

APLICACIONES DE LA SUPERCOMPUTACION EN AERODINAMICA

J. PERAIRE,*
J. PEIRO,*
K. MORGAN**
O. HASSAN***
y
O. C. ZIENKIEWICZ**

**Department of Aeronautics, Imperial College, London SW7 2BY, U.K.*

***Department, of Civil Engineering,
University College, Swansea SA2 8PP, U.K.*

****CDR, Innovation Centre, University College, Swansea SA2 8PP, U.K.*

RESUMEN

El desarrollo de métodos de cálculo basados en el uso de mallas no estructuradas para la simulación de flujos compresibles de interés práctico en la industria aeronáutica ha progresado considerablemente en los últimos años. En este artículo presentamos el estado actual de nuestro trabajo en este campo describiendo un algoritmo para la solución de las ecuaciones de Euler de flujo compresible en mallas no estructuradas de tetraedros que es eficiente en la utilización de memoria y tiempo de ordenador. Incluimos, así mismo, resultados del análisis numérico del flujo alrededor de un motor de aviación instalado que evidencian la capacidad del algoritmo propuesto para simular flujos tridimensionales de interés industrial. Por último, describiremos un método multimalla no estructurado diseñado para acelerar la convergencia hacia el estado estacionario del algoritmo propuesto. La mejora en eficacia del algoritmo quedará demostrada mediante la resolución del flujo en torno a un avión ejecutivo bimotor.

SUMMARY

Major progress has been made in recent on the development of unstructured mesh methods for the solution of compressible aerodynamic flows of practical interest. In this paper we indicate the current status of our work in this area by outlining a low storage, computationally efficient algorithm for the solution of the compressible Euler equations on unstructured tetrahedral meshes. The performance of the algorithm is demonstrated by including the results of a numerical analysis of a flow past an installed aero-engine nacelle. Recent work on improving the computational efficiency by incorporating an unstructured multigrid acceleration procedure is described and demonstrated for a complete twin engined aircraft configuration.

Recibido: Mayo 1992

INTRODUCCION

La simulación mediante métodos numéricos de flujos de interés en aeronáutica y su utilización como herramienta de diseño aerodinámico han experimentado un auge considerable en los últimos veinte años¹.

Las técnicas desarrolladas en ese período han estado preferentemente basadas en la discretización, mediante aproximaciones en diferencias finitas o volúmenes finitos en mallas estructuradas, de las ecuaciones en derivadas parciales que describen el comportamiento del fluido estudiado. Dichas técnicas han permitido la simulación numérica de flujos tridimensionales en torno a simples geometrías como, por ejemplo, alas de avión y combinaciones de fuselaje y ala² con una gran precisión.

El éxito de estas técnicas ha generado un interés creciente en la simulación de flujos alrededor de configuraciones más complejas en las que se incluyen un mayor número de componentes: alerones, motores, etc., hasta llegar a la simulación del flujo en torno a un avión completo.

El principal problema con que se enfrenta el analista es la generación de una malla que discretice la región en torno a la geometría considerada de tal manera que la representación numérica de la geometría y las características del flujo sea satisfactoria. Así mismo, es extremadamente importante mantener el número de puntos empleados en la discretización dentro de los límites que el coste en tiempo y memoria del ordenador disponible permitan.

Aunque generadores de mallas estructuras han alcanzado un alto grado de complejidad y eficiencia³, la entrada de datos en el caso de una geometría complicada con un elevado número de componentes próximos es un proceso difícil de automatizar y que puede representar varios meses de trabajo incluso para un analista experto.

Un procedimiento alternativo, propuesto para soslayar este tipo de dificultades es el empleo de mallas no estructuradas. Este tipo de mallas introduce una mayor flexibilidad en el proceso de generación facilitando su automatización y, a su vez, la utilización de métodos adaptativos de una manera relativamente sencilla.

Nuestro interés en la simulación de flujos compresibles es consecuencia de un proyecto financiado por la Aerothermal Loads Branch (NASA Langley Research Center) en el que, dada nuestra experiencia en el campo de los elementos finitos consideramos únicamente mallas no estructuradas desde el principio. En nuestro trabajo hemos utilizado, casi exclusivamente, mallas de triángulos o tetraedros y hemos desarrollado diversos algoritmos⁴⁻⁷ para la simulación de flujos compresibles aptos para ser implementados en tales mallas. Se ha dedicado especial atención a las áreas de generación de malla y adaptividad en la que hemos propugnado el empleo de un método totalmente automático basado en el concepto de propagación del frente de generación^{8,9}.

Estos métodos han proporcionado una herramienta rápida, eficaz y sistemática para la simulación de flujos compresibles en mallas no estructuradas¹⁰ que permite obtener de manera expedita representaciones de flujos en los que intervienen geometrías complejas de avión descritas en gran detalle. Esta metodología resulta, por tanto, muy atractiva para el analista responsable del proceso de diseño de los diferentes componentes aerodinámicos.

En este artículo describimos un algoritmo para la simulación de flujos compresibles

en mallas no estructuradas. Las ecuaciones de Euler que describen el flujo son resueltas mediante un método de elementos finitos basados en una aproximación espacial de Galerkin con adición explícita de viscosidad artificial para garantizar la estabilidad numérica. La integración temporal de las ecuaciones hacia el estado estacionario objeto del análisis se realiza mediante un esquema de Runge-Kutta aplicado a la forma transitoria de las ecuaciones. La falta de estructura en la malla requiere el uso intensivo de acceso indirecto de memoria por parte del algoritmo numérico. Ello conlleva una penalización en términos de memoria y tiempo de ordenador cuando el método propuesto se compara con similares procesos de resolución que utilizan mallas estructuradas.

Con objeto de reducir la memoria de ordenador que una estructura de datos tradicional de elementos finitos requiere, hemos desarrollado una estructura basada en aristas de mallas de tetraedros. Este tipo de estructura de datos presenta ciertas similitudes con otras propuestas recientemente por otros investigadores en este campo^{11,12}.

Para demostrar las cualidades del método incluimos los resultados correspondientes a la simulación¹³ del flujo alrededor de un motor de aviación instalado en un avión de transporte civil. En el marco de la industria aeronáutica, el problema de optimizar la potencia del motor una vez instalado ha sido tradicionalmente abordado mediante el análisis experimental en túnel de viento de modelos reducidos, siendo estos experimentos largos y costosos de realizar. Por ello se está incrementando actualmente el uso de técnicas numéricas para mejorar el valor de tales ensayos ya que éstas permiten reducir el número de configuraciones a considerar y facilitan, así mismo, la interpretación de los resultados experimentales.

Aunque el empleo de la estructura de datos basada en la aristas de la malla reduce sensiblemente el tiempo de ordenador requerido por el algoritmo, la obtención de una configuración compleja presenta todavía grandes demandas de tiempo. La convergencia de algoritmos similares implementados en mallas estructuradas ha sido acelerada considerablemente mediante el empleo de métodos multimalla¹⁴. Éstos utilizan una secuencia de mallas en las que nodos intermedios son sucesivamente eliminados y, consecuentemente, la distancia entre ellos se dobla en mallas consecutivas. Cuando la malla que se utiliza no es estructurada, el concepto multimalla anterior ha de ser replanteado^{15,16,12,17} ya que mallas consecutivas no precisan estar encajadas, es decir, no necesitan tener nodos comunes. El algoritmo propuesto se ha complementado con la adición de uno de dichos métodos multimalla y su rendimiento ha sido verificado en la resolución del flujo no viscoso en torno a un avión ejecutivo bimotor. Los resultados demuestran un aumento destacable de la eficiencia del algoritmo que incrementa significativamente el atractivo de la metodología propuesta a los ojos del analista enfrentado al problema de estudiar de forma rápida el efecto de cambios en el diseño aerodinámico de los diversos componentes del avión.

ECUACIONES DE EULER DE FLUJO COMPRESIBLE

Consideraremos las ecuaciones de Euler que describen el flujo transitorio de un fluido compresible y no viscoso escritas en forma conservativa como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{F}^j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

donde el vector de variables conservativas $\mathbf{U}$ y los correspondientes vectores de flujos inviscidos $\mathbf{F}^j$ se definen mediante

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho \varepsilon \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}^j(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u_j \\ \rho u_1 u_j + p \delta_{1j} \\ \rho u_2 u_j + p \delta_{2j} \\ \rho u_3 u_j + p \delta_{3j} \\ (\rho \varepsilon + p) u_j \end{bmatrix} \quad (2)$$

En la expresión previa, δ_{ij} representa la delta de Kronecker, ρ, p y ε denotan, respectivamente, la densidad, presión y energía específica total del fluido y $u_j; j = 1, 2, 3$ son las componentes de la velocidad del fluido en las direcciones $x_j; j = 1, 2, 3$ de un sistema de referencia ortonormal. El valor de la presión se determina a través de la ecuación de estado de un gas perfecto

$$p = (\gamma - 1) \rho \left(\varepsilon - 0.5 \sum_{j=1}^3 u_j^2 \right) \quad (3)$$

donde $\gamma (= 1.4)$ es el cociente de los calores específicos.

Se pueden obtener soluciones estacionarias de estas ecuaciones avanzando la solución en el tiempo hasta alcanzar el estado estacionario. El algoritmo numérico empleado resulta de la combinación de una integración en espacio por medio de un método de Galerkin y una integración de tipo Runge-Kutta en el tiempo efectuadas de manera independiente.

ALGORITMO NUMERICO DE SIMULACION DE FLUJO

Generación de Malla

La región espacial, Ω , en la que llevaremos a cabo la simulación es dividida en un conjunto de elementos tetraédricos lineales de cuatro nodos. Esta discretización se realiza mediante un método de generación de malla basado en la idea de propagación de un frente de generación⁸⁻⁹. El primer paso en la generación de la malla de tetraedros es la obtención de una triangulación del contorno, Γ , del dominio. Para producir esta triangulación se emplea una versión bidimensional del algoritmo de generación convenientemente modificada para el tratamiento de superficies curvas. El conjunto de caras triangulares resultante forma el frente de generación inicial que es el punto de partida del generador tridimensional.

La división del interior de la región considerada en tetraedros se efectúa de manera recursiva, generando un elemento a cada paso y propagando posteriormente el frente de generación. Una característica esencial del método adoptado es que el tamaño y forma de los elementos que se generan está controlado mediante funciones de distribución espacial que son definidas, de manera sencilla, por el usuario del sistema. El proceso de generación es totalmente automático y especialmente apto para el mallado rápido de dominios de geometría arbitraria^{18,19}.

Formulación Variacional

El punto de partida para la construcción de una aproximación espacial mediante elementos finitos en una región, Ω , es la adopción de una forma variacional adecuada de las ecuaciones del flujo para todo $t > 0$. Una formulación débil apropiada para el problema definido por el sistema de ecuaciones (1) se puede plantear de la siguiente manera: encontrar $U(\mathbf{x}, t)$ tal que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} W d\Omega = \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} F^j \frac{\partial W}{\partial x_j} d\Omega - \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma} F^j n^j W d\Gamma \quad (4)$$

para cualquier función $W(\mathbf{x})$ y para todo $t > 0$. En esta ecuación, n^j representa la componente j -ésima del vector unitario exterior, $\mathbf{n}$, del contorno Γ de Ω . La región Ω está representada como un conjunto de elementos finitos lineales de cuatro nodos (tetraedros) en el que buscamos una solución aproximada U^* lineal a intervalos de la forma

$$U^*(\mathbf{x}, t) = \sum_j U_J(t) N_J(\mathbf{x}) \quad (5)$$

donde el sumatorio abarca todo nodo J ($1 \leq J \leq n_p$) en la malla, $U_J(t)$ representa el valor (incógnito) de la aproximación U^* en el nodo J para el tiempo t y $N_J(\mathbf{x})$ en la tradicional función de forma lineal asociada al nodo J . Utilizando la forma débil (4) de la ecuación (1), la solución aproximada de tipo Galerkin se contruye como una función U^* que verifica

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U^*}{\partial t} N_I d\Omega = \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} F^j(U^*) \frac{\partial N_I}{\partial x_j} d\Omega - \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma} F^j(U^*) n^j N_I d\Gamma \quad (6)$$

para cada N_I ($1 \leq I \leq n_p$) y para todo $t > 0$. Las integrales que aparecen en la expresión anterior son evaluadas como suma de contribuciones individuales de elementos y, dado el carácter local de las funciones de forma N_I , esta ecuación se puede escribir como

$$\sum_{e \in I} \int_{\Omega_e} \frac{\partial U^*}{\partial t} N_I d\Omega = \sum_{j=1}^3 \sum_{e \in I} \int_{\Omega_e} F^j(U^*) \frac{\partial N_I}{\partial x_j} d\Omega - \sum_{j=1}^3 \sum_{e \in I} \int_{\Gamma_e} F^j(U^*) n^j N_I d\Gamma \quad (7)$$

en la que el índice $e \in I$ del sumatorio se refiere únicamente a aquellos elementos que contienen el nodo I . Insertando en esta ecuación la forma adoptada para U^* , las integrales de la derecha pueden calcularse de manera exacta obteniendo

$$\sum_{e \in I} \int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial t} N_I d\Omega = \sum_{e \in I} \left[\int_{\Omega_e} N_I N_J d\Omega \right] \frac{d\mathbf{U}_J}{dt} = \mathbf{M}_{IJ} \frac{d\mathbf{U}_J}{dt} \quad (8)$$

donde $\mathbf{M}$ denota la matriz de masa consistente que, en la implementación práctica del algoritmo, es sustituida por su versión condensada (diagonal) $\mathbf{M}_L$. Las integrales que aparecen en la parte derecha de la ecuación (7) son evaluadas de manera aproximada mediante integración numérica de tipo Lobatto en cada elemento tetraédrico; por ejemplo, para un elemento E , formado por los nodos I , J , K y L , la integración espacial es aproximada en la forma

$$\int_{\Omega_E} \mathbf{F}^j \frac{\partial N_I}{\partial x_j} d\Omega \approx \frac{\Omega_E}{4} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \bigg|_E \{ \mathbf{F}_I^j + \mathbf{F}_J^j + \mathbf{F}_K^j + \mathbf{F}_L^j \} \quad (9)$$

en la que Ω_E es el volumen del elemento E . Un programa de elementos finitos organizado de manera tradicional obtendría la forma discreta de la ecuación (7), en cada nodo I de la malla, mediante un lazo sobre el número de elementos en el que, para cada elemento, se calcularían y sumarían contribuciones a los nodos integrantes del elemento. La estructura de datos asociada con esta organización del programa consistiría en una lista de los nodos I , J , K y L pertenecientes a cada elemento E en la malla.

La ecuación (7), sin embargo, puede ser reinterpretada y evaluada de modo diferente. Asumamos que el nodo I en la malla está conectado directamente, a lo largo de aristas de la malla, con un total de mI nodos: $J_1, J_2, \dots, J_{mI}$. Para facilitar la descripción, supondremos que el nodo I es interior aunque el procedimiento que exponemos a continuación ha de ser modificado de manera adecuada en los nodos del contorno. Utilizando las expresiones (8) y (9) podemos expresar la ecuación (7) como

$$[\mathbf{M}_L]_I \Delta \mathbf{U}_I = \Delta t \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^{mI} C_{IJ_s}^j (\mathbf{F}_I^j + \mathbf{F}_{J_s}^j) \quad (10)$$

donde $\Delta \mathbf{U}_I$ es el incremento en $\mathbf{U}_I$ para un incremento de tiempo Δt y los coeficientes en la ecuación previa satisfacen

$$\sum_{s=1}^{mI} C_{IJ_s}^j = 0 \quad \text{para todo } j \quad (11a)$$

$$C_{IJ_s}^j = -C_{J_s I}^j \quad \text{para todo } j \text{ y } J_s \quad (11b)$$

Si definimos el vector $\mathbf{C}_{IJ_s}$ mediante la expresión

$$\mathbf{C}_{IJ_s} = (C_{IJ_s}^1, C_{IJ_s}^2, C_{IJ_s}^3), \quad (12)$$

utilizamos $\mathcal{L}_{IJ_s}$ para representar el módulo de $\mathbf{C}_{IJ_s}$ y $\mathcal{S}_{IJ_s}$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{C}_{IJ_s}$, entonces la ecuación (10) puede expresarse de manera abreviada

$$[\mathbf{M}_L]_I \Delta \mathbf{U}_I = \Delta t \sum_{s=1}^{mI} \mathcal{L}_{IJ_s} (\mathcal{F}_I + \mathcal{F}_{J_s}) \quad (13)$$

con

$$\mathcal{F}_I = (\mathbf{F}_I^1, \mathbf{F}_I^2, \mathbf{F}_I^3) \cdot \mathbf{S}_{IJ_s} \quad \mathcal{F}_{J_s} = (\mathbf{F}_{J_s}^1, \mathbf{F}_{J_s}^2, \mathbf{F}_{J_s}^3) \cdot \mathbf{S}_{IJ_s} \quad (14)$$

La manera alternativa de obtener la forma discreta de la ecuación (7) es evidente y consiste en realizar un lazo sobre las aristas de la malla en el que, para cada arista, se calculan y suman contribuciones a los nodos apropiados. En este caso, la estructura de datos que se requiere consiste en una lista de los nodos I y J_s para cada arista de la malla. Para una malla general de tetraedros, la relación entre elementos y nodos es aproximadamente igual a 6 y entre aristas y nodos es del orden de 7. Esto significa que la estructura de datos basada en elementos requiere 24 posiciones de memoria por nodo mientras que la basada en aristas requiere únicamente 14. Resulta aparente, por tanto, que el almacenamiento de información en las aristas de la malla produce la estructura más compacta de las varias alternativas que es posible utilizar en mallas no estructuradas^{11,12}. Una ventaja adicional de este tipo de estructura es que facilita considerablemente, como veremos más adelante, la construcción de diferentes modelos de disipación artificial.

Disipación Artificial

La condición expresada en la ecuación (11a) indica que el esquema de integración representado por la ecuación (13) es linealmente inestable. Es posible remediar esta situación mediante la adición explícita de términos de viscosidad artificial al algoritmo. Un algoritmo estable de primer orden "upwind" puede construirse utilizando, por ejemplo, el método de Roe²⁰ y substituyendo la ecuación (13) por

$$[\mathbf{M}_L]_I \Delta \mathbf{U}_I = \Delta t \sum_{s=1}^{mI} \mathcal{L}_{IJ_s} [\mathcal{F}_I + \mathcal{F}_{J_s} - |\mathbf{A}_{IJ_s}| \{\mathbf{U}_{J_s} - \mathbf{U}_I\}] \quad (15)$$

en la que $|\mathbf{A}_{IJ_s}|$ representa la matriz jacobiana aproximada de Roe en la dirección $\mathbf{S}_{IJ_s}$. Una posible simplificación de la expresión anterior viene dada por

$$[\mathbf{M}_L]_I \Delta \mathbf{U}_I = \Delta t \sum_{s=1}^{mI} \mathcal{L}_{IJ_s} [\mathcal{F}_I + \mathcal{F}_{J_s} - |\lambda_{IJ_s}| \{\mathbf{U}_{J_s} - \mathbf{U}_I\}] \quad (16)$$

donde λ_{IJ_s} es una cota superior de los autovalores de la matriz $\mathbf{A}_{IJ_s}$ que se calcula como

$$\lambda_{IJ_s} = |\mathbf{u}_{IJ_s} \cdot \mathbf{S}_{IJ_s}| + a_{IJ_s} \quad (17)$$

y a representa la velocidad del sonido local. Un esquema de primer orden de este tipo es de poco interés práctico pero puede ser empleado como la base para la construcción de esquemas disipativos de más alto orden. Sea σ la coordenada en la dirección de la arista que une los nodos I y J_s de la malla, una aproximación de primer orden del valor de $\mathbf{U}_{J_s} - \mathbf{U}_I$ viene dada por

$$\mathbf{U}_{J_s} - \mathbf{U}_I \approx \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \sigma} \cdot \Delta \sigma \quad (18)$$

La parte derecha de la ecuación (18) se calcula haciendo uso de los valores del gradiente de $\mathbf{U}$ que se pueden obtener directamente mediante expresiones tales como

$$[\mathbf{M}_L]_I \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \Big|_I = \sum_{s=1}^{mI} C_{IJ_s}^j (\mathbf{U}_I^j + \mathbf{U}_{J_s}^j) \quad (19)$$

El esquema de integración temporal representado por la ecuación (16) se modifica de acuerdo con las expresiones anteriores para dar lugar a la siguiente forma, de más alto orden, del operador de difusión

$$[\mathbf{M}_L]_I \Delta \mathbf{U}_I = \Delta t \sum_{s=1}^{mI} \mathcal{L}_{IJ_s} \left[\mathcal{F}_I + \mathcal{F}_{J_s} - |\lambda_{IJ_s}| \left\{ \mathbf{U}_{J_s} - \mathbf{U}_I - \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \sigma} \cdot \Delta \sigma \right]_{IJ_s} \right\} \right] \quad (20)$$

En el caso unidimensional, es sencillo demostrar que la parte derecha de esta ecuación representa una aproximación centrada de la derivada del vector de flujos a la que se ha añadido un término de difusión artificial en la forma de diferencias de cuarto orden, siendo conocido que tal combinación produce un esquema estable de alto orden^{14,21}.

Para garantizar la estabilidad numérica del algoritmo en la simulación de flujos que presentan discontinuidades, es preciso el empleo de términos adicionales de disipación^{14,21}. Ello se consigue mediante la introducción en la ecuación (20) de un sensor basado en la presión de la forma

$$[\mathbf{M}_L]_I \Delta \mathbf{U}_I = \Delta t \sum_{s=1}^{mI} \mathcal{L}_{IJ_s} \left[\mathcal{F}_I + \mathcal{F}_{J_s} - |\lambda_{IJ_s}| \left\{ \mathbf{U}_{J_s} - \mathbf{U}_I - (1 - \mathbf{P}_{IJ_s}) \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \sigma} \cdot \Delta \sigma \right]_{IJ_s} \right\} \right] \quad (21)$$

donde $\mathbf{P}_{IJ_s}$ denota el valor en la arista del sensor de presión. Tal sensor está construido de manera que verifique $0 \leq \mathbf{P}_{IJ_s} \leq 1$, con valores $\mathbf{P}_{IJ_s} \approx 1$ en la vecindad de discontinuidades y $\mathbf{P}_{IJ_s} \approx 0$ en regiones donde la solución es regular.

Discretización Temporal

La ecuación (21), que representa la forma discreta de las ecuaciones para un nodo genérico I de la malla, puede escribirse del modo siguiente:

$$\Delta \mathbf{U}_I = \Delta t [\mathbf{M}_L]_I^{-1} \{ \mathbf{Q}_I(\mathbf{U}) + \mathbf{D}_I(\mathbf{U}) \} = \Delta t [\mathbf{M}_L]_I^{-1} \mathbf{R}_I(\mathbf{U}) \quad (22)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_I(\mathbf{U}) &= \sum_{s=1}^{mI} \mathcal{L}_{IJ_s} [\mathcal{F}_I + \mathcal{F}_{J_s}] \\ \mathbf{D}_I(\mathbf{U}) &= - \sum_{s=1}^{mI} \mathcal{L}_{IJ_s} |\lambda_{IJ_s}| \left\{ \mathbf{U}_{J_s} - \mathbf{U}_I - (1 - \mathbf{P}_{IJ_s}) \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \sigma} \cdot \Delta \sigma \right]_{IJ_s} \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

Escritas en esta forma, podemos diferenciar claramente en la parte derecha las contribuciones provenientes del algoritmo básico de aquellas correspondientes a la viscosidad artificial añadida. Suponiendo que los valores nodales $\mathbf{U}_I^n$ son conocidos

en el tiempo t_n , avanzamos la solución un incremento de tiempo Δt , hacia el tiempo t_{n+1} , mediante un método de integración temporal multietapa de Runge-Kutta, esto es, si ΔU_I representa el cambio de la solución U en el nodo I en un incremento de tiempo, una versión del esquema que utilice m etapas se puede escribir como

$$\begin{aligned} U_I^{(0)} &= U_I^n \\ U_I^{(p)} &= U_I^{(0)} - \alpha_p \Delta t [M_L]_I^{-1} R_I(U_I^{(p-1)}) \quad p = 1, 2, \dots, m \\ U_I^{n+1} &= U_I^{(m)} \end{aligned} \quad (24)$$

con valores adecuados de los parámetros α_p . Para mejorar la eficiencia del algoritmo, la contribución de los términos de difusión D al vector R no se recalcula en cada etapa del proceso. Dado que en las aplicaciones que consideramos no nos interesa una representación correcta del desarrollo transitorio de la solución, utilizaremos, para acelerar la convergencia, el valor local del incremento de tiempo en cada punto. Para ello, definimos un número de Courant constante, CFL, para toda la malla y calculamos el valor local del incremento de tiempo Δt_I para el nodo I de la malla, utilizando un análisis energético de la estabilidad²², mediante la relación

$$\Delta t_I = 2 \text{ CFL } [M_L]_I \left[\sum_{s=1}^{mI} \mathcal{L}_{IJs} |\lambda_{IJs}| \right]^{-1} \quad (25)$$

donde $|\lambda_{IJs}|$ viene dado por la expresión (17). Empleamos, así mismo, el método de promediado de residuos para aumentar el valor permisible del número CFL^{14,21}.

Las condiciones de contorno exterior que simulan el comportamiento del flujo en el infinito se aplican a través de un análisis de características, linealizado en la dirección normal al contorno, que corrige los valores calculados de U_I^{n+1} en los nodos I del contorno exterior. La condición, en flujos no viscosos, de que las velocidades del fluido sean tangentes a las superficies sólidas se impone simplemente mediante proyección. Las condiciones de entrada en el motor se representan imponiendo un plano de presión estática constante que permita obtener un flujo másico constante. A la salida del motor prescribimos la dirección de la velocidad y los valores del flujo másico y la presión total de fluido.

FLUJO EN TORNO A UN MOTOR DE AVIACION INSTALADO

En este apartado incluimos los resultados correspondientes a la simulación numérica⁹ en régimen transónico del flujo en torno a una configuración aerodinámica formada como combinación de los siguientes componentes: fuselaje, ala, góndola y soporte. Estos resultados demostrarán la eficiencia numérica del procedimiento basado en mallas no estructuradas propuesto. Los experimentos se realizaron con un simulador de efectos de turbina con objeto de representar los flujos másicos de entrada y salida en el motor. Dada la simetría del problema, los cálculos fueron realizados utilizando únicamente media geometría del avión. El resto de dominio computacional está formado por el plano de simetría y los planos que definen el contorno exterior (ver Figura 1).

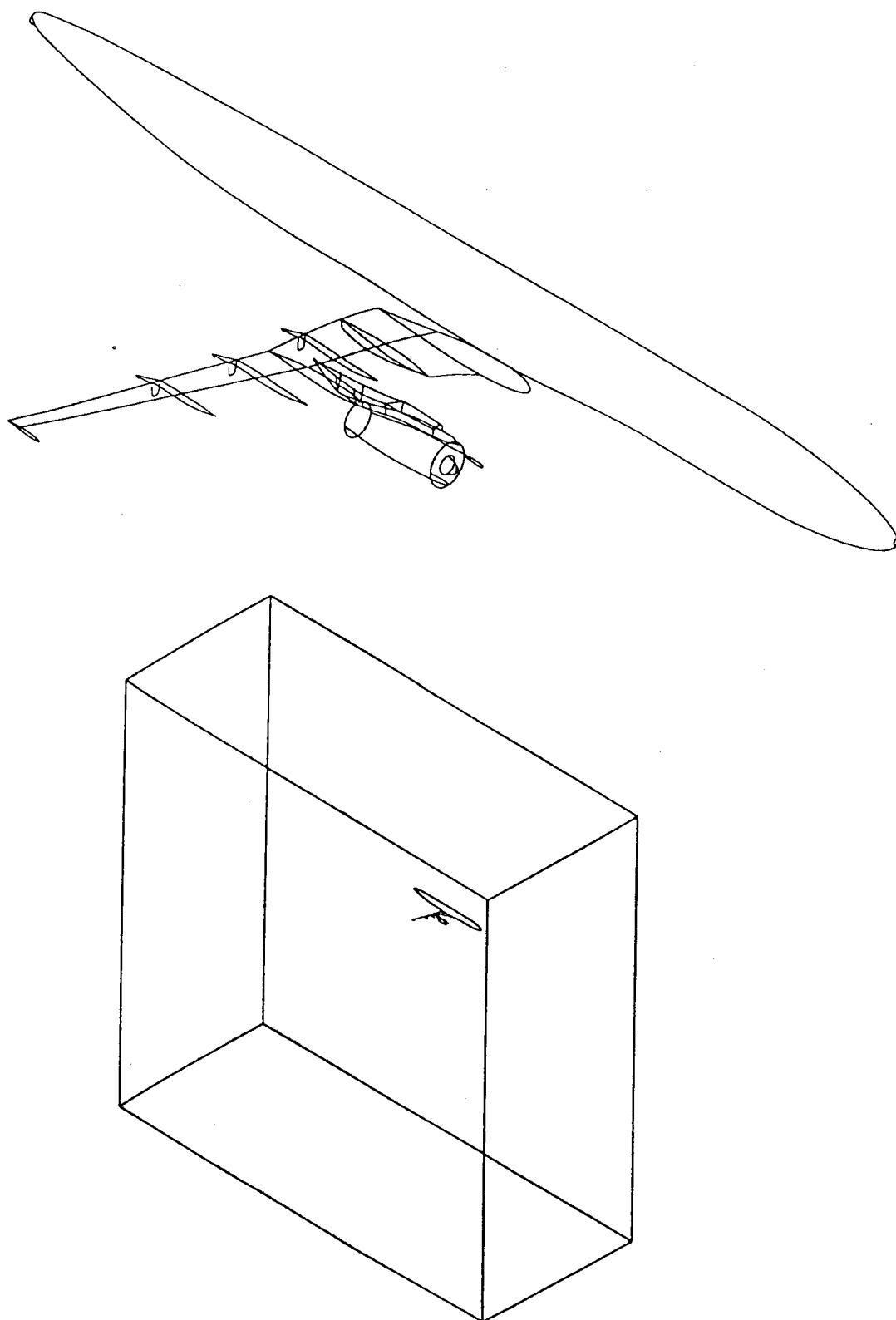


Figura 1. Dominio computacional empleado en el análisis del flujo no viscoso en torno a una combinación de ala, fuselaje, góndola y soporte

Tras la discretización del contorno de la región, la superficie del avión está representada mediante un conjunto de 38,330 caras triangulares con 19,167 nodos. La Figura 2 presenta dos vistas de la triangulación de la superficie del modelo. Partiendo de esta triangulación, la discretización de la región tridimensional se realiza mediante el método de propagación del frente de generación, creando nodos interiores y elementos de la malla simultáneamente. La malla tridimensional resultante está formada, en este caso, por 592,380 tetraedros y 112,198 nodos.

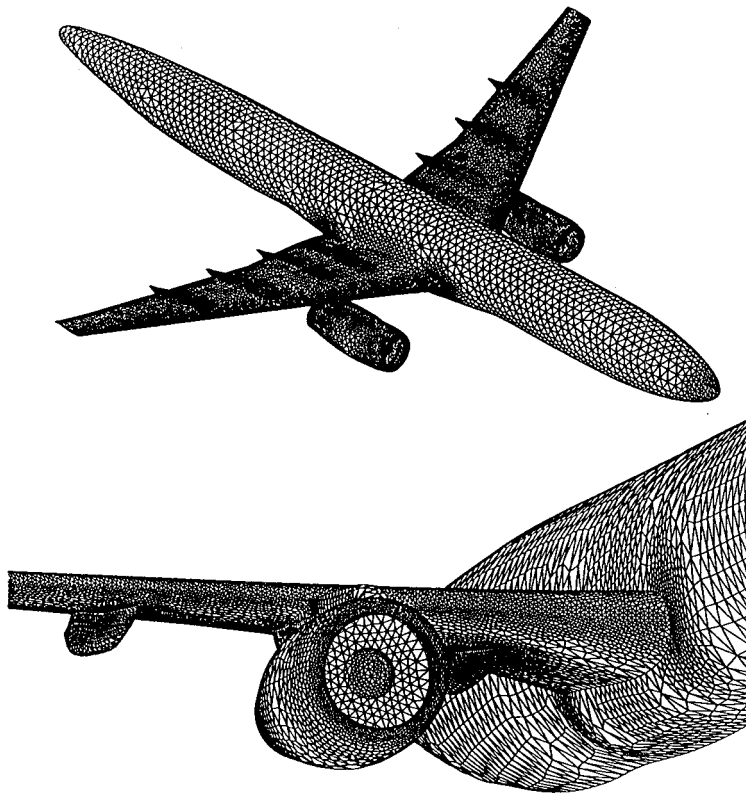


Figura 2. Dos vistas diferentes de la triangulación de la superficie del contorno de la región empleado en el análisis del flujo no viscoso en torno a una combinación de ala, fuselaje, góndola y soporte

Los cálculos¹³ se efectuaron asumiendo condiciones de flujo correspondientes a un número de Mach de 0.801 con un ángulo de ataque de 2.738 grados. La simulación del flujo en el motor se realizó mediante la imposición de los valores del flujo másico, la razón (entrada/salida) de la presión y la temperatura total de salida. Dichos valores se calcularon asumiendo que, en el interior del simulador de efectos de turbina y antes del escape a través de la tobera, se produce una mezcla perfecta de las corrientes procedentes del núcleo y las hélices de la turbina. Comenzado con condiciones iniciales de infinito, la solución avanzó 2,500 incrementos de tiempo en los que el residuo de la derivada de la densidad se redujo cuatro órdenes de magnitud.

Los contornos de igual presión en la superficie de modelo están representados en la Figura 3. La Figura 4 presenta la comparación de los valores numéricos y experimentales del coeficiente de presión para varias secciones perpendiculares al eje del ala y otras en la dirección del eje de la góndola. La concordancia entre los resultados numéricos y los experimentales para la presión es muy buena excepto en la parte superior del ala donde los valores calculados son superiores a los experimentales. Estas discrepancias pueden ser justificadas por la presencia de efectos viscosos importantes en el flujo en la parte superior del ala que no pueden ser representados mediante las ecuaciones de Euler.

Es importante destacar que un análisis para una geometría de tal complejidad se puede llevar a cabo, de forma rutinaria, en un período muy corto de tiempo, del orden de días.

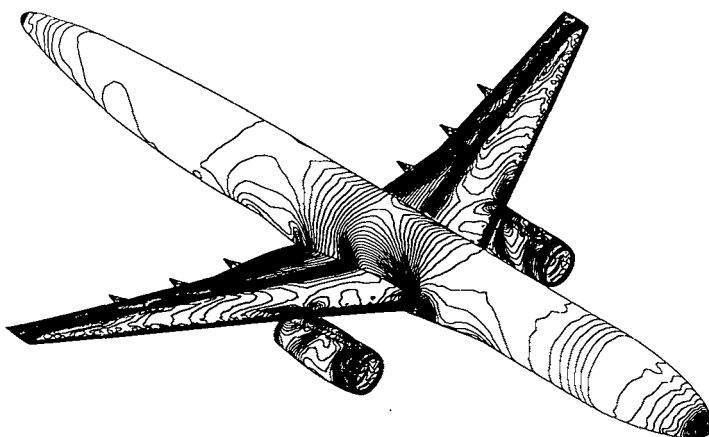


Figura 3. Contornos de presión calculados en el análisis del flujo no viscoso en torno a una combinación de ala, fuselaje, góndola y soporte. Condiciones en infinito: Mach number = 0.801, ángulo de ataque = 2.738 grados

METODO MULTIMALLA

El empleo de métodos multietapa explícitos de avance en el tiempo para la ecuaciones de Euler está especialmente indicado para una implementación efectiva del esquema multimalla de aceleración¹⁴. La idea básica de un método multimalla para la resolución de problemas hiperbólicos es la utilización de una malla inicial y una serie de mallas consecutivas, con un tamaño de elemento que aumenta paulatinamente, en las que se calculan, de manera más económica, correcciones a la solución en la malla inicial. Estas correcciones en las mallas menos tupidas se obtienen también mediante el mismo método multietapa y, ahora, la principal ventaja es que el incremento de tiempo admisible es muy superior al utilizado en la malla más fina U_{If}^{n+1} y el residuo correspondiente $R_{If}(U^{n+1})$, calculados de acuerdo con la ecuación (22), son transferidos a la malla gruesa como U_{Ic}^n y R_{Ic}^n utilizando un esquema de avance en el tiempo de la forma

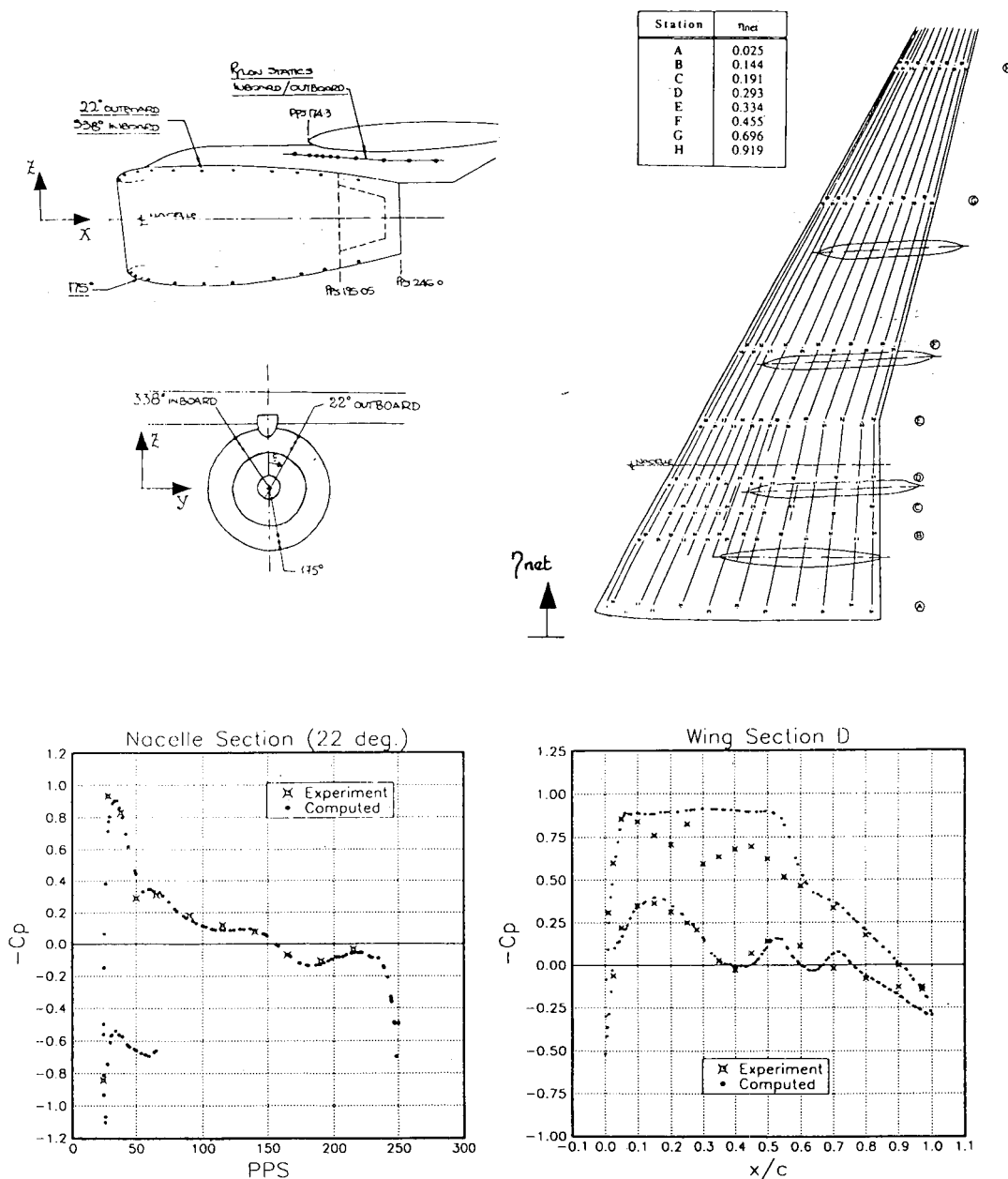


Figura 4. Comparación de los valores del coeficiente de presión calculados y medidos experimentalmente en el análisis del flujo no viscoso en torno a una combinación de ala, fuselaje, góndola y soporte. Condiciones en infinito: Mach number=0.801, ángulo de ataque=2.738 grados

$$\begin{aligned}
 U_{Ic}^{(0)} &= U_{Ic}^n \\
 U_{Ic}^{(p)} &= U_{Ic}^{(0)} - \beta_p \Delta t_{Ic} [M_L]_{Ic}^{-1} \{R(U_{Ic}^{(p-1)}) + R_{Ic}^n - R(U_{Ic}^n)\} \quad p = 1, 2, \dots, q \quad (26) \\
 U_{Ic}^{n+1} &= U_{Ic}^{(m)}
 \end{aligned}$$

para transportar las correcciones en esta malla. Cuando las iteraciones en la malla gruesa han finalizado, las correcciones son interpoladas en la malla fina y empleadas para actualizar allí la solución. Es importante observar que el algoritmo de avance de las correcciones en la malla gruesa dado por la ecuación (26) garantiza que una solución convergida en malla fina no experimenta cambios debidos al empleo de otras mallas, es decir, la corrección en la malla gruesa es cero si el residuo en la malla fina $R_{If}(U^{n+1})$ es cero. En el caso de que empleemos más de dos mallas, existen varios métodos para extender este esquema y, también, varias estrategias para organizar ciclos entre mallas. Un algoritmo recursivo, que permite el uso de un número arbitrario, n_{mesh} , de mallas y ciclos del tipo V o W indistintamente, puede describirse de forma algorítmica con la ayuda de un vector auxiliar csw del siguiente modo:

START CYCLE

```

    csw(1:nmesh)=0
    ipmesh=1
    1000 if(ipmesh.lt.nmesh) then
        Advance on mesh ipmesh    (pre-smoothing)
        csw(ipmesh)=csw(ipmesh)+1
        Transfer - U, R - from mesh ipmesh to mesh ipmesh+1
        ipmesh = ipmesh + 1
        go to 1000
    endif
    Advance on mesh ipmesh
    2000 if(ipmesh.gt.1) then
        Transfer - ΔU - from mesh ipmesh to mesh ipmesh-1
        ipmesh = ipmesh - 1
        Advance on mesh ipmesh (post-smoothing)
    endif
    if (ipmesh.gt.1) then
        if(csw(ipmesh).eq.icycle)then
            csw(ipmesh) = 0
            go to 2000
        endif
        go to 1000
    endif

```

END CYCLE

Este algoritmo representa un ciclo del tipo V si elegimos un valor del parámetro $icycle$ igual a 1 y un ciclo del tipo W si $icycle$ es 2.

El paso de información de una malla A a otra malla B puede efectuarse mediante interpolación directa o bien utilizando una transferencia conservativa. Procedimientos de este tipo son sencillos de confeccionar cuando las mallas A y B son estructuradas y sus nodos son comunes. Sin embargo, estas operaciones son más difíciles de realizar entre dos mallas no estructuradas de tetraedros. Para ilustrar la forma de realizar estas operaciones, consideremos la transferencia de una cierta función f . Sean IA e IB nodos arbitrarios las mallas A y B respectivamente, una interpolación directa requiere conocer el elemento de la malla A que contiene el nodo IB así como los valores de las funciones de forma en la malla A para el nodo IB . Con esta información, la interpolación directa viene dada por la fórmula

$$f_{IB} = \sum_{IA} f_{IA} [N_{IA}]_{IB} \quad (27)$$

Una transferencia conservativa requiere conocer el elemento de la malla B que contiene el nodo IA junto con los valores de las funciones de forma en la malla B para el nodo IA . La transferencia se expresa como

$$f_{IB} = [M_L]_{IB}^{-1} \sum_{IA} [M_L]_{IA} f_{IA} [N_{IB}]_{IA} \quad (28)$$

La información precisa para estas transferencias se calcula mediante una estructura de árbol binario ADT²³ parecida a aquella empleada en el proceso de generación de malla tridimensional. En el caso que nos ocupa, la transferencia de las incógnitas de malla fina a malla gruesa se realiza mediante interpolación directa mientras que los residuos se transfieren de manera conservativa. La transferencia de incrementos de malla gruesa a malla fina se efectúa mediante interpolación directa.

FLUJO EN TORNO A UN AVION EJECUTIVO BIMOTOR

Para resaltar las cualidades del método de aceleración multimalla propuesto en este artículo hemos realizado la simulación del flujo en régimen transónico en torno a un avión ejecutivo bimotor: el Falcon fabricado por Dassault Aviation. En el cálculo empleamos tres mallas que contienen, aproximadamente, 850,000, 136,000 y 37,000 elementos respectivamente. Las triangulaciones de las superficies para estas mallas están dibujadas en la Figura 5. Las condiciones de flujo de la simulación corresponden a un número de Mach de 0.85 con un ángulo de ataque de dos grados. En este ejemplo permitimos el paso libre de aire a través de los motores. En la resolución del problema empleamos un esquema de avance en el tiempo de tres etapas y un ciclo de tipo W doble, que se muestra en la Figura 6, con promediado de residuos tras cada transferencia de información. Figura 7 presenta la variación del logaritmo decimal de la norma L-2 de los residuos de la derivada de la densidad con el número de evaluaciones de residuos en malla fina. La distribución, en estado estacionario, de presiones en la superficie de avión se muestra en la Figura 8. Esta solución se obtuvo tras 20 minutos de CPU en un ordenador vectorial CRAY-YMP empleando únicamente un procesador.

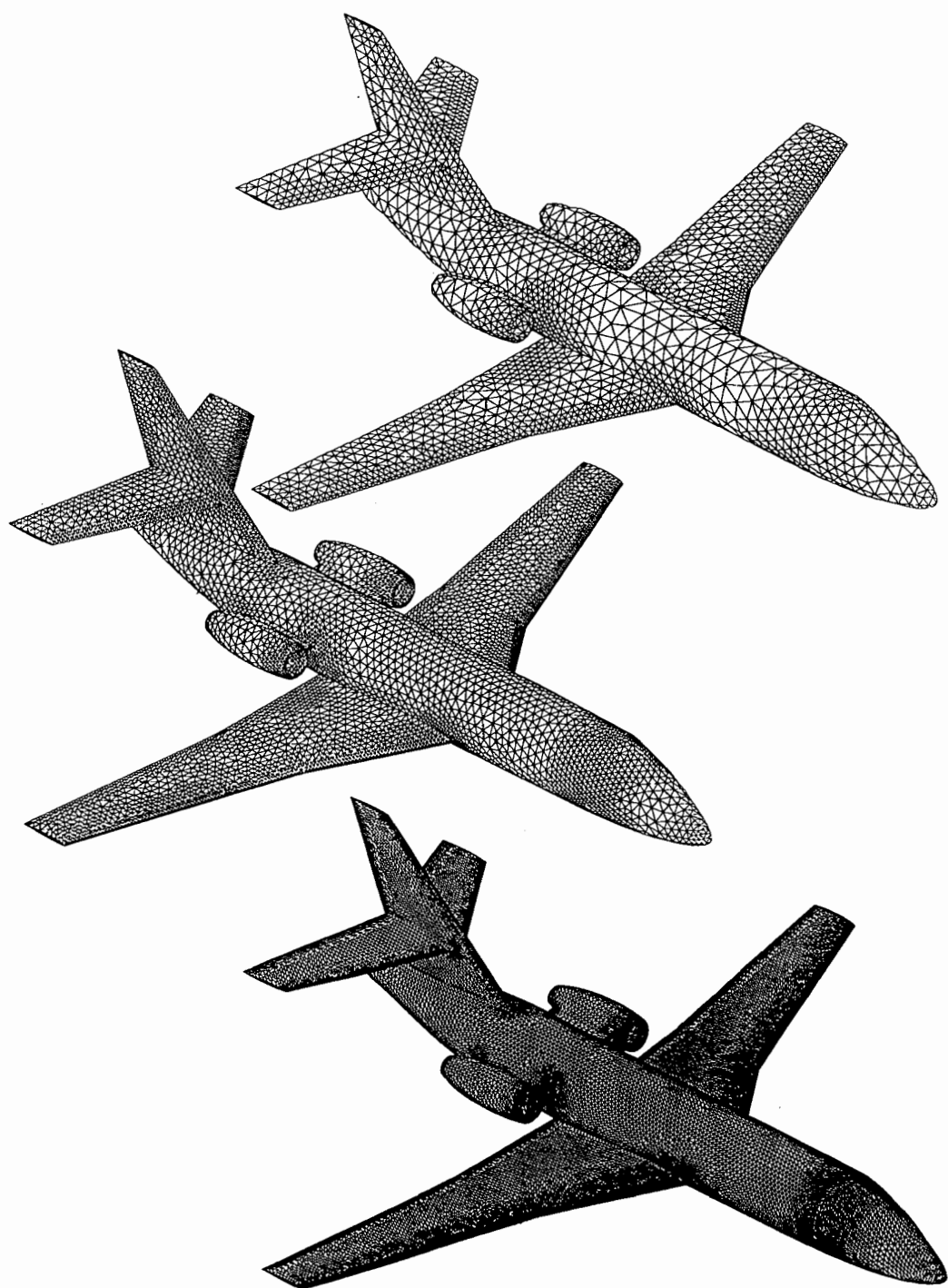


Figura 5. Triangulaciones en la superficie para la serie de mallas utilizadas en la simulación del flujo transónico en torno a un avión ejecutivo bimotor Falcon (Dassault Aviation).

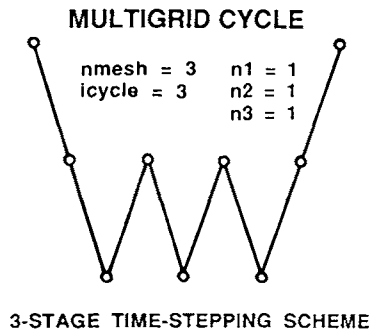


Figura 6. Representación del ciclo W utilizado en el método multimalla

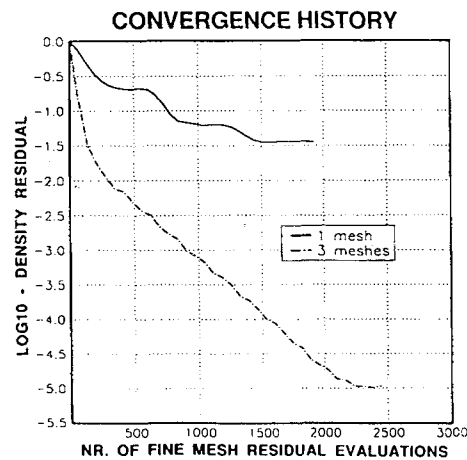


Figura 7. Variación del logaritmo del residuo de la densidad con el número equivalente de evaluaciones de residuos en la malla fina, para la malla fina y para una serie de mallas, en la simulación del flujo transónico en torno a un avión ejecutivo bimotor Falcon (Dassault Aviation). Condiciones en infinito: Mach number=0.85, ángulo de ataque=2.0 grados

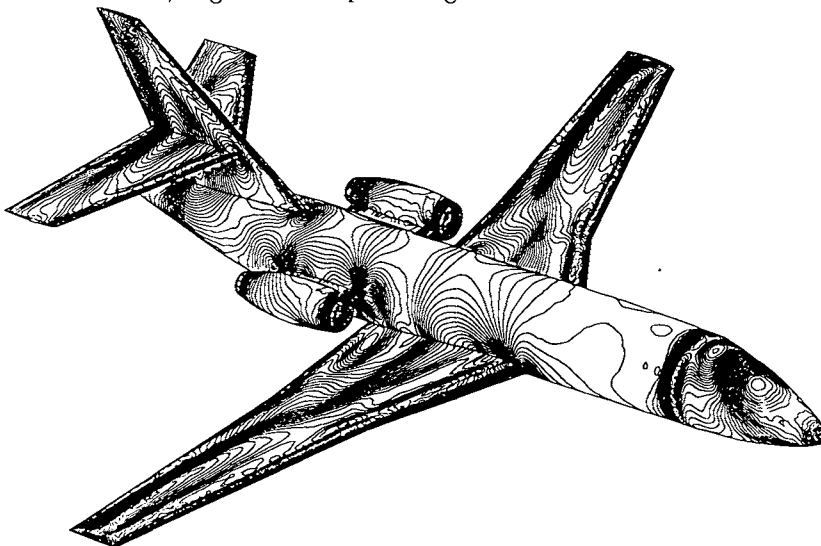


Figura 8. Contornos de presión en el estado estacionario obtenidos en la simulación del flujo transónico en torno a un avión ejecutivo bimotor Falcon (Dassault Aviation). Condiciones en infinito: Mach number=0.85, ángulo de ataque=2.0 grados

CONCLUSIONES

Hemos presentado un método para el análisis de flujos tridimensionales no viscosos en régimen transónico de interés industrial basado en mallas no estructuradas. La eficiencia del método se ha mejorado mediante la adopción de una estructura de datos basada en las aristas de la malla que permite escribir un programa de ordenador con requerimientos mínimos de memoria. La utilidad práctica del método se ha incrementado de manera considerable con la incorporación de un procedimiento de aceleración multimalla para el análisis de problemas de flujo estacionario. Podemos prever que, en el futuro cercano, procedimientos basados en mallas no estructuradas serán cada vez más utilizados en la industria aeronáutica y aeroespacial para la simulación de flujos no viscosos de interés práctico. No obstante, para conseguir un reconocimiento universal de las ventajas del método propuesto, investigadores en esta área precisarán abordar satisfactoriamente problemas tridimensionales más complejos como, por ejemplo, flujos viscosos y flujos en torno a sólidos en movimiento.

REFERENCIAS

1. A. Jameson, "The Evolution of Computational Methods in Aerodynamics", *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, Vol. 50, pp. 1052-1070, (1983).
2. A. Jameson and T. J. Baker, "Solution of the Euler Equations for Complex Configurations", *AIAA Paper 83-1929*, (1983).
3. N. P. Weatherill and C. R. Forsey, "Grid Generation and Flow Calculations for Aircraft Geometries", *J. Aircraft*, Vol. 22, pp. 855-860, (1985).
4. J. Peraire, J. Peiró, L. Formaggia, K. Morgan and O. C. Zienkiewicz, "Finite Element Euler Computations in Three Dimensions", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 26, pp. 2135-2159, (1988).
5. J. Peraire, J. Peiró, K. Morgan and O. C. Zienkiewicz, "An Adaptive Finite Element Method for High Speed Flows", *AIAA Paper 87-0558*, (1987).
6. R. R. Thareja, J. R. Stewart, O. Hassan, K. Morgan and J. Peraire, "A Point Implicit Unstructured Grid Solver for the Euler and Navier-Stokes Equations", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 9, pp. 405-425, (1989).
7. M. Vahdati, O. Hassan, K. Morgan and J. Peraire, "A Cell-Vertex Upwind Unstructured Grid Solution Procedure for High Speed Compressible Viscous Flow", in *Proc. Royal Aeronautical Society Int. Conf. on Hypersonic Aerodynamics*, Manchester, pp. 12.1-12.22, (1989).
8. J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan and O. C. Zienkiewicz, "Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations", *J. Comp. Phys.*, Vol. 72, pp. 547-574, (1987).
9. J. Peraire, K. Morgan and J. Peiró, "Unstructured Finite Element Mesh Generation and Adaptive Procedures for CDF", in *AGARD Conference Proceedings No. 464*, pp. 18.1-18.12, AGARD Paris, (1990).
10. FLITE 3D System: User Manual, Computational Dynamics Research Ltd., Innovation Centre, Swansea, (1991).
11. T.J. Barth, "Numerical Aspects of Computing Viscous High Reynolds Number Flows on Unstructured Meshes", *AIAA Paper 91-0721*, (1991).
12. D.J. Mavriplis, "Three Dimensional Unstructured Multigrid for the Euler Equations", *AIAA Paper 91-1549*, (1991).

13. J. Peiró, J. Peraire, K. Morgan, O. Hassan and N. Birch, "The Numerical Simulation of Flow about Installed Aero-Engine Nacelles Using a Finite Element Solver on Unstructured Meshes", submitted to *Aero. J.*, (1991).
14. A. Jameson, "Transonic Flow Calculations", Princeton University Report MAE 1751, (1984).
15. R. Löhner and K. Morgan, "Unstructured Multigrid Methods for Elliptic Problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 24, pp. 101-115, (1987).
16. D.J. Mavriplis, "Multigrid Solution of The Two-Dimensional Euler Equations on Unstructured Triangular Meshes", *AIAA J.*, Vol. 26, pp. 824-831, (1988).
17. J. Peraire, J. Peiró and K. Morgan, "A 3D Finite Element Multigrid Solver for the Euler Equations" *AIAA Paper* 92-0449, (1992).
18. J. Peraire, K. Morgan and J. Peiró, "Unstructured Mesh Methods for CFD", von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture Series, Brussels, (1990).
19. J. Peiró, J. Peraire K. Morgan and O. Hassan, "The Computation of Three Dimensional Flows Using Unstructured Grids", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 87, pp. 335-352, (1991).
20. P. Roe, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes", *J. Comp. Phys.*, Vol. 43, pp. 357-372, (1981).
21. A. Jameson and W. Schmidt, "Some Recent Developments in Numerical Methods for Transonic Flows", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 51, pp. 467-493, (1985).
22. M. Giles, "Energy Stability Analysis of Multi-Step Methods on Unstructured Meshes", M.I.T. CFD Laboratory Report CFDL-TR-87-1, (1987).
23. J. Bonet and J. Peraire, "An Alternate Digital Tree Algorithm for Geometric Searching and Intersection Problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 31, pp. 1-17, (1991).