Rev. Int. Mét. Num. Cálc. Dis. Ing.
Vol. **18**, **1**, 59–77 (2002)

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

Pandeo elástico y diseño de estructuras espaciales

Antonio Agüero y José Ramón Atienza
Departamento de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras
ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Valencia
Campus de Vera s/n, 46020 Valencia, España
Tel.: 34-96-387 76 75, Fax: 34-96-387 76 75
e-mail: anagra@mes.upv.es
e-mail: jatienza@mes.upv.es

Resumen

El problema del pandeo elástico en estructuras espaciales con secciones doblemente simétricas bajo la acción de unos esfuerzos primarios de axil y flexión según el eje fuerte es resuelto con el programa CRIT3D. Para ello se calcula el efecto de los esfuerzos primarios sobre los términos de la matriz de rigidez asociados a la flexo-torsión, planteando el equilibrio en una posición ligeramente deformada. Con este programa se evalúa la precisión de las cargas críticas obtenidas al emplear las fórmulas indicadas en el Eurocódigo 3. Por último se propone un método de diseno en el que los esfuerzos de cálculo se obtienen planteando el equilibrio en una posición ligeramente deformada de un sistema con imperfecciones geométricas.

ELASTIC BUCKLING AND DESIGN OF SPACE FRAMES

Summary

The problem of elastic buckling of space frames with bi-symmetrical cross section taking into account the effect of axial forces and bending moment about the major principal axis, is solved using the computer program CRIT3D. First of all we calculate the effect of the primary efforts on the coefficients of the stiffness matrix due to the flexural-torsional effect, by using the equilibrium equations in a slightly deformed position. With this program we can evaluate how accurate are the EC-3 formulas to estimate the critical loads. At last we suggest a method to obtain the design efforts using the equilibrium equations in a slightly deformed position considering the effect of geometrical imperfections.

INTRODUCCIÓN

La gran utilización de vigas con secciones abiertas de pared delgada en la construcción metálica ha llevado al estudio de su comportamiento estructural, que resulta ser muy complejo por ser las vigas susceptibles de sufrir diversas formas de inestabilidad. El modo de inestabilidad que se presente en cada caso viene condicionado por el tipo de carga y las condiciones de apoyo. La Figura 1a muestra la inestabilidad por flexión sobre el eje fuerte o débil, la Figura 1b la inestabilidad por torsión y la Figura 1c la inestabilidad por flexo-torsión.

Con objeto de verificar el estado límite último de una estructura se tiene que comprobar que resiste las posibles combinaciones de estados de carga a las que puede estar sometida. Para realizar el cálculo con exactitud hay que hacer un análisis no lineal geométrico y mecánico, teniendo en cuenta que cada viga real tiene unas tensiones residuales e imperfecciones tanto geométricas como del material. Este tipo de problemas no se puede abordar

 ISSN: 0213–1315 Recibido: Febrero 2001

de forma analítica por lo que se hace necesario recurrir a otros métodos, como puede ser el de los elementos finitos. Como el método anterior resulta excesivamente laborioso, las normas actuales de diseño proponen diseñar con los esfuerzos obtenidos de un cálculo lineal amplificándolos por unos coeficientes mediante unas fórmulas con base analítica y experimental. Para determinar estos coeficientes se utiliza la esbeltez de la pieza, obteniéndose la misma para cada barra en función la carga crítica del sistema perfecto. Para la obtención de estos coeficientes se han contrastado las cargas críticas con los ensayos realizados sobre piezas reales concluyendo que la carga última es inferior a la del sistema perfecto equivalente. Esto se aprecia al introducir en un sistema perfecto una imperfección geométrica, lo que transforma los puntos de bifurcación en partes límite (Figura 2).

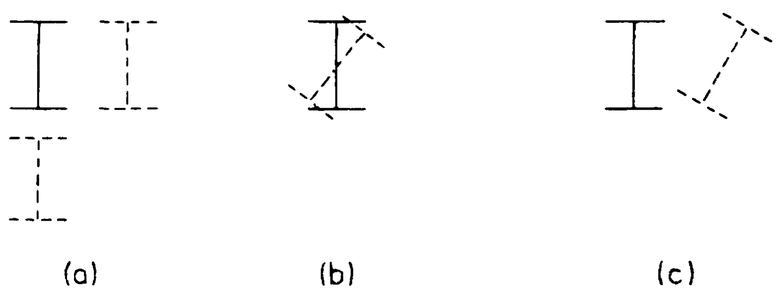


Figura 1. Modos de inestabilidad

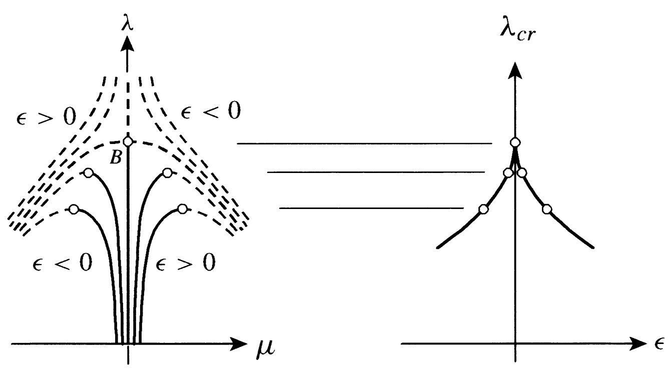


Figura 2. Efectos de la magnitud de imperfección $\{\in\}$ sobre la carga crítica $\{\lambda_{\mathrm{cr}}\}$ en un punto de bifurcación inestable simétrico

Según el EC-3 la esbeltez de una pieza sometida a axil es $\lambda = \sqrt{\frac{A\sigma_y}{N_{\mathrm{cr}}}}$ y sometida a flexión es $\lambda = \sqrt{\frac{W\sigma_y}{M_{\mathrm{cr}}}}$. A su vez, el EC-3 propone formas de estimar las cargas críticas tanto para esfuerzos de axil como de flexión. En el caso de vigas biapoyadas doblemente simétricas sometidas a flexión uniforme, con el giro de torsión impedido y alabeo libre en los extremos, el momento crítico viene dado por (1). Para distintas condiciones de vinculación $\{k, kw\}$ y distintos tipos de carga $\{C_1\}$ se emplea la ecuación (2).

$$M_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}\sqrt{\left(\frac{I_w}{I_z} + \frac{L^2 GI_t}{\pi^2 EI_z}\right)} \tag{1}$$

$$M_{\rm cr} = C_1 \frac{\pi^2 E I_z}{(kL)^2} \sqrt{\left(\left(\frac{k}{kw} \right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(kL)^2 G I_t}{\pi^2 E I_z} \right)} \tag{2}$$

La ecuación (2) es la solución exacta en los casos en los que $k = kw$ y $C_1 = 1$, para el resto de los casos es una aproximación al momento crítico. Más adelante se presenta una metodología alternativa de diseno mediante la cual los esfuerzos de cálculo se obtienen considerando que tratamos con un sistema imperfecto y realizamos el análisis en una geometría ligeramente deformada. Esta última hipótesis es correcta, ya que en el estado límite de servicio imponemos que los movimientos han de ser pequenos.

Con objeto de facilitar la obtención de cargas críticas para estructuras complejas se ha desarrollado un programa de ordenador Crit3d que puede llevar a cabo el análisis de estructuras espaciales con esfuerzos primarios de flexión según eje fuerte y axil. Para ello se tiene que obtener previamente la matriz de rigidez en una posición ligeramente deformada, que se deduce de las correspondientes ecuaciones de equilibrio y sus condiciones de contorno.

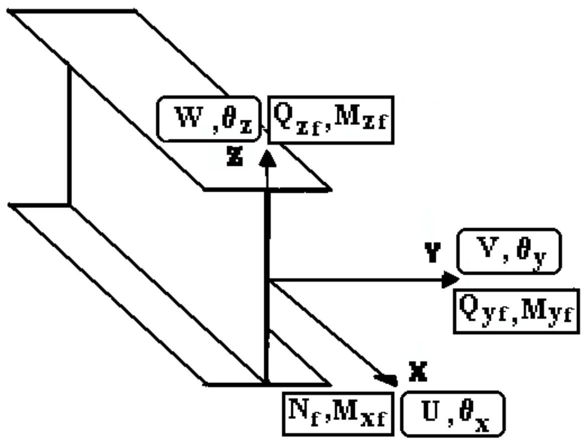


Figura 3. Movimientos y esfuerzos en ejes locales

Las ecuaciones de equilibrio en una posición ligeramente deformada para una viga de sección doblemente simétrica inicialmente en equilibrio con unos desplazamientos $\{d\}$ bajo la acción de un axil y un momento de eje y. Se obtienen planteando el equilibrio en una posición perturbada con unos desplazamientos $\delta d = \{\delta u, \delta v, \delta w, \delta\theta_x\}$ del centro de esfuerzos cortantes:[7]

A) Asociado al axil: $EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. Tendremos dos grados de libertad $\{ud, uf\}$.

B) Efecto del axil sobre la flexión primaria: $El_y\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$. Esta influencia es tenida en cuenta a través de las funciones de estabilidad.[4] Tendremos cuatro grados de libertad $\{wd, \theta_y d, wf, \theta_y f\}$.

C) El efecto del axil y la flexión primaria sobre la flexión débil y torsión se puede obtener mediante unas funciones de estabilidad (Apéndice IV) si se desprecia la rigidez al alabeo. Si no se desprecia, la matriz de rigidez explícita no se puede expresar de forma tan compacta y es necesario recurrir a un programa de cálculo simbólico para su obtención (ver siguiente apartado). Tendremos ocho grados de libertad $\{vd, \theta_x d, \theta_z d, \varphi d, vf, \theta_x f, \theta_z f, \varphi f\}$. Siendo φ el alabeo.

CÁLCULO DE MATRIZ DE RIGIDEZ PARA LA FLEXIÓN LATERAL CON ESFUERZOS PRIMARIOS DE {AXIL Y FLEXIÓN}

Las ecuaciones de equilibrio para la flexión lateral, que se obtienen del desarrollo del apartado anterior, son

$$EI_z\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+M_y\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}+P\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0 \tag{3}$$

$$\left(-GI_t+Pr_o^2\right)\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}+M_y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+EI_a\frac{\partial^4\theta_x}{\partial x^4}=0 \tag{4}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas obtenemos los desplazamientos v y θ_x en función de ocho constantes indeterminadas $\{a,b,c,d,k,l,m,n\}$.

$$v=ae^{\mu x}+be^{-\mu x}+ce^{\beta x}+de^{-\beta x}+k+lx \tag{5}$$

$$\theta_x=\frac{(-EI_z\mu^2-P)}{M_y}(ae^{\mu x}+be^{-\mu x})+\frac{(-EI_z\beta^2-P)}{M_y}(ce^{\beta x}+de^{-\beta x})+m+nx \tag{6}$$

siendo $\{\mu,-\mu,\beta,-\beta\}$ las soluciones de la ecuación característica de (3) y (4). Ecuación polinómica de cuarto grado en α

$$(E^2I_zI_a)\alpha^4+(EI_zPr_o^2-EI_zGI_t+PEI_a)\alpha^2+(P^2r_o^2-M_y^2-PGI_t)=0 \tag{7}$$

De las ecuaciones (5), (6) y (7) obtenemos los valores de los desplazamientos v, θ_x y sus derivadas respectivas θ_z y φ en el extremo dorsal $x=0$ y en el frontal $x=L$.

Los esfuerzos asociados a estos desplazamientos son:

$$M_z=EI_z\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{8}$$

$$M_x=(GI_t-Pro^2)\frac{\partial\theta_x}{\partial x}-M_y\frac{\partial v}{\partial x}-EI_a\frac{\partial^3\theta_x}{\partial x^3} \tag{9}$$

$$Bi=EI_a\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2} \tag{10}$$

$$Q_y=-EI_z\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}-M_y\frac{\partial\theta_x}{\partial x}-P\frac{\partial v}{\partial x} \tag{11}$$

Sustituyendo en (8) a (11) los desplazamientos se obtienen los valores de los momentos $\{M_z,M_x\}$, cortante $\{Q_y\}$ y bimomento $\{Bi\}$ en el extremo frontal $x=L$ y en el extremo dorsal $x=0$, tras cambiar de signo a los del dorsal. Se obtienen tanto los esfuerzos como los movimientos en función de las ocho constantes indeterminadas $\{a,b,c,d,k,l,m,n\}$.

$$\begin{Bmatrix} vd\\ \theta_x d\\ \theta_z d\\ \varphi d\\ vf\\ \theta_x f\\ \theta_z f\\ \varphi f\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \text{\_Matriz\_1} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}\bullet\begin{Bmatrix} a\\ b\\ c\\ d\\ k\\ l\\ m\\ n\end{Bmatrix}\qquad\begin{Bmatrix} Q_y d\\ M_x d\\ M_z d\\ Bid\\ Q_y f\\ M_x f\\ M_z f\\ Bif\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \text{\_Matriz\_2} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}\bullet\begin{Bmatrix} a\\ b\\ c\\ d\\ k\\ l\\ m\\ n\end{Bmatrix}$$

Para obtener la matriz de rigidez no hay más que expresar las constantes indeterminadas $\{a, b, c, d, k, l, m, n\}$ en función de los grados de libertad $\{vd, \theta_x d, \theta_z d, \varphi d, vf, \theta_x f, \theta_z f, \varphi f\}$$K$= (Matriz_2)* (Matriz_1)$^{-1}$. Esta se obtiene de forma explícita con la ayuda de algún programa de cálculo simbólico (MapleV) (ver Apéndice II).

En el caso de despreciar la rigidez al alabeo la expresión resultante para la matriz de rigidez es más simplificada y se puede ver en el Apéndice IV.

PROCESO DE CÁLCULO DE CARGAS CRÍTICAS

Esquema general

La estructura se subdivide en elementos lineales de dos nodos. El criterio de subdivisión vendrá condicionado por la forma geométrica y tipo de carga. La búsqueda de la carga crítica supone encontrar la magnitud de los esfuerzos primarios para los que existe más de una solución que satisfaga las condiciones de equilibrio. Esto supone que la variación segunda del potencial deja de ser definida positiva, lo que se representa en la Figura 4 para un sistema de 2 GDL y es equivalente a encontrar la carga para la cual la matriz de rigidez es singular presentando un autovalor nulo. Tras un análisis lineal en el que se obtienen los esfuerzos primarios de axil y flexión, se generan las matrices de rigidez de cada elemento teniendo en cuenta las desconexiones existentes. Estas se pasan de ejes locales a los globales, se ensamblan formando la matriz de rigidez global y se busca para qué magnitud de los esfuerzos la matriz de rigidez pasa a tener un autovalor nulo.

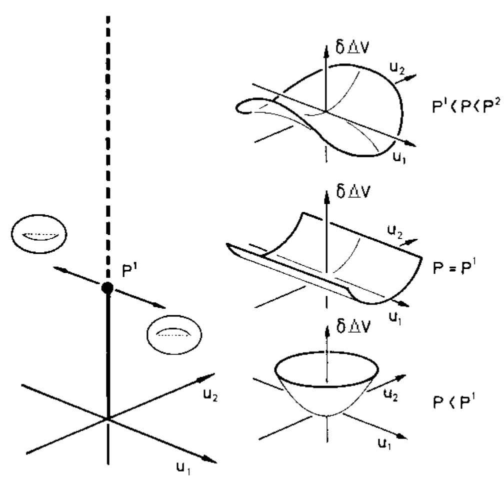


Figura 4. Representación de la variación del incremento de potencial para un sistema de 2GDL

Análisis lineal

Se realiza un cálculo lineal de la estructura obteniendo de este los esfuerzos primarios de axil y flexión según el eje fuerte.

Matriz de rigidez ejes locales

Teniendo en cuenta los esfuerzos primarios escalados por un factor λ se calcula la matriz de rigidez en una geometría ligeramente deformada.

Paso de ejes locales a ejes globales

En el Crit3d se ha considerado para la obtención de los ejes locales que el x coincide con la directriz de la barra y el eje y local está contenido en el plano eje $x - y$, permitiendo un giro gama sobre el eje x para admitir distintas orientaciones del eje fuerte. El cálculo de la matriz de rotación esta en el Apéndice 2.

En cuanto al paso de ejes locales a globales cabe hacer mención a la variable alabeo. Para el caso de que en el nudo se encuentren dos barras de igual sección y alineadas habrá continuidad de alabeos. En el resto de los casos dependerá de cómo está pensado ejecutar las uniones, pudiendo existir varios grados de libertad de alabeo por nudo.

Cálculo de autovalores

Se busca el valor de λ para el cual se produce el primer autovalor nulo, estando por tanto en un punto de bifurcación. Para ello, en caso de no estar los suficientemente próximos al autovalor nulo, volvemos a empezar modificando coherentemente el factor λ.

El "modo de pandeo" asociado a este autovalor será su autovector.

EJEMPLOS

En los ejemplos 1 y 2 se analiza una variación lineal del momento $M_y = M - (M - B * M)/L * x$ y se estudia lo que ocurre para $B = 1$ (momento uniforme), $B = 0,5$, $B = 0$ y $B = -0,5$.

Ejemplo 1

En este caso las condiciones de vinculación son $\{vd = 0,\ \theta_x d = 0,\ vf = 0,\ \theta_x f = 0\}$. $\{M_z d = 0,\ Bid = 0,\ M_z f = 0,\ Bif = 0\}$ $\{EC3 \rightarrow k = kw = 1\}$ (Figura 5 y Figura 13).

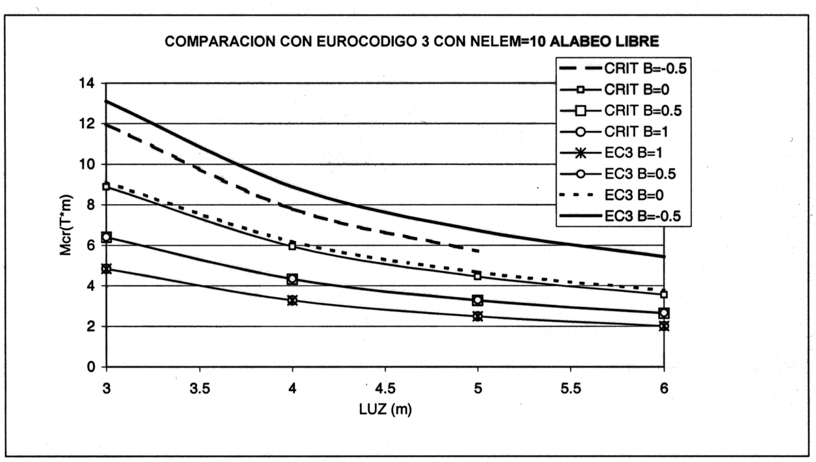


Figura 5. $\{vd = 0,\ \theta_x d = 0,\ vf = 0,\ \theta_x f = 0\}$. $\{M_z d = 0,\ Bid = 0,\ M_z f = 0,\ Bif = 0\}$

Si $B = 1$, se superponen los resultados obtenidos con el programa y el Eurocódigo y ambos dan la solución analítica. Si $B = 0,5$ y 0, las soluciones no son idénticas, pero se parecen. Si $B = -0,5$, existe una diferencia apreciable entre ambos resultados, los resultados del programa pueden ser erróneos porque se requiere aumentar la discretización. Al aumentar el número de elementos (Figura 6) vemos, que la solución obtenida sigue quedando por debajo de la del Eurocódigo, por lo que estamos del lado de la inseguridad utilizando el Eurocódigo

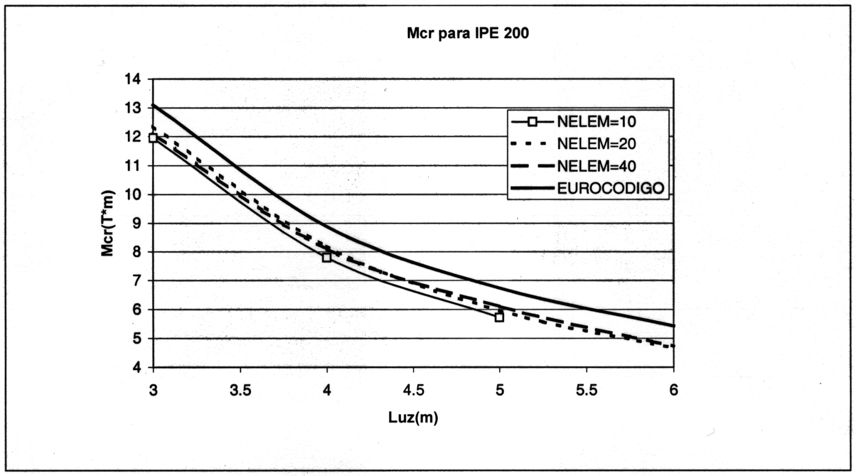


Figura 6. $\{vd = 0,\ \theta_x d = 0,\ \varphi d = 0,\ vf = 0,\ \theta_x f = 0,\ \varphi f = 0\}$. $\{M_z d = 0,\ M_z f = 0\}$

En la Figura 7 se puede ver la configuración de pandeo para el caso $B = -0,5$.

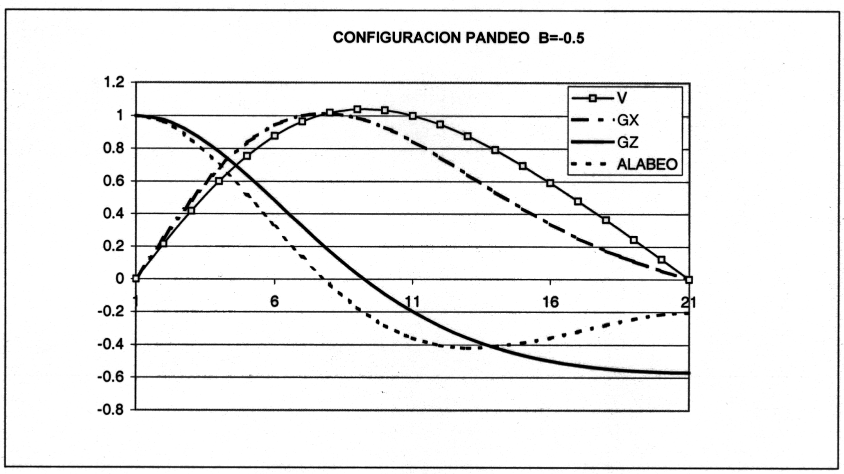


Figura 7. $\{vd = 0,\ \theta_x d = 0,\ vf = 0,\ \theta_x f = 0\}$. $\{M_z d = 0, Bid = 0,\ M_z f = 0,\ Bif = 0\}$

Ejemplo 2

En este caso las condiciones de vinculación son $\{vd = 0,\ \theta_x d = 0,\ \varphi d = 0,\ vf = 0,\ \theta_x f = 0,\ \varphi f = 0\}$. $\{M_z d = 0,\ M_z f = 0\}$. $\{EC3 \rightarrow k = 1,\ kw = 0,5\}$ (Figura 8 y Figura 14).

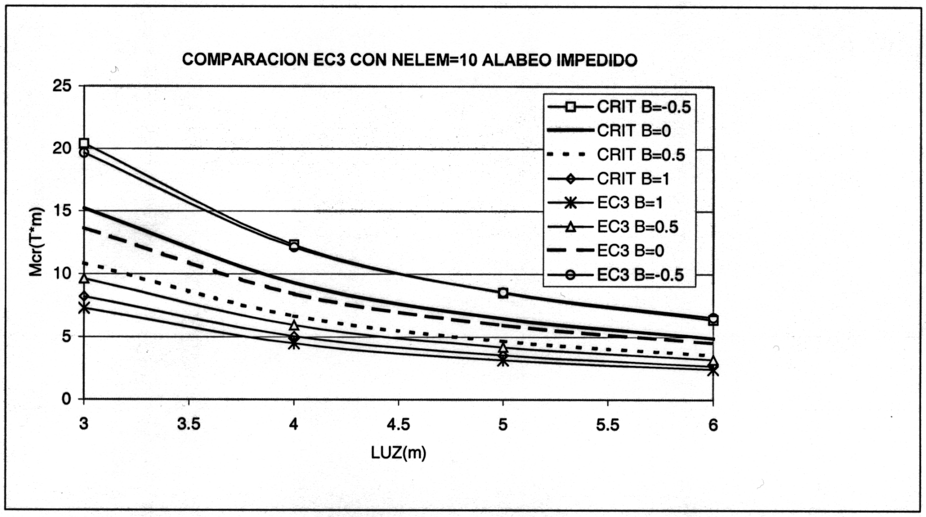


Figura 8. $\{vd = 0,\ \theta_x d = 0,\ \varphi d = 0,\ vf = 0,\ \theta_x f = 0,\ \varphi f = 0\}$. $\{M_z d = 0,\ M_z f = 0\}$

Se aprecia que para el caso $B = 1$, momento uniforme la solución del Eurocódigo es inferior a la exacta dada por el programa. Esto es debido a que $k \neq kw$, quedando en este caso el Eurocódigo del lado de la seguridad.

En la Figura 9 se puede ver la configuración de pandeo para el caso $B = -0,5$.

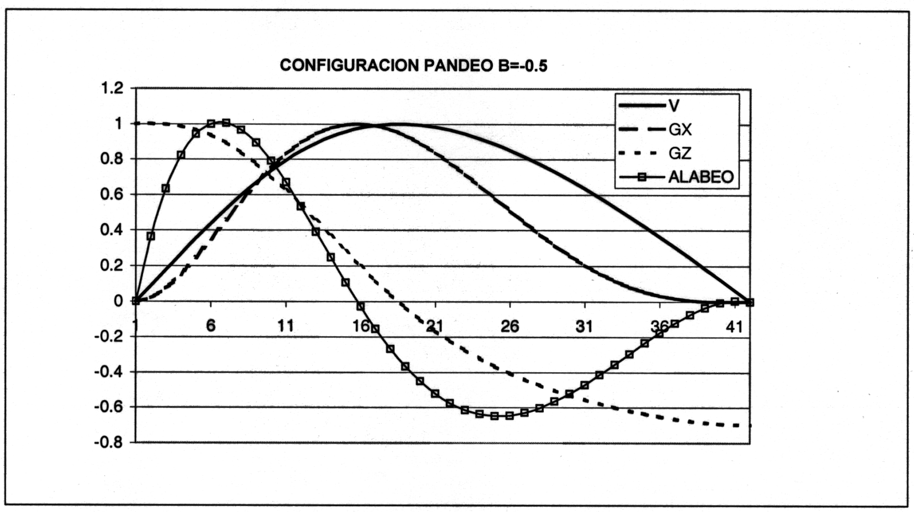


Figura 9. $\{vd = 0,\ \theta_x d = 0,\ \varphi d = 0,\ vf = 0,\ \theta_x f = 0,\ \varphi f = 0\}$. $\{M_z d = 0,\ M_z f = 0\}$

Ejemplo 3

En este caso las condiciones de vinculación son $\{vd = 0,\ \theta_x d = 0,\ \theta_z d = 0,\ vf = 0,\ \theta_x f = 0,\ \theta_z f = 0\}$. $\{Bid = 0,\ Bif = 0\}$. $\{EC3 \rightarrow k = 0,5;\ kw = 1\}$. Se utiliza un único elemento, ya que el momento es constante y por tanto obtenemos la solución analítica. Se aprecia en las Figuras 10 y 15 el error cometido por el Eurocódigo, ya que $k \neq kw$, la solución del Eurocódigo queda del lado de la seguridad.

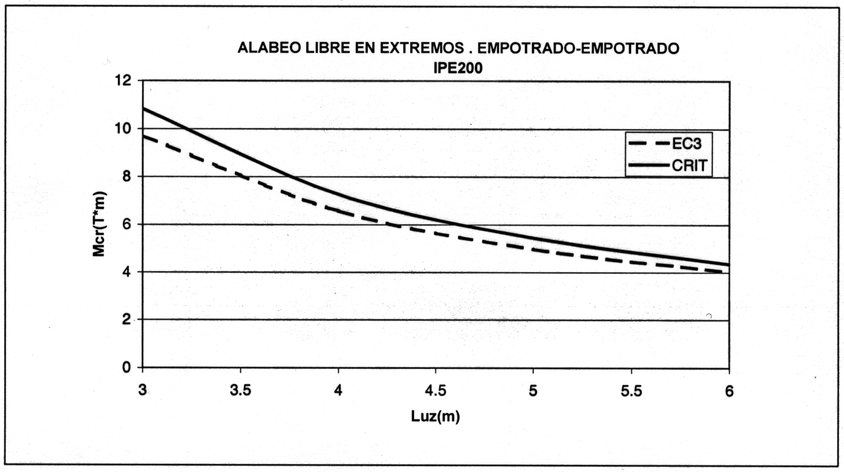


Figura 10. $\{vd = 0,\ \theta_x d = 0,\ \theta_z d = 0,\ vf = 0,\ \theta_x f = 0,\ \theta_z f = 0\}$. $\{Bid = 0,\ Bif = 0\}$

Ejemplo 4

Se estudia la configuración de pandeo para una estructura formada por dos arcos empotrados en los extremos y sometidos a un axil uniforme; luz 10 m, flecha vertical 5 m, separación entre apoyos 5 m estando formados los mismos por: Caso 1 Perfil abierto (IPN-300) $N_{\rm cr} = 615KN$ (Figura 11); Caso 2 Perfil cerrado (#200 $\times$ 150) $N_{\rm cr} = 2059KN$ (Figura 12). Cálculos realizados con el CRIT 3D.

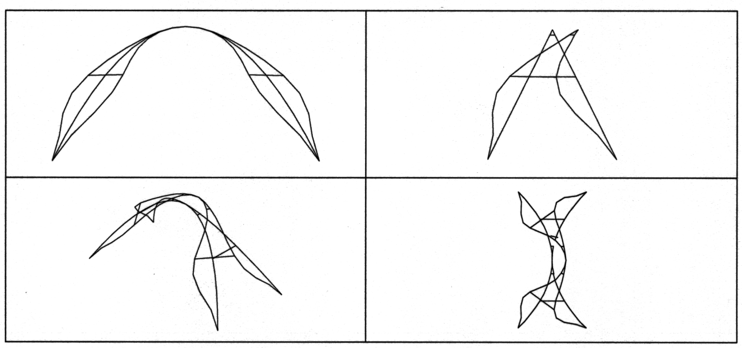


Figura 11. Modo de pandeo. Arcos $\rightarrow$ perfil abierto IPN300

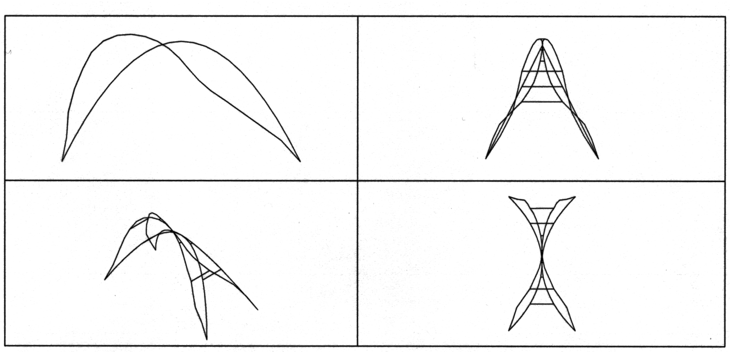
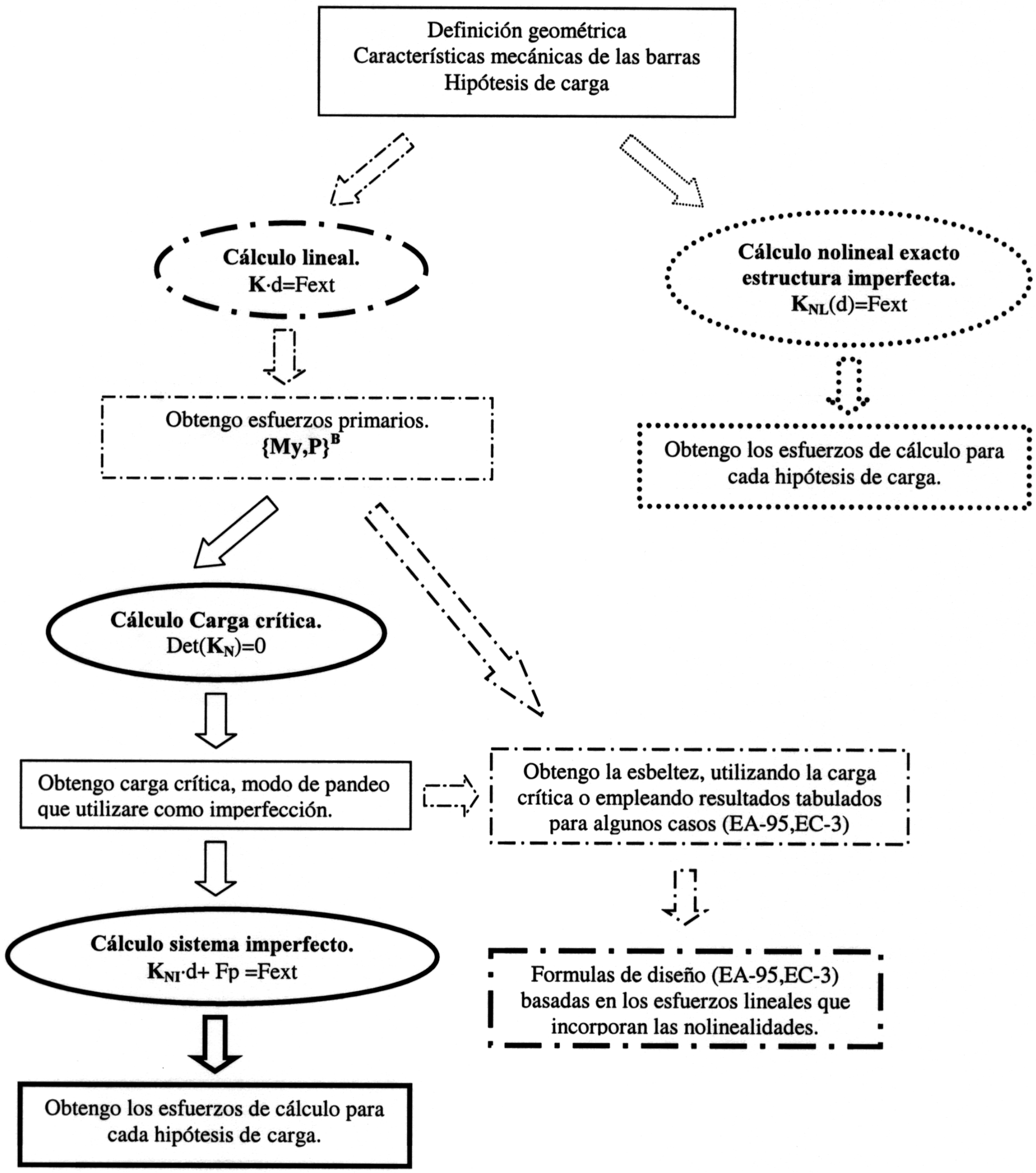


Figura 12. Modo de Pandeo. Arcos $\rightarrow$ perfil cerrado rectangular 200 $\times$ 150

Obtención de esfuerzos de cálculo para la comprobación del estado límite último



siendo:

$\mathbf{K}$	= matriz de rigidez lineal
$\mathbf{K}_{NL}(d)$	= fuerzas internas formulación nolineal exacta
$\mathbf{K}_N$	= matriz de rigidez tangente en una posición ligeramente deformada de un sistema perfecto
$\mathbf{K}N_I d + Fp$	= fuerzas internas en una posición ligeramente deformada de un sistema imperfecto

Grado de dificultad		
bajo	medio	muy alto

ESTUDIO DE SISTEMAS IMPERFECTOS

El objeto del estudio de los sistemas imperfectos es el obtener los esfuerzos de cálculo que sirven para la comprobación del estado límite último, realizando los cálculos de un sistema imperfecto en una geometría ligeramente deformada. La imperfección se considera únicamente geométrica.

Definición de las imperfecciones

La imperfección de la estructura será el modo de pandeo asociado a la primera carga crítica de la estructura escalada convenientemente teniendo en cuenta las tolerancias geométricas constructivas. La carga crítica del sistema perfecto se alcanza para unos esfuerzos primarios en cada barra: $P_{\text{cr}} = \lambda_{\text{cr}} P_0$; $M_{\text{cr}} = \lambda_{\text{cr}} M_{y0}$, siendo $\{P_0,\ M_{y0}\}$ los esfuerzos de un cálculo lineal.

En cada barra el modo de pandeo lleva asociados un $\{\Psi c_{\text{cr}}\}$. $\{\mu_{\text{cr}},\ \beta_{\text{cr}}\}$ definen los exponentes y unas constantes que habrá que escalar $\{f_{\text{cr}},\ g_{\text{cr}},\ h_{\text{cr}},\ i_{\text{cr}}\}$, $\{a_{\text{cr}},\ b_{\text{cr}},\ c_{\text{cr}},\ d_{\text{cr}},\ e_{\text{cr}},\ k_{\text{cr}},\ l_{\text{cr}}\}$ y que pueden obtenerse a partir de los movimientos de los nudos en ejes locales haciendo uso de la [_Matriz_1$_{\text{cr}}$]. Se obtienen las siguientes imperfecciones a lo largo de la barra

$$w_{\text{imp}} = f_{\text{cr}} e^{\Psi_{\text{cr}} x} + g_{\text{cr}} e^{-\Psi_{\text{cr}} x} + h_{\text{cr}} + i_{\text{cr}} x; \quad \text{siendo } \Psi_{\text{cr}} = \sqrt{\frac{-P_{\text{cr}}}{EI_y}}$$

$$v_{\text{imp}} = a_{\text{cr}} e^{\mu_{\text{cr}} x} + b_{\text{cr}} e^{-\mu_{\text{cr}} x} + c_{\text{cr}} e^{\beta_{\text{cr}} x} + d_{\text{cr}} e^{-\beta_{\text{cr}} x} + k_{\text{cr}} + l_{\text{cr}} x$$

$$\theta_{x\text{imp}} = \frac{(-EI_z\mu_{\text{cr}}^2 - P_{\text{cr}})}{M_{y\text{cr}}}(a_{\text{cr}} e^{\mu_{\text{cr}} x} + b_{\text{cr}} e^{-\mu_{\text{cr}} x}) + \frac{(-EI_z\beta_{\text{cr}}^2 - P_{\text{cr}})}{M_{y\text{cr}}}(c_{\text{cr}} e^{\beta_{\text{cr}} x} + d_{\text{cr}} e^{-\beta_{\text{cr}} x}) + m_{\text{cr}} + n_{\text{cr}} x$$

siendo $\{\mu_{\text{cr}},\ -\mu_{\text{cr}},\ \beta_{\text{cr}},\ -\beta_{\text{cr}}\}$ las soluciones de la ecuación característica. Ecuación polinómica de cuarto grado en α

$$(E^2 I_z I_a)\alpha^4 + (EI_z P_{\text{cr}} ro^2 - EI_z GI_t + P_{\text{cr}} EI_a)\alpha^2 + (P_{\text{cr}}^2 r_0^2 - M_{y\text{cr}}^2 - P_{\text{cr}} GI_t) = 0$$

Obtención de las fuerzas internas de un sistema imperfecto

Ecuaciones de equilibrio de un sistema imperfecto en una posición ligeramente deformada:

A) Asociado al axil: $EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. Tendremos dos grados de libertad $\{ud,\ uf\}$.

B) Efecto del axil sobre la flexión primaria: $EI_y\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -P\frac{\partial^2 w_{\text{imp}}}{\partial x^2}$

$$M_y = -EI_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad Q_z = -EI_y\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - P\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w_{\text{imp}}}{\partial x}\right)$$

Solución homogénea:

$$w_h = fe^{\Psi x} + ge^{-\Psi x} + h + ix, \quad \text{siendo } \Psi = \sqrt{\frac{-P}{EI_y}}$$

$$\begin{Bmatrix} wdh \\ \theta_y dh \\ wfh \\ \theta_y fh \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \_\mathrm{Matriz}\_1 \\ \\ \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} f \\ g \\ h \\ i \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} Q_z dh \\ M_y dh \\ Q_z fh \\ M_y fh \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \_\mathrm{Matriz}\_2 \\ \\ \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} f \\ g \\ h \\ i \end{Bmatrix}$$

Solución particular:

$$wp = \frac{-P}{EI_y \Psi_{\mathrm{cr}}^2 + P}(f_{\mathrm{cr}} e^{\Psi_{\mathrm{cr}} x} + g_{\mathrm{cr}} e^{-\Psi_{\mathrm{cr}} x});\ \{Q_z dp,\ M_y dp,\ Q_z fp,\ M_y fp\}$$

C) Efecto del axil y la flexión primaria sobre la flexión lateral

$$EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + M_y \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + P \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -M_y \frac{\partial^2 \theta_{x\mathrm{imp}}}{\partial x^2} - P \frac{\partial^2 v_{\mathrm{imp}}}{\partial x^2}$$

$$(-GI_t + Pr_o^2) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + EI_a \frac{\partial^4 \theta_x}{\partial x^4} = -Pr_0^2 \frac{\partial^2 \theta_{x\mathrm{imp}}}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 v_{\mathrm{imp}}}{\partial x^2}$$

$$M_z = EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad Q_y = -EI_z \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - M_y \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_{x\mathrm{imp}}}{\partial x} \right) - P \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v_{\mathrm{imp}}}{\partial x} \right)$$

$$Bi = EI_a \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \quad M_x = -EI_a \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + GI_t \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - Pr_o^2 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_{ximp}}{\partial x} \right) - M_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v_{imp}}{\partial x} \right)$$

Solución homogénea:

$$v_h = ae^{\mu x} + be^{-\mu x} + ce^{\beta x} + de^{-\beta x} + k + lx$$

$$\theta_{xh} = \frac{(-EI_z \mu^2 - P)}{M_y}(ae^{\mu x} + be^{-\mu x}) + \frac{(-EI_z \beta^2 - P)}{M_y}(ce^{\beta x} + de^{-\beta x}) + m + nx$$

siendo $\{\mu,\ -\mu,\ \beta,\ -\beta\}$ las soluciones de la ecuación característica. Ecuación polinómica de cuarto grado en α

$$(E^2 I_z I_a)\alpha^4 + (EI_z Pro^2 - EI_z GI_t + PEI_a)\alpha^2 + (P^2 r_0^2 - M_y^2 - PGI_t) = 0$$

$$\begin{Bmatrix} vdh \\ \theta_x dh \\ \theta_z dh \\ \varphi dh \\ vfh \\ \theta_x fh \\ \theta_z fh \\ \varphi fh \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \_\mathrm{Matriz}\_1 \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ k \\ l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} Q_y dh \\ M_x dh \\ M_z dh \\ Bidh \\ Q_y fh \\ M_x fh \\ M_z fh \\ Bifh \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \_\mathrm{Matriz}\_2 \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ k \\ l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

Solución particular

$$v_{p_1} = \mathrm{Amp1}(a_{\mathrm{cr}} e^{\mu_{\mathrm{cr}} x} + b_{\mathrm{cr}} e^{-\mu_{\mathrm{cr}} x}) + \mathrm{Amp2}(c_{\mathrm{cr}} e^{\beta_{\mathrm{cr}} x} + d_{\mathrm{cr}} e^{-\beta_{\mathrm{cr}} x})$$

$$\theta_{xp_1} = \mathrm{Amp3}(a_{\mathrm{cr}} e^{\mu_{\mathrm{cr}} x} + b_{\mathrm{cr}} e^{-\mu_{\mathrm{cr}} x} + \mathrm{Amp4}(c_{\mathrm{cr}} e^{\beta_{\mathrm{cr}} x} + d_{\mathrm{cr}} e^{-\beta_{\mathrm{cr}} x})$$

$$v_{p_2} = \mathrm{Amp5}\frac{(-EI_z\mu_{\mathrm{cr}}^2 - P_{\mathrm{cr}})}{M_{y\mathrm{cr}}}(a_{\mathrm{cr}} e^{\mu_{\mathrm{cr}} x} + b_{\mathrm{cr}} e^{-\mu_{\mathrm{cr}} x}) + \mathrm{Amp6}\frac{(-EI_z\beta_{\mathrm{cr}}^2 - P_{\mathrm{cr}})}{M_{y\mathrm{cr}}}(c_{\mathrm{cr}} e^{\beta_{\mathrm{cr}} x} + d_{\mathrm{cr}} e^{-\beta_{\mathrm{cr}} x})$$

$$\theta_{xp_2} = \mathrm{Amp7}\frac{(-EI_z\mu_{\mathrm{cr}}^2 - P_{\mathrm{cr}})}{M_{y\mathrm{cr}}}(a_{\mathrm{cr}} e^{\mu_{\mathrm{cr}} x} + b_{\mathrm{cr}} e^{-\mu_{\mathrm{cr}} x}) + \mathrm{Amp8}\frac{(-EI_z\beta_{\mathrm{cr}}^2 - P_{\mathrm{cr}})}{M_{y\mathrm{cr}}}(c_{\mathrm{cr}} e^{\beta_{\mathrm{cr}} x} + d_{\mathrm{cr}} e^{-\beta_{\mathrm{cr}} x})$$

$$\begin{bmatrix} EI_z\mu_{\mathrm{cr}}^2 + P & M_y \\ M_y & -EI_a\mu_{\mathrm{cr}}^2 + (-GI_t + Pro^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{Amp1} & \mathrm{Amp5} \\ \mathrm{Amp3} & \mathrm{Amp7} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -P & -M_y \\ -M_y & -Pro^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} EI_z\beta_{\mathrm{cr}}^2 + P & M_y \\ M_y & -EI_a\beta_{\mathrm{cr}}^2 + (-GI_t + Pro^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{Amp2} & \mathrm{Amp6} \\ \mathrm{Amp4} & \mathrm{Amp8} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -P & -M_y \\ -M_y & -Pro^2 \end{bmatrix}$$

$$v_p = v_{p_1} + v_{p_2};\ \theta_{xp} = \theta_{xp_1} + \theta_{xp_2} \quad \{Q_y dp,\ M_x dp,\ M_z dp,\ Bidp,\ Q_y df,\ M_x df,\ M_z df,\ Bidf\}$$

resultando que las fuerzas internas están compuestas por un término constante debido a la solución particular más un término lineal en los desplazamientos

$$F_{\mathrm{int}} = Kdh + Fp$$

Ensamblaje y equilibrio

Tras expresar las fuerzas internas y desplazamientos en ejes globales se procede al ensamblaje y se impone el equilibrio de fuerzas en los nudos igualando la resultante de las fuerzas internas a las fuerzas exteriores.

$$\sum_e F_{\mathrm{int}G} = \sum_e (K_G\ dh_G + Fp_G) = F_{\mathrm{ext}}$$

resultando el sistema de ecuaciones

$$\sum_e (K_G\ dh_G) = F_{\mathrm{ext}} - \sum_e (Fp_G)$$

Análisis de la estructura imperfecta

Para cada combinación de acciones posibles, tras realizar un cálculo lineal, obtendremos unos esfuerzos primarios $\{P,\ M_y\}$. Con estos resolveremos el sistema indicado en el apartado anterior, tras lo cual podemos obtener los esfuerzos en cada elemento y comprobar si son admisibles.

CONCLUSIONES

Se ha presentado un programa de cálculo de cargas críticas en estructuras espaciales con secciones doblemente simétricas bajo la acción de unos esfuerzos primarios de axil y flexión según el eje fuerte y una metodología de obtención los esfuerzos de diseno considerando imperfecciones geométricas.

De los casos estudiados se puede concluir que las fórmulas del Eurocódigo 3 quedan en algunos casos del lado de la inseguridad en una magnitud superior al 10 % (Figura 10), dándose los mayores errores cuando $k \neq kw$. En las Figuras 13, 14 y 15 se representa el error relativo de los casos estudiados.

Una limitación tanto para el cálculo de cargas críticas como de sistemas imperfectos es que se ha considerado la influencia de unos esfuerzos primarios constantes. En caso de ser estos esfuerzos variables se puede o bien tomar un esfuerzo primario equivalente según el tipo de variación o aumentar el número de elementos.

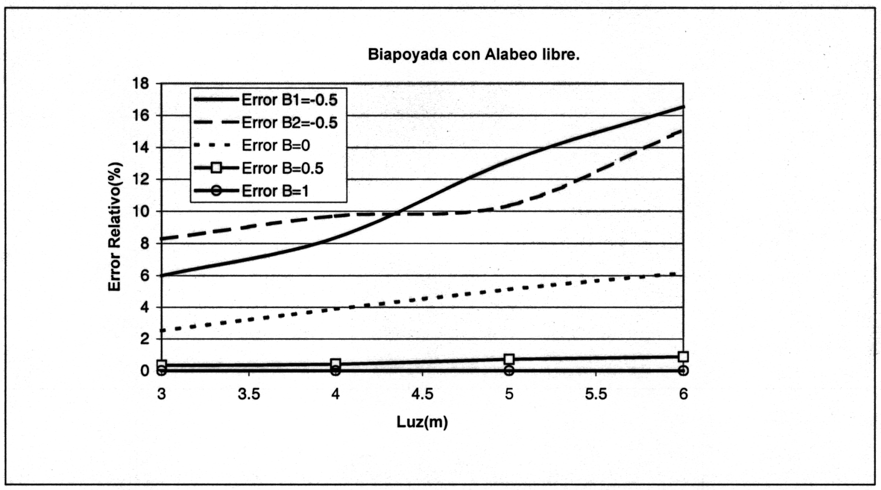


Figura 13. Error $\{vd = 0, \theta_x d = 0, vf = 0, \theta_x f = 0\}$. $\{M_z d = 0, Bid = 0, M_z f = 0, Bif = 0\}$

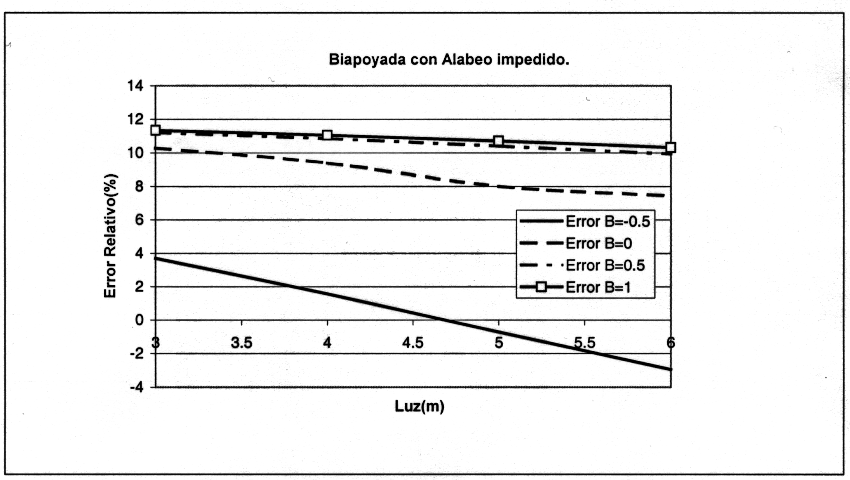


Figura 14. Error $\{vd = 0, \theta_x d = 0, \varphi d = 0, vf = 0, \theta_x f = 0, \varphi f = 0\}$. $\{M_z d = 0, M_z f = 0\}$

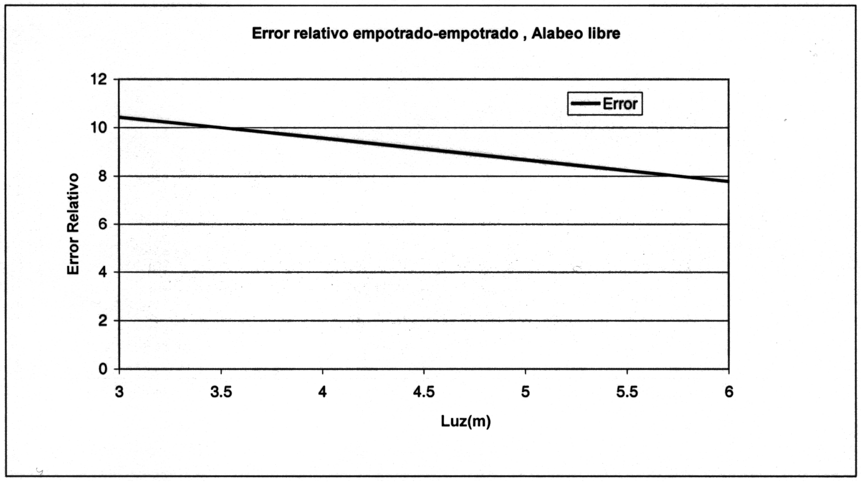


Figura 15. Error. Caso biempotrada

REFERENCIAS

1 Eurocódigo 3, Proyecto de estructuras de acero, Parte 1-1: Reglas generales y reglas para edificación, UNE-ENV, (1993-1-1).

2 J.D. Renton, "Stability of space frames by computer análisis", *Journal of the Structural Division*, *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Vol. **88**, N° ST4, Agosto, (1962).

3 W.F. Chen y T. Atsuta, "*Theory of beam columns*", Vol. 2: "*Space behaviour and design*", McGraw-Hill, New York, (1977).

4 R. Livesley y K. Chandler, "*Stability functions for structural frameworks*", Manchester University Press, (1956).

5 Don O. Brush y B.O. Almroth, "*Buckling of bars, plates, and shells*, McGraw-Hill, (1975).

6 J.M.T. Thompson y G.W. Hunt, "*Elastic instability phenomena*", John Wiley and Sons, (1984).

7 R. Kappus, "*Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich*", Luftfahrt-Forschung, (1937).

APÉNDICE I. NOTACIÓN

u, v, w	= desplazamientos según eje x, y, z resp.
$\theta_x,\ \theta_y,\ \theta_z$	= giros según eje x, y, z resp.
φ	= alabeo
φ	= alabeo unitario
$M_x,\ M_y,\ M_z$	= momentos según eje x, y, z resp.
P	= axil (positivo para compresión)
$Q_y,\ Q_z$	= cortantes según eje y, z resp.
Bi	= bimomento
E	= módulo de elasticidad
G	= módulo de elasticidad transversal
$I_y,\ I_z$	= momentos de inercia de eje y, z resp.
I_t	= módulo de torsión
I_a ó I_w	= módulo de alabeo
W	= módulo resistente
$ud,\ vd,\ wd,\ \theta_{xd},\ \theta_{yd},\ \theta_{zd},\ \varphi d$	= desplazamientos cara dorsal
$uf,\ vf,\ wf,\ \theta_{xf},\ \theta_{yf},\ \theta_{zf},\ \varphi f$	= desplazamientos cara frontal
$Pd,\ Q_yd,\ Q_zd,\ M_xd,\ M_yd,\ M_zd$	= esfuerzos cara dorsal
$Pf,\ Q_yf,\ Q_zf,\ M_xf,\ M_yf,\ M_zf$	= esfuerzos cara frontal
L	= longitud de la barra
A	= área de la sección transversal
r_o	= radio de giro polar respecto del centro de esfuerzos cortantes
σ_y	= límite elástico

APÉNDICE II. CÁLCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

```
> #
> #CAMPO DESPLAZAMIENTOS
> #
> v:=a*exp(x*C1)+b*exp(-x*C1)+c*exp(x*C2)+d*exp(-
x*C2)+k+l*x;dv:=diff(v,x):ddv:=diff(v,x,x):dddv:=diff(v,x,x,x):
> aa:=(-E*Iz*C1^2-P)*a/My:bb:=(-E*Iz*C1^2-P)*b/My:cc:=(-E*Iz*C2^2
-P)*c/My:dd:=(-E*Iz*C2^2-P)*d/My:
> g:=aa*exp(x*C1)+bb*exp(-x*C1)+cc*exp(x*C2)+dd*exp(-
x*C2)+m+n*x;dg:=diff(g,x):ddg:=diff(g,x,x):dddg:=diff(g,x,x,x):
>#
> #CALCULO ESFUERZOS
> #
> Mz:=E*Iz*ddv:Mx:=(G*It-P*ro^2)*dg-E*Ia*dddg-My*dv:Bi:=E*Ia*ddg:Qy:
=simplify(-E*Iz*dddv-My*dg-P*dv):
>x:=0:vd:=simplify(v):dvd:=simplify(dv):gd:=simplify(g):dgd:
=simplify(dg):
> x:=L:vf:=simplify(v):dvf:=simplify(dv):gf:=simplify(g):dgf:
=simplify(dg):
> x:=L:Mzf:=simplify(Mz):Mxf:=simplify(Mx):Bif:=simplify(Bi):Qyf:
=simplify(Qy):
> x:=0:Mzd:=simplify(-Mz);Mxd:=simplify(-Mx);Bid:=simplify(-Bi);Qyd:
=simplify(-Qy);
> with(linalg):
```

```
> K:=matrix(8,8):RIG:=matrix(8,8):
> BBB:= array(identity, 1..8,1..8):
> #
> # CALCULO MATRIZ 1
> #
> for II from 1 by 1 while II<9 do
>a:=BBB[1,II]:b:=BBB[2,II]:c:=BBB[3,II]:d:=BBB[4,II]:k:=BBB[5,II]:l:
=BBB[6,II]:m:=BBB[7,II]:n:=BBB[8,II]:
>K[1,II]:=vd:K[2,II]:=dvd:K[3,II]:=gd:K[4,II]:=dgd:K[5,II]:=vf:K[6,II]:
=dvf:K[7,II]:=gf:K[8,II]:=dgf:
> od:
> #
> # CALCULO INVERSA DE MATRIZ 1
> #
> SOL:=linsolve(K,BBB):
> #
> # CALCULO MATRIZ DE RIGIDEZ
> #
> for II from 1 by 1 while II<9 do
>a:=SOL[1,II]:b:=SOL[2,II]:c:=SOL[3,II]:d:=SOL[4,II]:k:=SOL[5,II]:l:
=SOL[6,II]:m:=SOL[7,II]:n:=SOL[8,II]:
>RIG[1,II]:=simplify(Qyd):RIG[2,II]:=simplify(Mxd):RIG[3,II]:
=simplify(Myd):RIG[4,II]:=simplify(Bid):RIG[5,II]:=simplify(Qyf):RIG[6,II]:
=simplify(Mxf):RIG[7,II]:=simplify(Myf):RIG[8,II]:=simplify(Bif):
> od:
> fortran(RIG,precision=double,filename=MATRIG,optimized):
> #
> # CALCULO C1 Y C2 .  ECUACION CARACTERISTICA
> #
> A:=matrix([[E*Iz*alpha^2+P,My],[My,-G*It+P*ro^2+E*Ia*alpha^2]]):
> solve(det(A)=0,alpha);
```

APÉNDICE III. CÁLCULO DE LA MATRIZ DE ROTACIÓN

```
># CALCULO DE MATRIZ DE ROTACIÓN
> n1:=vector([DX,DY,DZ]):n1:=evalm(n1/XL(KB)):
> n3:=vector([-DX*DZ,-DZ*DY,DX^2+DY^2]):b:=(n3[1]^2+n3[2]^2+n3[3]^2)^(1/
> 2):n3[1]:=(n3[1]-e)/(b+e):n3[2]:=(n3[2])/(b+e):n3[3]:=(n3[3])/(b+e):
> n2:=vector([-DY,DX,0]):b:=(n2[1]^2+n2[2]^2+n2[3]^2)^(1/2);n2[1]:=(n2[1
> ])/(b+e)*DZ/abs(DZ+e):n2[3]:=0.0;n2[2]:=(n2[2]+e)/(b+e);
> T:=matrix([[n1[1],n2[1],n3[1]],[n1[2],n2[2],n3[2]],[n1[3],n2[3],n3[3]]
> ]);
># GIRO GAMA DE EJE X LOCAL
> T1:=matrix([[1,0,0],[0,cos(gama),-sin(gama)],[0,sin(gama),cos(gama)]]);
># MATRIZ DE ROTACIÓN GENERAL
> Tr:=matrix(3,3,0):Tr:=evalm(T&*T1);
> fortran(Tr,precision=double,filename=rotacion,optimized);
```

APÉNDICE IV. MATRIZ DE RIGIDEZ $\mathbf{I}_a = \mathbf{0}$

Se presentan las matrices de rigidez para el caso en el que la rigidez al alabeo sea despreciable y para esfuerzos primarios de *axil, flexión*, *flexión más axil* con objeto de poder compararlas, siendo las funciones de estabilidad comunes

$$s = \frac{[\rho\cos(\rho) - \sin(\rho)\rho}{[-2 + \rho\sin(\rho) + 2\cos(\rho)]}$$

$$c = \frac{[\rho - \sin(\rho)]}{[\sin(\rho) - \rho\cos(\rho)]}$$

$$t = (1 + c)s$$

FLEXIÓN + AXIL

$$\begin{Bmatrix} Q_y d \\ M_x d \\ M_z d \\ Q_y f \\ M_x f \\ M_z f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EI_z}{L^3}\delta & -\frac{M_y}{L} & \frac{EI_z}{L^2}t & \frac{EI_z}{L^3}\delta & \frac{M_y}{L} & \frac{EI_z}{L^2}t \\ & \frac{(GI_t - Pro^2)}{L} & 0 & \frac{M_y}{L} & -\frac{(GI_t - Pro^2)}{L} & 0 \\ & & \frac{EI_z}{L}s & -\frac{EI_z}{L^2}t & 0 & \frac{EI_z}{L}sc \\ & & & -\frac{EI_z}{L^3}\delta & -\frac{M_y}{L} & -\frac{EI_z}{L^2}t \\ & & & & \frac{(GI_t - Pro^2)}{L} & 0 \\ & & & & & \frac{EI_z}{L}s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} vd \\ \theta_x d \\ \theta_z d \\ vf \\ \theta_x f \\ \theta_z f \end{Bmatrix}$$

siendo

$$\rho = \frac{L\sqrt{EI_z(GI_t - Pr_o^2)(M_y^2 + PGI_t - P^2 r_o^2)}}{EI_z(GI_t - Pr_o^2)}$$

$$\delta = \frac{PL^2}{EI_z} + \frac{\rho^2[2 - 2\cos(\rho)]}{-2 + \rho\sin(\rho) + 2\cos(\rho)]}$$

FLEXIÓN

$$\begin{Bmatrix} Q_y d \\ M_x d \\ M_z d \\ Q_y f \\ M_x f \\ M_z f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EI_z}{L^3}2t & -\frac{M_y}{L} & \frac{EI_z}{L^2}t & -\frac{EI_z}{L^3}2t & \frac{M_y}{L} & \frac{EI_z}{L^2}t \\ & \frac{GI_t}{L} & 0 & \frac{M_y}{L} & -\frac{GI_t}{L} & 0 \\ & & \frac{EI_z}{L}s & -\frac{EI_z}{L^2}t & 0 & \frac{EI_z}{L}sc \\ & & & \frac{EI_z}{L^3}2t & -\frac{M_y}{L} & -\frac{EI_z}{L^2}t \\ & & & & \frac{GI_t}{L} & 0 \\ & & & & & \frac{EI_z}{L}s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} vd \\ \theta_x d \\ \theta_z d \\ vf \\ \theta_x f \\ \theta_z f \end{Bmatrix}$$

siendo

$$\rho = \frac{M_y}{M_{\mathrm{cr}}}\pi \qquad M_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi}{L}\sqrt{EI_zGI_t}$$

AXIL

$$\left\{\begin{array}{c} Q_y d \\ M_x d \\ M_z d \\ Q_y f \\ M_x f \\ 0 M_z f \end{array}\right\} = \begin{bmatrix} -\frac{EI_z}{L^3}\frac{2t}{m} & 0 & \frac{EI_z}{L^2}t & \frac{EI_z}{L^3}\frac{2t}{m} & 0 & \frac{EI_z}{L^2}t \\ & \frac{GI_t - Pro^2}{L} & 0 & \frac{M_y}{L} & -\frac{GI_t - Pro^2}{L} & 0 \\ & & \frac{EI_z}{L}s & -\frac{EI_z}{L^2}t & 0 & \frac{EI_z}{L}sc \\ & & & -\frac{EI_z}{L^3}\frac{2t}{m} & 0 & -\frac{EI_z}{L^2}t \\ & & & & \frac{GI_t - Pro^2}{L} & 0 \\ & & & & & \frac{EI_z}{L}s \end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c} vd \\ \theta_x d \\ \theta_z d \\ vf \\ \theta_x f \\ \theta_z f \end{array}\right\}$$

siendo

$$\rho = \pi\sqrt{\frac{P}{P_{\mathrm{cr}}}} \qquad P_{\mathrm{cr}} = \frac{EI_z\pi^2}{L^2}$$

$$m = \frac{\rho\sin(\rho)}{2[\cos(\rho) - 1]}$$