U}) \quad \mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \Delta \mathbf{U} \quad (6)$$

resolviendo

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{U} = F^{\text{ext}}(t + \Delta t) - F^{\text{int}}(\mathbf{U}) = \mathbf{R} \quad \text{donde} \quad \mathbf{K} = \frac{\partial F^{\text{int}}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \quad (7)$$

de forma iterativa hasta la convergencia. El problema algebraico no lineal (5) se reduce a la solución sucesiva de problemas lineales, donde debe calcularse la matriz tangente \mathbf{K}

$$\mathbf{K} = \frac{\partial F^{\text{int}}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} = \int_{V_c} \left(\mathbf{B}^T \cdot \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \mathbf{U}} + \frac{\partial \tilde{B}^T}{\partial \mathbf{U}} \cdot \tilde{\tau} \right) dV_c \quad (8)$$

cuyos términos corresponden a la parte material y geométrica del problema, respectivamente. Si la ley constitutiva permite establecer la relación $d\tilde{\tau} = Md\tilde{\epsilon}$, M se denomina módulo del material y la rigidez tangente material adopta forma similar a la del caso lineal: $K_L = \int_{V_c} \tilde{B}^T \cdot M \cdot \tilde{B} dV_c$.

La progresión iterativa de la resolución de un incremento es una secuencia de *prueba y error*, en la que la linealización (7) proporciona estados de deformación que es preciso comprobar hasta que verifiquen (4). El orden de convergencia del método de *Newton-Raphson* es cuadrático, pero a costa de recalcular la matriz de rigidez tangente K en cada iteración, lo que puede resultar costoso desde el punto de vista computacional, aspecto éste que se analiza en la segunda parte de este trabajo. La modalidad empleada para el cálculo de K sólo influye en el número de iteraciones a realizar hasta alcanzar la convergencia, pero la precisión de los resultados obtenidos sólo depende de la exactitud del cálculo de las fuerzas internas (5), y éste del adecuado cálculo de la tensión en cada punto de integración, según la ecuación constitutiva del material.

Tratamiento de la incompresibilidad

La formulación standard del MEF en desplazamientos no es apropiada para representar comportamientos con nula o escasa deformación volumétrica, como ocurre en elasticidad casi incompresible o elastoplasticidad en metales, donde la deformación elástica es muy pequeña frente a la deformación plástica isocórica. La rigidez del término volumétrico es numéricamente dominante y se produce el bloqueo de malla que invalida los resultados.

La subintegración reducida selectiva de la parte volumétrica puede introducir la singularidad adecuada que restablezca el peso de la parte desviadora de la matriz de rigidez. Se ha demostrado que en las condiciones adecuadas¹⁷ este procedimiento es equivalente al método mixto de la elasticidad incompresible, en el que se interpolan por separado desplazamientos y presiones, y no se produce el bloqueo si se verifican las condiciones de Babuška-Brezzi. La formulación *b*-barra, mediante el adecuado tratamiento de la parte dilatacional de la matriz B , permite generalizar la integración selectiva de forma sistemática sin alterar la arquitectura del MEF standard en desplazamientos y puede ser utilizada en problemas no lineales en formulaciones actualizadas. En este trabajo se ha utilizado en su versión de dilatación media³¹.

El método *b*-barra puede obtenerse a partir de formulaciones más generales basadas en el variacional de Hu-Washizu³³, donde se interpolan por separado los campos de desplazamiento, presión y deformación volumétrica. Esta metodología es la que actualmente proporciona los tratamientos más eficientes de la incompresibilidad^{10,13}.

ELASTOPLASTICIDAD. APROXIMACIÓN NUMÉRICA

Característico del comportamiento elastoplástico es el umbral o tensión de fluencia a partir del cual se producen deformaciones plásticas permanentes, que acompañan a la deformación elástica asociada con la tensión. El flujo plástico es un proceso irreversible caracterizado en términos de la historia de deformación y un conjunto de variables internas, que se conocen como parámetros de endurecimiento. En el espacio

Deformación finita

El primer punto de especial consideración en deformación finita se refiere a la formalización, mediante las medidas adecuadas, de los conceptos de deformación plástica y elástica y de su relación con la deformación total. Cuando un material sufre deformaciones elastoplásticas existe un estado *intermedio* ($\bar{\tau}$) de deformación plástica permanente, que sugiere la descomposición multiplicativa del gradiente de deformación $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p$. Se definen los tensores Cauchy-Green izquierdo y derecho *elásticos*, de la siguiente forma

$$\bar{\mathbf{C}}^e = \mathbf{F}^{eT} \cdot \mathbf{F}^e \quad \mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^{eT}$$

donde $\bar{\mathbf{C}}^e$ está definido en la configuración intermedia y \mathbf{b}^e en la actual. Definiendo también los tensores

$$\bar{\mathbf{L}}^p = \dot{\mathbf{F}}^p \cdot \mathbf{F}^{p-1} \quad \mathbf{l}^e = \dot{\mathbf{F}}^e \cdot \mathbf{F}^{e-1}$$

y operando, se obtiene $\bar{\mathbf{L}}^p = \mathbf{F}^{e-1} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{l}^e) \cdot \mathbf{F}^e$, lo que induce la definición del tensor $\mathbf{l}^p = (\mathbf{1} - \mathbf{l}^e) = \phi_*(\bar{\mathbf{L}}^p)$ sobre la configuración actual y sus partes simétrica y antisimétrica \mathbf{d}^p y \mathbf{w}^p . Queda establecida así la *descomposición aditiva* sobre la configuración actual de la velocidad de deformación $\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$ en la forma utilizada en este trabajo. Relaciones similares expresadas mediante transformaciones hacia adelante y hacia atrás entre la configuración inicial, la intermedia y la actual pueden establecerse entre las diversas magnitudes cinemáticas¹³, dando lugar a formulaciones alternativas con otras medidas y/o configuraciones de referencia.

El segundo punto de especial consideración en deformación finita se refiere a la relación tensión-deformación elástica en forma de tasas temporales que deberá ser materialmente objetiva. En *formato hipoeelástico* se plantea esta relación como una extensión directa de (9), a partir de la descomposición aditiva de la velocidad de deformación

$$\sigma^\nabla = \mathbf{a}^e(\sigma) : \mathbf{d}^e = \mathbf{a}^e(\sigma) : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) \quad (13)$$

La idoneidad de este modelo de comportamiento descansa en la correcta definición del tensor material de cuarto orden $\mathbf{a}^e(\sigma)$ asociado con la tasa objetiva de tensión σ^∇ utilizada. La complejidad añadida al sistema de ecuaciones por la utilización de una tasa objetiva de tensión se evita en parte mediante una formulación corrotacional, donde son directamente aplicables las ecuaciones deducidas para deformación infinitesimal.

$$\sigma_{\mathbf{R}}^\nabla = \mathbf{R} \cdot \left(\frac{d}{dt} (\mathbf{R}^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{R}) \right) \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \cdot \dot{\sigma}_R \cdot \mathbf{R}^T \quad \text{donde } \dot{\sigma}_R \approx \mathbf{C} : (\mathbf{d}_R - \mathbf{d}_R^p) \quad (14)$$

La solución de $\mathbf{a}^e(\sigma)$ con el tensor constante módulo elástico \mathbf{C} es admisible como aproximación¹¹, si el material es isótropo y la parte elástica de la deformación es muy pequeña frente a la deformación total, hipótesis habitual de conformado metálico. El sistema diferencial algebraico de ecuaciones a integrar coincide con (9)-(12) si las

magnitudes implicadas se expresan con relación a los ejes corrotacionales y se sustituyen todas las derivadas temporales del tensor de deformación infinitesimal ε y análogos por el tensor velocidad de deformación \mathbf{d} y análogos.

En el formato *hiperelástico*^{25,26,27,10}, en el contexto de la descomposición multiplicativa y para materiales isotrópicos, puede obtenerse la tensión verdadera de un potencial de deformación definido directamente sobre la configuración actual^{10,13}. Derivando temporalmente se obtiene la relación constitutiva en forma de tasas temporales, que es materialmente objetiva¹⁰, si lo es el potencial de deformación. Para ello, en materiales isotrópicos es suficiente que el potencial esté definido sólo en función de la deformación elástica^{16,15}.

La idoneidad de este modelo de comportamiento descansa en la correcta definición del potencial de deformación del material. La integración de la relación tensión deformación elástica es trivial, pues basta con sustituir el valor de la deformación en la relación hiperelástica para obtener la correspondiente tensión sin las dificultades relacionadas con la objetividad.

Con validez para deformaciones elásticas moderadas¹⁶ se obtiene del potencial de Hencky una relación similar a la (9) del caso lineal, pero con tensiones de Kirchhoff y deformaciones logarítmicas. En direcciones principales, considerando las partes esférica y desviadora ($\tilde{\cdot}$) del tensor \mathbf{e}^N definido mediante ($\varepsilon_A^e = \log \lambda_A^e$, $A = 1, 2, 3$), donde $(\lambda_A^e)^2$ son los autovalores de \mathbf{b}^e , la forma del potencial es

$$\bar{w}(\varepsilon_A^e) = \frac{1}{2}\kappa (\log(J^e))^2 + \mu \left((\tilde{\varepsilon}_1^e)^2 + (\tilde{\varepsilon}_2^e)^2 + (\tilde{\varepsilon}_3^e)^2 \right) \quad \tilde{\lambda}_A^e = (J^e)^{-\frac{1}{3}} \lambda_A^e \quad (15)$$

donde $J^e = \lambda_1^e \lambda_2^e \lambda_3^e = \det(\mathbf{F}^e)$ y la parte desviadora de \mathbf{e}^N preserva el volumen, ya que $\tilde{\lambda}_1^e \tilde{\lambda}_2^e \tilde{\lambda}_3^e = 1$.

El resto del sistema de ecuaciones diferencial algebraico es similar al obtenido en deformación infinitesimal. Las ecuaciones se obtienen sustituyendo en (10)-(12) la tensión infinitesimal σ por la tensión de Kirchhoff τ y todas las derivadas temporales del tensor de deformación infinitesimal ε y análogos, por el tensor velocidad de deformación \mathbf{d} y análogos. Resuelto el sistema de ecuaciones, es inmediato recuperar la tensión de Cauchy σ de la tensión de Kirchhoff τ .

También con base en la de descomposición multiplicativa existen otras alternativas hiperelásticas^{28,29,30,13}. En las tres primeras se utiliza el potencial de Hencky definido sobre la configuración intermedia con deformación natural material (\mathbf{E}^N) y tensión de Kirchhoff neutralizada en rotación elástica ($\mathbf{R}^T \tau \mathbf{R}$) como medidas conjugadas. En la cuarta se utiliza un potencial definido sobre la configuración actual mediante la deformación de Almansi.

Integración numérica

La resolución incremental del problema global define los intervalos para la integración numérica local de las ecuaciones constitutivas. A partir del dato global disponible $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n$ se trata de obtener en cada punto de integración, a partir de los valores conocidos de α_n , R_n y σ_n , los valores de α_{n+1} , R_{n+1} y σ_{n+1} que verifican las ecuaciones elastoplásticas del modelo Von Mises según el esquema de integración numérica aplicado.

Deformación infinitesimal

Los métodos standard de integración no son aplicables al sistema de ecuaciones (9)-(12) debido a la condición de pertenencia del estado tensional al dominio limitado por la superficie de fluencia. Aunque existen otras alternativas, el algoritmo de retorno radial^{22,23} es el más utilizado por su sencillez y excelentes propiedades. Se enmarca en la familia de métodos en diferencias hacia atrás que son especialmente convenientes para satisfacer la restricción algebraica²¹, aunque sólo los de orden 1 y 2 son incondicionalmente estables. La adaptación del esquema implícito de primer orden (backward Euler) para verificar la restricción, es el método de retorno radial. Discretizando según este esquema la tercera ecuación de (11), se obtiene $\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1}$, donde $\Delta\gamma$ y \mathbf{N}_{n+1} son en principio desconocidos. Sustituyendo en (9) y (11), las ecuaciones discretizadas obtenidas pueden interpretarse como el avance de n a $n+1$ en dos fases consecutivas, de prueba elástica (*tr*) y de corrección plástica

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1}^{tr} - 2\mu\Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1} & \mathbf{s}_{n+1}^{tr} &= 2\mu(\mathbf{e}_{n+1} - \varepsilon_n^p) \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_{n+1}^{tr} + \frac{2}{3}H_2\Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1} & \alpha_{n+1}^{tr} &= \alpha_n \\ R_{n+1} &= R_{n+1}^{tr} + \frac{2}{3}H_1\Delta\gamma & R_{n+1}^{tr} &= R_n \end{aligned} \quad (16)$$

donde \mathbf{e}_{n+1} , que representa la parte desviadora del tensor de deformación, se obtiene a partir de la deformación incremental $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ asociada a $\Delta\mathbf{u}$. Definiendo las nuevas variables discretas $\varsigma_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} - \alpha_{n+1}$ y $\varsigma_{n+1}^{tr} = \mathbf{s}_{n+1}^{tr} - \alpha_{n+1}^{tr}$, la condición de consistencia en $n+1$ establece la aproximación de \mathbf{N}_{n+1} y el valor de $\Delta\gamma$

$$\mathbf{N}_{n+1} = \frac{\varsigma_{n+1}^{tr}}{|\varsigma_{n+1}^{tr}|} \quad \Delta\gamma = \frac{|\varsigma_{n+1}^{tr}| - R_{n+1}^{tr}}{2\mu + \frac{2}{3}H} = \frac{f_{n+1}^{tr}}{2\mu + \frac{2}{3}H} \quad (17)$$

Si el endurecimiento es no lineal, esta condición se resuelve en forma iterativa, como en general ocurre con los métodos implícitos de integración temporal. El cálculo (17) de $\Delta\gamma$ expresa el balance para que el nuevo estado tensional ς_{n+1} se encuentre sobre el nuevo círculo de fluencia; el desplazamiento de éste y la corrección plástica tienen lugar en una sola operación y sobre la misma dirección \mathbf{N}_{n+1} definida por la tensión de prueba elástica. Se verifica $\varsigma_{n+1} = \beta\varsigma_{n+1}^{tr}$, donde β es un factor deducible de (16) y (17).

En el contexto de la resolución global, para mantener la convergencia cuadrática del método de Newton-Raphson en incrementos largos de tiempo, debe utilizarse el módulo elastoplástico *consistente* con el algoritmo numérico de integración²⁴

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{ep} &= \kappa\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu\bar{\Phi}_{n+1} \left[\left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \right] - 2\mu\bar{\Phi}_{n+1}\mathbf{N}_{n+1} \otimes \mathbf{N}_{n+1} \\ \bar{\Phi}_{n+1} &= 1 - \frac{2\mu\Delta\gamma}{|\varsigma_{n+1}^{tr}|} \quad \bar{\Phi}_{n+1} = \frac{2\mu}{2\mu + \frac{2}{3}H} - (1 - \bar{\Phi}_{n+1}) \end{aligned} \quad (18)$$

que se puede calcular fácilmente una vez calculados ς_{n+1}^{tr} y $\Delta\gamma$ a partir de $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$.

Deformación finita

En las dos versiones, formulación hipoeelástica y formulación hiperelástica, la integración numérica del sistema diferencial-algebraico (9)-(12) adaptado a deformación finita, se apoya en el algoritmo de retorno radial desarrollado en deformación infinitesimal.

Formato hipoeelástico

La correcta integración de las ecuaciones (14) debe atender dos aspectos específicos de la deformación finita:

- se necesita una hipótesis cinemática que aproxime la evolución de $\mathbf{d}(\tau)$ entre la configuración \mathbf{x}_n y la definida por $\Delta \mathbf{u}$;
- el carácter objetivo de las ecuaciones debe mantenerse al integrar numéricamente en incrementos de duración finita.

El planteamiento corrotacional⁶

$$\mathbf{d}_R = \mathbf{R}^T \mathbf{d}R = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}}) \quad (19)$$

proporciona una medida de deformación independiente de la rotación \mathbf{R} , que correctamente integrada es materialmente objetiva. De acuerdo con (14) las tensiones elastoplásticas se actualizarán según

$$\sigma_{n+1} = \mathbf{R}_{n+1} \left(\mathbf{R}_n^T \sigma_n \cdot \mathbf{R}_n + \mathbf{C} : \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\mathbf{d}_R - \mathbf{d}_R^p) d\tau \right) \mathbf{R}_{n+1}^T \quad (20)$$

existiendo diversos planteamientos según la hipótesis cinemática utilizada y la forma de aproximar el cálculo de la integral. Se describen a continuación dos procedimientos representativos: el primero (1984) de gran aceptación en los últimos años; y el segundo más reciente (1994) que mejora con respecto al anterior.

El método de la *configuración intermedia*²⁰ se basa en la aproximación lineal a la cinemática de la deformación

$$\mathbf{x}_{n+\alpha} = (1 - \alpha)\mathbf{x}_n + \alpha\mathbf{x}_{n+1} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

que corresponde a considerar constante la velocidad v de las partículas materiales y variable la velocidad de deformación d durante el intervalo. La integral se puede aproximar considerando constante \mathbf{d} en algún punto α intermedio del intervalo

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{d}_R d\tau = \Delta t \mathbf{d}_{R\alpha} = \mathbf{R}_\alpha^T \frac{1}{2} \left((\nabla_{x\alpha} \Delta \mathbf{u}) + (\nabla_{x\alpha} \Delta \mathbf{u})^T \right) \mathbf{R}_\alpha \quad (21)$$

La regla del punto medio ($\alpha = \frac{1}{2}$) es la mejor evaluación de la integral con una aproximación de orden 2. El incremento de deformación corrotacional $(\Delta \varepsilon)_R$ se calcula en (21) a partir del dato $\Delta \mathbf{u}$, derivando con respecto a la geometría de la configuración intermedia $n + 1/2$ y neutralizando la rotación de sólido rígido $\mathbf{R}_{n+1/2}$ asociada con esa configuración. A partir de $(\Delta \varepsilon)_R$, mediante el algoritmo del retorno radial de la

deformación infinitesimal se obtiene la tensión corrotacional. Finalmente la tensión σ_{n+1} se recupera según (20). El algoritmo resultante es incrementalmente objetivo, pero la no linealidad geométrica está acoplada con la del material, lo que dificulta la obtención del módulo elastoplástico consistente con el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva.

En el método de la *rotación final instantánea*^{6,11} se toma como referencia la última configuración de equilibrio (\mathbf{x}_n) conocida, en la que deberán anularse las magnitudes cinemáticas así referenciadas (\cdot). Al definir la *hipótesis cinemática* de deformación incremental según¹¹

$$\hat{\mathbf{U}}(\tau) = \exp\left(\frac{\tau - t_n}{\Delta t} \hat{\mathbf{E}}_{n+1}^N\right) \quad \Delta t = t_{n+1} - t_n \quad \tau \in (t_n, t_{n+1}) \quad (22)$$

los tensores $\hat{\mathbf{U}}(\tau)$ y $\dot{\hat{\mathbf{U}}}(\tau)$ son coaxiales y su producto conmutativo. Sustituyendo (22) en (19) se obtiene

$$\mathbf{d}_R = \hat{\mathbf{U}}^{-1} \dot{\hat{\mathbf{U}}} = \frac{\hat{\mathbf{E}}_{n+1}^N}{\Delta t}; \quad \text{y por tanto} \quad \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{d}_R d\tau = \hat{\mathbf{E}}_{n+1}^N$$

Se calcula el gradiente de deformación incremental $\hat{\mathbf{F}}_{n+1} = \mathbf{I} + \nabla_x \Delta \mathbf{u}$, y mediante descomposición polar, la rotación $\hat{\mathbf{R}}_{n+1}$ y la deformación natural $\hat{\mathbf{E}}_{n+1}^N$, que directamente coincide con el valor de la deformación corrotacional $(\Delta \varepsilon)_R$ a integrar mediante el algoritmo de retorno radial de la deformación infinitesimal. Finalmente la tensión σ_{n+1} se recupera según (20).

La concatenación de la integración corrotacional caracterizada por la operación $(\varsigma_{n+1})_R = \beta (\varsigma_{n+1}^{tr})_R$, con la recuperación (20) de la rotación de la tensión equivale a la expresión $\varsigma_{n+1} = \beta \cdot (\hat{\mathbf{R}}_{n+1} \cdot (\varsigma_{n+1}^{tr})_R \cdot \hat{\mathbf{R}}_{n+1}^T)$, por lo que el algoritmo de integración puede modificarse de la siguiente manera equivalente: calculadas las tensiones de pruebas elásticas sobre la configuración inicial, se transforman mediante la rotación asociada con la deformación incremental $\hat{\mathbf{R}}_{n+1}$, y sobre la configuración final se calcula la corrección plástica pertinente. Al algoritmo resultante es incrementalmente objetivo y está desacoplado: la primera operación está asociada con la no linealidad geométrica y la segunda con la no linealidad del material. Ello facilita la obtención del módulo elastoplástico consistente con el algoritmo¹¹, que es similar al obtenido en deformación infinitesimal (18).

Formato hiperelástico

Tomando como referencia la última configuración de equilibrio conocida (\mathbf{x}_n), se aproxima exponencialmente la parte plástica¹⁰ (1994) de la descomposición multiplicativa del gradiente de deformación

$$\mathbf{F}_\tau = \mathbf{F}_\tau^e \cdot \mathbf{F}_\tau^p \quad \text{para} \quad \tau \in (t_n, t_{n+1}) \quad \mathbf{F}_\tau^p = \exp[(\tau - t_n) \bar{\mathbf{L}}_\tau^p] \cdot \mathbf{F}_n^p \quad (23)$$

Consecuentemente, la parte elástica responde a la expresión

$$\mathbf{F}_\tau^e = \exp[-(\tau - t_n) \mathbf{L}_\tau^e] \cdot \mathbf{F}_\tau^{e \ tr} \quad \text{con} \quad \mathbf{F}_\tau^{e \ tr} = \mathbf{F}_\tau \cdot \mathbf{F}_n^{p-1} \quad (24)$$

y $\mathbf{F}_\tau^{e\ tr}$ es el gradiente de deformación elástica, obtenido congelando la deformación plástica del intervalo (prueba elástica), es decir, suponiendo $\mathbf{F}_\tau^p = \mathbf{F}_n^p$. La deformación elástica de prueba se obtiene mediante la identidad

$$\mathbf{b}_\tau^{e\ tr} = \mathbf{F}_\tau^{e\ tr} \cdot (\mathbf{F}_\tau^{e\ tr})^T = \hat{\mathbf{F}}_\tau \cdot \mathbf{b}_n^e \cdot \hat{\mathbf{F}}_\tau^T = \Phi_*(\mathbf{b}_n^e) \quad (25)$$

A partir de (24), (25) y la regla de flujo (11) adaptada al formato hiperelástico se puede deducir¹⁰ la coaxialidad entre el tensor espacial de deformación total \mathbf{b} y el de prueba elástica $\mathbf{b}^{e\ tr}$. Entonces, la corrección plástica desde $\mathbf{b}^{e\ tr}$ hasta \mathbf{b} tiene lugar a ejes constantes conocidos (las direcciones principales \mathbf{n}^{tr}) y puede aplicarse el algoritmo de retorno radial de la deformación infinitesimal. Los pasos para $\tau = t_{n+1}$ son:

1. Cálculo de $\hat{\mathbf{F}}_{n+1}$ a partir de $\Delta \mathbf{u}$ y de $\mathbf{b}_{n+1}^{e\ tr}$ según (25)
2. Cálculo de los valores y direcciones principales de $\mathbf{b}_{n+1}^{e\ tr}$ y de la tensión elástica de prueba (15)

$$\tau_{n+1}^{e\ tr} = \kappa \log(J_{n+1}^{e\ tr}) \mathbf{1} + \mu \log(\tilde{\mathbf{b}}_{n+1}^{e\ tr})$$

3. Retorno radial: valores principales de la tensión y de las deformaciones plástica y elástica
4. Actualización de las tensiones y deformaciones

$$\tau_{n+1} = \sum_{A=1}^3 \tau_{n+1A} \mathbf{n}_{n+1}^{tr(A)} \otimes \mathbf{n}_{n+1}^{tr(A)} \quad \mathbf{b}_{n+1}^e = \sum_{A=1}^3 \exp[2\varepsilon_{n+1A}^e] \mathbf{n}_{n+1}^{tr(A)} \otimes \mathbf{n}_{n+1}^{tr(A)} \quad (26)$$

La sencillez del proceso, donde se tratan en pasos sucesivos desacoplados, la no linealidad geométrica (25) y la no linealidad del material, permite obtener el módulo elastoplástico consistente con el algoritmo de integración en forma similar al obtenido en deformación infinitesimal (18). Puede apreciarse la similitud¹¹ entre este método hiperelástico y el método hipoelástico de la rotación final instantánea. Ambos métodos están basados en aproximaciones exponenciales (22), (23) de la deformación incremental y en la práctica sólo difieren en el cálculo inicial de la deformación elástica de prueba, ya que las tensiones de Cauchy y Kirchhoff son prácticamente coincidentes para pequeñas deformaciones elásticas.

RESTRICCIONES DE CONTACTO. APROXIMACIÓN NUMÉRICA

El contacto mecánico está caracterizado por la condición unilateral de no penetración y por el carácter disipativo del deslizamiento con fricción. Su modelización matemática debe contemplar tres causas acopladas de no linealidad. Simultáneamente: deben determinarse la zona de contacto normal; sobre ésta deben establecerse las zonas de adherencia y deslizamiento, y sobre esta última debe modelarse el fenómeno disipativo de fricción.

En el contexto de la obtención de soluciones mediante elementos finitos, el contacto cuasiestático ha sido tratado extensamente mediante el método de multiplicadores de

Lagrange³⁵⁻³⁹ y el método de penalización^{34,40,41,11} principalmente. El primero trata las restricciones de contacto en forma exacta mediante la introducción sistemática de nuevas incógnitas. El segundo trata las restricciones de contacto en forma aproximada, sin introducir variables adicionales, y por tanto sin modificar la dimensión de la matriz de rigidez. Su mayor dificultad radica en la elección del parámetro de penalización de forma que la pérdida de eficacia por el mal condicionamiento de la matriz y la violación de la restricción sean admisibles. Los métodos de Lagrangiano aumentado⁴³⁻⁴⁵ son en la actualidad objeto de especial atención, tratando de combinar las ventajas de los métodos anteriores y anular sus desventajas.

En este trabajo se ha modelizado el contacto sin disipación mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. Esta modalidad del contacto^{35,39} tiene sentido en dos tipos de problemas extremos: problemas, donde la fricción no es significativa y puede considerarse nula, y problemas, donde al contrario, la fricción es infinita y no se produce deslizamiento, ni por tanto tampoco disipación. En ambos casos, la no linealidad se reduce a determinar la zona de contacto normal, estableciendo la condición unilateral de no penetración en la dirección normal a la superficie. En la dirección tangencial se permitirá o no el libre deslizamiento, según cuál de los dos casos extremos sea el considerado.

El proceso de laminación está controlado por la rotación de los rodillos, que al entrar en contacto con el desbaste lo arrastran longitudinalmente por fricción, produciéndose por contacto normal la compresión en espesor y el alargamiento en longitud. En una primera aproximación puede modelarse este proceso mediante contacto con fricción infinita, hipótesis que contrasta favorablemente con los resultados obtenidos. Esta modelización es válida para el estudio de eficiencia computacional realizado en la segunda parte de este trabajo, sin que ello suponga en principio limitación para la aplicabilidad de las conclusiones obtenidas al caso general de fricción con deslizamiento.

Dados dos cuerpos Ω_1 y Ω_2 cuyos campos de desplazamientos vienen dados por $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_1)$ y $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2(\mathbf{x}_2)$, se considera la restricción de no penetración dada por la inecuación $g \equiv (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n} + g_0 \geq 0$ válida en la zona de contacto C , de vector normal unitario $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, y donde g_0 es la separación inicial entre los dos cuerpos y g es el valor actual de dicha separación en cada punto genérico \mathbf{x} de la zona C de contacto.

La formulación débil de las ecuaciones de equilibrio del sólido (3) es equivalente a las condiciones de mínimo del funcional (\mathbf{J}) Energía Potencial Total. Este planteamiento alternativo de las condiciones de equilibrio es conveniente para incluir las restricciones de contacto, aumentando el funcional bien mediante multiplicadores de Lagrange, o bien mediante términos de penalización. En el primer caso, la nueva condición de equilibrio corresponde al punto de ensilladura del lagrangiano

$$\mathbf{J}^*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mu) = \mathbf{J}_1(\mathbf{v}_1) + \mathbf{J}_2(\mathbf{v}_2) + \int_{\Gamma} \mu g \, dT \quad (27)$$

es decir, los desplazamientos \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 y los multiplicadores λ que satisfacen

$$\mathbf{J}^*(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mu) \leq \mathbf{J}^*(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \lambda) \leq \mathbf{J}^*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \lambda) \quad (28)$$

para cualquier \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 y μ admisibles. La primera desigualdad exige la restricción cinemática de contacto, mientras que la segunda selecciona de todas las funciones que

verifican esta condición, aquella que hace mínima la suma de las energías potenciales totales de cada cuerpo. Las condiciones (28) equivalen al PTV (3) suplementado con las derivadas direccionales del término de contacto del funcional lagrangiano.

Minimizando directamente el funcional (27) discretizado mediante el método de los elementos finitos, se obtiene el sistema algebraico no lineal (6) incrementado en el término de las fuerzas de contacto y la condición cinemática de no penetración. Mediante la opción de aproximación de los multiplicadores en forma puntual sobre los nodos de una de las dos superficies de contacto, se obtiene el sistema siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{\text{int}} + \mathbf{F}^{\text{cont}} = \mathbf{F}^{\text{ext}}; & \mathbf{F}^{\text{cont}} = \mathbf{C}^T \Lambda; & \mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \\ \mathbf{G} = 0 \end{cases}$$

donde Λ es el vector con los multiplicadores de Lagrange, \mathbf{G} es el vector con las penetraciones nodales que hay que eliminar y \mathbf{C} es la matriz de contacto. En el contexto general de resolución no lineal del sólido deformable mediante el método de Newton, es preciso resolver en cada iteración el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{U}) + \frac{\partial \mathbf{F}^{\text{int}}}{\partial \mathbf{U}} \Delta \mathbf{U} + \mathbf{F}^{\text{cont}}(\Lambda, \mathbf{U}) + \frac{\partial \mathbf{F}^{\text{cont}}}{\partial \mathbf{U}} \Delta \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{F}^{\text{cont}}}{\partial \Lambda} \Delta \Lambda = \mathbf{F}^{\text{ext}}(t + \Delta t) \\ \mathbf{G}(\mathbf{U}) + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \Delta \mathbf{U} = 0 \end{cases} \quad (29)$$

En forma matricial, a partir de (7) y (8)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{U} \\ \Delta \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} - \mathbf{C}^T \Lambda \\ -\mathbf{G} \end{pmatrix} \quad (30)$$

En la simulación del proceso de laminación deben imponerse como acción exterior incrementos rotacionales del rodillo lo suficientemente pequeños como para mantener la continuidad del contacto de todos los puntos de la superficie del desbaste. Por este motivo y por la propia sencillez de la interfase de contacto entre rodillo y desbaste, no se ha considerado significativo en (30) el término derivada de las fuerzas de contacto con respecto a los desplazamientos de (29). Este término es una aportación sobre la matriz \mathbf{K} , que puede ser significativa en casos generales de deformación finita para preservar la convergencia cuadrática del método de Newton en la parte relativa al contacto⁴².

En el caso de fricción nula, no se introducen como incógnitas los multiplicadores tangenciales, debiendo liberarse los normales al detectarse tracción. En el caso general de fricción, deben liberarse los multiplicadores tangenciales, cuando rebasan el valor fijado por la ley de fricción. En el caso de fricción sin deslizamiento se consideran los multiplicadores tangenciales sin admitir liberación tangencial, mientras el multiplicador esté asociado a un nodo con contacto normal. El sistema de ecuaciones obtenido (30) es semidefinido positivo y su tratamiento numérico se aborda en la segunda parte del trabajo.

SIMULACIÓN DE LA LAMINACIÓN DE PRODUCTOS PLANOS

Como metodología de validación se han comprobado sucesivamente los resultados parciales del comportamiento elástico y elastoplástico con pequeñas y grandes deformaciones. Posteriormente se han repetido las comprobaciones con contacto y se han integrado los algoritmos anteriores hasta lograr la simulación del proceso de laminación. En ambas fases se han contrastado los resultados obtenidos con los disponibles en las referencias^{46,48} y con los obtenidos mediante un código comercial⁴⁹ especializado en el análisis no lineal del sólido deformable. Para la laminación, se han dispuesto los resultados experimentales obtenidos en un proyecto multinacional⁵⁰ correspondientes a los datos indicados a continuación.

Radio de los rodillos	$R = 300$ mm
Longitud del desbaste	$L = 300$ mm
Anchura del desbaste	$A = 350$ mm
Espesor del desbaste	$h_{in} = 100$ mm
Reducción espesor	13,2 %
Velocidad de giro	$w = 20$ rpm
Coefficiente rozamiento	$\mu = 0,35$

Propiedades mecánicas del acero:

Módulo de Young	$E = 100 \cdot 10^3$ MPa
Ceof. Poisson	$\nu = 0,35$
Tensión fluencia	$\sigma_Y = 33.3$ MPa

Def. Plástica	Tensión MPa
.0000	33,3
.0900	60,0
.1814	74,0
.2721	80,5
.3628	85,5
.4534	89,0

Curva tensión-deformación plástica del material

Los resultados medios obtenidos en los ensayos corresponden a una fuerza total de compresión entre rodillos de 1,714e6 N y un par total de 54954 Nw-m. En las simulaciones numéricas los rodillos de laminación se han considerado elásticos con módulo de Young $E = 200e3$ MPa y se ha supuesto que en la zona de contacto no hay movimiento relativo entre las superficies del rodillo y del desbaste. El comportamiento elastoplástico está calculado en formato hipoeelástico corrotacional con integración en la configuración intermedia.

Laminaciones 2D

Simulaciones en 2 dimensiones con hipótesis de deformación plana permiten aproximar el comportamiento de la sección central con un esfuerzo computacional mucho menor que un análisis 3D. Por simetría sólo será necesario analizar la mitad de la geometría. La reducción de espesor en el ejemplo experimental es del 13,2 %, pero se muestran también los resultados obtenidos para el mismo proceso con reducciones del 20 % y 30 %. El desbaste, que inicialmente tiene un espesor de 100 mm, después de laminado pasa a tener un espesor de 86,8, 80 y 70 mm, respectivamente.

En la Figura 1 se muestra un detalle de la deformada en la cabeza obtenida con la misma discretización para las distintas reducciones. Tabla I recoge las longitudes y espesores finales del desbaste laminado. La longitud teórica se ha calculado aplicando la constancia de volumen a partir del inicial y del espesor final.

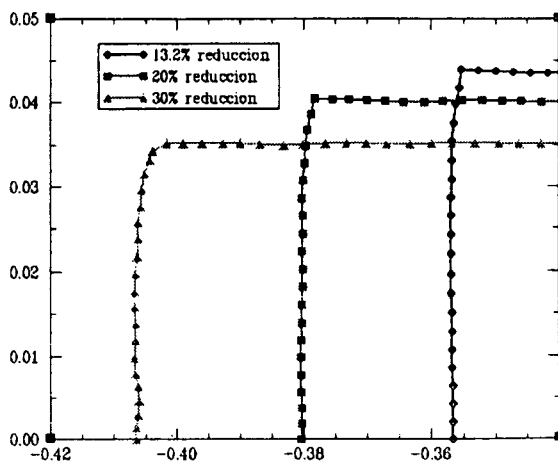


Figura 1

	Altura (mm)				Longitud (mm)			
	Teórica	Máxima	Mínima	Media	Teórica	Máxima	Mínima	Media
13,2 %	43,4	43,91	43,38	43,54	345,62	345,29	338,29	344,21
20 %	40,0	40,50	40,01	40,17	375,00	374,91	364,29	372,81
30 %	35,0	35,21	35,06	35,17	428,57	425,86	420,86	425,24

Tabla I. Laminación 2D: dimensiones del desbaste laminado

Al calcular el área final como el producto de la altura y longitud medias se obtienen valores de 14987, 14975, 14956 mm², respectivamente, lo que supone una variación frente al volumen inicial del 0,08 %, 0,16 % y 0,3 % para las distintas reducciones.

Ello muestra que la condición de constancia de volumen se ha reproducido de forma adecuada durante la simulación.

En la Figura 2 se observa la distribución de la tensión efectiva de Von Mises para la reducción del 13,2 %. Los valores máximos se encuentran debajo del rodillo y sobre la superficie en contacto, donde se localizan en las zonas de entrada y salida del material. Aparecen tensiones residuales en la cabeza debido al transitorio de entrada y también en la superficie del desbaste.

La distribución de la deformación efectiva plástica para la reducción del 13,2 % se muestra en la Figura 3. Los valores máximos se alcanzan por debajo de la superficie aproximadamente a un tercio entre ésta y el centro y se van acercando hacia la superficie a medida que aumenta la reducción.



Figura 2



Figura 3

La distribución de la fuerza normal a lo largo del arco de contacto se muestra en la Figura 4. El valor máximo se produce a la entrada del material y disminuye a lo largo del arco de contacto hasta un punto neutro, para aumentar de nuevo a la salida. La diferencia entre el valor máximo y mínimo disminuye con la reducción.

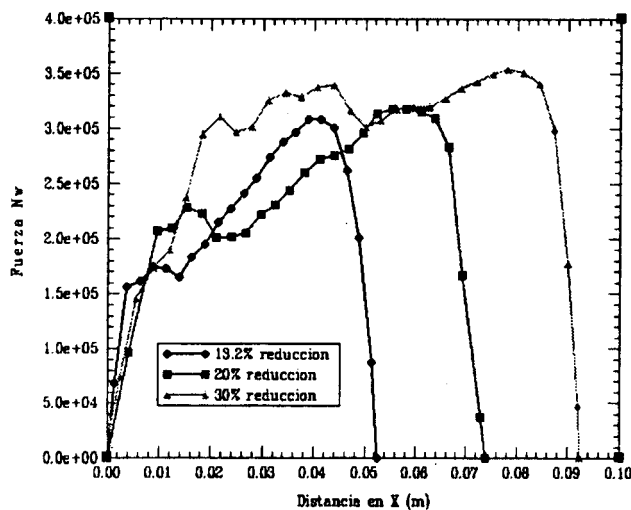


Figura 4

En la Figura 5 se representa la evolución de la fuerza de laminado a lo largo del tiempo. Las oscilaciones son debidas a la discretización, ya que según la posición

del rodillo sobre el desbaste puede haber distinto número de puntos en contacto y se producen ligeras variaciones en la fuerza y el par total.

El valor de la fuerza de laminado obtenido es de 1550 KN, lo que supone un error del 9,6 % frente al valor experimental. En cuanto al par, el valor medio calculado es de 50823 Nm. Estas diferencias pueden estar relacionadas con la hipótesis utilizada de no considerar el deslizamiento relativo entre las superficies. Simulaciones similares realizadas con ABAQUS soportan este argumento, ya que se ha obtenido un valor de fuerza de laminado de 1598 KN, mientras que considerando el deslizamiento con un coeficiente de fricción de 0,35, los resultados obtenidos se han aproximado a los valores experimentales.

En la Tabla II se recogen los valores máximos, mínimos y medios de la fuerza y del par de la zona estable de laminado. Bajo la etiqueta CFM se muestran los resultados obtenidos que se comparan con los calculados por ABAQUS.

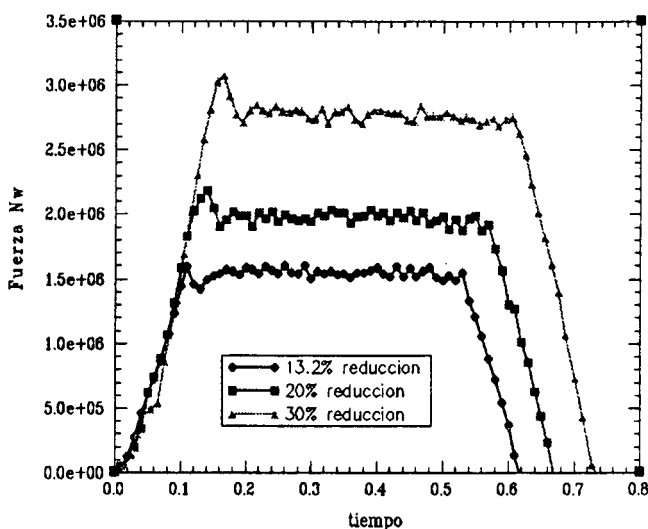


Figura 5

	Mínimo	Máximo	Media	Error	
CFM	1,4857e6	1,6064e6	1,5497e6	9,6 %	Fuerza Experimental 1,714e6N
ABAQUS 0,35	1,6723e6	1,7761e6	1,7261e6	0,7 %	
ABAQUS	1,5197e6	1,6493e6	1,5981e6	6,8 %	
CFM	53441	46283	50823	7,5 %	Par Experimental 54954Nm
ABAQUS 0,35	59565	49405	57066	3,8 %	
ABAQUS	61227	48931	58136	5,8 %	

Tabla II. Laminación 2D: fuerza y par de laminado

Laminaciones 3D

Las fuerzas y pares de laminación pueden estimarse mediante simulaciones 2D, pero otros requerimientos tecnológicos, como las exigencias de planicidad de los productos y el control de los despuntes de cabeza y cola, así como las deformaciones laterales, sólo pueden estimarse mediante simulaciones 3D. El ensanchamiento lateral, así como los despuntes de cabeza y cola del desbaste, resultan del proceso acumulativo de las sucesivas pasadas de laminación, cuya predicción es importante realizar para conocer la geometría final del producto y mejorar los rendimientos de material. Se muestran los resultados obtenidos en la simulación 3D del proceso de laminación anterior. Debido a las simetrías existentes en la anchura y el espesor del desbaste, sólo se considera la cuarta parte del modelo completo.

En la Tabla III se recogen las dimensiones medias, máximas y mínimas del desbaste laminado. Se ha estimado el volumen final a partir de los valores medios, encontrándose una variación de valor porcentual 0,13 % frente al volumen inicial aceptable.

	Inicial (mm)	Final (mm)		
		Máximo	Mínimo	Media
Longitud	300	343,556	332,123	339,869
Espesor	50	43,896	43,365	43,572
Anchura	350	362,436	351,411	354,984
Volumen	5 250,000	5 465,801	5 061,202	5 256,877

Tabla III. Laminación 3D: dimensiones del desbaste laminado

En la Figura 6 se observa la malla deformada al final del proceso.

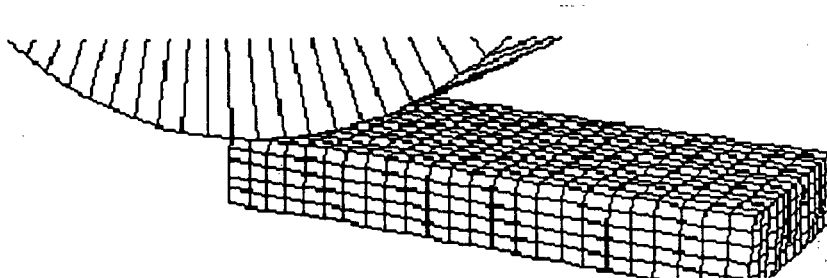


Figura 6

En la Figura 7 y en la Figura 8 se puede apreciar la similitud en la distribución de las tensiones efectivas obtenidas respectivamente por CFM y ABAQUS.

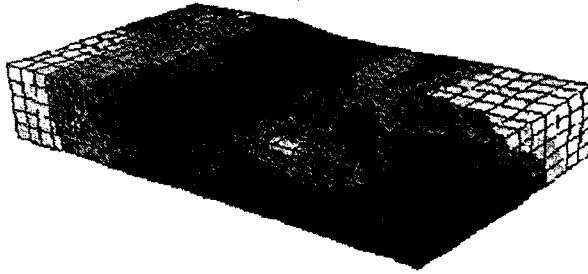


Figura 7

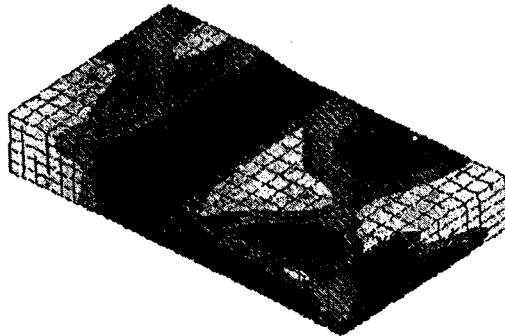


Figura 8

En la Figura 9 se representa la evolución de la fuerza total de laminado a lo largo del tiempo y su comparación con el valor experimental. El valor medio de la fuerza en la zona estable de laminado obtenido con CFM es de $1,591e6$ N, lo que supone un error del 7,2 % frente al valor experimental.

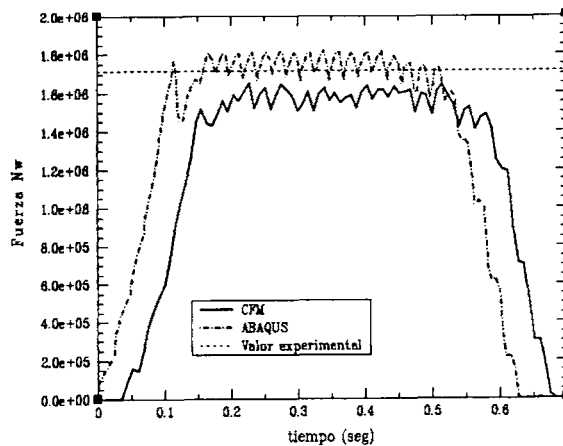


Figura 9

CONCLUSIONES

La formulación de sólido implícita ha sido objeto de desarrollo intenso en las dos últimas décadas, habiéndose obtenido avances importantes, que muestran que es una herramienta competitiva para la simulación del conformado.

La formulación hiperelástica y la descomposición multiplicativa proporcionan una base teórica sólida. Los algoritmos hipoeelásticos más recientes muestran una fuerte similitud con los algoritmos hiperelásticos. En ambos casos se extienden los algoritmos de integración elastoplástica en pequeñas deformaciones al caso de deformación finita.

Los problemas industriales demandan en general simulaciones 3D que requieren una conexión estrecha con el CAD y alta eficiencia computacional. Las distintas formulaciones posibles mencionadas en este trabajo comparten la resolución, un gran número de veces, de grandes sistemas lineales de ecuaciones. Los avances conseguidos en este sentido son por lo tanto decisivos para la mejora de la eficiencia computacional y valiosos bajo cualquier modalidad de formulación implícita.

La simulación del contacto con fricción es determinante en procesos, como forja y embutición, donde las técnicas ALE y de remallado pueden ser necesarias para culminar con éxito la simulación. El proceso de la laminación está menos sujeto a las exigencias mencionadas, ya que la deformación se produce sin excesiva distorsión y el modelo de contacto tractivo sin deslizamiento es suficiente en una primera aproximación. Se trata de un proceso relativamente sencillo para desarrollar estrategias de eficiencia computacional (Parte II), que luego pueden ser extendidas a casos de mayor complejidad.

REFERENCIAS

1. O.C. Zienkiewicz y P.N. Goldbole, "Flow of Plastic and Viscoplastic Solids with Special Reference to Extrusion and Forming Processes", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **8**, pp. 3-16, (1974).
2. C.H. Lee y S. Kobayashi, "New Solutions to Rigid-Plastic Deformation Problems Using a Matrix Method", *J. Engr. Ind.*, Vol. **95**, (1973).
3. O.C. Zienkiewicz, E. Oñate y J.C. Heinrich, "A General Formulation for Coupled Thermal Flow of Metals Using Finite Elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **17**, pp. 1497-1514, (1981).
4. P.R. Dawson y E.G. Thompson, "Finite Element Analysis of Steady State Elasto-Viscoplastic Flow by Initial Stress Rate Method", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **12**, pp. 47-57, (1978).
5. J.C. Nagtegaal y F.E. Veldpaus, "On the Finite Strain Plasticity Equations in a Numerical Model", *Numerical Analysis of Forming Processes*, Wiley, Chichester, (1984).
6. J.C. Nagtegaal y N. Rebelo, "On the Development of a General Purpose Finite Element Program for Analysis of Forming Processes", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **25**, pp. 113-131, (1988).

7. E.C. Flower y J.O. Hallquist, "Computer-Aided Simulation of Metal Forming", Lawrence Livermore National Laboratory Report # UCRL-93643, University of California, (1986).
8. J. Huentik, "*Numerical Method in Industrial Forming Processes*", Pittman *et al.*, Pineridge Press, pp. 501–506, (1982).
9. N. Rebelo, J.C. Nagtegaal y L.M. Taylor, "Comparison of Implicit and Explicit Finite Element and the Simulation of Metal Forming Processes", *Proceedings of the Fourth International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, pp. 99–108, (1992).
10. J.C. Simo, "Topics on the Numerical Analysis and Simulation Plasticity", borrador para "*Handbook of Numerical Analysis*", Vol III, a editar por P.G. Ciarlet y J.L. Lions, Elsevier Science Publishers, (1994).
11. J.P. Ponthot, "Traitement unifié des milieux continus solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis", Tesis Doctoral, Universidad de Lieja, (1994-95).
12. J.E. Marsden y T.R.J. Hughes, "*Mathematical Foundations of Elasticity*", Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, (1983).
13. C. García Garino y J. Oliver, "Un modelo constitutivo para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones. Parte I: Formulación teórica y aplicación a metales", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **11**, 1, pp. 105–123, (1995).
14. C. García Garino y J. Oliver, "Un modelo constitutivo para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones. Parte II: Implementación numérica y ejemplos de aplicación", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **12**, 2, pp. 147–169, (1996).
15. L. Malvern, "*An Introduction to the Mechanics of a Continuous Media*", Prentice Hall, Englewood-Cliffs, (1969).
16. P.G. Ciarlet, "*Mathematical Elasticity, Volume I: Three Dimensional Elasticity*", North Holland Publishing Company, Amsterdam, (1987).
17. T.R.J. Hughes, "*The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Element Analysis*", Prentice-Hall, Inc., Englewood-Cliffs, N.J., (1987).
18. J. Lubliner, "*Plasticity Theory*", Mac Millan, London, (1990).
19. K.J. Washizu, "*Variational Methods in Elasticity and Plasticity*", 2ª edición, Pergamon Press, Oxford, (1975).
20. T.J.R. Hughes, "Numerical Implementation of Constitutive Models: Rate Independent Deviatoric Plasticity", en "*Theoretical Foundation for Large Scale Computations for Nonlinear Material Behavior*", Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, The Netherlands, (1984).
21. C.W. Gear, "*Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*", Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, New York, (1971).
22. R.D. Krieg y B.D. Krieg, "Accuracies of Numerical Solution Methods for the Elastic Perfectly Plastic Model", *ASME J. Pressure Vessel Tech.*, Vol. **99**, pp. 510–515, (1977).
23. M. Ortiz y E.P. Popov, "Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relation", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **21**, pp. 1561–1576, (1985).
24. J.C. Simo y R.L. Taylor, "Consistent Tangent Operator for Rate-Independent Elastoplasticity", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **48**, pp. 101–118, (1985).

25. J.C. Simo, "A Framework for Finite Strain Elastoplasticity Based on Maximum Plastic Dissipation and the Multiplicative Decomposition. Part I: Continuum Formulation", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, Vol. **66**, pp. 199–219, (1988).
26. J.C. Simo, "A Framework for Finite Strain Elastoplasticity Based on Maximum Plastic Dissipation and the Multiplicative Decomposition. Part II: Computational Aspects", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, Vol. **68**, pp. 1–33, (1988).
27. J.C. Simo, "Algorithms for Multiplicative Plasticity that Preserve the Form of the Return Mappings of the Infinitesimal Theory", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, Vol. **99**, pp. 61–112, (1992).
28. A.L. Eterovic y K.J. Bathe, "A Hyperelastic Based Strain Elastoplastic Constitutive Formulation with Combined Isotropic-Kinematic Hardening Using the Logarithmic Stress and Strain Measures", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **30**, pp. 1099–1144, (1990).
29. G. Weber y L. Anand, "Finite Deformation Constitutive Equations and a Time Integration Procedure for Isotropic Hyperelastic-Viscoplastic Solids", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **79**, pp. 173–202, (1992).
30. D. Peric, R.J. Owen y M.E. Honnor, "A Model for Finite Strain Elasto-Plasticity Based on Logarithmic Strains: Computational Issues", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **94**, pp. 35–61, (1992).
31. J.C. Nagtegaal, D.M. Parks y J.R. Rice, "On Numerical Accurate Finite Element Solutions on the Fully Plastic Range", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **4**, pp. 153–177, (1974).
32. J.C. Simo, R.L. Taylor y K.S. Pister, "Variational and Projection Methods for the Volume Constraint in Finite Deformation Elastoplasticity", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **51**, pp. 177–208, (1985).
33. J.C. Simo y T.R.J. Hughes, "On the Variational Foundations of Assumed Strain Methods", *Journal Appl. Mech.*, Vol. **53**, 1, pp. 51–54, (1986).
34. N. Kikuchi y J.T. Oden, "Contacts Problems in Elastostatics", *Finite Elements: Special Problems in Solid Mechanics*, Vol. **4**, Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, (1984).
35. K.J. Bathe y A.B. Chaudary, "A Solution Method for Planar and Axisymmetric Contact Problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **21**, pp. 65–88, (1985).
36. A.B. Chaudary y K.J. Bathe, "A Solution Method for Static and Dynamic Analysis of Contact Problems with Friction", *Computer & Structures*, Vol. **24**, pp. 855–873, (1986).
37. J.C. Simo, P. Wrigges y R.L. Taylor, "A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Contact Problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **50**, pp. 163–180, (1985).
38. F.G. Gallego y J.J. Anza, "A Mixed Finite Element Model for the Elastic Contact Problem", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **28**, pp. 1249–1264, (1989).
39. J.W. Ju y R.L. Taylor, "A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Nonlinear Frictional Contact Problems", *Journal Th. and Appl. Mechanics*, special issue, suplement 1 to Vol. **7**, (1988).
40. J.O. Hallquist, G.L. Goudreau y D.J. Benson, "Sliding Interfaces with Contact-Impact Large Scale Lagrangian Computations", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **51**, pp. 107–137, (1985).
41. D. Peric y R.J. Owen, "Computational Model for 3D Contact Problems with Friction Based on the Penalty Method", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **35**, pp. 1289–1309, (1992).

42. H. Parisch, "A Consistent Tangent Stiffness Operator for Three Dimensional Nonlinear Contact Analysis", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **28**, pp. 1803–1812, (1989).
43. J.H. Heegaard y A. Curnier, "An Augmented Lagrangian Method for Discrete Large-Slip Contact Problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **36**, pp. 569–593, (1993).
44. P. Alart y A. Curnier, "A Mixed Formulation for Frictional Contact Problems Prone to Newton-Like Solution Methods", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **92**, pp. 353–375, (1991).
45. A. Heege, P. Alart y E. Oñate, "Numerical Modelling and Simulation of Frictional Contact Using a Generalised Coulomb Law", *Engineering Computations*, Vol. **12**, pp. 641–656, (1995).
46. L. Lidgren y J. Edberg, "Contact Forces and Deformation in Plate Rolling", NUMIFORM'89.
47. J.H. Bianchi y E. Petrone, "Modelling of Multipass Rolling of Steel Plates", NUMIFORM'92, pp. 701–706, (1992).
48. J. Edberg, "3D Simulation of Plate Rolling Using Different Friction Models, NUMIFORM'92, pp. 713–718, (1992).
49. ABAQUS/standard, Version 5,5 Hibbit, Karlson & Sorensen, Inc., (1995).
50. Application of Finite Element Methods in Hot Rolling and Deep Drawing", *1th-5th Progress Reports*, CECA Project, (1989–1993).