

INTEGRADOR TEMPORAL DE PASO VARIABLE PARA ANALISIS DINAMICO DE ESTRUCTURAS Y MECANISMOS

ALBERTO CARDONA

y

ARTURO CASSANO

*Grupo de Tecnología Mecánica
INTEC, Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina.*

RESUMEN

Presentamos un esquema de variación automática del paso de tiempo, para la integración temporal de las ecuaciones de movimiento en dinámica estructural y de mecanismos. Incorporamos este esquema al algoritmo de Hilber, Hughes y Taylor, el cual es apropiado para el tratamiento de los sistemas de ecuaciones diferenciales/algebraicas que caracterizan al análisis dinámico de mecanismos. La estrategia de cambio de paso se basa en el seguimiento de las derivadas de orden superior. Desarrollamos una base teórica original, dando un fundamento sólido al método. Presentamos numerosos ejemplos numéricos de aplicación que ilustran la potencia del algoritmo propuesto.

SUMMARY

We present a scheme of automatic time step variation for time integrating the equations of motion in structural dynamics. The scheme is incorporated to the Hilber, Hughes and Taylor algorithm, which is well-suited to deal with the differential/algebraic systems typical of mechanisms dynamic simulation. The strategy for choosing the time step is based on monitoring the higher order derivatives. An original theory is presented, giving a solid foundation to the method. Several numerical examples are shown, that illustrate the power of the proposed algorithm.

INTRODUCCION

En la simulación numérica de mecanismos flexibles, el sistema de ecuaciones a resolver es del tipo diferencial-algebraico (EDA's), estando las ecuaciones algebraicas originadas por la introducción de restricciones para modelar juntas y cuerpos rígidos. Para integrar en el tiempo estos sistemas se debe tener particular precaución: los algoritmos usuales de integración de ecuaciones diferenciales ordinarias no dan una

Recibido: Noviembre 1991

solución satisfactoria, comportándose la mayoría de éstos en forma inestable al tratar de integrar EDA's.

En las referencias^{1,2} presentamos un método de paso fijo –controlado por el usuario– para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales-algebraicas basado en el algoritmo de Hilber, Hughes y Taylor (HHT). En base a la teoría allí expuesta desarrollamos el código MECANO³, el cual ha sido empleado en una gran variedad de aplicaciones industriales. La experiencia con éste ha sido francamente positiva restando sin embargo solucionar el problema de la adopción automática del paso.

Los métodos de paso variable –con paso de tiempo controlado en forma automática por el programa– tienen especial importancia en problemas de aplicación práctica. Estos métodos liberan al usuario de la tarea de seleccionar un paso, la cual se ve dificultada en problemas con alta nolinealidad, fricción, rigidización brusca y en instantes imprevisibles, etc.. En estos casos es casi imposible prever un incremento de tiempo que asegure la convergencia durante todo el intervalo de análisis, y que al mismo tiempo no involucre un costo exagerado de cálculo.

En años recientes, varios autores han estudiado este tema. Zienkiewicz y otros⁴, introducen una familia de esquemas de integración para sistemas dinámicos lineales (extensible a sistemas no lineales). Proponen variar el paso de integración basados en un control del error local de truncamiento, el cual es evaluado por diferencia entre derivadas de orden superior. El método funciona correctamente, aunque los fundamentos teóricos de tal aproximación no resultan del todo claros. Entre otros problemas a resolver, resta determinar un valor de comparación adecuado e independiente del problema bajo análisis. Destacamos además que la determinación del error local de truncamiento por diferencia entre las derivadas de mayor orden presentes tiene sentido únicamente para pasos de tiempo extremadamente chicos.

Thomas y Gladwell, en sus trabajos^{5,6} toman la misma familia de algoritmos y proponen un método a paso variable que basa su estimación de error en la comparación entre resultados entregados por algoritmos de distinto orden de precisión, idea habitual en algoritmos generales de integración de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's)⁷. Si bien este método funciona correctamente en problemas de dinámica de estructuras, falla si se lo aplica directamente al análisis de mecanismos, como mostramos en el trabajo⁸. En el mismo trabajo hemos propuesto una forma de superar los problemas originados por la presencia de restricciones algebraicas; lamentablemente, el integrador obtenido posee sólo primer orden de precisión y los resultados muestran una excesiva disipación numérica.

Anantharaman y Hiller⁹ proponen usar una versión modificada del código DASSL, desarrollado por Petzold¹⁰, pero usan una formulación distinta a la nuestra para la derivación de las ecuaciones de movimiento. En forma similar trabajan Simeon, Führer y Rentrop¹¹ quienes “estabilizan” las restricciones y usan el código ODASSL (otra versión modificada del DASSL). En los ensayos que realizamos con el código DASSL, encontramos que el paso de integración resulta extremadamente pequeño, motivado quizás por el hecho de poseer el integrador un primer orden de precisión¹².

Hoff y Taylor, para sistemas con inestabilidad, controlan el paso del tiempo en base al seguimiento de cargas y desplazamientos por un método parecido al de “longitud de arco” usado en análisis estático¹³. Lee y Hsieh ¹⁴, por su parte, regulan el incremento

de tiempo determinando una frecuencia dominante instantánea ω_n y eligen un paso que es aproximadamente $h = T_n/20$, combinando esto con un “método de bisección” para prevenir una divergencia en casos con cambios bruscos. Ambos trabajos orientan su aplicación a problemas de dinámica estructural, aunque sus ideas podrían llegar a extenderse al tratamiento de mecanismos flexibles.

En este trabajo pretendemos incorporar un algoritmo de control del paso al algoritmo HHT, para tratar sistemas de ecuaciones diferenciales-algebraicas. Anteriormente hemos desarrollado un estudio comparativo que muestra la potencialidad de tal algoritmo¹². La idea, a manera similar a lo hecho por Zienkiewicz y colab. en su familia de algoritmos⁴, es controlar el paso usando un estimador de error local basado en derivadas de orden superior. Dicho estimador de error es analizado en profundidad en este trabajo, dando una justificación teórica precisa al método, y llegando a determinar acotaciones independientes del problema en consideración.

En la sección de análisis del error local de truncamiento desarrollamos una breve teoría en donde analizamos sucesivamente problemas de un grado de libertad, multidimensionales desacoplados y multidimensionales acoplados. En la parte que le sigue, se describe la estrategia de cambio de paso. Por último, mostramos varios ejemplos numéricos que corroboran la teoría. Se pone de manifiesto además la utilidad del algoritmo para el análisis de fenómenos con alta nolinealidad e impacto, en donde se hace imperativo por momentos disminuir fuertemente el paso de integración para asegurar resultados precisos.

ESTIMACION DEL ERROR - DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Sea $q(t)$ una función continua del tiempo t . Sean además $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t)$, ... sus derivadas sucesivas respecto de t . Planteando el desarrollo en serie de Taylor en torno a este instante t para aproximar el valor de la función en un instante $(t + h)$, el error que estaremos cometiendo al evaluarla usando k términos en el desarrollo será:

$$e = \frac{h^{k+1} |q^{(k+1)}|}{(k+1)!} \quad (1)$$

donde k es el exponente del último término completo en la serie de Taylor.

En el caso particular del algoritmo HHT, es fácil escribir la aproximación de los desplazamientos que realiza el integrador en la forma siguiente:

$$q(t+h) = q(t) + h\dot{q}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{q}(t) + \beta h^3 \delta(t) \quad (2)$$

con

$$\delta(t) = \frac{\ddot{q}(t+h) - \ddot{q}(t)}{h} \quad (3)$$

Si notamos que el último término completo es $h^2/2 \ddot{q}$, entonces en este algoritmo $k = 2$ y la estimación de error cometido resulta:

$$e = \frac{h^3 |q^{(3)}|}{3!} = \frac{h^3}{6} \left| \frac{d\ddot{q}}{dt} \right| \quad (4)$$

La derivada de las aceleraciones puede aproximarse:

$$\frac{d\ddot{q}}{dt} \approx \frac{\ddot{q}(t+h) - \ddot{q}(t)}{h} = \delta(t) \quad (5)$$

Reemplazando la ecuación (5) en (4), obtenemos una estimación del error cometido por el algoritmo de HHT al integrar usando un paso h

$$e = \frac{h^2}{6} |\ddot{q}(t+h) - \ddot{q}(t)| = \frac{h^2}{6} |\Delta \ddot{q}| \quad (6)$$

La expresión del error hallada tiene validez únicamente para pasos de tiempo chicos (muy inferiores al período del oscilador considerado); sin embargo, igualmente seguiremos refiriéndonos a esta expresión como el “error local de integración”. Nos proponemos a continuación analizar el significado de esta ecuación para el caso de ser aplicada a osciladores de frecuencias mucho más elevadas de la que puede resolver el algoritmo de integración numérica con un paso dado.

ANALISIS DEL ERROR LOCAL DE TRUNCAMIENTO

En esta sección realizamos un análisis de la aplicación de la medida de error local de truncamiento, dada por la ecuación (6), a diversos sistemas estructurales. Primeramente analizamos un sistema lineal de un grado de libertad, y ponemos de manifiesto la existencia de una “función error adimensional” que caracteriza los valores esperados del error local de truncamiento, y que depende únicamente del algoritmo de integración y del paso de tiempo. Extendemos luego el estudio a casos con muchos grados de libertad, y brindamos un significado físico a la tolerancia usada para controlar el paso de tiempo.

Sistema de un grado de libertad

Tomemos un oscilador lineal de un grado de libertad (GDL), el cual sólo está excitado por un desplazamiento inicial y no tiene fuerzas viscosas:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (7)$$

con las condiciones iniciales $y(0) = y_0$; $\dot{y}(0) = 0$. Evidentemente la solución exacta al problema planteado es

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t) \quad (8)$$

Supongamos que nos encontramos en el instante t , donde conocemos la solución exacta $y(t)$, y a partir de este instante efectuamos un paso de integración por medio del algoritmo HHT con un incremento de tiempo h . El incremento de desplazamientos, velocidades y aceleraciones al pasar del instante t al $t+h$ puede escribirse en la forma

$$\begin{Bmatrix} \Delta y \\ h \Delta \dot{y} \\ h^2 \Delta \ddot{y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{A}(\Omega) - \mathbf{I}] \begin{Bmatrix} y_0 \cos(\omega t) \\ -\Omega y_0 \sin(\omega t) \\ -\Omega^2 y_0 \cos(\omega t) \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$\mathbf{A}(\Omega)$ es la matriz de amplificación del algoritmo HHT, la cual en el caso sin disipación se escribe^{15,16}:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} 1 + \alpha\beta\Omega^2 & 1 & \frac{1}{2} - \beta \\ -\gamma\Omega^2 & 1 - (1 + \alpha)(\gamma - \beta)\Omega^2 & 1 - \gamma - (1 + \alpha)(\frac{1}{2}\gamma - \beta)\Omega^2 \\ -\Omega^2 & -(1 + \alpha)\Omega^2 & -(1 + \alpha)(\frac{1}{2} - \beta)\Omega^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

donde $D = 1 + (1 + \alpha)\beta\Omega^2$ y la frecuencia adimensional Ω es igual al producto de la frecuencia del oscilador ω por el paso de tiempo h . Los parámetros α, β, γ permiten regular el comportamiento del integrador. En realidad, para mantener un máximo grado de precisión, los parámetros β y γ se hacen dependientes de α , el cual pasa a ser el único parámetro libre pudiendo tomar valores entre $[0, -1/3]$. Variando α se regula el grado de disipación del algoritmo a altas frecuencias^{15,16}.

Usando esta última ecuación, vemos que el error local medido mediante la ecuación (6) será:

$$e = \frac{(1 + \alpha)\Omega^3}{6D} |y_0| \left| \sin(\omega t) + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Omega \cos(\omega t) \right| \quad (11)$$

El cociente $e/|y_0|$ puede ser interpretado como un error adimensional, independiente de la excitación que recibe el oscilador. Para eliminar la dependencia de la función error e respecto del tiempo, definiremos la función $\varepsilon(\Omega)$ (valor esperado del error adimensional) en la forma:

$$\varepsilon(\Omega) = \frac{\mathbb{E}[e]}{|y_0|} = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e dt}{|y_0|} \quad (12)$$

Por la ecuación (11), puede verse que $\varepsilon(\Omega)$ resulta:

$$\varepsilon(\Omega) = \frac{(1 + \alpha)\Omega^3 \left(1 + \left(\frac{1}{2} - \beta \right)^2 \Omega^2 \right)^{1/2}}{3\pi (1 + (1 + \alpha)\beta\Omega^2)} \quad (13)$$

En la Figura 1 representamos esta función, la cual vemos toma valores crecientes con la frecuencia adimensional Ω del problema.

La precisión de un integrador se caracteriza usualmente a través del concepto de radio espectral. Este nos predice su comportamiento a largo plazo, permitiéndonos apreciar para un sistema y un paso de integración dados el grado de disipación numérica introducido. En la Figura 1, representamos también el radio espectral del algoritmo HHT para un valor dado del parámetro α .

Destacamos además en la misma figura, la frecuencia adimensional de corte Ω_K . Esta es característica del integrador e indica a partir de qué valor las componentes del

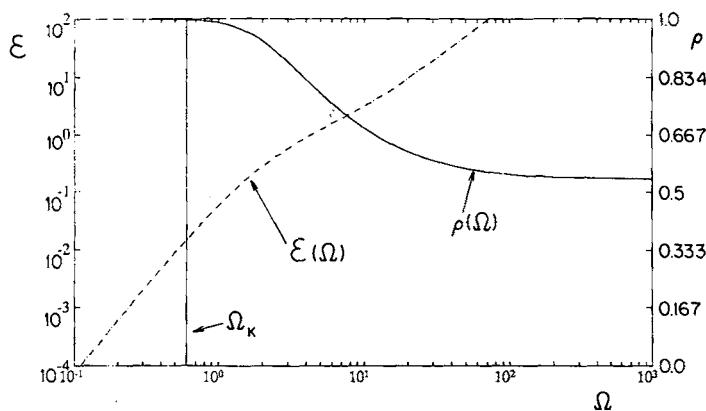


Figura 1. Función de error adimensional.

sistema sufren una atenuación significativa por disipación numérica. Usualmente, se acepta que para un valor de frecuencia adimensional $\Omega_K = 0.6$ —valor correspondiente a un paso de tiempo igual a un décimo del período del oscilador— el algoritmo entrega resultados más que suficientes desde un punto de vista ingenieril. El radio espectral mínimo para este valor de frecuencia resulta:

$$\rho(0.6)|_{\alpha=-0.3} = 0.9981$$

Definiendo luego la constante $K_\Omega = \epsilon(\Omega_K)$, el cociente $\epsilon(\Omega)/K_\Omega$ será estrictamente mayor o igual a 1 para valores de frecuencia superiores a la frecuencia de corte Ω_K . En consecuencia, si aceptamos que, en promedio, se verifica una igualdad aproximada entre el “valor esperado” y el “valor actual” del error local, podemos escribir

$$\frac{h^2}{6 K_\Omega |y_0|} |\Delta \ddot{y}| \approx \frac{E[e]}{K_\Omega |y_0|} = \frac{\epsilon(\Omega)}{K_\Omega} = \begin{cases} > 1 & \text{si } \Omega > \Omega_K \\ \leq 1 & \text{si } \Omega \leq \Omega_K \end{cases} \quad (14)$$

Luego, si integramos la ecuación diferencial (7) con un paso de tiempo tal que asegure que:

$$\frac{h^2}{6 K_\Omega |y_0|} |\Delta \ddot{y}| \leq 1 \quad (15)$$

entonces el paso de tiempo se ajustará, en promedio, para cumplir con la relación $\Omega \leq \Omega_K$. Dicho en otras palabras, el mismo tomará valores para los cuales el algoritmo integra adecuadamente las ecuaciones de movimiento del oscilador planteado (ver ejemplo “Oscilador lineal de un grado de libertad”).

Análisis para un sistema multidimensional desacoplado

Ahora estudiaremos el caso de un sistema lineal de “ m ” grados de libertad desacoplados. Este sistema será del tipo:

$$\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (16)$$

sujeto a condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} y_i(0) &= y_{0i} & i = 1, \dots, m \\ \dot{y}_i(0) &= 0 \end{aligned}$$

El error local evaluado según la ecuación (6) resulta ahora un vector; su norma servirá como medida global del error cometido:

$$\|\mathbf{e}\| = \frac{h^2}{6} \|\Delta \ddot{\mathbf{y}}\| \quad (17)$$

En el análisis siguiente determinaremos la significación de esta última cantidad. Debemos notar primeramente que, como las ecuaciones de movimiento están desacopladas, el valor esperado para cada componente del vector error tendrá la forma dada por la ecuación (13), o sea:

$$E[e_i] = |y_{0i}| \varepsilon(\omega_i h) \quad (18)$$

Para un sistema dinámico homogéneo y sin amortiguamiento como el (16), la excitación inicial en los desplazamientos dada por el vector \mathbf{y}_0 es representativa de la distribución energética total durante toda la evolución (nótese que en $t = 0$ toda la energía es de deformación; luego, para cada componente, ésta va cambiando a cinética y otra vez a energía de deformación, pero al estar los osciladores desacoplados, cada uno conserva su energía total inicial).

En la Figura 2 mostramos la distribución de desplazamientos iniciales típica de un sistema en términos de la frecuencia adimensional $\Omega = \omega h$, para dos valores distintos del paso de tiempo h_1, h_2 . Vemos que al disminuir el paso de tiempo usado en el integrador, se produce una traslación de la curva hacia la zona de bajas frecuencias, en la cual el integrador posee mayor precisión.

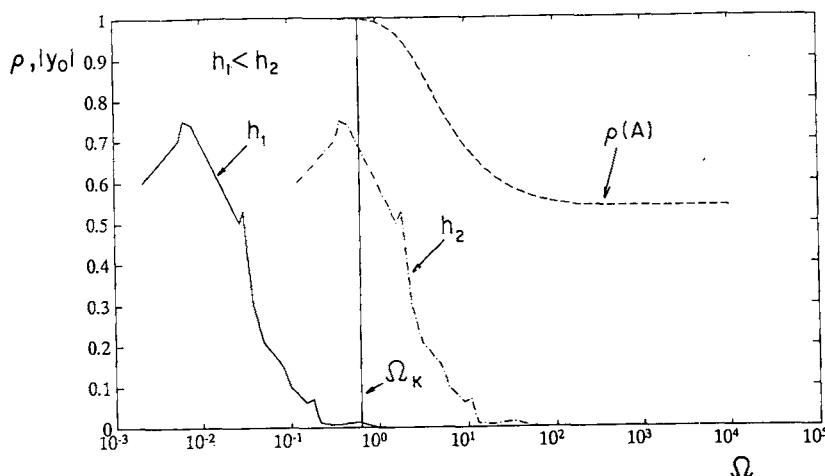


Figura 2. Distribución de desplazamientos iniciales en función de la frecuencia adimensional Ω .

Una estrategia apropiada de selección del paso de integración deberá elegir éste de forma que las componentes del sistema que más interesen en el cálculo de la respuesta sean integradas correctamente. En otras palabras, la frecuencia adimensional Ω_i de las componentes de mayor contenido energético (de mayor participación en la respuesta) deberán ser inferiores a la frecuencia de corte Ω_K . Mostramos a continuación una estrategia que asegura el cumplimiento de este objetivo, basados en el "seguimiento" del error local y la corrección del paso de integración para cumplir que el mismo se ubique por debajo de una tolerancia dada.

Al tratarse de un sistema desacoplado, el valor esperado del error resulta

$$E[\|e\|] = \frac{h^2}{6} E[\|\Delta \ddot{y}\|] = \left(\sum_0^{\Omega_m} y_{0i}^2 \varepsilon^2(\Omega_i) \right)^{1/2} = \left(\sum_0^{\Omega_K} y_{0i}^2 \varepsilon^2(\Omega_i) + \sum_{\Omega_K}^{\Omega_m} y_{0i}^2 \varepsilon^2(\Omega_i) \right)^{1/2} \quad (19)$$

donde Ω_m es la máxima frecuencia presente en el sistema (16).

Considerando que ambos términos dentro de la raíz cuadrada son estrictamente positivos, podemos escribir que

$$\left(\sum_{\Omega_K}^{\Omega_m} y_{0i}^2 \varepsilon^2(\Omega_i) \right)^{1/2} \leq \frac{h^2}{6} E[\|\Delta \ddot{y}\|] \quad (20)$$

Recordando la definición de la constante $K_\Omega = \varepsilon(\Omega_K)$, y aceptando nuevamente la equivalencia entre el valor esperado y el valor actual del error local, podemos encontrar la siguiente desigualdad:

$$\left(\sum_{\Omega_K}^{\Omega_m} y_{0i}^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{K_\Omega} \left(\sum_{\Omega_K}^{\Omega_m} y_{0i}^2 \varepsilon^2(\Omega_i) \right)^{1/2} \leq \frac{h^2}{6 K_\Omega} \|\Delta \ddot{y}\| \quad (21)$$

Luego, si integramos con un paso de integración que asegure, instante a instante, que:

$$\frac{h^2}{6 K_\Omega} \|\Delta \ddot{y}\| \leq TOL \quad (22)$$

entonces podemos inferir que la suma de amplitudes de los osciladores de frecuencia superior a la frecuencia de corte estará por debajo de la tolerancia TOL :

$$\left(\sum_{\Omega_K}^{\Omega_m} y_{0i}^2 \right)^{1/2} \leq TOL \quad (23)$$

En consecuencia, el paso de integración que elija el algoritmo se regulará para integrar correctamente todas las componentes de amplitud tal que deban ser consideradas en la respuesta final, y disipará aquellas componentes de baja amplitud — de norma inferior a TOL — y alta frecuencia que no sean de interés retener en la solución. La gama de energías disipadas numéricamente estará luego regida por el valor de TOL .

Análisis para un sistema multidimensional acoplado

Estudiaremos finalmente el comportamiento de un sistema dinámico estructural (lineal) del tipo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (24)$$

con condiciones iniciales $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$; $\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}$ y donde \mathbf{M} y \mathbf{K} son las matrices de masa y rigidez respectivamente y \mathbf{q} es el vector de desplazamientos en el sistema de coordenadas estructurales. De aquí en más denotaremos con \mathbf{y} a las coordenadas modales del sistema (24)

$$\mathbf{q} = \Phi\mathbf{y} \quad (25)$$

siendo Φ la matriz que contiene los autovectores del problema de autovalores

$$\mathbf{K}\phi_i = \omega_i^2 \mathbf{M}\phi_i \implies \Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m] \quad (26)$$

Asegurándonos que los autovectores son ortonormales respecto de la masa,

$$\begin{aligned} \Phi^T \mathbf{M} \Phi &= \mathbf{I} \\ \Phi^T \mathbf{K} \Phi &= \mathbf{W}^2 \quad \text{siendo } \mathbf{W}^2 = \text{diag}(\omega_i^2) \end{aligned} \quad (27)$$

el sistema de ecuaciones diferenciales (24) puede ser proyectado sobre su base modal, quedando un sistema desacoplado similar al (16)

$$\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (28)$$

A partir de la ecuación (21) podemos escribir:

$$\left(\sum_{\Omega_K}^{m} |y_{0i}|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{h^2}{6K_\Omega} \|\Delta\ddot{\mathbf{y}}\| = \frac{h^2}{6K_\Omega} \|\Phi^T \mathbf{M} \Delta\ddot{\mathbf{q}}\| = \frac{h^2}{6K_\Omega} (\Delta\ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \Delta\ddot{\mathbf{q}})^{1/2} \quad (29)$$

en donde hemos usado la identidad $\mathbf{M}^T \Phi \Phi^T = \mathbf{I}$ y la equivalencia entre valores esperado y actual del error. El resultado anterior nos da una acotación para la amplitud de desplazamientos de las componentes del sistema de frecuencias superiores a la frecuencia de corte. Para resultar de utilidad, debemos encontrar una magnitud respecto de la cual ésta pueda ser comparada.

Si calculamos la norma del vector de desplazamientos modales iniciales (incluyendo todas las componentes, sin importar su frecuencia) vemos que:

$$\|\mathbf{y}_0\| = (\mathbf{y}_0^T \mathbf{y}_0)^{1/2} = (\mathbf{q}_0^T \mathbf{M}^T \Phi \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0)^{1/2} = (\mathbf{q}_0^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0)^{1/2} \quad (30)$$

Luego, combinando este resultado con la ecuación (29), obtenemos la desigualdad:

$$\frac{\left(\sum_{\Omega_K} \mathbf{y}_0^2\right)^{1/2}}{\|\mathbf{y}_0\|} \leq \frac{h^2}{6K_\Omega} \left(\frac{\Delta \ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{q}}}{\mathbf{q}_0^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0}\right)^{1/2} = \frac{h^2}{6K_\Omega (\mathbf{q}_0^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0)^{1/2}} \left(\Delta \ddot{\mathbf{q}}^T \Delta \mathbf{F}_{iner}\right)^{1/2} \quad (31)$$

siendo $\Delta \mathbf{F}_{iner}$ el vector donde se encuentran almacenados los “saltos” o “diferencias” de las fuerzas de inercia de un paso a otro. Logramos así una acotación al porcentaje de la energía total del sistema que se distribuye entre las componentes de frecuencia superior a la frecuencia de corte.

En casos generales (por ejemplo, en problemas dinámicos no homogéneos), reemplazaremos el vector de desplazamientos iniciales en (31) por un vector de desplazamientos de referencia \mathbf{q}_R , que da magnitudes características del modelo. En el apéndice A-1 proponemos una forma de evaluar este vector de referencia para modelos de mecanismos. De aquí en más denominaremos ℓ al valor de referencia dado por $\ell = (\mathbf{q}_R^T \mathbf{M} \mathbf{q}_R)^{1/2}$. El vector de desplazamientos de referencia para la estructura en consideración $-\mathbf{q}_R-$ es calculado una única vez al comienzo de la integración.

En consecuencia, definimos una función error relativo e_{rel} en la forma

$$e_{rel} = \frac{h^2}{6K_\Omega \ell} \left(\Delta \ddot{\mathbf{q}}^T \Delta \mathbf{F}_{iner}\right)^{1/2} \leq TOL \quad (32)$$

y basamos nuestra estrategia de selección del paso de integración en adoptar un paso tal que dicho error relativo sea inferior a una tolerancia TOL fijada por el usuario. El desarrollo realizado anteriormente nos permite asegurar que el paso de integración que adoptará el algoritmo hará que la energía disipada se vea acotada indirectamente por TOL : la suma de amplitudes modales de componentes superiores a la frecuencia de corte está limitada por el valor de tolerancia fijado:

$$\left(\frac{\sum_{\Omega_K} \mathbf{y}_0^2}{\sum_{\Omega_K} \mathbf{y}_R^2}\right)^{1/2} \leq TOL \quad (33)$$

De esta manera, se logra una regulación automática del paso de tiempo, el cual se adapta naturalmente a circunstancias cambiantes en el curso del análisis.

Debe destacarse que la tolerancia TOL resulta totalmente independiente del problema. En los ejemplos analizados, un valor $TOL = 1 \times 10^{-3}$ entregó resultados correctos desde un punto de vista ingenieril, con pasos de integración apropiados para el problema tratado. Todo el análisis precedente está realizado considerando que h es aproximadamente constante y los sistemas a integrar son lineales. Es posible extender lo visto a casos no-lineales basados en una linealización del problema. Entre los ejemplos numéricos tratados presentamos un ejemplo con marcada no linealidad, obteniendo excelentes resultados.

ESTRATEGIA DE CAMBIO DE PASO

En la sección anterior hemos desarrollado una forma de estimar un error relativo, que depende de las características del sistema y del paso de tiempo usado. Buscaremos ahora fijar una estrategia de variación del paso de tiempo h tal que lleve y mantenga —durante el cálculo— al error local medido por la ecuación (32) a valores inferiores a la tolerancia TOL . Para ser coherentes con la teoría expuesta, y mantener válidos los criterios de precisión y estabilidad del algoritmo de integración, el paso de tiempo se deberá mantener constante durante lapsos prolongados. En consecuencia, la estrategia a seguir debe asegurar que éste no cambie a menos que sea estrictamente necesario, evitando caer en una modificación permanente del incremento de tiempo que degradaría el algoritmo.

Analizando la ecuación (13), podemos estimar el efecto producido sobre la magnitud del error al variar el paso de tiempo. Llamando $r = h_1/h_2$ al cociente entre dos pasos de tiempo h_1 y h_2 , podemos ver que

$$e_{rel}(h_1) = e_{rel}(h_2) r^\eta \quad (34)$$

siendo η un coeficiente que varía entre 2 y 3, en la forma

$$\eta \rightarrow \begin{cases} 3 & \text{si } \Omega \rightarrow 0 \\ 2 & \text{si } \Omega \rightarrow \infty \end{cases} \quad (35)$$

Vemos que la variación del error depende del contenido frecuencial del sistema en análisis. En lo que sigue adoptaremos (en forma un tanto arbitraria) $\eta = 3$, aunque la estrategia a seguir nos independizará en parte de esta decisión.

Decidiremos el nuevo paso de integración de acuerdo a la relación entre el error relativo calculado y la tolerancia fijada por el usuario, basados en ideas expuestas en la referencia⁷. Siguiendo un criterio conservativo, buscaremos que en todo momento el error se ubique en torno a un valor igual a la mitad de la tolerancia. Diferenciaremos cuatro casos:

- i. Si el error supera la tolerancia, rechazamos el paso anterior y lo recalculamos usando un incremento de tiempo igual a la mitad del valor anterior.
- ii. Si el error es inferior a la tolerancia, pero mayor que la mitad de ésta, aceptamos el paso calculado pero el próximo incremento de tiempo lo disminuimos tratando de llevar el error a un valor $TOL/2$, siguiendo la ecuación (34) (ver Figura 3).
- iii. Si el error es inferior a la mitad de la tolerancia, pero superior a un octavo de $TOL/2$, mantendremos el valor del paso. Este criterio se basa en que, de acuerdo a lo indicado por la ecuación (34), de aumentarse el paso al doble del valor anterior el error pasaría a superar la cota deseada (la mitad de la tolerancia).
- iv. Si el error es inferior a un dieciseisavo de la tolerancia, aceptamos el paso de tiempo anterior y aumentamos el nuevo incremento al doble del valor precedente.

La Figura 3 presenta un diagrama de flujo, en donde se aprecian claramente las distintas acciones a seguir para la selección del nuevo paso de tiempo.

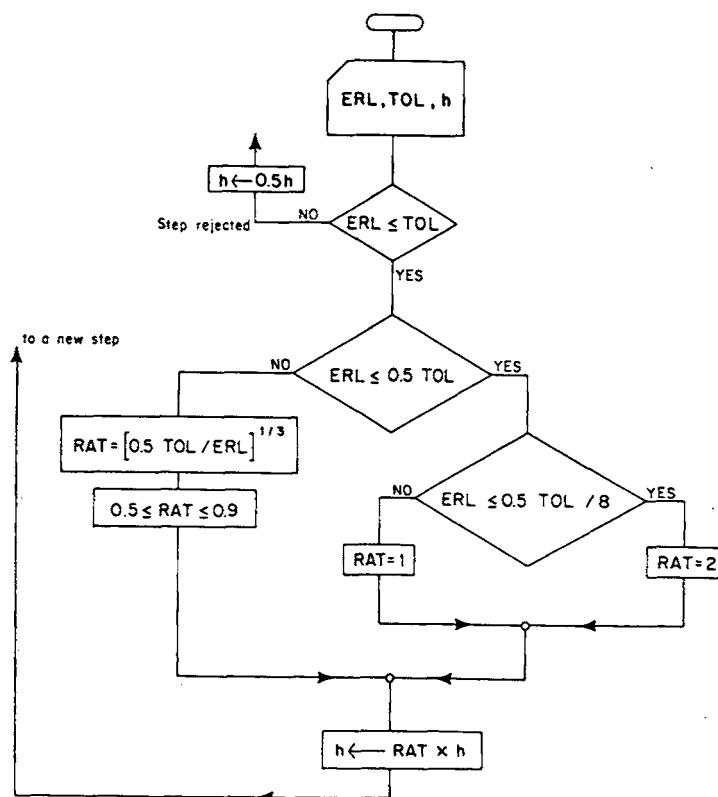


Figura 3. Estrategia de selección del paso.

EJEMPLOS NUMERICOS

En esta sección presentamos diversos ejemplos de aplicación. Las pruebas fueron realizadas utilizando el programa de análisis de mecanismos MECANO³, al cual se incorporó el algoritmo.

Comenzamos mostrando casos sencillos (sistemas de un grado de libertad), realizando un estudio paramétrico que permite verificar la validez de las ecuaciones (14,15).

Luego calculamos la respuesta en un problema dinámico lineal multidimensional, poniendo de manifiesto la capacidad del algoritmo de adaptar el paso e integrar adecuadamente las componentes del sistema efectivamente excitadas. Los resultados son usados para verificar las predicciones de la teoría para casos multidimensionales.

Por último presentamos dos ejemplos de mecanismos con alta no-linealidad e impacto. Se aprecia en estos casos la capacidad del método de asegurar, en un primer y único análisis, resultados de muy buena calidad en problemas de difícil solución.

Oscilador lineal de un grado de libertad

Analizamos un sistema de un grado de libertad (como el planteado en la ecuación (7)) para dos valores distintos de rigidez: $\omega_1^2 = 1000$ y $\omega_2^2 = 100$; la excitación inicial

fue en ambos casos $y_0 = 0.01$. El análisis se repitió para distintos valores de tolerancia del algoritmo de control del paso:

$$\frac{\varepsilon(\Omega)}{K_\Omega} = \frac{h^2}{6 K_\Omega |y_0|} |\Delta \ddot{y}| \leq TOL$$

(comparar con la ecuación (14)), y en cada caso se determinó el paso de integración promedio escogido por el algoritmo.

En la Figura 4 representamos en ordenadas la tolerancia impuesta y en abscisas la frecuencia adimensional calculada como el producto de la frecuencia del oscilador por el paso promedio que determina el algoritmo. Puede observarse además en la misma figura la función $\varepsilon(\Omega)/K_\Omega$ calculada por la ecuación (13). La distancia entre ésta última y los valores medidos se debe al criterio seguido de mantener el error en un valor igual a la mitad de la tolerancia impuesta.

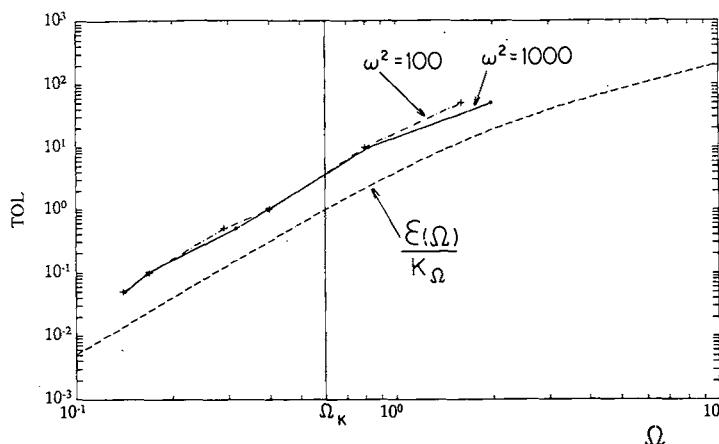


Figura 4. Oscilador lineal de un grado de libertad.
Análisis paramétrico variando la tolerancia de integración.

Debemos notar que para una tolerancia $TOL = 1$, el algoritmo encuentra un paso de integración tal que la frecuencia adimensional toma el valor $\Omega = 0.4$ en ambos casos, próximo a la frecuencia de corte $\Omega_K = 0.6$. Esto coincide plenamente con las predicciones de la teoría.

La Figura 5 muestra finalmente la variación del paso de tiempo para el caso $TOL = 1$, $\omega^2 = 100$, en el curso de la integración.

Estructura aporticada

Con este ejemplo pretendemos corroborar la teoría para casos multidimensionales. La estructura estudiada es mostrada en la Figura 6, y posee las siguientes características físicas: área normal $A = 3.2 \times 10^{-3}$, momento de inercia $I = 1.707 \times 10^{-6}$, densidad $\rho = 7800$, módulo de elasticidad $E = 206.01 \times 10^9$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. El valor de referencia y el parámetro α del algoritmo valen en este caso: $\ell = 34.0412$, $\alpha = -0.05$.

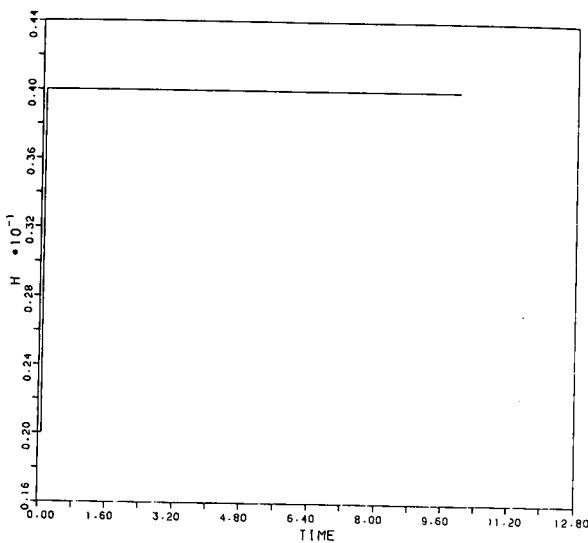


Figura 5. Oscilador lineal de un grado de libertad.
Evolución del paso de tiempo; TOL = 1; $\omega^2 = 100$.

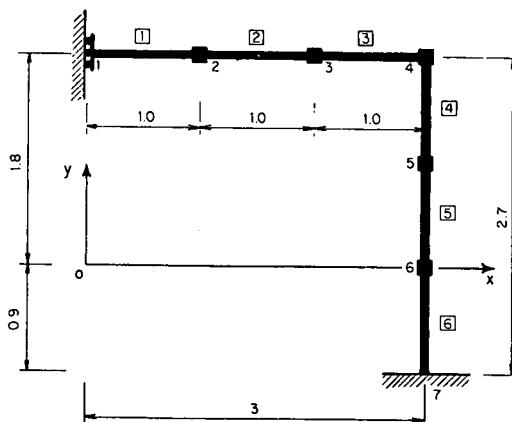


Figura 6. Estructura aporticada.

MQDO	PULSACION [rad/s]	MODO	PULSACION [rad/s]
1	5.542866E+01	9	2.793058E+03
2	2.693958E+02	10	3.541398E+03
3	3.832101E+02	11	4.415571E+03
4	8.230052E+02	12	5.987948E+03
5	9.948448E+02	13	8.182647E+03
6	1.786312E+03	14	9.428862E+03
7	2.140908E+03	15	1.456397E+04
8	2.655421E+03	16	1.662069E+04

Tabla I.

La Tabla I muestra las frecuencias características de la estructura. Para mantener una relación con lo expuesto en la teoría, la excitación fue del tipo "desplazamientos iniciales". Se analizaron dos casos: uno, en que la excitación es tal que excita esencialmente las componentes de baja frecuencia del sistema; y un segundo, en donde se buscó excitar frecuencias más elevadas.

a) Excitación predominante en las componentes de baja frecuencia

Se impuso un desplazamiento inicial en la componente vertical del nodo 1 igual a 0.006, y se pidió que el resto de los desplazamientos fuera tal que la estructura se encuentre en equilibrio. Esto indujo una excitación esencialmente en modos de baja frecuencia, como veremos luego. Se realizaron dos análisis de la respuesta, para dos valores de tolerancia diferentes: $TOL_1 = 1 \times 10^{-3}$ y $TOL_2 = 1 \times 10^{-4}$. Denominamos a estos casos PMB1 y PMB2 respectivamente.

En las Figuras 7 y 8 se pueden ver las posiciones y aceleraciones calculadas para ambas opciones en la componente vertical del nodo 1. En la Figura 9 es mostrada la evolución de los respectivos pasos de integración, pudiéndose determinar un paso promedio $h_1 = 0.26 \times 10^{-2}$ en el primer caso y $h_2 = 0.1 \times 10^{-2}$ en el segundo.

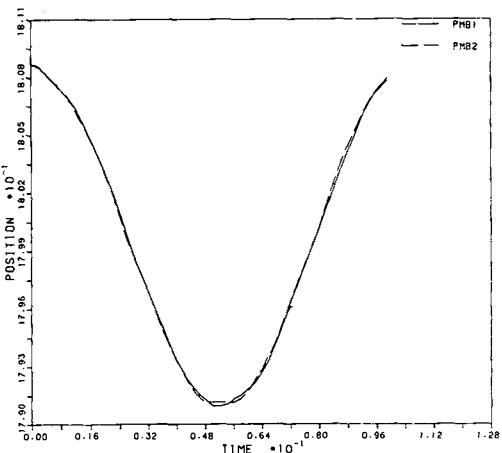


Figura 7. Pórtico, casos PMB1 y PMB2. Evolución de la posición vertical del nodo 1.

Para validar las predicciones de la teoría, se calculó la proyección de los desplazamientos iniciales en la base modal, y se representaron éstos en términos de la frecuencia adimensional promedio (calculada usando el paso de tiempo medio dado por el algoritmo). La Figura 10 muestra la distribución de desplazamientos modales iniciales (en valor absoluto), en función de la frecuencia adimensional. En la misma figura se puede comprobar, combinando los valores vistos en la Tabla I con un paso medio $h_1 = 0.26 \times 10^{-2}$, que para una tolerancia de integración igual a $TOL_1 = 1 \times 10^{-3}$ se integra correctamente un sólo modo (línea continua). Para una tolerancia de $TOL_2 = 1 \times 10^{-4}$, que lleva a un paso medio de $h_2 = 0.1 \times 10^{-2}$ (Figura 9), vemos que son tres las componentes que poseen frecuencia adimensional Ω menor que la frecuencia

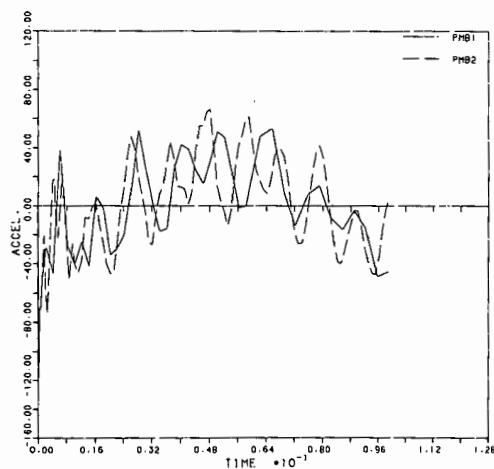


Figura 8. Pórtico, casos PMB1 y PMB2. Evolución de la aceleración vertical del nodo 1.

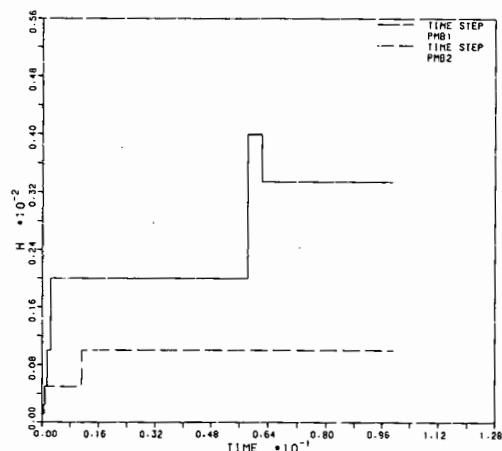


Figura 9. Pórtico, casos PMB1 y PMB2. Evolución del paso de integración.

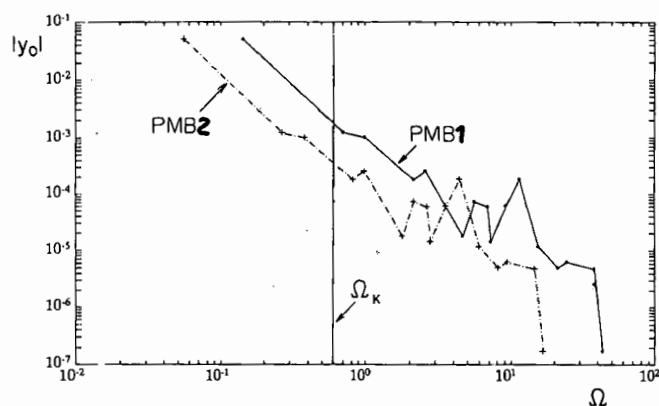


Figura 10. Pórtico, casos PMB1 y PMB2.
Desplazamientos modales iniciales en función de la frecuencia adimensional.

de corte Ω_K (línea de trazos). Es posible igualmente comprobar el cumplimiento del acotamiento mencionado en la ecuación (33). Además podemos ver en la figura la traslación que sufre el espectro por variación de la tolerancia del integrador.

b) Excitación de modos intermedios

Para excitar componentes modales de mayor frecuencia se impusieron los siguientes desplazamientos iniciales: la componente vertical del nodo 1 igual a 0.006, la componente horizontal del nodo 5 igual a 0.01, y el resto de los desplazamientos tal que la estructura se encuentre en equilibrio. Se realizaron dos análisis de respuesta transitoria, para distintas tolerancias: casos PMM1 ($TOL_1 = 1. \times 10^{-3}$) y PMM2 ($TOL_2 = 1. \times 10^{-4}$). En la Figura 11 graficamos la variación en el tiempo de las aceleraciones verticales del nodo 1; elegimos representar las aceleraciones, ya que permiten apreciar mejor la inclusión de componentes de alta frecuencia en la respuesta dinámica.

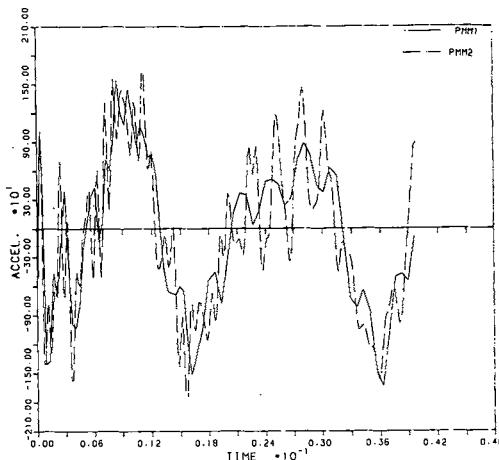


Figura 11. Pórtico, casos PMM1 y PMM2. Evolución de la aceleración vertical del nodo 1.

Como se puede ver en la Figura 13, para los mismos valores de tolerancia exigidas que en los casos PMB1 y PMB2, el algoritmo detecta la existencia de componentes de frecuencia más alta con peso en la respuesta y produce una reducción general del paso de tiempo. Se aprecia que para el caso PMM1 ($TOL_1 = 1. \times 10^{-3}$) y con un paso promedio $h_1 = 0.67 \times 10^{-3}$ (Figura 12), se incluyen por debajo de la frecuencia de corte los cuatro primeros modos. Para el caso PMM2 ($TOL_2 = 1. \times 10^{-4}$), el integrador incluye nueve componentes modales ($h_2 = 0.18 \times 10^{-3}$) debajo de la frecuencia de corte. Igual que en el ejemplo anterior, aquí es posible verificar que la norma de las amplitudes de los desplazamientos modales iniciales que se ubican por encima de la frecuencia de corte, es menor que la tolerancia exigida.

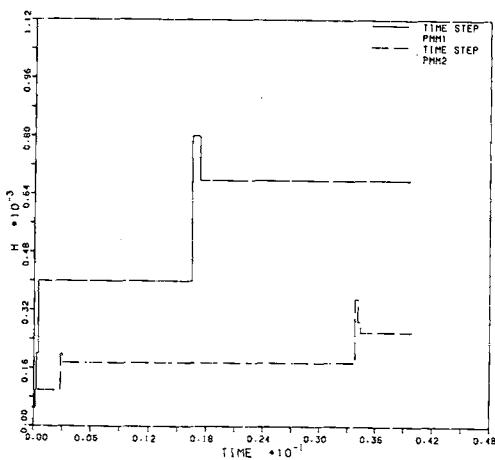


Figura 12. Pórtico, casos PMM1 y PMM2. Evolución del paso de integración.

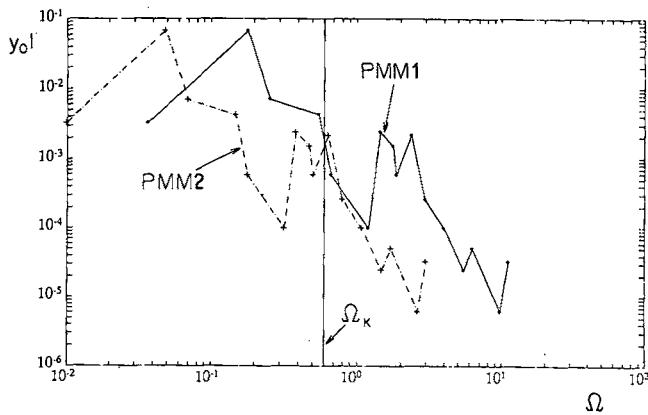


Figura 13. Pórtico, casos PMM1 y PMM2
Desplazamientos modales iniciales en función de la frecuencia adimensional.

Casos no lineales - mecanismos

En esta sección pretendemos mostrar ejemplos con alta no-linealidad en el sistema a resolver. Fueron estudiados dos casos: un péndulo doble como el mostrado en la Figura 14 y un mecanismo de barras articuladas con bloqueo; ambos involucran ecuaciones de restricción de tipo algebraico.

Péndulo doble

Los elementos de unión fueron considerados como cuerpos rígidos y las masas concentradas en los nodos: $m_1 = 5$ y $m_2 = 2$ (ver Figura 14). La excitación impuesta fue una fuerza horizontal en el nodo 2 con la variación temporal indicada en la misma figura. La tolerancia adoptada fue $TOL = 1. \times 10^{-4}$ y el parámetro de integración del algoritmo: $\alpha = -0.15$.

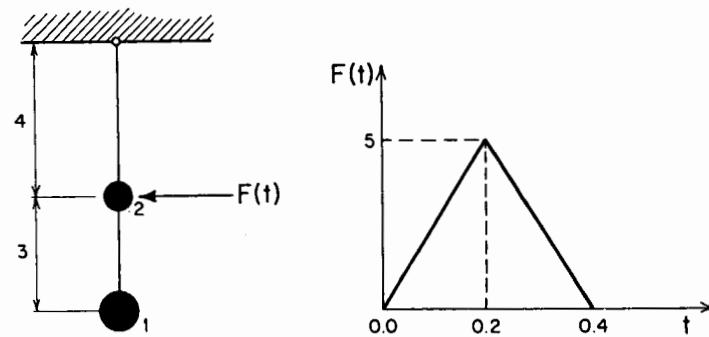


Figura 14. Péndulo doble.

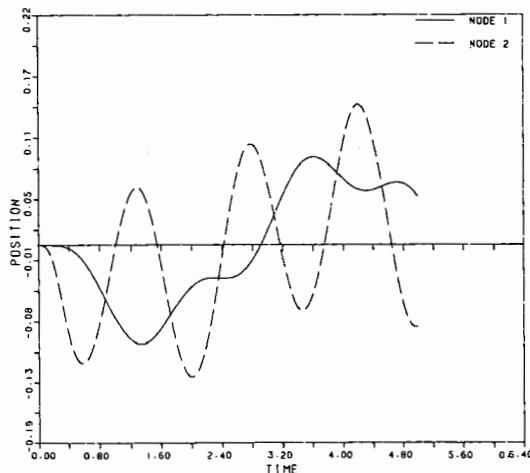


Figura 15. Péndulo doble. Evolución de la posición horizontal de los nodos 1 y 2.

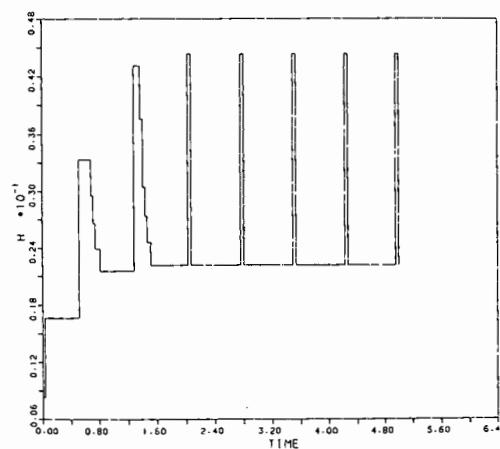


Figura 16. Péndulo doble. Evolución del paso de integración.

En las Figuras 15 y 16 se muestra la variación de la posición horizontal de los nodos 1 y 2 en el tiempo, así como la evolución del paso de integración. La integración fue realizada correctamente y puede apreciarse cómo el paso de tiempo se ajusta automáticamente en el transcurso de la simulación (Figura 16).

Mecanismo de barras articuladas con bloqueo

Consideramos este caso como el ejemplo más exigente. El mecanismo consta de dos vigas, articuladas entre sí y vinculadas, una de ellas a una articulación fija y la otra a un apoyo deslizante sobre el eje x (Figura 17). Se simuló la apertura del mecanismo hasta llegar a una posición completamente extendida, donde el ángulo formado por las barras es $\theta = \pi$ y la rótula B es bloqueada. El modelado de este fenómeno se logra introduciendo la ley de variación del momento en B indicada en la misma figura.

Las características estructurales del sistema son: área normal $A = 4.8 \times 10^{-3}$, momento de inercia $I_{zz} = 4.5 \times 10^{-5}$, densidad $\rho = 7800$, módulo de elasticidad $E = 2.101 \times 10^{11}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$; y los parámetros de integración: $TOL = 1. \times 10^{-4}$ y $\alpha = -0.15$.

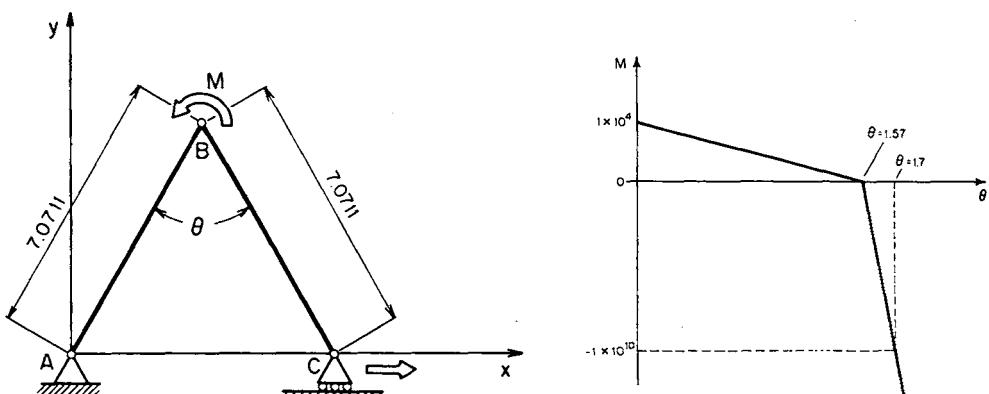


Figura 17. Mecanismo de barras con bloqueo.

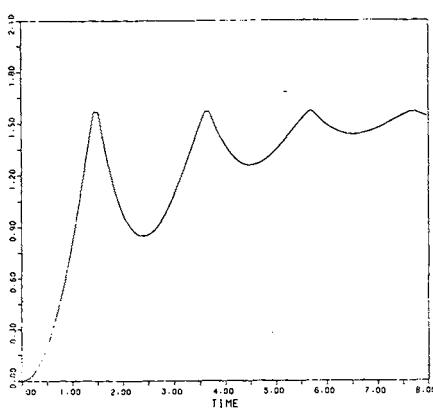


Figura 18. Mecanismo de barras con bloqueo. Evolución del ángulo de apertura de barras en el tiempo

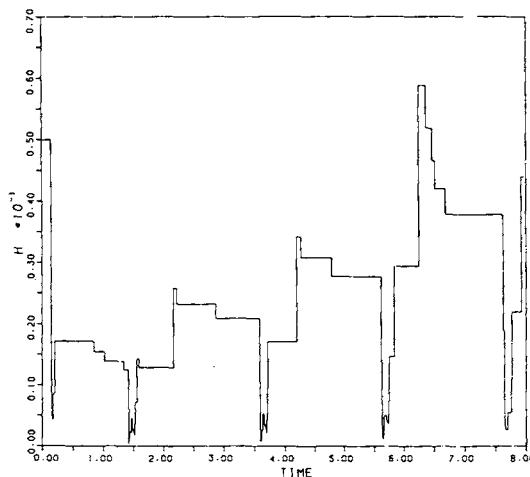


Figura 19. Mecanismo de barras con bloqueo. Evolución del paso de integración.

En la Figura 18 se muestra la variación del ángulo θ con el tiempo y en la Figura 19 la evolución del paso de integración h . Debe destacarse la capacidad del algoritmo de disminuir el paso en los momentos de impacto y aumentarlo cuando es posible, lográndose de esta forma una integración económica y muy precisa.

CONCLUSIONES

Hemos presentado un algoritmo de integración temporal a paso variable sumamente robusto y eficiente. La estrategia de variación del paso se basó en mantener el error local (calculado en base a derivadas de orden superior), por debajo de una tolerancia especificada al comienzo de la integración. Se estableció una correlación adecuada entre esta medida y el paso de integración, de forma de mantener el mismo en valores apropiados. Se desarrollaron varios ejemplos numéricos, encontrándose una total concordancia con las predicciones teóricas y mostrando la potencialidad del método propuesto.

La metodología desarrollada es altamente original y *absolutamente general*. Dicho en otras palabras, si bien en este trabajo aplicamos la misma al algoritmo integrador de Hilber, Hughes y Taylor (HHT), es posible emplear ésta en *cualquier* integrador implícito para formular una estrategia de variación del paso. Mencionamos igualmente que, bajo la óptica desarrollada, no estamos limitados a utilizar la función ϵ vista. Bien podrían concebirse otras combinaciones de aceleraciones, velocidades y desplazamientos que den lugar a funciones error (o "filtro") que aseguren un mejor funcionamiento del algoritmo. Dicho tema será objeto de próximas investigaciones.

En la implementación actual de MECANO, el método mostró excelentes resultados, permitiendo resolver en forma directa problemas con alta no linealidad e impacto. La resolución de estos casos resulta excesivamente cara, o bien casi imposible por la dificultad para lograr convergencia, usando algoritmos a paso constante.

APENDICE A-1: CALCULO DE LOS VALORES DE REFERENCIA

Para calcular el valor de referencia ℓ , se hace necesario fijar valores característicos en el vector \mathbf{q}_R :

$$\ell = (\mathbf{q}_R^T \mathbf{M} \mathbf{q}_R)^{1/2} \quad (A - 1)$$

En nuestro caso, el algoritmo fue usado para analizar mecanismos, e implementado en el programa MECANO³. Se hicieron, en consecuencia las siguientes consideraciones

- i) Para los GDL de rotación, el programa maneja valores de ángulos comprendidos entre 0 y $|\pi|$; luego adoptamos como referencia para dichas componentes en \mathbf{q}_R una décima parte del máximo

$$q_{Rrot} = \pi/10 \quad (A - 2)$$

- ii) Con respecto a los GDL de traslación, MECANO trabaja con “posiciones” en lugar de “desplazamientos”; para tener un valor que corresponda a las dimensiones del problema elegimos dichas componentes en la forma

$$q_{Rtr} = \frac{L_d}{\sqrt{NEL}} \quad (A - 3)$$

donde L_d es la longitud de la diagonal del prisma rectangular que encierra al modelo en su configuración inicial, y NEL es el número total de elementos.

- iii) Finalmente, para realizar el producto (A-1), se utilizó la matriz de masas concentradas.

REFERENCIAS

1. A. Cardona y M. Gérardin, “Time integration of the equations of motion in mechanism analysis”, *Computers and Structures*, Vol. **33**, pp. 801-820, (1989).
2. A. Cardona, “An Integrated approach to mechanism analysis”, Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias Aplicadas, Universidad de Lieja, (1989).
3. A. Cardona y M. Gérardin, “SAMCEF-Module d’analyse de mécanismes MECANO (manuel d’utilisation)”, Facultad de Ciencias Aplicadas, Universidad de Lieja, (1987).
4. O.C. Zienkiewicz, W.L. Wood, N.W. Hine y R.L. Taylor, “A unified set of single step algorithms; part 1: General formulation and applications”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **20**, pp. 1529-1552, (1984).
5. R.M. Thomas y I. Gladwell, “Variable-Order Variable-Steps Algorithms for Second-Order Systems. Part 1: The Methods”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **26**, pp. 39-53, (1988).
6. I. Gladwell y R.M. Thomas, “Variable-Order Variable-Steps Algorithms for Second-Order Systems. Part 2: The Codes”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **26**, pp. 55-80, (1988).
7. L.F. Shampine y M.K. Gordon, “Computer solution of ordinary differential equations. The initial value problem”, Freeman and Company, (1975).
8. A. Cassano y A. Cardona, “Algoritmo de paso variable para sistemas de segundo orden”, *Mecánica Computacional*, Vol. **10**, AMCA, (1990).

9. M. Anantharaman y M. Hiller, "Formulation of the equations of motions for mechanical systems consisting of rigid and flexible bodies", *Fachgebiet Mechanik*, Universität Duisburg, Alemania Occidental, (1990).
10. L. Petzold, "A description of DASSL: a differential/algebraic system solver". En R. Stepleman, Editor, *Scientific Computing*, pp. 65-68, North-Holland, (1983).
11. B. Simeon, C. Führer y P. Rentrop, "Introduction to differential-algebraic equations in vehicle system dynamics", Technische Universität München, (1990).
12. A. Cassano y A. Cardona, "A comparison between three variable-step algorithms for the integration of the equations of motion in structural dynamics", *Latin American Applied Research*, Vol. **21**, pp.187-197, (1991).
13. C. Hoff y R.L. Taylor, "Step-by-step integration methods and time step control for systems with arbitrary stiffness", en *Anales del Second World Congress on Computational Mechanics*, Stuttgart, (1990).
14. S.H. Lee y S.S. Hsieh, "Expedient implicit integration with adaptive time stepping algorithm for nonlinear transient analysis", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **81**, pp. 151-172, (1990).
15. H.M. Hilber, T.J.R. Hughes y R.L. Taylor, "Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **5**, pp. 283-292, (1977).
16. T.J.R. Hughes, *Algorithms for hyperbolic and parabolic-hyperbolic problems en "The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis"*, Prentice - Hall, Englewood Cliffs, N.J., Cap. 9, pp. 490-569, (1987).

