

Modelagem e simulação de colisões planas entre corpos rígidos

Edson Cataldo

Universidade Federal Fluminense, Centro de Estudos Gerais
Departamento de Matemática Aplicada
24020-140, Niterói, RJ, Brasil
Tel.: 55-21-2717 8269, 9949 3243, 2491 2267, Fax: 55-21-2717 8588
e-mail: ecataldo@mec.puc-rio.br, ecataldo@zipmail.com

Rubens Sampaio

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Centro Tecnológico, Departamento de Engenharia Mecânica
20543-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
Tel.: 55-21-3114 1172, Fax: 55-21-3114 1165
e-mail: rsampaio@mec.puc-rio.br

Resumen

Em geral, o movimento de corpos se dá em ambiente com barreiras podendo ocorrer colisões. Para que seja possível fazer previsões da dinâmica é necessário saber o que acontece quando um corpo colide. O problema é portanto: conhecida a dinâmica do corpo pré-colisão e as propriedades dos corpos que colidem, prever a dinâmica pós-colisão. Os primeiros trabalhos publicados sobre o assunto datam de 1668 e, até 1984, os modelos existentes pareciam satisfatórios. Porém, a aplicação de um desses modelos a um problema simples apresentou geração de energia. Desde então, um grande número de trabalhos tem aparecido na literatura. Este trabalho trata o problema de colisões planas, discute criticamente os modelos da literatura comparando-os através de uma generalização por nós desenvolvida e propõe um novo modelo que engloba alguns dos modelos da literatura. Mostramos os principais problemas de alguns dos modelos. Simulações feitas num programa por nós desenvolvido são apresentadas e ajudam a entender a influência dos coeficientes constitutivos. A validação dos resultados é realizada através de resultados experimentais colhidos da literatura.

MODELLING AND SIMULATION OF COLLISIONS BETWEEN RIGID BODIES

Summary

In general the motion of a body takes place in a confined environment and collisions of the body with the containing wall are possible. In order to predict the dynamics of a body in these conditions one must know what happens in a collision. Therefore, the problem is: if one knows the pre-collision dynamics of the body and the properties of the body and the wall one wants to predict the post-collision dynamics. This problem is quite old and it appeared in the literature in 1668. Up to 1984 it seemed that Newton's model was enough to solve the problem. But it was found that this was not the case and a renewed interest in the problem appeared. The aim of this paper is to treat the problem of plan collisions of rigid bodies, to classify the different models found in the literature and to present a new model, called C-S model, that is a generalization of most of these models.

1 INTRODUÇÃO

1.1 Colisões

A colisão entre corpos é um processo dissipativo bastante complicado. Os corpos que colidem se deformam elástica ou permanentemente na vizinhança do ponto de colisão e aparecem ondas, longitudinais ou transversais, que se propagam nos corpos colidentes.

Durante o tempo de colisão pode haver movimento relativo dos corpos, alguns pontos podem aderir e outros podem mesmo reverter seus movimentos relativos.

A dissipação de energia pode ser devido a deformações permanentes, troca de calor com o meio ambiente ou entre os corpos colidentes.

Trata-se portanto de um processo que não é facilmente descrito e, mesmo se descrito por um modelo elástico, a aproximação numérica é custosa e não pode ser feita em tempo real de modo que não serve para ser incorporado a modelos preditivos.

Queremos tratar de modelos de colisão que possam ser resolvidos com simplicidade e rapidamente de modo a podermos fazer previsões da dinâmica. Os modelos que trataremos consideram os corpos que colidem como rígidos e a colisão como sendo instantânea.

Nossa preocupação foi também desenvolver os modelos de uma forma coerente e sistemática destacando as hipóteses que são adotadas e resolvendo completamente alguns problemas.

Mesmo com as hipóteses simplificadoras adotadas a análise completa dos problemas é complicada e resolvemos tratar neste trabalho apenas colisões planas. O caso espacial será tratado em trabalhos futuros.

Mesmo no caso plano estamos apresentando também apenas a situação onde a colisão se dá em apenas um ponto e em que é possível identificar univocamente uma base de colisão.

O programa desenvolvido se mostrou muito útil. Foi possível com ele fazer uma análise de parâmetros que pode nos permitir, por exemplo, estudar a influência dos coeficientes de um modelo numa colisão.

1.2 Histórico

É evidente, a partir da mais simples observação, que a dinâmica de um corpo confinado, ou de um sistema com mais de uma partícula, só pode ser apropriadamente modelada se colisões forem levadas em conta.

Nos trabalhos de Galileu e Descartes já aparecem referências à colisão, mas o primeiro modelo de colisão para partículas parece ter sido devido a John Wallis e Christopher Wren em 1668. Vários cientistas ilustres trataram do problema, tais como, Newton, Huygens, Coriolis, Darboux, Routh, Appel, Carnot e Poisson. Na virada do século o problema despertou bastante interesse e suscitou várias discussões, como podemos ver em Painlevé (1905) e Klein (1910). Porém, até 1984, todos os trabalhos usavam o coeficiente de restituição dado por Newton ou de Poisson e a grande dificuldade era incluir o atrito de Coulomb na modelagem. A dificuldade básica foi apontada por Painlevé (1905) no seu célebre trabalho "Sur les lois de frottement de glissement", ainda bem atual.

Em 1984, Kane publicou um pequeno trabalho, numa revista de circulação bem limitada, onde apontava um paradoxo: a aplicação da teoria de Newton, universalmente aceita, num problema de colisões de um pêndulo duplo, levava a uma geração de energia nas colisões. O quê estaria errado ?

Em 1986, um colega de Kane, Joe Keller, apresentou uma solução para o problema através de um método assintótico, mas que não era de generalização fácil. O trabalho, dessa vez, apareceu numa revista de larga circulação e atraiu muito interesse. Nesses treze anos o interesse tem aumentado e já apareceram alguns livros inteiramente dedicados ao tema, como os livros de Glocker-Pfeiffer (1995), Brach (1991), Brogliato (1996), Monteiro Marques (1993).

Brach (1989) apresentou um modelo com equações lineares contendo vários parâmetros adimensionais que caracterizam a colisão e definiu *razão entre impulsos* ao invés de coeficiente de atrito. Porém, sua consideração não fornece soluções claras para o problema quando consideramos *deslizamento reverso* durante a colisão. Stronge (1990) sugeriu um coeficiente de restituição relacionando as energias durante as fases de compressão e de expansão. Smith (1991) apresentou um modelo com equações não-lineares. Wang e Mason (1992) aplicaram a técnica de Routh (1877, 1891) e compararam os coeficientes de restituição dados por Newton e por Poisson, usando, também, a lei de Coulomb. Sabine Durand

(1996) estuda a dinâmica de sistemas com vínculos unilaterais e atrito seco e inclui, nesses casos, alguns relacionados à colisão. Chatterjee (1997) apresentou novas leis de colisão baseadas em algoritmos simples de usar, com pequeno número de parâmetros de colisão e um comportamento desejável, pelo menos para configurações mais simples. Soianovici e Hurmuzlu (1996) tentaram validar experimentalmente alguns dos modelos de corpos rígidos existentes. Como o principal interesse desses pesquisadores era em robótica eles focaram em colisões de corpos esbeltos a baixa velocidade. Catherine Cholet (1998) desenvolveu uma nova teoria de colisões entre corpos rígidos que satisfazem os Princípios da Mecânica e se utiliza da Mecânica dos Meios Contínuos, baseando-se nas idéias introduzidas por Michel Frémond (1995). Frémond e Cholet desenvolveram a idéia que um sistema formado por um conjunto de corpos rígidos é deformável pois as posições relativas dos corpos variam. Ela discute a teoria e mostra ser coerente tanto do ponto de vista matemático como validado experimentalmente.

Como uma aplicação do estudo de colisões, Partridge e Sponj (1999) estudaram o problema de controlar a trajetória de um disco de borracha usado no jogo de *Hockey* sujeito a colisões intermitentes usando o modelo proposto por Wang e Mason.

Um dos autores mais prolíferos na área tem sido o Prof. Moreau (1979, 1988, 1994) que além de trabalhos teóricos tem mostrado a importância das simulações numéricas validadas por experimentos.

Na PUC-Rio o interesse no tema foi despertado em 1986 com o trabalho do Keller e a primeira tese de doutorado foi defendida em 1994, por Tavares, H. M.

1.3 Modelos de Colisão

Consideremos que a configuração dos corpos no momento da colisão, suas respectivas massas, matrizes de inércia e pontos de contato sejam conhecidos. Dadas as velocidades dos centros de massa e as velocidades angulares dos corpos pré-colisão, um modelo de colisão é uma regra que prevê as velocidades correspondentes pós-colisão. Estamos interessados em modelos de colisões que tratam de corpos considerados rígidos.

Listamos a seguir o que consideramos propriedades fundamentais de qualquer modelo de colisão.

- Não violar leis fundamentais : Um modelo de colisão não deve violar leis fundamentais da física tais como Conservação de Energia, Invariância de Referencial ou Balanço de Momento Linear ou Angular.
- Deve ser geral : Ele deve poder ser aplicada a corpos com diversas formas, distribuições de massa, orientações, velocidades, . . .
- Poucos parâmetros e muita simplicidade : O modelo deve depender razoavelmente de poucos parâmetros de entrada e envolver cálculos simples.
- Interpretação física dos parâmetros : Os parâmetros de entrada devem ter simples interpretações físicas.
- Capacidade de previsão : Medidos os parâmetros de entrada, o modelo deve prever os resultados que possam ser verificados experimentalmente.

2 EQUAÇÕES BÁSICAS

Nesta seção escrevemos as equações básicas que serão usadas em todos os modelos apresentados. Na discussão usaremos negrito para os vetores e colchetes para as matrizes. Os escalares não terão destaque.

Começamos discutindo as equações do movimento dos corpos em colisão.

2.1 Equações do Movimento

Consideremos a posição do sistema no instante t definida por $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^t$. Essa parametrização mínima é obtida levando em conta que os vínculos são perfeitos.

A condição de impenetrabilidade do sistema é expressa por

$$\phi_\alpha(q_1, \dots, q_n, t) \geq 0, \quad \alpha = 1, \dots, p.$$

α expressa cada contato do corpo.

Se $\phi_\alpha(\mathbf{q}, t) = 0$ então há contato α . Nesse caso o vínculo é dito ativo.

Consideremos o contato entre dois corpos C_1 e C_2 e \mathbf{R} a força de reação que C_1 exerce sobre C_2 . Assim,

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_N \\ R_T \end{pmatrix}.$$

A dinâmica do sistema é dada pelas equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + r_i$$

sendo Q_i a contribuição dos esforços exteriores generalizados, r_i a força generalizada devido à reação no contato e T a energia cinética do sistema.

Podemos escrever a dinâmica do sistema na forma

$$[M(\mathbf{q}, t)]\ddot{\mathbf{q}} = F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{r}$$

A função F é composta pelos termos $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ de algumas das forças de inércia, amortecimento e das forças externas generalizadas e \mathbf{r} é a força de colisão generalizada.

A matriz de massa $[M] = [M(\mathbf{q}, t)]$ é simétrica e definida-positiva.

Dessa forma, temos n parâmetros de posição desconhecidos e 2 reações $\mathbf{R} = (R_N, R_T)^t$ que são exercidas no contato. Precisamos, assim, além das n equações obtidas por Lagrange, de mais 2 equações suplementares que serão dadas pelas leis de colisão que serão discutidas no decorrer dessa tese.

Consideremos P_1 e P_2 os pontos de C_1 e C_2 que entrarão em contato na colisão, respectivamente. Denotemos por \mathbf{D} o vetor representando o deslocamento relativo entre os dois corpos e $\dot{\mathbf{D}}$ o vetor representando a velocidade relativa entre os dois corpos, como ilustra a Figura 2.1.

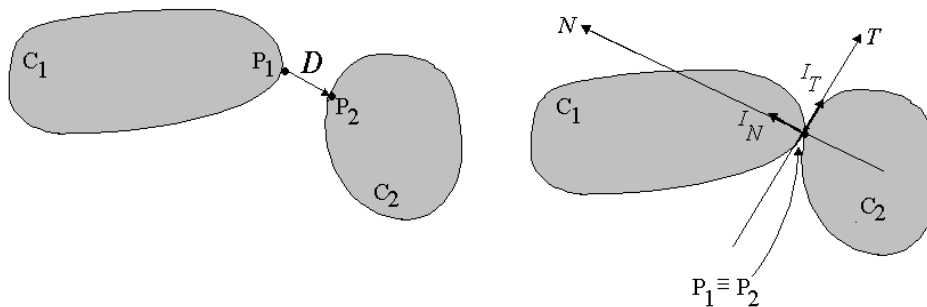


Figura 2.1. Colisão de dois corpos

No ponto de contato representamos os impulsos nas direções normal e tangencial por I_N e I_T . Usaremos \mathbf{u}_N e \mathbf{u}_T os vetores unitários das direções normal (direção dada por N) e tangencial (direção dada por T) na base da colisão.

Calculando a velocidade relativa entre os pontos de contato, temos

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{D}} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial P_2}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_1}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial P_1}{\partial t} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial P_2}{\partial q_i} - \frac{\partial P_1}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial P_2}{\partial t} - \frac{\partial P_1}{\partial t}.\end{aligned}$$

Introduzimos as notações,

$$W_T^i = \left(\frac{\partial P_2}{\partial q_i} - \frac{\partial P_1}{\partial q_i} \right) \cdot \mathbf{u}_T$$

$$W_N^i = \left(\frac{\partial P_2}{\partial q_i} - \frac{\partial P_1}{\partial q_i} \right) \cdot \mathbf{u}_N$$

$$\tilde{w}_T = \left(\frac{\partial P_2}{\partial t} - \frac{\partial P_1}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{u}_T$$

$$\tilde{w}_N = \left(\frac{\partial P_2}{\partial t} - \frac{\partial P_1}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{u}_N$$

Consideramos, então, \mathbf{W}_T o vetor coluna cujas componentes são W_T^i e \mathbf{W}_N o vetor coluna cujas componentes são W_N^i .

Podemos escrever as componentes normal (\dot{D}_N) e tangencial (\dot{D}_T) de $\dot{\mathbf{D}}$ como

$$\begin{cases} \dot{D}_N = \mathbf{W}_N^t \dot{\mathbf{q}} + \tilde{w}_N \\ \dot{D}_T = \mathbf{W}_T^t \dot{\mathbf{q}} + \tilde{w}_T. \end{cases}$$

Simplificadamente, podemos escrever

$$\dot{\mathbf{D}} = [W]^t \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{w}}$$

sendo $\dot{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \dot{D}_N \\ \dot{D}_T \end{pmatrix}$, $[W]^t = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^t \\ \mathbf{W}_T^t \end{pmatrix}$ uma matriz $(2, n)$ e $\tilde{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \tilde{w}_N \\ \tilde{w}_T \end{pmatrix}$.

A força generalizada \mathbf{r} pode ser escrita em termos de $[W]$ e da força de reação \mathbf{R} por

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N & \mathbf{W}_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_N \\ R_T \end{pmatrix}$$

ou na forma

$$\mathbf{r} = [W]\mathbf{R}.$$

Como já dissemos na introdução o nosso problema é o de determinar as velocidades dos corpos pós-colisão conhecendo as velocidades pré-colisão.

Consideremos a equação

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + r_i.$$

Integremos essa equação num intervalo $(t - \epsilon, t + \epsilon)$ em torno do instante da colisão t . Observamos que $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ é limitada e Q_i é suposta contínua e limitada.

Temos,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) \Big|_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} - \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \frac{\partial T}{\partial q_i} d\tau = \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} Q_i d\tau + \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} r_i d\tau$$

Fazemos $\epsilon \rightarrow 0$ e obtemos

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} r_i d\tau.$$

sendo $\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) \Big|_E - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) \Big|_A$.

Usaremos o índice E para representar o limite à direita e A para representar o limite à esquerda.

Sabemos que $\mathbf{r} = [W]\mathbf{R}$.

Então,

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} r_i d\tau = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \begin{pmatrix} W_N^i & W_T^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_N \\ R_T \end{pmatrix} d\tau.$$

Escrevemos o impulso \mathbf{I} causado pela reação \mathbf{R} por

$$\mathbf{I} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \mathbf{R} d\tau = \begin{pmatrix} I_N \\ I_T \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \begin{pmatrix} W_N^i & W_T^i \end{pmatrix} \mathbf{I}$$

Denotando $\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ como o vetor cujas componentes são $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, podemos escrever

$$\Delta\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = [W]\mathbf{I}.$$

Mas,

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}[M]\dot{\mathbf{q}}^t$$

Assim,

$$[M](\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_A) = [W]\mathbf{I} = \begin{pmatrix} W_N & W_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_N \\ I_T \end{pmatrix}.$$

O nosso problema consiste em encontrar $\dot{\mathbf{q}}_E$ e \mathbf{I} sendo dados $[M]$, $[W]$ e $\dot{\mathbf{q}}_A$.

Assim, temos n equações e queremos encontrar $n+2$ incógnitas. Em princípio precisamos de mais duas equações. Essa duas equações serão dadas pelas leis de restituição discutidas mais tarde.

Em muitos casos nós também consideramos o impulso de momento \mathbf{I}_θ além dos impulsos normal e tangencial e nesse caso devemos incluir a velocidade angular relativa. A equação será dada por

$$[M](\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_A) = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N & \mathbf{W}_T & \mathbf{W}_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_N \\ I_T \\ I_\theta \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Nesse caso temos n equações para encontrar $n + 3$ incógnitas. Em princípio precisamos de mais três equações. Como no caso anterior, as três equações serão dadas pelas leis de restituição.

Assim, sendo dados $\dot{\mathbf{q}}_A$, $[M]$ e $[W]$ desejamos encontrar $\dot{\mathbf{q}}_E$ e \mathbf{I} . Para isso usaremos uma estratégia que consiste em definir um processo chamado de *processo virtual* que não está relacionado com o tempo (pois o choque é modelado como sendo instantâneo). Mostramos um esquema na Figura 2.2 para ilustrar o que foi dito.

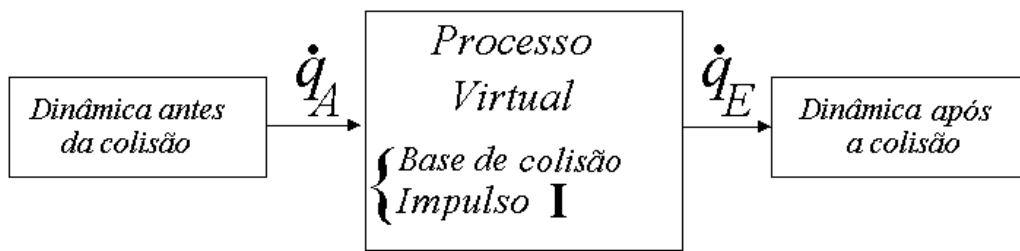


Figura 2.2. Esquema do processo virtual

Usamos $\dot{\mathbf{q}}_A$ e $\dot{\mathbf{q}}_E$ quando estamos tratando com os centros de massa mas podemos trabalhar também com $\dot{\mathbf{D}}_E$ e $\dot{\mathbf{D}}_A$ que são as velocidades relativas dos pontos que irão estar em contato. Para discutir o processo virtual usamos os modelos de colisão que serão tratados no decorrer desta tese. Um modelo de colisão é dado pelas n equações da dinâmica do problema e mais as equações dadas pelas leis de restituição. Dessa forma cada modelo de colisão define o problema; isto é, a partir de \mathbf{q}_A , $[M]$ e $[W]$ encontra \mathbf{q}_E e \mathbf{I} .

2.2 A Matriz Local de Massa

Consideremos a Eq. 2.1 reproduzida a seguir.

$$\dot{\mathbf{D}} = [W]^t \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} W_N^t \\ W_T^t \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} \tilde{w}_N \\ \tilde{w}_T \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\dot{\mathbf{D}}_E - \dot{\mathbf{D}}_A = [W]^t (\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_A).$$

Mas

$$[M](\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_A) = [W]\mathbf{I}.$$

e

$$(\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_A) = [M]^{-1}[W]\mathbf{I}.$$

Logo,

$$\dot{\mathbf{D}}_E - \dot{\mathbf{D}}_A = [W]^t[M]^{-1}[W]\mathbf{I} = [\tilde{M}_L]\mathbf{I}$$

Assim,

$$\mathbf{I} = [M_L](\dot{\mathbf{D}}_E - \dot{\mathbf{D}}_A)$$

quando $[\tilde{M}_L]$ admitir inversa e nesse caso $[\tilde{M}_L^{-1}] = [M_L]$.

Chamaremos $[M_L]$ de matriz local de massa.

2.3 Fase de Compressão e Fase de Expansão

A colisão entre dois corpos é modelada como um processo instantâneo. As velocidades dos corpos são descontínuas e as posições são contínuas. Para descrever alguns dos modelos de colisão nós iremos pensar que a mudança na velocidade pré-colisão para a velocidade pós-colisão é realizada em duas fases: fase de compressão e fase de expansão. O processo virtual, discutido na seção anterior, será composto por duas fases como mostra esquematicamente a Figura 2.3.

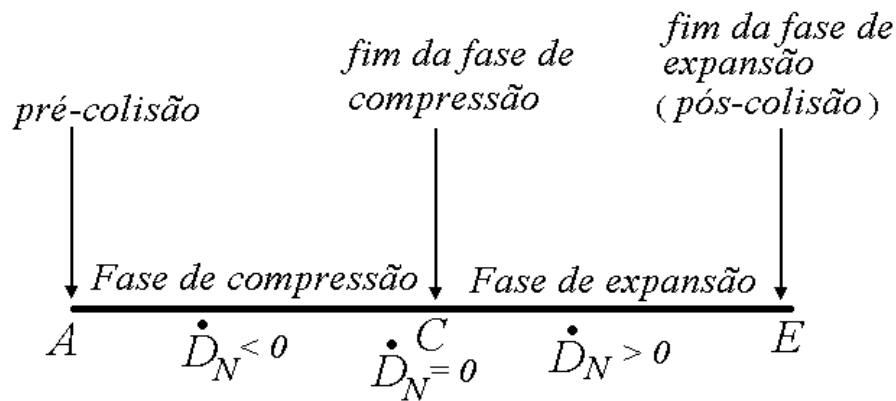


Figura 2.3. Fases de compressão e de expansão

A fase de compressão é a fase que vai desde imediatamente antes da colisão até a velocidade relativa normal ser nula. A fase de expansão é a fase que começa imediatamente após o fim da fase de compressão e vai até o fim do processo virtual. O tempo não desempenha papel nesse processo virtual.

Usamos o subíndice A para indicar o momento pré-colisão, C para indicar o fim da fase de compressão e E para indicar o fim da fase de expansão; isto é, pós-colisão.

2.4 Equações Utilizadas pelos Modelos de Colisão

Uma das contribuições desta tese foi a de reunir alguns dos principais modelos de colisões planas entre corpos rígidos colocando-os num mesmo formalismo e comparando suas previsões. As equações utilizadas por esses modelos podem ser separadas em quatro grupos que discutiremos a seguir. Para completar o modelo precisamos das leis de restituição, além das equações aqui descritas.

2.4.1 Primeiro grupo

O primeiro grupo não considera a fase de compressão; isto é, só usaremos os índices A e E . Este grupo também não considera o impulso de momento.

Temos,

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_{TA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^t \\ \mathbf{W}_T^t \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_A + \begin{pmatrix} \tilde{w}_N \\ \tilde{w}_T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_{NE} \\ \dot{D}_{TE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^t \\ \mathbf{W}_T^t \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_E + \begin{pmatrix} \tilde{w}_N \\ \tilde{w}_T \end{pmatrix}$$

e

$$[M](\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_A) - (\mathbf{W}_N \quad \mathbf{W}_T) \begin{pmatrix} I_N \\ I_T \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

2.4.2 Segundo grupo

Este grupo também não considera a fase de compressão (como o primeiro grupo) mas considera o impulso de momento.

Temos,

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_{TA} \\ \dot{D}_{\theta A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^t \\ \mathbf{W}_T^t \\ \mathbf{W}_\theta^t \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_A + \begin{pmatrix} \tilde{w}_N \\ \tilde{w}_T \\ \tilde{w}_\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_{NE} \\ \dot{D}_{TE} \\ \dot{D}_{\theta E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^t \\ \mathbf{W}_T^t \\ \mathbf{W}_\theta^t \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_E + \begin{pmatrix} \tilde{w}_N \\ \tilde{w}_T \\ \tilde{w}_\theta \end{pmatrix}$$

e

$$[M](\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_A) - (\mathbf{W}_N \quad \mathbf{W}_T \quad \mathbf{W}_\theta) \begin{pmatrix} I_N \\ I_T \\ I_\theta \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

2.4.3 Terceiro grupo

O terceiro grupo considera as fases de compressão (índice C) e de expansão (índice E). Este grupo não considera o impulso de momento.

Temos,

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_{TA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^t \\ \mathbf{W}_T^t \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_A + \begin{pmatrix} \tilde{w}_N \\ \tilde{w}_T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_{NC} \\ \dot{D}_{TC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^t \\ \mathbf{W}_T^t \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_C + \begin{pmatrix} \tilde{w}_N \\ \tilde{w}_T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_{NE} \\ \dot{D}_{TE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^t \\ \mathbf{W}_T^t \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_E + \begin{pmatrix} \tilde{w}_N \\ \tilde{w}_T \end{pmatrix}$$

e

$$[M](\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A) - (\mathbf{W}_N \quad \mathbf{W}_T) \begin{pmatrix} I_{NC} \\ I_{TC} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$[M](\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_C) - (\mathbf{W}_N \quad \mathbf{W}_T) \begin{pmatrix} I_{NE} \\ I_{TE} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

2.4.4 Quarto grupo

O quarto grupo considera as fases de compressão e de expansão e também o impulso de momento. Este é o caso mais geral.

Temos,

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_{TA} \\ \dot{D}_{\theta A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^t \\ \mathbf{W}_T^t \\ \mathbf{W}_\theta^t \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_A + \begin{pmatrix} \tilde{w}_N \\ \tilde{w}_T \\ \tilde{w}_\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_{NC} \\ \dot{D}_{TC} \\ \dot{D}_{\theta C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^t \\ \mathbf{W}_T^t \\ \mathbf{W}_\theta^t \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_C + \begin{pmatrix} \tilde{w}_N \\ \tilde{w}_T \\ \tilde{w}_\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_{NE} \\ \dot{D}_{TE} \\ \dot{D}_{\theta E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^t \\ \mathbf{W}_T^t \\ \mathbf{W}_\theta^t \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_E + \begin{pmatrix} \tilde{w}_N \\ \tilde{w}_T \\ \tilde{w}_\theta \end{pmatrix}$$

e

$$[M](\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A) - \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N & \mathbf{W}_T & \mathbf{W}_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{NC} \\ I_{TC} \\ I_{\theta C} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$[M](\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_C) - \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N & \mathbf{W}_T & \mathbf{W}_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{NE} \\ I_{TE} \\ I_{\theta E} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

2.5 Leis de Restituição

Para resolver o problema; isto é, encontrar $\dot{\mathbf{q}}_E$ e \mathbf{I} dados $\dot{\mathbf{q}}_A$, $[M]$ e $[W]$ precisamos, além das n equações obtidas pelas condições de salto derivadas das equações de Lagrange, de mais duas equações (ou três equações se consideramos o impulso de momento). Essas equações são dadas pelas leis de restituição que serão divididas em leis de restituição na direção normal e leis de restituição na direção tangencial. Elas modelam o comportamento constitutivo dos materiais.

2.5.1 Leis de restituição na direção normal

As leis de restituição na direção normal mais empregadas são as de Newton e a de Poisson que serão discutidas a seguir. Apenas como ilustração falaremos sobre a lei de restituição de Beghin-Boulanger. Cada uma dessas leis define um coeficiente de restituição, que serão usados nos modelos, indicando o que ocorre na direção normal e por isso chamaremos esse coeficiente de coeficiente de restituição normal ou simplesmente coeficiente de restituição.

O coeficiente de restituição de Newton considera as velocidades relativas normais pré e pós-colisão, o de Poisson considera os impulsos normais durante as fases de compressão e de expansão e o de Beghin-Boulanger considera uma razão entre energias.

Discutiremos a seguir cada um desses coeficientes.

- Coeficiente de restituição de Newton

O coeficiente de restituição de Newton, denotado por e_n , é definido como a razão entre a velocidade normal relativa pós-colisão (\dot{D}_{NE}) e a velocidade normal relativa pré-colisão (\dot{D}_{NA}). Assim,

$$e_n = -\frac{\dot{D}_{NE}}{\dot{D}_{NA}}.$$

Como podemos observar esse coeficiente de restituição leva em consideração apenas a cinemática do sistema na colisão.

- Coeficiente de restituição de Poisson

O coeficiente de restituição de Poisson, denotado por e_{np} , é definido como a razão entre o impulso normal na fase de expansão (I_{NE}) e o impulso normal na fase de compressão (I_{NC}).

$$e_{np} = \frac{I_{NE}}{I_{NC}}.$$

Esse coeficiente de restituição leva em consideração a dinâmica do sistema no processo virtual da colisão, diferente do coeficiente de restituição de Newton.

- Coeficiente de restituição de Beghin-Boulanger

O coeficiente de restituição de Beghin-Boulanger, denotado por e_b , está relacionado com a perda de energia cinética durante a colisão. Esse coeficiente exprime uma relação entre a energia cinética da fase de expansão e a energia cinética da fase de compressão.

Assim,

$$e_b^2 = -\frac{T_E - T_C}{T_C - T_A}.$$

Esse coeficiente de restituição considera a troca de energia no processo virtual de colisão.

2.5.2 Leis de restituição na direção tangencial

Na direção tangencial a primeira lei de restituição a ser considerada é o caso que chamamos de colisão perfeita; isto é, quando o impulso tangencial é nulo; isto é, $I_T = 0$. Esse é o caso quando não consideramos o atrito na colisão.

Quando consideramos o atrito uma das leis mais usadas é a lei de Coulomb. De fato, trata-se de uma modificação da Lei de Coulomb, que em problemas de colisão é expressa em termos de impulsos e não de forças. A forma utilizada é

$$I_T < \mu I_N \quad \text{se} \quad \dot{D}_T = 0$$

e

$$I_T = -s\mu I_N \quad \text{sendo} \quad s = \frac{\dot{D}_T}{|\dot{D}_T|}, \quad \text{se} \quad \dot{D}_T \neq 0.$$

μ é o coeficiente de atrito.

Smith (1991) utiliza uma lei baseada numa espécie de média ponderada das velocidades relativas pré e pós-colisão dada por

$$I_T = -\mu I_N \frac{\dot{D}_{TA} |\dot{D}_{TA}| + \dot{D}_{TE} |\dot{D}_{TE}|}{|\dot{D}_{TA}|^2 + |\dot{D}_{TE}|^2}.$$

Alguns modelos usam apenas um coeficiente de restituição tangencial, como em Moreau (1988), relacionando as velocidades relativas tangenciais pré e pós-colisão, dado por

$$e_t = -\frac{\dot{D}_{TE}}{\dot{D}_{TA}}.$$

Há outros modelos que usam combinações ou variações dessas leis.

2.5.3 Comparação entre as três definições dos coeficientes de restituição normal no caso sem atrito

Mostraremos que no caso sem atrito; isto é, $I_T = 0$, os três coeficientes são equivalentes.

Coeficiente de restituição de Poisson e coeficiente de restituição de Newton

No fim da fase de compressão, temos

$$\dot{D}_{NC} = \mathbf{W}_N^t \dot{\mathbf{q}}_C + \tilde{w}_N = 0$$

e

$$[M](\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A) = I_{NC} \mathbf{W}_N.$$

No fim da fase de expansão temos

$$[M](\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_C) = I_{NE} \mathbf{W}_N.$$

Mas,

$$I_{NE} = e_{np} I_{NC}.$$

Logo,

$$[M](\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_C) = e_{np} [M](\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A).$$

Assim,

$$\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_C = e_{np} (\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A).$$

Mas,

$$\mathbf{W}_N^t \dot{\mathbf{q}}_C = \dot{D}_{NC} - \tilde{w}_N \quad e \quad \mathbf{W}_N^t \dot{\mathbf{q}}_E = \dot{D}_{NE} - \tilde{w}_N.$$

Temos,

$$\mathbf{W}_N^t (\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_C) = \dot{D}_{NE} - \dot{D}_{NC} = \dot{D}_{NE}.$$

Também,

$$\mathbf{W}_N^t (\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A) = \dot{D}_{NC} - \dot{D}_{NA} = -\dot{D}_{NA}.$$

Logo,

$$\dot{D}_{NE} = -e_{np} \dot{D}_{NA}.$$

Dessa forma, se $e_{np} = e_n$ então concluímos que Poisson implica Newton. A prova de que Newton implica Poisson é análoga; isto é, basta fazermos o caminho inverso.

Coefficiente de restituição de Beghin-Boulanger e coeficiente de restituição de Newton

O coeficiente de restituição de Begin-Boulanger é dado por

$$e_b^2 = -\frac{T_E - T_C}{T_C - T_A}$$

Como $I_T = 0 \Rightarrow I_{TC} = 0$ temos $T_C = \frac{1}{2}[M_L]\dot{D}_{NC}^2 = 0$.
Assim,

$$T_E = e_b^2 T_A \Rightarrow \frac{1}{2}[M_L]\dot{D}_{NE}^2 = e_b^2 \frac{1}{2}[M_L]\dot{D}_{NA}^2$$

e

$$\dot{D}_{NE}^2 = e_b^2 \dot{D}_{NA}^2 \Rightarrow \dot{D}_{NE} = -e_b \dot{D}_{NA}$$

Concluimos que se $e_b = e_n$ então Beghin-Boulanger implica Newton. A prova de que Newton implica Beghin-Boulanger é análoga.

2.6 O Espaço de Impulsos**2.6.1 Introdução**

Uma das formas de entendermos o processo virtual de colisão entre dois corpos rígidos no plano é a de analisar os impulsos normal I_N e tangencial I_T nesse processo.

Consideremos m_1 e m_2 as massas de dois corpos em colisão, J_1 e J_2 os momentos de inércia desses corpos e (x_1, y_1) e (x_2, y_2) as coordenadas dos centros de massa dos corpos como na Figura 2.4.

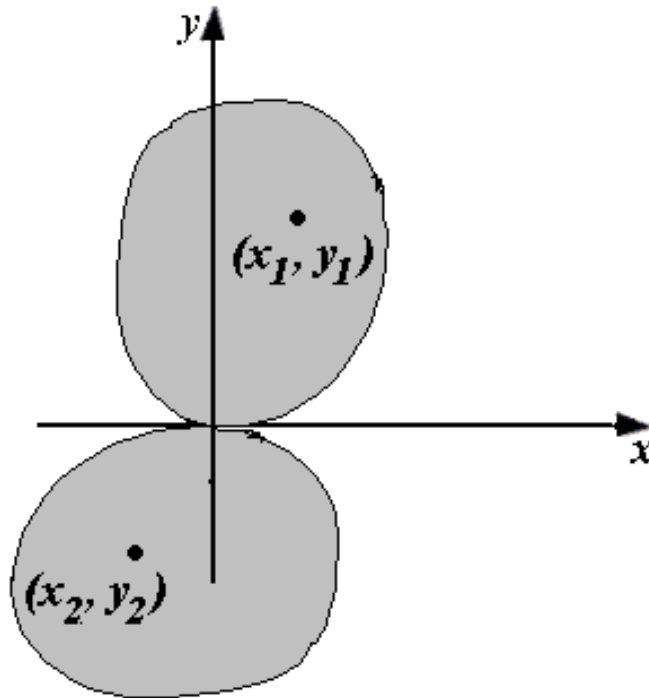


Figura 2.4. Corpos em colisão num plano

O vetor de coordenadas generalizadas será dado por

$$\mathbf{q} = (x_1 \ y_1 \ \theta_1 \ x_2 \ y_2 \ \theta_2)^t.$$

A matriz de massa será dada por

$$[M] = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

e a inversa da matriz de massa dada por

$$[M]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_2} \end{pmatrix}$$

Assim, a velocidade tangencial relativa é dada por

$$\begin{aligned} \dot{D}_T &= (\dot{x}_1 + \dot{\theta}_1 y_1) - (\dot{x}_2 + \dot{\theta}_2 y_2) = \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & y_1 & -1 & 0 & -y_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}_T^t} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e a velocidade normal relativa dada por

$$\begin{aligned} \dot{D}_N &= (\dot{y}_1 - \dot{\theta}_1 x_1) - (\dot{y}_2 - \dot{\theta}_2 x_2) = \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -x_1 & 0 & -1 & x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}_N^t} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Usando a equação

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_N \\ \dot{D}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_N^t \\ \mathbf{w}_T^t \end{pmatrix} [M]^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_N & \mathbf{w}_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_N \\ I_T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_{TA} \end{pmatrix}$$

u na forma

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_N \\ \dot{D}_T \end{pmatrix} = [\tilde{M}_L] \begin{pmatrix} I_N \\ I_T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_{TA} \end{pmatrix}$$

chegamos no sistema

$$\begin{cases} \dot{D}_N = AI_N - BI_T + \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_T = -BI_N + CI_T + \dot{D}_{TA} \end{cases} \quad (2.2)$$

com

$$\begin{cases} A = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{x_1^2}{J_1} + \frac{x_2^2}{J_2} \\ B = \frac{x_1 y_1}{J_1} + \frac{x_2 y_2}{J_2} \\ C = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{y_1^2}{J_1} + \frac{y_2^2}{J_2} \end{cases}$$

Assim,

$$[\tilde{M}_L] = \begin{bmatrix} A & -B \\ -B & C \end{bmatrix}.$$

2.6.2 Reta de máxima compressão

No fim da fase de compressão, a componente normal da velocidade relativa é zero ($\dot{D}_{NC} = 0$). Assim, definimos *reta de máxima compressão* como sendo a reta dada por

$$AI_N - BI_T + \dot{D}_{NA} = 0.$$

Após o ponto de máxima compressão começa a fase de expansão que vai até o fim da colisão.

De acordo com o esquema dado na Figura 2.3 devemos ter durante a fase de compressão $\dot{D}_N < 0$, no fim da fase de compressão $\dot{D}_N = 0$ e na fase de expansão $\dot{D}_N > 0$.

2.6.3 Reta de terminação de Newton

De acordo com o coeficiente de restituição de Newton a fase de expansão termina quando a velocidade relativa normal \dot{D}_{NE} é $-e_n$ vezes a velocidade relativa normal pré-colisão \dot{D}_{NA} . Isto é,

$$e_n = -\frac{\dot{D}_{NE}}{\dot{D}_{NA}}.$$

Dessa forma definimos *reta de terminação* de Newton como sendo a reta obtida quando $\dot{D}_{NE} = -e_n \dot{D}_{NA}$.

Assim,

$$AI_N - BI_T + (1 + e_n)\dot{D}_{NA} = 0.$$

Sob a hipótese de Poisson, a fase de expansão termina quando o impulso normal I_N é $(1 + e_{np})$ vezes o valor de I_{NC} . Isto é,

$$I_N = (1 + e_{np})I_{NC}$$

e nesse caso não definimos *reta de terminação*.

2.6.4 Retas de atrito

Os impulsos normal e tangencial devem satisfazer a relação, baseada na lei de Coulomb, $|I_T| \leq \mu I_N$. Assim, definimos *retas de atrito* as retas de equação $|I_T| = \mu I_N$. Essas retas são os limites de uma região de forma que todo ponto (I_T, I_N) dentro dessa região satisfaz a lei de Coulomb.

2.6.5 Energia

Calculando a energia cinética no fim da fase de expansão encontramos

$$T_E = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{D}}_E^t [M_L] \dot{\mathbf{D}}_E$$

e a energia cinética pré-colisão é dada por

$$T_A = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{D}}_A^t [M_L] \dot{\mathbf{D}}_A.$$

Supondo que o processo de colisão não gere energia (satisfazendo as leis da termodinâmica), devemos ter

$$T_E - T_A \leq 0.$$

Sabemos que

$$\dot{\mathbf{D}}_E = [\tilde{M}_L] \mathbf{I} + \dot{\mathbf{D}}_A$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} T_E &= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{D}}_A + [\tilde{M}_L] \mathbf{I})^t [M_L] (\dot{\mathbf{D}}_A + [\tilde{M}_L] \mathbf{I}) = \\ q &= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{D}}_A^t + \mathbf{I}^t [\tilde{M}_L]) [M_L] (\dot{\mathbf{D}}_A + [\tilde{M}_L] \mathbf{I}) = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{D}}_A^t [M_L] + \mathbf{I}^t) (\dot{\mathbf{D}}_A + [\tilde{M}_L] \mathbf{I}) = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{D}}_A^t [M_L] \dot{\mathbf{D}}_A + \dot{\mathbf{D}}_A^t \mathbf{I} + \mathbf{I}^t \dot{\mathbf{D}}_A + \mathbf{I}^t [\tilde{M}_L] \mathbf{I}) \end{aligned}$$

Assim,

$$T_E = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{D}}_A^t \mathbf{I} + \mathbf{I}^t (\dot{\mathbf{D}}_A + [\tilde{M}_L] \mathbf{I})] + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{D}}_A^t [M_L] \dot{\mathbf{D}}_A$$

Mas

$$T_A = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{D}}_A^t [M_L] \dot{\mathbf{D}}_A$$

Logo,

$$T_E - T_A = \mathbf{I}^t \dot{\mathbf{D}}_A + \frac{1}{2} \mathbf{I}^t [\tilde{M}_L] \mathbf{I}. \quad (2.3)$$

Quando $T_E - T_A = 0$ a equação descreve uma elipse dada por

$$AI_N^2 + CI_T^2 - 2BI_N I_T + 2\dot{D}_{NA} I_N + 2\dot{D}_{TA} I_T = 0$$

pois

$$[\tilde{M}_L] = \begin{bmatrix} A & -B \\ -B & C \end{bmatrix}.$$

No caso geral devemos ter $T_E - T_A \leq 0$.

Podemos, também, escrever a diferença de energia cinética na forma

$$T_E - T_A = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{D}}_A^t \mathbf{I} + \dot{\mathbf{D}}_E^t \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \mathbf{I}^t (\dot{\mathbf{D}}_A + \dot{\mathbf{D}}_E) = \mathbf{I}^t \left(\frac{\dot{\mathbf{D}}_A + \dot{\mathbf{D}}_E}{2} \right). \quad (2.4)$$

2.6.6 Reta de aderência

Chamamos de reta de aderência (*Sticking*) quando $\dot{D}_T = 0$. Obtemos,

$$-BI_N + CI_T + \dot{D}_{TA} = 0.$$

Uma das propriedades desta reta é que ela une os pontos da elipse de energia com reta tangente horizontal. A equação da elipse de energia é dada por

$$AI_N^2 + CI_T^2 - 2BI_N I_T + 2\dot{D}_{NA} I_N + 2\dot{D}_{TA} I_T = 0$$

podemos derivar implicitamente em relação à I_T obtendo

$$2AI_N \frac{dI_N}{dI_T} + 2CI_T - 2BI_T \frac{dI_N}{dI_T} - 2BI_N + 2\dot{D}_{TA} = 0.$$

Quando $\frac{dI_N}{dI_T} = 0$ temos

$$-BI_N + CI_T + \dot{D}_{TA} = 0.$$

2.6.7 Região admissível no espaço de impulsos

Reunindo o que vimos até aqui temos condições que os impulsos I_T e I_N devem satisfazer num processo (virtual) de colisão. Primeiro traçamos a elipse de energia e cada ponto (I_T, I_N) , representando um impulso admissível, deve estar na região do interior desta elipse.

Além disso, esse ponto deve estar entre as retas de atrito, para satisfazer a lei de Coulomb e acima da reta de máxima compressão, pois no fim da fase de expansão devemos ter $\dot{D}_N > 0$. Podemos, então, construir a região chamada de admissível no espaço de impulsos mostrada na Figura 2.5.

2.7 Aderência e Deslizamento

Dizemos que há aderência (*Sticking*) na colisão de dois corpos rígidos quando a velocidade relativa tangencial é nula; isto é, $\dot{D}_T = 0$.

No caso de deslizamento (*Sliding*); isto é, quando $\dot{D}_T \neq 0$, temos duas possibilidades: deslizamento progressivo (*Forward sliding*) e deslizamento reverso (*Reverse sliding*). Quando a velocidade tangencial relativa permanece com o mesmo sentido no processo virtual de colisão, chamamos de deslizamento progressivo mas se o sentido muda chamamos de deslizamento reverso.

2.8 Uma Classificação de Colisões

As colisões são classificadas em diretas e oblíquas, centrais e excêntricas, tangenciais e de encontro. Essas classificações estão ligadas aos valores da velocidade relativa tangencial inicial \dot{D}_{TA} , da velocidade relativa normal inicial \dot{D}_{NA} e do parâmetro B da matriz local de massa.

Se $\dot{D}_{TA} = 0$ então a colisão é chamada de *colisão direta*, caso contrário é chamada de *colisão oblíqua*.

Se $\dot{D}_{NA} = 0$ então a colisão é chamada de *colisão tangencial* caso contrário é chamada simplesmente de *colisão de encontro*.

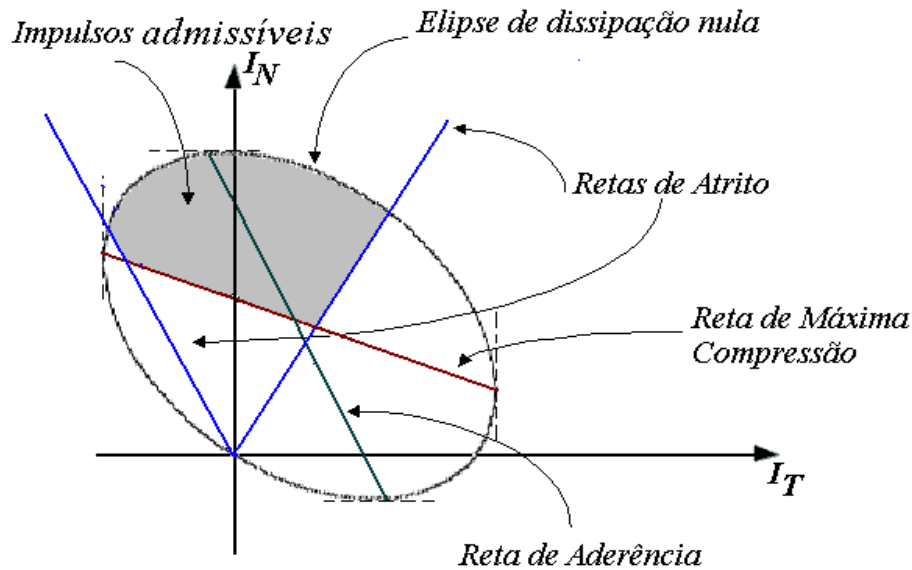


Figura 2.5. Região admissível no espaço de impulsos

Se $B = 0$; isto é, se a matriz local de massa é diagonal então a colisão é chamada de *colisão central generalizada*. Se os centros de massa dos corpos pertencem à reta normal do contato então a colisão é chamada simplesmente de *colisão central*.

Quando tratarmos do modelo de colisão dado por Wang e Mason voltaremos a discutir sobre a elipse de energia.

2.9 Uma Comparação entre os Coeficientes de Newton e de Poisson

2.9.1 Introdução

Antes de começarmos a discussão sobre os vários modelos de colisão trataremos do exemplo de um pêndulo rígido que colide com o solo.

Este problema foi escolhido pois a partir dele podemos :

- Entender a diferença entre o coeficiente de restituição de Newton e o de Poisson
- Tratar de alguns casos em que o sistema não tem solução ou pode ter solução matemática mas a solução não é fisicamente aceitável.

2.9.2 Um problema modelo

Consideremos a colisão de um pêndulo rígido de massa m e comprimento L com uma superfície horizontal animada de uma velocidade v como indica a Figura 2.6.

Após a colisão dos pontos P e Q em O queremos saber o valor de $\dot{\theta}$.

Na nossa notação, conhecendo $\dot{\theta}_A$, $[M]$ e $[W]$ desejamos encontrar $\dot{\theta}_E$ e $\mathbf{I} = (I_N, I_T)$.

A dinâmica do sistema, se não houver colisão, é dada por : $\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + mg\frac{L}{2}\text{sen}\theta = 0$.

Temos,

$$D_N = L\cos\theta_0 - L\cos\theta \Rightarrow \dot{D}_N = L\dot{\theta}\text{sen}\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & L\text{sen}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

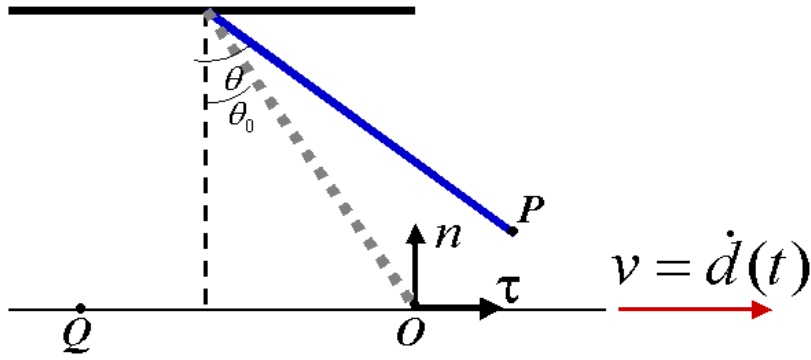


Figura 2.6. Colisão de um pêndulo rígido

e

$$D_T = L \text{sen} \theta - L \text{sen} \theta_0 - d(t) \Rightarrow \dot{D}_T = L \dot{\theta} \cos \theta - v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & L \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} - v$$

Logo,

$$[W]^t = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^t \\ \mathbf{W}_T^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & L \text{sen} \theta \\ 0 & 0 & L \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \tilde{w}_N \\ \tilde{w}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v \end{pmatrix}$$

Temos,

$$\dot{\mathbf{D}}_E - \dot{\mathbf{D}}_A = ([W]^t [M]^{-1} [W]) \mathbf{I} = [\tilde{M}_L] \mathbf{I} = \frac{3}{mL^2} \begin{pmatrix} L^2 \text{sen}^2 \theta_0 & L^2 \text{sen} \theta_0 \cos \theta_0 \\ L^2 \text{sen} \theta_0 \cos \theta_0 & L^2 \cos^2 \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_N \\ I_T \end{pmatrix}$$

ou

$$\dot{\mathbf{D}}_E - \dot{\mathbf{D}}_A = \frac{L^2}{J} \begin{pmatrix} \text{sen}^2 \theta_0 & \text{sen} \theta_0 \cos \theta_0 \\ \text{sen} \theta_0 \cos \theta_0 & \cos^2 \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_N \\ I_T \end{pmatrix}$$

Assim,

$$[\tilde{M}_L] = \frac{L^2}{J} \begin{pmatrix} \text{sen}^2 \theta_0 & \text{sen} \theta_0 \cos \theta_0 \\ \text{sen} \theta_0 \cos \theta_0 & \cos^2 \theta_0 \end{pmatrix}$$

Observamos que $\det[\tilde{M}_L] = 0$. Se $\theta_0 \neq 0$ e $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$ então a colisão não é central.

Discutiremos o problema usando o coeficiente de restituição de Newton e usando o coeficiente de restituição de Poisson. Em ambos os casos usamos a lei de Coulomb para o atrito.

Temos,

$$\begin{cases} \dot{D}_{NE} = \frac{L^2}{J} (\text{sen}^2 \theta_0 I_{NE} + \text{sen} \theta_0 \cos \theta_0 I_{TE}) + \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_{TE} = \frac{L^2}{J} (\text{sen} \theta_0 \cos \theta_0 I_{NE} + \cos^2 \theta_0 I_{TE}) + \dot{D}_{TA} \end{cases} \quad (2.5)$$

Usando o coeficiente de restituição de Newton

$$\dot{D}_{NE} = -e_n \dot{D}_{NA} \Rightarrow L \dot{\theta}_E \text{sen} \theta_0 = -e_n (L \dot{\theta}_A \text{sen} \theta_0).$$

Assim, para $\theta_0 \neq 0$, chegamos a

$$\dot{\theta}_E = -e_n \dot{\theta}_A.$$

Observamos que a velocidade pós-colisão depende, nesse caso, somente da cinemática do problema; isto é, de $\dot{\theta}_A$.

De Eq. 2.5 podemos escrever

$$-(e_n + 1)\dot{D}_{NA} = \frac{L^2}{J} \text{sen}^2 \theta_0 (I_{NE} + \text{cotg} \theta_0 I_{TE})$$

e

$$I_{NE} + \text{cotg} \theta_0 I_{TE} = \frac{-J(e_n + 1)\dot{\theta}_A}{L \text{sen} \theta_0}$$

Suponhamos $\dot{D}_{TE} \neq 0$. Assim, $I_{TE} = -\mu s I_{NE}$, $s = \text{sin}(\dot{D}_{TE})$.

Temos,

$$(1 - \mu \text{scotg} \theta) I_{NE} = \frac{-J(e_n + 1)\dot{\theta}_A}{L \text{sen} \theta_0}$$

Para que essa equação seja fisicamente possível devemos ter $I_{NE} > 0$, caso contrário haveria interpenetração dos corpos.

$$I_{NE} > 0 \Rightarrow 1 - \mu \text{scotg} \theta_0 > 0 \Rightarrow \text{scotg} \theta_0 < \frac{1}{\mu} \quad (2.6)$$

Consideremos o caso em que $\dot{D}_{TE} < 0$; isto é, $s = -1$ ou $\dot{D}_{TE} = L\dot{\theta}_E \text{cos} \theta_0 - v = -e_n L\dot{\theta}_A \text{cos} \theta_0 - v < 0$.

Ou ainda

$$e_n L\dot{\theta}_A \text{cos} \theta_0 + v > 0 \quad (2.7)$$

Logo, se $e_n L\dot{\theta}_A \text{cos} \theta_0 + v > 0 \Rightarrow \dot{D}_{TE} < 0$, $s = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\theta}_E = -e_n \dot{\theta}_A$ é fisicamente possível e

$$I_{NE} = \frac{-J(e_n + 1)\dot{\theta}_A}{L \text{sen} \theta_0} \frac{1}{1 - \mu \text{scotg} \theta_0} > 0 \text{ e } I_{TE} = \mu I_{NE}$$

Observamos que nesse caso a Eq. 2.6 é sempre satisfeita.

Consideremos, agora, o caso em que $\dot{D}_{TE} > 0$; isto é, $s = 1$ ou $L\dot{\theta}_E \text{cos} \theta_0 - v > 0 \Rightarrow e_n L\dot{\theta}_A \text{cos} \theta_0 + v < 0$.

Nesse caso a Eq. 2.6 só é satisfeita se $\mu < \text{tg} \theta_0$. Logo, se

$$e_n L\dot{\theta}_A \text{cos} \theta_0 + v < 0 \text{ e } \mu > \text{tg} \theta_0$$

então a equação $\dot{\theta}_E = -e_n \dot{\theta}_A$ não é fisicamente possível e desta forma, por Newton, o problema não tem solução.

Quando $\mu > \text{tg} \theta_0$ deveríamos ter $\dot{D}_{TE} = 0$ e isso não é possível de acontecer quando usamos o coeficiente de restituição de Newton (é possível se usamos o coeficiente de restituição de Poisson). Para entendermos melhor o problema, tomemos $v = 0$. Desta forma, a base está fixa. Como dissemos, quando $\mu > \text{tg} \theta_0$ a solução deveria ser $\dot{D}_{TE} = 0$. Porém, por Newton, sempre temos

$$\dot{D}_{NE} = -e_n \dot{D}_{NA} \Rightarrow \dot{\theta}_E = -e_n \dot{\theta}_A$$

e assim $\dot{D}_{TE} = L\dot{\theta}_E \cos\theta_0 = -e_n L\dot{\theta}_A \cos\theta_0$ que só será nulo se $\dot{\theta}_A = 0$.

Usando o coeficiente de restituição de Poisson devemos considerar as fases de compressão e de expansão. As equações são dadas

na fase de compressão por

$$\begin{cases} \dot{D}_{NC} = \frac{L^2}{J}(\text{sen}^2\theta_0 I_{NC} + \text{sen}\theta_0 \cos\theta_0 I_{TC}) + \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_{TC} = \frac{L^2}{J}(\text{sen}\theta_0 \cos\theta_0 I_{NC} + \cos^2\theta_0 I_{TC}) + \dot{D}_{TA} \end{cases}$$

e na fase de expansão por

$$\begin{cases} \dot{D}_{NE} = \frac{L^2}{J}(\text{sen}^2\theta_0 I_{NE} + \text{sen}\theta_0 \cos\theta_0 I_{TE}) + \dot{D}_{NC} \\ \dot{D}_{TE} = \frac{L^2}{J}(\text{sen}\theta_0 \cos\theta_0 I_{NE} + \cos^2\theta_0 I_{TE}) + \dot{D}_{TC} \end{cases}$$

com $I_{NE} = e_{np} I_{NC}$.

Porém, a solução do problema, nesse caso; isto é, quando $e_{np} L \cos\theta_0 \dot{\theta}_A + v \leq 0$ e $\mu > tg\theta_0$, obtida quando usamos o coeficiente de restituição de Poisson é

$$\dot{\theta}_E = \frac{v}{L \cos\theta_0} \Rightarrow \dot{D}_{TE} = 0$$

Se consideramos $v = 0$ obtemos $\dot{\theta}_E = 0$.

Mostramos na Tabela 2.1 a discussão desse problema com a utilização do coeficiente de restituição de Poisson.

$v \geq 0$	$\mu < tg\theta_0$	$\mu \geq tg\theta_0$
$e_{np} L \cos\theta_0 \dot{\theta}_A + v > 0$	Deslizamento progressivo $\dot{\theta}_E = -e_{np} \dot{\theta}_A$	
$e_{np} L \cos\theta_0 \dot{\theta}_A + v \leq 0$	Deslizamento reverso na fase de expansão $\dot{\theta}_E = \frac{1}{\mu \cos\theta_0 + \text{sen}\theta_0} (e_{np} (\mu \cos\theta_0 - \text{sen}\theta_0) \dot{\theta}_A + \frac{2\mu v}{L})$	Aderência negativo na fase de expansão $\dot{\theta}_E = \frac{v}{L \cos\theta_0}$
$v < 0$	$\mu < tg\theta_0$	$\mu \geq tg\theta_0$
$L \cos\theta_0 \dot{\theta}_A - v < 0$	Deslizamento reverso na fase de compressão $\dot{\theta}_E = \frac{-e_{np}}{\mu \cos\theta_0 + \text{sen}\theta_0} ((\text{sen}\theta_0 - \mu \cos\theta_0) \dot{\theta}_A + \frac{2\mu v}{L})$	não existe solução
$L \cos\theta_0 \dot{\theta}_A - v \geq 0$	deslizamento progressivo $\dot{\theta}_E = -e_{np} \dot{\theta}_A$	não existe solução

Tabela 2.1. Resultados usando o coeficiente de restituição de Poisson

3 APRESENTAÇÃO DOS MODELOS DE COLISÃO

3.1 Introdução

Neste capítulo desejamos discutir vários modelos de colisão plana entre corpos rígidos. Para cada um desses modelos discutiremos a teoria e faremos algumas simulações. De modo a poder compará-los escolhemos um exemplo, que é o de uma barra rígida chocando-se contra uma barreira fixa ilustrado na Figura 3.1.

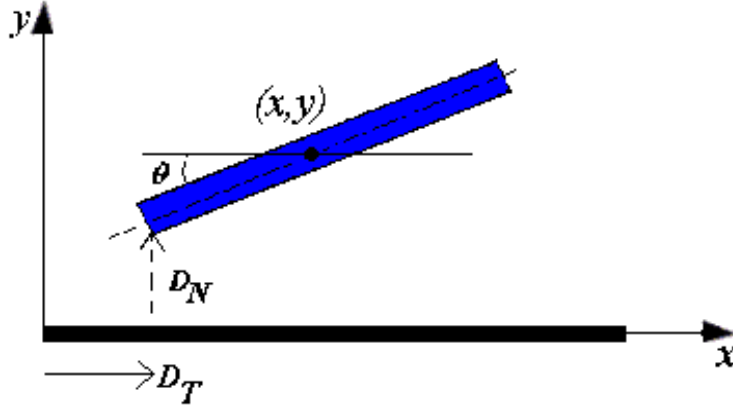


Figura 3.1. Exemplo para aplicações das leis de colisão

Consideremos (x, y) as coordenadas do centro de massa da barra e θ a sua orientação no plano conforme mostra a Figura 3.1. m é a massa da barra e L o seu comprimento.

O vetor de coordenadas generalizadas considerado é dado por

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}.$$

Para escrever as equações que descrevem a dinâmica do sistema (sem colisão) escrevemos a energia cinética do sistema

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2.$$

Escrevemos, também, a energia potencial do sistema dada por

$$U = mgy.$$

Obtemos, assim, o lagrangeano

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mgy.$$

Para a coordenada x escrevemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Assim,

$$m\ddot{x} = 0$$

Para a coordenada y escrevemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

Assim,

$$m\ddot{y} = -mg$$

e para a coordenada θ escrevemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Assim,

$$J\ddot{\theta} = 0$$

Com as três equações reunidas e usando $J = \frac{1}{12}mL^2$ escrevemos

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \\ \frac{1}{12}mL^2\ddot{\theta} = 0. \end{cases}$$

Assim, a matriz de massa é dada por

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}mL^2 \end{bmatrix}.$$

Os modelos de colisão a serem discutidos nesta seção são os modelos de Newton, Kane, Brach, Glocker-Pfeiffer, Wang-Mason (usando Newton ou Poisson) e Smith. Propomos um novo modelo de colisão que tenta englobar alguns dos discutidos aqui. Nesta seção tratamos também de um modelo apresentado por Chatterjee que difere dos outros por não ser descrito por uma equação algébrica e sim dado por um algoritmo. O modelo de Glocker-Pfeiffer é dividido em duas partes: a primeira não considera o que chamaremos de porções reversíveis do impulso tangencial (esse é mais simples) e o outro que considera essas porções reversíveis.

Na Tabela 3.1 mostramos uma visão geral desses modelos.

Modelo	Grupos de equações	Lei de rest. normal	Lei de rest. tangencial
Newton (sem atrito)	primeiro	Newton	$I_T = 0$
Kane	primeiro	Newton	Coulomb
Brach	segundo	Newton	razão entre impulsos
Glocker-Pfeiffer	terceiro	Poisson	Coulomb
Wang-Mason (usando Newton)	segundo	Newton	Coulomb
Wang-Mason (usando Poisson)	terceiro	Poisson	Coulomb
Smith	primeiro	Newton	<i>média</i> entre velocidades
Modelo C-S	quarto	Poisson	Coulomb

Tabela 3.1. Visão geral dos modelos de colisão

3.2 Modelo: Newton (sem Atrito)

3.2.1 Introdução

Nesta seção consideramos o modelo mais simples no estudo de colisões entre corpos. Este modelo considera apenas o coeficiente de restituição de Newton para a colisão; isto é, considera o coeficiente de restituição normal dado pela razão entre as velocidades normais relativas no fim da fase de expansão (pós-colisão) e pré-colisão e não considera o atrito.

Usaremos o primeiro grupo de equações e como não consideramos atrito o impulso na direção tangencial é nulo. Assim, as equações reduzem-se a

$$\begin{cases} [M](\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_A) - \mathbf{W}_N I_N = 0 \\ \dot{D}_{NE} = \mathbf{W}_N^t \dot{\mathbf{q}}_E + \tilde{w}_N \\ \dot{D}_{NA} = \mathbf{W}_N^t \dot{\mathbf{q}}_A + \tilde{w}_N \end{cases} \quad (3.1)$$

Como usamos o coeficiente de restituição de Newton para a colisão temos

$$\dot{D}_{NE} = -e_n \dot{D}_{NA} \quad (3.2)$$

3.2.2 Aplicação no caso da barra

Para o contato do lado esquerdo temos

$$D_N = y - \frac{L}{2} \text{sen}\theta \Rightarrow \dot{D}_N = \dot{y} - \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos\theta = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{L}{2} \cos\theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{W}_N^t} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

e para o lado direito temos

$$D_N = y + \frac{L}{2} \text{sen}\theta \Rightarrow \dot{D}_N = \dot{y} + \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos\theta = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{L}{2} \cos\theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{W}_N^t} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Assim, para o lado esquerdo

$$\begin{cases} \dot{x}_E = \dot{x}_A \\ \dot{y}_E = \dot{y}_A - \frac{1}{mH_N}(1 + e_n)\dot{D}_{NA} \\ \dot{\theta}_E = \dot{\theta}_A + \frac{3}{mL}(\cos\theta)\frac{1}{H_N}(1 + e_n)\dot{D}_{NA} \end{cases} \quad (3.5)$$

com $H_N = \frac{1}{m} + \frac{3\cos^2\theta}{m}$.
e para o lado direito

$$\begin{cases} \dot{x}_E = \dot{x}_A \\ \dot{y}_E = \dot{y}_A - \frac{1}{mH_N}(1 + e_n)\dot{D}_{NA} \\ \dot{\theta}_E = \dot{\theta}_A + \frac{3}{mL}(\cos\theta)\frac{1}{H_N}(1 + e_n)\dot{D}_{NA} \end{cases} \quad (3.6)$$

com $H_N = \frac{1}{m} + \frac{3\cos^2\theta}{m}$.

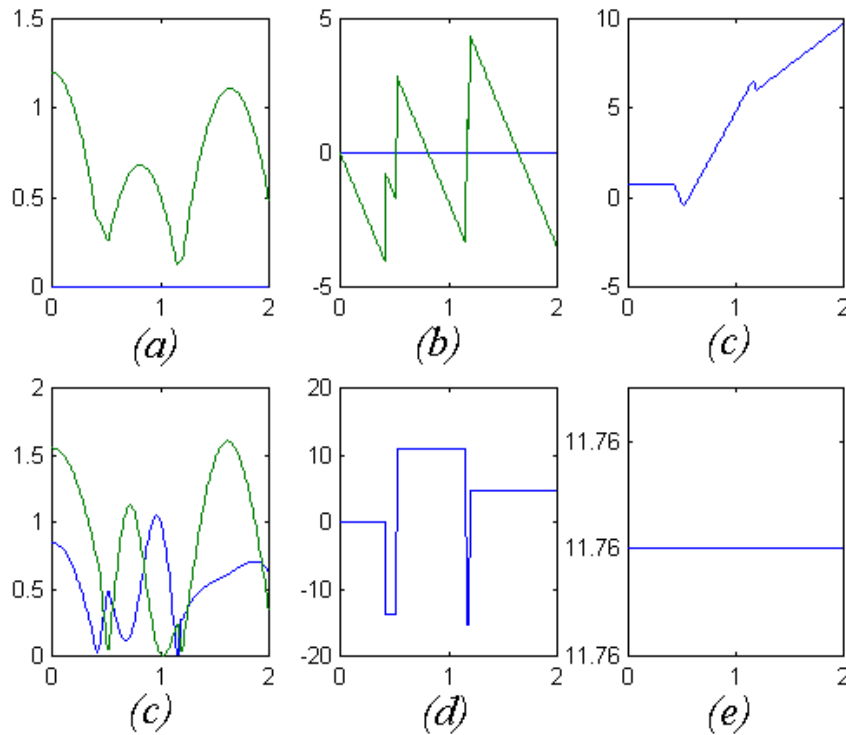


Figura 3.2. Modelo de Newton (sem a consideração de atrito): (a) Deslocamento vertical do centro de massa (verde) e deslocamento horizontal do centro de massa (azul); (b) Velocidade vertical do centro de massa (linha verde) e velocidade horizontal do centro de massa (linha azul); (c) Deslocamento angular; (d) Deslocamento vertical da extremidade da esquerda (linha verde) e deslocamento vertical da extremidade da direita (linha azul); (e) Velocidade angular; (f) Energia

3.2.3 Simulações

Nas simulações consideramos $m = 1 \text{ kg}$ e $L = 1 \text{ metro}$.

Os gráficos da Figura 3.2 referem-se a $e_n = 1$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $y_0 = 1.2$, $\dot{y}_0 = 0$, $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\theta}_0 = 0$.

O conjunto de gráficos dados na Figura 3.3 refere-se a $e_n = 0.8$ e às seguintes condições iniciais: $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $y_0 = 1.2$, $\dot{y}_0 = 0$, $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\theta}_0 = 0$. As animações correspondentes são dadas na Figura 3.4. Consideramos, nas simulações, o intervalo $[0, 0.8]$.

Lembramos que, no caso sem atrito, os coeficientes de restituição de Newton e de Poisson fornecem os mesmos resultados, como já foi discutido.

3.3 Modelo de Brach

3.3.1 Introdução

O modelo de Brach é baseado nas equações do segundo grupo. Os parâmetros usados são razões adimensionais entre várias quantidades físicas. Na direção normal é usado o coeficiente de restituição definido por Newton. Na direção tangencial Brach usa um coeficiente dado pela razão entre os impulsos na direção tangencial e normal, denotando também por μ .

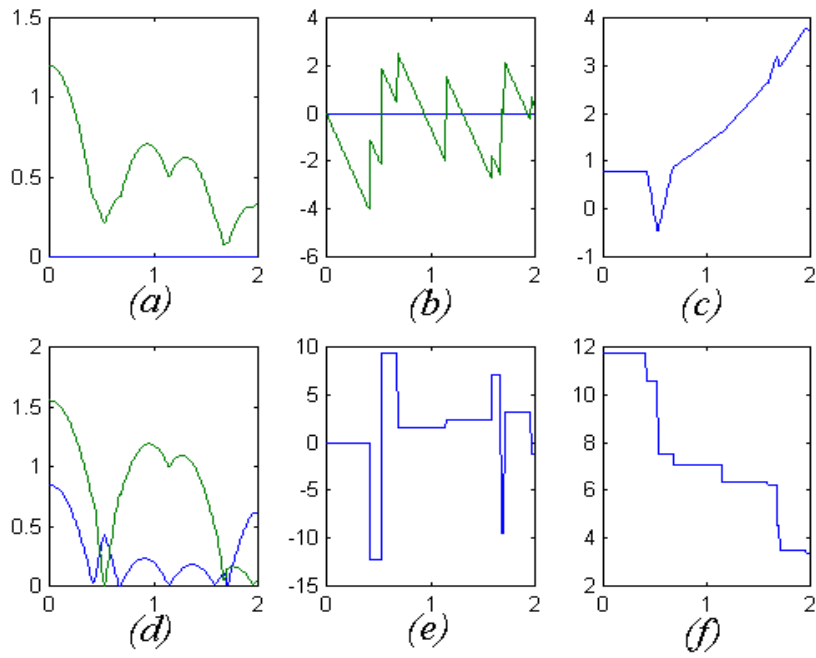


Figura 3.3. Modelo de Newton (sem a consideração de atrito): (a) Deslocamento vertical do centro de massa (linha verde) e deslocamento horizontal do centro de massa (linha azul); (b) Velocidade vertical do centro de massa (linha verde) e velocidade horizontal do centro de massa (linha azul); (c) Deslocamento angular; (d) Deslocamento vertical da extremidade da esquerda (linha verde) e deslocamento vertical da extremidade da direita (linha azul); (e) Velocidade angular; (f) Energia

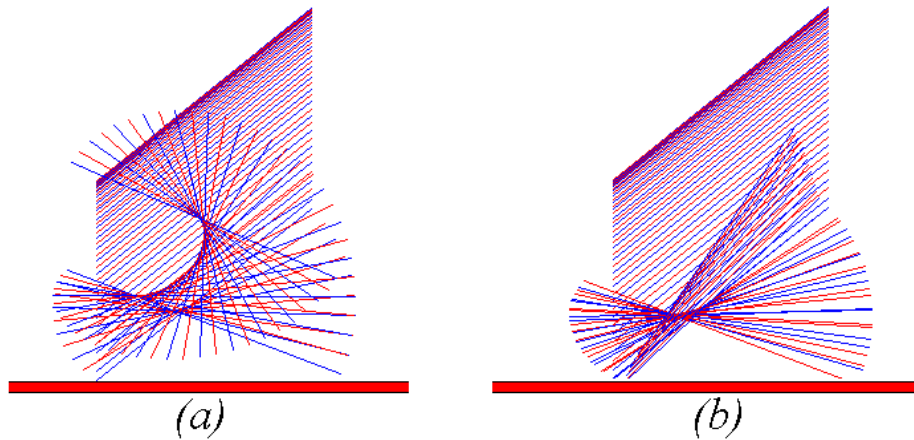


Figura 3.4. Animação: Modelo de Newton (sem a consideração de atrito) (a) $e_n = 1.0$ e (b) $e_n = 0.8$

3.3.2 Coeficiente de momento e_m

Brach considera a possibilidade de existir um impulso de momento no ponto de colisão que pode afetar a velocidade angular diretamente (e não através da geometria). Porém, esse

impulso de momento pode levar a uma perda de energia. O modelo introduz um coeficiente chamado de coeficiente de momento relacionando as velocidades angulares inicial e final.

Consideremos $\dot{D}_{\theta A}$ a velocidade angular relativa pré-colisão e $\dot{D}_{\theta E}$ a velocidade angular relativa pós-colisão. Se usássemos uma relação do tipo

$$\dot{D}_{\theta E} = -e_m \dot{D}_{\theta A}$$

seria muito restritivo pois obrigaria a existência de um impulso de momento em todas as colisões, dessa forma Brach usou a relação

$$e_m I_\theta = -(1 + e_m) \bar{J} \dot{D}_{\theta E}$$

sendo $\bar{J} = \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}$.

Quando $e_m = -1$ temos que $I_\theta = 0$; isto é, um impulso de momento nulo.

As equações usadas são as do segundo grupo.

3.3.3 Aplicação no caso da barra

Para a extremidade da esquerda temos

$$D_N = y - \frac{L}{2} \text{sen}\theta \Rightarrow \dot{D}_N = \dot{y} - \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos\theta = \underbrace{\left(0 \quad 1 \quad -\frac{L}{2} \cos\theta \right)}_{\mathbf{w}_N^t} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$D_T = x - \frac{L}{2} \cos\theta \Rightarrow \dot{D}_T = \dot{x} + \frac{L}{2} \dot{\theta} \text{sen}\theta = \underbrace{\left(1 \quad 0 \quad \frac{L}{2} \text{sen}\theta \right)}_{\mathbf{w}_T^t} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$D_\theta = -\theta \Rightarrow \dot{D}_\theta = -\dot{\theta} = \underbrace{\left(0 \quad 0 \quad -1 \right)}_{\mathbf{w}_\theta^t} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Brach fez as seguintes considerações

$$\begin{cases} \dot{D}_{NE} = -e_n \dot{D}_{NA} \\ I_T = \mu I_N \\ e_m I_\theta = (1 + e_m) J \dot{\theta}_E. \end{cases}$$

Usamos

$$\begin{cases} A = \frac{1}{m} + \frac{L^2}{4J} \cos^2\theta \\ B = \frac{L^2}{4J} \text{sen}\theta \cos\theta \\ C = \frac{1}{m} + \frac{L^2}{4J} \text{sen}^2\theta \\ D = \frac{L}{2J} \cos\theta \\ E = \frac{L}{2J} \text{sen}\theta \end{cases}$$

e

$$\dot{D}_{\theta E} = -\dot{\theta}_E = -\frac{e_m}{(1 + e_m)J} I_\theta.$$

Chegamos às equações

$$\begin{cases} (A - B\mu)I_N + DI_\theta = -(e_n + 1)\dot{D}_{NA} \\ (B - C\mu)I_N + EI_\theta + \dot{D}_{TE} = -\dot{D}_{TA} \\ (D - E\mu)I_N + \frac{1}{J}I_\theta + \frac{e_m}{(1+e_m)J}I_\theta = -\dot{D}_{\theta A}. \end{cases}$$

Raciocinando analogamente, chegamos às equações da extremidade da direita dadas por Com

$$\begin{cases} A = \frac{1}{m_2} + \frac{L^2}{4J}\cos^2\theta \\ B = \frac{L^2}{4J}\sin\theta\cos\theta \\ C = \frac{1}{m_2} + \frac{L^2}{4J}\sin^2\theta \\ D = \frac{L}{2J}\cos\theta \\ E = \frac{L}{2J}\sin\theta \end{cases}$$

e,

$$\dot{D}_{\theta E} = \dot{\theta}_E = -\frac{e_m}{(1+e_m)J}I_\theta.$$

Temos,

$$\begin{cases} (A - B\mu)I_N + DI_\theta = -(e_n + 1)\dot{D}_{NA} \\ (B - C\mu)I_N + EI_\theta + \dot{D}_{TE} = -\dot{D}_{TA} \\ (D - E\mu)I_N + \frac{1}{J}I_\theta + \frac{e_m}{(1+e_m)J}I_\theta = -\dot{D}_{\theta A}. \end{cases}$$

3.3.4 Simulações

Para comparar com o primeiro modelo mostramos os gráficos dados na Figura 3.5 referem-se a $e_n = 1$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $y_0 = 1.2$, $\dot{y}_0 = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\theta} = 0$, $\mu = 0$ e $e_m = -1$.

Mostramos as animações deste caso na Figura 3.6. Usamos o intervalo $[0, 0.8]$.

Mostramos mais um exemplo de modo a mostrar a influência do coeficiente e_m . Usamos os parâmetros $e_n = 1$ e às seguintes condições iniciais : $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $y_0 = 1.2$, $\dot{y}_0 = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\theta} = 0$, $\mu = 0$ e $e_m = 0.1$. Mostramos os gráficos correspondentes na Figura 3.7 e a animação correspondente na Figura 3.8. Tanto nos gráficos como na animação consideramos o intervalo $[0, 1]$.

3.4 Modelo de Kane

3.4.1 Introdução

Kane (1984) usou em seu modelo o coeficiente de restituição normal dado por Newton e considerou o atrito usando o critério adotado por Whittaker (1904); isto é, ele considerou que \dot{D}_{TE} será nula se a magnitude do impulso tangencial for menor do que μ (coeficiente de atrito) vezes a magnitude do impulso normal e quando \dot{D}_{TE} for diferente de zero, a magnitude do impulso tangencial será μ vezes a magnitude do impulso normal.

Este modelo usa as equações do primeiro grupo.

O modelo considera $\dot{D}_{NE} = -e_n\dot{D}_{NA}$ na direção normal e na direção tangencial usa

$$\begin{cases} |I_T| < \mu_0 I_N \Rightarrow \dot{D}_{TE} \\ I_T = \mu I_N \Rightarrow \dot{D}_{TE} < 0 \\ I_T = -\mu I_N \Rightarrow \dot{D}_{TE} > 0 \end{cases}$$

sendo μ_0 o coeficiente de atrito estático e μ o coeficiente de atrito cinético.

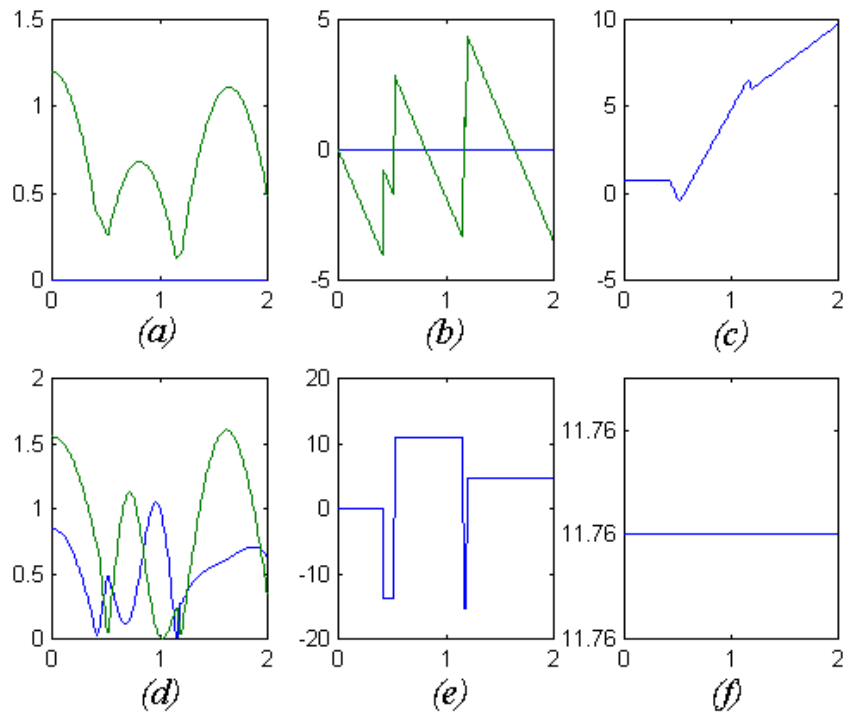


Figura 3.5. Modelo de Brach: (a) Deslocamento vertical do centro de massa (linha verde) e deslocamento horizontal do centro de massa (linha azul); (b) Velocidade vertical do centro de massa (linha verde) e velocidade horizontal do centro de massa (linha azul); (c) Deslocamento angular; (d) Deslocamento vertical da extremidade da esquerda (linha verde) e deslocamento vertical da extremidade da direita (linha azul); (e) Velocidade angular; (f) Energia

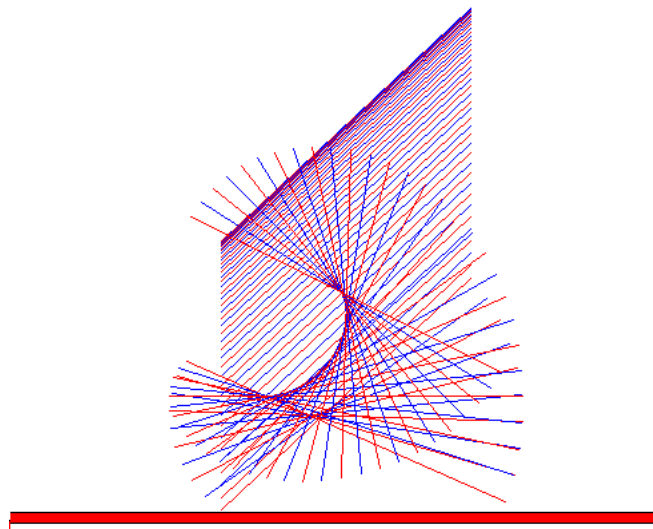


Figura 3.6. Animação: Modelo de Brach

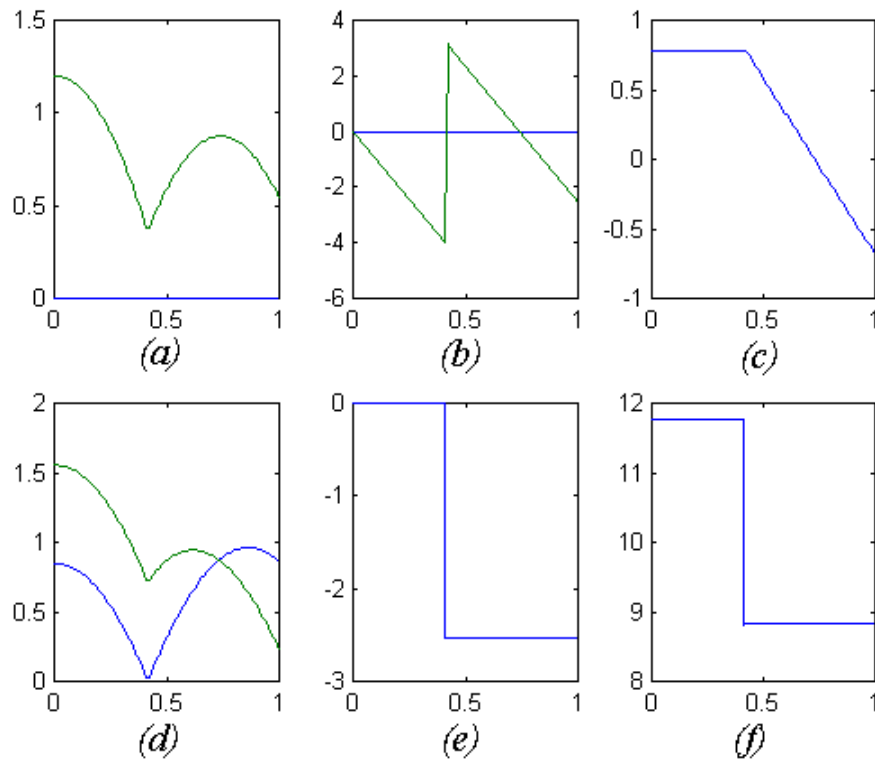


Figura 3.7. Modelo de Brach: (a) Deslocamento vertical do centro de massa (linha verde) e deslocamento horizontal do centro de massa (linha azul); (b) Velocidade vertical do centro de massa (linha verde) e velocidade horizontal do centro de massa (linha azul); (c) Deslocamento angular; (d) Deslocamento vertical da extremidade da esquerda (linha verde) e deslocamento vertical da extremidade da direita (linha azul); (e) Velocidade angular; (f) Energia

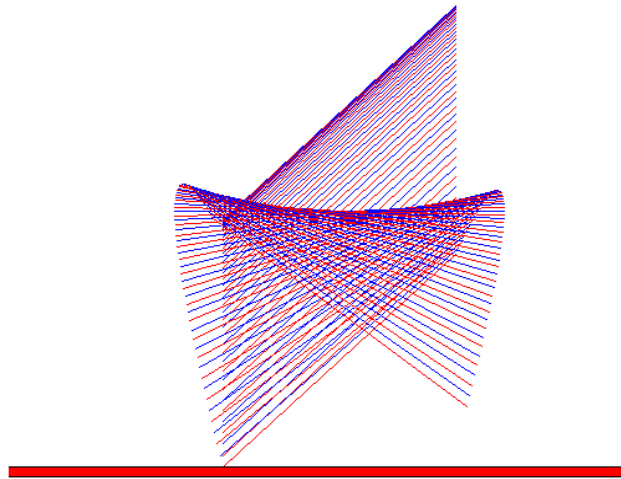


Figura 3.8. Animação: Modelo de Brach

Usando essas relações Kane mostrou que em alguns casos pode ocorrer acréscimo de energia cinética na colisão. O exemplo original usado por Kane é o de um pêndulo duplo em colisão com o solo. Resolvemos esse problema no apêndice, porém com a nossa formulação.

A seguir discutiremos o caso da barra rígida em colisão com uma barreira fixa e mostramos que dependendo dos valores de certos parâmetros podemos obter acréscimo de energia.

3.4.2 Aplicação no caso da barra

Considerando a extremidade da esquerda temos

$$D_N = y - \frac{L}{2} \text{sen}\theta \Rightarrow \dot{D}_N = \dot{y} - \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos\theta = \underbrace{\left(0 \quad 1 \quad -\frac{L}{2} \cos\theta \right)}_{W_N^t} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

e

$$D_T = x - \frac{L}{2} \cos\theta \Rightarrow \dot{D}_T = \dot{x} + \frac{L}{2} \dot{\theta} \text{sen}\theta = \underbrace{\left(0 \quad 1 \quad \frac{L}{2} \text{sen}\theta \right)}_{W_T^t} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Para a extremidade da direita temos

$$D_N = y + \frac{L}{2} \text{sen}\theta \Rightarrow \dot{D}_N = \dot{y} + \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos\theta = \underbrace{\left(0 \quad 1 \quad \frac{L}{2} \cos\theta \right)}_{W_N^t} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

e

$$D_T = x + \frac{L}{2} \cos\theta \Rightarrow \dot{D}_T = \dot{x} - \frac{L}{2} \dot{\theta} \text{sen}\theta = \underbrace{\left(0 \quad 1 \quad -\frac{L}{2} \text{sen}\theta \right)}_{W_T^t} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Temos,

$$(\dot{\mathbf{D}}_E - \dot{\mathbf{D}}_A) = [W]^t [M]^{-1} [W] \begin{pmatrix} I_N \\ I_T \end{pmatrix}$$

Obtemos,

$$\begin{cases} \dot{D}_{NE} = AI_N - BI_T + \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_{TE} = -BI_N + CI_T + \dot{D}_{TA} \end{cases}$$

com $A = \frac{1+3\cos^2\theta}{m} I_N$, $B = \frac{3\text{sen}\theta\cos\theta}{m} I_T$ e $C = \frac{1+3\text{sen}^2\theta}{m}$.

Usaremos,

$$\dot{D}_{NE} = -e_n \dot{D}_{NA}$$

e

$$\begin{cases} |I_T| < \mu_0 I_N \Rightarrow \dot{D}_{TE} = 0 \\ I_T = \mu I_N \Rightarrow \dot{D}_{TE} < 0 \\ I_T = -\mu I_N \Rightarrow \dot{D}_{TE} > 0 \end{cases}$$

Consideremos um exemplo mostrando que, nesse caso, para alguns valores dos parâmetros podemos obter acréscimo de energia na colisão.

Consideremos um caso de colisão oblíqua e não-central $\dot{D}_{NA} = -1$ e $\dot{D}_{TA} = 0.6$. Usamos $m = 1$, $L = 1$ e $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$. Temos $A = 2.5$, $B = 1.5$ e $C = 2.5$. Usaremos $\mu_0 = \mu = 1$.

Observamos que

$$|A\dot{D}_{TA} + B(e_n + 1)\dot{D}_{NA}| < -\mu[C(e_n + 1)\dot{D}_{NA} + B\dot{D}_{TA}]$$

logo $\dot{D}_{TE} = 0$.

Assim,

$$\dot{D}_{NE} = -e_n\dot{D}_{NA} = e_n$$

e

$$I_N = -\frac{m}{4}[C(e_n + 1)\dot{D}_{NA} + B\dot{D}_{TA}] = 0.625e_n + 0.4$$

também

$$I_T = -\frac{m}{4}[A\dot{D}_{TA} + B(e_n + 1)\dot{D}_{NA}] = 0.375e_n$$

A variação de energia cinética, como já vimos, é dada por

$$T_E - T_A = \frac{1}{2}\mathbf{I}^t(\dot{\mathbf{D}}_E + \dot{\mathbf{D}}_A)$$

Temos,

$$T_E - T_A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0.625e_n + 0.4 & 0.375e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_n - 1 \\ 0.6 \end{pmatrix} = 0.3125e_n^2 - 0.2.$$

Assim, quando $e_n > 0.8$ temos $T_E - T_A > 0$ e observamos acréscimo de energia.

Voltaremos a discutir esse caso quando estudarmos o modelo de Glocker-Pfeiffer.

Uma discussão incluindo resultados para outros valores dos parâmetros pode ser encontrada em Cataldo, E. ; Sampaio, R. (1998, 1999).

3.4.3 Simulações

Consideramos $e_n = 1$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $y_0 = 1.2$, $\dot{y}_0 = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\theta} = 0$ e $\mu = 1$ e traçamos os gráficos na Figura 3.9. A animação correspondente é mostrada na Figura 3.10 (a). Consideramos o intervalo $[0, 0.9]$. Observamos acréscimo de energia.

Se consideramos $\mu = 0.4$, não observamos mais o acréscimo de energia. A Figura 3.11 refere-se a $e_n = 1$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $y_0 = 1.2$, $\dot{y}_0 = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\theta} = 0$ e $\mu = 1$. A animação correspondente é mostrada na Figura 3.10 (b). Usamos o intervalo $[0, 0.9]$.

3.5 Modelo de Glocker-Pfeiffer (Primeiro Caso)

3.5.1 Introdução

O modelo de Glocker-Pfeiffer (1995) usa o coeficiente de restituição de Poisson e , assim, considera o processo virtual de colisão em duas fases : compressão e expansão. Na direção tangencial usa a lei de Coulomb (modificada) para o atrito. Para esse modelo usamos as equações do terceiro grupo.

O modelo de Glocker-Pfeiffer será discutido em duas seções distintas. Isso deve-se ao fato de que na fase de expansão dois caminhos diferentes podem ser seguidos. Mesmo sendo um desses caminhos caso particular do outro decidimos separá-los por motivo didático.

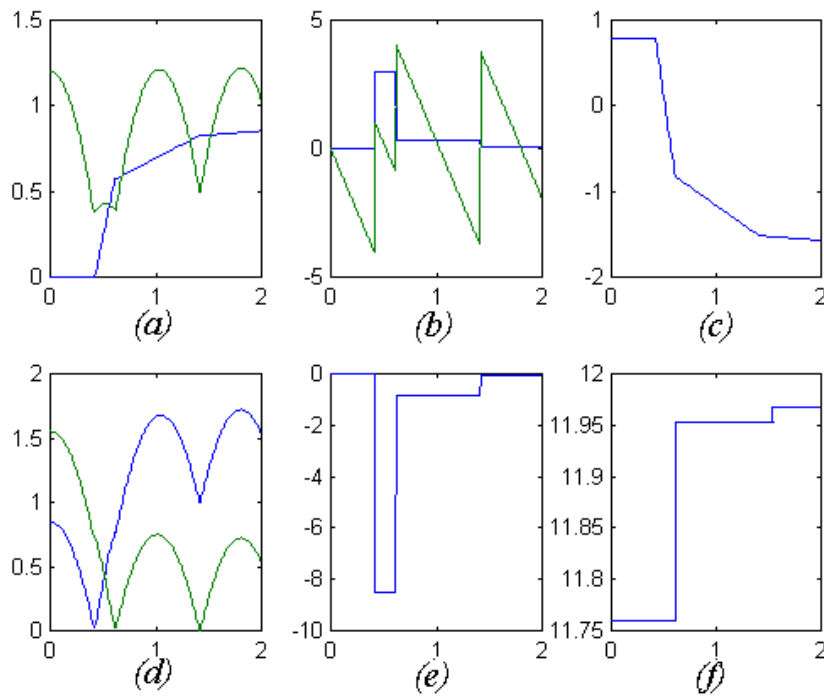


Figura 3.9. Modelo de Kane (com $\mu = 1$): (a) Deslocamento vertical do centro de massa (linha verde) e deslocamento horizontal do centro de massa (linha azul); (b) Velocidade vertical do centro de massa (linha verde) e velocidade horizontal do centro de massa (linha azul); (c) Deslocamento angular; (d) Deslocamento vertical da extremidade da esquerda (linha verde) e deslocamento vertical da extremidade da direita (linha azul); (e) Velocidade angular; (f) Energia

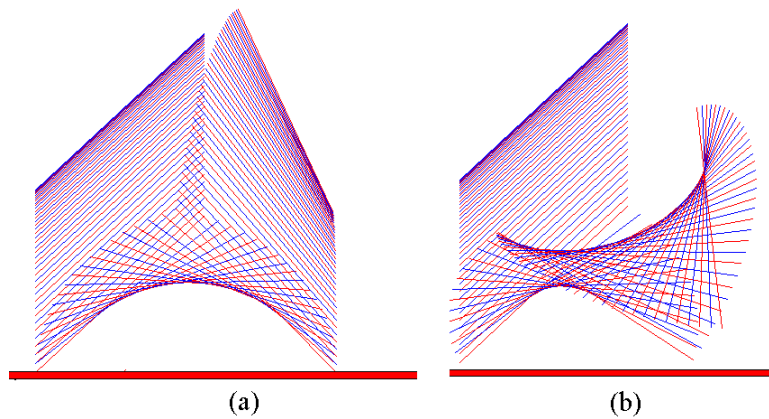


Figura 3.10. Animação: Modelo de Kane. (a) $\mu = 1$, (b) $\mu = 0.4$

O modelo de Glocker-Pfeiffer considera a colisão dividida em duas fases : fase de compressão e fase de expansão. Usa o coeficiente de restituição de Poisson, assim

$$I_{NE} = e_{np}I_{NC}$$

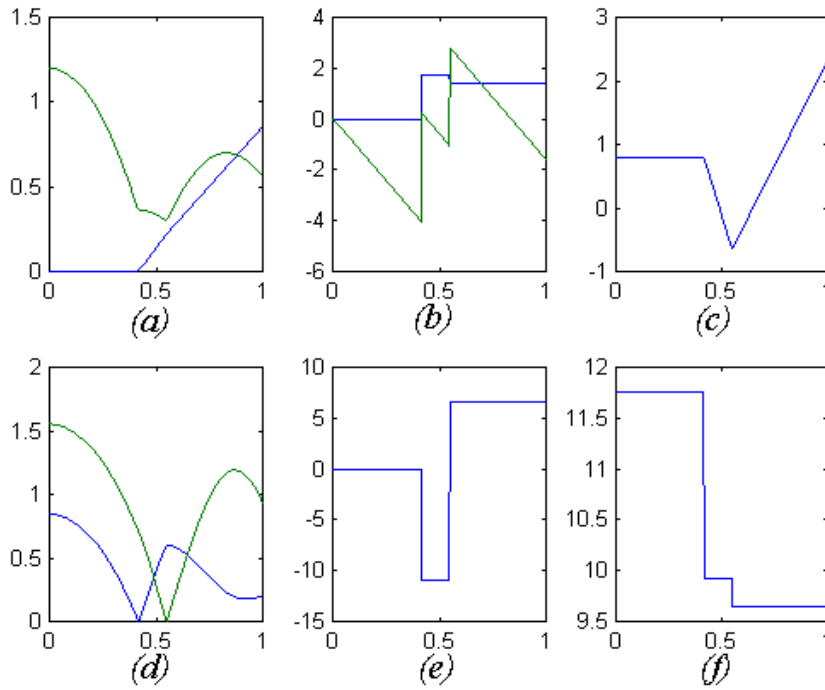


Figura 3.11. Modelo de Kane (com $\mu = 0.4$): (a) Deslocamento vertical do centro de massa (linha verde) e deslocamento horizontal do centro de massa (linha azul); (b) Velocidade vertical do centro de massa (linha verde) e velocidade horizontal do centro de massa (linha azul); (c) Deslocamento angular; (d) Deslocamento vertical da extremidade da esquerda (linha verde) e deslocamento vertical da extremidade da direita (linha azul); (e) Velocidade angular; (f) Energia

Na direção tangencial, na fase de compressão, considera

$$\begin{cases} |I_{TC}| < \mu I_{NC} \Rightarrow \dot{D}_{TC} = 0 \\ I_{TC} = +\mu I_{NC} \Rightarrow \dot{D}_{TC} \leq 0 \\ I_{TC} = -\mu I_{NC} \Rightarrow \dot{D}_{TC} \geq 0 \end{cases}$$

Essa lei é estabelecida baseada na lei de Coulomb para o atrito e prevê eventos de deslizamento reverso. Os impulsos resultantes, dados por essa lei, são maiores do que os obtidos por simples integração das forças de atrito. Como pode ser visto em Glocker-Pfeiffer (1996).

Essa lei está esquematizada na Figura 3.12.

O comportamento tangencial durante a expansão pode ser formulado da mesma forma como durante a compressão e é isso que faremos nesse modelo. Depois estudaremos um caso mais geral no modelo de Glocker-Pfeiffer.

Assim, na fase de expansão, temos

$$\begin{cases} |I_{TE}| \Rightarrow \dot{D}_{TE} = 0 \\ I_{TE} = \mu I_{NE} \Rightarrow \dot{D}_{TE} \leq 0 \\ I_{TE} = -\mu I_{NE} \Rightarrow \dot{D}_{TE} \geq 0 \end{cases}$$

Esse modelo usa o terceiro grupo de equações.

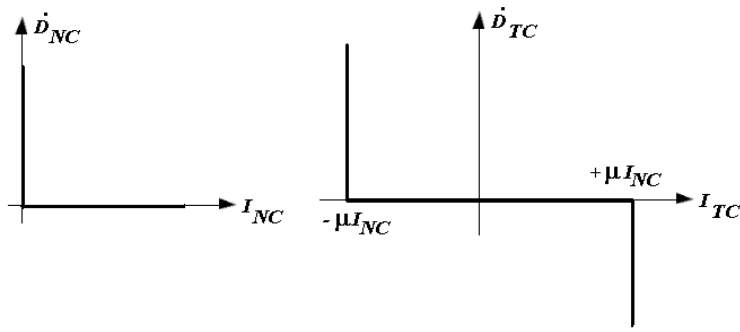


Figura 3.12. Gráficos das velocidades relativas normal e tangencial

3.5.2 Aplicação no caso da barra

As equações obtidas para as fases de compressão e de expansão são idênticas quando consideramos qualquer uma das duas extremidades.

Para a fase de compressão temos

$$\begin{cases} \dot{D}_{NC} = \frac{1+3\cos^2\theta}{m} I_{NC} - \frac{3\text{sen}\theta\cos\theta}{m} I_{TC} + \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_{TC} = \frac{-3\text{sen}\theta\cos\theta}{m} I_{NC} + \frac{1+3\text{sen}^2\theta}{m} I_{TC} + \dot{D}_{TA}. \end{cases}$$

e para a fase de expansão temos

$$\begin{cases} \dot{D}_{NE} = \frac{1+3\cos^2\theta}{m} I_{NE} - \frac{3\text{sen}\theta\cos\theta}{m} I_{TE} + \dot{D}_{NC} \\ \dot{D}_{TE} = \frac{-3\text{sen}\theta\cos\theta}{m} I_{NE} + \frac{1+3\text{sen}^2\theta}{m} I_{TE} + \dot{D}_{TC}. \end{cases}$$

Consideramos

$$A = \frac{1+3\cos^2\theta}{m}, \quad B = \frac{3\text{sen}\theta\cos\theta}{m} \quad \text{e} \quad C = \frac{1+3\text{sen}^2\theta}{m}.$$

Na consideração de atrito usaremos as seguintes leis :

Na fase de compressão

$$\begin{cases} |I_{TC}| < \mu I_{NC} \Rightarrow \dot{D}_{TC} = 0 \\ I_{TC} = +\mu I_{NC} \Rightarrow \dot{D}_{TC} \leq 0 \\ I_{TC} = -\mu I_{NC} \Rightarrow \dot{D}_{TC} \geq 0 \end{cases}$$

Na fase de expansão

$$\begin{cases} |I_{TE}| < \mu I_{NE} \Rightarrow \dot{D}_{TE} = 0 \\ I_{TE} = +\mu I_{NE} \Rightarrow \dot{D}_{TE} \leq 0 \\ I_{TE} = -\mu I_{NE} \Rightarrow \dot{D}_{TE} \geq 0 \end{cases}$$

Vamos retomar o exemplo que fornecia acréscimo de energia discutido no modelo de Kane. Consideramos $m = 1$, $L = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\dot{D}_{NA} = -1$ e $\dot{D}_{TA} = 0.6$. Assim, $A = 2.5$, $B = 1.5$ e $C = 2.5$. Logo, $\frac{B}{C} = 0.6$. Usaremos $\mu = 1$.

Fazendo as contas, obtemos

$$\dot{D}_{TC} = 0, \quad \dot{D}_{NC} = 0, \quad I_{TC} = 0 \quad \text{e} \quad I_{NC} = 0.4.$$

Fase de expansão :

Como $\mu > \left| \frac{B}{C} \right| = 0.6$ temos

$$\dot{D}_{TE} = 0, \quad I_{NE} = e_{np} I_{NC} = 0.4e_{np}, \quad \dot{D}_{NE} = 0.64e_{np} \quad \text{e} \quad I_{TE} = 0.24e_{np}.$$

Temos,

$$I_N = I_{NE} + I_{NC} = 0.4(e_{np} + 1) \quad \text{e} \quad I_T = I_{TE} + I_{TC} = 0.24e_{np}$$

Calculando a variação de energia cinética obtemos

$$T_E - T_A = \frac{1}{2} \mathbf{I}^t (\dot{\mathbf{D}}_E + \dot{\mathbf{D}}_A)$$

Assim,

$$T_E - T_A = 0.128e_{np}^2 - 0.2$$

Para $0 \leq e_n \leq 1$ observamos que $T_E - T_A < 0$ e assim não há acréscimo de energia.

3.5.3 Simulações

Consideramos $e_n = 1$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $y_0 = 1.2$, $\dot{y}_0 = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\theta} = 0$ e $\mu = 1$. Mostramos os gráficos na Figura 3.13 e a animação correspondente é mostrada na Figura 3.14. O intervalo usado foi $[0, 0.9]$.

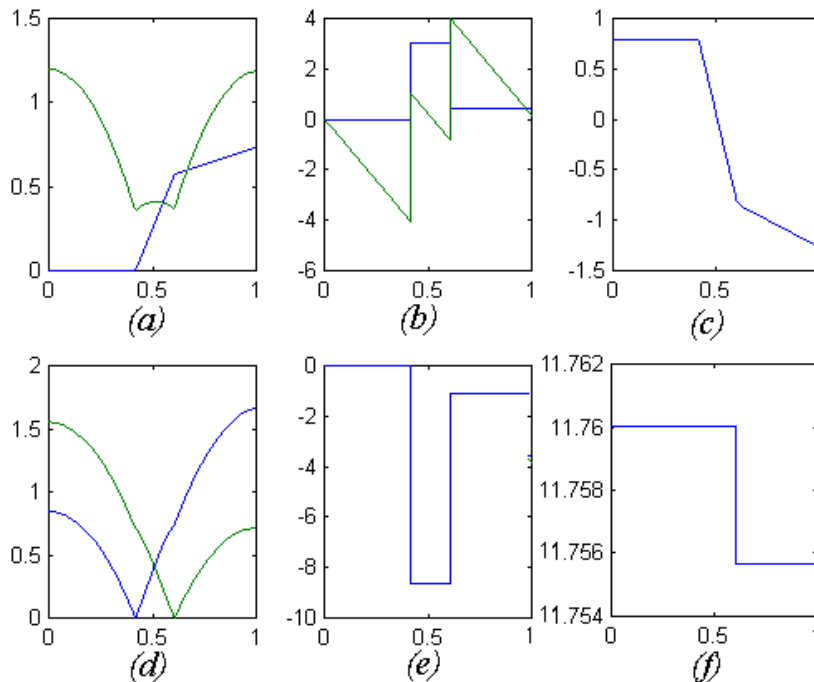


Figura 3.13. Modelo de Glocker-Pfeiffer (primeiro caso): (a) Deslocamento vertical do centro de massa (linha verde) e deslocamento horizontal do centro de massa (linha azul); (b) Velocidade vertical do centro de massa (linha verde) e velocidade horizontal do centro de massa (linha azul); (c) Deslocamento angular; (d) Deslocamento vertical da extremidade da esquerda (linha verde) e deslocamento vertical da extremidade da direita (linha azul); (e) Velocidade angular; (f) Energia

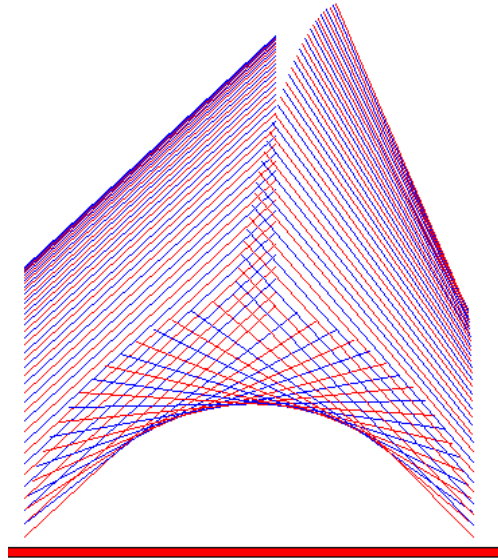


Figura 3.14. Animação: Modelo de Glocker-Pfeiffer (primeiro caso) - $\mu = 1$

Consideramos $e_n = 1$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $y_0 = 1.2$, $\dot{y}_0 = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\theta} = 0$ porém $\mu = 0.4$. Mostramos os gráficos na Figura 3.15 e a animação correspondente na Figura 3.16. Consideramos o intervalo $[0, 0.9]$.

3.6 Modelo de Glocker-Pfeiffer (Segundo Caso)

3.6.1 Introdução

Quando consideramos o modelo de Glocker-Pfeiffer, na seção anterior, consideramos a mesma lei de restituição tangencial para a fase de expansão e para a fase de compressão. Porém, Glocker-Pfeiffer propõem um outro modelo levando em conta o que eles chamam de porções reversíveis do impulso tangencial que podem ocorrer, por exemplo, em materiais usados para fazer superbolas (que serão discutidas mais adiante nesta seção). Os efeitos causados pelas porções reversíveis do impulso tangencial são considerados quando *deslocamos* a característica tangencial por uma determinada quantidade, que denotaremos por $2I_{TS}$. Esse valor será discutido nesta seção e para obtê-lo precisaremos introduzir novos parâmetros para a restituição tangencial.

Os autores consideram que após a fase de compressão, certa quantidade do impulso pode ser armazenado nos corpos como deformação elástica, e isso pode levar à mudança da direção de deslizamento durante a fase de expansão. Para considerar esse efeito deslocamos o gráfico correspondente ao impulso tangencial da colisão ($\dot{D}_{TE} \geq 0$) para a direita até atravessar o quadrante positivo. De acordo com a Figura 3.17 e com a Figura 3.18 podemos estabelecer a lei de restituição na direção tangencial considerando o armazenamento do impulso tangencial discutido. O primeiro caso refere-se ao caso de impulso tangencial positivo durante a compressão e o segundo caso refere-se ao caso de impulso tangencial negativo durante a compressão.

3.6.2 Caso 1: $I_{TC} \geq 0$ e $I_{TS} \geq 0$.

Este caso é ilustrado na Figura 3.17.

Nesse caso, temos

$$-\mu I_{NE} + 2I_{TS} \leq I_{TE} \leq +\mu I_{NE}$$

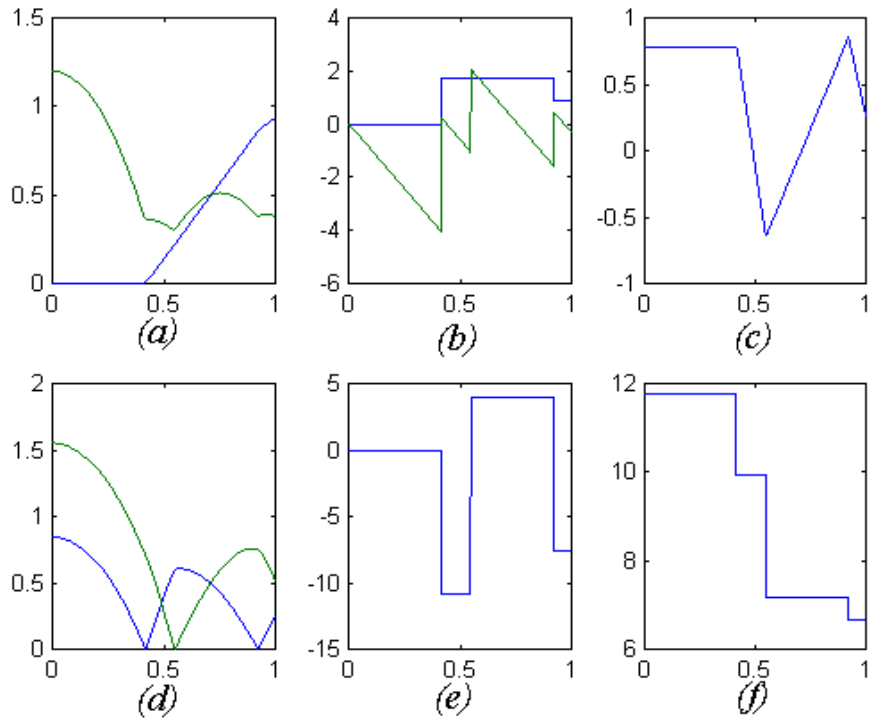


Figura 3.15. Modelo de Glocker-Pfeiffer (primeiro caso): (a) Deslocamento vertical do centro de massa (linha verde) e deslocamento horizontal do centro de massa (linha azul); (b) Velocidade vertical do centro de massa (linha verde) e velocidade horizontal do centro de massa (linha azul); (c) Deslocamento angular; (d) Deslocamento vertical da extremidade da esquerda (linha verde) e deslocamento vertical da extremidade da direita (linha azul); (e) Velocidade angular; (f) Energia

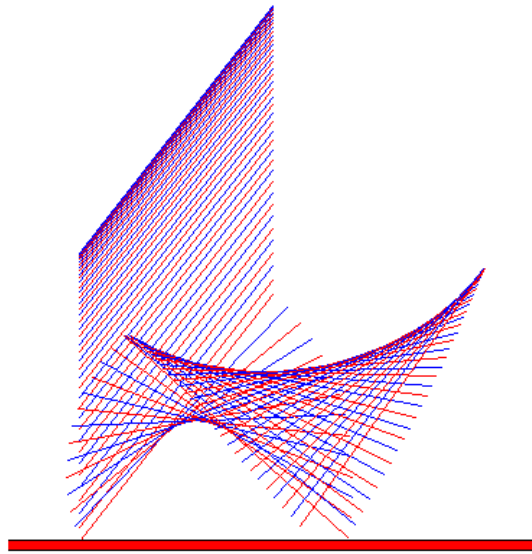


Figura 3.16. Animação: Modelo de Glocker-Pfeiffer (primeiro caso) - $\mu = 0.4$

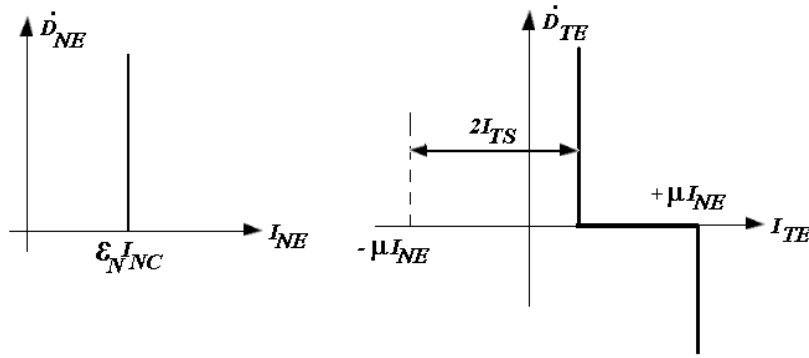


Figura 3.17. Velocidades relativas finais normal e tangencial - $I_{TC} \geq 0$ e $I_{TS} \geq 0$

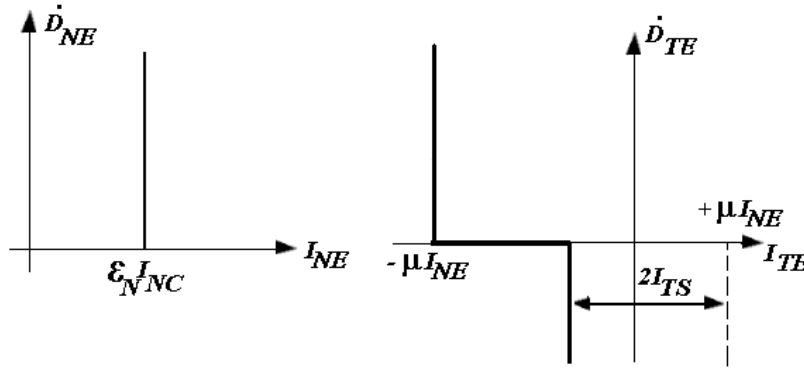


Figura 3.18. Velocidades relativas finais normal e tangencial - $I_{TC} \leq 0$ e $I_{TS} \leq 0$

Podemos escrever,

$$\begin{cases} -\mu I_{NE} + 2I_{TS} < I_{TE} < +\mu I_{NE} \Rightarrow \dot{D}_{TE} = 0 \\ I_{TE} = +\mu I_{NE} \Rightarrow \dot{D}_{TE} \leq 0 \\ I_{TE} = -\mu I_{NE} + 2I_{TS} \Rightarrow \dot{D}_{TE} \geq 0. \end{cases}$$

3.6.3 Caso 2: $I_{TC} \leq 0$ e $I_{TS} \leq 0$.

Este caso é ilustrado na Figura 3.18.

Nesse caso, temos

$$-\mu I_{NE} \leq I_{TE} \leq +\mu I_{NE} + 2I_{TS}$$

Podemos escrever,

$$\begin{cases} -\mu I_{NE} < I_{TE} < +\mu I_{NE} + 2I_{TS} \Rightarrow \dot{D}_{TE} = 0 \\ I_{TE} = +\mu I_{NE} + 2I_{TS} \Rightarrow \dot{D}_{TE} \leq 0 \\ I_{TE} = -\mu I_{NE} \Rightarrow \dot{D}_{TE} \geq 0 \end{cases}$$

O valor de I_{TS} é dado em Pfeiffer-Glocker(1996) por

$$2I_{TS} = \mu \nu I_{NE} \text{ sinal}(I_{TC}) + e_{np} e_t I_{TC} \quad , \quad 0 \leq \nu, e_t \leq 1.$$

As magnitudes de ν e de e_t são parâmetros adicionais das colisões tangenciais que especificam a quantidade I_{TS} .

3.6.4 Aplicação no caso da barra

Usamos o terceiro grupo de equações

Temos,

$$\begin{cases} \dot{D}_{NC} = AI_{NC} - BI_{TC} + \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_{TC} = -BI_{NC} + CI_{TC} + \dot{D}_{TA} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{D}_{NE} = AI_{NE} - B_{TE} + \dot{D}_{NC} \\ \dot{D}_{TE} = -BI_{NE} + CI_{TE} + \dot{D}_{TC} \end{cases}$$

Com $A = \frac{1+3\cos^2\theta}{m}$, $B = \frac{3\sin\theta\cos\theta}{m}eC = \frac{1+3\sin^2\theta}{m}$.

Também,

$$2I_{TS} = \mu\nu I_{NE} \text{ sinal}(I_{TC}) + e_{np}e_t I_{TC} ; \nu \geq 0 , e_t \leq 1.$$

Se $I_{TC} \geq 0$ e $I_{TS} \geq 0$
então

$$\begin{cases} -\mu I_{NE} + 2I_{TS} < I_{TE} < \mu I_{NE} \Rightarrow \dot{D}_{TE} = 0 \\ I_{TE} = \mu I_{NE} \Rightarrow \dot{D}_{TE} \leq 0 \\ I_{TE} = -\mu I_{NE} + 2I_{TS} \Rightarrow \dot{D}_{TE} \geq 0 \end{cases}$$

Se $I_{TC} \leq 0$ e $I_{TS} \leq 0$
então

$$\begin{cases} -\mu I_{NE} < I_{TE} < \mu I_{NE} + 2I_{TS} \Rightarrow \dot{D}_{TE} = 0 \\ I_{TE} = -\mu I_{NE} \Rightarrow \dot{D}_{TE} \geq 0 \\ I_{TE} = \mu I_{NE} + 2I_{TS} \Rightarrow \dot{D}_{TE} \leq 0 \end{cases}$$

3.6.5 Simulações

Consideremos a Figura 3.19 que refere-se a $e_{np} = 1$, $e_t = 1$, $\nu = 1$, $\mu = 0.4$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $y_0 = 1.2$, $\dot{y}_0 = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\theta} = 0$. A animação correspondente é mostrada na Figura 3.20, para o intervalo $[0, 0.9]$.

3.7 Modelo de Wang e Mason - Baseado no Método de Routh

3.7.1 Introdução

O método de Routh é uma técnica gráfica para analisar colisão com atrito no plano. Wang e Mason (1992) usaram o método de Routh, a lei de Coulomb para atrito e o coeficiente de restituição dado por Newton ou por Poisson para prever o valor do impulso na colisão. Podemos também usar o método de Routh para distinguir vários tipos de contato, para identificar casos em que o deslizamento relativo cessa ou reverte e para identificar casos em que os coeficientes de restituição de Newton e de Poisson diferem nas suas previsões.

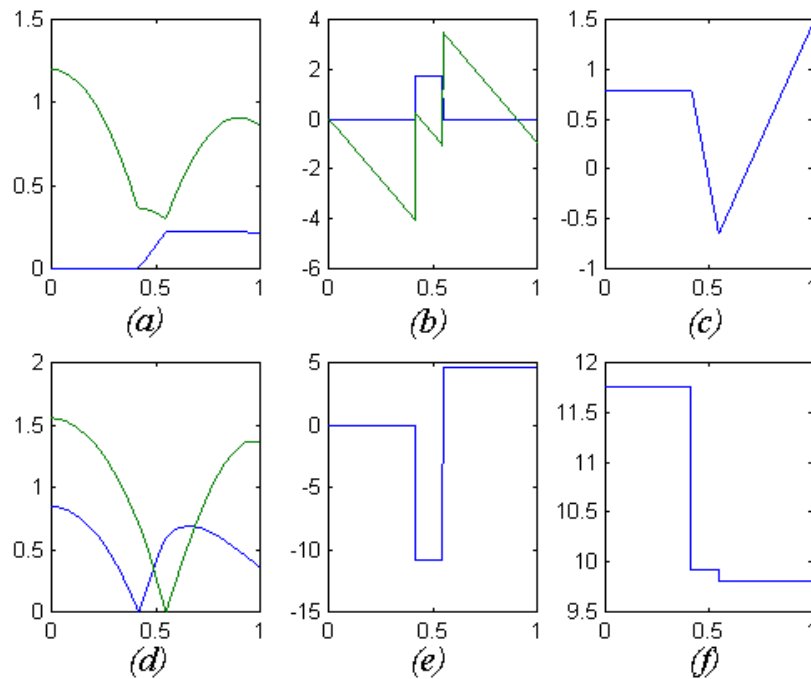


Figura 3.19. Modelo de Glocker-Pfeiffer (segundo caso): (a) Deslocamento vertical do centro de massa (linha verde) e deslocamento horizontal do centro de massa (linha azul); (b) Velocidade vertical do centro de massa (linha verde) e velocidade horizontal do centro de massa (linha azul); (c) Deslocamento angular; (d) Deslocamento vertical da extremidade da esquerda (linha verde) e deslocamento vertical da extremidade da direita (linha azul); (e) Velocidade angular; (f) Energia

3.7.2 Diagrama do processo de colisão

O método empregado por Wang e Mason consiste em analisar os valores de I_T e I_N construindo um processo virtual de colisão.

Construímos o espaço de impulso com eixos coordenados I_T e I_N e marcamos um ponto $\mathbf{I} = (I_T, I_N)$. O processo virtual começa com \mathbf{I} na origem; isto é, $I_T = 0$ e $I_N = 0$. O ponto terminal do processo virtual depende do coeficiente de restituição usado. Quando usamos o coeficiente de restituição de Newton, o ponto terminal do processo virtual ocorre quando o ponto \mathbf{I} toca a reta de terminação. Quando usamos o coeficiente de restituição de Poisson o ponto terminal do processo ocorre quando o impulso normal é $(1 + e_{np})$ vezes o valor de I_N obtido no fim da fase de compressão; isto é, I_{NC} . Mostraremos, através de um exemplo esquematizado na Figura 3.21, como evolui o processo virtual do seu início ao seu término.

Usaremos os símbolos

- Ad - Reta de Aderência
- C - Reta de Máxima Compressão
- At - Reta de Atrito
- T - Reta de Terminação
- DR - Reta de Deslizamento Reverso

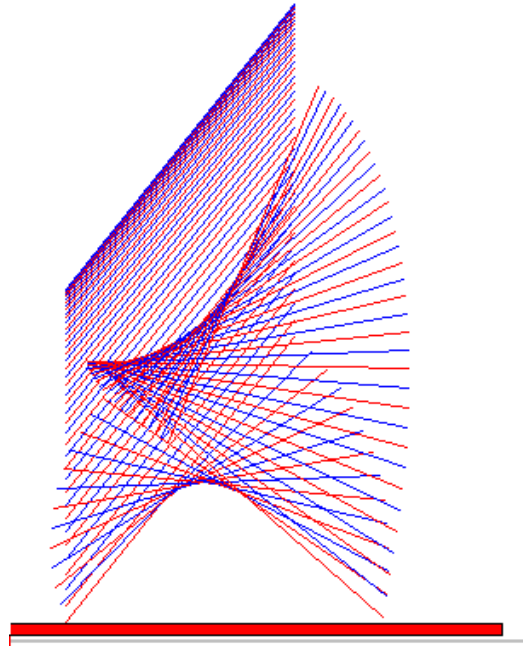


Figura 3.20. Animação: Modelo de Glocker-Pfeiffer (segundo caso)

Essas retas já foram discutidas na Seção 2. Lembramos que, tal qual Wang e Mason, só iremos tratar, nesta seção, do problema graficamente. Depois, na Seção 6, faremos a discussão analítica completa do problema que justificará inclusive os procedimentos que apresentaremos agora.

Considerando deslizamento inicial, o impulso aumenta ao longo de uma *reta de atrito* - Figura 3.21 (b) satisfazendo a Lei de Coulomb $I_T = -\mu s I_N$, sendo s o sinal da velocidade inicial de deslizamento \dot{D}_{TA} ; isto é, $s = \frac{\dot{D}_{TA}}{|\dot{D}_{TA}|}$ se $\dot{D}_{TA} \neq 0$.

O ponto **I** toca a reta de aderência (Figura 3.21 (c) e (d)); isto é, $\dot{D}_T = 0$. Para continuar o processo virtual temos duas possibilidades.

- (I) O ponto **I** segue a reta de aderência até o fim do processo; isto é, a velocidade tangencial relativa continua nula até o fim do processo. (Figura 3.21 (c)).
- (II) O ponto **I** atravessa a reta de aderência e segue a reta chamada de reta de deslizamento reverso; isto é, quando \dot{D}_T troca de sinal. (Figura 3.21 (d)).

Para recapitular

1. **I** se move inicialmente ao longo da reta de atrito
2. Se **I** tocar a reta de aderência, $\dot{D}_T = 0$, então ou **I** segue a reta de aderência ou a reta de deslizamento reverso.
3. O término da fase de expansão é dado por
 - Newton : **I** toca a reta de terminação
 - Poisson : I_N chega a um valor de $(1 + e_{np})$ vezes seu valor na reta de máxima compressão.

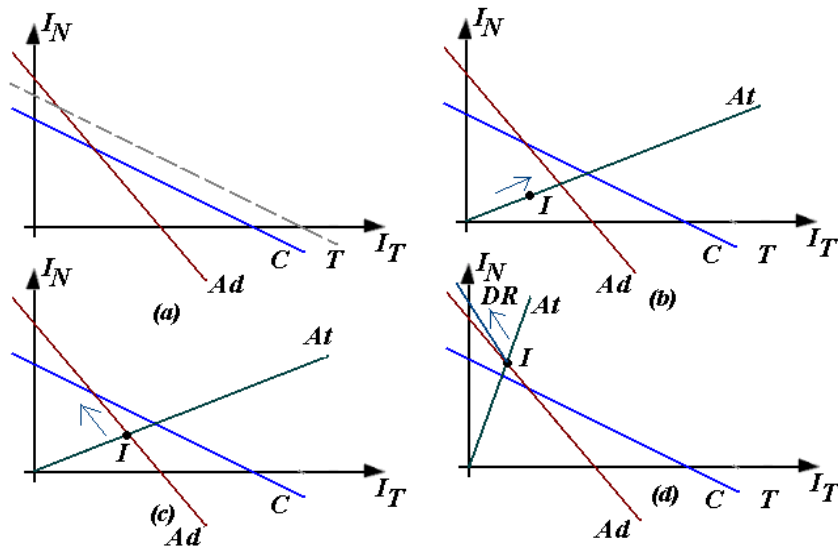


Figura 3.21. Diagrama do processo de colisão

3.7.3 Modos de contato

Se usarmos o coeficiente de restituição de Newton temos três casos a considerar

- A velocidade tangencial relativa permanece com o mesmo sinal durante todo o processo (deslizamento progressivo)
- A velocidade tangencial relativa se anula e depois troca de sinal (deslizamento reverso)
- A velocidade tangencial relativa se anula e continua nula até o fim do processo (aderência)

Se usarmos o coeficiente de restituição de Poisson temos os seguintes casos a considerar

- A velocidades tangencial relativa permanece com o mesmo sinal durante todo o processo (deslizamento progressivo)
- A velocidade tangencial relativa troca de sinal na fase de compressão (C-deslizamento reverso)
- A velocidade tangencial relativa se anula na fase de compressão (C-aderência)
- A velocidade tangencial relativa troca de sinal na fase de expansão (E-deslizamento reverso)
- A velocidade tangencial relativa se anula na fase de expansão (E-aderência)

Assim classificamos o que chamamos de modos de contato em : (1) Deslizamento progressivo, (2) Aderência na fase de compressão (C-aderência), (3) Aderência na fase de expansão (E-aderência), (4) Deslizamento reverso na fase de compressão (C-deslizamento reverso) e (5) Deslizamento reverso na fase de expansão (E-deslizamento reverso).

Definimos μ_s como o coeficiente de atrito crítico; isto é, se o coeficiente de atrito for maior do que ele então há aderência.

A classificação depende dos valores do coeficiente de atrito μ , coeficiente de atrito crítico μ_s e dos parâmetros P_d e P_q dados por

$$\mu_s = \left| \frac{B}{C} \right|$$

$$P_d = (A + s\mu B)s\dot{D}_{TA}$$

$$P_q = (\mu C + sB)(-\dot{D}_{NA})$$

μ é o coeficiente de atrito de Coulomb

Para $\dot{D}_{TA} \neq 0$ os modos de contato são resumidos na Tabela 3.2.

	$\mu > \mu_s$	$\mu < \mu_s$
$I_d > (1 + e_n)I_q$	Deslizamento	Deslizamento
$I_q < I_d < (1 + e_n)I_q$	E-aderência	E-Deslizamento reverso
$I_d < I_q$	C-aderência	C-Deslizamento reverso

Tabela 3.2. Classificação dos modos de contato

Para o coeficiente de restituição de Poisson, os impulsos são dados por :

- Deslizamento progressivo:

$$I_T = -s\mu I_N \quad e \quad I_N = -(1 + e_n) \frac{\dot{D}_{NA}}{A + s\mu B}$$

- C-aderência :

$$I_T = \frac{BI_N - \dot{D}_{TA}}{C} \quad e \quad I_N = -(1 + e_n) \frac{C\dot{D}_{NA} + B\dot{D}_{TA}}{AC - B^2}$$

- E-aderência :

$$I_T = \frac{BI_N - \dot{D}_{TA}}{C} \quad e \quad I_N = -(1 + e_n) \frac{\dot{D}_{NA}}{A + s\mu B}$$

- C-deslizamento reverso :

$$I_T = s\mu \left[I_N - \frac{2\dot{D}_{TA}}{B + s\mu C} \right] \quad e \quad I_N = \frac{1 + e_n}{A - s\mu B} \left[\dot{D}_{NA} + \frac{2s\mu B\dot{D}_{NA}}{B + s\mu C} \right]$$

- E-deslizamento reverso :

$$I_T = s\mu \left[I_N - \frac{2\dot{D}_{NA}}{B + s\mu C} \right] \quad e \quad I_N = -(1 + e_n) \frac{\dot{D}_{NA}}{A + s\mu B}$$

sendo

$$s = \begin{cases} \frac{\dot{D}_{TA}}{|\dot{D}_{TA}|} & \text{se } \dot{D}_{TA} \neq 0 \\ 1 & \text{se } \dot{D}_{TA} = 0. \end{cases}$$

Para o coeficiente de restituição de Newton os impulsos são dados por :

- Deslizamento

$$I_T = -s\mu I_N \text{ e } I_N = -(1 + e_n) \frac{\dot{D}_{NA}}{A + s\mu B}$$

- Aderência (C-aderência ou E-aderência)

$$I_T = -\frac{A\dot{D}_{TA} + (1 + e_n)\dot{D}_{NAB}}{AC - B^2} \text{ e } I_N = -\frac{B\dot{D}_{TA} + (1 + e_n)\dot{D}_{NAC}}{AC - B^2}$$

- Deslizamento reverso (C-deslizamento reverso ou E-deslizamento reverso)

$$I_T = s\mu \left[I_N - \frac{2\dot{D}_{NA}}{B + s\mu C} \right] \text{ e } I_N = -\frac{1}{A - s\mu B} \left[(1 + e_n)\dot{D}_{NA} + \frac{2s\mu B\dot{D}_{TA}}{B + s\mu C} \right]$$

3.7.4 Aplicação no caso da barra

Consideramos $m_1 = 1$ e $L = 1$. Temos que $A = 2.5$, $B = 1.5$, $C = 2.5$ e $\mu_s = 0.6$.

Primeiro caso : $\dot{D}_{NA} = -1$ e $\dot{D}_{TA} = 0$ - Colisão direta.

Mostramos o diagrama do processo de colisão na Figura 3.22.

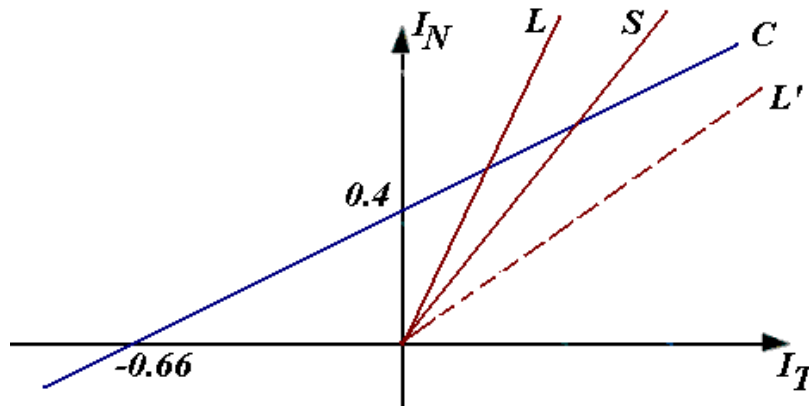


Figura 3.22. Diagrama do processo de colisão para o caso $\dot{D}_{NA} = -1$ e $\dot{D}_{TA} = 0.6$. L e L' denotam as retas de atrito para $\mu < 0.6$ e $\mu > 0.6$, respectivamente

Se $\mu < 0.6$ ocorrerá deslizamento e a extremidade da barra tem uma componente tangencial de velocidade negativa. Se ($\mu > 0.6$) ocorrerá aderência e a extremidade da barra terá uma componente tangencial de velocidade nula.

a) Caso $\mu > 0.6$ - Aderência

a.1) Usando Newton

$$I_T = -\frac{(1+e_n)(-1)1.5}{(2.5)^2 - (1.5)^2} = 0.375(1+e_n)$$

e

$$I_N = 0.625(1+e_n)$$

Também,

$$\begin{cases} \dot{D}_T = 2.5I_T - 1.5I_N = 0 \\ \dot{D}_N = -1 - 1.5I_T + 2.5I_N = e_n \end{cases} \quad (3.7)$$

a.2) Usando Poisson

$$I_T = -\frac{(1+e_{np})(-1)1.5}{(2.5)^2 - (1.5)^2} = 0.375(1+e_{np})$$

e

$$I_N = -\frac{(1+e_{np})(-1)2.5}{(2.5)^2 - (1.5)^2} = 0.625(1+e_{np})$$

Assim,

$$\begin{cases} \dot{D}_T = 2.5I_T - 1.5I_N = 0 \\ \dot{D}_N = -1 - 1.5I_T + 2.5I_N = e_{np} \end{cases} \quad (3.8)$$

b) Caso $\mu < 0.6$ - Deslizamento

b.1) Usando Newton

$$I_T = -\mu I_N \text{ e } I_N = \frac{1+e_n}{2.5+1.5\mu}$$

$$\begin{cases} \dot{D}_T = 2.5I_T - 1.5I_N = -\frac{(1+e_n)(2.5\mu+1.5)}{2.5+1.5\mu} \\ \dot{D}_N = -1.5I_T + 2.5I_N = 1+e_n \end{cases} \quad (3.9)$$

b.2) Usando Poisson

$$I_T = -\mu I_N \text{ e } I_N = \frac{1+e_{np}}{2.5+1.5\mu}$$

$$\begin{cases} \dot{D}_T = 2.5I_T - 1.5I_N = -\frac{(1+e_{np})(2.5\mu+1.5)}{2.5+1.5\mu} \\ \dot{D}_N = -1.5I_T + 2.5I_N = 1+e_{np} \end{cases} \quad (3.10)$$

Segundo caso : $\dot{D}_{NA} = -1$ e $\dot{D}_{TA} = 0.6$ - deslizamento reverso.

Neste caso, temos

$$I_d = (2.5 + 1.5\mu) \text{ e } I_q = (2.5\mu - 1.5)$$

Assim,

Se $\mu < 4.0$ então $I_q < I_d$, caso contrário $I_q > I_d$.

Se $\mu < 0.6$ então temos o caso de *E - deslizamento reverso*

Se $\mu > 0.6$ e $\mu < 3.5$ temos o caso de *E - aderência*

Se $\mu > 3.5$ temos o caso de *C - aderência*

a) Usando Newton

a.1) Caso $\mu > 0.6$ (para Newton, usando E-aderência ou C-aderência os resultados são iguais)

Temos,

$$I_T = -\frac{2.5 \times 0.6 + (1 + e_n)(-1)(1.5)}{(2.5)^2 - (1.5)^2} = 0.375e_n$$

e

$$I_N = -\frac{1.5 \times 0.6 + (1 + e_n)(-1)(2.5)}{4} = 0.4 + 0.625e_n$$

a.2) Caso $\mu < 0.6$

Temos,

$$I_N = \frac{-1.5 - 1.5e_n - 0.7\mu - 2.5\mu e_n}{(1.5\mu - 2.5)(1.5 + 2.5\mu)}$$

e

$$I_T = \frac{(1.5 + 2.5\mu)(1 - e_n)}{(1.5 + 2.5\mu)(1.5\mu - 2.5)}$$

b) Usando Poisson

b.1) Caso $\mu > 0.6$

b.1.1) Caso $\mu < 3.5$ (E-aderência)

$$I_N = -(1 + e_{np})\frac{-1}{2.5 + \mu 1.5}$$

e

$$I_T = \frac{4}{2.5 + 1.5\mu} [1.5e_{np} - 0.9\mu]$$

b.1.2) Caso $\mu > 3.5$ (C - aderência)

$$I_N = 0.4(1 + e_{np}) \text{ e } I_T = 0.24e_{np}$$

b.2) Caso $\mu < 0.6$ (E-deslizamento reverso)

$$I_N = (1 + e_{np}) \frac{1}{2.5 + 1.5\mu}$$

e

$$I_T = \mu \frac{-1.5 - 1.8\mu + 2.5\mu + 1.5e_n + 2.5\mu e_n}{(1.5 + 2.5\mu)(2.5 + 1.5\mu)}$$

Consideremos $\mu = 1$, $e_n = 1$ e $e_{np} = 1$. Mostramos o diagrama do processo de colisão na Figura 3.23. Ressaltamos que quando usamos o coeficiente de restituição de Newton o ponto **I** está fora da elipse de energia e assim haverá acréscimo de energia.

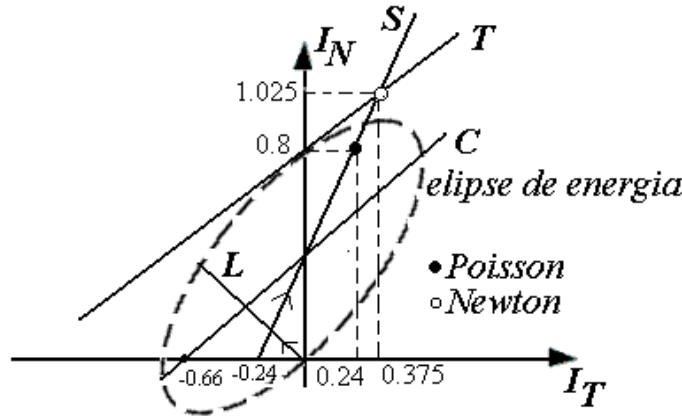


Figura 3.23. Diagrama do processo de colisão para o caso $\dot{D}_{NA} = -1$ e $\dot{D}_{TA} = 0.6$

3.8 Modelo de Smith

3.8.1 Introdução

O modelo proposto por Smith(1991,1992) usa o coeficiente de restituição de Newton e o impulso tangencial por um tipo de *média* entre as componentes tangenciais das velocidades relativas dos instantes pré e pós-colisão. As equações usadas são as do primeiro grupo, reproduzidas aqui

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_{TA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^t \\ \mathbf{W}_T^t \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_A + \begin{pmatrix} \tilde{w}_N \\ \tilde{w}_T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_{NE} \\ \dot{D}_{TE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^t \\ \mathbf{W}_T^t \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_E + \begin{pmatrix} \tilde{w}_N \\ \tilde{w}_T \end{pmatrix}$$

e

$$[M](\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_A) - \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N & \mathbf{W}_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_N \\ I_T \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

A relação dos impulsos, dada por Smith, é dada por

$$I_T = -\mu I_N \frac{|\dot{D}_{TA}| |\dot{D}_{TA}| + |\dot{D}_{TE}| |\dot{D}_{TE}|}{|\dot{D}_{TA}|^2 + |\dot{D}_{TE}|^2}.$$

e

$$\dot{D}_{NE} = -e_n \dot{D}_{NA}.$$

Como podemos perceber devemos resolver equações não-lineares. Chatterjee (1997) provou que a solução existe mas ainda está em aberto se o problema tem solução única. Dessa forma, apenas descrevemos o modelo e não faremos simulações. No apêndice, quando discutimos o modelo o problema do pêndulo duplo, discutido por Kane-Levinson, mostramos os valores encontrados por Smith para aquele problema.

4 COLISÃO DE UMA BOLA COM DUAS PAREDES

A Figura 4.1 ilustra o caso da colisão de uma bola com duas paredes.

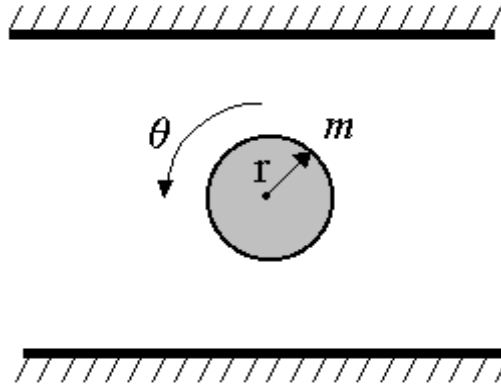


Figura 4.1. Colisão de uma bola com duas paredes

Consideremos o vetor de coordenadas generalizadas dado por $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}$.

Quando a bola colide com a parede inferior temos

$$\dot{D}_N = \dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

e

$$\dot{D}_T = \dot{x} + R\dot{\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}.$$

Na fase de compressão temos,

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_{NC} \\ \dot{D}_{TC} \end{pmatrix} = W_N M^{-1} W_N^t \begin{pmatrix} I_{NC} \\ I_{TC} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_{TA} \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\begin{cases} \dot{D}_{NC} = \frac{1}{m} I_{NC} + \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_{TC} = \left(\frac{1}{m} + \frac{r^2}{J}\right) I_{TC} + \dot{D}_{TA} \end{cases}$$

Na colisão com a parede superior temos

$$\dot{D}_N = -\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

e

$$\dot{D}_T = -\dot{x} + r\dot{\theta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}.$$

Na fase de compressão temos,

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_{NC} \\ \dot{D}_{TC} \end{pmatrix} = W_N M^{-1} W_N^t \begin{pmatrix} I_{NC} \\ I_{TC} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_{TA} \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\begin{cases} \dot{D}_{NC} = \frac{1}{m} I_{NC} + \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_{TC} = \left(\frac{1}{m} + \frac{r^2}{J}\right) I_{TC} + \dot{D}_{TA} \end{cases}$$

Analogamente, na fase de expansão, para as duas paredes, temos

$$\begin{cases} \dot{D}_{NE} = \frac{1}{m} I_{NE} + \dot{D}_{NC} \\ \dot{D}_{TE} = \left(\frac{1}{m} + \frac{r^2}{J}\right) I_{TE} + \dot{D}_{TC} \end{cases}$$

As velocidades finais do centro de massa são mostradas a seguir.

Na parede inferior temos

$$\begin{cases} \dot{x}_E = \dot{x}_A + \frac{1}{m} I_T \\ \dot{y}_E = \dot{y}_A + \frac{1}{m} I_N \\ \dot{\theta}_E = \dot{\theta}_A + \frac{r}{J} I_T \end{cases}$$

Na parede superior temos

$$\begin{cases} \dot{x}_E = \dot{x}_A - \frac{1}{m} I_T \\ \dot{y}_E = \dot{y}_A - \frac{1}{m} I_N \\ \dot{\theta}_E = \dot{\theta}_A + \frac{r}{J} I_T \end{cases}$$

4.1 Simulações

Desejamos comparar os resultados da bola colidindo com as duas paredes para os dois modelos apresentados (Wang-Mason e Glocker-Pfeiffer).

Usamos os seguintes parâmetros e as seguintes condições iniciais : $m = 1$, $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0$, $g = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 1$, $y_0 = 0.9$, $\dot{y}_0 = -1$, $e_n = 1$, $h = 1.01$, $\mu = 1$ e $r = 0.1$.

Começamos com o modelo de Wang-Mason e mostramos o gráfico da trajetória do centro de massa na Figura 4.2.

Considerando o modelo de Glocker-Pfeiffer e usando $e_t = 0$ e $\nu = 0$ temos o comportamento mostrado na Figura 4.3.

Nos dois casos os gráficos são iguais.

Porém se usarmos $e_t = 1$ e $\nu = 1$ teremos o comportamento mostrado na Figura 4.5. Isto é, o caso em que aparecem os impulsos tangenciais reversíveis alterando a trajetória da bola, chamado de comportamento de superbola. Chamamos de comportamento superbola

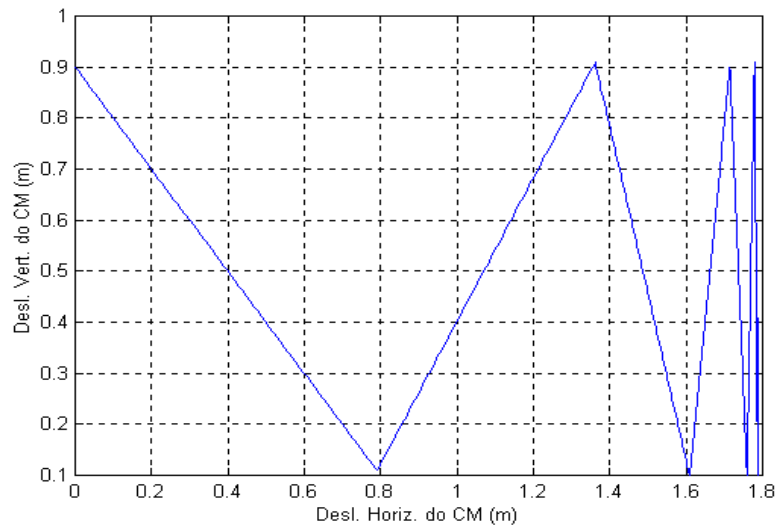


Figura 4.2. Trajetória do centro de massa : modelo de Wang-Mason

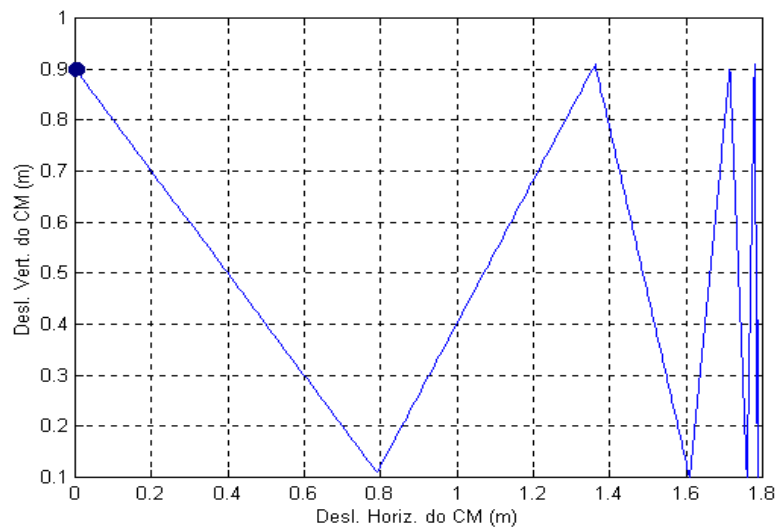


Figura 4.3. Trajetória do centro de massa: modelo de Glocker-Pfeiffer, $e_t = 0$ e $\nu = 0$

quando a velocidade da bola, em algum ramo da trajetória, está no cone formado pela velocidade pré-colisão e a normal à parede.

A Figura 4.4 ilustra esse fato.

Desejamos comparar os gráficos das velocidades angulares para os casos apresentados. Mostramos o caso $e_t = 0$ e $\nu = 0$ na Figura 4.6 e o caso $e_t = 1$ e $\nu = 1$ na Figura 4.7.

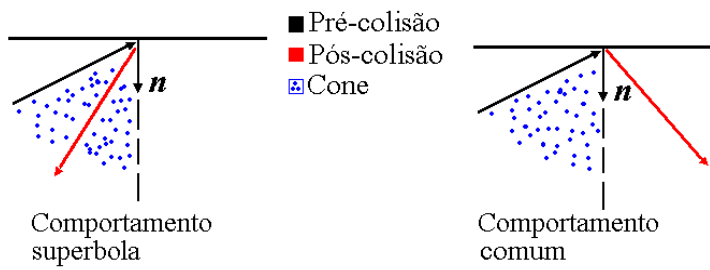


Figura 4.4. Comportamento superbola

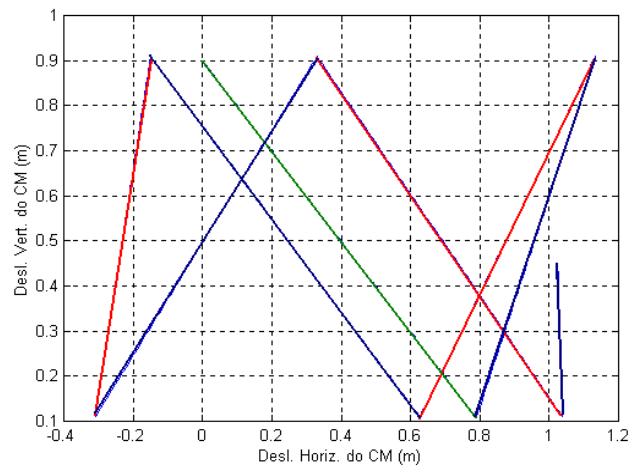


Figura 4.5. Trajetória do centro de massa: modelo de Glocker-Pfeiffer, $e_t = 1$ e $\nu = 1$. Comportamento superbola

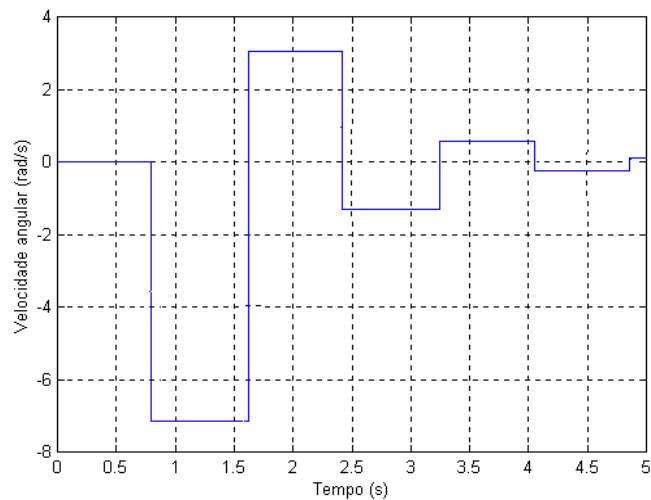


Figura 4.6. Velocidade angular: modelo de Glocker-Pfeiffer, $e_t = 0$ e $\nu = 0$

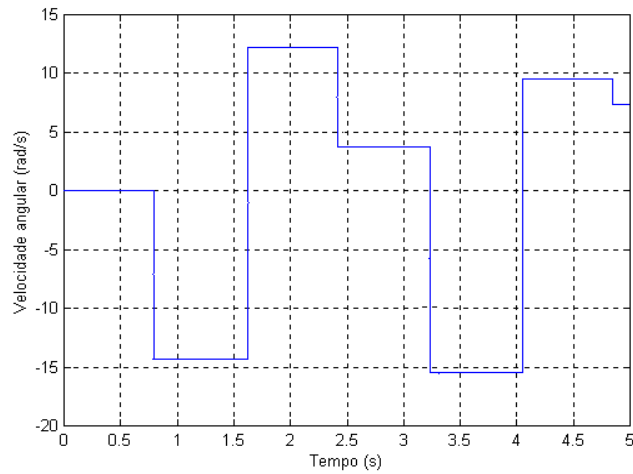


Figura 4.7. Velocidade angular: modelo de Glocker-Pfeiffer, $e_t = 1$ e $\nu = 1$

5 UM NOVO MODELO DE COLISÃO: MODELO C-S

5.1 Introdução

Analisando os modelos apresentados propomos um modelo sistemático que tenta englobar os modelos anteriores como casos particulares. A Tabela 5.1 mostra a quantidade de parâmetros usados por cada um dos modelos.

Modelo	Coef. Rest. Norm.	Coef. Rest. Tang.	Coef. Atrito	Coef. Momento	Total
Newton	1	0	0	0	1
Kane-Levinson	1	0	1	0	2
Wang-Mason	1	0	1	0	2
Brach	1	1	0	1	3
Glocker-Pfeiffer	1	2	1	0	4
C-S	1	2	1	2	6

Tabela 5.1. Quantidade de parâmetros dos modelos

O modelo C-S considera as equações do quarto grupo, usa o coeficiente de restituição de Poisson, a lei de atrito de Coulomb (para os impulsos) e dois coeficientes de momento.

5.2 Equações Básicas

Fase de compressão

$$[M](\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A) = (\mathbf{w}_N \quad \mathbf{w}_T \quad \mathbf{w}_\theta) \begin{pmatrix} I_{NC} \\ I_{TC} \\ I_{\theta C} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_{NC} \\ \dot{D}_{TC} \\ \dot{D}_{\theta C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_N^t \\ \mathbf{w}_T^t \\ \mathbf{w}_\theta^t \end{pmatrix} (\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A) + \begin{pmatrix} \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_{TA} \\ \dot{D}_{\theta A} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} |I_{TC}| < \mu I_{NC} \Rightarrow \dot{D}_{TC} = 0 \\ I_{TC} = \mu I_{NC} \Rightarrow \dot{D}_{TC} \leq 0 \\ I_{TC} = -\mu I_{NC} \Rightarrow \dot{D}_{TC} \geq 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Usamos,

$$em_C I_{\theta C} = -(1 + em_C) \bar{J} \dot{D}_{\theta C}$$

sendo $\bar{J} = \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}$.

Fase de expansão

$$[M](\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_C) = (\mathbf{w}_N \quad \mathbf{w}_T \quad \mathbf{w}_\theta) \begin{pmatrix} I_{NE} \\ I_{TE} \\ I_{\theta E} \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_{NE} \\ \dot{D}_{TE} \\ \dot{D}_{\theta E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_N^t \\ \mathbf{w}_T^t \\ \mathbf{w}_\theta^t \end{pmatrix} (\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_C) + \begin{pmatrix} \dot{D}_{NC} \\ \dot{D}_{TC} \\ \dot{D}_{\theta C} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Usamos,

$$em_E I_{\theta E} = -(1 + em_E) \bar{J} \dot{D}_{\theta E}$$

$$I_{TS} = \frac{1}{2} [\mu \nu I_{NE} \text{sign}(I_{TC}) + e_n e_t I_{TC}] , \quad 0 \leq \nu , e_t \leq 1 \quad (5.6)$$

Se $I_{TC} \geq 0$; $I_{TS} \geq 0 \Rightarrow -\mu I_{NE} + 2I_{TS} \leq I_{TE} \leq \mu I_{NE}$

$$\begin{cases} -\mu I_{NE} + 2I_{TS} < I_{TE} < \mu I_{NE} \Rightarrow \dot{D}_{TE} = 0 \\ I_{TE} = +\mu I_{NE} \Rightarrow \dot{D}_{TE} \leq 0 \\ I_{TE} = -\mu I_{NE} + 2I_{TS} \Rightarrow \dot{D}_{TE} \geq 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

Se $I_{TC} \leq 0$; $I_{TS} \leq 0 \Rightarrow -\mu I_{NE} \leq I_{TE} \leq \mu I_{NE} + 2I_{TS}$

$$\begin{cases} -\mu I_{NE} < I_{TE} < \mu I_{NE} + 2I_{TS} \Rightarrow \dot{D}_{TE} = 0 \\ I_{TE} = +\mu I_{NE} + 2I_{TS} \Rightarrow \dot{D}_{TE} \leq 0 \\ I_{TE} = -\mu I_{NE} \Rightarrow \dot{D}_{TE} \geq 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

Usamos o coeficiente de restituição de Poisson

$$I_{NE} = e_{np} I_{NC} \quad (5.9)$$

5.2.1 Casos particulares

Este modelo engloba (ou quase) alguns modelos tratados nesta tese. Mostramos a seguir alguns casos particulares.

Se

$$\begin{cases} e_{mC} = e_{mE} = -1 \\ e_t = \nu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

então chegamos ao modelo de Newton (sem atrito).

Se

$$\begin{cases} e_{mC} = e_{mE} = -1 \\ e_t = \nu = 0 \end{cases}$$

então chegamos ao modelo de Wang-Mason, no caso do coeficiente de restituição de Poisson.

Se

$$\begin{cases} e_{mC} = e_{mE} = e_m \\ e_t = \nu = 0 \end{cases}$$

então chegamos a um caso similar ao modelo de Brach.

Se

$$\begin{cases} e_{mC} = e_{mE} = -1 \end{cases}$$

então chegamos ao modelo de Glocker-Pfeiffer.

5.2.2 Aplicação no caso da barra

Primeiro consideraremos o caso em que $e_{mc} \neq -1$ e $e_{me} \neq -1$

Para a extremidade da esquerda temos

$$D_N = y - \frac{L}{2} \text{sen}\theta \Rightarrow \dot{D}_N = \dot{y} - \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos\theta = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{L}{2} \cos\theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}_N^t} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$D_T = x - \frac{L}{2} \cos\theta \Rightarrow \dot{D}_T = \dot{x} + \frac{L}{2} \dot{\theta} \text{sen}\theta = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{L}{2} \text{sen}\theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}_T^t} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$D_\theta = -\theta \Rightarrow \dot{D}_\theta = -\dot{\theta} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}_\theta^t} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Assim,

$$[M^{-1}] \begin{pmatrix} \mathbf{w}_N & \mathbf{w}_T & \mathbf{w}_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_N \\ I_T \\ I_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} I_T \\ \frac{1}{m} I_N \\ -\frac{L}{2J} I_N \cos\theta + \frac{L}{2J} I_T \text{sen}\theta - \frac{1}{J} I_\theta \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{cases} \dot{x}_E - \dot{x}_A = \frac{1}{m}I_T \\ \dot{y}_E - \dot{y}_A = \frac{1}{m}I_N \\ \dot{\theta}_E - \dot{\theta}_A = -\frac{L}{2J}I_N\cos\theta + \frac{L}{2J}I_T\sen\theta - \frac{1}{J}I_\theta. \end{cases}$$

Para a extremidade da direita temos

$$D_N = y + \frac{L}{2}\sen\theta \Rightarrow \dot{D}_N = \dot{y} + \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{L}{2}\cos\theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}_N^t} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$D_T = x + \frac{L}{2}\cos\theta \Rightarrow \dot{D}_T = \dot{x} - \frac{L}{2}\dot{\theta}\sen\theta = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{L}{2}\sen\theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}_T^t} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$D_\theta = \theta \Rightarrow \dot{D}_\theta = -\dot{\theta} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}_\theta^t} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Assim,

$$[M^{-1}] \begin{pmatrix} \mathbf{w}_N & \mathbf{w}_T & \mathbf{w}_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_N \\ I_T \\ I_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}I_T \\ \frac{1}{m}I_N \\ \frac{L}{2J}I_N\cos\theta - \frac{L}{2J}I_T\sen\theta + \frac{1}{J}I_\theta \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{cases} \dot{x}_E - \dot{x}_A = \frac{1}{m}I_T \\ \dot{y}_E - \dot{y}_A = \frac{1}{m}I_N \\ \dot{\theta}_E - \dot{\theta}_A = \frac{L}{2J}I_N\cos\theta - \frac{L}{2J}I_T\sen\theta + \frac{1}{J}I_\theta. \end{cases}$$

Usamos $I_T = I_{TC} + I_{TE}$ e $I_N = I_{NC} + I_{NE}$.

$$\begin{cases} A = \frac{1}{m} + \frac{L^2}{4J}\cos^2\theta \\ B = \frac{L^2}{4J}\sen\theta\cos\theta \\ C = \frac{1}{m} + \frac{L^2}{4J}\sen^2\theta \\ D = \frac{L}{2J}\cos\theta \\ E = \frac{L}{2J}\sen\theta \end{cases}$$

e,

$$\dot{D}_{\theta_E} = \dot{\theta}_E = -\frac{e_m}{(1+e_m)J}I_\theta.$$

Temos, na fase de compressão

$$\begin{cases} \dot{D}_{NC} = AI_{NC} - BI_{TC} + DI_{\theta C} + \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_{TC} = -BI_{NC} + CI_{TC} - EI_{\theta C} + \dot{D}_{TA} \\ \dot{D}_{\theta C} = DI_{NC} - EI_{TC} + \frac{1}{J}I_{\theta C} + \dot{D}_{\theta A} \end{cases}$$

e na fase de expansão

$$\begin{cases} \dot{D}_{NE} = AI_{NE} - BI_{TE} + DI_{\theta E} + \dot{D}_{NC} \\ \dot{D}_{TE} = -BI_{NE} + CI_{TE} - EI_{\theta E} + \dot{D}_{TC} \\ \dot{D}_{\theta E} = DI_{NE} - EI_{TE} + \frac{1}{j}I_{\theta E} + \dot{D}_{\theta C} \end{cases}$$

Temos,

$$I_{NE} = e_{np}I_{NC}$$

e

$$I_{\theta C} = \frac{(1 + em_C)J}{em_C} s_1 \dot{\theta}_C$$

$$I_{\theta E} = \frac{(1 + em_E)J}{em_E} s_2 \dot{\theta}_E$$

Usaremos,

$$\dot{D}_{\theta C} = s_3 \frac{em_C}{1 + em_C} I_{\theta C}$$

e

$$\dot{D}_{\theta E} = s_4 \frac{em_E}{1 + em_E} I_{\theta E}$$

Assim, escrevemos, na fase de compressão

$$\begin{cases} AI_{NC} - BI_{TC} + DI_{\theta C} = \dot{D}_{NC} - \dot{D}_{NA} \\ -BI_{NC} + CI_{TC} - EI_{\theta C} = \dot{D}_{TC} - \dot{D}_{TA} \\ DI_{NC} - EI_{TC} + F_1 I_{\theta C} = -\dot{D}_{\theta A} \end{cases}$$

Usamos $F_1 = \frac{1}{j} - \frac{s_1 s_3 em_C}{1 + em_C}$.

Na fase de expansão temos

$$\begin{cases} AI_{NE} - BI_{TE} + DI_{\theta E} = \dot{D}_{NE} - \dot{D}_{NC} \\ -BI_{NE} + CI_{TE} - EI_{\theta E} = \dot{D}_{TE} - \dot{D}_{TC} \\ DI_{NE} - EI_{TE} + F_2 I_{\theta E} = -\dot{D}_{\theta C} \end{cases}$$

Usamos $F_2 = \frac{1}{j} - \frac{s_2 s_4 em_E}{1 + em_E}$.

5.2.3 Simulações

Usaremos para todas as situações : $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $y_0 = 1.2$, $\dot{y}_0 = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\theta} = 0$.

Na Figura 5.1 consideramos $e_n = 1$, $e_t = 0$, $\nu = 0$, $\mu = 0$, $e_{mc} = -1$ e $e_{me} = -1$.

Este caso se reduz ao modelo de Newton (sem atrito).

Mostramos as animações desse caso na Figura 5.2.

Agora consideramos $e_n = 1$, $e_t = 0$, $\nu = 0$, $\mu = 0$, $e_{mc} = 0.5$ e $e_{me} = 0.5$. Mostramos os gráficos na Figura 5.3.

Mostramos as animações desse caso na Figura 5.4.

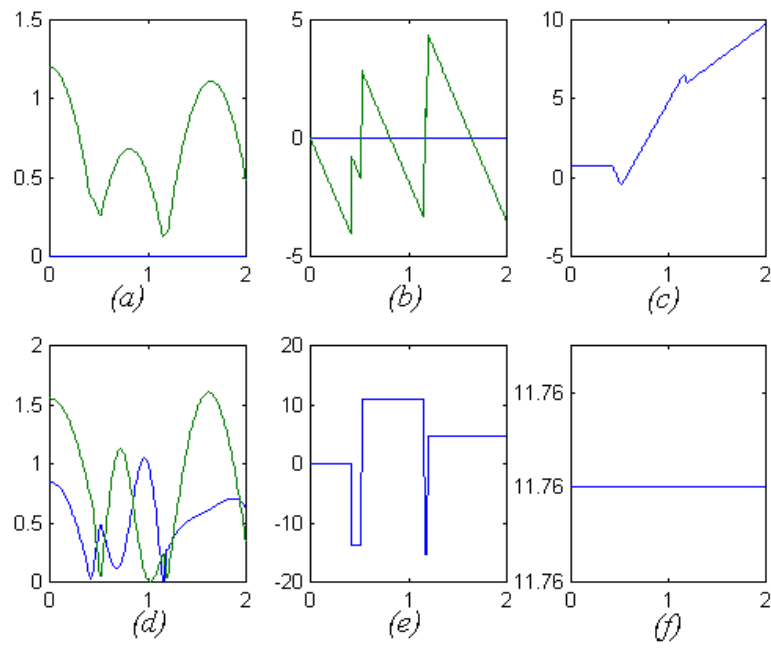


Figura 5.1. Modelo C-S: (a) Deslocamento vertical do centro de massa (linha verde) e deslocamento horizontal do centro de massa (linha azul); (b) Velocidade vertical do centro de massa (linha verde) e velocidade horizontal do centro de massa (linha azul); (c) Deslocamento angular; (d) Deslocamento vertical da extremidade da esquerda (linha verde) e deslocamento vertical da extremidade da direita (linha azul); (e) Velocidade angular; (f) Energia

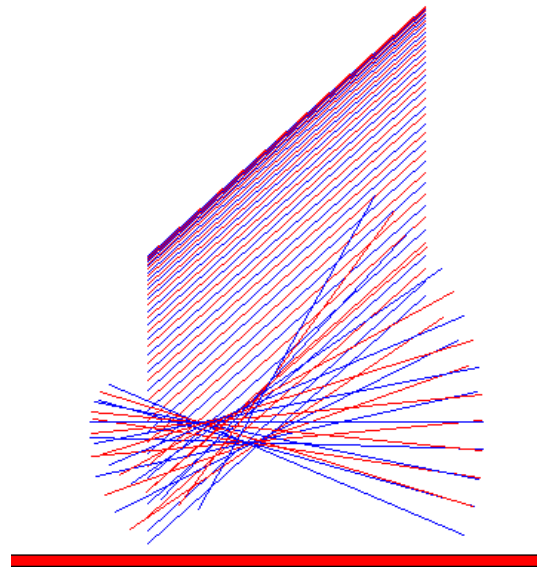


Figura 5.2. Animação: Modelo C-S

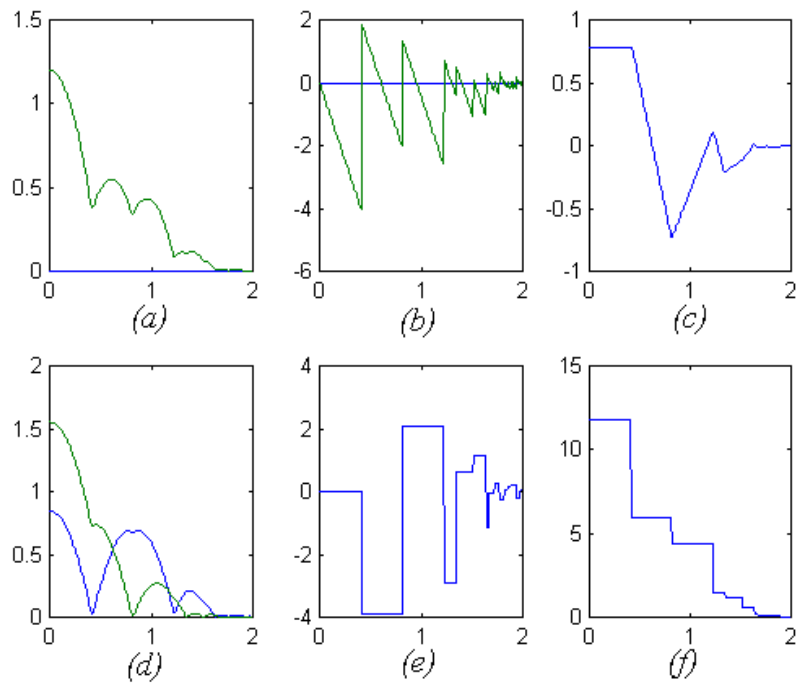


Figura 5.3. Modelo C-S: (a) Deslocamento vertical do centro de massa (linha verde) e deslocamento horizontal do centro de massa (linha azul); (b) Velocidade vertical do centro de massa (linha verde) e velocidade horizontal do centro de massa (linha azul); (c) Deslocamento angular; (d) Deslocamento vertical da extremidade da esquerda (linha verde) e deslocamento vertical da extremidade da direita (linha azul); (e) Velocidade angular; (f) Energia

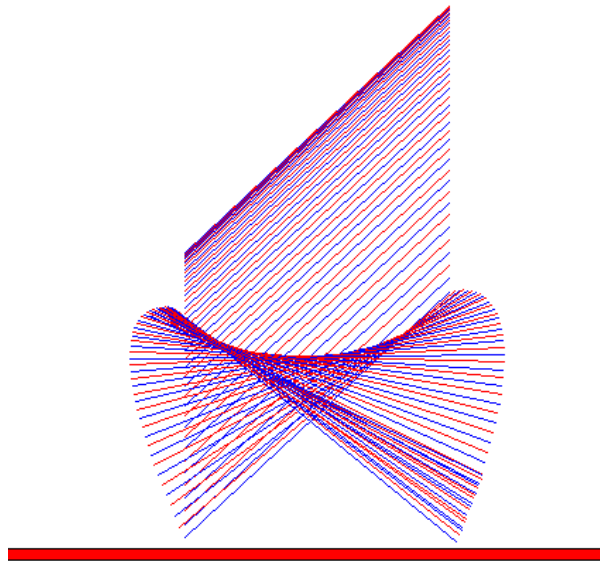


Figura 5.4. Animação: Modelo C-S

5.2.4 Aplicação no caso da colisão de uma bola

Nesse caso temos para a parede inferior

$$\begin{cases} \dot{D}_{NA} = \dot{y}_A \\ \dot{D}_{TA} = \dot{x}_A + r\dot{\theta}_A \\ \dot{D}_{\theta A} = -\dot{\theta}_A \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{x}_E = \dot{x}_A + \frac{1}{m}I_T \\ \dot{y}_E = \dot{y}_A + \frac{1}{m}I_N \\ \dot{\theta}_E = \dot{\theta}_A + \frac{r}{J}I_T - \frac{1}{J}I_\theta \end{cases}$$

e para a parede superior

$$\begin{cases} \dot{D}_{NA} = -\dot{y}_A \\ \dot{D}_{TA} = -\dot{x}_A + r\dot{\theta}_A \\ \dot{D}_{\theta A} = -\dot{\theta}_A \end{cases}$$

5.2.5 Simulações

Consideramos $m = 1$, $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0$, $g = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 1$, $y_0 = 0.9$, $\dot{y}_0 = -1$, $e_n = 1$, $h = 1.01$, $\mu = 1$ e $r = 0.1$.

No primeiro caso usaremos $e_{mc} = -1$ e $e_{me} = -1$. Temos, assim, o modelo de Glocker-Pfeiffer. Consideramos $e_t = 0$ e $\nu = 0$. Mostramos a trajetória do centro de massa na Figura 5.5.

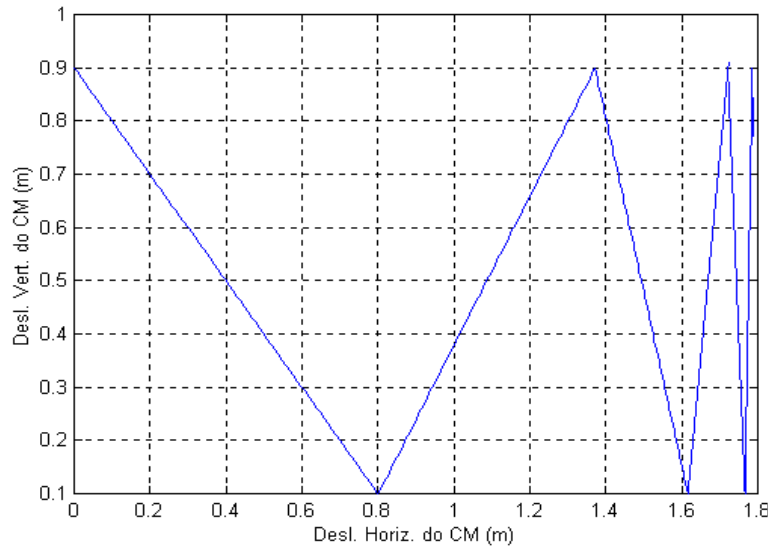


Figura 5.5. Modelo C-S para $e_{mc} = -1$, $e_{me} = -1$, $e_t = 0$ e $\nu = 0$

Fazemos $e_{mc} = -1$ e $e_{me} = -1$, mas $e_t = 1$ e $\nu = 1$ e mostramos a trajetória do centro de massa na Figura 5.6.

Fazemos $e_{mc} = -1$ e $e_{me} = -0.5$, mas $e_t = 1$ e $\nu = 1$ e mostramos o gráfico na Figura 5.7. Observamos nesse caso um comportamento que não pode ser obtido usando o modelo de Glocker-Pfeiffer.

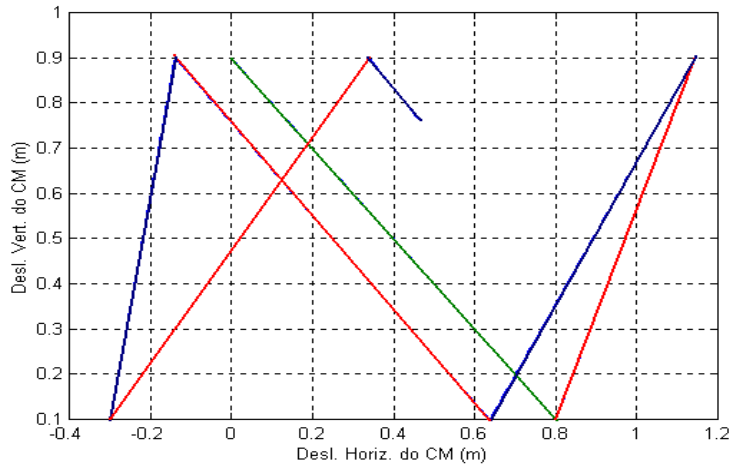


Figura 5.6. Modelo C-S para $e_{mc} = -1$, $e_{me} = -1$, $e_t = 1$ e $\nu = 1$

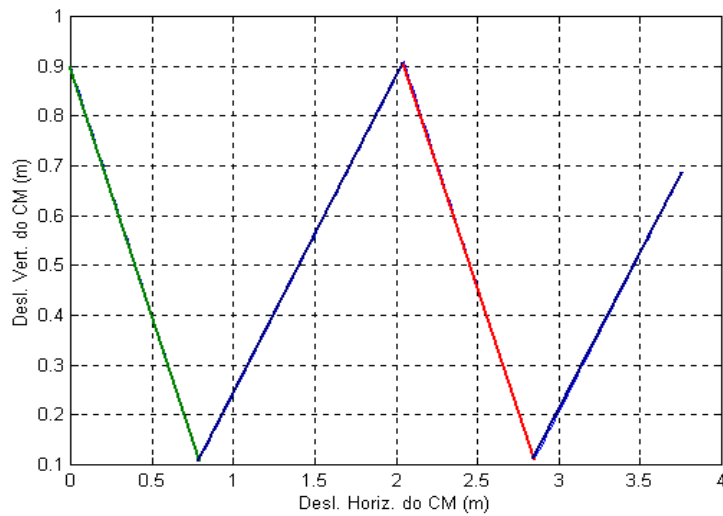


Figura 5.7. Modelo C-S para $e_{mc} = -1$, $e_{me} = -0.5$, $e_t = 1$ e $\nu = 1$

6 VALIDAÇÃO DE MODELOS DE COLISÃO

6.1 Introdução

A dinâmica de uma colisão é um processo complicado, por outro lado, modelos de previsão devem ser realistas e suficientemente simples para serem calculados em tempo real. Pela Tabela 5.1 vemos que os modelos descritos aqui usam no máximo seis parâmetros, além dos parâmetros de geometria. Além disso, consideramos os parâmetros constantes, independentes da dinâmica.

A princípio o otimismo pode parecer exagerado. Mostraremos que não pois, dentro de certas condições, os modelos que tratamos aqui são realistas.

6.2 Colisão de Barras

Para discutir a parte experimental de colisão de barras vamos utilizar os resultados experimentais obtidos por Soianovici e Humurzlu (1996). Para estudar a colisão de barras rígidas contra um anteparo fixo eles construíram o dispositivo mostrado na Figura 6.1.

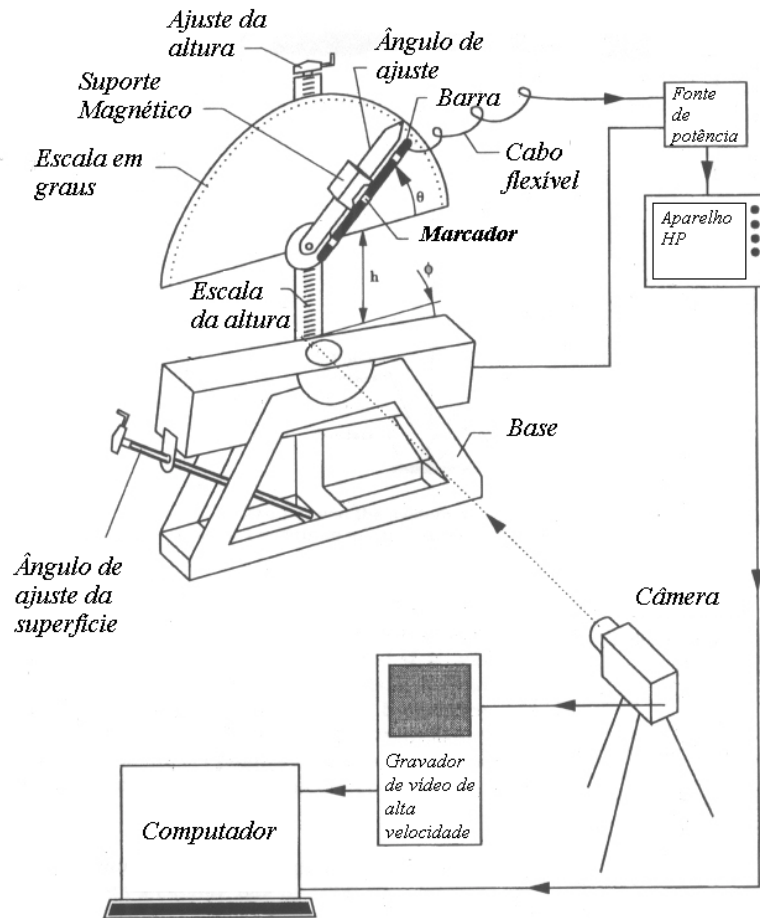


Figura 6.1. Dispositivo experimental

A colisão foi criada permitindo a queda de barras de aço a partir de uma distância vertical sobre um bloco de ferro maciço. O dispositivo foi construído de modo a permitir a variação da orientação e da velocidade da barra no momento pré-colisão de forma controlada e repetida. Um sistema de vídeo de alta velocidade foi usado para capturar os dados cinemáticos. O tempo de contato entre a barra e a superfície foi medido através de um circuito elétrico.

Eles propuseram um fator de esbeltez para caracterizar a classe de problemas de colisão em que o coeficiente de restituição é invariante com o ângulo de inclinação. Esse fator depende do comprimento e do diâmetro da barra e é dado por

$$\gamma = \frac{L}{dP}$$

Sendo γ o fator de esbeltez, L o comprimento da barra e d o diâmetro da barra. P é constante e vale 1.3815. Considerando que a teoria de corpos rígidos possa ser aplicada quando dez por cento da variação do coeficiente de restituição é considerada eles chegaram à conclusão da faixa do coeficiente de esbeltez que pode ser usada. Essa faixa é dada por

$$\gamma = \frac{L}{d^{1.3815}} \leq 26.45m^{-0.3815}$$

Considerando uma barra de $L = 63.5 \text{ mm}$ e diâmetro $d = 12.7 \text{ mm}$ encontramos $\gamma = 26.45 \text{ m}^{-0.3815}$. Uma barra com essas dimensões foi usada.

Mostramos na Figura 6.2 o gráfico do comprimento L em termos dos diâmetro d , em escala logarítmica, permitindo obter o coeficiente de esbeltez.

Na Figura 6.3 é mostrado o gráfico do coeficiente de restituição e_n em termos do ângulo θ para uma barra $L = 63.5 \text{ mm}$ e diâmetro $d = 12.7 \text{ mm}$.

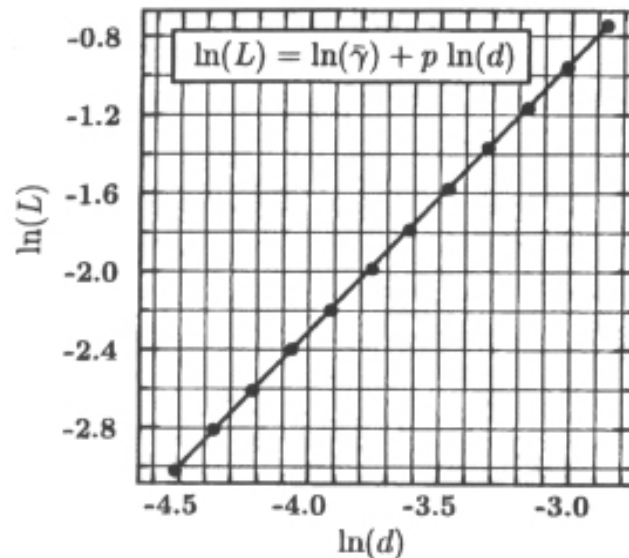


Figura 6.2. Fator de esbeltez

A partir desses experimentos eles concluíram que

- A teoria de corpos rígidos, usando o coeficiente de restituição tal como dado por Newton, tem uma aplicabilidade limitada até mesmo para materiais altamente rígidos e baixas velocidades.
- A teoria de Coulomb continua válida para a superfície de contato durante a colisão
O coeficiente de restituição não depende apenas de propriedades locais de contato. Eles observaram que quando a barra tem um fator de esbeltez baixo, o coeficiente de restituição não muda quando trocamos a orientação da barra. Assim, o coeficiente depende das deformações locais, das propriedades globais da barra, das propriedades do material da barra e das condições da dinâmica durante o colisão.
- O primeiro mecanismo que causa perda de energia é o das deformações locais na vizinhança do ponto de contato e a dissipação de energia para a superfície externa.

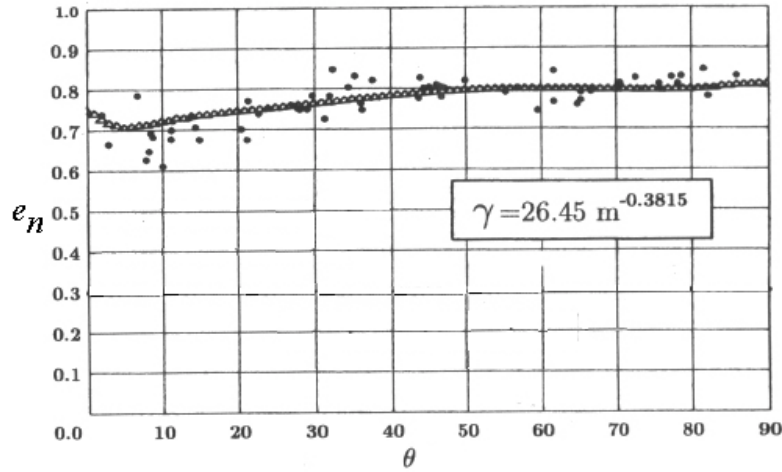


Figura 6.3. Coeficiente de restituição obtido experimentalmente com $L = 63.5 \text{ mm}$ e $d = 12.7 \text{ mm}$

Porém, um segundo e importante fator são as vibrações internas da barra induzidas pelo colisão. As teorias de corpos rígidos não levam em conta as vibrações internas.

- Observaram também que uma colisão pode ser visualmente percebida como um processo em que dois corpos, inicialmente separados, entram em contato, assim permanecem durante um processo de deformação complicado por um tempo pequeno e depois se separam. Pode, na verdade, ser um processo em que o contato é intermitente; isto é, existe uma seqüência de intervalos de contato intercalada por outra de intervalos de separação. Em Timoshenko (1937) temos a discussão de um problema elástico unidimensional que ajuda a que se perceba a dificuldade do problema.
- Um método alternativo que evita o uso do coeficiente de restituição é usar modelos discretos. Modelos contínuos baseados em análise modal e modelos de elementos finitos podem também ser considerados.

A partir dos dados experimentais obtidos nesse artigo, Catherine Cholet (1998) faz uma adaptação do modelo discutido em sua tese (modelo de Frémond (1995)). Ela mostrou que se uma análise da dinâmica for feita de modo a redefinir o coeficiente de restituição então a faixa de validade do modelo é ampliada. Esse resultado sugere que os modelos de colisão podem ser bastante melhorados se uma análise teórica mais fina for feita.

Considerando o impulso na direção normal do modelo de Frémond para $p = 2$ e comparando com coeficiente de restituição de Newton chegamos à equação

$$I_N = mC_N(\theta)(\dot{D}_{NE} + \dot{D}_{NA})$$

sendo

$$C_N(\theta) = \frac{r^2}{r^2 + \cos^2\theta} \frac{1 + e_n(\theta)}{1 - e_N(\theta)} \quad (6.1)$$

Com $r = 1/5$.

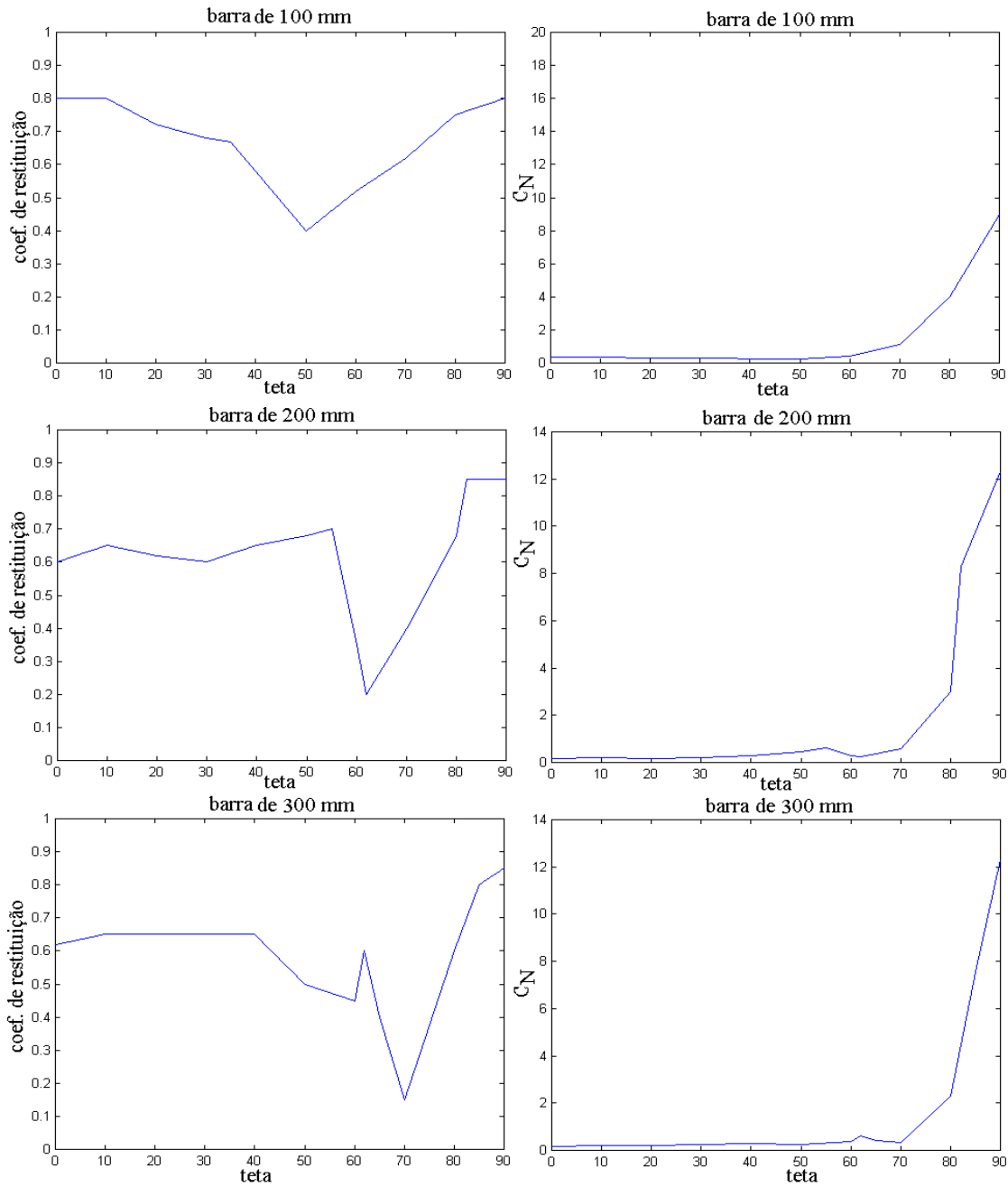


Figura 6.4. Gráficos de e_n e de C_n obtidos experimentalmente

Mostramos na Figura 6.4 e na Figura 6.5 os gráficos de e_n e de C_N em função do ângulo θ para vários comprimentos de barra. No lado esquerdo mostramos os valores obtidos por Soianovici e Humurzlu (1996) e no lado direito os valores de C_n obtidos pela Eq. 6.1.

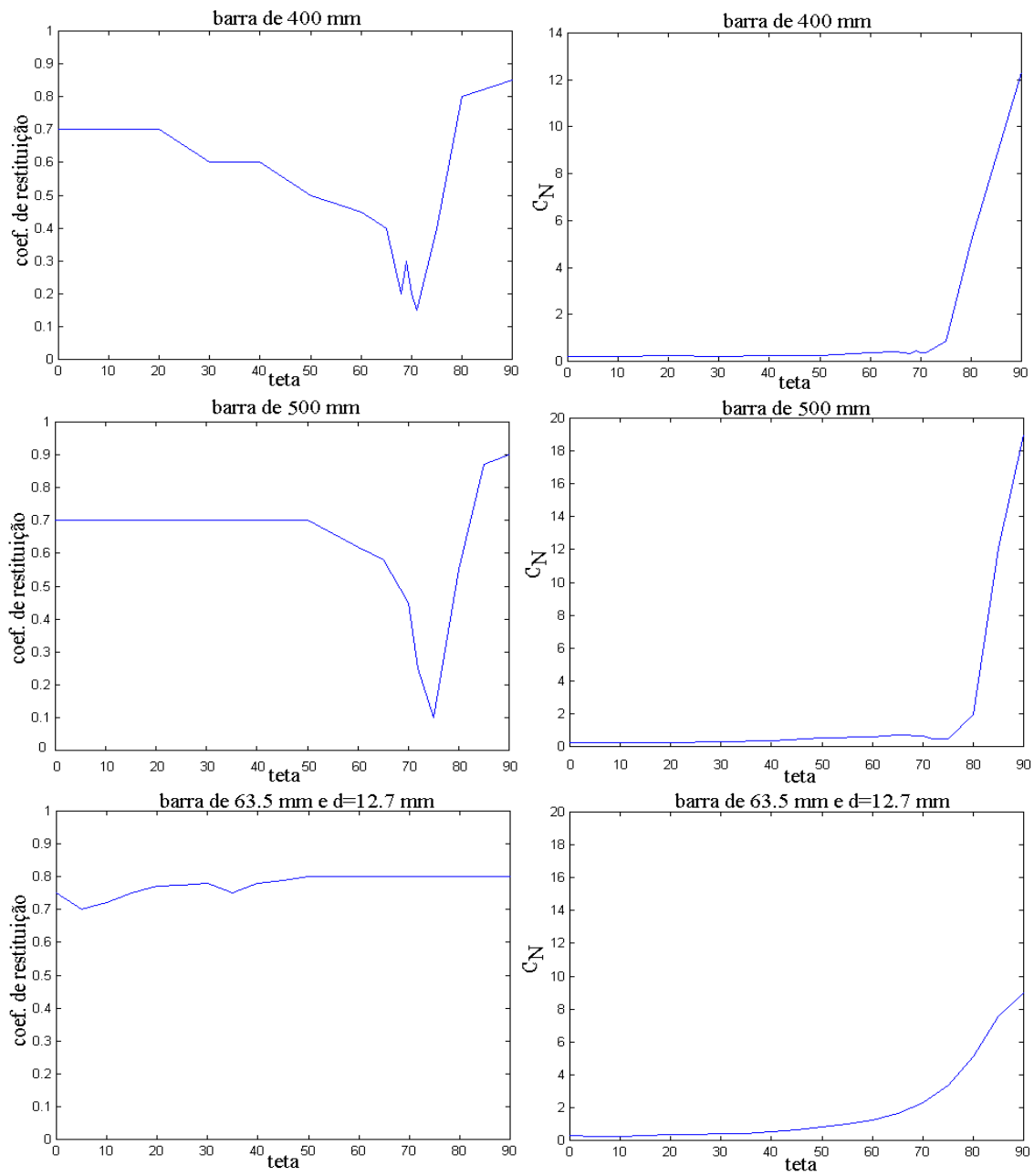


Figura 6.5. Gráficos de e_n e de C_n obtidos experimentalmente

Cathérine observou que para todos os comprimentos de barras foi obtido o mesmo comportamento do coeficiente C_N em função do ângulo θ , diferentemente do coeficiente de restituição e_n .

6.3 Colisão de Discos

Para determinar o comportamento da colisão de discos de aço, Catherine Cholet (1998) realizou 280 experiências. Os resultados foram interpretados a partir do modelo a três coeficientes proposto por Walton(1992). Esse modelo depende de três coeficientes: um coeficiente de restituição normal (e_n), um coeficiente de restituição tangencial (e_t) e um coeficiente de atrito (μ).

O coeficiente de restituição normal e_n é dado como a definição de Newton; isto é,

$$\dot{D}_{NE} = -e_n \dot{D}_{NA}$$

Os impulsos normais e tangenciais são relacionados pela lei de Coulomb; isto é,

$$|I_T| \leq \mu I_N$$

O coeficiente de restituição tangencial e_t permite modelar a restituição de uma parte da energia armazenado no curso das deformações tangenciais e traduz os fenômenos de aderência e deslizamento. Temos,

$$\dot{D}_{TE} = -e_t \dot{D}_{TA}$$

com $-1 \leq e_t \leq 1$.

O modelo a três coeficientes pode ser expresso dentro do modelo de Frémond. As leis de comportamento são expressas por:

Na parte normal temos

$$I_N^d (\dot{D}_{NE} + \dot{D}_{NA}) = m \frac{1+e_n}{1-e_n} (\dot{D}_{NE} + \dot{D}_{NA})$$

e para a parte tangencial

$$I_T = \mathcal{F}_T (\dot{D}_{TE} + \dot{D}_{TA}, \dot{D}_{NE} + \dot{D}_{NA})$$

sendo

$$\mathcal{F}_T = \begin{cases} \frac{m}{3} \frac{1+e_t}{1-e_t} (\dot{D}_{TA} + \dot{D}_{TE}), & |I_T| < \mu I_N \\ -\mu I_N \frac{\dot{D}_{TA} + \dot{D}_{TE}}{|\dot{D}_{TA} + \dot{D}_{TE}|} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Catherine Cholet (1998) montou um dispositivo formado de duas placas de vidro de 28 cm de altura e 50 cm de largura, espaçadas de 1 cm, e presas a um bloco de mármore maciço. Os discos foram largados de diversas alturas permitindo assim obter várias velocidades pré-colisão. Os discos tinham 1 cm de raio e massa de 4.87 g.

Ela observou que o coeficiente de restituição normal não decresceu de maneira significativa em função da velocidade normal pré-colisão que variou entre 0.17 m/s e 3.19 m/s. O coeficiente de restituição normal foi obtido com valor aproximadamente igual a $e_n = 0.93$ e coeficiente $k_N = \frac{I_N}{\dot{D}_{NA} + \dot{D}_{NE}} = 0.13$.

O coeficiente de atrito foi obtido a partir dos impulsos normais e tangenciais e seu valor encontrado foi

$$\mu = 0.20 \pm 0.05.$$

O coeficiente de restituição tangencial teve valor igual $e_t = 0.45 \pm 0.15$ e $k_t = 4.3 \times 10^{-3}$.

6.4 Controle de Trajetória de um Disco Usado no Jogo de *Hockey*

Chad B. Partridge e Mark W. Spong(1999) estudaram o problema de controlar a trajetória de um disco de borracha usado no jogo de *Hockey* sujeito a colisões intermitentes. As colisões foram modeladas usando o método de de Routh, usando o desenvolvimento de Wang-Mason (1992). Usando esse modelo eles encontraram um mapeamento entre as velocidades pré-colisão e pós-colisão do disco. Mostraram que esse mapeamento é descontínuo e separa o espaço de velocidades do disco em regiões determinadas pelo término ou não do deslizamento relativo durante a colisão. Essa descontinuidade depende da velocidade relativa dos objetos pré-colisão e dos coeficientes de restituição e de atrito.

Eles apresentaram resultados do planejamento das trajetórias do disco e controle do disco através das colisões com um bastão. Esse é basicamente o problema de inverter o mapeamento entre as velocidades pré-colisão e pós-colisão. Os resultados obtidos confirmaram a noção intuitiva que um grande coeficiente de atrito entre o bastão e o disco e entre o disco e o solo favorece o controle do movimento do disco através das colisões.

Esse problema, conhecido como problema de *Manipulação Impulsiva*, que é o de controlar trajetórias de objetos físicos através de colisões, tem muitas aplicações em robótica e no estudo de locomoção. Por exemplo, a análise do movimento humano indica que para regular visivelmente o comprimento do passo na corrida em terreno irregulares primeiro é feito o ajuste do impulso vertical do solo para cada passo.

O coeficiente de restituição normal e_n e o coeficiente de atrito μ foram determinados experimentalmente e tiveram valores médios de 0.855 e 0.236 respectivamente.

7 O PROGRAMA *COLISÃO*

7.1 Introdução

Nesta seção tratamos do programa *Colisão* que está sendo desenvolvido tendo como principal objetivo simular a dinâmica de sistemas com colisões e que foi usado para simular os modelos apresentados nesta tese. O programa foi desenvolvido usando o MATLAB e conta com uma interface gráfica amigável. É permitido que a partir de uma lista de modelos seja escolhido um e para cada modelo podemos modificar parâmetros e obter gráficos de deslocamento do centro de massa, velocidade do centro de massa, deslocamento angular, velocidade angular e energia. Além disso, para cada modelo há a possibilidade de animação. O programa trata da colisão de uma barra rígida com uma barreira fixa, da colisão de uma bola contra duas paredes e da colisão de três moedas. Há três outros casos, tratados também pelo programa, mas de menor importância. Esses três casos foram os primeiros casos implementados. São eles : colisão unidimensional entre duas massas, colisão de uma barra rígida, fixa em um ponto, com um anteparo e colisão de um pêndulo, dentro de uma caixa, com as paredes da caixa, ambos em movimento.

O programa está num estágio intermediário. Do modo como foi construído, permite que mais problemas possam ser agregados. Como exemplo, o próximo objetivo é colocar o caso do pêndulo duplo em colisão com o solo como o estudado por Kane (1984). Queremos também testar outros tipos de integradores, tentar diminuir o tempo de execução, colocar outros gráficos que também possam ser interessantes como os valores dos impulsos em cada colisão, traçado da elipse de energia em cada processo virtual de colisão e assim por diante.

Decidimos tratar inicialmente de colisões planas pois assim teríamos mais facilidade de resolver alguns problemas relacionados à programação, tais como o *pisca-pisca* (*flickering*) que consiste nas animações ficarem piscando na tela, problemas de armazenamento de variáveis e adaptação à nova versão do MATLAB. Com esses problemas equacionados temos uma plataforma básica montada e podemos pensar em crescer.

O programa, no seu estágio atual, será discutido no decorrer desta Seção.

7.2 Apresentação do Programa

Na Figura 7.1 mostramos a tela inicial do programa e na Figura 7.2 a tela com a lista dos modelos de colisão considerados.

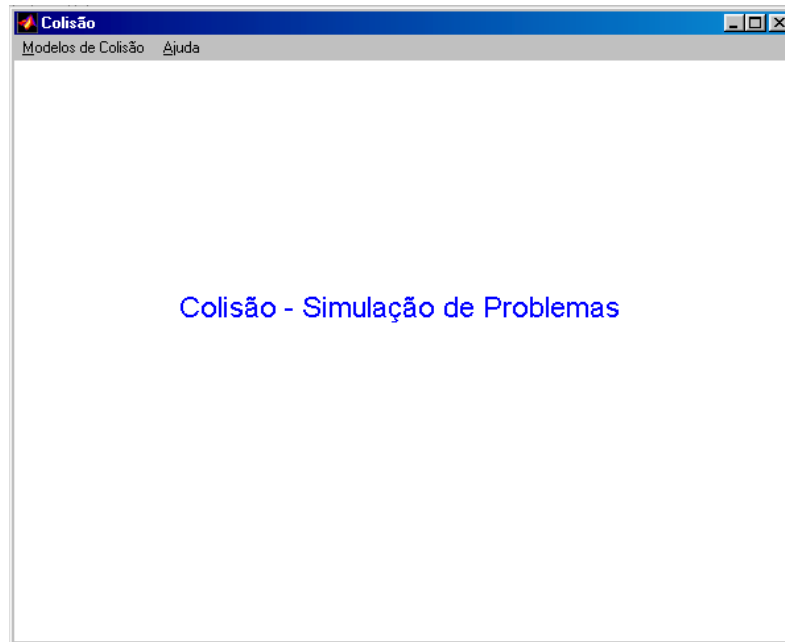


Figura 7.1. Tela inicial do programa Colisão

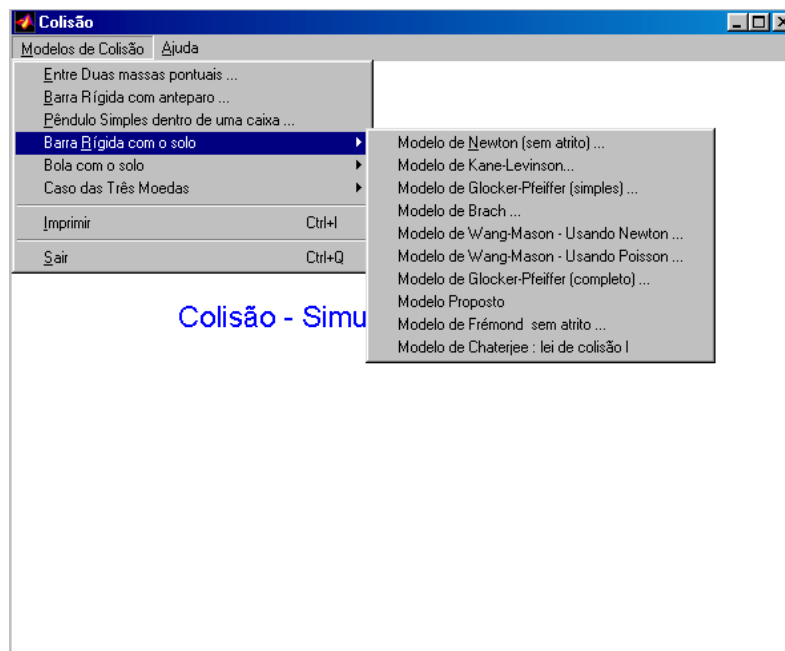


Figura 7.2. Tela com a lista dos modelos

Na Figura 7.3 mostramos a tela inicial de um dos modelos, que tem a mesma forma das telas de outros modelos, variando apenas os parâmetros e na Figura 7.4 a tela do mesmo modelo com a lista de opções (gráficos e animação).

Parâmetros - Barra Rígida com o solo, modelo Proposto

Massa da Barra :	<input type="text" value="1"/>	Kg	Comprimento da Barra :	<input type="text" value="1"/>	m
Ângulo Inicial :	<input type="text" value="0.78"/>	rad	Aceleração da gravidade :	<input type="text" value="9.8"/>	m/s ²
Velocidade Angular Inicial :	<input type="text" value="0"/>	rad/s	Posição Inicial do Centro de Massa [X, Y] :	<input type="text" value="0 2"/>	m
			Velocidade do Centro de Massa [Vx, Vy] :	<input type="text" value="0 0"/>	m/s
Coef. Res. Normal. (en) :	<input type="text" value="1"/>		Instante Inicial :	<input type="text" value="0"/>	s
Coef. Res. Tangencial (et) :	<input type="text" value="0.5"/>		Instante Final :	<input type="text" value="4"/>	s
Coef. ni :	<input type="text" value="0.2"/>				
Coef. mi :	<input type="text" value="0.5"/>		Coeficiente EMC :	<input type="text" value="0.5"/>	
			Coeficiente EME :	<input type="text" value="0.1"/>	

Opções

Deslocamento do Centro de Massa ▾

Calcular Cancelar

Figura 7.3. Tela inicial de um dos modelos

Parâmetros - Barra Rígida com o solo, modelo Proposto

Massa da Barra :	<input type="text" value="1"/>	Kg	Comprimento da Barra :	<input type="text" value="1"/>	m
Ângulo Inicial :	<input type="text" value="0.78"/>	rad	Aceleração da gravidade :	<input type="text" value="9.8"/>	m/s ²
Velocidade Angular Inicial :	<input type="text" value="0"/>	rad/s	Posição Inicial do Centro de Massa [X, Y] :	<input type="text" value="0 2"/>	m
			Velocidade do Centro de Massa [Vx, Vy] :	<input type="text" value="0 0"/>	m/s
Coef. Res. Normal. (en) :	<input type="text" value="1"/>		Instante Inicial :	<input type="text" value="0"/>	s
Coef. Res. Tangencial (et) :	<input type="text" value="0.5"/>		Instante Final :	<input type="text" value="4"/>	s
Coef. ni :	<input type="text" value="0.2"/>				
Coef. mi :	<input type="text" value="0.5"/>		Coeficiente EMC :	<input type="text" value="0.5"/>	
			Coeficiente EME :	<input type="text" value="0.1"/>	

Opções

- Deslocamento do Centro de Massa ▾
- Deslocamento do Centro de Massa
- Velocidade do Centro de Massa
- Deslocamento Angular
- Velocidade Angular
- Deslocamento das extremidades
- Energia
- Impulso
- Animação

Cancelar

Figura 7.4. Tela do modelo com as opções de gráficos e animação

Mostramos na Figura 7.5 um exemplo de tela dos gráficos, no caso é o gráfico do deslocamento das extremidades.

Mostramos na Figura 7.6 a tela da opção animação.

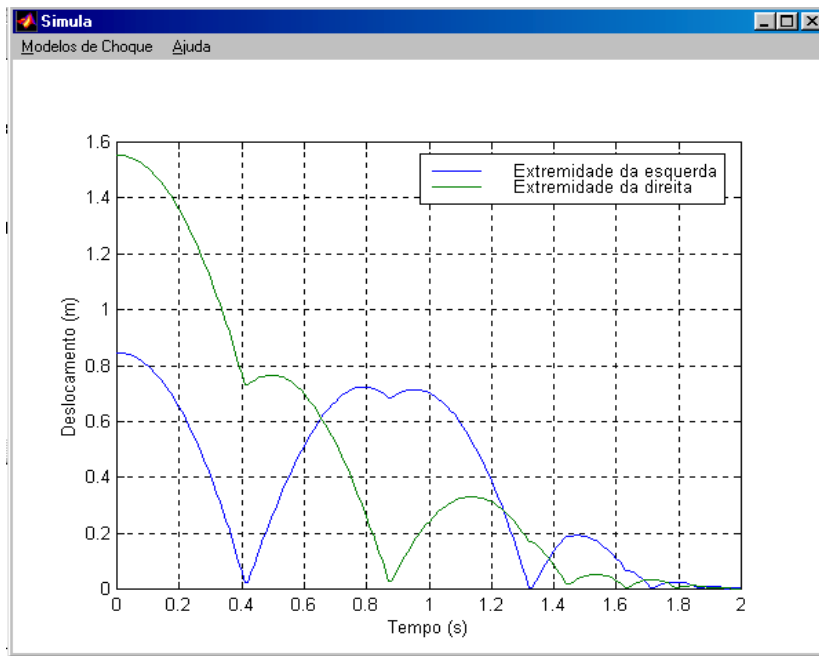


Figura 7.5. Tela com um dos gráficos

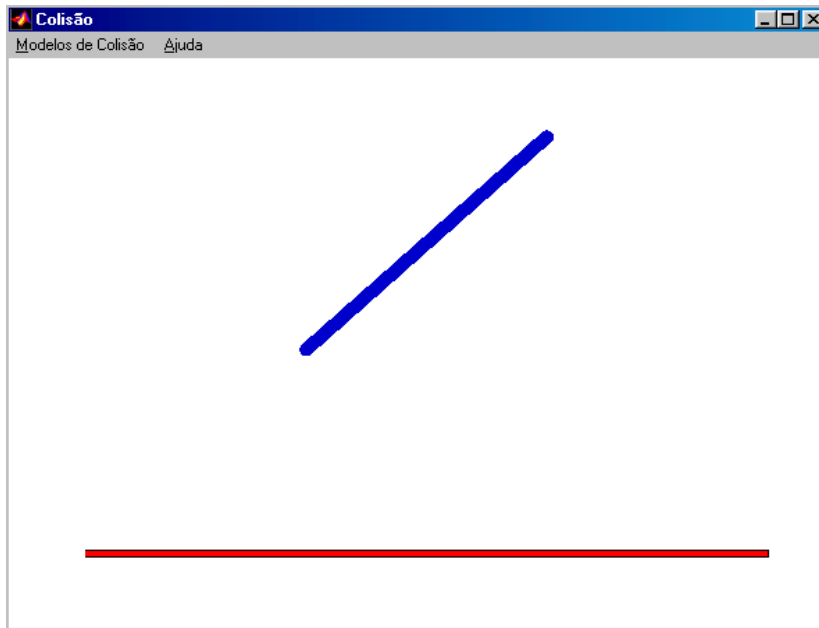


Figura 7.6. Tela da opção animação

7.3 Discussão do Programa

Nesta seção discutiremos o conteúdo do programa assim como as dificuldades para a sua construção.

Como dissemos há três problemas principais discutidos no programa : colisão de uma barra rígida chocando-se contra uma barreira fixa, colisão de uma bola contra duas paredes e colisão de três moedas. Após termos conseguido criar uma formulação única para a resolução dos problemas de colisão começamos a implementar essa formulação no programa.

Discutiremos primeiro o problema da barra rígida chocando-se contra uma barreira fixa.

Para cada modelo simulamos a dinâmica do sistema. Para descobrir se há colisão, monitoramos a variável \mathbf{D} até verificarmos a condição $D_N = 0$. Nesse instante, conhecendo os valores de $\dot{\mathbf{q}}_A$, $[M]$ e $[W]$ queremos encontrar $\dot{\mathbf{q}}_E$. Sabemos que $\mathbf{q}_E = \mathbf{q}_A$. Após o cálculo de $\dot{\mathbf{q}}_E$ de acordo com o modelo usado, devemos resolver novamente a equação diferencial da dinâmica do sistema (sem colisões) usando esse valor de $\dot{\mathbf{q}}_E$ achado para as novas condições iniciais do problema.

Para o desenvolvimento do programa usamos a função ODE23 do MATLAB que utiliza as fórmulas de Runge-Kutta de segunda e terceira ordens. Um dos nossos próximos objetivos é testar outros integradores, como exemplo o ODE45 que utiliza as fórmulas de Runge-Kutta de quarta e quinta ordens. A função ODE23 fornece como resposta uma matriz, no nosso caso $(n, 6)$, em que cada coluna corresponde aos valores de uma coordenada generalizada ou da sua derivada. A primeira e a segunda colunas correspondem ao deslocamento horizontal e à velocidade horizontal do centro de massa (x e \dot{x}), a terceira e a quarta colunas correspondem ao deslocamento vertical e à velocidade vertical do centro de massa (y e \dot{y}) e a quinta e a sexta colunas correspondem ao deslocamento angular e à velocidade angular da barra (θ e $\dot{\theta}$).

Com a matriz obtida como resposta verificamos a partir de que posição (dos vetores) a condição de distância normal relativa em cada ponto de contato é menor ou igual a zero ($D_N \leq 0$). Pela teoria deveríamos considerar apenas distância normal relativa igual a zero porém, como estamos trabalhando com variáveis discretas devemos estipular uma determinada tolerância para o passo de integração. Quanto menor for o passo escolhido maior será a precisão, porém maior também o tempo de execução do programa. Dessa forma consideramos que quando a distância normal relativa for menor ou igual a zero houve colisão. Os valores das variáveis (deslocamento horizontal do centro de massa, velocidade horizontal do centro de massa, . . .) considerados como pré-colisão são os valores nas posições dos vetores correspondentes ao instante anterior em que a velocidade normal relativa é menor ou igual a zero. Criamos uma nova matriz e guardamos os valores correspondentes à dinâmica, até o momento da colisão, nessa nova matriz. A cada colisão, os valores obtidos da dinâmica (antes da colisão) até a colisão são guardados, em sequência, nessa matriz que ao final do programa conterá todo o resultado da dinâmica do sistema.

Após obtermos \mathbf{q}_A e $\dot{\mathbf{q}}_A$ para cada colisão, queremos encontrar \mathbf{q}_E . Lembramos que \mathbf{q}_E é igual a \mathbf{q}_A .

Para cada modelo encontramos o valor de $\dot{\mathbf{q}}_E$; isto é, os valores de \dot{x}_E , \dot{y}_E e $\dot{\theta}_E$. Esse valores, junto com os valores de x_E , y_E e θ_E são os valores usados como novas condições iniciais para resolver a equação diferencial da dinâmica do sistema.

Como já dissemos, ao final do programa temos uma matriz contendo todos os valores obtidos da dinâmica do sistema. Para os gráficos usamos os valores da matriz.

O MATLAB não tem pacote específico para animação e assim tivemos que criar os algoritmos para animar os problemas. No caso da barra, unimos os pontos correspondentes às extremidades da barra em cada instante considerado. Para cada um desses instantes mostramos a barra e apagamos a anterior. O tempo de espera entre apagar uma posição e mostrar a outra é decidido dentro do programa. Podemos decidir a velocidade da animação;

isto é, se queremos mais lenta ou mais rápida. Tivemos a preocupação de diminuir o piscar-piscar ('flickering') da tela quando fazemos a animação, para isso, usamos algumas funções disponíveis no MATLAB e alguns artifícios não serão discutidos aqui.

O caso da colisão da bola contra duas paredes foi construído de forma análoga pois também havia apenas um ponto de contato.

No caso das três moedas o problema é um pouco diferente pois há dois pontos de colisão e a nossa maior preocupação na implementação foi a animação, pois em alguns casos a colisão ocorre simultaneamente em dois pontos e queremos conseguir isso na animação.

Além de todas as preocupações já citadas para a construção do programa em certos modelos tivemos que separar os programas em sub-programas, devido à sua complexidade. Essa preocupação, entretanto, acarreta novos problemas, tais como tomar cuidado com as variáveis a serem usadas pelos mesmos sub-programas de modo a não sobrecarregar a memória. Outros problemas tais como escolher a melhor forma de apresentar os gráficos, escolher as cores e as escalas, escolher a disposição das caixas de diálogos consomem tempo.

Decididamente construir um programa desse porte não é uma tarefa simples porém o resultado compensa. A estrutura dos modelos ficou bem melhor entendida assim como algumas dúvidas foram sanadas. A possibilidade de se implementar uma análise visual dos problemas de aderência, deslizamento progressivo e deslizamento reverso foi uma grande contribuição do programa.

Ter um programa construído desta forma permite que se faça um estudo de parâmetros, que ilustraremos na seção a seguir.

Uma das vantagens da construção de um programa de simulação usando uma interface gráfica é que podemos variar parâmetros dos modelos e comparar resultados a partir dessas variações. Mostramos nessa seção alguns dos resultados obtidos a partir de variações de alguns destes parâmetros. Como o modelo proposto é uma forma de generalização de alguns dos modelos discutidos, usaremos o modelo proposto e os casos particulares para tratar das variações desses parâmetros.

8 CONCLUSÕES

O objetivo foi estudar colisões de corpos rígidos considerando que a colisão é instantânea. À medida que íamos lendo a literatura ficava claro que faltava um trabalho de síntese, mesmo no caso de colisões planas. A relação entre os diferentes modelos da literatura não era clara e os livros disponíveis, ao nosso ver, não ajudavam em nada no esclarecimento. Decidimos então centrar o trabalho no estudo de colisões planas e fazer um estudo comparativo dos modelos, alguns deles que datam do século XVII e outros desenvolvidos após 1984. Fizemos um estudo sistemático que conduziu à formulação do modelo C-S que generaliza vários dos modelos da literatura e, dessa forma, permite compará-los. Foi também nossa preocupação discutir exemplos simples que apresentassem apenas os aspectos essenciais dos fenômenos em discussão e não casos bizarros cuja complexidade impedia o reconhecimento dos fatos básicos. Fizemos, também, comparações dos modelos mostrando como suas previsões diferiam quando tratamos do mesmo problema. Procuramos usar todas as ferramentas disponíveis que pudessem iluminar o problema de colisões: o tratamento dos exemplos simples já mencionados, simulações através de um programa por nós desenvolvido e que pode auxiliar na criação de novos modelos e o estudo matemático das soluções.

Já que não fizemos experimentos procuramos na literatura resultados que validassem os modelos tratados e consideramos que os resultados aqui discutidos mostram que os modelos são de fato úteis para simulação do processo de colisão em tempo real. Podemos aplicar esses resultados em Robótica, em problemas de dinâmica onde há folgas que ocasionam colisões e contato, etc.

Apesar dos avanços que julgamos ter feito, muito mais fica ainda por fazer, mesmo no caso do problema plano, como por exemplo, tratar do caso com mais de um ponto de colisão. O caso de colisões multi-corpos apresenta também uma problemática bem diferente que requer novos métodos de análise. O caso tridimensional é uma questão aberta e é um desafio para trabalhos futuros.

Finalmente consideramos que o trabalho feito é didático e pode ser usado como texto para o estudo de colisões planas.

Lista de Símbolos

índice A	indica pré-colisão
índice C	indica fim da fase de compressão
índice E	indica fim da fase de expansão ou pós-colisão
\dot{D}_N	Velocidade normal relativa
\dot{D}_T	Velocidade tangencial relativa
\dot{D}_θ	Velocidade angular relativa
$D(\dot{V})$	Taxa de deformação
I_N	Impulso normal
I_T	Impulso tangencial
I_θ	Impulso angular
$[M]$	Matriz de massa
$[M_L]$	Matriz local de massa
t	Símbolo de transposição
m	Massa do corpo
L	Comprimento da barra
x	Abcissa do centro de massa do corpo
y	Ordenada do centro de massa do corpo
θ	Orientação do corpo
\mathbf{q}	Vetor de coordenadas generalizadas
e_n	Coefficiente de restituição normal de Newton
e_{np}	Coefficiente de restituição normal de Poisson
e_b	Coefficiente de restituição normal de Beghin-Boulanger
e_t	Coefficiente de restituição tangencial
μ	Coefficiente de atrito
μ_0	Coefficiente de atrito estático
μ_s	Coefficiente de atrito crítico
e_m, e_{mC} e e_{mE}	Coefficientes de momento
\mathbf{r}	Força de colisão generalizada
\mathbf{R}	Força de reação na colisão
$[W]$	Matriz relacionando r com R
W_N e W_T	Colunas da matriz $[W]$
(N, T)	Base de colisão

Referências

- 1 P.E. Appel, *Traité de mécanique rationnelle*, Gauthier-Villars, Éditeur, (1953).
- 2 D. Baraff e A. Witkin, "Dynamic simulation of non-penetrating flexible bodies", *Computer Graphics*, Vol **26**, pp. 303-308, (1992).

- 3 J.A. Battle, "On Newton's and Poisson's rules of percussive dynamics", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. **60**, pp. 376-381, (1993).
- 4 J.A. Battle, "Rough balanced collisions", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. **63**, pp. 168-172, (1996).
- 5 H. Beghin, *Cours de Mécanique Théorique et Appliqué*, Tome I, Gauthier-Villars, Paris, pp. 457-483, (1997).
- 6 V. Bhatt e J. Koechling, "Classifying dynamic behavior during three dimensional frictional rigid body impact", *IEEE International Conference on Robotics and Automations*, IEEE Robotics and Automations Society, pp. 2342-2348, May, (1994).
- 7 V. Bhatt e J. Koechling, "Incorporating frictional impacts in dynamic simulations of planar multi link chains", in M.H. Hamza (Ed.), *Proceedings of the IASTED International Conference on Modelling and Simulation*, Pittsburgh, pp. 454-457, (1993).
- 8 V. Bhatt e J. Koechling, "Modeling 3-d frictional rigid body impact: Dealing with degenerative singularities", in M.H. Hamza (Ed.), *Proceedings of the IASTED International Conference on Modelling and Simulation*, Pittsburgh, pp. 5-8, (1993).
- 9 V. Bhatt e J. Koechling, "Partitioning the parameter space according to different behaviors during three-dimensional impacts", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. **62**, pp. 740-746, (1995).
- 10 V. Bhatt e J. Koechling, "Three-dimensional frictional rigid-body impact", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. **62**, pp. 893-898, (1995).
- 11 R. Bouc e M. Defilippi, "Multimodal nonlinear spectral response of a beam with impact under random input", *Prob. Eng. Mech.*, Vol. **12**, N^o. 3, pp. 163-170, (1997).
- 12 R.M. Brach, "Friction, restitution and energy loss in planar collisions", *Trans. of the ASME*, Vol. **51**, pp. 164, March, (1984).
- 13 R.M. Brach, *Mechanical impact dynamics - rigid bodies collisions*, John Wiley & Sons, New York, (1991).
- 14 R.M. Brach, "Rigid-body collisions", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. **56**, pp. 133-138, (1989).
- 15 B. Brogliato, *Nonsmooth impact mechanics: models, dynamics and control* (Lectures Notes in Control and Information Sciences), Berlin, Springer, (1996).
- 16 C.J. Budd, *The global behaviour of impact oscillators*, lecture presented at the NATO Advanced Study Institute on Real and Complex Dynamical Systems, Hillerod, Denmark, Univ. of Bristol Research Reports AM 93-09, (1993).
- 17 C.J. Budd e F. Dux, "Chattering and related behaviour in impact oscillators", *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, pp. 365-389, (1994).
- 18 C.J. Budd e F. Dux, "Intermittency in impact oscillators close to resonance", *Nonlinearity*, **7**, pp. 1191-1224, (1994).
- 19 C.J. Budd e A.G. Lee, "Double impact orbits of a single-degree-of-freedom impact oscillators subject to periodic forcing of odd frequency", preprint, (1995).
- 20 E. Cataldo e R. Sampaio, "Collision between rigid bodies - comparing some models", *Anais do International Symposium on Impact and Friction of Solids, Structures and Intelligent Machines: Theory and Applications in Engineering and Science*, Ottawa, Ontario - Canadá, (1998).
- 21 E. Cataldo e R. Sampaio, "Comparação entre modelos de colisão de corpos", *Anais do VIII Congreso de Ingeniería Mecánica*, Chile, pp. 345-348. (1998).

- 22 E. Cataldo e R. Sampaio, “Comparing some models of collisions between rigid bodies”, Anais do *PACAM VI/DINAME*, Rio de Janeiro, (1999).
- 23 E. Cataldo e R. Sampaio, “Modelos de colisão entre corpos rígidos: uma visão crítica”, apresentado no *IV CIDIM, IV Congresso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica*, Chile, Novembro, (1999).
- 24 E. Cataldo e R. Sampaio, “Uma análise crítica de modelos de colisão entre corpos”, apresentado no *COBEM99, Águas de Lindóia*, Novembro, (1999).
- 25 E. Cataldo e R. Sampaio, “A brief review and a new treatment for rigid bodies collision models”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, Vol. **XXIII**, N° 1, pp. 63-78, (2001).
- 26 E. Cataldo e R. Sampaio, “A new model of rigid bodies collision: the C-S model”, *Computational e Applied Mathematics*, Vol. **19**, N° 3, pp. 349-362, (2001).
- 27 E. Cataldo e R. Sampaio, “Comparación entre modelos de colisión de cuerpos”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **17**, N° 2, pp. 149-168, (2001).
- 28 A. Chatterjee, *Rigid body collisions: some general considerations, new collision laws, and some experimental data*, Tese de doutorado, Cornell University, USA, (1997).
- 29 C. Cholet, *Chocs de solides rigides*, Tese de doutorado em Matemática, Université Paris VI, França, (1998).
- 30 H. Cohen e G.P. Mac Sithigh, “Impulsive motions of elastic pseudo-rigid bodies”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. **58**, pp. 1042-1048, (1991).
- 31 G. Coriolis, *Théorie mathématique du jeu de billard*, (1835).
- 32 G. Darboux, “Études géométriques sur les percussions et les choc des corps”, *Bulletin des Sciences Math.*, pp. 126-160, (1880).
- 33 K. Deimling, “Resonance and Coulomb friction”, *Diff. Int. Equ.*, pp. 759-765, (1994).
- 34 E. Delassus, “Mémoire sur la théorie des liaisons finies unilatérales”, *Ann. Sci. École Normale Sup.*, Vol. **34**, pp. 95-179, (1917).
- 35 A. Dontchev e F. Lempio, “Difference methods for differential inclusions: a survey”, *SIAM*, Vol. **34**, pp. 263-294, (1992).
- 36 S. Durand, *Dynamique des systèmes à liaisons unilatérales avec frottement sec*, Tese de doutorado, L'École Nationale des Ponts et Chaussées, (1996).
- 37 M. Fandrich e C. Hogue, “An experimental study of rigid body impacts”, *Contact Mechanics*, pp. 389-396, (1995).
- 38 B.F. Feeny, *A nonsmooth Coulomb friction oscillator*, Phys. D, pp. 25-38, (1992).
- 39 B.F. Feeny e J.W. Liang, “Phase-space reconstructions and stick-slip”, *Nonlinear Dynam.*, pp. 39-57, (1997).
- 40 B.F. Feeny e F.C. Moon, “Autocorrelation on symbol dynamics for a chaotic dry-friction oscillator”, *Phys. Lett. A*, pp. 397-400, (1989).
- 41 A.A. Ferri e E.H. Dowell, “Frequency domain solutions to multi-degree-of-freedom, dry friction damped systems”, *J. Sound Vibration*, Vol. **124**, pp. 206-224, (1988).
- 42 A.F. Filipov, *Differential equations with discontinuous right-hand sides*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht-Boston-London, (1988).

- 43 S. Foerster, M. Louge e H. Chang, "Measurements of the collision properties of small spheres", *Phys. Fluids*, Vol. **6**, pp. 1108-1115, (1994).
- 44 M. Frémond, "Collision of a wedge with a plane", Laboratoire des matériaux et des structures du génie civil, 1a ser publicado na *Revista de Matemática Aplicada da SBMAC*, (1998).
- 45 M. Frémond, "Collisions of rigid bodies", *Contact Mechanics*, Edited by M. Raous *et al.*, Plenum Press, New York, pp. 397-404, (1995).
- 46 M. Frémond, "Rigid bodies collisions", *Physics letters A 205*, pp. 33-41, (1995).
- 47 C. Glocker, *Dynamik von Starrkörpersystemen mit Reibung und Stößen*, Tese de Dr.Ing. da Universidade Técnica de Munique, Alemanha, Julho, (1995).
- 48 C. Glocker e F. Pfeiffer, "An LCP approach for multibody systems with planar friction", *Proc. International Symposium on Contact Mechanics*, Lausanne, pp. 13-30, (1992).
- 49 C. Glocker e F. Pfeiffer, "Complementary problems in multibody systems with planar friction", *Arch. Appl. Mech.*, pp. 452-463, (1993).
- 50 C. Glocker e F. Pfeiffer, "Dynamical systems with unilateral contacts", *Nonlinear Dynamics*, Vol. **3**, pp. 245-259, (1992).
- 51 C. Glocker e F. Pfeiffer, "Multiple impacts with friction in rigid multibody systems", *Nonlinear Dynamics*, pp. 471-497, (1995).
- 52 C. Glocker e F. Pfeiffer, "Stick-slip phenomena and applications", *Nonlinearity and Chaos in Engineering Dynamics*, London, pp. 103-113, (1993).
- 53 W. Goldsmith, *Impact: The theory and physical behaviour of colliding solids*, Edwards Arnold Ltd, London, (1960).
- 54 M. Hajek, *Reibungsdämpfer für Turbinenlaufschaufeln*, Fortschr. -Ber VDI, Reihe 11, Nr. 128, Düsseldorf, VDI Verlag, (1990).
- 55 G. Hamel, "Bemerkungen zu den vorsehenden Aufsätzen der Herren F. Klein und R.V. Mises", *Zeitsch Math. Phys.*, Vol. **58**, pp. 195-196, (1910).
- 56 I. Han e J.B. Gilmore, "Multi-body impact motion with friction - analysis, simulation and experimental validation", *Transactions of the ASME*, Vol. **115**, pp. 412-422, (1993).
- 57 E.J. Hang, S.C. WU e S.M. Yang, "Dynamics and mechanical systems with coulomb friction, stiction, impact and constraint addition-deletion-I, theory - II: planar Systems", *Mechanisms and Machine Theory*, Vol. **21**, N° 5, pp. 401-416, (1986).
- 58 H. Hertz, "Über die Berührung fester elastischer Körper", *Journal für die reine und angewandte Mathematic*, Vol. **92**, pp. 156-171, (1882).
- 59 N. Hinrichs, M. Oestrich e K. Popp, "Friction induced vibrations: experiments, modelling and analysis", Proceedings of *DETC'97, ASME Design Engineering Technical Conferences*, Sept. 14-17, Sacramento, California, VIB 3908, (1997).
- 60 N. Hinrichs, M. Oestreich e K. Popp, "Dynamics of oscillators with impact and friction", *Chaos, Solutions & Fractals*, Vol. **8**, N° 4, pp. 535-558, (1997).
- 61 A.P. Ivanov, "On multiple impact", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. **59**, pp. 887-902, (1995).
- 62 A.P. Ivanov, "The problem of constrained impact", *Prikl. Mat. Mekh.*, Vol. **61**, N° 3, pp. pp. 355-368, (1997).
- 63 J. Jaeger, *Analytical solutions of contact impact problems*, (1994).

- 64 M. Jean, "Dynamics of rigid bodies with dry friction and partially elastic collisions", *Unilateral problems in structural analysis IV*, Capri, pp. 57-70, (1989).
- 65 M. Jean, "Unilateral contact with dry friction: time and space discrete variables formulation", *Arch. Mech.*, Vol. **40**, pp. 677-691, (1989).
- 66 M. Jean e E. Pratt, "A system of rigid bodies with dry friction", *Int. J. Engrg. Sci.*, Vol. **23**, pp. 497-513, (1985).
- 67 M. Jean e J.J. Moreau, "Unilaterality and dry Friction in the dynamics of rigid body collisions", *Proc. Contact Mechanics International Symposium*, Lausanne, pp. 31-48, (1992).
- 68 K.L. Johnson, *Contact mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, (1996).
- 69 T.R. Kane, "Dynamics of nonholonomic systems", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. **28**, *Trans. ASME*, Vol. **83**, Series E, pp. 574-578, (1961).
- 70 T.R. Kane, *A dynamic puzzle*, Stanford Mechanics Alumni Club Newsletter, pp. 6, (1984).
- 71 J.B. Keller, "Impact with friction", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. **53**, pp. 1-4, (1986).
- 72 C.W. Kilmister e J.E. Reeve, *Rational mechanics*, Longmans, London, (1966).
- 73 M.E. King e G. Sandri, "Dynamics of distributed impact dampers", *Proceedings of DETC'97, 1997 ASME Design Engineering Technical Conferences*, Sept. 14-17, Sacramento, California, (1997).
- 74 F. Klein, "Zu Painlevés kritik des Coulombschenreibungsgestze", *Zeitsch Math. Phys.*, Vol. **58**, pp. 186-191, (1910).
- 75 H. Lamba, *Impacting oscillators and non-smooth dynamical systems*, Ph.D. thesis, University of Bristol, (1993).
- 76 H.M. Lankarani e P.E. Nikravesh, "A contact force model with hysteresis damping for impact analysis of multibody systems", *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. **112**, pp. 369-376, (1990).
- 77 T. Levi-Civita e U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Vol. **II**, Part II, Nicola Zanichelli, Bologna, (1937).
- 78 A.D. Lewis e R.J. Rogers, "Experimental and numerical study of forces during oblique impact", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **25**, pp. 403-412, (1988).
- 79 P. Lötstedt, "Coulomb friction in rigid body systems", *Z. Angew. Math. Mech.*, pp. 605-615, (1981).
- 80 P. Lötstedt, "Mechanical systems of rigid bodies subject to unilateral constraints", *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. **42**, N° 2, pp. 281-296, (1982).
- 81 P. Lötstedt, "Time-dependent contact problems in rigid body mechanics", *Nondifferential and Variational Techniques in Optimization*, Lexington, Ky., Math. Programming Stud., pp. 103-110, (1980).
- 82 G.P. Mac Sithigh, "Rigid-body impact with friction - various approaches compared", R.C. Batra, A.K. Mal, and G.P. Mac Sithigh (Eds.), *Impact, Waves and Fracture*, pp. 307-317. ASME, AMD, Vol. **205**, (1995).
- 83 D.B. Marghitu, "Frictional impact of an elastic body", *Design Engineering Technical Conferences*, Vol. **3**, Part A, ASME, (1995).
- 84 M.T. Mason e Y. Wang, "Modelling impact dynamics for robotic operations", *Proc. of IEEE, Int. Conf. on Robotics and Automations*, pp. 678-685, (1987).

- 85 M.T. Mason e Y. Wang, “Two-dimensional rigid-body collisions with friction”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. **59**, pp. 635-642, (1992).
- 86 M.C. Mattos, *Alterações na dinâmica de sistemas com vibroimpacto devidas a variações na folga*, Tese de doutorado defendida na UNICAMP, Junho, (1998).
- 87 A. Mayer, “On the collision of two bodies with consideration of sliding and friction”, *Berichte über die verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, Vol. **54**, pp. 208-243, (1902).
- 88 N. Maw, J.R. Barber e J.N. Fawcett, “The role of elastic tangential compliance in oblique impact”, *Journal of Lubrication Technology*, Vol. **103**, pp. 74-80, (1981).
- 89 R.D. Mindlin e H. Deresiewicz, “Elastic spheres in contact under varying oblique forces”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. **75**, pp. 327-344, (1953).
- 90 R.V. Mises, “Zur kritik des Reibungsgesetze”, *Zeitsch Math. Phys.*, Vol. **58**, pp. 191-195, (1910).
- 91 M.D.P. Monteiro Marques, *Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems. Shocks and dry friction*, Birkhauser, Boston, (1993).
- 92 D.B. Moore e S.W. Shaw “The experimental response of an impacting pendulum system”, *Int. J. Nonlinear Mech.*, Vol. **25**, N° 1, pp. 1-16, (1990).
- 93 J.J. Moreau, “Nonsmooth mechanics and applications, chapter: Unilateral contact and dry Friction in finite freedom dynamics”, *CISM Courses and Lectures*, Springer-Verlag, Wien-New York, (1988).
- 94 J.J. Moreau, “Some numerical methods in multibody dynamics: application to granular material”, *European J. Mech. A Solids*, Vol. **13**, pp. 93-114, (1994).
- 95 J.J. Moreau, “Application of convex analysis to some problems of dry friction”, *Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics*, Vol. **II**, Second Sympos., Kozubnik 1977, Pitman, Boston, pp. 263-280, (1979).
- 96 J. Newmann, *Die Dynamik starrer Körper in ebenen Systemen mit Coulombscher Reibung*, Diplomarbeit, Universität Köln, (1995).
- 97 I. Newton, *Philosophia naturalis principia mathematica*, London, (1686).
- 98 A.B. Nordmark, “Effects due to low velocity impact in mechanical oscillators”, *Int. J. Bifur. Chaos, Appl. Sci. Engrg.*, Vol. **2**, pp. 597-605, (1992).
- 99 P. Painlevé, *Leçons sur le frottement*, Hermann, Paris, (1895).
- 100 P. Painlevé, “Sur les lois de frottement de glissement”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. **121**, pp. 112-115, Vol. **141**, pp. 401-405, Vol. **141**, pp. 546-552, (1905).
- 101 P.D. Panagiotopoulos e H. Antes, *The boundary integral approach to static and dynamic contact problems*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, (1992).
- 102 J.S. Pang, I. Kaneko e W.P. Hallman, *On the solution of some (parametric) linear complementarity problems with applications to portfolio selection, structural engineering and actuarial graduation*, (1979).
- 103 J. Pérès, *Mécanique Générale*, Masson et Cie, Éditeurs, (1962).
- 104 J. Pérès, “Choc de deux solides avec frottement”, *Nouvelles Annales de Math.*, Col. 2, pp. 216-231, (1924).
- 105 J. Pérès, “Choc en tenant compte du frottement”, *Nouvelles Annales de Math.*, 5th Section, Vol. **II**, pp. 98-108; pp. 216-231, (1924).

- 106 F. Pfeiffer, "Complementary problems of stick-slip vibrations", *Dynamics and Vibrations of Time-Varying Systems and Structures ASME*, pp. 43-50, (1993).
- 107 F. Pfeiffer "Dynamical systems with impact and stick-slip Phenomena", *CSME Mechanical Engineering Forum*, Toronto, Canadá, , (1990).
- 108 F. Pfeiffer, "Dynamical systems with time-varying or unsteady structure", *Z. Angew. Math. Mech.*, T6-T22.
- 109 F. Pfeiffer, F. (1992), "On stick-slip vibrations in machine dynamics", *Machine Vibrations*, pp. 20-28.
- 110 Pfeiffer, "An LCP-approach for multibody systems with planar friction", *Proc. Contact Mechanics International Symposium*, Lausanne, pp. 13-30, (1992).
- 111 F. Pfeiffer, "Mechanische Systeme mit un stetigen Übergängen", *Ingenieur-Archiv 54*, **4**, pp. 232-240, (1984).
- 112 F. Pfeiffer e C. Glocker, "Impacts with friction", *J. Appl. Mech.*, Vol. **53**, pp. 1-4, (1986).
- 113 F. Pfeiffer e C. Glocker, *Multibody dynamics with unilateral contacts*, John Wiley & Sons, New York, (1996).
- 114 E. Phillips, "Sur les changements instantanés de vitesse qui ont lieu dans um système de points matériels", *J. de Math Pures et Appliquées*, TOME XIV, pp. 300-336, (1846).
- 115 V.Y. Plyavniyeks, "Three-dimensional collision of two bodies", *Vopr. Dinamiki i Prochnosti*, Vol. **20**, pp. 75-88, (1970).
- 116 S.D. Poisson, *Traité de mécanique*, Paris, (1833).
- 117 K. Popp, N. Hinrichs, M. Oestreich e C.J. Budd, "Analytical and Experimental investigation of an impact oscillator", *Proceedings of DETC'97, ASME Design Engineering Technical Conferences*, Sept. 14-17, Sacramento, Califórnia, (1997).
- 118 L. Prandtl, "Bemerkungen zu den Aufsätzen der Herrer F. Klein, R. V. Mises und G. Hamel", *Zeitsch Math. Phys.*, Vol. **58**, pp. 196-197, (1910).
- 119 M. Raous, M. Jean e J.J. Moreau, *Contact Mechanics*, Plenum Press, New York and London, (1994).
- 120 R. Riquelme e R. Sampaio, "Una simulación de choque plano", *Anais do 8o. Congresso Chileno de Ingeniería Mecánica*, Concepción - Chile, Vol. **I**, pp. 497-502, (1998).
- 121 E.J. Routh, *An elementary treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*, 3rd edition, Mac Millan and Co, London, UK, (1877).
- 122 E.J. Routh, *Dynamics of a system of rigid bodies* , 7th edition, Dover Publications, Inc., New York, (1960).
- 123 R. Sampaio e M.H. Tavares, "Colisão em sistema de multicorpos rígidos", RBCM, *Journal of the Braz. Soc. Mechanical Sciences*, Vol. **XX**, N° 1, pp. 116-125, (1998).
- 124 G. Schweitzer e M. Fumagalli, *Contact models for rotor/stator interaction*, (1995).
- 125 W. Seyfferth e F. Pfeiffer, "Dynamics of assembly processes with a manipulator", *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, Vol. **2**, pp. 1303-1310, (1992).
- 126 A.A. Shabana, *Dynamics of Multibody Systems*, John Wiley & Sons, Inc. New York, (1998).
- 127 S.W. Shaw, "On the dynamic response of a system with dry friction", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **108**, pp. 305-325, (1986).

- 128 A. Sinopoli, "Unilaterality and dry friction: a geometric formulation for two-dimensional rigid body dynamics", *Nonlinear Dynam.*, pp. 343-36, (1997).
- 129 C.E. Smith e P.P. Liu, "Coefficients of restitution", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. **59**, pp. 963, December, (1992).
- 130 C.E. Smith, "Prediction rebounds using rigid-body dynamics", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. **58**, pp. 754-758, (1991).
- 131 R. Sondergaard, K. Chaney e C.E. Brennen, "Measurements of solids spheres bouncing off flat plates", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. **57**, pp. 694-699, (1990).
- 132 R. Souchet, "An analysis of three-dimensional rigid body collisions with friction by means of a linear integral equation of Volterra", Accepted for publication in *Int. J. Engin. Science*, (1998).
- 133 R. Souchet, "Restitution and friction laws in rigid bodies collisions", *Int. J. Engin. Science*, Vol. **32**, N° 5, pp. 863-876, (1994).
- 134 P. Stelter, "Nonlinear vibrations of structures induced by dry friction", *Nonlinear dynamics*, Vol. **3**, pp. 329-345, (1992).
- 135 D.E. Stewart, "A numerical method for friction problems with multiple contacts", *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, pp. 288-308, (1996).
- 136 D.E. Stewart e J.C. Trinkle, "Dynamics, friction, and complementarity problems, complementarity and variational problems", *SIAM*, pp. 425-439, Philadelphia, (1997).
- 137 D. Stoianovici e Y. Hurmuzlu, "A critical study of the applicability of rigid-Body collision theory", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. **63**, pp. 307-316, (1996).
- 138 J.L. Streater, "Micro-scale simulation of adhesive effects during normal impact", *Proceedings of DETC'97, ASME Design Engineering Technical Conferences*, VIB 3914, (1997).
- 139 W.J. Stronge, "Friction in collisions: resolution of a paradox", *Journal of Applied Physics*, Vol. **69**, pp. 610-612, (1991).
- 140 W.J. Stronge, "Planar impact of rough compliant bodies", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. **15(4)**, pp. 435-450, (1994).
- 141 W.J. Stronge, "Rigid body collisions with friction", *Proceedings of the Royal Society of London A*, Vol. **431**, pp. 169-181, (1990).
- 142 W.J. Stronge, "Swerve during three-dimensional impact of rough bodies", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. **61**, pp. 605-611, (1994).
- 143 W.J. Stronge, "Unraveling paradoxical theories for rigid body collisions", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. **58**, pp. 1049-1055, (1991).
- 144 D. Szwedwicz, e C.A. Sotelo, "Updating of impact models for vibrating cantilever beams", *Proc. of DETC'97*, Sept. 14-17, Sacramento, Califórnia, (1997).
- 145 S. Timoshenko, *Theory of elasticity - longitudinal waves in uniform bars*, Theory of Elasticity, capítulo sobre *Longitudinal Waves in Uniform Bars*, pp. 493-505, (1937).
- 146 H.M. Tavares, *Modelagem e simulação numérica de sistemas dissipativos com número finito de graus de liberdade*, Tese de Doutorado apresentada em Junho no Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio, (1994).
- 147 A.A. Ten Dam, *Unilaterally constrained dynamical systems*, Ph. D. dissertation, University Groningen, The Netherlands, (1997).
- 148 A.I. Vol'pert e S.I. Hudjaev, *Analysis in classes of discontinuous functions and equations of mathematical physics*, Martinus Nijhoff publisher, Dordrecht, (1985).

- 149 L.K. Vy e D.D. Ang, "Frictional contact of an elastic body with a rigid support", *Nonlinear Anal.*, pp. 339-343, (1995).
- 150 J. Wallis, *Numerical simulation of inelastic, frictional particle-particle interactions. Particulate two-phase flow*, Butterworth-Heinemann, (1992).
- 151 J. Wallis, *Phil. Trans.*, Vol. **43**, pp. 864, (1968).
- 152 O.R. Walton, *Numerical simulation of inelastic, frictional particle-particle interactions. Particulate two-phase flow*, Butterworth-Heinemann, (1992).
- 153 G.S. Whiston, "The vibro-impact response of a harmonically excited an preloaded one-dimensional linear oscillator", *J. Sound Vib.*, Vol. **115**, pp. 303-319, (1987).
- 154 E.T. Whittaker, *A Treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Dover, New York, 4th. edition, (1944).
- 155 C. Wren, *Phil. Trans.*, Vol. **43**, pp. 867, (1668).
- 156 A.S. Yigit e A.P. Christoforou, "Effect of flexibility in transverse impact problems", *Proceeding of DETC'97, ASME, Design Engineering Technical Conferences*, Sept. 14-17, Sacramento, California, VIB4208, (1997).
- 157 Z. Zhong e M. Jaroslavl, "Contact-impact problems: a review with bibliography", *Mechanics of Contact Impact*, edited by Miloslav Okrouhlik, *Appl. Mech.*, Vol. **47**, pp. 2, Feb, (1994).