

# 11

## Análisis numérico de la reparación y refuerzo de estructuras con *FRP*

**Sergio Oller, Maritzabel Molina, Juan Carlos Vielma, Xavier Martínez, Alex H. Barbat y Liz Nallim**

**Resumen** En este capítulo se presenta un procedimiento para evaluar la magnitud del daño local y el daño global en estructuras sometidas a acciones estáticas y dinámicas, con especial énfasis en el problema sísmico. Además de la formulación para la evaluación del daño, se introduce el concepto de refuerzo y reparación estructural mediante laminados compuestos de matriz epóxica con refuerzo de fibras de carbono. Para esta finalidad, se menciona la utilización de la teoría de mezclas para componer un material compuesto a partir de sus componentes básicas. También se evalúa el daño en estas estructuras reforzadas y/o reparadas y se comenta la influencia de estas mejoras en la valoración del daño global de la estructura.

### 11.1. Introducción al comportamiento no lineal de las estructuras y valoración del estado de daño

En este capítulo se presenta una descripción metodológica que permite evaluar el daño global en estructuras de hormigón armado sometidas a acciones estáticas/dinámicas. Primeramente se define el estado de daño local de un punto de la estructura, al estado mecánico que resulta luego que este inicie un proceso no lineal disipativo provocado por diversos mecanis-

---

**Sergio Oller, Xavier Martínez y Alex H. Barbat**

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)

Universitat Politècnica de Catalunya - BarcelonaTech, C/ Gran Capitán s/n, Ed. C1, 08034 Barcelona, España

*e-mail:* sergio.oller@upc.edu

**Maritzabel Molina**

Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

**Juan Carlos Vielma**

Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado (UCLA), Barquisimeto, Venezuela

**Liz Nallim**

Universidad Nacional de Salta (UNSa), Av. Bolivia 5150, 4400 Salta, Argentina

DOI: [10.3926/oms.209](https://doi.org/10.3926/oms.209) • Omnia Publisher, 2014

mos internos (pérdida de resistencia por efecto de la degradación de rigidez, por incremento de deformaciones irreversibles, por fatiga cíclica, etc.). A partir del concepto de daño local en un punto del sólido, se deduce por extensión el índice de daño global estructural [6].

En esta descripción metodológica que aquí se presenta, se utiliza la técnica de elementos finitos para aproximar el campo de desplazamientos y a partir de él obtener el estado de deformación con los que se calculará el correspondiente estado de tensión en cada punto de la estructura. La formulación es general y se puede utilizar en estructuras tridimensionales, bidimensionales y elementos estructurales de láminas y barras. En los elementos estructurales se utiliza una formulación apropiada para placas de Reissner-Mindlin [37] y barras Timoshenko [37] subdivididos en capas entrecruzadas (fibras en las vigas). Esto permite obtener los estados tensionales elástico predictivo en cada punto de la estructura y a partir de ellos utilizar un modelo constitutivo formulado en tensión-deformación para obtener el correcto estado tensional del punto. Esta forma de trabajar permite incluir cualquier fenómeno mecánico que acerque más la simulación numérica a la realidad del problema (plasticidad, degradación de rigidez, problemas viscosos, etc.).

En otros trabajos ya publicados por los autores [1, 2, 7, 27], se ha desarrollado una metodología de simulación del daño ocurrido en estructuras de hormigón armado durante terremotos. Dicha metodología se apoyaba en un modelo constitutivo de degradación isótropo [22], que derivaba de la teoría de Kachanov [8]. En aquellos trabajos, se entiende por daño el grado de degradación estructural -pérdida de rigidez- y se caracteriza por un índice escalar normalizado que varía entre  $0 \leq d \leq 1$ , según el material esté en estado virgen o totalmente degradado sin resistencia residual, respectivamente.

En este trabajo, se extiende dicho concepto con la finalidad de que este índice pueda incluir otros fenómenos disipativos como la plasticidad y la degradación a la vez, permitiendo un mejor acercamiento al concepto de deterioro en un punto de la estructura. Este índice más general, basado en la normalización de fuerza residual no equilibrada, preserva la definición del índice de daño local con la misma objetividad que se ha propuesto en trabajos previos [1, 2, 7, 27], es decir, como un escalar acotado entre cero y uno que permite definir el estado del punto desde no dañado a totalmente dañado, respectivamente.

## 11.2. Introducción a la simulación numérica de estructuras de hormigón armado. Enfoque conceptual

Las estructuras de hormigón simple y también las reforzadas con acero (hormigón armado) y con FRP (*Fiber Reinforced Polymer*), están conformadas por un material compuesto de más de un material simple (matriz: cemento más agregado pétreo, refuerzo: acero y/o FRP). Estas estructuras tienen un comportamiento inicial elástico hasta que algún material componente del compuesto supere el correspondiente umbral de resistencia, instante en que se inicia el comportamiento no lineal de dicho componente, induciendo también al compuesto a un comportamiento no lineal. De esta manera, si algún punto de la matriz de hormigón supera el umbral de resistencia definido en mecánica por alguna función de discontinuidad (por ejemplo Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, etc.), entra en un estado de micro fractura y posterior

coalescencia que luego conduce a macro fracturas. Simultáneamente el acero, por condiciones de compatibilidad limitada (estado de comportamiento conjunto entre los dos materiales), continúa con un proceso de comportamiento elástico con posterior deslizamiento incompatible respecto de la matriz de hormigón. De mantenerse la sollicitación monótona creciente, el acero podría superar su umbral de discontinuidad (von Mises) y alcanzar un comportamiento plástico. Esta diversidad de comportamiento entre los materiales componentes (matriz de hormigón y refuerzo de acero y/o FRP), que coexisten inicialmente en un estado elástico con movimientos compatibles, pierden luego dicha compatibilidad y se produce un deslizamiento relativo entre los materiales componentes adyacentes. Esta diversidad de comportamiento no lineal en cada material y en su interfaz resulta muy difícil de representar mediante una única ley constitutiva. En tal sentido, en este capítulo se muestra un procedimiento general basado en la mecánica de medios continuos y en técnicas numéricas, que permiten abordar el complejo comportamiento de los materiales compuestos en general y en particular el hormigón armado.

Las bases conceptuales de este trabajo se asientan en la modelización constitutiva de cada simple material componente, que luego participará en el tratamiento de composición del material compuesto mediante la teoría de mezclas de sustancias básicas [26]. No obstante, estas dos formulaciones mecánicas permiten abordar gran parte de este complejo problema, siendo también necesario completar la formulación incluyendo la anisotropía de los materiales componentes. Este es el caso del acero, cuyo comportamiento es isotrópico, pero su utilización en forma de barras de refuerzo hace que su comportamiento fenomenológico resultante sea ortótropo uniaxial en la dirección que está orientada la barra.

Con base en lo antes mencionado, es importante notar que gran parte del acierto en la respuesta del material compuesto, comienza por una buena representación del comportamiento básico de cada material componente a través de adecuados modelos constitutivos. Son estos modelos no lineales, junto con el correspondiente a la interfaz entre los materiales componentes, los que inducen los cambios de comportamiento en el compuesto, pasando de la linealidad a la no linealidad.

La no linealidad se manifiesta a través de una falta de equilibrio en la estructura global ( $\Delta \mathbf{f}$ , fuerza residual no equilibrada), como consecuencia de que algunos materiales componentes que integran la estructura, no pueden soportar los estados tensionales a los que se encuentran sometidos. Esto se puede formalizar en la siguiente ecuación de equilibrio dinámico en un cierto instante del proceso mecánico:

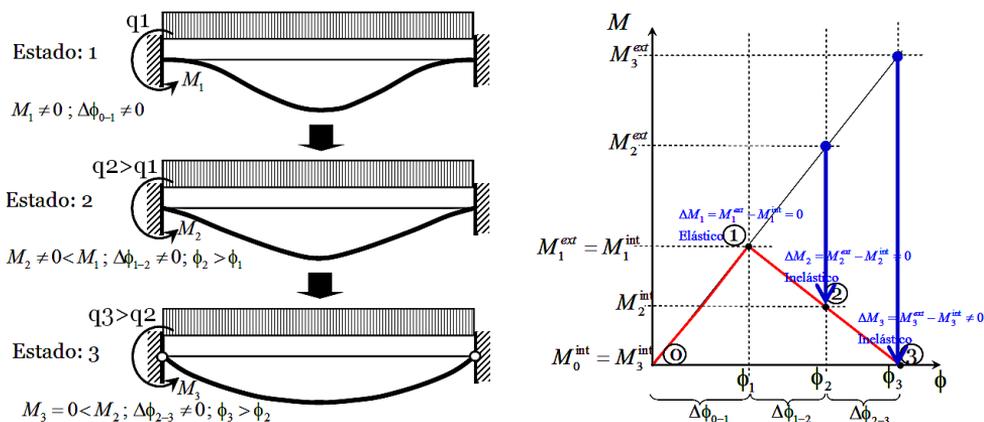
$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}^{mas} (\ddot{\mathbf{U}}, t) + \mathbf{f}^{int} (\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, t) - \mathbf{f}^{ext} (t) = 0 \quad (11.1)$$

donde  $\mathbf{f}^{mas} (\ddot{\mathbf{U}}, t) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t)$  es la fuerza másica o inercial que depende de la masa y la aceleración  $\ddot{\mathbf{U}}$  de cada punto.  $\mathbf{f}^{int} (\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, t) = \mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \int_V \boldsymbol{\sigma} \nabla^S \mathbf{N}(x, y, z) dV$  es la fuerza interior que considera la rigidez  $\mathbf{K}$  y la amortiguación estructural  $\mathbf{D}$ , que actúan respectivamente sobre el desplazamiento  $\mathbf{U}$  y la velocidad  $\dot{\mathbf{U}}$  de cada punto de la estructura.  $\boldsymbol{\sigma} = \sum_c k_c \boldsymbol{\sigma}_c$  es la tensión desarrollada en un punto del sólido para cada componente  $c^{esima}$  y  $\mathbf{N}(x, y, z)$  es la función de forma o de interpolación local (MEF). Por último  $\mathbf{f}^{ext} (t)$  es la fuerza exterior o acción sollicitante que actúa en el mismo tiempo  $t$  que las fuerzas antes mencionada.

El desequilibrio que se manifiesta en la ecuación 11.1, se elimina mediante una redistribución del comportamiento de los puntos vecinos al que ha incurrido en el campo no lineal. Esta redistribución deberá conseguirse bajo un estado de deformación estructural compatible que desarrolle unas nuevas fuerzas interiores capaces de reequilibrar la estructura. Este supuesto de convergencia hacia el equilibrio no siempre tiene solución, pues es posible que no se pueda alcanzar un estado de equilibrio compatible que equilibre la acción impuesta con las fuerzas interiores (véase ecuación 11.1 y Figura 11.3).

Como puede verse en la representación esquemática de la Figura 11.1, en el grado de libertad correspondiente al empotramiento izquierdo de la viga biempotrada, el momento solicitante  $M^{ext}$  no puede ser equilibrado ( $M^{ext} - M^{int} = \Delta M \neq 0$ ) por el momento interior  $M^{int} = \int_A \sigma z dA$  desarrollado en la sección transversal  $A$  por las tensiones interiores  $\sigma$ . Esto suele ocurrir porque la resistencia del material no es ilimitada y las tensiones desarrolladas superan el umbral de discontinuidad elástica ( $f(\sigma) - f_y \geq 0$ ), conduciendo a la aparición de micro fisuras y la posterior relajación de la tensión hasta cumplir con la capacidad límite del material  $f(\sigma) - f_y = 0$ . En el proceso de relajación y redistribución tensional, la estructura cambia su configuración cinemática, pasando de un giro  $\phi_i$  a otro  $\phi_i + \Delta\phi_i$ , hasta alcanzar una nueva condición de equilibrio  $\Delta M$ . Esta búsqueda de la solución compatible y equilibrada se consigue mediante el procedimiento de Newton-Raphson. Es decir, admitido el desequilibrio  $\Delta M(t)$ , esto es:

$$\Delta M(t) = M^{mas}(t) + M^{int}(t) - M^{ext}(t) \neq 0 \tag{11.2}$$



**Figura 11.1:** Representación esquemática del procedimiento de Newton-Raphson para tratar el comportamiento no lineal de un grado de libertad rotacional de una estructura biempotrada.

Se intenta a continuación eliminar el residuo  $\Delta M(t)$  en el tiempo  $t$ , mediante la linealización en serie de Taylor de esta ecuación, truncada en la primera variación,

$$\Delta M_{i-1}(t) + \underbrace{\frac{\partial [\Delta M_i(t)]}{\partial \phi}}_{K_i(t)} \Delta \phi_i = 0 \Rightarrow \Delta \phi_i = -K_i(t) \Delta M_{i-1}(t) \tag{11.3}$$

de donde resulta el incremento de giro  $\Delta\phi_i$ , habitualmente denominado giro en la rótula plástica, aunque no necesariamente tenga alguna relación con el conocido fenómeno de plasticidad.

En esta ecuación,  $K_i(t)$  es la rigidez en el tiempo  $t$ , iteración de equilibrio  $i^{sima}$ , correspondiente al grado de libertad rotacional del apoyo izquierdo y  $\Delta M_{i-1}(t)$  es la fuerza residual en el paso anterior.

En la resolución general (véase sección 11.3), este procedimiento se aplica a todos los grados de libertad a la vez, resultando la ecuación de equilibrio no lineal mostrada en la ecuación 11.1. La solución de la misma mediante linealizaciones sucesivas (Newton-Raphson) [23, 37] se muestra en la Figura 11.2.

### 11.3. Ecuación de equilibrio dinámico y linealización del problema no lineal

La ecuación de equilibrio dinámico de un sólido discreto sometido a acciones externas variables en el tiempo, puede obtenerse directamente a partir de la Primera Ley de la Termodinámica [9, 10, 13]. A partir de los conocimientos previos sobre el método de los elementos finitos que se considera tiene el lector [37], puede escribirse la ley de conservación en la siguiente forma [23, 27],

$$\int_V \sigma_{ij} \nabla_i^S \dot{u}_j dV = \oint_S t_i \dot{u}_i dS + \int_V \rho b_i \dot{u}_i dV - \int_V \rho \dot{u}_i \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} dV \quad (11.4)$$

donde  $t_i$  es la fuerza de superficie aplicada sobre el contorno  $S$ , (siendo  $t_i = \sigma_{ij} n_j$ , tal que  $\sigma_{ij}$  es el tensor de tensiones de Cauchy y  $n_j$  el vector normal a la superficie  $S$  que envuelve el sólido);  $b_i$  las fuerzas de volumen por unidad de masa;  $\rho = \partial M / \partial V$  la densidad de masa, siendo  $M$  la masa y  $V$  el volumen;  $v_i = du_i / dt = \dot{u}_i$  es el campo de velocidades (si  $t = cte.$  entonces la velocidad  $v_i = \dot{u}_i$  se transforma en un incremento temporal del campo de los desplazamientos, y la potencia introducida se transforma en el incremento temporal de trabajo introducido). La velocidad de deformación, ahora incremento temporal de deformación, puede escribirse como  $D_{ij} = \{L_{ij}\}_S = \{\nabla_i^S \dot{u}_j\}_S = \{\dot{F}_{ij} F_{kj}^{-1}\}_S$ , que sustituida en la anterior, resulta el equilibrio de potencias en un sólido continuo. Además, basado en la técnica de elementos finitos, se aproxima mediante una función polinómica normalizada a la unidad  $N_{jk}(x, y, z)$  de soporte local que recibe el nombre de función de forma del campo continuo de desplazamientos  $u_j(x, y, z)$  o velocidades  $\dot{u}_j(x, y, z)$ ,

$$u_j(x, y, z) \Big|_{\Omega^e} = N_{jk}(x, y, z) U_k \Big|_{\Omega^e} \quad \Rightarrow \quad \dot{u}_j(x, y, z) \Big|_{\Omega^e} = N_{jk}(x, y, z) \dot{U}_k \Big|_{\Omega^e} \quad (11.5)$$

Esta función  $N_{jk}(x, y, z)$ , que actúa sobre un dominio acotado  $\Omega^e$  denominado elemento finito, permite aproximar dentro de dicho dominio los campos de desplazamientos  $u_k(x, y, z)$ , velocidades  $\dot{u}_k(x, y, z)$  y aceleraciones  $\ddot{u}_k(x, y, z)$  mediante la valoración de sus respectivas magnitudes  $U_k, \dot{U}_k$  y  $\ddot{U}_k$  en un número finito de puntos, denominados nodos, pertenecientes al dominio del elemento finito  $\Omega^e$ . De esta forma puede establecerse los campos derivados del desplazamiento, como lo es entre otros la deformación de Almansi  $e_{ik} = \nabla_i^S u_k$ . Esto es,

$$u_j(x, y, z) \Big|_{\Omega^e} = N_{jk}(x, y, z) U_k \Big|_{\Omega^e} \quad \Rightarrow \quad e_{ij} \Big|_{\Omega^e} = \nabla_i^S u_j \Big|_{\Omega^e} = \nabla_i^S N_{jk} U_k \Big|_{\Omega^e} \quad (11.6)$$

Se denomina método de los elementos finitos al procedimiento numérico que surge de utilizar esta aproximación polinómica para las funciones de campo [37]. Esta aproximación reduce las infinitas incógnitas de la función de campo a un número finito de incógnitas, definidas en ciertos puntos preestablecidos como nodos del elemento finito.

Sustituyendo la aproximación 11.5 y 11.6 en la ecuación 11.4, puede escribirse la ecuación de equilibrio de potencias a partir de la siguiente aproximación:

$$\left[ \int_{V^e} \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV \right] \dot{U}_k \Big|_{\Omega^e} = \left[ \oint_S t_i N_{ik} dS + \int_{V^e} \rho b_i N_{ik} dV - \int_{V^e} \rho N_{ki} N_{ij} \ddot{U}_j dV \right] \dot{U}_k \Big|_{\Omega^e} \quad (11.7)$$

Pero esta ecuación se cumple para cualquier velocidad  $\dot{U}_k \Big|_{\Omega^e}$ , por lo tanto la igualdad establecida en la ecuación 11.7 es independiente de esta velocidad, obteniéndose de aquí la siguiente ecuación de equilibrio de fuerzas dinámicas para el sólido discreto:

$$\underbrace{\int_{V^e} \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV \Big|_{\Omega^e}}_{f_k^{int} \Big|_{\Omega^e}} = \underbrace{\oint_S t_i N_{ik} dS + \int_{V^e} \rho b_i N_{ik} dV \Big|_{\Omega^e}}_{f_k^{ext} \Big|_{\Omega^e}} - \underbrace{\int_{V^e} \rho N_{ki} N_{ij} dV \Big|_{\Omega^e}}_{M_{kj}} \ddot{U}_j \Big|_{\Omega^e} \quad (11.8)$$

$$M_{jk} \ddot{U}_j + f_k^{int} = f_k^{ext} \in \Omega_0^e$$

siendo  $f_k^{int} \Big|_{\Omega^e}$ ,  $f_k^{mas} \Big|_{\Omega^e}$  y  $f_k^{ext} \Big|_{\Omega^e}$  los conjuntos ordenados, en forma de matrices columna, de las fuerzas interna, másica y externa que se desarrollan en cada punto del sistema discreto que aproxima el continuo,  $\ddot{U}_j \Big|_{\Omega^e}$  la aceleración en dichos puntos,  $M_{kj} \Big|_{\Omega^e}$  la masa elemental,  $M_{kj}$  la matriz de masa y  $\bar{B}_{ijk} \Big|_{\Omega^e} = \nabla_i^S N_{jk} \Big|_{\Omega^e}$  el tensor de compatibilidad de deformaciones o gradiente simétrico de la función de forma [23].

Desde un punto de vista mecánico-numérico, la no linealidad en la ecuación 11.8 puede estar originada por distintos fenómenos:

- **No linealidad constitutiva**, que resulta de la pérdida de linealidad entre el campo de tensiones y deformaciones  $\sigma_{ij} - \epsilon_{ij}$ , tal como ocurre en la plasticidad, daño, etc. Esta no linealidad ocurre debido al cambio de propiedades que sufre el material durante su comportamiento mecánico y se refleja en su tensor constitutivo  $C_{ijkl}$ .
- **No linealidad por grandes deformaciones**, que es debida a la influencia no lineal que tiene el cambio de configuración del sólido en el campo de deformaciones. Este cambio de configuración también altera el tensor constitutivo  $C_{ijkl}$ , y por ello establece una relación no lineal entre tensiones y deformaciones. Además, estos cambios de configuración son producidos por grandes movimientos, traslaciones y rotaciones, que también producen cambios en el sistema de referencia local en los puntos del sólido, afectando por ello al tensor de compatibilidad de deformaciones  $\bar{B}_{ijk}$ .
- **No linealidad por grandes desplazamientos**, que a diferencia de las grandes deformaciones, sólo afecta al tensor de compatibilidad de deformaciones  $\bar{B}_{ijk}$ , porque en este

caso sólo ocurren cambios en el sistema de referencia local de los puntos del sólido como consecuencia de grandes movimientos.

Estas posibles no linealidades pueden ocurrir todas a la vez o por separado.

La ecuación 11.8 representa el equilibrio en el dominio un único elemento finito  $\Omega^e$ , y su participación en dominio global  $\Omega$  se realiza a través del concepto de "ensamblaje" de esta ecuación de equilibrio junto a otras similares pertenecientes a otros elementos finitos que comparten el dominio del sólido. Esta operación se realiza mediante el operador lineal  $\mathbf{A}$  que representa la suma entre las componentes de la fuerza, según corresponda a la posición y dirección de las contribuciones locales.

En el caso que haya linealidad en el comportamiento del sólido, se cumple la siguiente relación de equilibrio global, cuya expresión resulta del ensamblaje de las ecuaciones de equilibrio local representadas en la ecuación 11.8:

$$0 = \mathbf{A}_{\Omega^e} \left[ f_k^{mas} + f_k^{int} - f_k^{ext} \right]_{\Omega^e} = \Delta f_k \Big|_{\Omega} \quad (11.9)$$

La no linealidad en el comportamiento global del sólido se manifiesta como una fuerza residual  $\Delta f_k \Big|_{\Omega}$ , provocada por el desequilibrio entre las fuerzas interiores  $f_k^{int} \Big|_{\Omega}$ , las fuerzas másicas  $f_k^{mas} \Big|_{\Omega}$  y las exteriores  $f_k^{ext} \Big|_{\Omega}$ . Este desequilibrio, en un cierto instante de tiempo  $t$  del proceso dinámico, puede eliminarse mediante la linealización de esta fuerza residual  $\Delta f_k \Big|_{\Omega}$  (ecuación 11.9), en la vecindad del estado de equilibrio actual  $(i + 1)$ . Para ello es necesario forzar el equilibrio en el estado actual  $(i + 1)$  y expresar dicha condición mediante una expansión en serie de Taylor truncada en su primera variación,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{A}_{\Omega^e}^{i+1} [\Delta f_k]_{\Omega^e}^t \cong \mathbf{A}_{\Omega^e}^i [\Delta f_k]_{\Omega^e}^t + \mathbf{A}_{\Omega^e} \left[ \left[ \frac{\partial (\Delta f_k)}{\partial U_r} \right]_{\Omega^e}^t \cdot {}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^t \right] \\ 0 &= {}^{i+1} [\Delta f_k]_{\Omega}^t \cong {}^i [\Delta f_k]_{\Omega}^t + \mathbf{A}_{\Omega^e} \left[ \left[ M_{kj} \frac{\partial \dot{U}_j}{\partial U_r} + \frac{\partial f_k^{int}}{\partial U_r} + \frac{\partial f_k^{int}}{\partial \dot{U}_j} \frac{\partial \dot{U}_j}{\partial U_r} - \frac{\partial f_k^{ext}}{\partial \dot{U}_r} \right]_{\Omega^e}^t \cdot {}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^t \right] \end{aligned} \quad (11.10)$$

donde la aceleración y la velocidad deben expresarse mediante una aproximación lineal en diferencias finitas [23], como el método de Newmark. Sustituyendo en esta ecuación las fuerzas internas y másicas expresadas en la ecuación 11.8, se tiene,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{A}_{\Omega^e}^i \left[ M_{kj} \dot{U}_j + \int_{V^e} \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV - f_k^{ext} \right]_{\Omega^e}^t + \mathbf{A}_{\Omega^e}^i \left[ \left( \int_{V^e} \rho N_{ki} N_{ij} dV \right) \frac{\partial \dot{U}_j}{\partial U_r} + \right. \\ &+ \left. \left( \int_{V^e} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{st}} \frac{\partial e_{st}}{\partial U_r} \nabla_i^S N_{jk} dV \right) + \left( \int_{V^e} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial D_{st}} \frac{\partial D_{st}}{\partial \dot{U}_m} \nabla_i^S N_{jk} dV \right) \frac{\partial \dot{U}_m}{\partial U_r} - \frac{\partial f_k^{ext}}{\partial U_r} \right]_{\Omega^e}^t \cdot \\ &\cdot \mathbf{A}_{\Omega^e}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^t \end{aligned} \quad (11.11)$$

tal que particularizando esta ecuación de equilibrio dinámico para un material cuya ley constitutiva visco elasto-plástica es del tipo  $\sigma_{ij} = \rho (\partial \Psi(e_{ij}, p_i) / \partial e_{ij}) = C_{ijkl} : e_{kl}^e + \xi_{ijkl} : D_{kl}$  para una relación cinemática del tipo  $e_{ij} = \nabla_i^S u_j = \nabla_i^S N_{jk} U_k$  y  $D_{ij} = \nabla_i^S N_{jk} \dot{U}_k$ , resulta,

$$\begin{aligned}
 0 = & \mathbf{A}_{\Omega^e}^i \left[ M_{kj} \ddot{U}_j + \int_{V^e} \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV - f_k^{ext} \right]_{\Omega^e}^t + \mathbf{A}_{\Omega^e}^i \left[ \left( \int_{V^e} \rho N_{ki} N_{ij} dV \right) \frac{\partial \ddot{U}_j}{\partial U_r} + \right. \\
 & \left. + \left( \int_{V^e} (\nabla_s^S N_{tr}) C_{ijst}^T (\nabla_i^S N_{jk}) dV \right) + \left( \int_{V^e} (\nabla_s^S N_{tr}) \xi_{ijst}^T (\nabla_i^S N_{jk}) dV \right) \frac{\partial \dot{U}_m}{\partial U_r} - \frac{\partial f_k^{ext}}{\partial U_r} \right]_{\Omega^e}^t \cdot \\
 & \cdot \mathbf{A}_{\Omega^e}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^t
 \end{aligned} \tag{11.12}$$

$$0 = {}^i [\Delta f_k]_{\Omega}^t + {}^i [\Delta J_{kr}]_{\Omega}^T \cdot {}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega}^t \tag{11.13}$$

donde  $\xi_{ijst}^T = \boldsymbol{\xi}^T$  es el tensor de viscosidad tangente y  $J_{kr}^T = \mathbf{J}^T$  es el operador Jacobiano, que en un problema estático se convertiría en la matriz de rigidez tangente. Esta ecuación puede también presentarse en la siguiente forma matricial, donde se detallan los operadores que contribuyen a la definición del jacobiano:

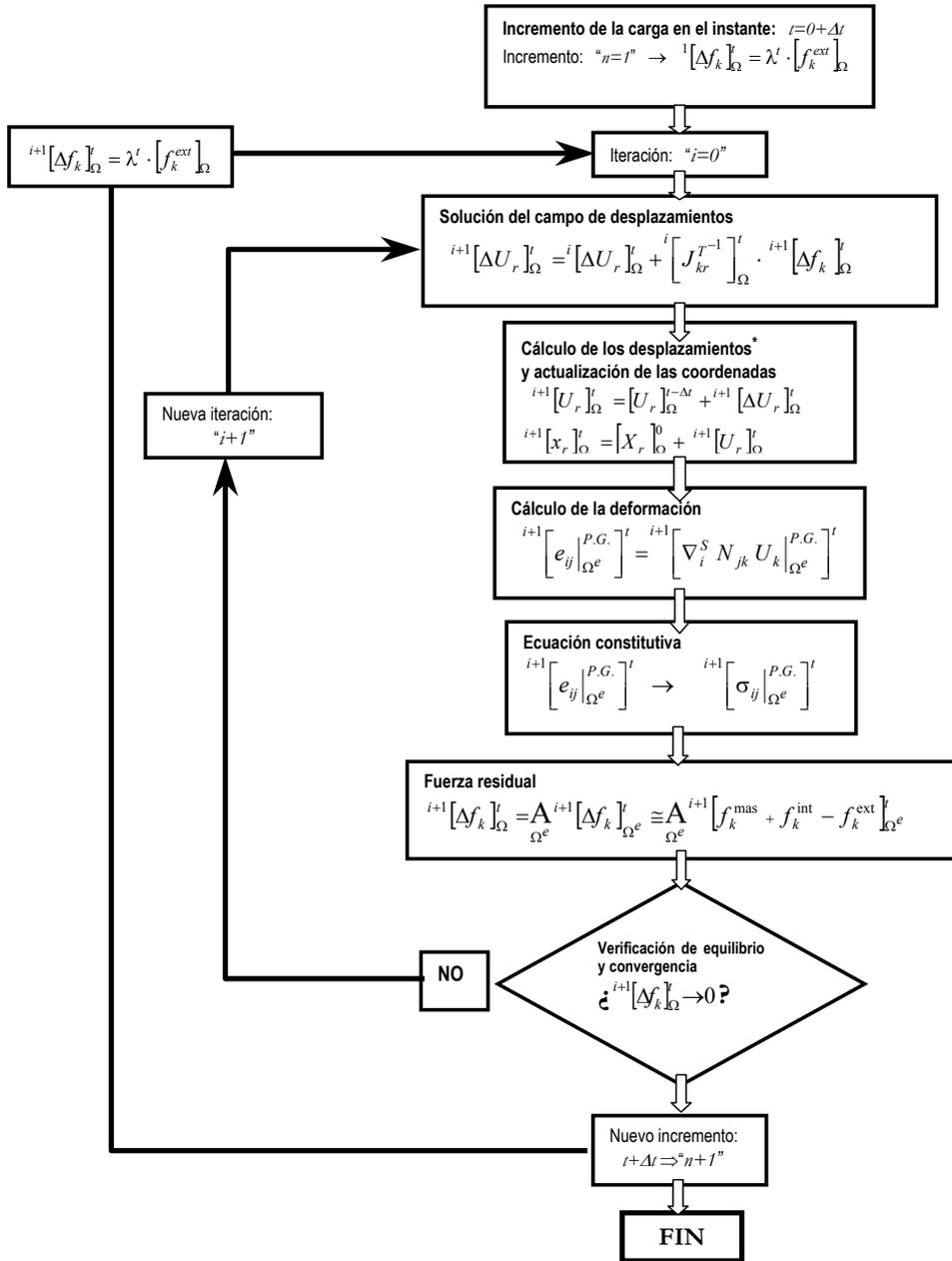
$$0 = {}^{i+1} [\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^t \cong {}^i [\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^t + \underbrace{{}^i \left[ \mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} + \mathbf{K}^T + \mathbf{D}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{\Omega}^t}_{{}^i \mathbf{J}_{\Omega}^t} \cdot {}^{i+1} [\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^t \tag{11.14}$$

siendo esta última la ecuación de equilibrio linealizada, donde  $\mathbf{K}_{\Omega}^T = \mathbf{A}_{\Omega^e} \int_{V^e} (\nabla^S \mathbf{N}) : \mathbf{C}^T : (\nabla^S \mathbf{N}) dV$  representa la matriz de rigidez tangente,  $\mathbf{M}_{\Omega} = \mathbf{A}_{\Omega^e} \int_{V^e} \rho \mathbf{N} : \mathbf{N} dV$  es la matriz de masa,  $\mathbf{D}_{\Omega}^T = \mathbf{A}_{\Omega^e} \int_{V^e} (\nabla^S \mathbf{N}) : \boldsymbol{\xi}^T : (\nabla^S \mathbf{N}) dV$  es la matriz de amortiguación tangente, todas ellas definidas en todo el dominio  $\Omega$ ;  $C_{ijst}^T$  el tensor tangente correspondiente a la ley constitutiva utilizada en cada punto del sólido y  $\mathbf{f}^{ext} = \mathbf{A}_{\Omega^e} [\int_{S^e} \phi_{se} \mathbf{N} : \mathbf{t} dS + \int_{V^e} \rho \mathbf{N} : \mathbf{b} dV]$  es la fuerza exterior. La fuerza desequilibrada en el sólido  ${}^{i+1} [\Delta \mathbf{f}_k]_{\Omega}^t$  se elimina siguiendo una resolución por Newton-Raphson hasta que este residuo resulte despreciable, situación que se conoce como convergencia del proceso linealizado hacia la solución exacta (véase Figura 11.2).

En la Figura 11.2 se describe el equilibrio espacial, dejando el tratamiento de la convergencia en el tiempo para ser abordado en un estudio más profundo de los métodos de resolución en el tiempo de la ecuación de equilibrio dinámico.

## 11.4. Problemas estáticos y dinámicos no lineales

A continuación se hace una breve presentación de los distintos tipos de comportamiento que introducen no linealidad e inducen al deterioro de una estructura. En principio, y en consecuencia con el alcance de éste trabajo, se presentan brevemente los conceptos de elasticidad retardada y relajación de tensiones, que ocurren en problemas dinámicos y que dan lugar al denominado amortiguamiento viscoso, en los cuales la disipación de la energía depende de la velocidad. También la plasticidad y el daño, que contribuyen a la disipación de la energía independiente de la velocidad, situación que también ocurre en problemas estáticos. Aunque



**Figura 11.2:** Representación esquemática de la resolución del problema no lineal mediante Newton-Raphson. El campo de velocidades y aceleraciones deben calcularse según el método aproximación de la aceleración (véase a modo de ejemplo el método de Newmark) [23].

las grandes deformaciones también inducen no linealidad en el problema dinámico, no será tratada en este capítulo.

Para determinar si un punto del sólido está en un estado de pequeñas deformaciones, se

debe cumplir que el determinante del gradiente de deformaciones sea cercano a la unidad:

$$\det |\mathbf{F}| = \frac{dV}{dV_0} \cong 1 \quad (11.15)$$

Resultando en este caso la coincidencia entre las tensiones de Cauchy y de Piola Kirchoff  $\sigma_{ij} = S_{ij}$ , entre la velocidad de deformación en la configuración actualizada y la correspondiente magnitud infinitesimal  $D_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}$ , y entre la densidad en las distintas configuraciones  $\rho = \rho_0$ . Con estas condiciones particulares los desplazamientos y deformaciones son despreciables frente a las dimensiones del sólido y por lo tanto puede escribirse la medida de deformación de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}\mathbf{F}^T - \mathbf{I}) = \nabla^S \mathbf{u} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right] \quad (11.16)$$

Además, para un material particular cuyo comportamiento es elástico y en pequeñas deformaciones, ocurre la siguiente coincidencia en la definición de las deformaciones  $\mathbf{e} = \mathbf{E} = \boldsymbol{\epsilon}$ , y la energía libre se escribe en la siguiente forma simplificada,

$$\Psi = \frac{1}{2\rho_0} (\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}) \quad (11.17)$$

tal que sustituida en la segunda ley de la termodinámica (desigualdad de Clausius-Duhem) resulta la siguiente ley constitutiva [23],

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (11.18)$$

donde el tensor constitutivo coincide exactamente con el obtenido mediante la ley de Hooke generalizada, y cuya expresión canónica es la siguiente:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (11.19)$$

siendo  $\lambda$  y  $\mu$  las constantes de Lamé y  $\delta_{ij}$  es el tensor de Kroneker. El tensor de elasticidad de Hooke resulta definido positivo y posee las siguientes simetrías:

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{ijlk} = C_{jilk} \quad (11.20)$$

Cauchy definía cuerpo elástico como "aquel en el cual las deformaciones en cualquier punto del sólido quedan determinadas por su estado de tensión y temperatura". En contraste con esta definición, se tendrá un material con comportamiento inelástico, por lo que es necesario establecer unas definiciones adicionales a las propias de la teoría de la elasticidad clásica, cuya formulación está relacionada con la historia del comportamiento del material. Esta situación hace que no pueda garantizarse una relación biunívoca entre el tensor de tensiones y el de deformaciones, o dicho de otra forma, que no son relaciones invertibles una de otra.

La influencia del tiempo produce en algunos sólidos comportamientos irrecuperables. Básicamente pueden establecerse tres tipos de comportamientos no lineales en los materiales dependientes del tiempo:

- **Elasticidad retardada o "creep"** donde ocurre crecimiento de deformación a tensión aplicada constante (véase Figura 11.3).
- **Relajación de tensiones**, donde se produce pérdida de tensión mientras el nivel de deformaciones se mantiene constante. Este comportamiento, aunque no invertible, representa la forma implícita inversa de la elasticidad retardada (Figura 11.3).
- **Viscoplasticidad** cuyo comportamiento no lineal se debe a un crecimiento del campo de deformaciones inelásticas, pero esto ocurre siempre que el campo de tensiones supere unos umbrales preestablecidos (véase Figura 11.4).

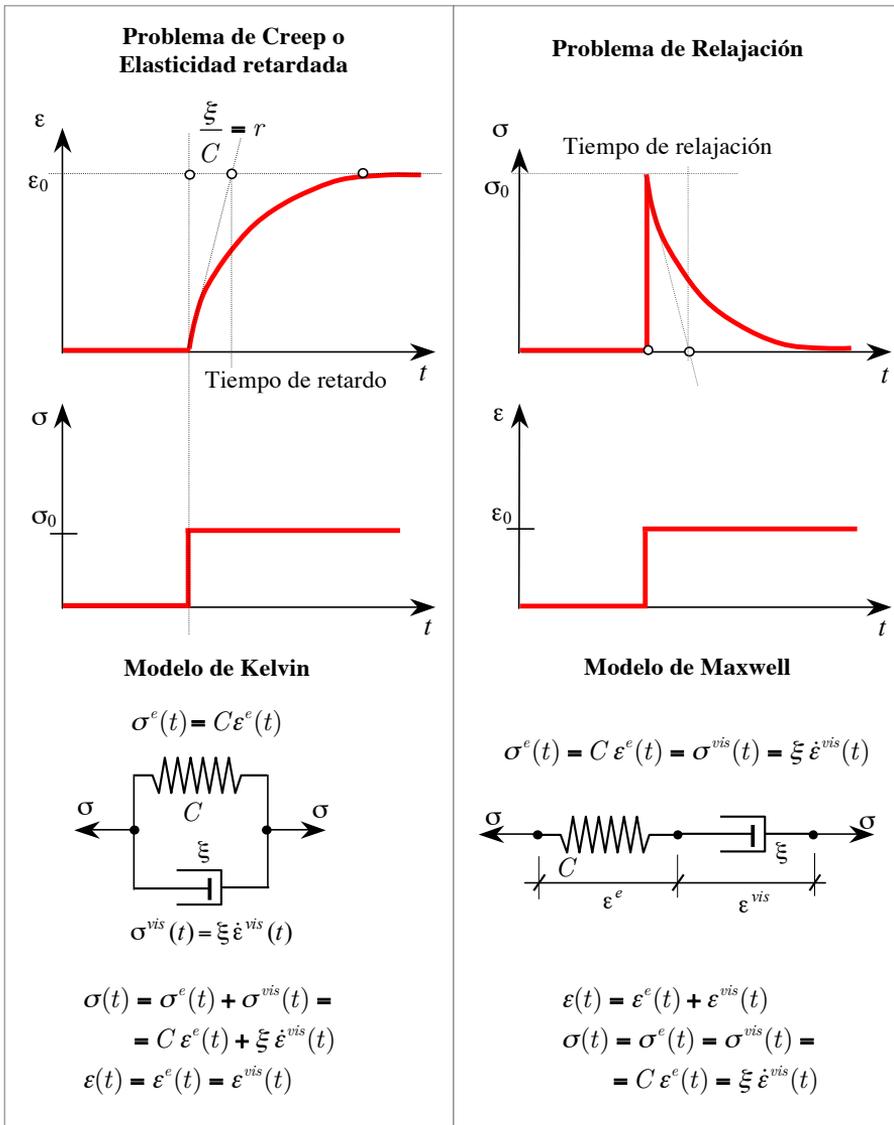


Figura 11.3: Formas simplificadas de entender el comportamiento viscoso de Kelvin y Maxwell.

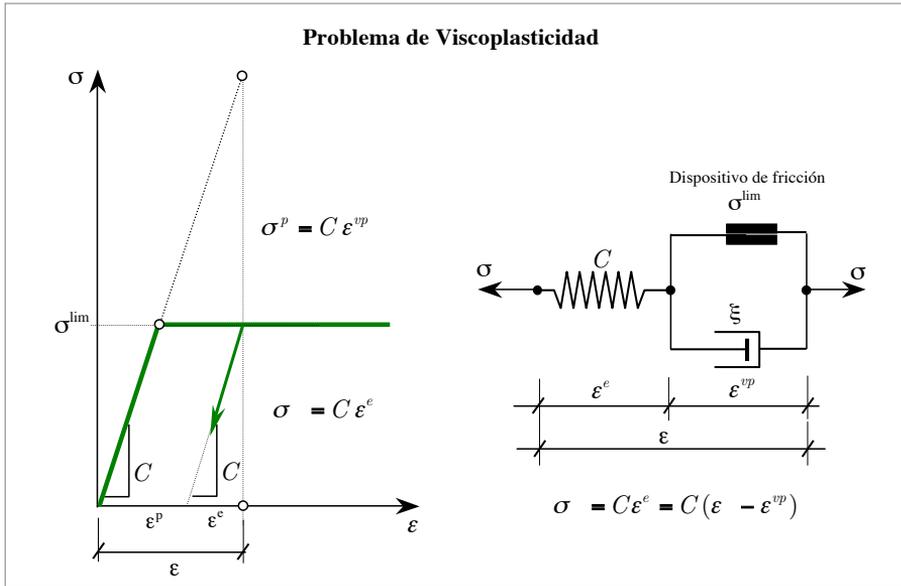


Figura 11.4: Formas simplificadas de entender el comportamiento viscoplástico.

Hay también materiales que tienen también mecanismos que conducen a comportamientos no lineales independientes del tiempo, que puede ser consecuencia de:

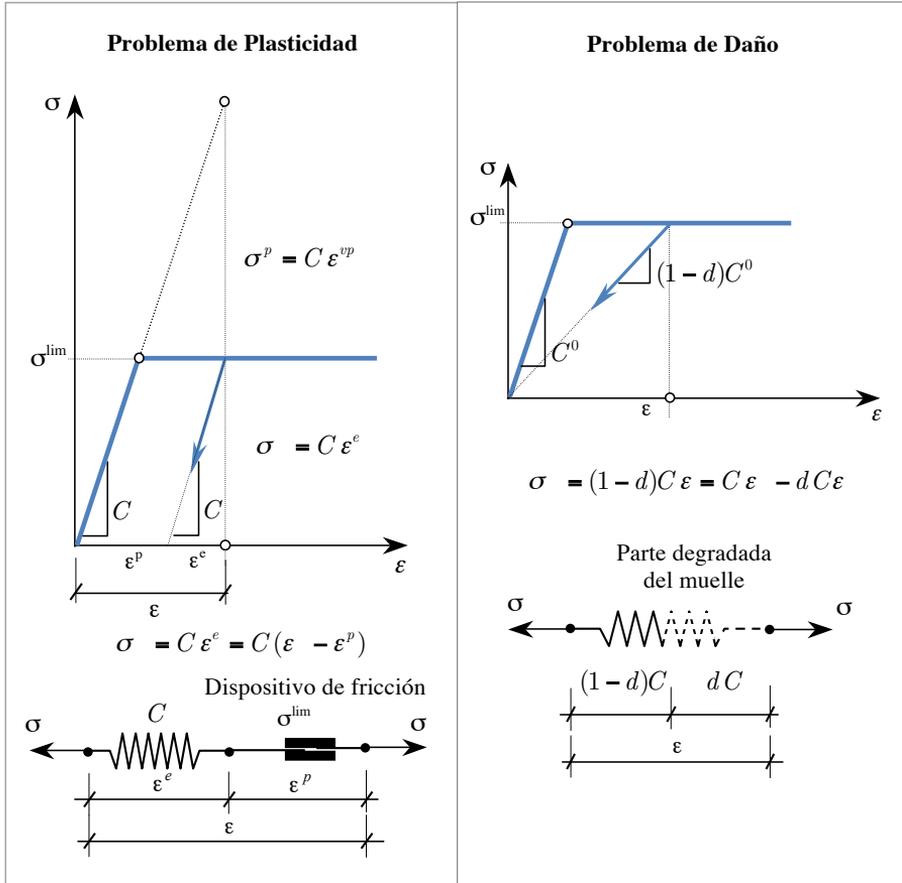
- **Plasticidad o comportamiento con flujo instantáneo.** Este comportamiento puede matemáticamente establecerse como un caso particular del comportamiento viscoplástico, pero la física del problema es cualitativamente diferente (véase Figura 11.5).
- **Daño o degradación de rigidez,** que produce en los materiales una pérdida de resistencia como consecuencia de una degradación en la elasticidad del material (Figura 11.5).

Estos comportamientos pueden presentarse en forma aislada o participar todos ellos en distinto grado. Sobre la modelización constitutiva y su influencia en el comportamiento estructuras se recomienda profundizar el estudio en las fuentes orientadas a esta finalidad [11, 23].

### 11.5. Daño estructural. Caso sísmico teniendo en cuenta las curvas de capacidad y la demanda estructural

Habiendo presentado en los apartados anteriores las bases para el estudio del daño mecánico, a continuación se presenta una formulación que permite obtener de forma sencilla una cuantificación sobre el daño estructural o deterioro máximo que puede alcanzar una estructura durante el evento dinámico-sísmico sugerido por una normativa para una determinada zona.

El análisis que se presenta a continuación se basa en suponer que el comportamiento estructura no lineal sigue los fundamentos de la teoría del daño mecánico [12, 22, 23, 25, 27,



**Figura 11.5:** Formas simplificadas de entender el comportamiento elastoplástico y daño.

29, 34, 36]. Esta teoría está basada en los principios mecánicos presentado en los apartados anteriores y cumple con los principios fundamentales de la termodinámica.

No todos los materiales utilizados con fines estructurales siguen un comportamiento asimilable al daño (degradación o pérdida de rigidez), pues hay algunos que se ajustan más a la plasticidad (desarrollo de deformaciones irreversibles) y otro tienen una composición de comportamiento entre daño y plasticidad (degradación con deformaciones irreversibles) (véase Figura 11.5). Dada una respuesta estructural, sólo se puede saber si ha tenido un comportamiento de daño o plasticidad cuando se inicia la descarga, pues es el momento en que se diferencia la forma de las curvas de respuesta, mostrando en el caso de daño una descarga al origen con pérdida de rigidez, y en la plasticidad conservando la rigidez pero acumulando deformaciones irreversibles. Mientras están en carga, la forma de la curva puede ser idéntica para daño y plasticidad. El hormigón armado resulta de un comportamiento mixto (daño y plasticidad), pero con preponderancia del efecto de degradación [12]. Esta afirmación puede ser confirmada al observar ensayos de laboratorio y puede ser cuantificada en base a la teoría de mezclas de sustancias simples [17, 19–21].

### 11.5.1. Daño global en función de la rigidez estructural

La formulación que a continuación se presenta ha sido pensada con el objetivo de obtener información sobre el deterioro de estructuras, sometido a acciones estáticas y dinámicas (sísmica) con muy poca información, cuyo origen hacen del procedimiento un método sencillo para una utilización rápida y eficaz.

Suponiendo un comportamiento elástico de la estructura se hace un análisis tipo *push-over* y de aquí se obtiene la rigidez estructural inicial  $K_0$  que se muestra en la Figura 11.6.

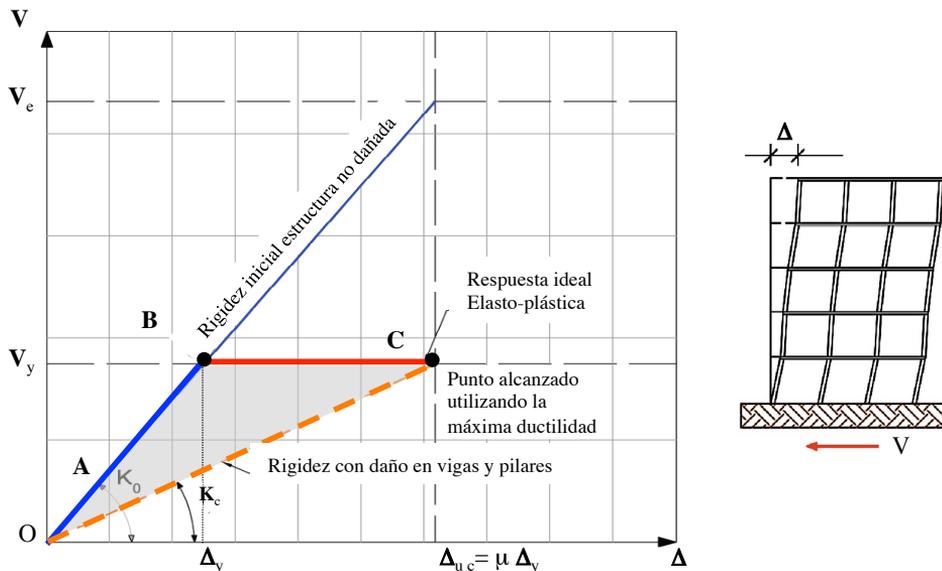


Figura 11.6: Cálculo de la rigidez estructural bajo cargas de *push-over*.

Suponiendo conocido el máximo cortante en la base  $V$  que desarrollaría la estructura en el momento que se inicia su plastificación  $V_y$  y suponiendo que el cálculo estructural se ha realizado una ductilidad  $\mu$  (obtenida de las normativas), conforme al tipo de la estructura en análisis, se tiene la siguiente expresión para el daño estructural máximo esperable (en el punto  $c$ , cuando desarrolla toda su ductilidad esperada), evaluado según la mecánica de daño continuo:

$$D_c \stackrel{def}{=} 1 - \frac{K_c}{K_0} = 1 - \frac{\frac{V_y}{\Delta_u}}{\frac{V_y}{\Delta_y}} = 1 - \frac{\frac{V_y}{\mu \Delta_y}}{\frac{V_y}{\Delta_y}} = 1 - \frac{1}{\mu} = \frac{\mu - 1}{\mu} \tag{11.21}$$

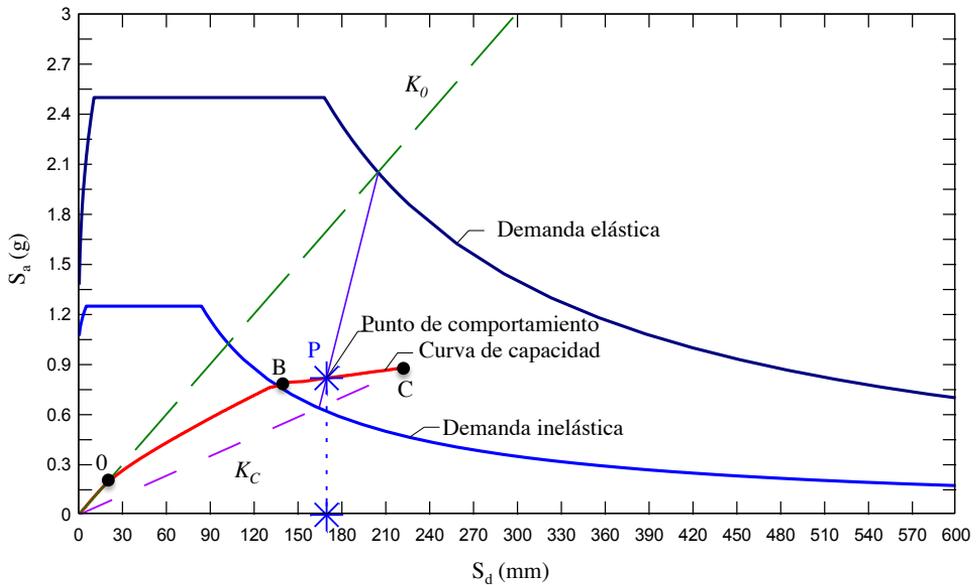
De aquí se desprende que el daño máximo, cuando la estructura desarrolla toda su ductilidad, es sólo función de la ductilidad adoptada. Así pues, podría decirse lo siguiente respecto del daño estructural máximo esperable,

- Estructura dúctil:  $\mu = 4 \Rightarrow D_c = 0,75$
- Estructura frágil:  $\mu = 2 \Rightarrow D_c = 0,50$

que para llegar al comportamiento último de la estructura puede alcanzarse un nivel de daño mayor en una estructura dúctil que en una estructura frágil. Sin embargo, esta forma de medir el daño puede llevar a equívocos, pues podría también interpretarse lo contrario, es decir, que una estructura dúctil se daña un 25% más que una frágil en su estado último. Esto obliga a objetivizar el cálculo de este índice de daño por comparación con el máximo daño que puede alcanzar la estructura. Así, el daño objetivo  $D_p^{obj} \leq 1$  alcanzado por una estructura en un punto  $p$ , se define como:

$$D_p^{obj} \stackrel{def}{=} \frac{D_p}{D_c} = \frac{D_p \mu}{\mu - 1} = \frac{\left(1 - \frac{K_p}{K_0}\right) \mu}{\mu - 1}; \quad \text{con } 0 \leq D_p^{obj} \leq 1 \quad (11.22)$$

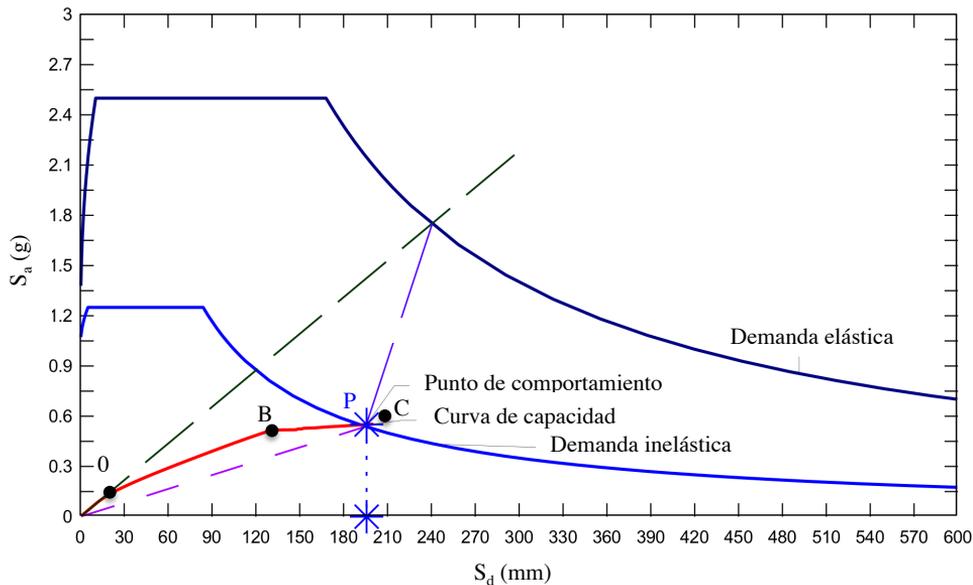
Se define ahora a  $p$  como el "Punto de Desempeño Estructural", resultante de la intersección entre la curva de "Demanda Inelástica" y la curva de "Capacidad Estructural" (obtenida mediante un ensayo *push-over*). En estas condiciones, la ecuación 11.22 dará el máximo daño estructural que alcanzaría la estructura sometida al terremoto indicado por la normativa del lugar. Una comparación de este daño objetivo puede verse en las Figuras 11.7, 11.8 y 11.9 que se muestran a continuación.



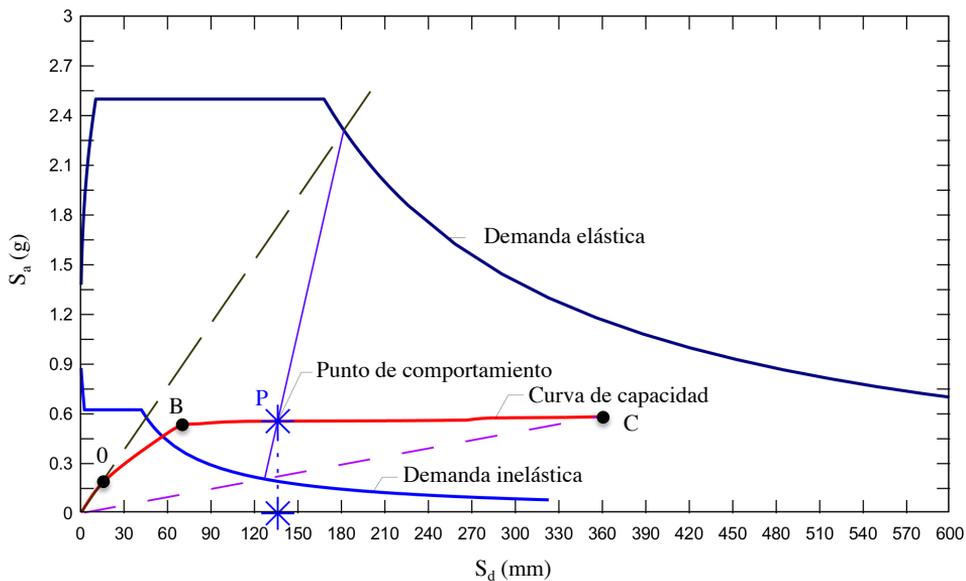
**Figura 11.7:** Punto de Desempeño Estructural para forjados reticulares, sometido a un espectro inelástico de proyecto para suelos Tipo II y  $\mu = 2$ .

### 11.5.2. Daño estructural objetivo

Cuando se define una curva de repuesta ideal aproximada por tres tramos, en vez de los dos que se suele utilizar en el índice de Park [23], se obtiene una mejora sustancial en el cálculo del índice de daño estructural objetivo  $D^{obj}$ , y por ello una mayor aproximación a ensayos experimentales y numéricos resueltos con elementos finitos. Así, la forma de las curvas quedará según se muestra en la Figura 11.10.

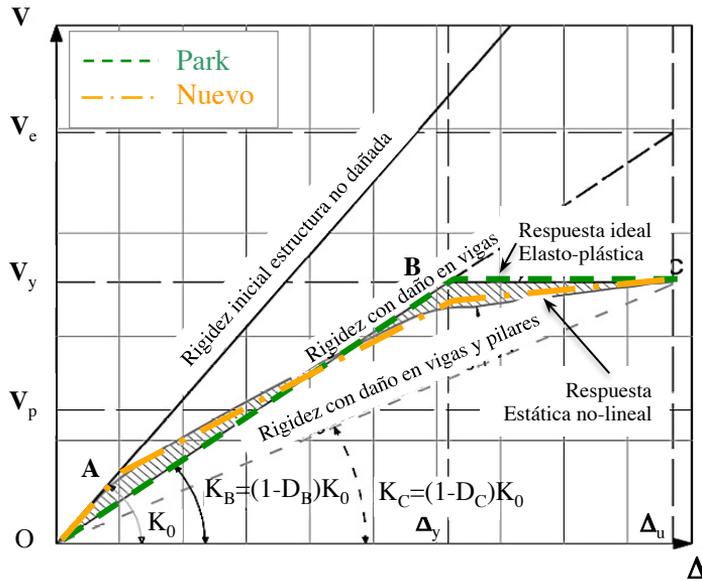


**Figura 11.8:** Punto de Desempeño Estructural para edificios porticados con vigas planas, sometido a un espectro inelástico de proyecto para suelos Tipo II y  $\mu = 2$ .



**Figura 11.9:** Punto de Desempeño Estructural para edificios porticados con vigas de canto, sometido a un espectro inelástico de proyecto para suelos Tipo II y  $\mu = 4$ .

Utilizando la nueva curva tri-lineal y la ecuación 11.22 se obtiene un daño estructural más ajustado al real para tres estructuras diferentes, y puede ser comparada con el análisis simplificado de Park y la técnica de elementos finitos, considerando la modelización constitutiva mencionada en la sección 11.2. Esta comparación puede verse en la Tabla 11.1.



**Figura 11.10:** Respuesta de una estructura a un análisis *push-over*. Respuesta no lineal real, respuesta ideal de Park y nueva representación tri-lineal de la respuesta.

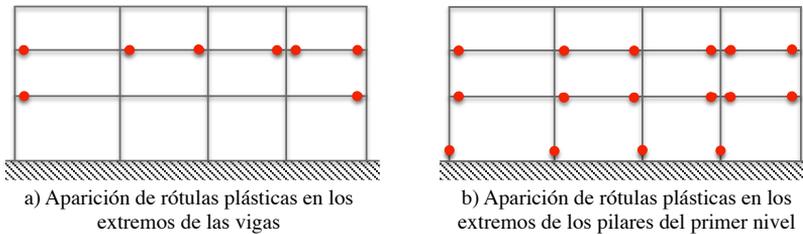
Estructura	$\mu = \Delta u / \Delta y$	$R\mu = V_y / V_p$	Simplificado Park	Análisis Tri-Lineal	MEF	Desplome $\Delta u$ [cm]	
Pórticos resistentes	5,15	1,88	B	0	0,44	0,43	0,8129
			C	0,80	0,88	0,86	4,1905
Pórticos vigas planas	1,55	1,34	B	0	0,44	0,58	1,488
			C	0,35	0,61	0,80	2,303
Forjados reticulados	1,57	1,94	B	0	0,45	0,50	18,533
			C	0,36	0,61	0,78	2,9123

**Tabla 11.1:** Comparación entre el daño estructural obtenido en forma simplificada utilizando la curva de Park, la nueva curva tri-lineal y el método de los elementos finitos (MEF).

El análisis estructural previamente presentado permite la valoración objetiva del daño estructural en forma sencilla. Concretamente, la utilización de la ecuación 11.22 permite aproximarnos a una valoración muy cercana a aquellas que resultan de procedimientos de cálculo más costosos. Así pues, se puede conocer el nivel de daño estructural para la intersección de la curva de demanda con la de capacidad de la estructura. Para ello es necesario conocer:

- La rigidez inicial  $K_0$  de la estructura, obtenida mediante un análisis elástico.
- Obtención de una curva tri-lineal de capacidad estructural (Figura 11.10), a partir de la siguiente secuencia de puntos:
  - El punto A en la curva de capacidad, como el máximo cortante antes que se inicie el proceso no lineal en las vigas (cálculo de una estructura elástica - véase Figura 11.11).

- El punto *B* como el máximo cortante antes que se inicie el proceso no lineal en las columnas (cálculo de una estructura con pilares elásticos y rótulas en las vigas - véase Figura 11.11).
- El punto *C* a partir de la ductilidad  $\mu$  recomendada por las normativas para el tipo de estructura que se está utilizando.
- El punto *P* como intersección entre la curva de demanda y la curva de capacidad, de donde resultará  $K_p$ .
- Cálculo del daño objetivo mediante la utilización de la ecuación 11.22.



**Figura 11.11:** Estructura elástica hasta que aparecen las primeras rotulas plásticas en vigas (izquierda). Estructura con rótulas en todos los extremos de vigas (derecha).

## 11.6. Simulación numérica de estructuras reforzadas con FRP y valoración del daño

El uso de los materiales compuestos como materiales de refuerzo para estructuras ya construidas es una de las tecnologías que están teniendo gran aplicación en la industria de la construcción debido a las ventajas que presentan [3]. Entre estas ventajas están las altas relaciones resistencia-peso y rigidez-peso, las cuales mejoran el comportamiento de la estructura existente sin alterar su configuración geométrica. Asimismo, son materiales livianos que no demandan cambios en la distribución del sistema estructural o en la cimentación. Además, para el caso de construcciones sometidas a ambientes especiales, presentan alta resistencia a la corrosión.

No obstante, para optimizar el diseño estructural de los materiales compuestos en las estructuras, es necesario el análisis del comportamiento de los materiales compuestos donde se identifique la forma de participación de los diferentes componentes del compuesto y su interacción con otros materiales como el hormigón armado. De igual forma, se requiere el análisis del comportamiento global de la estructura, en el que se establezca la incidencia de los materiales compuestos como parte integral de los elementos estructurales reforzados. Un procedimiento eficiente para realizar estos análisis es la simulación numérica con elementos finitos.

El comportamiento de las estructuras de hormigón armado reforzadas con FRP depende de múltiples parámetros, y el grado de influencia de muchos de ellos no ha sido aún determinado, lo que dificulta que experimentalmente se puedan estudiar todas las variables. Por

otra parte, la heterogeneidad y la anisotropía propias de los compuestos han hecho que no haya métodos de análisis sencillos y efectivos que permitan determinar su influencia sobre el comportamiento en las estructuras [19, 21].

Como consecuencia, el desarrollo para optimizar el uso del *FRP* en las estructuras se debe realizar de forma conjunta entre el campo experimental y el campo de la simulación numérica. No obstante, es necesario el desarrollo de nuevas herramientas y mejorar las existentes, en busca de que la simulación numérica a nivel global y local represente de una forma más aproximada el comportamiento real de las estructuras reforzadas con *FRP*, con la finalidad de obtener información que no se puede medir en los ensayos.

Teniendo en cuenta que la simulación numérica en el análisis de los materiales compuestos es un campo que está en desarrollo, y que su uso en obras civiles es relativamente nuevo, en este apartado se hace una presentación sintética de la teoría de mezclas serie/paralelo, que junto a los conceptos descritos en apartados anteriores, se convierte en una potente herramienta para el análisis numérico. Una descripción detallada de esta teoría se puede encontrar en [33].

### 11.6.1. Simulación del comportamiento de los materiales compuestos

Los materiales compuestos están conformados por diferentes tipos de sustancias inorgánicas u orgánicas, cada uno de los materiales componentes teniendo su ley constitutiva que condiciona el comportamiento del conjunto en función de la proporción volumétrica y de la distribución morfológica que tenga dentro del compuesto.

En la actualidad, gran parte de las investigaciones acerca del comportamiento de los materiales compuestos corresponden al campo experimental. Su estudio por medio de modelaciones numéricas está en desarrollo pero presenta algunas restricciones; incluso en simulaciones recientes de elementos reforzados con *FRP*, se representa el comportamiento constitutivo del material compuesto como el de un material homogéneo, sin tener en cuenta el aporte de sus componentes.

Con el objetivo de solucionar esta limitación, se han propuesto diferentes teorías de simulación del comportamiento de los materiales compuestos como gestores del uso de los modelos constitutivos que representan el comportamiento de los materiales simples que componen los materiales compuestos. Estas teorías de simulación son herramientas que pueden ser utilizadas dentro de una técnica de aproximación de elementos finitos para simular apropiadamente el comportamiento de los materiales compuestos, entre ellas las más relevantes son [5]:

- **Teoría de la homogenización.** Dentro de la mecánica de medios continuos se requiere del análisis desde dos escalas diferentes: una macroscópica en la que se determina el comportamiento de la estructura, y una microscópica en la que se obtiene el comportamiento del compuesto partiendo de la respuesta de sus componentes.
- **Teoría de las mezclas.** Considera que el comportamiento de cada componente define el comportamiento global del compuesto. Parte de la mecánica del continuo local bajo

el principio de interacción de las sustancias que componen el material, suponiendo que en el volumen infinitesimal del compuesto participan en conjunto todos sus componentes. Asimismo, considera que cada uno de ellos contribuye al comportamiento del compuesto en la misma proporción que su participación volumétrica.

Este apartado está orientado a la utilización de la teoría de mezclas, tomando como base la teoría de mezclas serie/paralelo propuesta por Rastellini [33], y que ha sido validada a través de la comparación de los resultados con diversas pruebas experimentales. Esta teoría se fundamenta en la teoría de mezclas clásica inicialmente estudiada por Trusdell y Topin [24]. Para más detalle sobre la simulación del comportamiento de los materiales compuestos, se recomienda recurrir a las siguientes fuentes [5, 17, 28].

### 11.6.2. Simulación numérica de un pórtico de hormigón armado reforzado con CFRP

El estudio de los efectos que han producido los grandes sismos en estructuras tipo pórtico pone en evidencia que las zonas más susceptibles a daño son las uniones viga columna y las bases de las columnas. Por ello, con el propósito de garantizar la estabilidad de las estructuras durante un evento extremo, en muchos estudios se hace énfasis en la necesidad de la rehabilitación y reparación de las estructuras antiguas o de las estructuras construidas antes de las actuales normas de diseño, siendo una de las alternativas de refuerzo el uso de FRP.

Utilizando la teoría de mezclas serie/paralelo [14–17, 32, 33] en un programa de elementos finitos, se muestra en este apartado un estudio de estructuras porticadas reforzadas con CFRP (*Carbon Fiber Reinforced Polymer*). Se realizó un análisis no lineal estático incremental (*push-over analysis*) de diez estructuras planas con una misma geometría. Cinco de ellas son de hormigón simple y las otras son de hormigón armado, con distintas configuraciones de refuerzo utilizando CFRP.

Aunque el CFRP se emplea como refuerzo en estructuras de hormigón armado o de acero, se estudió también el comportamiento de las estructuras de hormigón simple reforzadas con el propósito de analizar únicamente la influencia del refuerzo de CFRP sobre las estructuras.

#### 11.6.2.1. Geometría y configuraciones del refuerzo

En la Figura 11.12 se indica la geometría de los diez modelos junto con las armaduras de las viga y de las columnas para los pórticos de hormigón armado. En la Figura 11.13 se presentan las configuraciones del refuerzo con CFRP, y en la Tabla 11.2 se indica la nomenclatura utilizada para identificar los modelos.

El refuerzo en las columnas de estos modelos corresponde a dos capas orientadas a  $0^\circ$  y a  $90^\circ$ , para tener en cuenta que la eficiencia del encamisado de la columna depende de las direcciones en que se coloque la fibra. Asimismo, cuatro de los diez pórticos analizados tienen CFRP en la base de las columnas, dado que según los resultados experimentales [30, 31] su nivel de influencia es notorio en la capacidad y en la ductilidad en las columnas.

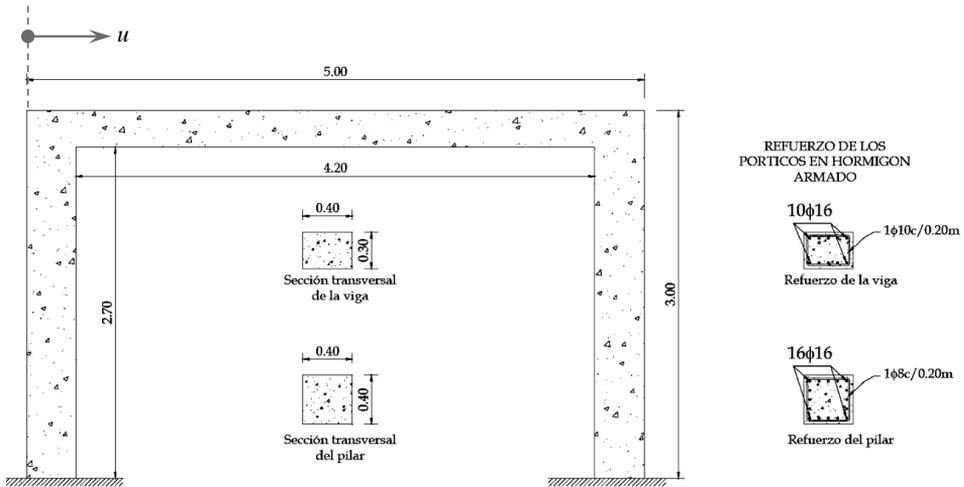


Figura 11.12: Geometría tipo de las estructuras porticadas.

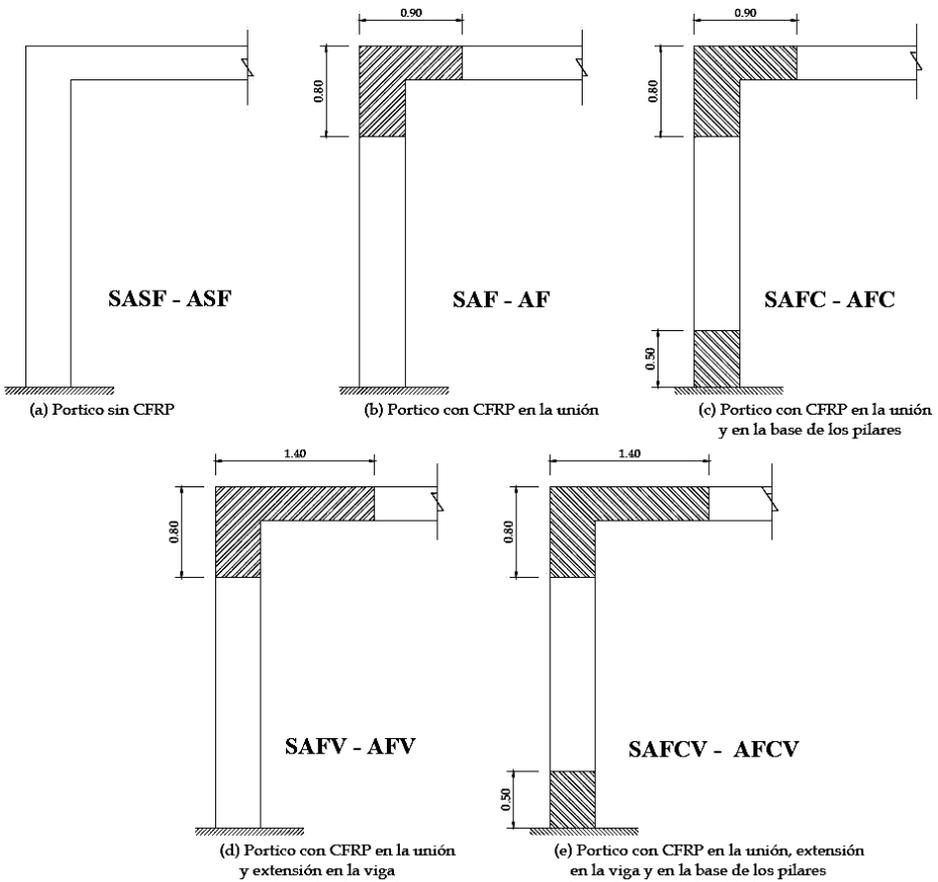


Figura 11.13: Modelos de los pórticos con las diferentes configuraciones de refuerzo [19].

Tipo de pórtico	Hormigón sin armadura de acero	Hormigón con armadura de acero
Pórtico sin <i>CFRP</i> (Figura 11.13a)	SASF	ASF
Pórtico con <i>CFRP</i> en la unión (Figura 11.13b)	SAF	AF
Pórtico con <i>CFRP</i> en la unión y en la base de la columna (Figura 11.13c)	SAFC	AFC
Pórtico con <i>CFRP</i> en la unión y extensión en la viga (Figura 11.13d)	SAFV	AFV
Pórtico con <i>CFRP</i> en la unión, extensión en la viga y en la base de la columna (Figura 11.13e)	SAFCV	AFCV

**Tabla 11.2:** Nomenclatura de los modelos de los pórticos.

Con el fin de tener un mejor comportamiento de la viga ante un desplazamiento lateral, en los modelos con refuerzo se encamisó la viga en las zonas cercanas a las uniones viga-columna. Se seleccionaron dos longitudes de refuerzo en la viga para hacer una comparación del comportamiento cuando el refuerzo se extiende desde el borde de la unión dos y cuatro veces la altura efectiva de la viga.

La teoría serie/paralelo permite asignar el hormigón y la resina polimérica como material de las matrices de los compuestos, mientras que el acero y la fibra de carbono constituyen el refuerzo. En la Figura 11.14 se indican los materiales compuestos asignados a los elementos estructurales de los modelos, dependiendo de si tienen o no armadura. Los porcentajes volumétricos en los que participan los componentes en cada material compuesto se señalan en Tabla 11.3, donde se especifica la dirección de las fibras del compuesto considerada como parte de la anisotropía del compuesto [4]. Las propiedades asignadas a los materiales simples se muestran en la Tabla 11.4.

### 11.6.2.2. Descripción de los modelos constitutivos aplicados a los materiales

Los modelos analizados por control de desplazamientos tienen una malla de elementos finitos rectangulares de 4 nodos. En lo que respecta al análisis del comportamiento de los materiales simples, para determinar el daño en el hormigón y la matriz polimérica del compuesto se aplicó el modelo de daño de Kachanov [22, 23]. El acero se consideró como un material elastoplástico utilizando el algoritmo Euler [23], mientras que la fibra de carbono se analizó como un material elástico y lineal. En todos los casos se ha partido de la hipótesis que no hay daño inicial en el pórtico, por lo que los ejemplos corresponden al caso de rehabilitación con *CFRP*. Además se supuso una adherencia inicial perfecta entre el refuerzo y el hormigón.

### 11.6.2.3. Análisis del comportamiento de los modelos de hormigón en masa y de hormigón armado reforzado

#### (a) Resistencia y rigidez

En la Figura 11.15 se observa que los diferentes modelos tienen una rigidez inicial similar, su comportamiento se mantiene lineal aproximadamente hasta los 0,0015 m; luego, según la

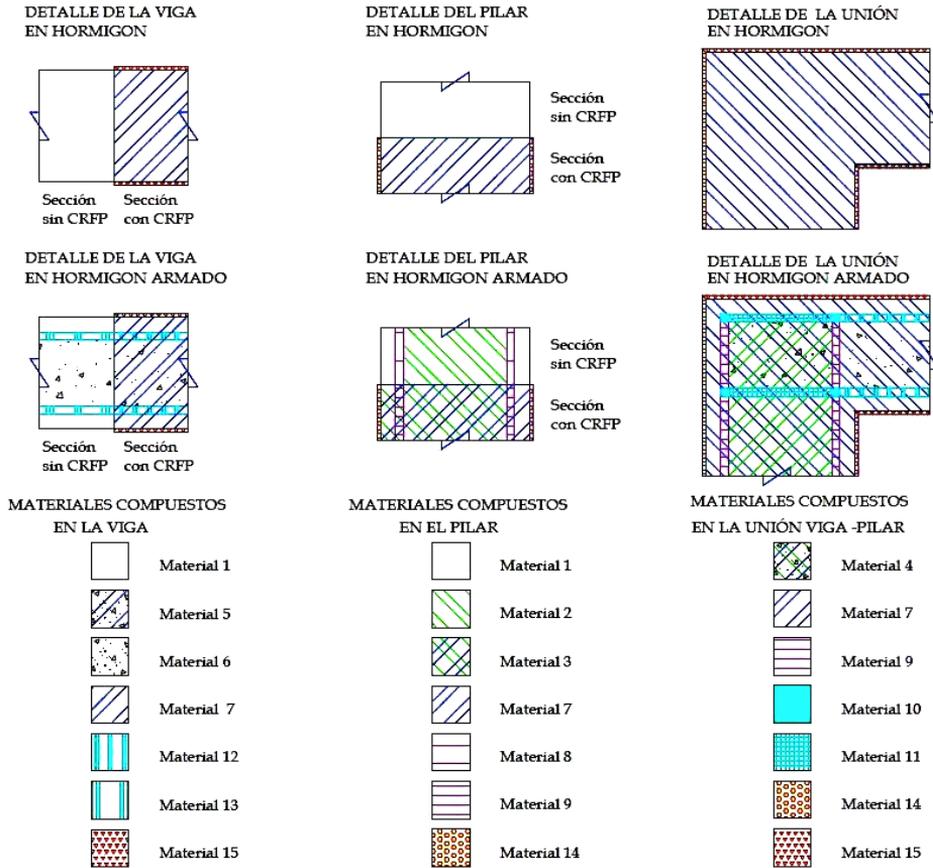


Figura 11.14: Configuración de los materiales compuestos en los pórticos [18].

configuración del refuerzo del sistema, la pérdida de rigidez varía de acuerdo con el desarrollo del daño y de plasticidad. La resistencia máxima de cada caso se indica en la Tabla 11.5.

En lo que respecta al comportamiento de las estructuras de hormigón simple, la resistencia de la estructura aumenta casi un 40% cuando se coloca *CFRP* en la base de las columnas. Por el contrario, en los casos con *CFRP* en la unión y en la viga (SAF y SAFV), el aumento de la resistencia del sistema es pequeño, un 5% y un 6%, respectivamente. Asimismo, se observa que los modelos con refuerzo adicional en la viga (SAFV y SAFVC) muestran un comportamiento dúctil después de alcanzar su capacidad máxima y, en los dos casos conservan una pérdida de resistencia menor al 24%. Se aprecia como el modelo SAFC tiene una tendencia de pérdida de resistencia similar al modelo SAF, donde el refuerzo en las columnas incrementa la resistencia del sistema pero no incide en su ductilidad.

Por otra parte, en los pórticos de hormigón armado, al reforzarse sólo la unión (AF) hay un pequeño incremento en la resistencia del orden del 7%. Cuando el refuerzo se coloca en la base de las columnas (AFC) o más allá de la zona de confinamiento en las vigas (AFV), el aumento de la resistencia llega a un 27%. Al reforzar tanto la base de las columnas como la

Material compuesto	Matriz de hormigón	Acero long.	Acero vert.	Cercos horiz.	Cercos vert.	Matriz polimérica	CFRP 0° horiz.	CFRP 90° vert.
1	100,0	-	-	-	-	-	-	-
2	98,70	-	1,10	0,20	-	-	-	-
3	97,53	-	1,10	0,17	-	0,40	0,40	0,40
4	97,71	-	1,09	-	-	0,40	0,40	0,40
5	98,70	-	-	-	0,10	0,40	0,40	0,40
6	99,90	-	-	-	0,10	-	-	-
7	98,80	-	-	-	-	0,40	0,40	0,40
8	87,13	-	12,67	0,20	-	-	-	-
9	86,04	-	12,59	0,17	-	0,40	0,40	0,40
10	81,51	4,84	12,45	-	-	0,40	0,40	0,40
11	92,87	4,84	1,09	-	-	0,40	0,40	0,40
12	93,86	4,87	-	-	0,07	0,40	0,40	0,40
13	95,00	4,90	-	-	0,10	-	-	-
14	-	-	-	-	-	34,00	66,00	-
15	-	-	-	-	-	34,00	-	66,00

Tabla 11.3: Composición porcentual de componentes en los materiales compuestos de los pórticos [18].

Material	Criterio umbral de daño	$E_x = E_y = E_z$ [MPa]	$\nu$	$\sigma_c$ [MPa]	$\sigma_t$ [MPa]	$G_c$ [kPa·m]	$G_t$ [kPa·m]
Hormigón	Mohr-Coulomb	$2,5 \cdot 10^4$	0,20	30,0	3,0	50,0	5,0
Acero	Von Mises	$2,1 \cdot 10^5$	0,00	270	270	2000	2000
Matriz polimérica	Mohr-Coulomb	$1,2 \cdot 10^4$	0,20	87,5	29,2	36,0	3,0
Fibra de carbono	Von Mises	$1,5 \cdot 10^5$	0,00	2300	2300	2000	2000

Tabla 11.4: Propiedades mecánicas de los materiales componentes de los compuestos en los pórticos.

viga (AFCV), la resistencia se incrementa un 50%. A diferencia de los modelos con hormigón simple, en todos los casos con armadura hay ductilidad independientemente del refuerzo. En los pórticos de hormigón armado, el CFRP como refuerzo, aumenta la capacidad de la estructura, dado que al disminuir el nivel de daño en el hormigón, posterga la plastificación del acero.

Es relevante notar que el refuerzo no aumenta la rigidez lateral de los pórticos, lo que coincide con la observación de Tastani y Pantazopoulou [35]. Con el refuerzo hay un incremento de la resistencia a cortante y a flexión, no obstante, el nivel de incremento de resistencia depende de la configuración del refuerzo que se seleccione y de la armadura de los pórticos. En lo que respecta a la ductilidad, cabe anotar que su aumento depende de la distribución de la armadura; si la armadura es insuficiente, el refuerzo con CFRP incrementa considerablemente la ductilidad del sistema; pero si la armadura aporta por si misma ductilidad al sistema, al reforzarlo el incremento en la ductilidad es imperceptible.

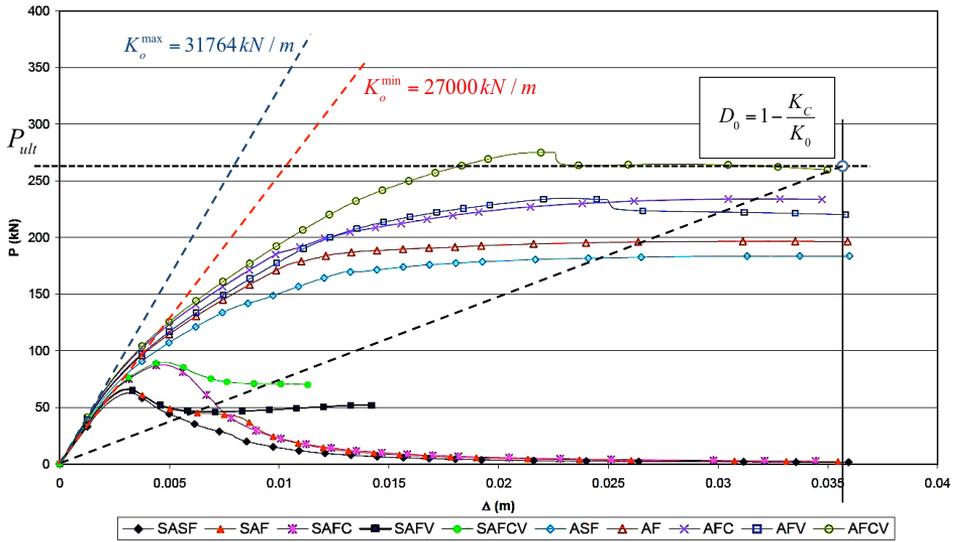


Figura 11.15:  $P - u$  pórticos de hormigón simple y de hormigón con armadura de acero [18].

Hormigón sin armadura	SASF	SAF	SAFC	SAFV*	SAFCV
Fuerza máxima (kN)	62,36	65,48	87,65	66,06	89,73
$\Delta P_{max}$ (m)	0,0030	0,0030	0,0048	0,0031	0,0048
Hormigón con armadura	ASF	AF	AFC	AFV	AFCV
Fuerza máxima (kN)	183,62	196,54	233,98	234,49	274,96
$\Delta P_{max}$ (m)	0,0354	0,0318	0,0312	0,0233	0,0222

Tabla 11.5: Fuerzas máximas y desplazamientos en la mitad del claro de la viga.

(b) Daño o deterioro estructural

La teoría de mezclas permite obtener resultados por cada componente, entre los cuales se puede conocer el estado tensional, deformacional y el daño o deterioro estructural. A continuación se muestra la evolución de la variable interna de daño o el endurecimiento plástico en el compuesto y en los materiales componentes. En la Figura 11.16 se muestra la distribución de daño en los pórticos para el estado de carga última. Los valores se recogen en la Tabla 11.6.

En las estructuras de hormigón simple el daño se localiza y exhibe una considerable pérdida de capacidad, mientras que en las estructuras de hormigón armado el daño se distribuye a lo largo de los elementos estructurales y la pérdida de capacidad de la estructura es pequeña.

Dependiendo del daño que se produce en los diferentes casos, se aprecia que en los pilares y en las vigas es necesario que la longitud del refuerzo externo sea suficientemente larga para evitar el daño localizado en el hormigón y retrasar la plastificación del acero, previniéndose el fallo prematuro del sistema. Como ejemplo, se observa que en las estructuras de hormigón reforzado -al comparar los modelos AFV con AF, y AFCV con AFC (véase Figura 11.13).

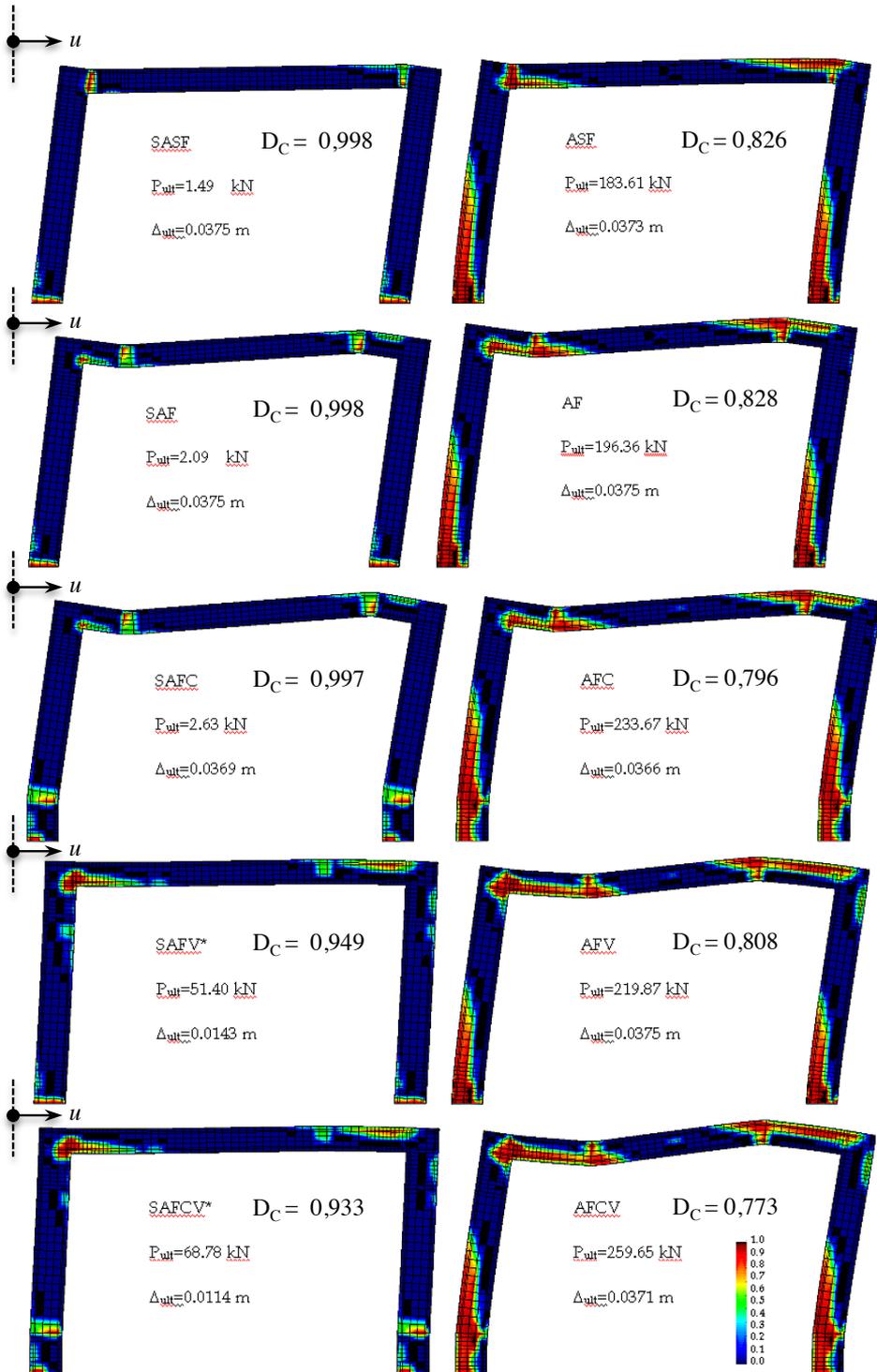


Figura 11.16: Daño estructural producido por un desplazamiento  $u$  en el extremo izquierdo.

los pórticos con mayor longitud de refuerzo en las vigas tienen menor pérdida de rigidez, aunque presentan mayor daño en la unión y tienen una resistencia lateral un 12 % superior. Asimismo, al contrastar los casos AF con AFC o SAF con SAFC, se observa que al colocar el refuerzo en la base de las columnas, la zona con daño en toda la sección transversal se traslada del apoyo de la columna al borde en el que termina el *CFRP*, con lo cual, el refuerzo aumenta la resistencia del sistema. Utilizando la ecuación 11.21 se puede obtener el nivel de daño global que ha alcanzado cada una de las estructuras porticadas en el estado último de desplazamiento  $u_{ult} = 0,0036$  m al que se han exigido todas las estructuras (véanse Figura 11.6 y Figura 11.15).

De éstas pruebas se confirma que al reforzar las estructuras con *CFRP* se aumenta la ductilidad y se reduce la pérdida de resistencia del sistema y el daño máximo estructural. Sin embargo, el nivel de eficiencia del refuerzo de compuesto depende tanto de la configuración de refuerzo que se seleccione, como del tipo y estado de la estructura original.

Sin <i>CFRP</i>				
Modelo de Pórtico	SASF <sup>†</sup>	ASF <sup>‡</sup>		
$P_{ult}$ [kN]	1,490	183,610		
$u_{ult}$ [m]	0,036	0,036		
$K_0$ [kN/m]	27000	29382		
$K_c$ [kN/m] = $P_{ult}/u_{ult}$	41,389	5100,278		
$D_c = 1 - (K_c/K_0)$	0,998	0,826		

		<i>CFRP</i> Unión Viga - Columna		<i>CFRP</i> Unión Viga - Columna y Base	
Modelo de Pórtico	SAF <sup>†</sup>	AF <sup>‡</sup>	SAFC <sup>†</sup>	AFC <sup>‡</sup>	
$P_{ult}$ [kN]	2,090	196,360	2,630	233,670	
$u_{ult}$ [m]	0,036	0,036	0,036	0,036	
$K_0$ [kN/m]	28000	31764,7	28000	31764,7	
$K_c$ [kN/m] = $P_{ult}/u_{ult}$	58,056	5454,444	73,056	6490,833	
$D_c = 1 - (K_c/K_0)$	0,998	0,828	0,997	0,796	

		<i>CFRP</i> Unión Viga extendida Columna y Base		<i>CFRP</i> Unión Viga extendida Columna y Base extendidas	
Modelo de Pórtico	SAFV <sup>†</sup>	AFV <sup>‡</sup>	SAFCV <sup>†</sup>	AFCV <sup>‡</sup>	
$P_{ult}$ [kN]	51,400	219,870	68,780	259,650	
$u_{ult}$ [m]	0,036	0,036	0,036	0,036	
$K_0$ [kN/m]	28000	31764,7	28500	31764,7	
$K_c$ [kN/m] = $P_{ult}/u_{ult}$	1427,778	6107,5	1910,556	7212,5	
$D_c = 1 - (K_c/K_0)$	0,949	0,808	0,933	0,773	

<sup>†</sup> Sin Acero; <sup>‡</sup> Con Acero.

**Tabla 11.6:** Daño global, según ecuación 11.20, alcanzado por cada estructura para el desplazamiento último  $u_{ult} = 0,0036$  m. Máximo daño (0,998) en el modelo **SASF** y mínimo daño (0,773) en el modelo **AFCV**.

## 11.7. Conclusiones

La formulación presentada en este trabajo permite analizar numéricamente el comportamiento de materiales compuestos y de sus componentes dentro de una estructura. Por una parte permite que cada componente del compuesto se analice utilizando la ecuación constitutiva que sea mas conveniente para predecir su comportamiento (elasticidad, plasticidad,

daño, etc.). Por tanto, esta formulación conduce a una herramienta numérica apropiada para el análisis de estructuras compuestas con diversos materiales con diferentes tipos de no linealidades. Al mismo tiempo, los costos computacionales son reducidos al utilizar un mallado continuo único para el análisis de la estructura y sus materiales componentes.

El refuerzo con *FRP* en los pórticos de hormigón simple y armado, es una técnica viable para incrementar la capacidad de la estructura. Además, siempre que se configure adecuadamente el refuerzo en los elementos, se mejora el control de daño y se logra aumentar la ductilidad global del sistema. Según los resultados obtenidos en este análisis, tanto en los modelos de hormigón simple como en los de hormigón armado, el aumento de la resistencia global del sistema estructural depende de la configuración de refuerzo que se coloque. Por ello, es necesario que, a través de la simulación numérica utilizando la teoría de mezclas serie/paralelo, se optimicen los análisis de las estructuras con materiales compuestos para mejorar el diseño del refuerzo de los edificios y de los puentes que necesitan rehabilitación o reparación.

La simulación numérica es una herramienta útil y de gran aplicación en el diseño de soluciones de refuerzo de estructuras de hormigón armado con materiales compuestos. La simulación numérica con elementos finitos junto con la teoría serie/paralelo y los modelos constitutivos de los materiales componentes que ésta controla, permite analizar una estructura con diferentes alternativas de refuerzo, involucrando los modelos constitutivos de los componentes de los materiales compuestos. Esto permite además que se pueda seleccionar las configuraciones más eficientes y se determine la capacidad de resistencia del sistema estructural reforzado, identificando el nivel de daño que se puede alcanzar. Esta aplicación es posible a dos escalas: una local, en donde se estudian los elementos estructurales, en la que los materiales compuestos se utilizan como refuerzo a cortante, a flexión o a compresión; y una escala global, en la que se analiza el comportamiento del sistema estructural al reforzar los elementos que lo requieran de acuerdo con las normativas existentes.

### 11.8. Líneas futuras

La formulación que se propone en este capítulo es bastante general, no obstante es necesario extenderla a problemas termomecánicos, incluido el efecto del fuego sobre las estructuras. Esto abriría un campo de estudio muy importante que cubriría uno de los puntos más débiles y vulnerable de los materiales compuesto de matriz polimérica reforzada con fibras.

También se está trabajando en la simulación numérica del comportamiento de compuestos con fibras cortas, abriendo así la posibilidad de capturar el incremento de ductilidad estructural que aporta este tipo de refuerzo.

Actualmente se está utilizando tejidos para reforzar estructuras. Esto ofrece una excelente alternativa a los laminados multidireccionales. La necesidad de tratar este problema e incorporarlo a la formulación previamente presentada, es una necesidad por el gran crecimiento y aplicabilidad que están teniendo estos materiales compuestos.

Por último, la combinación de la teoría de mezclas y homogeneización abren un potencial de análisis muy grande que permitiría abordar complejas situaciones que suelen presentarse

en las estructuras de materiales compuestos, como así también en el refuerzo de las mismas. Actualmente se está trabajando en esta línea con buenos resultados.

**Agradecimientos** Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España a través de los proyectos RECOMP, Ref. BIA2005-06952, DECOMAR, Ref. MAT2003-08700-C03-02 y DELCOM, Ref. MAT2008-02232/MAT; por el Ministerio de Fomento de España a través del proyecto Reparación y Refuerzo de Estructuras de Hormigón Armado con Materiales Compuestos; por AIRBUS (España), por el Contrato Nro. PBSO-13-06 FEMCOM, por ACCIONA Infraestructuras (España) a través de los proyectos CETIC, Sphera y Prometeo; por la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AECID), Ref. A/024063/09; por programa Alban, Programa de Becas de Alto Nivel de la Unión Europea para América Latina, beca N° E06D101053CO; por el Centro Internacional para los Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), España y por el laboratorio CER-LITEM del Departamento de Resistencia de Materiales de la Universidad Politécnica de Catalunya, Terrassa, España. Así mismo, la redacción del capítulo ha sido posible gracias al apoyo del European Research Council a través del Advanced Grant: ERC-2012-AdG 320815 COMP-DES-MAT *Advanced tools for computational design of engineering materials*. Los autores agradecen sinceramente todo el apoyo recibido.

## Bibliografía seleccionada

Para profundizar en la temática se recomienda la consulta de las siguientes fuentes bibliográficas:

- OLLER S. *Simulación numérica del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. CIMNE (2003).
- OLLER S. *Dinámica No-Lineal*. CIMNE (2001).
- MALVERN, L. *Introduction to the mechanics of continuous medium*. Macmillan Publishing, USA (1969).

## Referencias

- [1] BARBAT A., OLLER S., OÑATE E. AND HANGANU A. Simulation of damage phenomena in reinforced concrete buildings subjected to seismic actions. In *Proc. ICNMEAS, Concepción, Chile* (1992).
- [2] BARBAT A. Y MIQUEL J. *Estructuras sometidas a acciones sísmicas*. CIMNE, Barcelona, España, 1994.
- [3] BARBERO, E. J. *Introduction to composite materials design, Second Edition*. CRC Press, Taylor & Francis, Florida, USA, 2011.
- [4] CAR, E., OLLER, S., AND OÑATE, E. An anisotropic elasto plastic constitutive model for large strain analysis of fiber reinforced composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 185, 2-4 (2000), 245–277.

- [5] CAR, E., ZALAMEA, F., OLLER, S., MIQUEL, J., AND OÑATE, E. Numerical simulation of fiber reinforced composite materials - Two procedures. *International Journal of Solids and Structures* 39, 7 (2002), 1967 – 1986.
- [6] DIPASQUALE, E., AND CAKMAK, A. *On the relation between local and global damage indices*. Technical Report NCEER-89-0034, National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo, 1989.
- [7] HANGANU A., BARBAT A., OLLER S. Y OÑATE E. *Simulación del daño sísmico en edificios de hormigón armado*. CIMNE, Barcelona, España, 1993.
- [8] KACHANOV, L. M. Time of the rupture process under creep conditions. *Izv. Akad. Nauk. SSR, Otd Tekh., Nauk*, 8 (1958), 26–31.
- [9] LUBLINER, J. On the thermodynamic foundations of non-linear solid mechanics. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 7, 3 (1972), 237 – 254.
- [10] LUBLINER, J. *Thermomechanics of deformable bodies*. Department of Civil Engineering University of California, Berkeley USA, 1985.
- [11] LUBLINER, J. *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing, USA, 1990.
- [12] LUBLINER J., OLIVER J., OLLER S., OÑATE E. A plastic damage model for non linear analysis of concrete. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 25, 3 (1989), 299 – 326.
- [13] MALVERN, J. *Introduction to the mechanics of continuous medium*. Macmillan Publishing, USA, 1969.
- [14] MARTÍNEZ, X. *Micro-mechanical simulation of composite materials using the serial/parallel mixing theory*. PhD thesis, Departament de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria (RMEE) - UPC, 2008. Advisor: Sergio Oller.
- [15] MARTÍNEZ, X., AND OLLER, S. Numerical simulation of matrix reinforced composite materials subjected to compression loads. *Archives of Computational Methods in Engineering* 16, 4 (2009), 357–397.
- [16] MARTÍNEZ, X., OLLER, S., AND BARBERO, E. *Mechanical response of composites. Chapter: Study of delamination in composites by using the Serial/Parallel mixing theory and a damage formulation*. Springer. ECCOMAS series Edition, 2008.
- [17] MARTÍNEZ, X., OLLER, S., RASTELLINI, F., AND BARBAT, A. A numerical procedure simulating RC structures reinforced with FRP using the serial/parallel mixing theory. *Computers and Structures* 86, 15-16 (2008), 1604–1618.
- [18] MOLINA, M. *Estudio numérico de la adherencia de los materiales compuestos como refuerzo en estructuras de hormigón armado. Tesis de Master en Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España, 2009.
- [19] MOLINA, M., OLLER, S., BARBAT, A., AND MARTÍNEZ, X. Estudio de estructuras de hormigón reforzadas con FRP mediante la teoría de mezclas serie/paralelo. *Revista Internacional de Ingeniería y Estructuras 13-14*, 1 (2009), 29–54.
- [20] MOLINA, M., OLLER, S., BARBAT, A., AND MARTÍNEZ, X. Análisis numérico de estructuras de hormigón reforzadas con FRP por medio de la teoría de mezclas serie/paralelo. *Revista Internacional de Métodos Numéricos Cálculo y Diseño en Ingeniería* 26, 2 (2010), 135–155.
- [21] MOLINA M., CRUZ J., OLLER S., BARBAT A. AND GIL L. Estudio de la interfaz hormigón-epoxi-FRP de un ensayo de doble cortante por medio de la Teoría de Mezclas Serie/Paralelo. *Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras 13-14*, 1 (2009), 103–121.
- [22] OLIVER, J. AND CERVERA, M. OLLER, S. AND LUBLINER J. Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. *Proceedings of SCI-C. Second Int. Conf. on Computer Aided Design of Concrete Structure, Zell am See, Austria* (1990), 945–958.
- [23] OLLER, S. *Dinámica no lineal*. CIMNE-Ediciones UPC, 2001.
- [24] OLLER, S. *Simulación numérica del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. CIMNE, 2003.

- [25] OLLER, S., OÑATE, E., OLIVER, J., AND LUBLINER, J. Finite element nonlinear analysis of concrete structures using a plastic-damage model. *Engineering Fracture Mechanics* 35, 1-3 (1990), 219 – 231.
- [26] OLLER, S., OÑATE, E., MIQUEL, J., AND BOTELLO, S. A plastic damage constitutive model for composite materials. *International Journal of Solids and Structures* 33, 17 (1996), 2501 – 2518.
- [27] OLLER S., BARBAT A., OÑATE E. AND HANGANU A. A damage model for the seismic analysis of building structures. *Proc. 10th WCEE Madrid, España* (1992).
- [28] OLLER S., BOTELLO S., MIQUEL J. AND OÑATE E. An anisotropic elasto-plastic model based on an isotropic formulation. *International Journal of Engineering Computation* 12, 3 (1995), 245–262.
- [29] OLLER S., OLIVER J., CERVERA M., OÑATE E. Simulación de procesos de localización en mecánica de sólidos mediante un modelo plástico. *I Congreso Español de Métodos Numéricos, Gran Canaria, España* (1990), 423–431.
- [30] OZCAN, O., BINICI, B., AND OZCEBE, G. Improving seismic performance of deficient reinforced concrete columns using carbon fiber-reinforced polymers. *Engineering Structures* 30, 6 (2008), 1632 – 1646.
- [31] PARVIN, A., AND WANG, W. Concrete columns confined by fiber composite wraps under combined axial and cyclic lateral loads. *Composite Structures* 58, 4 (2002), 539 – 549.
- [32] RASTELLINI, F. *Modelización numérica de la no-linealidad constitutiva de laminados compuestos*. PhD thesis, Departament de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria (RMEE) - UPC, 2006. Directors: Sergio Oller and Eugenio Oñate.
- [33] RASTELLINI, F., OLLER, S., SALOMON, O., AND OÑATE, E. Composite materials non-linear modelling for long fibre reinforced laminates: Continuum basis, computational aspects and validations. *Computers and Structures* 86, 9 (2008), 879–896.
- [34] SIMO, J., AND JU, J. Strain and Stress-Based Continuum damage Models. I. Formulation. *International Journal of Solids and Structures* 23, 7 (1987), 821 – 840.
- [35] TASTANI, S., AND PANTAZOPOULOU, S. Detailing procedures for seismic rehabilitation of reinforced concrete members with fiber reinforced polymers. *Engineering Structures* 30, 2 (2008), 450 – 461.
- [36] TURON, A., CAMANHO, P., COSTA, J., AND DÁVILA, C. A damage model for the simulation of delamination in advanced composites under variable-mode loading. *Mechanics of Materials* 38, 11 (2006), 1072 – 1089.
- [37] ZIENKIEWICZ, O. C., AND TAYLOR, L. *The finite element method*. McGraw-Hill, London, England, 1991.