

ANALISIS TERMOMECHANICO NO LINEAL MEDIANTE METODOS EXPLICITOS DE DIFERENCIAS FINITAS Y ELEMENTOS FINITOS

JOSE M. GOICOLEA

*E.T.S. Ingenieros de Caminos
Ciudad Universitaria, 28040 Madrid*

RESUMEN

Los algoritmos de integración explícita en el tiempo proporcionan una metodología de solución para problemas dinámicos, que es común para diferencias finitas y elementos finitos. Los métodos explícitos originan algoritmos numéricos particularmente sencillos, lo que les dota de una gran potencia para su aplicación a problemas complejos. El interés ve acrecentado en la actualidad por su adecuación a arquitecturas de ordenadores tanto vectoriales como de proceso masivamente paralelo.

Se propone en este trabajo un método de diferencias finitas con mallas no estructuradas para problemas termomecánicos acoplados, basado en leyes de balance mecánico y termodinámico con formulación integral. Al desarrollar el esquema de cálculo y los algoritmos se comprueba que es completamente equivalente a un método de elementos finitos.

Se presentan algunos resultados en aplicaciones que abarcan problemas simples de propagación de ondas elásticas, procesos lentos de extrusión termomecánica y fenómenos de impacto a alta velocidad con perforación de blindajes. Estos muestran la eficacia del método propuesto en la resolución de problemas reales en sectores tecnológicamente avanzados.

SUMMARY

Explicit time integration algorithms provide a methodology for solution of dynamic problems which is common for finite difference and finite element methods. Explicit methods result in particularly simple algorithms, due to which they are very powerful for solution of complex problems. The interest is increased nowadays due to their suitability for new computer architectures, from vector processors to massively parallel computers.

A finite difference method is proposed with non-structured meshes for thermo-mechanical coupled problems, based on integral expressions of the mechanical and thermodynamical balance laws. The development of the semidiscretisation method and the particular numerical algorithms employed show that it is exactly equivalent to a finite element method.

Some examples are shown, including simple wave propagation problems, slow loading thermomechanical extrusion, and high velocity impact of projectiles on armour with perforation. These show the efficiency of the proposed methodology for the solution of realistic problems in technologically advanced sectors.

Recibido: Junio 1992

INTRODUCCION

Los métodos explícitos de cálculo fueron propuestos inicialmente en el contexto de diferencias finitas. Estos tuvieron un gran desarrollo en EE.UU. durante los años 50-60 en el entorno de los laboratorios dedicados a investigación para defensa (Lawrence Livermore, Sandia, Los Alamos). En ese momento los elementos finitos estaban aún en su infancia y desde luego muy lejos de poder resolver los problemas fuertemente no lineales resueltos por los llamados "Hydrocodes"^{33,16,23,34,8,10} de diferencias finitas: explosiones, propagación de detonaciones, ondas de choque, balística terminal, ...

Sin embargo con posterioridad se ha producido una fusión entre las dos escuelas de diferencias finitas y elementos finitos, de la cual son representativos los códigos de elementos finitos explícitos DYNA3D y HONDO II^{9,12}. De esta manera se aprovecha la metodología más consistente de los elementos finitos para obtención de soluciones aproximadas, ampliando el rango de aplicabilidad efectiva de los "hydrocodes" a problemas *ingenieriles* como impactos a baja velocidad, vibraciones estructurales y análisis sísmico, entre otros. En la génesis de los programas de elementos finitos explícitos pronto quedó claro que era preferible el uso de elementos sencillos, como cuadriláteros con un punto de integración y estabilización frente a modos de energía nula, frente a elementos de orden superior. Una buena descripción de esta génesis se puede encontrar en [7].

Los métodos explícitos encuentran su campo de aplicación óptimo en problemas de dinámica rápida, en los que se producen fuertes no linealidades y el empleo de intervalos de tiempo pequeños pasa a ser una necesidad. Sin embargo los algoritmos de resolución explícitos poseen ventajas notables que pueden hacer interesante su empleo en otros ámbitos. Una ventaja importante es la resolución de las ecuaciones a nivel exclusivamente local, sin plantear en ningún momento sistemas de ecuaciones globales acopladas. Esto permite el uso de algoritmos elemento por elemento, que facilitan el cálculo en paralelo. Planteados como métodos de relajación dinámica³¹ o relajación viscosa³⁰ se enmarcan junto con métodos iterativos de resolución de ecuaciones no lineales, como los métodos de relajación de Gauss-Seidel, o gradiente conjugado preconditionado con técnicas de elemento por elemento¹¹. Este tipo de métodos despierta un interés creciente en la actualidad por su potencial de vectorización y paralelización.

Este trabajo no pretende ser una recopilación exhaustiva del estado del arte ni de los fundamentos teóricos o numéricos. Se trata más bien de un intento de clarificar y ordenar las ideas puestas en práctica por el autor durante los últimos años para el desarrollo de métodos de diferencias finitas explícitas para cálculos termomecánicos no lineales. Esta experiencia se enmarca en un entorno de *producción*, orientado a resolver problemas industriales avanzados de manera eficaz desde el punto de vista computacional.

Se describe en el resto de este artículo un método para el análisis térmico-mecánico acoplado de problemas no lineales, basado en la aproximación por diferencias finitas con mallas no estructuradas a las ecuaciones básicas de balance de cantidad de movimiento y energía. Se desarrolla el método de semidiscretización empleado, detallando los algoritmos numéricos de cálculo para diversos tipos de elementos. Analizando el ciclo de

cálculo y el detalle de las operaciones aritméticas, se muestra la equivalencia completa con el método de elementos finitos. A continuación se dan algunas recomendaciones para la optimización en ordenadores paralelos y vectoriales. Por último, se describen tres aplicaciones significativas: propagación de ondas elásticas en un cono, extrusión termomecánica 3D, y perforación de blindajes.

Como conclusión principal se establece que el método propuesto, que se puede considerar como un caso particular de elementos finitos explícitos, es eficaz para resolver adecuadamente problemas termomecánicos no lineales/dinámicos que se plantean en sectores tecnológicamente avanzados. El interés de los métodos explícitos está incrementado por la emergencia de nuevas arquitecturas de cálculo en paralelo.

ECUACIONES BASICAS

Sea un cuerpo $\mathcal{B}$ sometido a un proceso mecánico y térmico, descrito a través de las coordenadas $\mathbf{x}(X)$ y temperaturas $\theta(X)$ de sus partículas $X \in \mathcal{B}$. Las ecuaciones de gobierno se plantean como integrales para cualquier subdominio $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$, con frontera $\partial\mathcal{P}$. Estas integrales expresan directamente los principios de balance y conservación.

El balance de la cantidad de movimiento se expresa como

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{t} dS, \quad (1)$$

donde ρ es la densidad másica, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ es el campo de velocidades, $\mathbf{b}$ las fuerzas distribuidas por unidad de volumen, y $\mathbf{t}$ el campo de tracciones en el contorno.

Por el lema de Cauchy, se verifica que, para cualquier elemento diferencial de superficie orientada,

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{n} dS, \quad (2)$$

siendo $\boldsymbol{\sigma}$ el denominado tensor de tensiones de Cauchy. Por otra parte, la aplicación del principio del balance del momento cinético obliga a $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$.

El principio de balance de la energía (primera ley de la termodinámica) se puede expresar como

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\mathcal{P}} \rho u dV + \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 dV \right] = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b} \mathbf{v} dV + \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{t} \mathbf{v} dS + \int_{\mathcal{P}} r dV + \int_{\partial\mathcal{P}} q dS, \quad (3)$$

donde u es la energía interna específica por unidad de masa, r son las fuentes de calor por unidad de volumen, y q es el flujo calorífico por unidad de superficie. Por el principio de Fourier se puede escribir

$$q = \mathbf{h} \mathbf{n}, \quad (4)$$

siendo $\mathbf{h}$ el vector de flujo calorífico.

Empleando (2) y (4) es posible expresar (3) de la manera siguiente,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho u dV = \int_{\mathcal{P}} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV + \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{h} n dS + \int_{\mathcal{P}} r dV \quad (5)$$

donde

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}) \quad (6)$$

es el denominado tensor velocidad de deformación.

Por localización de los principios (1) y (5) se llega a las ecuaciones de campo

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}} \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \nabla \mathbf{h} + r = \rho \dot{u} \quad (8)$$

Sin embargo se prefiere emplear aquí las expresiones integrales (1) y (5), que tienen un carácter más esencial que (7) y (8), además de exigir un orden menor de derivabilidad a los campos incógnita. De esta manera no será necesario, como en el Método de los Elementos Finitos, el planteamiento de una formulación débil (principio de los trabajos virtuales).

Es necesario formular también *ecuaciones constitutivas* que permitan calcular el valor de los campos $\boldsymbol{\sigma}$ y $\mathbf{h}$. Estas se formulan de manera independiente para ambos campos mecánico y térmico, aunque existe un acoplamiento debido a la dependencia de los parámetros del material con la temperatura y a las tensiones térmicas. Para $\boldsymbol{\sigma}$ se emplean leyes incrementales elasto-viscoplásticas, basadas en predictores de tipo hipoplástico. La formulación general es la siguiente.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = D_{ijkl}^e (d_{kl} - d_{kl}^p) - \alpha 3K \dot{\theta} \delta_{ij} \quad (9)$$

$$d_{ij}^p = \dot{\gamma} r_{ij}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}, \mathbf{d}) \quad (10)$$

$$\dot{q}_\alpha = \dot{\gamma} h_\alpha(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}, \theta) \quad (11)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta} \langle \Phi(F) \rangle \quad (12)$$

donde D_{ijkl}^e es el tensor de módulos elásticos tangentes del material, d_{ij}^p es la componente plástica de la velocidad de deformación, α es el coeficiente de expansión térmico, K es el módulo de elasticidad volumétrico, θ es la temperatura, γ es la deformación plástica efectiva ($\bar{\epsilon}^p$), r_{ij} es la dirección de flujo plástico, q_α son los parámetros de endurecimiento del material ($\mathbf{q}$ tiene aquí un significado distinto al de (3) y (4)), h_α son los módulos de endurecimiento plástico, η es un parámetro escalar de viscosidad, y $\Phi(F)$ es una función de fluencia viscoplástica, siendo $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}, \theta) = 0$ el criterio de fluencia elastoplástico. La notación empleada en (12) significa $\langle \Phi(F) \rangle = \Phi(F)$ si $F > 0$, y $\langle \Phi(F) \rangle = 0$ si $F \leq 0$. La ecuación (9) gobierna la respuesta elástica del material, (10) la regla de fluencia, (11) el endurecimiento plástico, y (12) representa en un caso general la ley viscoplástica de fluencia, o en el caso $\eta = 0$ el criterio de fluencia elastoplástico.

Los símbolos $\dot{\sigma}_{ij}, \dot{q}_\alpha$ representan tasas corrotacionales de las magnitudes respectivas, necesarias para considerar grandes deformaciones. Así por ejemplo la tasa corrotacional de Jaumann se expresa en función de las derivadas temporales como

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ik}\omega_{kj} + \sigma_{jk}\omega_{ki} \quad (13)$$

$$\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha + q_k\omega_{k\alpha} \quad (14)$$

siendo

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}). \quad (15)$$

El valor de la tasa corrotacional ($\dot{\sigma}_{ij}, \dot{q}_\alpha$) se puede interpretar como la componente *material* de la variación de los campos respectivos, debiéndosele sumar una componente de variación *geométrica* debida a la rotación de los ejes para obtener la variación total ($\dot{\sigma}_{ij}, \dot{q}_\alpha$). En el caso de pequeñas deformaciones estas componentes geométricas se anulan.

Combinando (10) y (12) obtenemos para un caso general

$$d_{ij}^p = \frac{1}{\eta} \langle \Phi(F) \rangle r_{ij}(\sigma, q, d) \quad (16)$$

ecuación correspondiente a la formulación de Perzyna para la viscoplasticidad. En el caso particular $\eta = 0$, (12) obligaría a $F(\sigma, q, \theta) = 0$, estando entonces en el caso de elastoplasticidad independiente de la velocidad de deformación. En este caso se puede eliminar $\dot{\gamma}$ del resto de las ecuaciones obteniendo una matriz elastoplástica tangente, D_{ijkl}^{ep} , cuya expresión no es necesario desarrollar aquí.

Para el flujo térmico las ecuaciones constitutivas consideradas se limitan a la ley de Fourier,

$$h_i = k_{il}\theta_{,l} \quad (17)$$

donde k_{il} son los módulos de conductividad térmica; en el caso isótropo usual, $k_{il} = k\delta_{il}$.

En (5) el término $\sigma : d$ corresponde a la energía interna de deformación. La descomposición aditiva $d = d^e + d^p$ implícita en (9) permite separar la tasa de energía potencial elástica, $\sigma : d^e$ y la tasa de trabajo plástico, $\sigma : d^p$. De la componente plástica, la mayor parte se disipa contribuyendo a aumentar la entalpía, lo que se traduce en un aumento de temperatura:

$$\frac{d}{dt} \int_p \rho c_p \theta dV = \int_p \xi \sigma : d^p dV + \int_{\partial p} h n dS + \int_p r dV \quad (18)$$

donde ξ es un coeficiente de disipación cercano a la unidad (usualmente $\xi = 0.95$), y c_p es el calor específico a presión constante.

SEMIDISCRETIZACION: Diferencias Finitas

La discretización del dominio espacial se realiza mediante una malla de elementos Ω_e . Las incógnitas discretas serán los desplazamientos $\mathbf{u}_N(t)$ definidos en los nodos N de la malla, y las temperaturas $\theta_e(t)$ definidas en este caso en el centro de cada elemento e . Aunque la estructura topológica viene definida por Ω_e y N , se emplearán también para las integrales alrededor de los nodos otro conjunto de subdominios $\mathcal{P}_N$ centrados en cada nodo N de la malla, de manera que $\bigcup_N \mathcal{P}_N = \mathcal{B}$ y $\bigcap_N \mathcal{P}_N = \emptyset$.

Conviene recalcar que la malla puede ser *completamente arbitraria*, sin necesitar ninguna estructura en líneas I, J ni otro tipo de esquema fijo. Tradicionalmente se han empleado los modelos de diferencias finitas con mallas estructuradas, necesarias para expresar las *moléculas* que definen las aproximaciones en diferencias. Sin embargo, los procedimientos para el cálculo de gradientes y evaluación de fuerzas internas empleados aquí son lo suficientemente generales por lo que en este sentido permiten una malla no estructurada equivalente a las empleadas en elementos finitos, sin ningún tipo de limitación.

La ecuación (1) se discretiza particularizándola para cada subdominio $\mathcal{P}_N \subset \mathcal{B}$. Expresándola en forma matricial para el conjunto del modelo, resulta finalmente un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}^{ext} - \mathbf{f}^{int} \quad (19)$$

siendo

$$\mathbf{M} \equiv [M_{NJ}] = \delta_{NJ} \int_{\mathcal{P}_N} \rho dV \quad (N \text{ no sumado}) \quad (20)$$

$$\mathbf{f}^{ext} \equiv \mathbf{f}_N^{ext} = \int_{\mathcal{P}_N} \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{P}_N} \boldsymbol{\tau} dS \quad (21)$$

$$\mathbf{f}^{int} \equiv \mathbf{f}_N^{int} = \int_{\partial\mathcal{P}_N} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS \quad (22)$$

La expresión (20) origina una matriz de masas diagonal. La conservación de la masa se satisface de manera trivial en una malla Lagrangiana (es decir, que sigue al material en su movimiento) sin más que hacer constantes las masas nodales resultantes de (20). La ecuación (21) expresa el vector de fuerzas externas, mientras que (22) proporciona las fuerzas internas. Más adelante detallamos algunos algoritmos en diferencias para evaluar las integrales que resultan de esta última ecuación.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (19) se integran en el tiempo mediante un esquema explícito de diferencias centrales:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + \dot{\mathbf{u}}^{n+1/2} \Delta t \\ \dot{\mathbf{u}}^{n+1/2} &= \dot{\mathbf{u}}^{n-1/2} + \ddot{\mathbf{u}}^n \Delta t \end{aligned} \quad (23)$$

Así, se establece un ciclo de cálculo en el que se aplican primeramente las ecuaciones semidiscretas (19) a través de las expresiones (20)-(22) en el instante t^n para calcular

$\ddot{\mathbf{u}}^n$; a continuación se aplica el esquema de integración temporal (23) para obtener $\mathbf{u}^{n+1}$, pudiendo entonces recomenzar el ciclo de cálculo para el siguiente intervalo de tiempo, t^{n+1} . En la Tabla 1 se puede ver una representación esquemática de las operaciones del ciclo de cálculo.

Siguiendo este esquema de integración no es necesario en ningún momento resolver un sistema de ecuaciones simultáneas, tal y como se plantean en los métodos de elementos finitos tradicionales. Las únicas operaciones a realizar son aproximaciones a nivel local mediante expresiones de diferencias finitas para evaluar gradientes o integrales. Esta notable propiedad de los métodos explícitos constituye su principal ventaja, tanto por su eficacia computacional (rapidez de cálculo) como por la sencillez de los algoritmos a emplear. Esta sencillez hace que la resolución de problemas no lineales sea especialmente ventajosa y robusta, no necesitando un esfuerzo significativamente mayor de cálculo que para problemas lineales.

-
1. Calcula intervalo de tiempo Δt
 2. Bucle en elementos: $e = 1, \text{numel}$
 - (a) fuerzas internas $\mathbf{f}_e^{int} = \int_{\mathcal{P}_{N(e)}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS$
 - (b) ensambla $\mathbf{f}^{int} = \sum_e \mathbf{f}_e^{int}$
 3. Bucle en nodos: $N = 1, \text{numnod}$
 - (a) fuerzas exteriores y contactos, $\mathbf{f}_N^{ext}$
 - (b) aceleraciones $\ddot{\mathbf{u}}_N^n = (\mathbf{f}_N^{ext} - \mathbf{f}_N^{int}) / M_N$
 - (c) velocidades $\dot{\mathbf{u}}_N^{n+1/2} = \dot{\mathbf{u}}_N^{n-1/2} + \ddot{\mathbf{u}}_N^n \Delta t$
 - (d) desplazamientos $\mathbf{u}_N^{n+1} = \mathbf{u}_N^n + \dot{\mathbf{u}}_N^{n+1/2} \Delta t$
 4. Bucle en elementos: $e = 1, \text{numel}$
 - (a) velocidades de deformación y rotación

$$\mathbf{d}_e^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v})$$

$$\boldsymbol{\omega}_e^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v})$$
 - (b) evaluación tensiones $\boldsymbol{\sigma}_e^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_e^n + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_e^{n+1/2}(\mathbf{d}_e^{n+1/2}, \dots) \Delta t$
 - (c) flujo de calor

$$q_e^{int} = \int_{\partial \Omega_e} k \nabla \theta \mathbf{n} dS$$

$$q_e^{ext}, \dot{w}_e^p = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^p dV$$
 - (d) actualización de temperaturas

$$\theta_e^{n+1} = \theta_e^n + \frac{q_e^{int} + q_e^{ext} + \xi \dot{w}_e^p}{\rho c_p \Omega_e} \Delta t$$
 5. Actualización del tiempo

$$t \leftarrow t + \Delta t$$

$$n \leftarrow n + 1$$
 si $t < t_{fin}$, volver a 1.
-

Tabla 1. Ciclo de cálculo termomecánico explícito.

Otra consecuencia importante es que no es necesario almacenar matrices de coeficientes globales en ningún momento, lo que reduce sobremanera las necesidades de memoria. Estas crecen de manera lineal (en lugar de cuadrática) con el tamaño del problema, lo que posibilita la solución eficaz de grandes problemas tridimensionales que mediante métodos implícitos resultan prácticamente inabordables.

La validez del esquema de integración explícito en el que se desacopla la integración espacial y temporal está condicionada a que a lo largo de un intervalo de tiempo Δt la información no tienda a propagarse más allá de un elemento,

$$\Delta t \leq \frac{h}{c_p} \quad (24)$$

siendo h el tamaño del elemento más pequeño (p. ej. la altura en un triángulo), y c_p la velocidad de propagación de las ondas más rápidas, en este caso las ondas P . Este requisito es el que permite realizar una interpolación exclusivamente local para las diferencias finitas, ya que en otro caso sería necesario plantear el equilibrio teniendo en cuenta también los desplazamientos de los elementos vecinos. Las ecuaciones resultarían acopladas y habría que emplear un proceso de relajación para establecer el equilibrio dinámico.

La condición (24) se denomina la condición de Courant o CFL². Se puede interpretar como la obligación de que la máxima velocidad *numérica* de transmisión de la información ($h^e/\Delta t$, siendo h^e la dimensión del elemento) no puede en ningún caso ser inferior a la velocidad *física*, so pena de que la integración se convierta en inestable. El asegurar esta condición no ofrece ninguna dificultad, ya que se impone de manera trivial en cualquier programa explícito; sin embargo restringe a valores necesariamente muy pequeños el intervalo de tiempo a utilizar.

Conviene notar que el esquema de integración impone la ecuación dinámica en t^n para calcular el nuevo estado en el instante t^{n+1} ; esto origina un cierto *desequilibrio dinámico* en t^{n+1} . Cuando este desequilibrio se ciñe al entorno local de cada elemento, da lugar simplemente a pequeñas oscilaciones numéricas, manteniéndose estable. En cambio, si el error es tal que en un intervalo de tiempo ocasiona desequilibrio incluso en los elementos contiguos, el proceso se torna inestable.

Hay que mencionar también que existen técnicas de relajación para abordar intervalos de tiempo o carga mayores, tales como la relajación dinámica³¹ o la relajación viscosa³⁰, de las que no nos ocuparemos aquí.

CICLO TERMICO

Paralelamente al ciclo mecánico de cálculo se realiza un ciclo térmico. La ecuación (18) aplicada a todo el dominio B discretizado en Ω_e origina la ecuación matricial

$$C\dot{\theta} = \xi \dot{w}^p + q^{int} + q^{ext} \quad (25)$$

donde

$$\mathbf{C} \equiv [C_{ef}] = \delta_{ef} \int_{\Omega_e} \rho c_p dV \quad (e \text{ no sumado}) \quad (26)$$

$$\dot{w}_e^p = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^p dV \quad (27)$$

$$q_e^{int} = \int_{\partial\Omega_e} h \mathbf{n} dS = \int_{\partial\Omega_e} k \nabla \theta \mathbf{n} dS \quad (28)$$

$$q_e^{ext} = \int_{\Omega_e} r dV + \text{términos en el contorno} \quad (29)$$

La expresión (26) es la matriz (diagonal) de capacidades térmicas, (27) corresponde al trabajo plástico disipado, (28) es la ganancia de calor por conducción en el medio, y (29) corresponde a las fuentes externas de calor. Más adelante se detallan los algoritmos empleados para estas integrales.

La integración temporal para las variables térmicas se realiza mediante un esquema explícito de Euler hacia delante,

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \dot{\theta}^n \Delta t \quad (30)$$

evaluándose $\dot{\theta}^n$ mediante la ecuación (25). Este esquema de resolución da lugar igualmente a un algoritmo explícito, sin ningún sistema de ecuaciones simultáneas. La estabilidad²⁸ es condicional a que el intervalo de tiempo está limitado por

$$\Delta t \leq \frac{h^2}{2} \frac{k}{\rho c_p} \quad (31)$$

siendo h el tamaño del elemento más pequeño. En la práctica, en este trabajo se ha encontrado que mientras la expresión (24) para el intervalo de tiempo mecánico resulta muy fiable, es conveniente reducir (31) mediante un factor de $1/4^3$.

INTEGRACION DE LAS ECUACIONES CONSTITUTIVAS

La evaluación de las fuerzas internas en (22) exige, además de un procedimiento de aproximación para la integral, una evaluación de las tensiones $\boldsymbol{\sigma}^n$ en t^n , a través de la integración en el tiempo de las mismas. El método seguido es el del *retorno radial*, consistente en emplear un predictor hipoeástico, seguido de una corrección de retorno a la superficie de fluencia que asegura la consistencia con el criterio de plasticidad. Este método que resulta de una gran sencillez y precisión fue propuesto inicialmente por Wilkins³³ y ha sido posteriormente generalizado en [22, 24, 29].

En primer lugar se evalúa la predicción elástica,

$$\boldsymbol{\sigma}_*^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^n + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_*^{n+1/2} \Delta t \quad (32)$$

resultando $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_*^{n+1/2}$ de la aplicación de (9), (13) y (18) con $\mathbf{d}^p = \mathbf{0}$. Si $F(\boldsymbol{\sigma}_*^{n+1}) < 0$, el material está dentro del rango elástico y se adopta $\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_*^{n+1}$. En el caso en que la

evaluación de (32) sitúe al material en régimen plástico, se procede a resolver para d^p mediante la aplicación de (10)-(12), en un caso viscoplástico general. Si es $\eta = 0$ esto equivale a un retorno a la superficie de fluencia $F(\sigma)^{25}$. En los casos de flujo plástico incompresible (asociativo o no) y superficies de fluencia isótropas, la integración es particularmente sencilla, dando lugar a un retorno radial³³. Este es el caso usual en la plasticidad de metales. En [4 y 5] se dan algunos detalles de la implementación.

En cualquier caso, es necesario realizar la interpolación de los gradientes de velocidades $\nabla \mathbf{v}^{n+1/2}$, a partir del campo de velocidades $\mathbf{v}^{n+1/2}$ para su utilización en (9), (13) y (14). A continuación se detallan algunos algoritmos para esto.

ALGORITMOS DE INTERPOLACION E INTEGRACION

Se describen a continuación para los casos básicos de mallas de triángulos o de cuadriláteros los algoritmos principales para el cálculo de

- Fuerzas internas, mediante integración de tensiones, ecuación (22),
- Velocidades de deformación d y rotación ω mediante la interpolación de gradientes, ecuaciones (6) y (15), y
- Flujo de calor, (28).

Triángulos

Cálculo de gradientes

Sea un elemento triangular genérico abc (Figura 1) en el que busquemos la expresión del gradiente de una función escalar w , expresión que será generalizable a campos vectoriales como las velocidades $\mathbf{v}$. Para ello se desarrolla w en serie de Taylor alrededor de un nodo a , que se toma como referencia:

$$w^p - w^a = \sum_{p \neq a} (x_i^p - x_i^a) w_{,i} \quad (33)$$

donde el superíndice p indica el nodo del triángulo (b, c), el subíndice i la dirección espacial (x ó y) y la coma en el subíndice derivación parcial respecto a la coordenada que sigue. La expresión anterior se puede escribir en forma matricial como

$$\mathbf{w}_{(r)} = \mathbf{x}_{(r)} \nabla w \quad (34)$$

$\mathbf{x}_{(r)}$ es una matriz 2×2 por lo que se puede invertir esta expresión, resultando

$$\begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Omega} \begin{Bmatrix} w_a y_{bc} + w_b y_{ca} + w_c y_{ab} \\ w_a x_{cb} + w_b x_{ac} + w_c x_{ba} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

donde se ha empleado la notación abreviada $y_{pq} = (y_p - y_q)$, y

$$\Omega = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_{ba} & y_{ba} \\ x_{ca} & y_{ca} \end{vmatrix} \quad (\text{área del triángulo}) \quad (36)$$

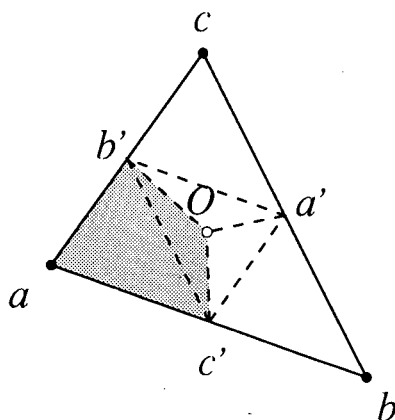


Figura 1. Elemento triangular

Fuerzas internas

Sean a', b', c' los puntos medios de los lados (Figura 1). Calcularemos la contribución de fuerzas internas en un nodo a genérico. Suponiendo la tensión constante, se integra por el camino $S_a = c'O b'$:

$$f_i^a = \int_{c'O b'} \sigma_{ij} n_j dS = \int_{c'b'} \sigma_{ij} n_j dS \quad (37)$$

$$\equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} y_{bc} & x_{cb} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (38)$$

Así, la matriz de fuerzas del elemento es

$$\begin{Bmatrix} f^a \\ f^b \\ f^c \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} y_{bc} & x_{cb} \\ y_{ca} & x_{ac} \\ y_{ab} & x_{ba} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (39)$$

Los resultados anteriores son generalizables de manera trivial a $3D$, empleando tetraedros. Conviene notar que los triángulos en $2D$ y los tetraedros en $3D$ son las únicas figuras en las que un campo con variación lineal admite solución única para el gradiente, siendo la ecuación matricial (34) invertible. En otros casos es necesario adoptar esquemas como el propuesto a continuación para cuadriláteros.

Cuadriláteros

Cálculo de gradientes

Supongamos un cuadrilátero genérico $abcd$ (Figura 2); emplearemos el teorema de la divergencia para calcular el gradiente, método que es aplicable a polígonos de cualquier número de lados:

$$w_{,j} = \frac{1}{\Omega} \int_{\partial\Omega} w n_j dS \quad (40)$$

Desarrollando la integral anterior, bajo la hipótesis de variación lineal de w entre los nodos del contorno $\partial\Omega$, resulta

$$\begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Omega} \begin{Bmatrix} w_a y_{bd} + w_b y_{ca} + w_c y_{db} + w_d y_{ac} \\ w_a x_{db} + w_b x_{ac} + w_c x_{bd} + w_d x_{ca} \end{Bmatrix} \quad (41)$$

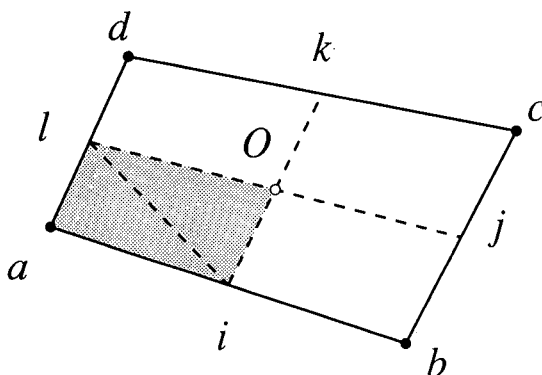


Figura 2. Elemento cuadrilátero.

Fuerzas internas

Integramos para el nodo genérico a , en el camino iOl :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^a &= \int_{iOl} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS = \int_{il} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} y_{bc} & x_{cb} \end{bmatrix} [\boldsymbol{\sigma}] \end{aligned} \quad (42)$$

Así, la matriz de fuerzas del elemento es

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}^a \\ \mathbf{f}^b \\ \mathbf{f}^c \\ \mathbf{f}^d \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} y_{bd} & x_{db} \\ y_{ca} & x_{ac} \\ y_{db} & x_{bd} \\ y_{ac} & x_{ca} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (43)$$

Al igual que en el caso de los triángulos, es generalizable este resultado a $3D$, empleando Hexaedros con integración reducida (1 punto).

Ciclo térmico

Las integrales (26), (27) y (29) se evalúan de manera trivial, al considerarse constante el integrando dentro de cada elemento Ω_e . Queda por evaluar la integral del flujo calorífico (28).

Para ello suponemos un elemento triangular Ω_e formado por los nodos a, b, c (Figura 3); el contorno $\partial\Omega_e$ está formado por los lados ab, bc y ca ; supondremos que en cada uno de estos lados existe un elemento adyacente que denominaremos Ω_{e_1} , Ω_{e_2} y Ω_{e_3} respectivamente. Cada uno de estos elementos tiene un centroide de coordenadas (x_{e_i}, y_{e_i}) y temperatura θ_{e_i} . Así, la contribución del flujo por el lado ab a (28) es

$$q_{ab} = k \left\{ \frac{\theta_{e_1} - \theta_e}{x_{e_1} - x_e}, \quad \frac{\theta_{e_1} - \theta_e}{y_{e_1} - y_e} \right\} \begin{Bmatrix} y_b - y_a \\ x_a - x_b \end{Bmatrix} \quad (44)$$

siendo θ_e y (x_e, y_e) correspondientes a Ω_e . Sumando las contribuciones de cada uno de los lados resulta

$$q_e^{int} = k [\theta_{e_1e} \quad \theta_{e_2e} \quad \theta_{e_3e}] \begin{Bmatrix} y_{ba}/x_{e_1e} - x_{ba}/y_{e_1e} \\ y_{cb}/x_{e_2e} - x_{cb}/y_{e_2e} \\ y_{ac}/x_{e_3e} - x_{ac}/y_{e_3e} \end{Bmatrix} \quad (45)$$

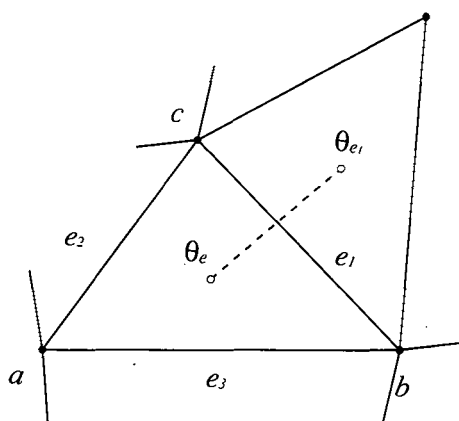


Figura 3. Discretización ciclo térmico.

En los casos en que el elemento forma parte del contorno y no exista un elemento adyacente, se sustituye la contribución (44) por el flujo correspondiente a la condición de contorno respectiva (Dirichlet, Neumann, o mixta).

DISCRETIZACION MIXTA

Los triángulos (o tetraedros en 3D) constituyen el medio más sencillo para generar mallas, pero sin embargo poseen un grave inconveniente para análisis elastoplásticos no lineales: exhiben una marcada tendencia al bloqueo de la malla²¹. El mismo problema ocurre con mallas de cuadriláteros bilineales (Q_4) con integración completa 2×2 , siendo el motivo un excesivo número de restricciones volumétricas.

El problema se puede solventar empleando cuadriláteros de integración reducida. Sin embargo, estos traen consigo a su vez un efecto indeseable, la existencia de modos de energía nula (*hourglassing* en terminología inglesa), que en ciertos casos pueden llegar a dominar la solución haciéndola inservible. Los códigos de diferencias finitas solucionan este problema por lo general mediante el uso de una viscosidad artificial *anti-hourglassing*^{9,10}, introducida como términos adicionales de fuerzas internas a través de un parámetro definido por el usuario.

Una discretización que evita los modos de energía nula de manera natural, estando a su vez libre de bloqueo, es la discretización mixta propuesta en [17]. Esta consiste en descomponer las tensiones y deformaciones en componentes volumétricas y desviadoras; para la componente volumétrica se promedian los valores de cada 2 triángulos adyacentes, estando pues referida al cuadrilátero formado por ambos. Las componentes desviadoras se refieren a los triángulos como de costumbre. En 3D se aplica un esquema similar con hexaedros formados por 5/6 tetraedros.

En el cuadrilátero $abcd$ (Figura 4), formado por los dos triángulos abc y acd , la expresión promediada del gradiente de un campo w sería

$$\begin{aligned}\nabla w &= \frac{1}{\Omega_{abcd}} (\nabla w_{abc} \Omega_{abc} + \nabla w_{acd} \Omega_{acd}) \\ &= \frac{1}{2\Omega_{abc}} \begin{pmatrix} y_{bc} & y_{ca} & y_{ab} \\ x_{cb} & x_{ac} & x_{ba} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} w_a \\ w_b \\ w_c \end{Bmatrix} + \frac{1}{2\Omega_{acd}} \begin{pmatrix} y_{cd} & y_{da} & y_{ac} \\ x_{dc} & x_{ad} & x_{ca} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} w_a \\ w_c \\ w_d \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\Omega_{abcd}} \begin{pmatrix} y_{bd} & y_{ca} & y_{db} & y_{ac} \\ x_{db} & x_{ac} & x_{bd} & x_{ca} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} w_a \\ w_b \\ w_c \\ w_d \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (46)$$

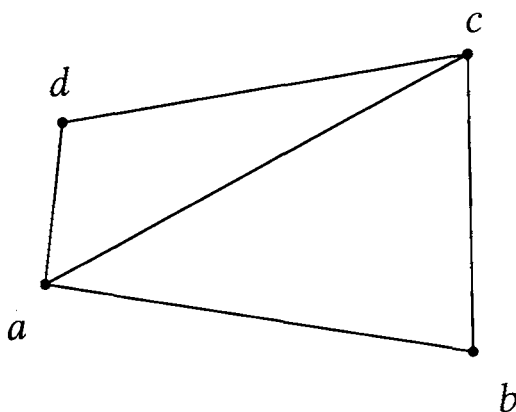


Figura 4. Discretización mixta

Interpolación que es idéntica a la realizada para todos los componentes en el cuadrilátero con integración reducida, (41), (56). Este tipo de elemento admite también algunas variantes con objeto de aumentar su robustez para deformaciones extremas^{3,4}.

En mallas que posean una estructura basada en cuadriláteros se puede argumentar que el esquema propuesto carece de isotropía, debido a la elección arbitraria de una de las dos diagonales para subdividir el cuadrilátero en 2 triángulos. Una variante del método de discretización mixta que resuelve este problema es realizar una

doble subdivisión en triángulos para cada cuadrilátero, empleando alternativamente cada una de las diagonales. Obtendríamos así una discretización muy similar a los cuadriláteros bilineales en elementos finitos 2×2 con deformación volumétrica promediada (formulación $\bar{B}$).

Prueba de la parcela

Los elementos de discretización mixta cumplen la prueba de la parcela para códigos explícitos¹. Dada una parcela de elementos arbitraria, se impone un campo lineal de velocidades en todos los nodos, $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{x}$. Después de la primera evaluación de $\mathbf{f}^{int}$ estas deben ser nulas para todos los nodos interiores de la parcela.

Para la comprobación se ha empleado una parcela formada por 4 cuadriláteros de discretización mixta (8 triángulos), con un nodo interior Figura 5. Se han realizado 6 análisis independientes, cubriendo así los valores arbitrarios de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Los valores normalizados de las fuerzas internas en el nodo interior fueron en todo caso inferiores a 10^{-6} , lo que se considera despreciable considerando la precisión empleada (Fortran real*4).

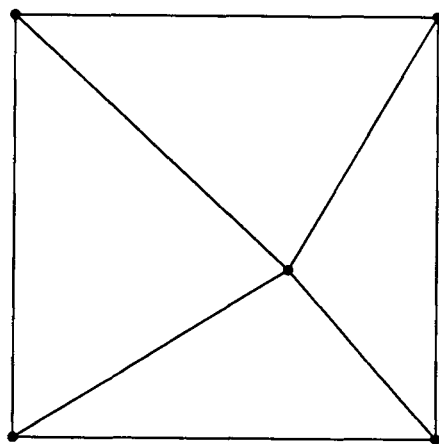


Figura 5. Parcela de elementos.

ELEMENTOS FINITOS

El método de los elementos finitos parte de una formulación débil de las ecuaciones del movimiento,

$$\int_B \nabla \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} dV + \int_B \rho \mathbf{w} \dot{\mathbf{v}} dV = \int_B \mathbf{w} \mathbf{b} dV + \int_{\partial B} \mathbf{w} \mathbf{t} dV \quad (47)$$

ecuación que ha de cumplirse $\forall \mathbf{w}(\mathbf{x})$ (funciones variación).

La semidiscretización espacial se realiza en subdominios Ω_e (elementos) en los cuales se definen las funciones de forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{u}^h(t) \quad (48)$$

donde $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ es el campo de desplazamientos en el continuo, $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ son las funciones de forma, y $\mathbf{u}^h(t)$ son los desplazamientos nodales.

Sustituyendo (48) en (47) y considerando para $\mathbf{w}$ la misma dependencia funcional (48), se llega a una ecuación matricial idéntica a la ya vista para diferencias finitas (19)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}^{ext} - \mathbf{f}^{int},$$

siendo ahora

$$\mathbf{M} = \sum_e \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \right] \quad (49)$$

$$\mathbf{f}^{ext} = \sum_e \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS \right] \quad (50)$$

$$\mathbf{f}^{int} = \sum_e \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \right] \quad (51)$$

Donde $\mathbf{B} = \partial\mathbf{N}/\partial\mathbf{x}$ es el operador de interpolación de gradientes. La ecuación (49) representa la matriz de masas *consistente*, que no tiene en general una expresión diagonal; sin embargo es una práctica usual diagonalizarla ya que el uso de la matriz consistente no presenta ventajas notables y por el contrario al diagonalizar se simplifica notablemente la solución. La ecuación (50) expresa las fuerzas externas, y (51) expresa las fuerzas internas a través del operador $\mathbf{B}$.

El empleo de $\mathbf{M}$ diagonal junto con un esquema de integración temporal explícito (23) da lugar a un conjunto de ecuaciones desacopladas, y por lo tanto un ciclo de cálculo enteramente similar al descrito arriba para diferencias finitas (Tabla 1).

No es necesario tampoco resolver ningún sistema de ecuaciones simultáneas. Los algoritmos son explícitos, resultando únicamente interpolaciones a nivel local, y resultan en una arquitectura de códigos particularmente sencilla y robusta. Análogamente, existen idénticas restricciones de Δt para la estabilidad de la integración.

La única diferencia formal consiste en el empleo por parte de los elementos finitos de una sistemática consistente para realizar las interpolaciones e integraciones numéricas, basada en las funciones de forma (48). Así, para calcular $\mathbf{f}^{int}$ (paso 2.a en Tabla 1), las tensiones se integran mediante (51) en lugar de (22). Por otra parte, la evaluación de los gradientes de deformación (paso 4.a en Tabla 1) emplea el operador $\mathbf{B}$,

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{B} \mathbf{v} \quad (52)$$

en sustitución de los esquemas adoptados para diferencias finitas. Aparte de estas modificaciones, el ciclo de cálculo detallado en la Tabla 1 es idéntico al seguido en diferencias finitas.

Vemos pues que la diferencia entre los métodos de diferencias finitas y elementos finitos con integración explícita son meramente formales, relativa únicamente a los algoritmos de interpolación e integración numérica.

Adicionalmente, se verifica que los casos básicos de elementos triangulares y cuadriláteros descritos antes para diferencias finitas dan lugar a los mismos algoritmos numéricos que triángulos de deformación constante (CST) y cuadriláteros bilineales con integración reducida (Q1) en elementos finitos¹⁴.

En efecto, para el elemento CST el operador $\mathbf{B}$ tiene la expresión

$$\mathbf{B} \equiv [B_i^p] = \left[\frac{\partial N^p}{\partial x_i} \right] \quad (53)$$

$$\mathbf{B} \equiv \frac{1}{2\Omega} \begin{pmatrix} y_{bc} & y_{ca} & y_{ab} \\ x_{cb} & x_{ac} & x_{ba} \end{pmatrix} \quad (54)$$

así el gradiente $\nabla w = \mathbf{B} \mathbf{w}_e$ ofrece la misma expresión que la obtenida para diferencias finitas en (35). Las fuerzas internas se expresan mediante

$$[\mathbf{f}^e] = \Omega \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (55)$$

que con la expresión de $\mathbf{B}$ dada por (54) resulta idéntica a (39).

Para cuadriláteros Q1, el operador $\mathbf{B}$ de interpolación de gradientes es

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\Omega} \begin{pmatrix} y_{bd} & y_{ca} & y_{db} & y_{ac} \\ x_{db} & x_{ac} & x_{bd} & x_{ca} \end{pmatrix} \quad (56)$$

comprobando que los algoritmos para ∇w y $\mathbf{f}^{int}$ resultan idénticos a (41) y (43) respectivamente.

Por lo tanto en estos dos casos básicos la equivalencia entre elementos finitos y diferencias finitas es completa. Conviene notar sin embargo que el M.E.F. proporciona una sistemática más rica y consistente para el planteamiento de soluciones aproximadas, generalizable a familias muy amplias de elementos y principios variacionales. Aún así, como hemos visto en casos particulares ambas formulaciones son equivalentes, siendo por tanto los métodos de diferencias finitas expuestos un subconjunto de la familia más amplia de elementos finitos.

CONTACTOS

La consideración de la interacción entre superficies en un esquema explícito se realiza de manera sencilla a través del método de penalización. Los algoritmos de contacto-impacto deben cubrir dos funciones principales:

- Búsqueda y detección de contactos,
- Asignación de fuerzas de penalización.

Los algoritmos de búsqueda y detección incluyen las capacidades siguientes:

- Establecimiento de listas de caras externas susceptibles de contacto,
- Cálculo de normales y tolerancias,
- Detección y categorización de contactos (nodo-nodo, nodo-lado, nodo-cara),

- Búsqueda de nuevos contactos por deslizamiento,
- Búsqueda de nuevos contactos por impacto,
- Creación/Eliminación de caras externas en el caso de eliminación de elementos o apertura de superficies nuevas por erosión

La categorización de contactos es necesaria para proceder, según los casos, al suavizado de las normales y cálculo de tolerancias. La organización de los algoritmos necesarios entraña cierta complejidad, estando descritos con mayor detalle en [3].

Las fuerzas de interacción se calculan como una penalización a la penetración entre superficies, pudiéndose simular contactos lisos o bien con fricción mediante el esquema siguiente:

$$f_c^n = K^n p^n \quad (57)$$

$$f_c^t = \min(K^t p^t, \mu f_c^n) \quad (58)$$

donde K^n y K^t son las rigideces normal y tangencial respectivamente, p^n, p^t son las componentes de la penetración, y μ el coeficiente de rozamiento de Coulomb. (57) define la fuerza normal (lineal) en el contacto mientras que (58) expresa la tangencial, definiendo un círculo cinemático de deslizamiento de radio $f_c^n \mu / K^t$. Conviene notar también que la penetración $\mathbf{p}$ es un vector ligado a la malla Lagrangiana y como tal precisa de una actualización corrotacional según la ecuación (14).

La rigidez de los contactos debe ser lo suficientemente grande como para evitar una interpenetración excesiva, aunque no tanto que se penalize la estabilidad de la integración. Esto se puede conseguir de forma consistente tomando para el contacto una rigidez del orden de la de la primera capa de elementos en la superficie. Una manera sencilla de implementar esto es a través de la siguiente expresión

$$K = \frac{\kappa m^I}{\Delta t_c^2} \quad (59)$$

donde κ es una constante adimensional (valor recomendado 0.1), m^I es la masa del nodo *intruso*, y Δt_c el intervalo de tiempo crítico de integración. En efecto, la rigidez de un elemento triangular sometido a deformación uniaxial se puede expresar como

$$K^e = \frac{1}{4} \frac{\lambda + 2\mu}{\rho h^2} M^e \quad (60)$$

siendo λ, μ las constantes elásticas, h la dimensión del elemento (altura), y M^e la masa del mismo. Considerando la expresión (24) con $c_p^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, queda patente la relación entre (59) y (60).

Las fuerzas de interacción provenientes de los contactos se añaden al resto de las fuerzas exteriores en los nodos, resultando trivial su inclusión en el ciclo de cálculo explícito.

IMPLEMENTACION EN ORDENADORES PARALELOS Y VECTORIALES

Los esquemas de cálculo explícito ofrecen un gran potencial para su optimización en procesadores vectoriales y en las nuevas arquitecturas de cálculo en paralelo. Conviene recalcar que los modelos matemáticos, algoritmos de resolución, y por descontado las técnicas de programación están condicionadas por estas nuevas arquitecturas, al objeto de proporcionar métodos *eficaces* de solución, no tan sólo soluciones *correctas*. En este sentido es de esperar un cierto resurgimiento de esquemas explícitos y de técnicas iterativas como el gradiente conjugado preconditionado.

Al no resolverse ningún sistema de ecuaciones acopladas gran parte de las operaciones se pueden realizar a nivel de cada elemento, sin depender de los resultados en otros elementos, y con datos locales al elemento en cuestión. Esto incluye

- Interpolación de gradientes y deformaciones, (6)
- Evaluación e integración de leyes constitutivas, (9)-(14), (32)
- Cálculo de fuerzas internas, (22)
- Actualización de desplazamientos, (23)

Otro grupo más reducido de operaciones implican ensamblaje o compartición de datos globales y necesitan un tratamiento especial. En esta categoría se encuentran

- Ensamblaje de fuerzas internas a partir de contribuciones elementales, (51)
- Compartición de desplazamientos nodales después de su actualización global en (23)

Vectorización

La generación de código vectorial se realiza directamente por parte de los compiladores a partir del análisis de los bucles de cálculo ("do-loops"), comprobando que no existe recurrencia en los mismos. Es preciso por tanto hacer patente la estructura del algoritmo al compilador, para no inhibir la vectorización de manera innecesaria en los casos en que no exista recurrencia real en los algoritmos. Para esto se debe evitar la llamada a subrutinas dentro de un bucle vectorial, lo que puede exigir en ocasiones desarrollar el código de la subrutina dentro del bucle.

Por lo general no resulta posible ni tampoco deseable desarrollar todo el código de un elemento en un bucle único sin llamadas a subrutinas, salvo quizá en los casos más sencillos. Es posible conservar en gran medida la estructura modular de subrutinas mediante el empleo de *variables vectoriales*, lo que permite partir los bucles y realizarlos dentro de las subrutinas que utilizarán como argumentos dichas variables vectoriales cuya dimensión será la del vector de cálculo. Sí puede ser conveniente por el contrario en algunos casos desarrollar el código de las subrutinas dentro del bucle vectorial. Para ello la mayoría de los compiladores tienen la capacidad de realizar esta operación de forma automática ("inlining").

Las operaciones de ensamblaje y compartición de datos globales se realizan con algoritmos de recopilación/redistribución ("gather/scatter"), que se separan del resto de forma que los bucles vectoriales obtengan el máximo rendimiento.

Paralelización

Un primer tipo de paralelización sería la dirigida a ordenadores del tipo MISD (“Multiple Instruction, Shared Data”: instrucciones múltiples, datos compartidos). Este es el caso de sistemas con pocos procesadores de elevada potencia (Convex, Cray, etc.), siendo a menudo cada procesador de tipo vectorial. La paralelización en este caso se puede realizar mediante la subdivisión en grupos de elementos, de forma que cada procesador se encargue de uno de estos grupos, realizando dentro de ellos operaciones vectoriales. Simplemente se necesita agrupar los elementos de forma que los grupos resulten homogéneos en cuanto a material, tipo de elemento, y otras opciones de análisis.

El otro extremo está constituido por las arquitecturas masivamente paralelas SIMD (“Single Instruction, Multiple Data”: instrucción única, datos múltiples). Estos ordenadores constan de un elevado número de procesadores sencillos, cada uno de los cuales dispone de su propia memoria. Para las operaciones paralelizables es necesario prestar mayor atención a la sincronización entre las mismas ya que todos los procesadores deben ejecutar la misma instrucción. Por otra parte, las operaciones que implican compartir o ensamblar datos globales se realizan mediante *intercambio* en lugar de recopilación/redistribución. De esta forma se aprovecha mejor la gran eficacia de este tipo de máquinas (Connection Machine, Hypercube, ...) para las comunicaciones entre procesadores.

Hasta el momento las aplicaciones implementadas de manera eficaz en este tipo de ordenadores se limitan a códigos experimentales, excesivamente simplificados para ser de utilidad práctica. Los códigos de *producción* resultan difíciles de implementar debido a la diversidad de opciones que deben realizar, difícilmente paralelizables en arquitecturas SIMD. Sin embargo, es de esperar que se produzcan avances en un futuro próximo que conviertan el proceso paralelo en una opción práctica. Estos avances deben realizarse tanto en Software (compiladores; programación orientada a objetos) como en hardware (sistemas MIMD).

APLICACIONES

Se presentan aquí tres aplicaciones de la metodología descrita en diferencias finitas: propagación de ondas elásticas en un cono, extrusión 3D termo-mecánica, y perforación de blindajes.

Propagación de ondas elásticas en un cono

Experimentos realizados en barras de Hopkinson de perfil cónico¹⁵ evidencian que las ondas de compresión tienden a crear detrás del frente de la onda otra onda secundaria de tracción, que ocasiona que la barra salga despedida hacia atrás al desprenderse el “time-piece”.

Kolsky¹³ ha presentado una solución analítica para este problema. Esta se basa en suponer que sobre la base del cono actúa una carga explosiva que produce un pulso de

desplazamientos definido por

$$u = \frac{A}{r_b} \left(e^{-\frac{c_0 t}{B}} - 1 \right) \quad (61)$$

donde r_b es la distancia del vértice del cono a la base, t el tiempo, A la amplitud del pulso y B una longitud característica del mismo. La solución analítica para las tensiones longitudinales en el cono es

$$\sigma = -\frac{AE}{Br} e^{-\frac{c_0 t - (r_b - r)}{B}} + \frac{AE}{r^2} \left(1 - e^{-\frac{c_0 t - (r_b - r)}{B}} \right) \quad (62)$$

siendo r la distancia del punto en cuestión al vértice del cono y E el módulo elástico. La ecuación anterior es válida para los puntos en que $r > (r_b - c_0 t)$, siendo $\sigma = 0$ para valores menores de r . Se observan en la expresión (62) dos términos de signo opuesto, el primero siempre negativo (frente de compresión), y el segundo positivo (onda secundaria de tracción). Aunque la amplitud de ambos crece al disminuir r , este efecto es más pronunciado para la onda secundaria de tracción, por lo que suficientemente cerca del vértice predomina sobre la de compresión produciéndose una tracción neta. Cuando esto ocurre en un cono de material frágil (p. ej. vidrio) se produce la rotura, saliendo despedido un trozo del mismo antes de que la onda llegue al vértice.

El modelo realizado representa una barra troncocónica de radios en los extremos 6 mm y 60 mm, longitud 2 000 mm, a través de una malla de 4×150 cuadriláteros (Figura 6). El material empleado es aluminio ($E = 67$ GPa, $\rho = 2\,700$ kg/m³, $c_0 = 4\,981$ m/s). El pulso de entrada se definió como una historia de velocidades en la base, resultante de derivar la expresión (61), con $A = 1.3382 \times 10^{-4}$ m², $B = 0.3$ m. El análisis de este problema se realizó con el código PR2D³.

En la Fig. (6) se muestran los resultados numéricos en forma de perfiles de tensión longitudinal a lo largo de la barra en distintos instantes. Se puede comprobar su buen ajuste con la solución analítica (62), observando a partir de $t = 0.3$ ms una zona de tracción cuya intensidad va en aumento. El pico agudo del frente de onda predicho por la solución analítica se redondea notablemente en la solución numérica, como era de esperar. También se observa una cierta dispersión detrás del frente de ondas, lo que en parte se puede atribuir a la influencia de las ondas de Rayleigh de la superficie, no consideradas en la solución analítica.

Extrusión 3D termo-mecánica

Se presentan aquí los resultados de un análisis de extrusión termo-mecánico realizado para validar los resultados numéricos frente a experimentos. Se resumen aquí los datos y resultados principales, pudiendo encontrarse una información más detallada en [20]. El análisis se realizó con el código PR3D¹⁸.

La pieza extruida es un cilindro de aluminio de sección circular, comprimido entre un apoyo plano liso y un bloque superior rugoso. El bloque ocupa tan sólo una franja

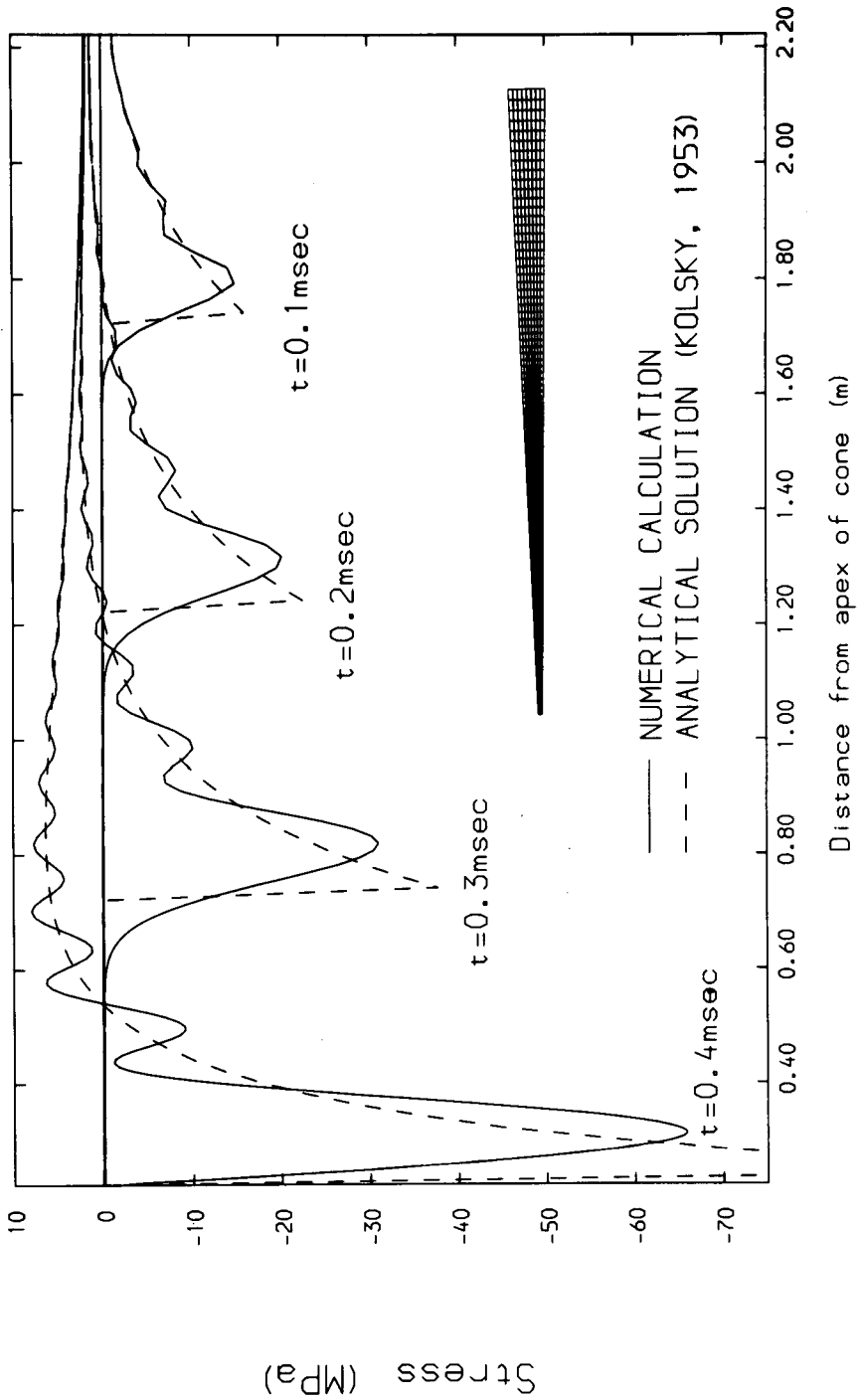


Figura 6. Transmisión de onda explosiva en un cono elástico. Perfiles de tensiones longitudinales en diversos instantes de tiempo.

de la sección del cilindro, teniendo además una abertura cuadrada en su centro por la que se extruye el aluminio (Figura 7). El material está representado por un modelo elastoplástico tipo Von Mises, con las siguientes características

$$E = 67 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\sigma = 195\epsilon^{0.2} \text{ Mpa} \quad (\text{ley de endurecimiento})$$

$$K = 174 \text{ W/(m}^\circ\text{K)}$$

$$c_p = 900 \text{ J/(kg}^\circ\text{K)}$$

$$\alpha = 23.4 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$$

La malla realizada cubre tan sólo 1/4 de la pieza, debido a las simetrías existentes. La discretización mixta se realizó con 6 tetraedros por hexaedro; en la figura se dibujan tan sólo estos últimos.

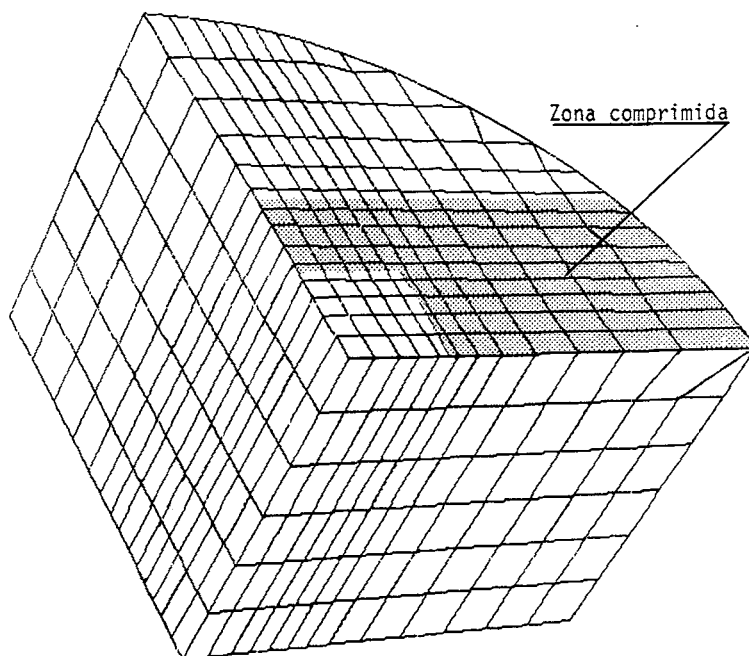


Figura 7. Extrusión de un bloque de Aluminio. Malla inicial, indicando la zona comprimida por un bloque rugoso con apertura central. Sólo se representa 1/4 de la malla por simetría.

El análisis contempla los efectos de acoplamiento térmico-mecánico, tanto de tensiones térmicas como de disipación de energía plástica en forma de calor. La condición de contorno en la parte inferior permite la separación del apoyo como de hecho tienen tendencia a hacer los bordes.

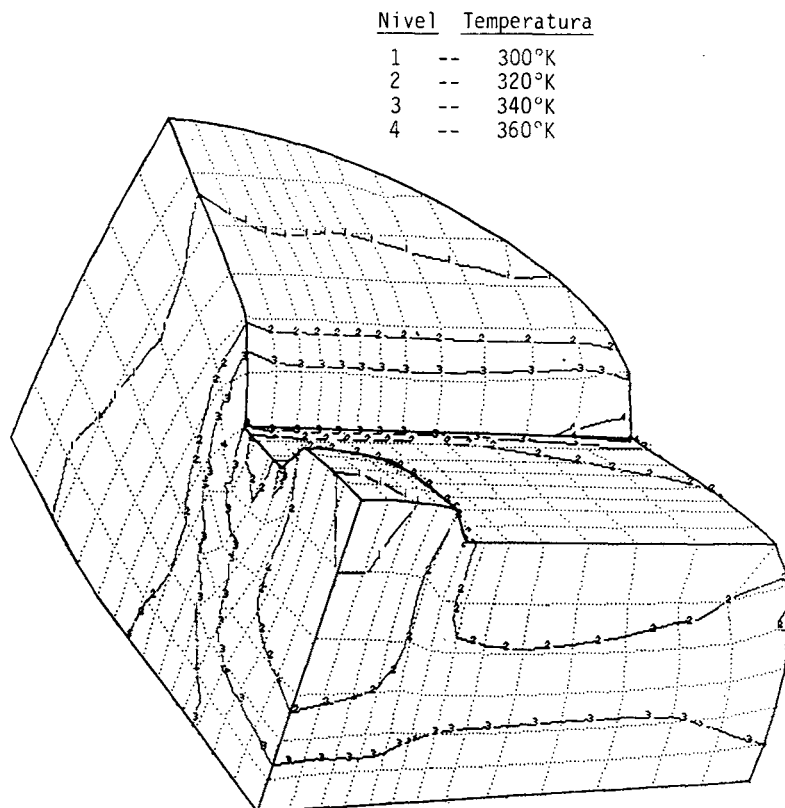


Figura 8. Extrusión de un bloque de Aluminio. Deformada final y contornos de igual temperatura.

La Figura 8 muestra la pieza deformada en su estado final, con las isolíneas de temperatura superpuestas. Se observa un aumento de temperatura de unos 65° , coincidiendo la zona de mayor temperatura con una banda en la que se concentran las deformaciones de corte. La Figura 9 muestra la comparación de resultados experimentales con los calculados, para la ley fuerza-desplazamiento, notándose que el ajuste es bastante aceptable. Se observa también que al final del proceso el modelo se comporta de manera algo más rígida que el experimento. Este efecto se vería disminuido con una malla más fina que capturase mejor los altos gradientes de deformación que se producen.

Perforación de blindajes

Los problemas de impacto son especialmente adecuados para resolver mediante técnicas explícitas, ya que son procesos fuertemente no lineales que se desarrollan en intervalos de tiempo pequeños^{5,6,19}. En particular, los problemas de balística terminal requieren a menudo capacidades específicas de los códigos para el tratamiento de ondas de choque inestables, procesos de rotura dinámica y perforación, etc.

El trabajo que se describe abajo fue realizado con el código ARMI^{26,27}. Este programa es un código explícito especialmente orientado para problemas de impacto a alta velocidad. Para tratar adecuadamente estos problemas es necesario representar adecuadamente las ondas de choque de elevadas presiones que se generan en dichos

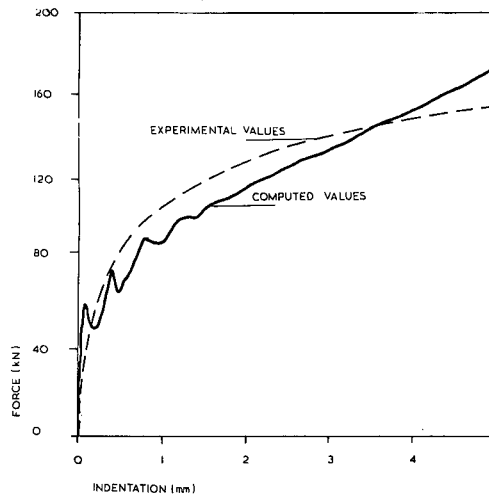


Figura 9. Extrusión de un bloque de Aluminio. Curvas numérica y experimental fuerza-desplazamiento.

impactos, lo que exige dos capacidades básicas:

- Ecuaciones de estado representativas de la relación presión-volumen-temperatura, válidas para presiones que superen el límite elástico de Hugoniot³⁵. A partir de este límite la relación elástica mediante el módulo de compresibilidad volumétrica deja de ser válida. ARMI incorpora los dos tipos fundamentales de ecuaciones de estado para sólidos, de Mie-Gruneisen y polinomial³⁵.
- Viscosidad artificial para evitar la propagación inestable de las ondas de choque. Para ello se emplea el método propuesto por Von Neumann y Richtmyer³², combinación de un término lineal y otro cuadrático.

Adicionalmente a la viscosidad para estabilización de las ondas de choque, en problemas de impacto a alta velocidad es necesario emplear una viscosidad *anti-hourglassing*, aunque los elementos empleados tengan el rango correcto y carezcan de modos de energía nula. Esto es debido a que la oposición a dichos modos viene limitada por el límite plástico de resistencia a tensiones cortantes. En problemas de alta velocidad en que se generan elevadas presiones esta resistencia llega a ser despreciable. En ARMI se adopta la formulación de Hancock¹⁰.

Otra capacidad necesaria para el estudio de blindajes incorporada en ARMI son los algoritmos de erosión. Los elementos en los que el material ha satisfecho la condición de rotura se eliminan de la malla, permitiendo la progresión del proyectil (que a su vez se puede erosionar en el proceso). Existen múltiples mecanismos de rotura dependiendo del material y estructura del blindaje, proyectil, velocidad de impacto, ángulo de impacto, etc. (rotura frágil a tracción o "spalling"; rotura dúctil por cizalladura; formación de bandas de corte adiabático; mantenimiento o no de la capacidad de resistencia a compresión una vez roto). Es necesario seleccionar el criterio de rotura de forma que represente adecuadamente el mecanismo físico correspondiente al problema. Asimismo la eliminación de elementos de la malla ha de realizarse de manera gradual, de lo contrario la eliminación súbita de energía puede ocasionar inestabilidades numéricas

(además de no resultar físicamente realista). En [5] se discuten en más detalle los criterios de fractura dinámica.

Se presentan a continuación los resultados de un caso de impacto de un proyectil de acero a 1000 m/s sobre un blindaje cerámico compuesto, formado por dos capas superpuestas de cerámica y aluminio Figura 10. La cerámica sirve, a través de su elevada resistencia a la compresión, para destruir el proyectil. La capa de aluminio proporciona la ductilidad suficiente al conjunto, ya que de lo contrario la cerámica desaparecería al producirse las primeras fisuras. Para una descripción más detallada del análisis consultar [26, 27].

El acero y el aluminio se representan por un modelo elastoplástico de tipo J_2 , con las siguientes propiedades.

<i>Acero</i>	<i>Aluminio</i>
$E_s = 202 \text{ GPa}$	$E_a = 67 \text{ GPa}$
$\nu_s = 0.30$	$\nu_a = 0.35$
$\rho_s = 7\,850 \text{ kg/m}^3$	$\rho_a = 2\,700 \text{ kg/m}^3$
$Y_s = 820 \text{ MPa}$	$Y_a = 195 \text{ MPa}$
$A_s = 168 \text{ GPa}$	$A_a = 73 \text{ GPa}$
$B_s = 20 \text{ GPa}$	$B_a = 172 \text{ GPa}$
$C_s = 0 \text{ GPa}$	$C_a = 40 \text{ GPa}$

siendo Y el límite de fluencia uniaxial, y A, B, C los parámetros de la ecuación de estado polinomial

$$p(\eta) = A(\eta - 1) + B(\eta - 1)^2 + C(\eta - 1)^3 \quad (63)$$

donde $\eta = \rho/\rho_0$.

La cerámica es una alúmina, representada con una ecuación de estado de Mie-Gruneisen

$$p = \rho_0 c_0^2 (\eta - 1) \frac{1 + (\eta - 1) - (\eta - 1)\Gamma_0/2}{[1 - (s_1 - 1)(\eta - 1)]^2} + \Gamma_0 u \rho_0 \eta \quad (64)$$

donde u es la energía interna específica por unidad de la masa, y

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 3\,910 \text{ kg/m}^3 \\ c_0 &= 8\,200 \text{ m/s} \\ s_1 &= 1.28 \\ \Gamma_0 &= 2.3 \end{aligned}$$

El comportamiento desviador de la alúmina está descrito por un modelo elastoplástico con fisuración distribuida, con las propiedades siguientes

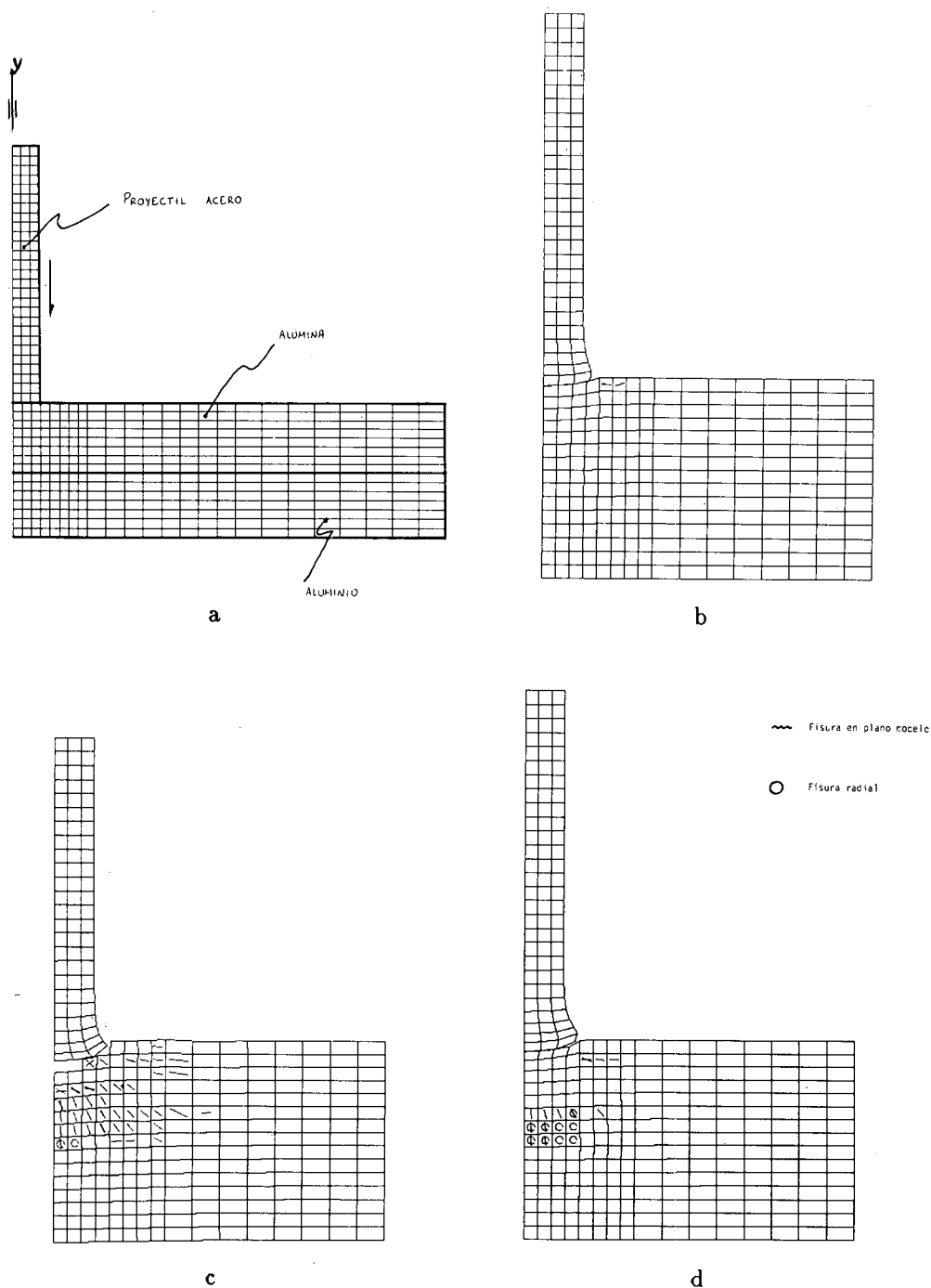


Figura 10. Perforación de un blindaje cerámica/aluminio por un proyectil cilíndrico de acero a 1000 m/s. (sólo se representa la sección a la derecha del eje Oy de simetría axial). a) Malla inicial ($t = 0$) b) $t = 2 \mu s$ c) $t = 3 \mu s$ d) $t = 8 \mu s$

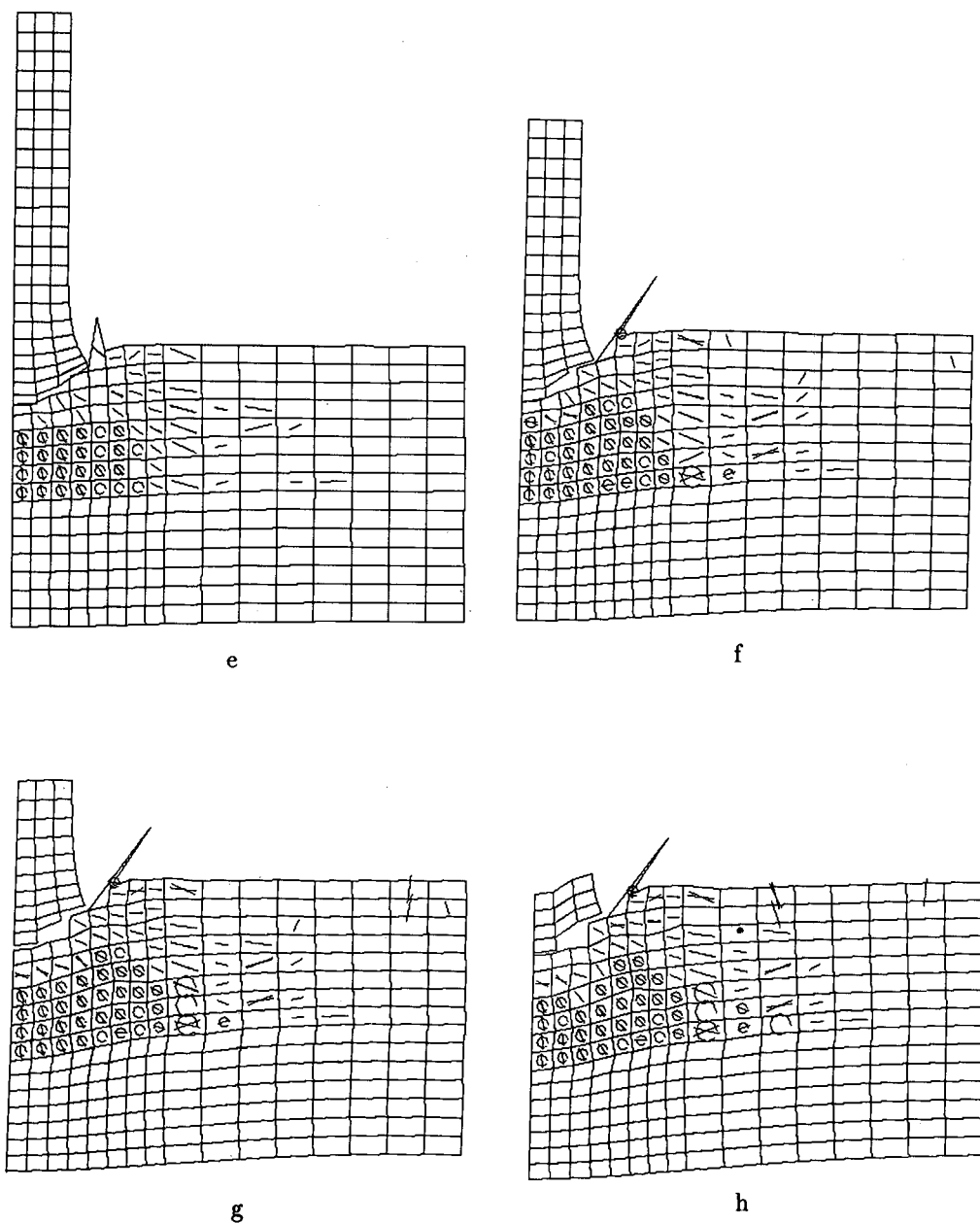


Figura 10. (Cont.) Perforación de un blindaje cerámica/aluminio por un proyectil cilíndrico de acero a 1000 m/s. (sólo se representa la sección a la derecha del eje Oy de simetría axial). e) $t = 15 \mu s$ f) $t = 25 \mu s$ g) $t = 35 \mu s$ h) $t = 45 \mu s$

$$E = 221 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.22$$

$$Y = 4300 \text{ MPa}$$

$$f_t = 155 \text{ MPa} \quad (\text{tensión de fisuración a tracción})$$

Se considera que se produce la rotura definitiva para los siguientes valores de las deformaciones plásticas:

$$\text{Alúmina} \quad \varepsilon_u = 0.10$$

$$\text{Aluminio} \quad \varepsilon_u = 0.60$$

$$\text{Acero} \quad \varepsilon_u = 0.60$$

A partir de la rotura se considera que el material mantiene la resistencia a compresión, siendo nula su resistencia a tracción.

En la Figura 10 se muestran los resultados del análisis en distintos instantes de tiempo. Se observa cómo, a pesar de sufrir la cerámica una fisuración extensiva, mantiene una resistencia elevada a la compresión, al mantenerse confinada entre zonas laterales no fisuradas y el respaldo de aluminio. De esta forma se logra erosionar por completo al proyectil.

CONCLUSIONES

Se ha descrito un método de diferencias finitas con integración explícita en el tiempo, para análisis dinámico de problemas termomecánicos no lineales. La formulación se basa en el planteamiento directo de las ecuaciones del balance de cantidad de movimiento y energía, que tienen una expresión más débil que las ecuaciones de campo. Aunque la aproximación se ha desarrollado a través de diferencias finitas, se muestra su equivalencia completa con los métodos de elementos finitos explícitos, de los que puede considerarse un caso particular.

El método propuesto, debido a la sencillez y claridad de su formulación es aplicable a un rango amplio de problemas complejos, desde procesos lentos de extrusión con fuerte acoplamiento térmico-mecánico, hasta problemas de impacto y perforación de blindajes a alta velocidad.

La emergencia de las nuevas arquitecturas de proceso en paralelo realza el interés de este tipo de métodos, cuyos algoritmos de cálculo se adecúan especialmente al cálculo paralelo.

REFERENCIAS

1. T. Belytschko. "Non-Linear Finite Element Analysis." *Short Course, Course notes*, Zace Services Ltd., Lausanne, Suiza (1991).
2. R. Courant, K. Friedrichs y H. Lewy. "On the Partial Differential Equations of Mathematical Physics". *Math. Ann.* 100, pp. 32-74 (1928).

3. J.M. Goicolea. "Numerical Modelling in Large Strain Plasticity with Application to Tube Collapse Analysis". Ph.D. Thesis, U. de Londres (1985).
4. J.M. Goicolea y J. Martí. "Modelos numéricos no Lineales Mediante Integración Explícita". *Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería (II)*, Vol. 3., pp. A201-A211. J. Oliver y otros (editores), Barcelona (1986).
5. J.M. Goicolea, J. Martí, R. Cortés y F. Beltrán. "Modelización de Problemas de Impacto con Fractura". *Métodos Numéricos Aplicados a la Mecánica de la Fractura*, pp. 137-156. J. Oliver y otros (editores), CIMNE, Barcelona (1988).
6. J.M. Goicolea, J. Martí, I. Attalla y C. Gratieux. "Modelling of Reinforced Concrete Containments During External Impact". *Impact: Effects of Fast Transient Loadings*, pp. 333-342. W. Amman y otros (editores), Balkema, Rotterdam (1988).
7. G.L. Goudreau y J.O. Hallquist. "Recent Developments in Large-Scale Finite Element Lagrangian Hydrocode Technology". *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* Vol. 33, pp. 725-757 (1982).
8. L.J. Hageman y J.M. Walsh. "HELP, a Multi-material Eulerian Program for Compressible Fluid and Elastic-Plastic Flow in Two Dimensions and Time". System, Science and Software, La Jolla (USA), Report 35R-350, (1971).
9. J. Hallquist. Theoretical Manual for DYNA3D. Lawrence Livermore Natl. Laboratory, U. de California, UCID-19401 (1983).
10. S.L. Hancock. "Finite Difference Equations for PISCES-2DELK." Physics International Company Report TCAM-76-2 (1976).
11. T.J.R. Hughes y R.M. Ferencz. "Implicit Solution of Large-Scale Contact and Impact Problems Employing an EBE Preconditioned Iterative Solver". *Impact: Effects of Fast Transient Loadings*, pp. 165-181. W. Amman y otros (editores), Balkema, Rotterdam (1988).
12. S.W. Key, Z.E. Beisinger y R.D. Krieg. "HONDO II - A Finite Element Code for the Large Deformation Response of Axisymmetric Solids". Sandia National Laboratories, Albuquerque (USA), Report 78-0422, (1978).
13. H. Kolsky. *Stress Waves in Solids*. Clarendon Press, Oxford (1953).
14. R. Kunar y N. Minowa. "A Comparison Between Finite Element and Finite Difference Explicit Formulations for Triangular and Quadrilateral Plane Strain Elements". *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 5(2), pp. 217-224 (1981).
15. J.W. Landon y H. Quinney. "Experiments with the Hopkinson Pressure Bar". *Proc. Royal Soc. A103*, p. 622, London (1923).
16. G. Maenchen y S. Sack. "The TENSOR Code". *Methods of Computational Physics* Vol. 3, pp. 181-210. B. Alder et al. (editores), Academic Press, New York (1964).
17. J. Martí y P.A. Cundall. "Mixed Discretization Procedure for Accurate Modelling of Plastic Collapse". *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 6, pp. 129-139 (1982).
18. J. Martí y J.M. Goicolea. "PR3D (Manuales Teórico y de Usuario)". PRINCIPIA S.A., Madrid (1986).
19. J. Martí y J. Goicolea. "Impactos y Grandes Deformaciones". *Revista de la Sociedad Nuclear Española*, nº 68, pp. 23-27, (1988).
20. J. Martí, J.M. Goicolea, G.S. Kalsi y G.E. Macey. "Transient Thermomechanical Analysis with Explicit Schemes". *Numerical Methods for Transient and Coupled Problems*, pp. 371-381. R.W. Lewis et al. (editores), Pineridge press, Swansea (1984).
21. J.C. Nagtegaal, D.M. Parks y J.R. Rice. "On Numerically Accurate Finite Element Solutions in the Fully Plastic Range". *Comp. Meth. Appl. Mech. & Engng.* Vol. 4, pp. 153-177 (1974).

22. J.C. Nagtegaal. "On the Implementation of Inelastic Constitutive Equations with Special Reference to Large Deformation Problems". *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **33**, pp. 469-484 (1982).
23. W.F. Noh. "CEL: A Time-Dependent, Two-Space-Dimensional, Coupled Eulerian-Lagrange Code". *Methods of Computational Physics* Vol. **3**, pp. 117-179. B. Alder et al. (editores), Academic Press, New York (1964).
24. M. Ortiz, P.M. Pinsky y R.L. Taylor. "Operator Split Methods for the Numerical Solution of the Elastoplastic Dynamic Problem". *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **39**, pp. 133-157 (1983).
25. M. Ortiz y E.P. Popov. "Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations". *Int. J. Num. Meth. Engr.* Vol. **31**, p. 1561 (1985).
26. PRINCIPIA S.A. "ARMI. Programa para el Análisis de la Resistencia Mecánica al Impacto." *Informe 52/87*, Madrid (1987).
27. PRINCIPIA S.A. "Modelización de Fenómenos de Balística Terminal." *Informe 61/87*, Madrid (1987).
28. D. Richtmyer y K.W. Morton. "Difference Methods for Initial Value Problems." Interscience, New York (1967).
29. J.C. Simo y M. Ortiz. "A Unified approach to Finite Deformation Elastoplastic Analysis Based on the Use of Hyperelastic Constitutive Equations". *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, (1982).
30. L.A. de Souza y N.F.F. Ebecken. "Analise Estrutural Nao Linear pelo Metodo dos Elementos Finitos utilizando-se Relaxação Viscosa Acelerada". *Met. Num. Calc. Dis. Ing.*, Vol. **8**, 1, pp. 11-23 (1992).
31. P. Underwood. "Dynamic Relaxation". *Computational Methods for Transient Analysis*, pp. 245-266. T. Belytschko y T. Hughes (editores), North-Holland, Amsterdam (1983).
32. J. Von Neumann y R. Richtmyer. "A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks" *J. Appl. Physics* Vol. **21-3**, pp. 232-237 (1950).
33. M.L. Wilkins. "Calculation of Elastic-Plastic Flow". *Methods of Computational Physics* Vol. **3**, pp. 211-263. B. Alder et al. (editores) Academic Press, New York (1964).
34. M.L. Wilkins. "A Method for Computer Simulation of Problems in Solid Mechanics and Gas Dynamics in Three Dimensions and Time". Lawrence Livermore Laboratory, U. of California (USA) Report UCRL-7322, (1975).
35. M.L. Wilkins. "Calculation of Elastic-Plastic Flow". Lawrence Livermore National Laboratory, U. of California Report UCRL-7322 (1982).