

ANALISIS DINAMICO DE ESTRUCTURAS CON EQUIPOS LIVIANOS

JORGE E. CREMPIEN LABORIE*

y

ERNESTO ARAVENA OLIVA**

**Departamento de Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería,
Universidad de Concepción, Casilla 53-C, Concepción, Chile.*

***Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile,
Casilla 228-3, Santiago, Chile.*

RESUMEN

Se utiliza el método de vibraciones estocásticas para analizar la respuesta de estructuras con equipos. En la obtención de la matriz de correlación modal cruzada de respuesta se emplea el método de vectores de Ritz en un esfuerzo de evitar la resolución del problema de valores y vectores propios en estructuras complejas. Los resultados obtenidos se comparan con el método de superposición modal tradicional.

SUMMARY

The method of random vibration analysis is used to study the response of structures with light attachments. To obtain the modal cross correlation response matrix, the method of Ritz vectors is used in an effort to avoid the eigen value and eigen vector problem in complex structures. The results obtained are then compared to the results obtained using the classical modal supersposition method.

INTRODUCCION

El análisis del comportamiento dinámico de estructuras en las cuales se encuentran instalados equipos ligeros como antenas, tuberías, etc., es un tema que ha atraído la atención de los investigadores desde hace algún tiempo. El procedimiento usual ha sido suponer que la excitación es un proceso estocástico estacionario^{1,2,3,4}, y para la obtención de la respuesta se ha usado, en la mayoría de los casos, el método de superposición modal^{5,6}. Otro camino seguido consiste en suponer que los equipos son una perturbación de la estructura⁷.

En el presente trabajo, la preocupación es la estimación de la respuesta estructural cuando la sollicitación es transiente, como en el caso de excitación sísmica, por lo cual

Recibido: Noviembre 1991

se supondrá que la excitación a que el sistema estructura-equipos está sometido es una aceleración basal modelada por un proceso estocástico Gaussiano, no estacionario tanto en amplitudes como en contenido de frecuencias. Para este efecto se adopta el modelo de Crempien Der-Kiureghian⁸, en el cual la aceleración del suelo está dada por

$$\ddot{u}_g(t) = \sum_{i=1}^{i=m} \psi_i(t) s_i(t) \quad (1)$$

en que $\psi_i(t)$ es una función determinística del tiempo que modula a $s_i(t)$ que es un proceso estocástico Gaussiano de media nula y varianza unitaria y de banda ancha. Este proceso estocástico caracteriza el contenido de frecuencias en una banda de frecuencias determinada D_i , de tal forma que no se traslada con la banda de frecuencia del proceso estocástico $s_j(t)$ para $i \neq j$.

Se ha adoptado el modelo anterior porque representa en forma adecuada la evolución de las amplitudes y del contenido de frecuencias en acelerogramas registrados en terremotos⁹. Las funciones $\psi_i(t)$ se eligen usualmente como funciones Gamma o Beta.

FORMULACION DE LA RESPUESTA ESTRUCTURAL

La respuesta estructural obtiene a partir de la ecuación diferencial de equilibrio dada por

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = -M \mathbf{1} \ddot{u}_g \quad (2)$$

en que M , C y K son las matrices de masa, de amortiguamiento y de rigidez respectivamente. Si se usa el método de superposición modal, la respuesta estructural puede escribirse

$$u(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \phi_i z_i(t) \quad (3)$$

siendo ϕ_i el vector modal i y z_i la coordenada modal i , la cual se obtiene a través de la integral de Duhamel

$$z_i(t) = \frac{\phi_i^T M \mathbf{1}}{\phi_i^T M \phi_i} \int_0^t h_i(t - \tau) \ddot{u}_g(\tau) d\tau \quad (4)$$

en que $h_i(\%)$ es la función de respuesta de impulso unitario del modo i . Por otra parte, como la excitación se ha supuesto de tipo estocástico, la respuesta modal $z_i(t)$ también es un proceso estocástico. Más aún, dado que la estructura es lineal y elástica, entonces la respuesta es también Gaussiana y de media cero, siendo necesario encontrar la matriz de correlación modal cruzada para conocer totalmente su estructura probabilística.

Si se considera una variable de respuesta cualquiera $q(t)$, en general ésta se puede escribir como:

$$q(t) = B u(t) \quad (5)$$

en que B es una matriz de coeficientes de influencia de los desplazamientos de la estructura en la variable $q(t)$. Como la ecuación (5) es lineal, entonces $q(t)$ también es un proceso estocástico gaussiano, no estacionario de media nula. La varianza de $q(t)$ está dada por

$$E\{q^2(t)\} = B^T E\{u^T u\} B \quad (6)$$

o haciendo uso de la ecuación (3), se tiene

$$E\{q^2(t)\} = B^T \Phi^T P(t) \Phi B \quad (7)$$

en que $P(t)$ es la matriz de correlación modal cruzada de respuesta, y que está dada por

$$P_{ij}(t) = E\{z_i(t) z_j(t)\} \quad (8)$$

y Φ es la matriz de los vectores modales. Por lo tanto, la evaluación de la matriz de correlación modal es fundamental en la determinación de la estructura probabilística de la respuesta estructural.

Sin embargo, para estructuras de varios grados de libertad, el primer problema es la determinación de los vectores modales y de las frecuencias propias de vibrar. Una forma de hacer esto mismo es a través del uso de vectores de Ritz como se explica más adelante. La otra dificultad es que en el caso de n grados de libertad y excitación no estacionaria, hay que evaluar $n \times n$ correlaciones modales para cada intervalo de tiempo, lo cual supone una tarea formidable. Afortunadamente, cuando las frecuencias de los modos de vibrar están bien separadas, la correlación entre los modos es despreciable¹⁰, esto sugiere la posibilidad de establecer un criterio que establezca a priori si es necesario calcular la correlación modal para dos modos arbitrarios i y j o no. En el caso de excitación estacionaria este criterio existe¹⁰.

METODO DE VECTORES DE RITZ

El problema anterior se puede facilitar si en lugar de usar los vectores modales resultantes del problema de valores propios del problema dinámico, se usa otro conjunto de vectores ortogonales como base del espacio de las soluciones y que sean más fáciles de obtener. Una forma de obtener un conjunto de vectores con las características mencionadas es a través del uso de vectores de Ritz.

En este caso, la idea es utilizar un espacio con una base de menor dimensión, es decir, se aproxima la solución en un subespacio de dimensión $m < n$, teniéndose una buena aproximación con menos coordenadas.

En este caso se busca representar la respuesta estructural a través de la combinación lineal de un número $r < n$ de vectores linealmente independientes entre sí

$$u(t) = \sum_{i=1}^r x_i v_i(t) \quad (9)$$

donde x_i son vectores de Ritz, linealmente independientes, y $v_i(t)$ son funciones del tiempo desconocidas, que son las coordenadas de Ritz. Si $r = n$, la ecuación (9) es equivalente a la ecuación (3). La idea del método, sin embargo, es que $r < n$ para simplificar el problema, por la respuesta obtenida mediante esta representación es una respuesta aproximada ya que el espacio de la respuesta es diferente al de la representación de Ritz. La elección de los vectores, por lo tanto debe hacerse de manera de garantizar que la solución aproximada sea buena.

Los objetivos de esta transformación, son obtener un nuevo sistema de matrices de rigidez, masa y amortiguamiento (K^* , M^* y C^*) con un tamaño y ancho de banda más reducido que el sistema de matrices original.

La evaluación automática de vectores de Ritz se ha desarrollado en torno a algoritmos numéricos, que generan resultados de buena exactitud con un costo en recursos computacionales menor que el cálculo tradicional de vectores propios.

El método de generación de vectores, adoptado¹¹, está basado en la siguiente relación de recurrencia:

$$K x_i^* = M x_{i-1} \quad i = 2, \dots, r \quad (10)$$

en que, el vector x_i^* es solución del sistema:

$$K x_1^* = f = M \cdot 1 \quad (11)$$

En cada paso del método, los vectores son ortogonalizados a través del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt:

$$x_i = x_i^* - \sum_{j=1} c_j x_j \quad (12)$$

donde:

$$c_j = x_j^t M x_i^* \quad (13)$$

y normalizados como:

$$x_j^t = M x_j = 1 \quad (14)$$

Una vez obtenidos los vectores de Ritz, entonces se puede reducir el sistema de ecuaciones (2) a un sistema con menos ecuaciones, del tipo

$$M^* v + C^* v + K^* v = f^*(s) \ddot{u}_g(t) \quad (15)$$

donde:

$$M^* = X^t M X \quad (16a)$$

$$C^* = X^t C X \quad (16b)$$

$$K^* = X^t K X \quad (16c)$$

$$f^* = (s) = X^t f(s) \quad (16d)$$

Esta última ecuación, puede ser resuelta por métodos directos de integración paso a paso o por la introducción de una transformación adicional para llevar el sistema a la forma desacoplada.

En caso de amortiguamiento proporcional, la solución del problema de valores propios es:

$$K^* Z = M^* Z \Omega^2 \quad (17)$$

y proporciona un conjunto de coordenadas modales Z , las cuales diagonalizan el sistema de ecuaciones (13), y tales que

$$v = \sum_{i=1}^{i=r} Z_i \xi_i(t) \quad (18)$$

en que $\xi_i(t)$ es la coordenada modal asociada al vector Z_i .

La matriz diagonal Ω^2 , representa a los valores propios exactos del sistema reducido y aproximan a las frecuencias del sistema original. Los vectores propios Z son utilizados para generar el set de vectores ortogonales de Ritz, como:

$${}^oX = X Z \quad (19)$$

La matriz oX , ortogonal respecto a las matrices de masa y rigidez del sistema original y aproxima las primeras formas modales exactas de la estructura.

EVALUACION MATRIZ DE CORRELACION MODAL

Si se considera nuevamente las ecuaciones (6), (9) y (18), se tiene que el valor cuadrático esperado de la respuesta $q(t)$, en término de los vectores de Ritz, es:

$$E\{q^2(t)\} = B^T X {}^oX^T E\{\xi_i \xi_j\} X {}^oB \quad (20)$$

y donde

$$E\{\xi_i \xi_j\} = \alpha_i \alpha_j \int_0^t \int_0^t h_i(t - \tau_1) h_j(t - \tau_2) E\{\ddot{u}_g(\tau_1) \ddot{u}_g(\tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2 \quad (21)$$

con:

$$\alpha_i = \frac{X_i^T M 1}{X_i^T M X_i} \quad (22)$$

donde los subíndices i, j identifican a los modos correspondientes. Notemos que el término $E\{z_i z_j\}$ es real y que además cumple que $E\{\xi_i \xi_j\} = E\{\xi_j \xi_i\}$. Por lo tanto, la matriz de correlación modal es real y simétrica. Usando el Teorema de Wiener-Kchintchine y pasando al dominio de la frecuencia se tiene:

$$E\{\xi_i(t) \xi_j(t)\} = \sum_{k=1}^m \int_{D_k} S_k(\omega) I_{ik}(\omega, t) I_{jk}^*(\omega, t) d\omega \quad (23)$$

en que:

$$I_{ik}(\omega, t) = \alpha_i \int_0^t \psi_k(\tau_1) h_i(t - \tau_1) e^{i\omega\tau_1} d\tau_1 \quad (24)$$

En que $I_{jk}(\omega, t)$ es la función de respuesta en evolución y $I_{jk}^*(\omega, t)$ es su complejo conjugado.

Se han desarrollado métodos para evaluar la respuesta modal cruzada, considerando que la excitación es no estacionaria⁹ los cuales se usan en este trabajo, pero con la diferencia que en lugar de usar las coordenadas modales se aplica a las coordenadas de Ritz.

ANALISIS DE ERROR

Hansteen y Bell¹², demostraron que la inexactitud del método de truncación modal es causada por la omisión de componentes de carga que son ortogonales a los modos incluidos en la solución. Por esta razón, es necesario introducir un parámetro que cuantifique qué porcentaje del vector de cargas externos no está incluido en el análisis de superposición.

Por otro lado, el factor de participación modal del sistema reducido, está definido por:

$$p_j = {}^o x_j^t f \quad (25)$$

En el uso de vectores propios o vectores de Ritz el factor de participación modal es un indicador de la contribución de vector ${}^o x_j$ en la respuesta dinámica del sistema.

Para el caso de un vector de carga, este puede ser expresado en función de los r vectores del sistema reducido, de la siguiente forma:

$$f_r = \sum_{j=1}^r q_j M {}^o x_j \quad (26)$$

Si los vectores ${}^o x_j$ cumplen la condición de normalización, se puede demostrar que q_j es idéntico al factor de participación modal p_j . Por lo tanto, el error en la aproximación del vector de carga f , por el sistema reducido, está dado por:

$$e_r = f - f_r = f - \sum_{j=1}^r p_j M^o x_j \quad (27)$$

Con motivo de comparar dos aproximaciones al vector de carga, el error normalizado se define como:

$$e_n = \frac{f^t e_r}{f^t f} \quad (28)$$

El cual mide la fracción del vector de cargas que no es usado en el análisis. El error se muestra en la Figura 2, donde se puede ver que los vectores de Ritz definidos de esta manera convergen más rápido que los vectores modales.

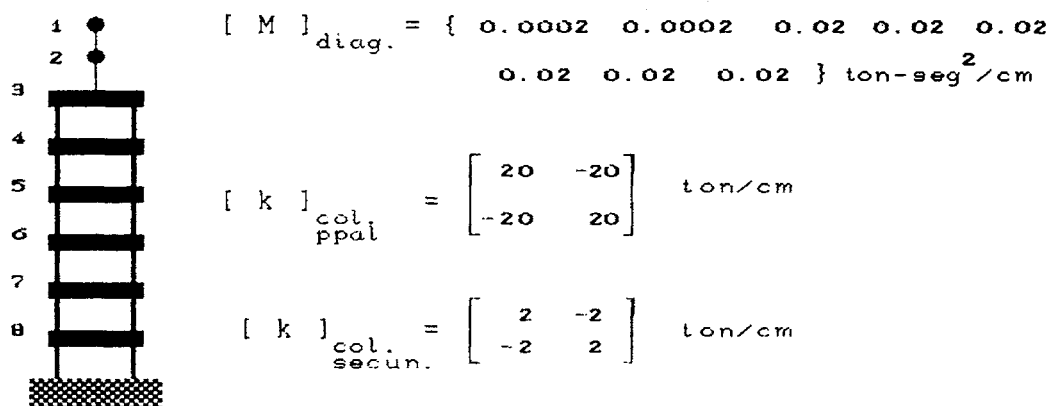


Figura 1. Sistema estructura principal y estructura secundaria.

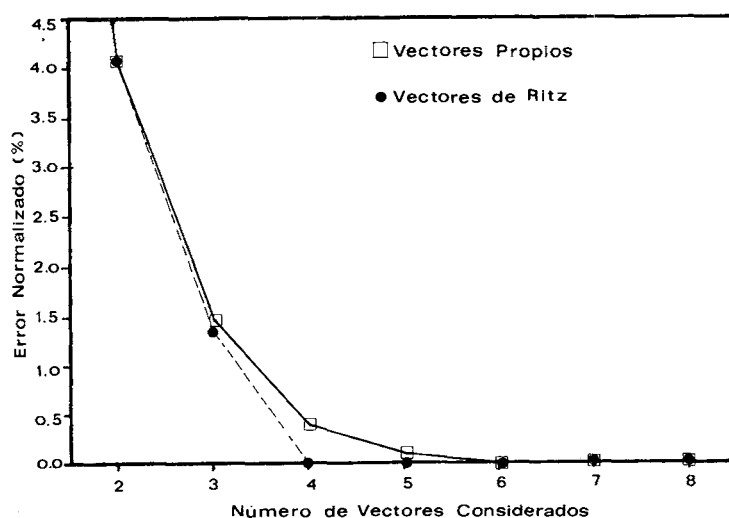


Figura 2. Error normalizado.

EJEMPLO DE APLICACION

A continuación se aplica el método de vectores de Ritz al análisis de un sistema estructural compuesto por una estructura principal y una estructura secundaria. El sistema y sus propiedades se muestran en la Figura 1 junto con las propiedades de rigidez de las columnas. Los resultados obtenidos se comparan con los obtenidos a través del método de superposición modal tradicional.

En la Tabla I se muestran los períodos (T) y sus correspondientes factores de participación modal (α), obtenidos con ambos métodos. En el caso de considerar todos los vectores modales y un número equivalente de vectores de Ritz se puede apreciar que ambos métodos son equivalentes. En las últimas dos columnas de esta tabla se muestran los resultados para el caso de 4 vectores de Ritz que son los que se usan en cálculo de la respuesta del sistema, el error normalizado correspondiente a este caso se muestra en la Figura 2, de donde se puede ver que tiende rápidamente a cero.

No. de Modos	SUPERPOSICION DE VECTORES PROPIOS		SUPERPOSICION DE VECTORES DE RITZ			
	T (seg)	α	T (seg)	α	T (seg)	α
1	0.8267	0.3235	0.8267	0.3235	0.8287	0.3235
2	0.2810	0.1036	0.2810	0.1036	0.2810	0.1036
3	0.1754	0.0570	0.1754	0.0570	0.1748	0.0581
4	0.1331	0.0349	0.1331	0.0349	0.1241	0.0401
5	0.1125	0.0207	0.1125	0.0207		
6	0.1027	0.0099	0.1027	0.0099		
7	0.0999	0.0019	0.0999	0.0019		
8	0.0388	0.0000	0.0388	0.0000		

en que: T = período en segundos.

α = factor de participación modal.

Tabla I. Propiedades dinámicas de la estructura.

A partir de los vectores de Ritz obtenidos se calcula el valor cuadrático esperado

del desplazamiento relativo entre el equipo y la estructura, esto es $u_r(t) = u_1(t) - u_3(t)$ cuando el sistema es solicitado por un proceso estocástico de la forma de la ecuación (1). En este caso, los parámetros que caracterizan el proceso estocástico se obtuvieron a partir del registro de aceleraciones de Orion 8244, N00W, correspondiente al terremoto de San Fernando de 1971. La Figura 3 muestra el resultado obtenido mediante el método de vectores de Ritz con 4 vectores y el método de superposición modal. Como funciones modulantes en la ecuación (1) se usaron funciones Beta. De los resultados se puede ver que el uso del método de Ritz da buenos resultados.

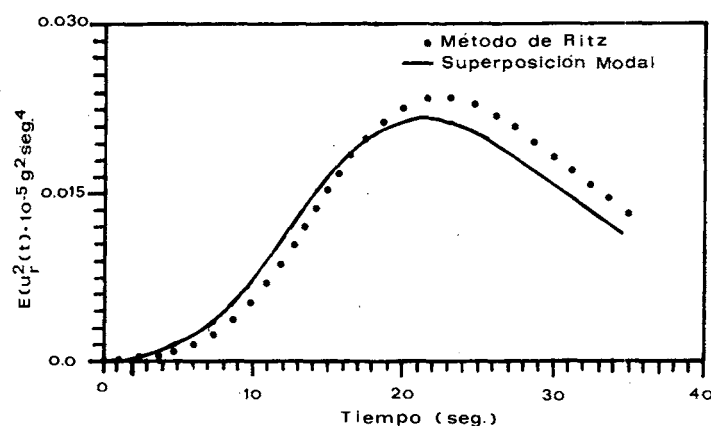


Figura 3. Respuesta Media Cuadrática de Desplazamiento Relativo.

CONCLUSIONES

El método de vectores de Ritz se puede usar con ventaja en el análisis probabilístico de la respuesta de sistemas estructurales con equipos o subestructuras livianas. Los errores que se obtienen se pueden manejar dentro de límites adecuados con un número reducido de vectores lo cual reduce considerablemente el tiempo computacional.

REFERENCIAS

1. T. Igusa y A. Der Kiureghian, "Response Spectrum Method for Systems with Nonclassical Damping", *Proceedings, ASCE-EMD Specialty Conference*, pp. 380-384, West Lafayette, Indiana, (1983).
2. M.P. Singh, "Generation of Seismic Floor Spectra", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 101, No. Em5, pp. 543-545, (1971).
3. T. Igusa, A. Der Kiureghian, J. Sackman, "Modal Decomposition Method for Stationary Response of Nonclassically Damped Systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 12, No. 1, pp. 121-136, (1984).
4. A. Der Kiureghian, T. Igusa, "Stochastic Response of Secondary Systems", *ASCE-AMD Symposium on Random Vibrations, ASM Annual Meeting*, pp. 90-110, New Orleans, Luisiana, (1984).

5. M.C. Lee y J. Penzien, "Stochastic Seismic Analysis of Nuclear Power Plant Structures and Piping Systems Subjected to Multiple Support Excitations", *Report No. UBC/EERC-80/19*, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, (1980).
6. A. Der Kiureghian, J. Sackman, B. Nour-Omid, "Dynamic Response of Light Equipment in Structures", *Report No. UBC/EERC-81/05*, Earthquake Engineering Research Center, University of California, (1981).
7. T. Igusa y A. Der Kiureghian, "Non-Stationary Response of Secondary Systems", *Proceedings, ASMD-EMD Specialty Conference*, pp. 1188-1191, Laramie, Wyoming, (1984).
8. A. Der Kiureghian y J. Crempien, "An Evolutionary Model for Earthquake Ground Motion", *Structural Safety*, Vol. 6, pp. 235-246, (1989).
9. J. Crempien, "A Time-Frequency Evolutionary Model for Earthquake Motion and Structural Response", *Ph. D. Thesis*, Structural Engineering, Mechanics and Materials, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, pp. 128, (1988).
10. A. Der Kiureghian, "Structural Response to Stationary Excitation", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 106, No. EM6, pp. 1195-1213, (1980).
11. E. Wilson, M. Yuan y J.M. Dickens, "Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, pp. 813-821, (1982).
12. O.E. Hansteen y K. Bell, "On the Accuracy of Model Superposition Analysis in Structural Dynamics", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 7, No. 5, pp. 405-411, (1979).