

Introducción al cálculo dinámico de estructuras

Juan Miquel Canet

Alex H. Barbat



CIMNE

Introducción al cálculo dinámico de estructuras

Introducción al cálculo dinámico de estructuras

Juan Miquel Canet

Alex H. Barbat

Ediciones CIMNE

Introducción al cálculo dinámico de estructuras

Juan Miquel Canet canet@cimne.upc.edu

Alex H. Barbat alex.barbat@upc.edu

Edición digital. Octubre 2013

© Los autores

Edita: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)

Gran Capitán s/n. 08034 Barcelona, España

www.cimne.com

ISBN: 978-84-941004-4-4

Depósito legal: B-5459-2013

Queda rigurosamente prohibida la reproducción total o parcial de esta publicación en cualquier forma, ya sea mediante fotocopia, microfilm o cualquier procedimiento sin permiso de los autores

INDICE	pag.
Capítulo 1. Introducción a la dinámica de estructuras	1
1.1 Introducción	1
1.2 Definición de la acción sísmica	2
1.2.1 Acciones dinámicas definidas de forma determinista	2
1.2.2 Acciones dinámicas definidas de forma estocástica	3
1.3 Estructuras y modelos estructurales	4
1.4 Métodos de modelización dinámica	6
1.4.1 Discretización espacial de estructuras	6
1.4.2 Método de las masas concentradas. Grados de libertad	7
1.4.3 Método de los elementos finitos	10
1.5 Modelos dinámicos característicos	13
1.5.1 Modelos de un solo grado de libertad	13
1.5.2 Modelos con varios grados de libertad	14
1.6 Acciones de tipo dinámico	15
1.7 Principios usados en la formulación de las ecuaciones del movimiento	17
1.7.1 Principio de D'Alambert	17
1.7.2 Principio de los trabajos virtuales	17
1.7.3 Principio de Hamilton	17
1.8 Modelos con un solo grado de libertad	18
1.9 Modelos simples con varios grados de libertad	19
1.9.1 Edificios de cortante	19
1.9.2 Modelo general de pórticos	22
1.9.3 Ecuación general de la dinámica	24
1.10 Métodos para solucionar el sistema de ecuaciones de movimiento	24
Capítulo 2 Resolución de las ecuaciones de equilibrio dinámico es sistema de un grado de libertad	26
2.1 Modelos de un grado de libertad. Análisis en el tiempo	26
2.1.1 Modelo no amortiguado	26
2.1.2 Modelo amortiguado. Vibraciones libres	28
2.1.3 Modelo amortiguado. Vibraciones forzadas	33
2.2 Modelos de un grado de libertad. Integración en frecuencias	38
Capítulo 3 Sistemas lineales con varios grados de libertad	41
3.1 Introducción	41
3.2 Desacoplamiento de las ecuaciones del movimiento	41
3.3 Historia de la respuesta en el tiempo	43
3.4 Integración paso a paso	47
3.4.1 Introducción	47
3.4.2 Conceptos básicos de los métodos paso a paso	48
3.4.3 Método de Newmark	50
3.4.4 Método de las diferencias centrales	57
Capítulo 4 Respuesta estructural para el caso sísmico	61
4.1 Introducción	61
4.2 espectros sísmicos de respuesta	62
4.2.1 Definición de los espectros sísmicos de respuesta	62
4.2.2 Seudoespectros de respuesta	63
4.3 Respuesta máxima utilizando espectros de respuesta	65
4.4 Cálculo de edificios de cortante	68
4.4.1 Introducción	68

4.4.2 Formulación del problema	68
Capítulo 5 Sistemas continuos	72
5.1 Introducción	72
5.2 viga recta sometida a esfuerzo axial	72
5.2.1 Formulación	72
5.2.2 Vibraciones libres	73
5.2.3 Vibraciones forzadas	78
5.3 Viga recta trabajando a flexión	80
5.3.1 Formulación	80
5.3.2 Vibraciones libres	81

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA DE ESTRUCTURAS

1.1 INTRODUCCIÓN

En un sentido muy amplio, puede considerarse que un *sistema dinámico* se caracteriza por variables que pueden experimentar variaciones en el tiempo y que, al menos en principio, son predecibles si se conocen las influencias externas que actúan sobre el sistema. En realidad, los desarrollos que se realizan aquí no requieren una definición tan general ya que en él se estudiarán únicamente *sistemas estructurales* o *estructuras*. Por este motivo se considerará, simplemente, que sobre una estructura actúan cargas dinámicas que le producen vibraciones. La evaluación de su comportamiento requiere solucionar (en general numéricamente) las ecuaciones diferenciales que describen dichas vibraciones, una vez definidas las acciones dinámicas de una manera adecuada.

Se dice que una acción tiene carácter dinámico si su variación con el tiempo es rápida y da origen a fuerzas de inercia en las estructuras, de magnitud comparable a la de las fuerzas estáticas. Todas las características de las cargas dinámicas (módulo, dirección, sentido, punto de aplicación), o sólo algunas de ellas, varían con el tiempo. Ejemplos de algunas fuentes importantes de vibración, capaces de afectar a las estructuras son :

- movimientos sísmicos.
- vibraciones causadas por el viento.
- vibraciones causadas por olas y corrientes.
- vibraciones inducidas por explosiones.
- fuerzas debidas a choques o impactos.
- fuerzas producidas por piezas que ruedan y por maquinaria.
- fuerzas producidas por el movimiento de vehículos.

En la definición de las cargas dinámicas puede distinguirse entre el concepto *determinista* y el *no determinista*, denominado también *estocástico* o *aleatorio*. Una carga dinámica tiene características deterministas cuando su variación temporal es completamente conocida en cada instante de tiempo. Por el contrario, una carga dinámica es no determinista si algunos de sus parámetros o su variación con el tiempo han sido definidos estadísticamente.

Se define como *respuesta dinámica* cualquier cantidad que pueda caracterizar el efecto de las cargas dinámicas en una estructura. En la figura 1.1 se ilustra que la *respuesta sísmica* de una estructura es la respuesta dinámica producida por un movimiento del terreno en su base y puede consistir en desplazamientos, aceleraciones, tensiones, deformaciones, etc.

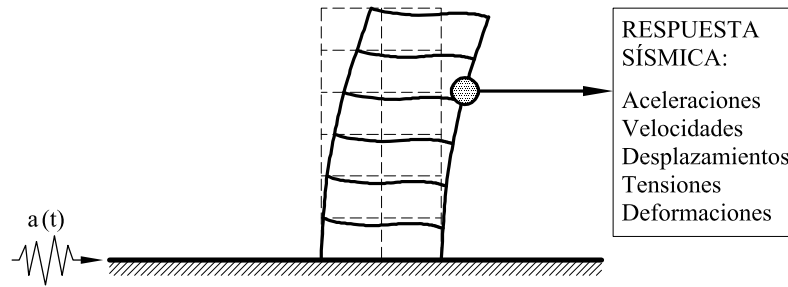


Figura 1.1 Definición de la respuesta sísmica

Matemáticamente el comportamiento dinámico de una estructura se describe mediante un sistema de ecuaciones diferenciales que, en forma sintética, se pueden escribir

$$\mathfrak{R}\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.1)$$

Donde \mathfrak{R} es un operador diferencial, $\mathbf{v}(t)$ el vector que contiene las incógnitas del problema y $\mathbf{f}(t)$ el vector de las acciones. Partiendo de la ecuación (2.1) pueden distinguirse tres tipos de problemas:

- a) Tanto la operación prescrita por el operador \mathfrak{R} como las acciones definidas por el vector \mathbf{f} son conocidas. Resolver el problema significa, en este caso, calcular la respuesta dinámica descrita por el vector \mathbf{v} . Esta formulación corresponde a un problema de *análisis dinámico*.
- b) Cuando el operador \mathfrak{R} y la respuesta \mathbf{v} son conocidos, el problema consiste en calcular la acción dinámica \mathbf{f} que produce la respuesta \mathbf{v} . Éste es un típico problema de *identificación de la acción* o *síntesis de la acción*, el cual encuentra su aplicación práctica en el diseño de aparatos de registro de movimientos sísmicos.
- c) En el caso en que los vectores \mathbf{v} y \mathbf{f} son conocidos, el problema se reduce a identificar el operador \mathfrak{R} . Este problema, conocido con el nombre de *identificación de sistemas*, puede tener diferentes formulaciones dependiendo del problema particular que se estudie.

A estos problemas puede añadirse otro, el de reducir en tiempo real las vibraciones de un sistema estructural, aplicándole fuerzas de control calculadas en función de los valores medidos de su respuesta. A este problema se le denomina *control activo de estructuras*

1.2 DEFINICIÓN DE LA ACCIÓN DINÁMICA

1.2.1 Acciones dinámicas definidas de forma determinista

Las acciones dinámicas definidas utilizando representaciones deterministas son funciones del tiempo cuyo valor en cada instante es conocido. Este tipo de representación es apropiado en el análisis *a posteriori* de una estructura, esto es, en la comprobación de su comportamiento sísmico, una vez que se disponga, por

ejemplo, de un acelerograma de un movimiento sísmico. Si dicho acelerograma es un registro real obtenido en la zona, los resultados del cálculo estructural son únicamente cualitativos, puesto que se basan en la hipótesis optimista de que los terremotos esperados en el futuro en el área tendrán características similares a las del registro utilizado en el análisis.

En la figura 1.2 se ilustran algunas cargas dinámicas definidas de forma determinista, teniendo como criterio de clasificación el tipo de función que describe la carga. En la figura 1.2g puede verse un registro de aceleración sísmica, el cual multiplicado por la masa de la estructura proporcionará la carga sísmica. En la modelización numérica del proceso la función $a(t)$ es *discretizada*, es decir, se la representa mediante una secuencia discreta de pares de puntos (a_k, t_k) , $k = 1, 2, \dots, m$. Se supone una variación lineal de la función $a(t)$ entre dos puntos consecutivos definidos por los instantes de tiempo $(t_k, t_k + \Delta t)$, siendo Δt el incremento de tiempo usado en la discretización. Esta definición determinista de las acciones es usada en los siguientes capítulos para analizar la respuesta dinámica de las estructuras.

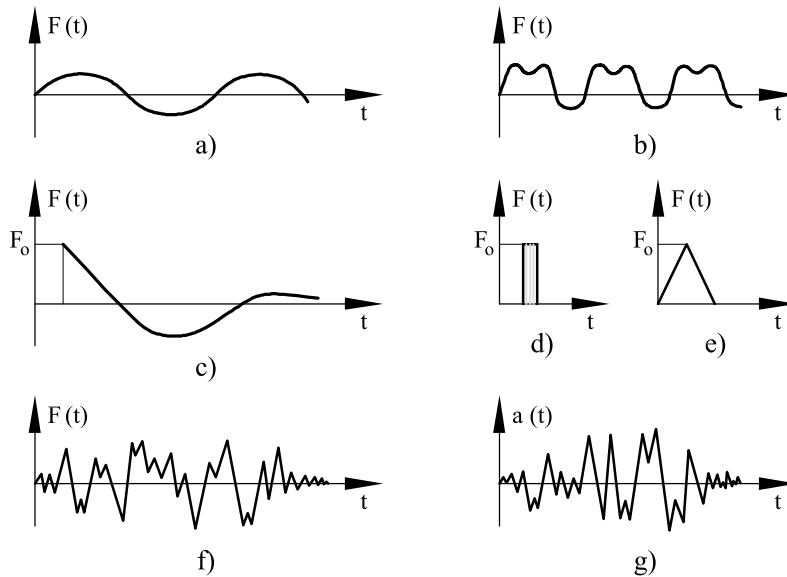


Fig. 1.2 Tipos de cargas dinámicas. a) armónicas; b) periódicas; c) cuasi periódicas; d) y e) fuerzas impulsivas; f) carga dinámica general

En la figura 1.3 puede verse un esquema del mecanismo según el cual las ondas sísmicas actúan sobre las estructuras.

1.2.2 Acciones dinámicas definidas de forma estocástica

La representación estocástica se utiliza cuando la acción dinámica no puede representarse mediante funciones temporales cuyos valores sean conocidos en cada instante de tiempo. Las cargas se simulan mediante familias de funciones definidas conforme a las características probabilistas y utilizando métodos propios de la Teoría de las Probabilidades. Esta operación es seguida por la evaluación de algunos parámetros estadísticos de la respuesta estructural. Tales familias de eventos

caóticos variables en el tiempo, es decir, procesos estocásticos, definen tanto las funciones dinámicas como la respuesta estructural.

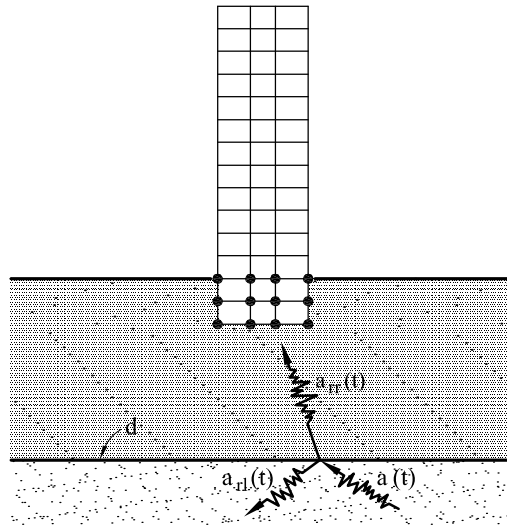


Figura 1.3 Mecanismo de acción de las ondas sísmicas sobre las estructuras. d – discontinuidad; a_{rl} – onda reflejada; a_{rr} – onda refractada

El análisis sísmico es un caso claro en el cual es necesario modelizar la acción dinámica mediante procesos estocásticos, debido a la incertidumbre que los eventos futuros llevan implícita. Obviamente, en el caso sísmico, sólo la acción y la respuesta se modelizan estocásticamente, mientras que los parámetros del modelo estructural se definen de forma determinista.

1.3 ESTRUCTURAS Y MODELOS ESTRUCTURALES

Cuando una estructura está sometida a la acción sísmica, su respuesta es el resultado de *filtrar* el movimiento sísmico del terreno a través de la estructura. En consecuencia, el análisis sísmico implica la definición previa tanto del movimiento del terreno como de las características estructurales. Como en otras ramas de la Mecánica Aplicada, el sujeto del análisis no es la propia estructura, sino un modelo mecánico de la misma que, en este caso, es un modelo dinámico, tal como puede verse esquematizado en el diagrama de la figura 1.4.

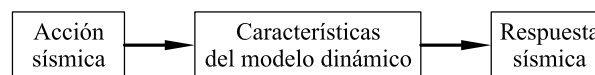


Figura 1.4 Diagrama de bloques del proceso de análisis sísmico de estructuras.

La definición de un modelo dinámico depende del tipo de estructura analizado y pretende no sólo proporcionar una descripción realista del comportamiento estructural, sino también el permitir desarrollar una serie de relaciones simples entre las acciones y las respuestas. La necesidad de la definición previa del modelo dinámico, con objeto de realizar el análisis dinámico de la estructura, demuestra que dicho análisis constituye una *comprobación*: partiendo de una forma estructural

predefinida, asegurarse que la respuesta obtenida cumple con ciertas condiciones previamente establecidas.

Obviamente, en el caso de un problema de diseño, las características de una estructura deben satisfacer ciertas condiciones a fin de que su respuesta permanezca dentro de unos límites adecuados. Sin embargo, tal como se ha visto en el apartado 1.1, hay otros problemas de dinámica estructural que requieren el cumplimiento de condiciones similares a la antes mencionada y que se pueden plantear utilizando los mismos modelos estructurales. Uno de ellos contempla la posibilidad de que la respuesta cumpla con los criterios requeridos, incorporando a la estructura sistemas de absorción de vibraciones o aisladores. A éstos se les denomina *sistemas de control pasivo*, ya que su acción no cambia durante el proceso de vibración de la estructura. Por último, existe la posibilidad de reducir la respuesta dinámica de una estructura utilizando la Teoría del Control Activo de Sistemas. Tal como se ha explicado anteriormente, el control activo consiste en medir la respuesta de la estructura y en utilizar el resultado de dicha medición para determinar las fuerzas que deben aplicarse sobre la estructura a fin de obtener una respuesta con unas características adecuadas, generalmente limitada a unos valores preestablecidos. Los *sensores* que realizan la medición, junto con el *ordenador* en el cual se calcula las fuerzas y el *actuador* que las aplica, constituyen el *sistema de control activo*. El algoritmo usado en el cálculo de las fuerzas proporciona una *ley de control*. Un esquema del control activo de estructuras puede verse en la figura 1.5

La relación entre acciones y respuestas se expresa cuantitativamente por medio de un *modelo matemático*. Las características físicas a tener en cuenta en la definición del modelo matemático son la masa, el amortiguamiento y la rigidez de una estructura. Un cálculo completo supone la determinación de la respuesta sísmica en cada uno de los puntos de la estructura, esto es, en un número infinito de puntos y en un número también infinito de instantes de tiempo, lo cual complica de forma apreciable el problema a resolver.

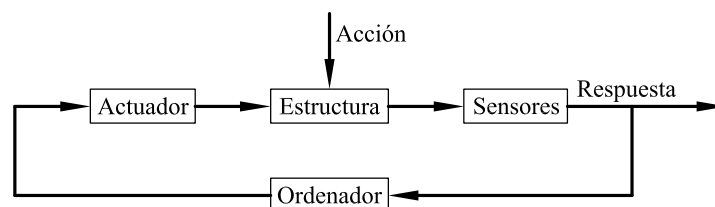


Figura 1.5 Diagrama de bloques del proceso de control activo de estructuras.

Con el objeto de simplificar el modelo matemático del problema, es conveniente definir modelos dinámicos con un número finito de puntos predeterminados en los cuales se calcula la respuesta. Tal definición se realiza a través de una operación denominada *discretización espacial*. Asimismo, es preciso realizar otra serie de simplificaciones al objeto de obtener la respuesta dinámica solamente en un número finito de instantes de tiempo. Esta operación se denomina *discretización temporal*.

Obviamente, la definición de modelos matemáticos y dinámicos depende no sólo de los métodos de discretización usados, sino también de las características mecánicas y geométricas de la estructura. Por ejemplo, en el caso de una estructura construida con materiales homogéneos, isótropos y elásticos y que tenga al mismo tiempo una forma simple, es fácil establecer su modelo. Sin embargo, si los materiales son no homogéneos, son anisótropos y tienen un comportamiento no lineal, como es el caso de algunas estructuras de hormigón armado sometidas a

movimientos sísmicos fuertes, es difícil establecer modelos que describan de forma correcta el comportamiento de la estructura. La imprecisión introducida en los modelos dinámicos y en sus correspondientes modelos matemáticos, incluyendo aquella que afecta a las características del material, tiene una gran influencia en la exactitud de la respuesta calculada.

La figura 1.6 muestra algunas diferencias esenciales entre los efectos de cargas estáticas, dinámicas y sísmicas sobre una estructura, en este caso sobre un pilar. Una primera distinción importante consiste en la presencia de fuerzas de inercia en el caso de cargas dinámicas y cargas sísmicas. Si el pilar de la figura 1.6 (a) está sometido a una carga estática, las tensiones pueden ser calculadas usando las ecuaciones de equilibrio estático. En el caso dinámico de la figura 1.6 (b), las tensiones que aparecen en la estructura están producidas por la acción combinada de una fuerza dinámica $F(t)$ y una fuerza de inercia $F_i(y,t)$. Por otro lado, en el caso sísmico presentado en la figura 1.6 (c), las tensiones están producidas únicamente por las fuerzas de inercia inducidas por el movimiento sísmico del terreno.

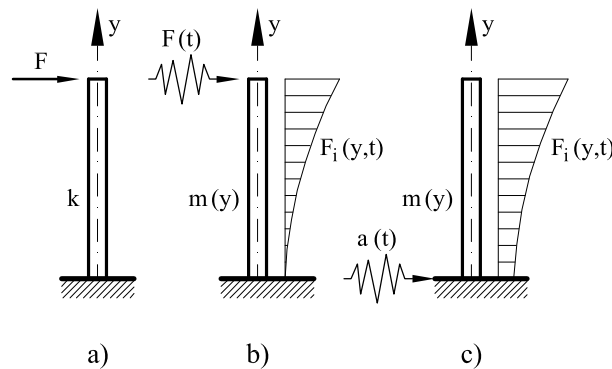


Figura 1.6 Diferencia entre los efectos de una carga (a) estática, (b) dinámica y (c) sísmica.

Otra diferencia entre los casos analizados consiste en la evolución temporal de la respuesta dinámica y de la sísmica. De esta forma, tal y como se ha mencionado previamente, estos problemas no tienen una única solución, sino que el análisis proporciona una solución en cada instante de tiempo, es decir, una *historia temporal* de la respuesta.

Resumiendo, en un análisis dinámico de estructuras de ingeniería es necesaria una discretización espacial para establecer el modelo dinámico de la estructura y una discretización temporal para determinar la respuesta dinámica de la estructura en cada instante de tiempo.

1.4 MÉTODOS DE MODELIZACIÓN DINÁMICA

1.4.1 Discretización espacial de las estructuras

En general, una estructura es un continuo caracterizado por una geometría más o menos complicada y compuesto por materiales con ecuaciones constitutivas complejas. Un modelo dinámico *exacto* daría lugar a complicaciones innecesarias, pues las mejoras que su utilización proporcionaría quedarían anuladas por la complejidad de los modelos matemáticos correspondientes, así como por los errores introducidos durante el proceso de cálculo numérico. Un método de análisis más conveniente, ilustrado en el diagrama de bloques de la figura 1.7, introducirá

estimaciones físicas durante la fase de desarrollo del modelo dinámico, dará una formulación que describa adecuadamente su modelo matemático y, posteriormente, calculará la respuesta mediante procedimientos numéricos apropiados. Obviamente, el mencionado modelo dinámico simplificado está basado en una *discretización espacial* del continuo.



Figura 1.7 Diagrama de bloques para la simulación en el ordenador de la respuesta.

En los siguientes apartados se analizarán algunos de los sistemas de masas distribuidas más usuales mediante modelos discretos. La posibilidad de utilizar este modo de proceder es debida a la importante y continua evolución de los métodos de discretización, unida al desarrollo de procedimientos numéricos apropiados. En la modelización dinámica de estructuras pueden utilizarse fundamentalmente los siguientes métodos de discretización:

- método de las masas concentradas.
- método de los elementos finitos.

De acuerdo con la estructura analizada se elige uno u otro método.

1.4.2 Método de las masas concentradas. Grados de libertad.

El método de las masas concentradas supone que la masa estructural está concentrada en una serie de puntos previamente seleccionados. Dichas masas simulan el efecto de las fuerzas de inercia reales que aparecen en la estructura durante su vibración. El número total de componentes de desplazamiento según los cuales las masas concentradas vibran, se denomina *número de grados de libertad* del modelo. Puede, asimismo, ser definido como el número mínimo de desplazamientos que deben conocerse para tener una definición completa de la deformada del modelo en cada instante de tiempo durante su vibración. Una vez calculada la deformada de la estructura, las tensiones y deformaciones de la misma en cada instante pueden obtenerse utilizando los conceptos proporcionados por el análisis estático.

Si la posición deformada de una estructura durante su vibración puede ser completamente definida mediante un único desplazamiento, entonces la estructura puede ser modelizada mediante un *sistema de un solo grado de libertad*. De esta forma, la deformada del pórtico de la figura 1.8 (a) sometido a un movimiento sísmico en su propio plano, puede definirse en cada instante mediante el desplazamiento horizontal del punto situado al nivel de la viga. Consiguientemente, la masa estructural puede suponerse concentrada en la dirección de este desplazamiento, tal como se ve en la figura 1.8 (b), obteniéndose el modelo dinámico de la figura 1.8 (d).

El depósito de agua elevado de la figura 1.8 (c) puede asimismo analizarse mediante el mismo modelo con un solo grado de libertad de la figura 1.8 (d), pues las vibraciones pueden definirse mediante un único parámetro: el desplazamiento del centro de masas del depósito. El modelo de la figura 1.8 (d) es el más simple

para caracterizar el comportamiento dinámico de una estructura: representa un péndulo invertido y está definido por su masa m y su rigidez k .

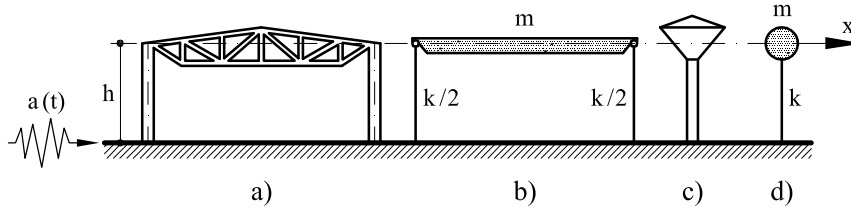


Figura 1.8 Estructuras modelizadas como un sistema de un solo grado de libertad. (a) pórtico; (b) el mismo pórtico con la masa concentrada al nivel de la viga; (c) depósito de agua elevado; (d) modelo dinámico.

La estructura representada en las figura 1.9 (a) tiene *dos grados de libertad*, pues su deformada puede definirse mediante dos desplazamientos: $u_1(t)$ y $u_2(t)$. Su modelo dinámico pueden verse en la figura 1.9 (b).

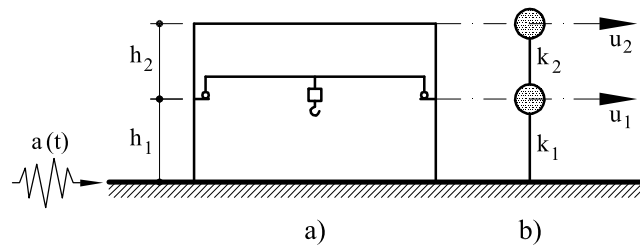


Figura 1.9 Estructuras con dos grados de libertad. (a) nave industrial con puente grúa; (b) modelo dinámico.

El análisis de los sistemas indicados en las figuras 1.8 y 1.9 proporciona otra definición del *número de grados de libertad*: es el número mínimo de ligaduras simples que deben introducirse para devolver a la posición de reposo al sistema vibrante. En la figura 1.10 pueden verse otros modelos dinámicos; las estructuras que representan están sometidas no sólo a cargas sísmicas, sino también a cargas dinámicas de cualquier otro origen.

Los modelos ilustrados en la figura 1.10 (a), (b) y (c) tienen un solo grado de libertad- el desplazamiento de la masa m en dirección horizontal- y están sometidos a una fuerza dinámica $F(t)$. El sistema de la figura 1.10 (d) tiene dos grados de libertad: el desplazamiento en las direcciones x e y . Los dos grados de libertad del modelo de la figura 1.10 (e) corresponden a desplazamientos verticales. El pórtico plano de la figura 1.10 (f), sometido a un movimiento sísmico en su propio plano, ha sido modelizado mediante el sistema con varios grados de libertad de la figura 1.10 (g). En este último tipo de estructura, una simplificación importante que puede realizarse consiste en despreciar la deformación por esfuerzo axial de los pilares y suponer, al mismo tiempo, que la rigidez de las plantas es tal que pueden aceptarse como iguales todos los desplazamientos horizontales de los distintos nudos de un mismo piso. En la figura 1.10 (h) se esquematiza un pórtico tridimensional sujeto a un terremoto que produce vibraciones en la dirección x . En la hipótesis de planta flexible, la estructura tendría diez grados de libertad $(u_1, u_2, \dots, u_{10})$, mientras que si se supone que las plantas son rígidas, el

número de grados de libertad queda reducido a dos, siendo éstos los desplazamientos u_1 y u_2 de los pisos, tal como se observa en la figura 1.10 (i).

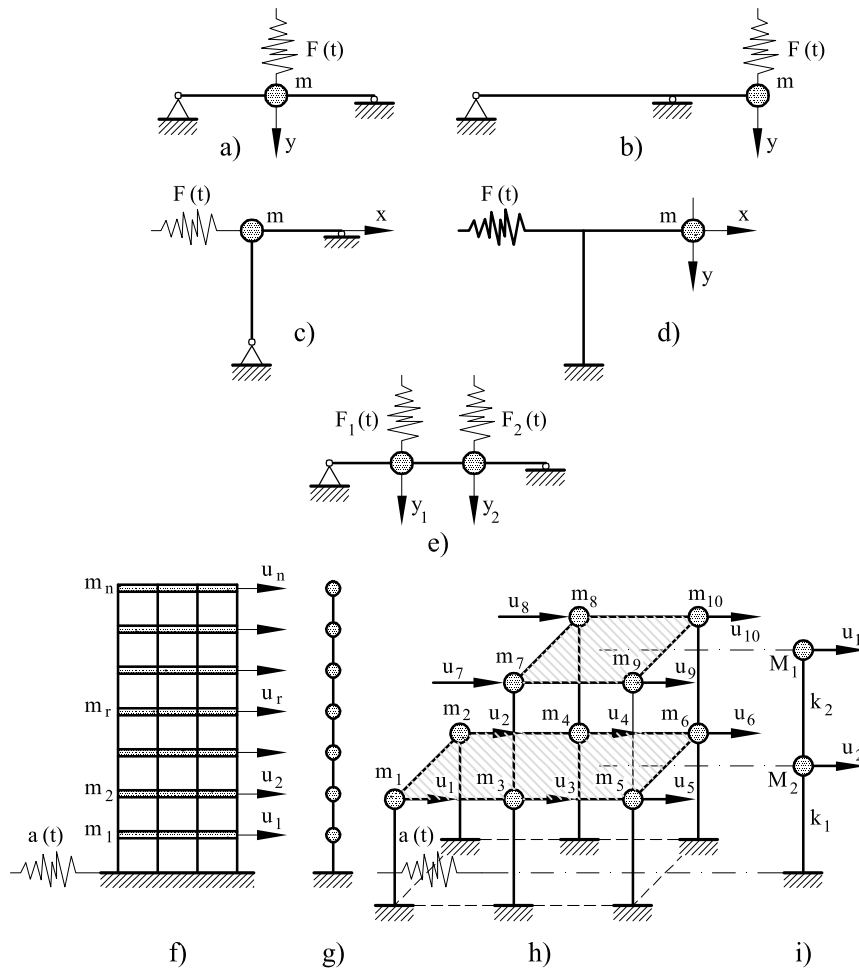


Figura 1.10 Diferentes modelos dinámicos. (a), (b), (c), (d), (e) vigas sometidas a cargas dinámicas; (f) pórtico de cortante; (g) modelo dinámico de un pórtico de cortante; (h) pórtico espacial modelizado como un sistema de 10 grados de libertad; (i) modelo con dos grados de libertad del pórtico del punto (h).

Pueden también desarrollarse modelos que incluyan grados de libertad de giro. Por ejemplo, el modelo de pórtico plano de la figura 1.11 (a) tiene grados de libertad que permiten la rotación de las masas concentradas en los nudos. En la figura 1.11 (b) se detalla un modelo con cuatro grados de libertad para el mismo pórtico.

Considérense que un terremoto actúa de tal forma que produzca torsión en el pórtico tridimensional de la figura 1.12 (a). Su modelo dinámico puede ser sustituido por el de la figura 1.12 (b), que considera la torsión de una forma simplificada, haciendo la hipótesis de plantas rígidas y de deformación por axil nula en los pilares.

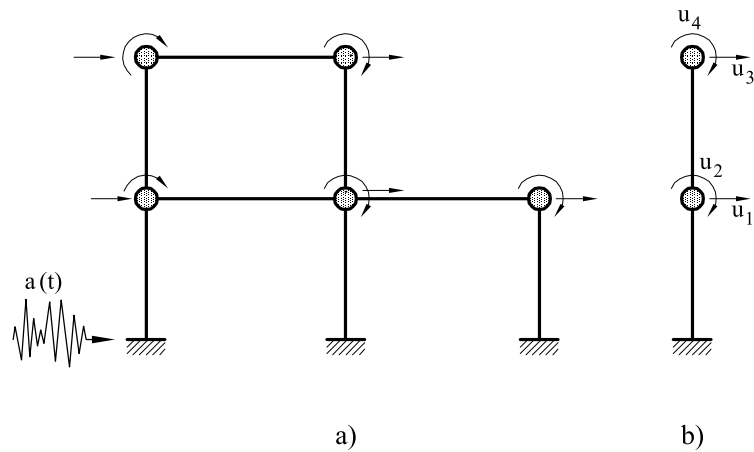


Figura 1.11 Modelo dinámico con grados de libertad de rotación. (a) modelo completo; (b) modelo simplificado con cuatro grados de libertad.

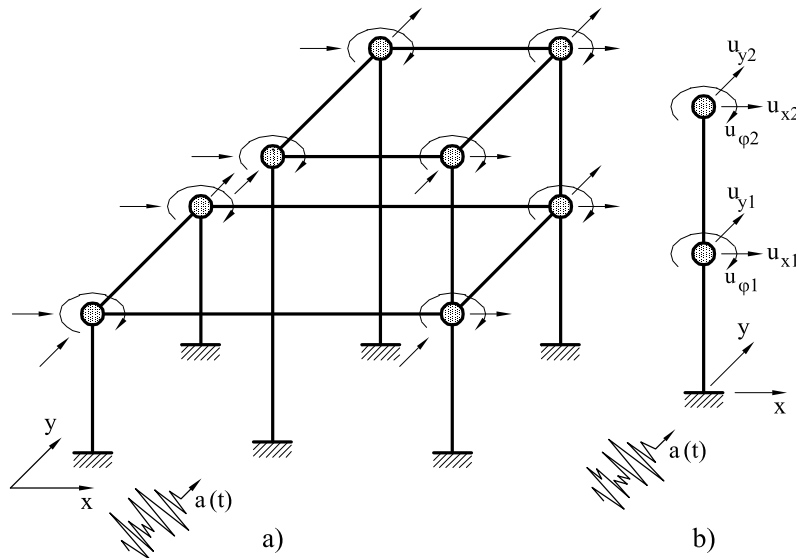


Figura 1.12 Modelo dinámico de pórtico tridimensional con torsión. (a) modelo completo; (b) modelo simplificado.

La identificación de los grados de libertad de una estructura es una operación que requiere gran rigor, habida cuenta de su importante influencia en los resultados del análisis dinámico. Los errores en esta operación convierten la solución en inexacta con respecto a la verdadera respuesta de la estructura. Debe ponerse el acento en que el método de las masas concentradas es muy eficiente en la modelización de aquellas estructuras caracterizadas por una concentración real de su masa en algunos puntos discretos. En tal caso, el modelo dinámico se obtiene concentrando la totalidad de la masa en estos puntos, de tal forma que el resto de la estructura tiene solamente rigidez, pero no masa.

1.4.3 Método de los elementos finitos.

El método de los elementos finitos ha sido ampliamente usado en la discretización de cualquier tipo de estructuras. Una de sus ventajas más importantes consiste en que las aproximaciones de tipo físico realizadas en el proceso de

discretización siguen una metodología unitaria y sistemática [***]. El continuo analizado es sustituido por un número finito de subdominios interconectados entre sí en un número finito de puntos denominados *nodos*. El comportamiento dinámico del continuo original está gobernado por las leyes de la Mecánica del Medio Continuo. En el método de los elementos finitos las funciones solución no se definen en todo el continuo, sino que sus valores numéricos se calculan únicamente en los nodos. La función solución se obtiene en cualquier otro punto del continuo utilizando unas *funciones de interpolación adecuadas*. Un *elemento finito* es un subdominio en el cual se definen las funciones de interpolación. La exactitud de la solución depende del número de elementos empleados en la discretización del continuo, así como del tipo de funciones de interpolación utilizadas.

a) *Discretización del continuo elástico*. En la figura 1.13 se dibuja un continuo discretizado; el campo de desplazamientos v_i del elemento i puede expresarse en función del vector de los desplazamientos nodales \mathbf{u}_i usando la matriz de funciones de interpolación $\mathbf{N}_i(x, y, z)$.

$$v_i(x, y, z, t) = \mathbf{N}_i(x, y, z) \mathbf{u}_i(t) \quad (1.2)$$

Las incógnitas del problema serán los desplazamientos nodales \mathbf{u}_i de cada elemento i . Se introduce el vector \mathbf{V} que contiene todos los desplazamientos del continuo discretizado

$$\mathbf{V}^T = [\mathbf{v}_1^T \ \mathbf{v}_2^T \ \dots \ \mathbf{v}_i^T \ \dots \ \mathbf{v}_n^T] \quad (1.3)$$

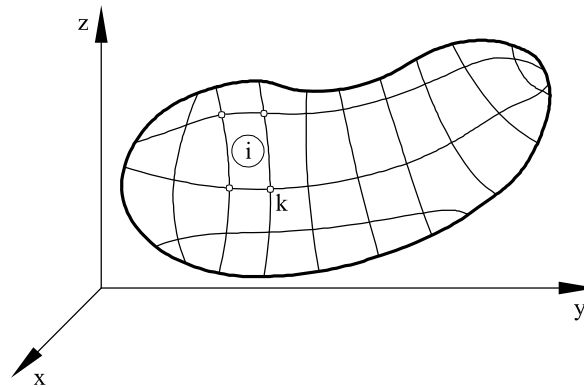


Figura 1.13 Continuo discretizado. k -nodo; i -elemento.

Donde n es el número de elementos usados en la discretización. Análogamente se define el vector \mathbf{U} de desplazamientos nodales de toda la pieza

$$\mathbf{U}^T = [\mathbf{u}_1^T \ \mathbf{u}_2^T \ \dots \ \mathbf{u}_i^T \ \dots \ \mathbf{u}_n^T] \quad (1.4)$$

Asimismo, la matriz total de funciones de interpolación \mathbf{R} será

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & & & & \\ & \mathbf{N}_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{N}_i & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots \\ & & & & & \mathbf{N}_n \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Así pues, para el continuo discretizado puede escribirse la siguiente relación matricial:

$$\mathbf{V}^T = \mathbf{R} \mathbf{U} \quad (1.6)$$

Los vectores $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ que contienen las tensiones y deformaciones, respectivamente, se definen de forma similar. De esta manera, una vez definidos los elementos y las incógnitas del problema, puede plantearse el sistema completo de ecuaciones que gobierna el mismo. Las ecuaciones de continuidad y equilibrio entre contornos de elementos se satisfacen imponiendo condiciones de continuidad y equilibrio en los nodos del continuo discretizado, eligiendo funciones de forma apropiadas.

Como puede verse en la figura 1.14, es posible usar distintos tipos de elementos en el desarrollo de modelos dinámicos para distintos tipos de estructuras.

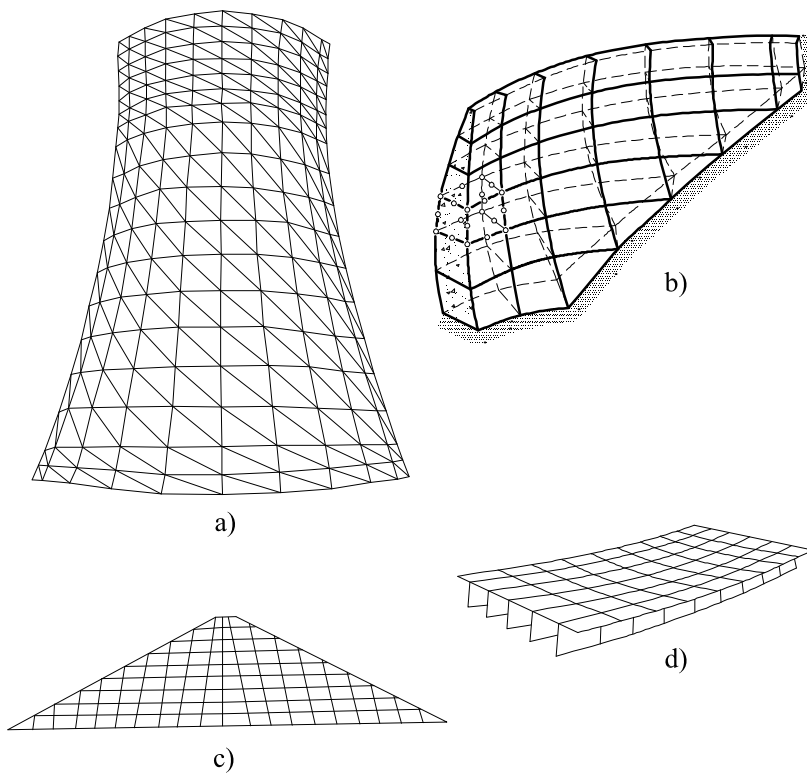


Figura 1.14 Diferentes estructuras discretizadas por el método de los elementos finitos. (a) torre de refrigeración; (b) presa bóveda; (c) presa de tierra; (d) puente.

b) *Discretización del dominio fluido.* La discretización de un dominio fluido, cuyas ecuaciones se formulan más adelante, sigue los mismos principios descritos anteriormente. El dominio fluido se discretiza en un número finito de elementos interconectados entre sí en los nodos. Las incógnitas son, en este caso, las presiones $p_i(x, y, z, t)$ en el interior de cada elemento i , las cuales se expresan en función de las presiones nodales γ_i a través de las funciones de interpolación \mathbf{q}_i

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{q}_i^T \boldsymbol{\gamma}_i \quad (1.7)$$

Para el dominio entero discretizado la ecuación (1.7) se convierte en

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Gamma}_a \quad (1.8)$$

donde \mathbf{P} contiene las funciones \mathbf{p}_i definidas en cada elemento

$$\mathbf{P}^T = [\mathbf{p}_1^T \ \mathbf{p}_2^T \ \dots \ \mathbf{p}_i^T \ \dots \ \mathbf{p}_N^T] \quad (1.9)$$

la matriz \mathbf{Q} contiene las funciones de interpolación \mathbf{q}_i

$$\mathbf{Q}^T = [\mathbf{q}_1^T \ \mathbf{q}_2^T \ \dots \ \mathbf{q}_i^T \ \dots \ \mathbf{q}_N^T] \quad (1.10)$$

y el vector $\boldsymbol{\Gamma}_a$ contiene las presiones nodales de cada nodo de los elementos

$$\boldsymbol{\Gamma}_a^T = [\boldsymbol{\gamma}_1^T \ \boldsymbol{\gamma}_2^T \ \dots \ \boldsymbol{\gamma}_i^T \ \dots \ \boldsymbol{\gamma}_N^T] \quad (1.11)$$

1.5 MODELOS DINÁMICOS CARACTERÍSTICOS

1.5.1 Modelos con un solo grado de libertad

En este apartado se describen algunos modelos dinámicos de amplia utilización en capítulos posteriores. El modelo dinámico más simple es el conservativo con un solo grado de libertad dibujado en la figura 1.17(a). Se caracteriza por su masa m y su rigidez k . Se hace la hipótesis de que su masa es desplazada desde la posición de reposo por alguna causa externa y se supone que durante su vibración no recibe energía externa. Como este modelo teórico no disipa energía, el movimiento oscilatorio no tiene fin y se le denomina *vibración libre no amortiguada*.

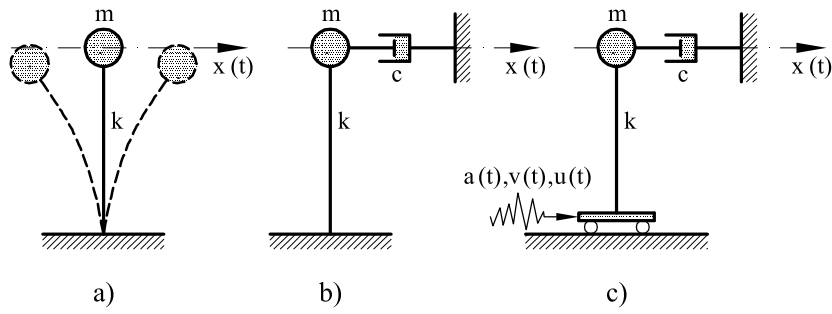


Figura 1.15 Modelos con un solo grado de libertad. a) modelo conservativo, b) modelo con amortiguamiento; c) modelo sísmico.

El modelo de la figura 1.15(b) tiene un amortiguador con un coeficiente de amortiguamiento c y por tanto es no conservativo: permite perder energía. Este comportamiento es más realista, aunque la causa del movimiento sigue siendo una excitación inicial (desplazamiento, velocidad o aceleración), la cual actúa previamente a la oscilación del modelo. A este tipo de movimiento se le denomina *vibración libre amortiguada*.

El sistema de la figura 1.15(c) corresponde al *caso sísmico*. El movimiento del terreno, caracterizado por desplazamiento $u(t)$, velocidad $v(t)$ y aceleración $a(t)$, actúa sobre el cimiento y se supone que se propaga en la dirección x , produciendo vibraciones que provocan la traslación de la masa m en la misma dirección x .

1.5.2 Modelos con varios grados de libertad

Los modelos con un solo grado de libertad descritos anteriormente, pueden generalizarse para varios grados de libertad. El modelo de la figura 1.16a es conservativo, mientras que el dibujado en la figura 1.16b es no conservativo. Finalmente, el representado en la figura 1.16c corresponde al caso sísmico.

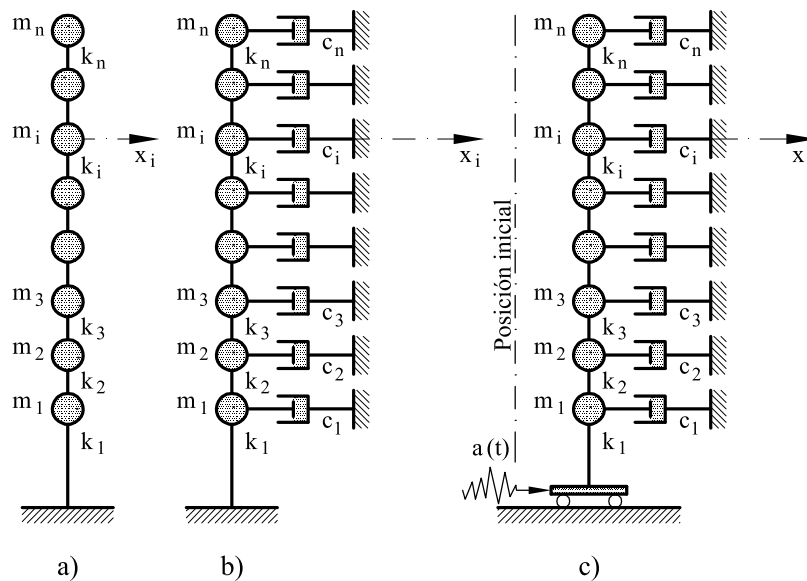


Figura 1.16 Modelos con varios grados de libertad. a) modelo conservativo; b) modelo con amortiguamiento; c) modelo sísmico.

1.6 ACCIONES DE TIPO DINÁMICO

En el apartado 1.1 se han citado algunos tipos de acciones capaces de producir efectos dinámicos en las estructuras. En el presente apartado se desarrollarán de forma necesariamente breve las características de cada una de ellas.

- a) *Movimientos sísmicos.* Aunque más adelante, en este libro, se analizarán en profundidad los efectos producidos por los terremotos en las estructuras, es conveniente proceder seguidamente a una breve descripción de los mismos.

Aunque existen movimientos sísmicos de distinto origen, los más importantes y destructivos son los de origen tectónico. Están producidos por la brusca liberación de energía en la frontera entre dos placas tectónicas que avanzan una hacia la otra. Como consecuencia de este fenómeno se producen roturas y movimientos bruscos que generan ondas dinámicas (ondas sísmicas) que avanzan en todas direcciones. Los denominados movimientos sísmicos se producen cuando tales ondas llegan a la superficie terrestre. En tales casos se producen movimientos y aceleraciones en la base de las estructuras cuya consecuencia más importante es la aparición de fuerzas de inercia, fundamentalmente horizontales, que actúan sobre las distintas masas de la estructura. Dichas fuerzas, si no han sido previstas, pueden producir importantes daños e incluso el colapso de la construcción.

- b) *Vibraciones causadas por el viento.* Los efectos causados por el viento en las construcciones civiles son básicamente de tres tipos: Fuerzas debidas a la presión del viento como consecuencia de anularse la velocidad del mismo, efectos de inestabilidad aeroelástica tipo flameo y por último los efectos producidos por los vórtices y remolinos.

Los efectos de inestabilidad aeroelástica pueden aparecer fundamentalmente en puentes colgantes o atirantados de grandes luces, mientras que los vórtices y remolinos afectan preferentemente a edificios de considerable altura y formas no convencionales.

Los efectos producidos por las presiones son los más corrientes en las estructuras y los que contemplan la mayoría de las normas. Su estudio se basa en las siguientes consideraciones: la velocidad del viento puede descomponerse en una velocidad media v_m (en general la media se toma sobre un intervalo temporal de diez minutos) y una velocidad oscilante v' alrededor de la media:

$$v = v_m + v' \quad (1.12)$$

La presión producida por el viento viene dada por:

$$p = \frac{1}{2} \rho C_D v^2 \quad (1.13)$$

en donde ρ es la densidad del aire, C_D es un coeficiente de forma (coeficiente de arrastre) y cuyo valor está, en general, tabulado para diferentes tipos de estructuras y v es la velocidad. Introduciendo (1.12) en (1.13):

$$p = \frac{1}{2} \rho C_D (v_m + v')^2 = \frac{1}{2} \rho C_D v_m^2 + \rho C_D v_m v' + \frac{1}{2} \rho C_D v'^2$$

y linealizando la expresión anterior

$$p = \frac{1}{2} \rho C_D v_m^2 + \rho C_D v_m v'$$
(1.14)

Es decir, la presión que ejerce el viento sobre una estructura es la suma de una presión media (estática) y de una presión variable con el tiempo. El espectro de las velocidades v' es conocido en función de distintos parámetros, por lo que la expresión (1.14) constituye el punto de partida de los estudios dinámicos sobre el viento.

- c) *Vibraciones causadas por olas y corrientes.* Su efecto sobre las estructuras marinas reviste considerable importancia. Suele tratarse, en general, de fuerzas de tipo periódico. En muchos casos es preciso recurrir a ensayos en laboratorio para determinar su valor.
- d) *Vibraciones inducidas por explosiones.* La presión producida por una explosión consiste generalmente en un pulso u onda de presión de intensidad muy elevada (en ocasiones de varios Megapascals) y duración muy corta, seguida de una disminución de presión o vacío, de duración algo mayor.
- e) *Fuerzas debidas o choques o impactos.* El valor y las características de las fuerzas debidas a impacto es muy variable, dependiendo fundamentalmente de la velocidad de choque. A velocidades bajas o muy bajas los efectos son cuasiestáticos. El carácter dinámico de la acción así como su intensidad aumentan con la velocidad del choque. Además, según esta última va aumentando, aumenta también el valor de la frecuencia de excitación, desarrollándose frecuencias muy elevadas para grandes velocidades. Las tensiones y deformaciones que se producen son, en general, muy elevadas, por lo cual si se quieren obtener resultados realistas hay que realizar cálculos no lineales.
- f) *Fuerzas producidas por maquinaria.* Son fuerzas de tipo periódico, que en gran parte provienen del movimiento de masas descentradas. Su efecto es importante en el cálculo de las cimentaciones de las mismas.
- g) *Fuerzas producidas por el tráfico.* El movimiento de vehículos produce fuerzas de tipo dinámico en puentes tanto de carreteras como de ferrocarril. Su espectro es en general conocido. Su valor depende obviamente de la velocidad del vehículo y del estado de la superficie de rodadura. Recientemente, la propia excitación producida por el tráfico se está utilizando para determinar el estado resistente o de conservación de la estructura.

1.7 PRINCIPIOS USADOS EN LA FORMULACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Las expresiones matemáticas que gobiernan la respuesta dinámica de las estructuras se conocen con el nombre de ecuaciones del movimiento. Dichas ecuaciones pueden obtenerse a partir de cualquiera de los siguientes principios de la mecánica clásica:

- Principio de D'Alembert
- Principio de los trabajos virtuales
- Principio de Hamilton

A continuación se indican algunos conceptos básicos cuya aplicación permite obtener las ecuaciones del movimiento a partir de dichos principios.

1.7.1 Principio de D'Alembert

Proporciona el método más directo para escribir las ecuaciones del movimiento. Puede formularse como sigue: un sistema dinámico está en equilibrio cuando todas las fuerzas que actúan en el mismo, incluidas las de inercia, cumplen las ecuaciones de equilibrio estático en cada instante de tiempo. Las fuerzas de inercia las proporciona la segunda ley de Newton

$$(F_i)_j(t) = -m_j \ddot{u}_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.15)$$

en donde $\ddot{u}_j(t)$ es la aceleración de la masa m_j del sistema.

1.7.2 Principio de los trabajos virtuales

El principio de los trabajos virtuales establece que un sistema se encuentra en equilibrio bajo la acción de unas fuerzas externas que actúan sobre él, incluidas las de inercia, si para cualquier campo de desplazamientos virtuales¹ que se imponga al sistema, el trabajo (debido a estos desplazamientos) realizado por las fuerzas externas es igual al realizado por las fuerzas internas. Las ecuaciones del movimiento se obtienen expresando, para cada grado de libertad, el trabajo que debido a dichos desplazamientos realizan las fuerzas.

1.7.3 Principio de Hamilton

A la expresión

$$\Pi_H = \int_{t_1}^{t_2} (E_p - E_c) dt + \int_{t_1}^{t_2} E_d dt \quad (1.16)$$

¹ Un desplazamiento virtual se define como un desplazamiento infinitesimal arbitrario que satisface las condiciones de contorno.

se le denomina funcional de Hamilton. E_p y E_c son, respectivamente, la energía potencial y cinética, mientras que E_d es el trabajo correspondiente a las fuerzas de amortiguamiento y a otras fuerzas externas no conservativas.

El principio variacional de Hamilton establece que un sistema está en equilibrio dinámico si se cumple la siguiente condición:

$$\delta\Pi_H = 0 \quad (1.17)$$

en donde δ representa la variación del funcional en el intervalo de tiempo (t_1, t_2) .

1.8 MODELOS CON UN SOLO GRADO DE LIBERTAD

La ecuación del movimiento correspondiente al modelo sísmico de la figura 1.17 (a) puede deducirse mediante el principio de d'Alambert. Considérese que se separa la masa de sus vínculos por las fuerzas correspondientes, tal como puede verse en la figura 1.17 (b). De esta forma, la ecuación de equilibrio se escribe como

$$F_i(t) - F_e(t) - F_a(t) = 0 \quad (1.18)$$

donde $F_i(t)$, $F_e(t)$ y $F_a(t)$ son las fuerzas de inercia, elásticas y de amortiguamiento, respectivamente.

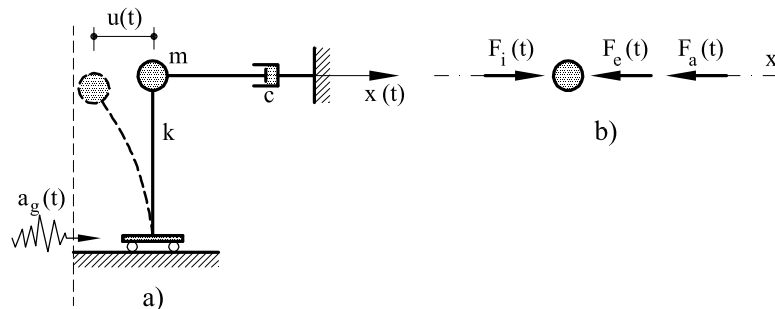


Figura 1.17 Modelo sísmico con un solo grado de libertad. (a) modelo sísmico; (b) equilibrio de fuerzas.

La fuerza elástica es proporcional al desplazamiento de la masa m y a la rigidez k del modelo

$$F_e(t) = k u(t) \quad (1.19)$$

La fuerza de inercia que actúa sobre la masa m está originada por la aceleración total de la masa

$$F_i(t) = -m [\ddot{u}(t) + a_g(t)] \quad (1.20)$$

donde $a_g(t)$ es la aceleración sísmica que actúa en la base de la estructura (ver figura 1.17). Para la fuerza de amortiguamiento se admite la hipótesis de Voigt, según la cual el amortiguamiento es *viscoso*, es decir, proporcional a la velocidad.

$$F_a(t) = c\dot{u}(t) \quad (1.21)$$

Con estas definiciones la ecuación de equilibrio (1.18) puede expresarse como

$$m[\ddot{u}(t) + a_g(t)] + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (1.22)$$

ecuación que, realizando algunas transformaciones, se convierte en

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -ma_g(t) = F(t) \quad (1.23)$$

$F(t) = -ma_g(t)$ es la fuerza sísmica que actúa en la masa m . Obviamente, dicha fuerza es una fuerza de inercia.

Lógicamente, cuando no se está en presencia de una acción sísmica, sino de una acción dinámica cualquiera, la ecuación (1.18) se reescribe

$$F_i(t) - F_e(t) - F_a(t) = F(t)$$

En donde $F(t)$ es la fuerza dinámica que actúa sobre el sistema.

La ecuación resultante (1.23) puede particularizarse para otros dos casos de sistemas con un solo grado de libertad. Al caso de vibraciones libres amortiguadas le corresponde la ecuación

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (1.24)$$

mientras que para el caso de vibraciones libres no amortiguadas se tiene

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (1.25)$$

1.9 MODELOS SIMPLES CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

1.9.1 Edificios de cortante

El modelo con varios grados de libertad más sencillo que puede utilizarse para describir el comportamiento dinámico de los edificios es el correspondiente a edificios de cortante. Dicho modelo se representa esquemáticamente en la figura 1.18. Está basado en la hipótesis de que las plantas son infinitamente rígidas y de que los únicos movimientos posibles de los nudos son horizontales.

El modelo de la figura 1.18 (a) está sometido a una aceleración horizontal de origen sísmico de valor $a_g(t)$. Las ecuaciones del movimiento pueden deducirse estableciendo el equilibrio dinámico de cada masa, de acuerdo con el principio de d'Alembert. Aislando las masas m_r e introduciendo todas las fuerzas correspondientes, incluidas las de inercia, resulta el esquema de la figura 1.19 (b). Expresando el equilibrio dinámico de la masa m_r se obtiene

$$F_{i_r}(t) - F_{e_r}(t) - F_{a_r}(t) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (1.26)$$

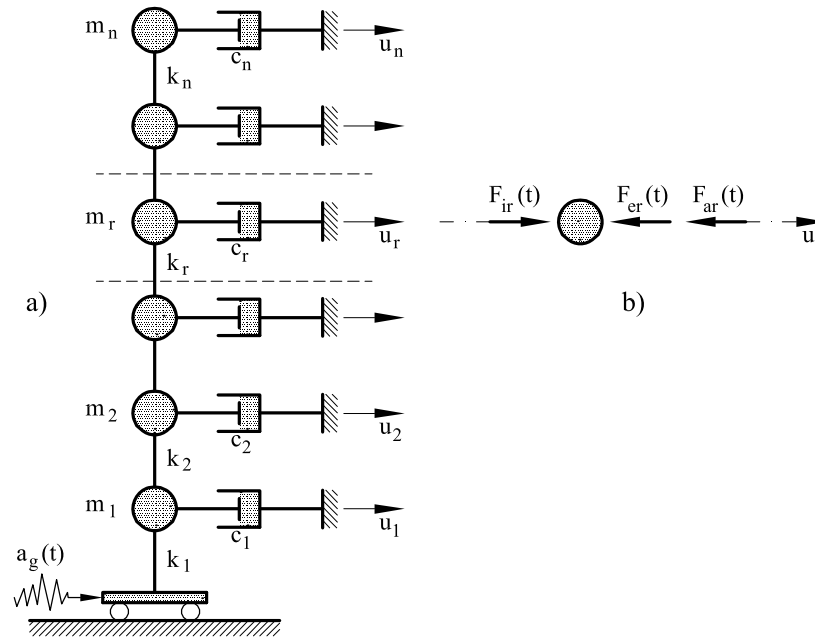


Figura 1.18 Modelo de edificio de cortante. (a) modelo sísmico; (b) equilibrio de fuerzas.

Obviamente, el modelo dinámico completo está en equilibrio si lo están todas y cada una de sus masas. Escribiendo una ecuación de equilibrio del tipo (1.26) para cada una de las masas y expresando en forma matricial al conjunto de todas ellas, se tiene

$$\mathbf{F}_i(t) - \mathbf{F}_e(t) - \mathbf{F}_a(t) = \mathbf{0} \quad (1.27)$$

Las ecuaciones (1.19), (1.20) y (1.21), que definen las fuerzas elásticas, de inercia y de amortiguamiento para modelos con un solo grado de libertad, se convierten en este caso en las siguientes expresiones matriciales:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_e(t) &= \mathbf{K} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{F}_i(t) &= -\mathbf{M} [\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{J} a_g(t)] \\ \mathbf{F}_a(t) &= \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) \end{aligned} \quad (1.28)$$

en donde, en este caso, el vector \mathbf{J} es un vector columna formado por unos. \mathbf{K} es la matriz de rigidez la cual, en el caso general, tiene la forma

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1i} & k_{j1} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2i} & k_{j2} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & & k_{ii} & k_{ij} & & k_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{ni} & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

donde un elemento k_{ij} representa la fuerza correspondiente al grado de libertad i , debida a un desplazamiento unidad producido en el grado de libertad j . En el caso particular del modelo de edificios de cortante, la matriz de rigidez se escribe, en forma explícita, de la siguiente forma:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & & & & & & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 & & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & 0 & -k_r & k_r + k_{r+1} & -k_{r+1} & 0 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & & & & & & & k_n \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

en donde k_r es la rigidez cortante del grupo de pilares r . Su expresión es

$$k_r = \frac{12EI_r}{h_r^3}$$

siendo I_r la suma de los momentos de inercia de los pilares situados entre las plantas r y $r-1$ y h_r la altura de tales pilares. La matriz de masa \mathbf{M} es diagonal para modelos tales como el de la figura 1.18 (a)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & & & & & & \\ & m_2 & & & & & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & m_r & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & m_n \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

y la matriz de amortiguamiento \mathbf{C} puede considerarse del mismo tipo

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & & & & & & & & & & \\ & c_2 & & & & & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & c_r & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & c_n \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.28) en (1.27), se obtienen las ecuaciones de movimiento del modelo

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{J}a_g(t) \quad (1.32.a)$$

Para el caso en que la acción dinámica no sea de tipo sísmico, la ecuación anterior se reescribe:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (1.32.b)$$

1.9.2 Modelo general de pórticos

En el caso más general de una estructura tridimensional formada por barras, en el caso sísmico es preciso considerar en el modelo seis grados de libertad por nudo. Al mismo tiempo es posible incluir en las ecuaciones del movimiento el efecto de la propagación de un terremoto en una dirección arbitraria respecto a la estructura. Para ello, la aceleración del terreno $a_g(t)$ se descompone en sus componentes $a_{gx}(t)$, $a_{gy}(t)$ y $a_{gz}(t)$, tal como puede verse en la figura 1.19.

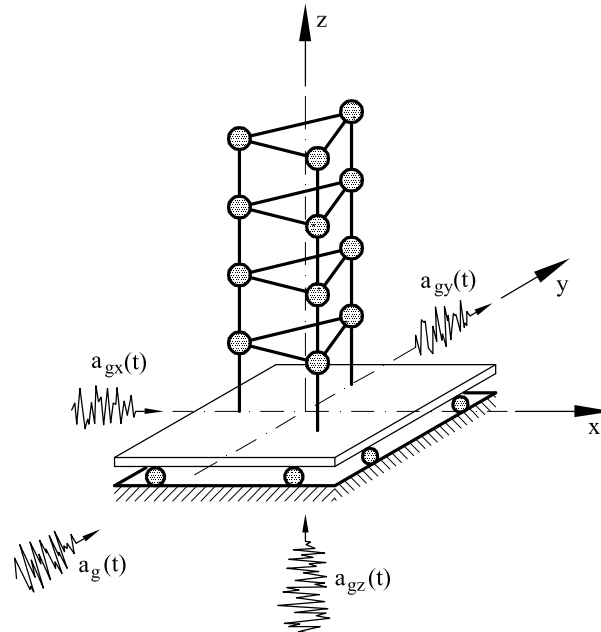


Figura 1.19 Acción sísmica en un modelo tridimensional.

La ecuación del movimiento (1.32) se modifica para tener en cuenta, en primer lugar, que cada masa tiene seis movimientos (tres desplazamientos y tres giros) y también para incluir la nueva definición de $a_g(t)$, resultando,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{M}\left[\mathbf{J}_x a_{gx}(t) + \mathbf{J}_y a_{gy}(t) + \mathbf{J}_z a_{gz}(t)\right] \quad (1.33)$$

El vector de incógnitas $\mathbf{u}(t)$ tiene seis elementos por cada grado de libertad r : tres traslaciones (u_{xr}, u_{yr}, u_{zr}) y tres rotaciones ($\varphi_{xr}, \varphi_{yr}, \varphi_{zr}$), siendo de la forma

$$[\mathbf{u}(t)]^T = \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{y1} & u_{z1} & \varphi_{x1} & \varphi_{y1} & \varphi_{z1} & \dots & u_{xr} & u_{yr} & u_{zr} & \varphi_{xr} & \varphi_{yr} & \varphi_{zr} & \dots \\ \dots & u_{xn} & u_{yn} & u_{zn} & \varphi_{xn} & \varphi_{yn} & \varphi_{zn} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

Obviamente, los modelos dinámicos usados en el análisis incluirán solamente algunos de estos grados de libertad, dependiendo de las características de la estructura estudiada. En el sistema de ecuaciones diferenciales (1.33) se han utilizado nuevas notaciones

$$\mathbf{J}_x^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{J}_y^T = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{J}_z^T = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

La formulación dada a los vectores de fuerza sísmica asegura que los componentes de la aceleración tengan elementos no nulos solamente para los grados de libertad de traslación. Debe remarcar que las matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} de (1.33) se han ampliado de acuerdo con la definición del vector $\mathbf{u}(t)$. Finalmente, es preciso señalar que, en general, suele realizarse un análisis sísmico para cada una de las componentes de la aceleración sísmica.

Puede obtenerse una formulación alternativa escribiendo las ecuaciones del movimiento de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{M}\mathbf{J}a_g(t) \quad (1.35)$$

\mathbf{J} es en este caso el vector que realiza la descomposición de $a_g(t)$ en las tres direcciones (x, y, z) y tiene valores distintos de cero solamente para los grados de libertad del modelo correspondientes a una traslación.

Las vibraciones libres amortiguadas en el modelo dinámico se expresan como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (1.36)$$

y cuando se prescinde del amortiguamiento resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (1.37)$$

el cual describe las vibraciones libres no amortiguadas del modelo.

En todas las ecuaciones del movimiento (1.33), (1.35), (1.36) y (1.37) la matriz de rigidez \mathbf{K} es exactamente la misma que en el caso estático, mientras que la matriz de masa \mathbf{M} es normalmente diagonal. Puesto que en el vector de desplazamiento $\mathbf{u}(t)$ se han considerado las rotaciones, es necesario incluir en la matriz de masa \mathbf{M} la inercia de rotación. La influencia de estos elementos en la solución del problema es en general pequeña, siendo éstos sustituidos, en la mayoría de los casos, por un cero. Sin embargo, es importante anticipar algunos conceptos que serán discutidos con mayor detalle más adelante. La presencia de elementos nulos en la matriz de masa diagonal da lugar a autofrecuencias infinitas en el modelo dinámico y, en consecuencia, aparecen

dificultades numéricas si se calculan todos los autovalores de la ecuación (1.37). En tal caso es conveniente condensar el sistema de ecuaciones del movimiento, previamente al cálculo de autovalores, para eliminar dichos grados de libertad. Otra posibilidad para obviar el problema mencionado consiste en utilizar procedimientos numéricos que calculen exclusivamente las frecuencias más bajas del modelo. Posteriormente, en el cálculo de la solución se incluirán sólo dichas frecuencias, debido a su influencia decisiva en la respuesta estructural.

1.9.3 Ecuación general de la dinámica

En base a las expresiones desarrolladas anteriormente, la ecuación general de la dinámica para sistemas lineales de muchos grados de libertad se escribe

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{M}\mathbf{J}a_g \quad (1.38.a)$$

O bien,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (1.38.b)$$

con los significados vistos anteriormente.

Para la matriz \mathbf{C} se adopta, en muchas ocasiones, una expresión conocida con el nombre de amortiguamiento proporcional o amortiguamiento de Rayleigh. En tal caso, \mathbf{C} se escribe

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (1.39)$$

Puede demostrarse que para sistemas no lineales, la ecuación (1.38) se transforma en:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \mathbf{F}_{in}^{t+\Delta t} = \mathbf{M}\mathbf{J}a_g(t + \Delta t) \quad (1.40)$$

en donde $\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$, $\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$ son las aceleraciones y velocidades en el tiempo $t + \Delta t$ y $\mathbf{F}_{in}^{t+\Delta t}$ son las fuerzas internas resistentes.

1.10 MÉTODOS PARA SOLUCIONAR EL SISTEMA DE ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

La respuesta sísmica de las estructuras se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales del movimiento que corresponda al tipo de sistema dinámico estudiado. En todas las ecuaciones dinámicas deducidas en este capítulo la acción sísmica está caracterizada en forma determinista mediante la aceleración $a_g(t)$ del movimiento sísmico del terreno. La respuesta dinámica de la estructura se obtiene mediante alguno de los procedimientos que se exponen en el capítulo siguiente. Los procedimientos que solucionan la ecuación de entrada-salida del tipo (1.38) son:

- El análisis modal.
- El análisis en el campo complejo de la frecuencia.
- La resolución directa de las ecuaciones del movimiento mediante técnicas de integración paso a paso.

La eficacia de cada uno de los procedimientos anteriores depende del tipo de problema a resolver. Aunque es difícil dar reglas de aplicación universal, sí puede considerarse que el análisis modal es el más utilizado en problemas lineales. Los problemas de interacción puede resolverse utilizando el dominio de la frecuencia. Los métodos de integración paso a paso son básicamente usados en la resolución de problemas no lineales.

Capítulo 2

RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO DINÁMICO EN SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

2.1 MODELOS CON UN GRADO DE LIBERTAD. ANÁLISIS EN EL TIEMPO

2.1.1 Modelo no amortiguado

Las características de los modelos con un solo grado de libertad se definen estudiando las vibraciones libres no amortiguadas. Ello corresponde al modelo conservativo de la figura 2.1, cuyo movimiento está gobernado por la ecuación (1.25), que se escribe aquí de nuevo

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (2.1)$$

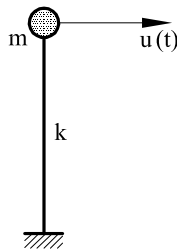


Figura 2.1 Modelo conservativo con un solo grado de libertad.

El modelo de la figura 2.1 vibra debido a algunas condiciones iniciales, bien sean de desplazamiento, bien de velocidad o de aceleración y no está sometido a ningún tipo de perturbaciones durante su vibración. Al mismo tiempo, durante su vibración, el modelo no disipa la energía inicial que se le ha dado.

Dividiendo la ecuación (2.1) por m y usando la notación

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

se transforma en

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0 \quad (2.2)$$

La magnitud ω se denomina *pulsación* o *frecuencia circular*, o simplemente *frecuencia* de vibración del modelo, y viene expresada en *radianes por segundo*. Dicha pulsación es una de las características dinámicas del sistema. Otra característica es el *período natural* T , definido por

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.3)$$

y medido en *segundos*. Finalmente, la *frecuencia cíclica o natural* f viene dada por

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.4)$$

y se expresa en *ciclos por segundo* o *Hertz*.

La solución general de la ecuación (2.2) puede escribirse de la forma

$$u(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \psi) \quad (2.5)$$

donde A es la amplitud del movimiento y ψ el ángulo de fase. Los valores de A y ψ se calculan a partir de las condiciones iniciales del problema. Por ejemplo, para un desplazamiento inicial $u(0) = u_0$ y una velocidad inicial $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$, resultan los valores

$$A = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2} \quad (2.6)$$

$$\tan \psi = \frac{\dot{u}_0}{\omega u_0}$$

La ecuación que define la frecuencia circular ω puede transformarse con el fin de obtener una expresión más práctica. Puede reescribirse como

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.7)$$

y sustituyendo

$$m = \frac{G}{g}$$

donde G es el peso y g la aceleración de la gravedad, queda

$$\omega = g^{\frac{1}{2}} \sqrt{1/(G/k)} \quad (2.8)$$

G/k es el desplazamiento estático (al que se denominará x_{SG}) producido por el peso G en la dirección del grado de libertad. Introduciendo en (2.8) x_{SG} expresado en cm y g en cm/s^2 , se obtiene

$$\omega = \sqrt{981} \sqrt{1/x_{SG}} \text{ (rad/s)} \quad (2.9)$$

T se calcula ahora utilizando (2.3)

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{981}} \sqrt{x_{SG}} \quad (2.10)$$

y realizando las operaciones indicadas en (2.10), se obtiene la *fórmula de Geiger*

$$T = 0.2 \sqrt{x_{SG}} \quad (s) \quad (2.11)$$

Esta fórmula tiene la ventaja que permite una correlación entre las características dinámicas y un desplazamiento estático del modelo. Una vez obtenido T , la ecuación (2.4) permite el cálculo de las otras dos características dinámicas del modelo.

2.1.2 Modelo amortiguado. Vibraciones libres

Las fuerzas de amortiguamiento en las estructuras están producidas por diversas causas, entre las que pueden citarse las siguientes:

- Rozamiento entre superficies de deslizamiento, las cuales pueden estar secas o lubricadas; la fuerza de amortiguamiento, de acuerdo con la hipótesis de Coulomb, es proporcional a la fuerza normal a la superficie de contacto. La mencionada fuerza normal se considera constante e independiente de los desplazamientos y velocidades.
- Amortiguamiento debido a las vibraciones de la estructura situada en un medio exterior (en general gases o líquidos).
- Amortiguamiento debido a la fricción interna del propio material de la estructura, debido principalmente a su imperfecta elasticidad. En este caso, el amortiguamiento es proporcional a la fuerza de recuperación y se le denomina amortiguamiento estructural.

A menudo se usa en el cálculo dinámico de estructuras un *amortiguamiento viscoso*, basado en el modelo de Kelvin-Voigt y que es proporcional a la velocidad. La razón más importante de su utilización es, por una parte, su simplicidad y, por otra, la suposición que se hace de que dicho amortiguamiento caracteriza el amortiguamiento global de toda la estructura; en tales casos se le denomina *amortiguamiento viscoso equivalente*. Como consecuencia, se supone que la correspondiente fuerza de amortiguamiento produce la misma disipación de energía que el amortiguamiento estructural real. Por estas razones, se describe en este apartado la utilización de este tipo de definición del amortiguamiento en el análisis sísmico de estructuras.

El amortiguamiento puede definirse estudiando las vibraciones del modelo dinámico de la figura 2.2. El modelo de vibraciones libres amortiguadas viene descrito por la ecuación (1.24), la cual se escribe otra vez aquí

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (2.12)$$

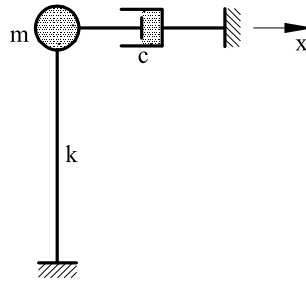


Figura 2.2 Modelo con un grado de libertad con amortiguamiento.

Si se divide la ecuación del movimiento (2.12) por m , resulta

$$\ddot{u}(t) + 2\beta\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0 \quad (2.13)$$

en donde se ha introducido la notación

$$\frac{c}{m} = 2\beta \quad (2.14)$$

La solución de (2.13) se obtiene sustituyendo

$$u(t) = e^{rt} \quad (2.15)$$

lo cual proporciona la ecuación característica

$$r^2 + 2\beta r + \omega^2 = 0$$

cuyas soluciones son

$$r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2} \quad (2.16)$$

El *amortiguamiento crítico*, descrito mediante los coeficientes c_c o β_c , se define por la ecuación

$$\beta_c^2 - \omega^2 = 0 \quad (2.17)$$

De la ecuación (2.17) resulta

$$\beta_c = \omega \quad (2.18)$$

Y utilizando (2.14) se obtiene el coeficiente c_c

$$c_c = 2m\beta_c = 2m\omega \quad (2.19)$$

El caso para el cual el amortiguamiento es superior al crítico

$$c > c_C \quad (2.20)$$

corresponde a *sistemas sobreamortiguados*. Esta situación normalmente no se presenta en Ingeniería Civil, por lo que no se discutirá aquí este caso. Como única observación, citar que en tales condiciones la estructura no oscila, sino que vuelve a su posición de origen sin vibrar.

El caso del *amortiguamiento inferior al crítico* suele ser el habitual en estructuras sometidas a fuerzas dinámicas. Se define por la relación

$$c < c_C \quad (2.21)$$

Sin embargo, este tipo de amortiguamiento puede definirse mejor, introduciendo otro coeficiente de amortiguamiento mediante la relación

$$\xi = \frac{c}{c_C} \quad (2.22)$$

en donde ξ es conocido como *tanto por uno de amortiguamiento respecto al crítico* o también *fracción del amortiguamiento crítico*. Utilizando la ecuación (2.19), dicha fracción se expresa como

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} \quad (2.23)$$

y sustituyendo (2.14) en esta última expresión, resulta

$$\xi = \frac{\beta}{\omega} \quad (2.24)$$

En este caso, la cantidad $\beta^2 - \omega^2$ en (2.16) es negativa y por consiguiente las soluciones r_1 y r_2 son complejas

$$r_{1,2} = -\beta \pm i\omega\sqrt{1-\xi^2} \quad (2.25)$$

donde $i = \sqrt{-1}$. Definiendo la frecuencia de vibración amortiguada ω_V como

$$\omega_V = \omega\sqrt{1-\xi^2} \quad (2.26)$$

la solución (2.25) se transforma en

$$r_{1,2} = -\xi\omega \pm i\omega_V \quad (2.27)$$

La solución general de la ecuación (2.13) puede escribirse en la forma

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad (2.28)$$

y sustituyendo r_1 y r_2 por la expresión dada en (2.27), se obtiene finalmente

$$u(t) = A e^{-\xi \omega t} \text{sen}(\omega_V t + \psi) \quad (2.29)$$

Los coeficientes A y ψ se calculan a partir de las condiciones iniciales del problema. En la figura 2.3 se ha representado gráficamente la vibración del sistema para un desplazamiento inicial u_0 .

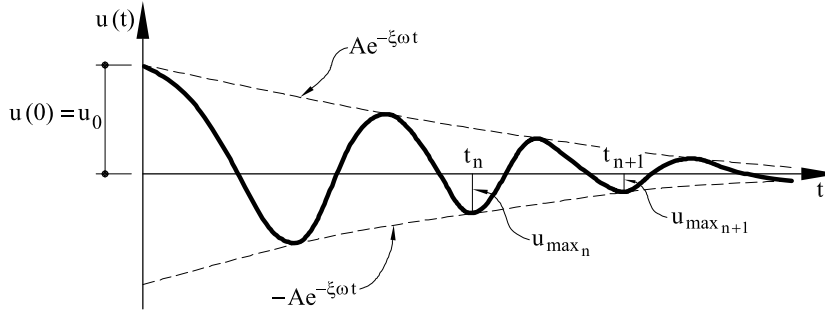


Figura 2.3 Vibraciones libres amortiguadas de un sistema con un solo grado de libertad.

La ecuación del movimiento (2.13) se expresa en ocasiones en la forma

$$\ddot{u}(t) + 2\xi \omega \dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0 \quad (2.30)$$

en donde se ha utilizado la ecuación (2.24) que define la fracción del amortiguamiento crítico.

La evaluación del amortiguamiento de una estructura es un problema esencial de la dinámica. En general se resuelve utilizando técnicas de identificación de sistemas. Estas técnicas permiten la estimación de las características estructurales midiendo la excitación dada a la estructura así como su respuesta durante el ensayo. Aunque la descripción de tales procedimientos no figura entre los objetivos de este libro, se da a continuación un método experimental relativamente simple que permite la estimación del coeficiente de amortiguamiento en sistemas con un solo grado de libertad.

Considérese el modelo de la figura 2.2 sometido a un desplazamiento inicial conocido $u(0) = u_0$ y teniendo una velocidad inicial nula. Su respuesta está dibujada en la figura 2.3, de acuerdo con la ecuación (2.29). La diferencia entre dos instantes de tiempo t_{n+1} y t_n que corresponden a dos amplitudes consecutivas, se define como el período T_V del modelo con un solo grado de libertad con amortiguamiento

$$T_V = t_{n+1} - t_n = \frac{2\pi}{\omega_V} \quad (2.31)$$

El método para determinar el coeficiente de amortiguamiento parte de la definición del *decremento logarítmico del amortiguamiento* Δ como el logaritmo natural del cociente entre dos amplitudes sucesivas de la respuesta

$$\Delta = \ln \frac{u_{\max_n}}{u_{\max_{n+1}}} \quad (2.32)$$

Un dibujo similar al de la figura 2.3 puede obtenerse de modo experimental, registrando la respuesta de un modelo sometido a las mismas condiciones iniciales. A partir del ensayo puede obtenerse un valor experimental Δ^e del decremento logarítmico, midiendo dos amplitudes consecutivas de la respuesta y sustituyéndolas en (2.32). Al mismo tiempo puede deducirse una expresión del valor teórico Δ^t del decremento logarítmico del amortiguamiento a partir de su misma ecuación de definición (2.32). Si la amplitud de la vibración se expresa sustituyendo la ecuación (2.29) en (2.32)

$$u_{\max} = A e^{-\xi \omega t}$$

el valor teórico Δ^t puede ponerse en la siguiente forma:

$$\Delta^t = \ln \frac{A e^{-\xi \omega t_n}}{A e^{-\xi \omega t_{n+1}}} = \ln e^{\xi \omega (t_{n+1} - t_n)} = \ln e^{\xi T_V} \quad (2.34)$$

Si se iguala ahora el valor teórico del decremento logarítmico del amortiguamiento al valor experimental

$$\Delta^t = \Delta^e$$

se obtiene la siguiente expresión:

$$\xi \omega T_V = \Delta^e \quad (2.35)$$

de donde se calcula la fracción del amortiguamiento crítico

$$\xi = \frac{\Delta^e}{\omega T_V} \quad (2.36)$$

En el caso de las estructuras normales de Ingeniería Civil, la fracción del amortiguamiento crítico toma valores comprendidos entre 0.02 y 0.2, pudiéndose aproximar ω_V por ω a partir de la expresión (2.26). De aquí se deduce también

$$\omega T_V \approx \omega T = 2\pi \quad (2.37)$$

Y, en consecuencia, la fracción del amortiguamiento crítico puede expresarse por

$$\xi = \frac{\Delta^e}{2\pi} \quad (2.38)$$

Así pues, si se miden dos amplitudes consecutivas, la ecuación (2.38) proporciona el valor de ξ . Una mejor exactitud se consigue si se obtiene Δ^e midiendo

las amplitudes correspondientes a n y $n+k$ de la respuesta, expresándose en este caso el valor de ξ en la forma

$$\Delta^e = \frac{1}{k} \ln \frac{u_{\max_n}}{u_{\max_{n+k}}} \quad (2.39)$$

2.1.3 Modelo amortiguado. Vibraciones forzadas

Considérese el sistema dinámico de la figura 2.4, cuya respuesta $x(t)$ es producida por un movimiento sísmico del terreno de aceleración $a(t)$.

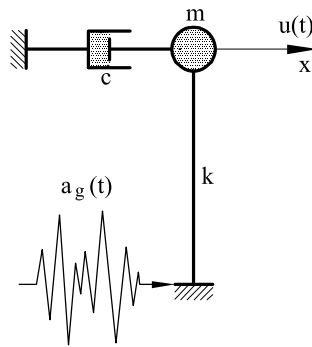


Figura 2.4 Modelo sísmico con un grado de libertad.

Se supone que el sistema tiene *invariancia temporal*, es decir, que si la respuesta producida por una excitación $a_g(t)$ es $u(t)$, una excitación $a_g(t+t_0)$ trasladada t_0 proporciona una respuesta $u(t+t_0)$, siendo t_0 una constante arbitraria. Bajo tal supuesto, el movimiento del sistema viene regido por la ecuación diferencial de coeficientes constantes

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -ma_g(t) = f(t) \quad (2.40)$$

Los sistemas con un solo grado de libertad, tal como el de la figura 2.4, son los modelos dinámicos más simples susceptibles de ser utilizados para analizar el comportamiento dinámico de una estructura. Desde un punto de vista teórico, su aplicación en la resolución de problemas de tipo práctico está restringida a unos pocos casos, concretamente a aquéllos en que la masa está concentrada en un solo punto, vibrando además dicha masa en una sola dirección. Sin embargo, el estudio de los sistemas con un solo grado de libertad es importante, debido al hecho de que en muchos casos los sistemas más complejos con varios grados de libertad pueden resolverse por superposición de sistemas simples. De esta forma, en las aplicaciones prácticas proporcionan una vía aproximada pero sencilla para determinar la respuesta de sistemas estructurales complejos, permitiendo explicar asimismo algunos aspectos fundamentales relacionados con el comportamiento sísmico de tales estructuras. Otro aspecto interesante es que la respuesta puede obtenerse expresando la solución de las ecuaciones del movimiento en forma explícita. Dicha solución depende de un número reducido de parámetros cuya influencia puede estudiarse con facilidad.

En este apartado se resuelve la ecuación del movimiento (2.40) en el dominio del tiempo. Se analizará en primer lugar el caso en que la excitación sea de tipo armónico para pasar seguidamente a estudiar el caso de excitación de cualquier tipo.

a) *Excitación armónica*

Supóngase que la fuerza externa $f(t)$ de la expresión (2.40) viene dada por:

$$f(t) = e^{i\theta t} \quad (2.41)$$

en donde $i = \sqrt{-1}$ y θ es la frecuencia de la excitación. La solución general de la ecuación (2.40) será suma de la solución de la homogénea más una solución particular:

$$u = u_h + u_p \quad (2.42)$$

La solución de la homogénea u_h depende de las condiciones iniciales y se disipa rápidamente. La solución particular u_p corresponde a la parte estacionaria de la solución. Por ello, no se tendrá en cuenta la solución de la homogénea y se estudiará únicamente la solución estacionaria. En este caso, la solución u puede escribirse

$$u = H e^{i\theta t} \quad (2.43)$$

La función H es conocida con el nombre de función de transferencia compleja del sistema. Derivando una y dos veces respecto a t la expresión anterior e introduciéndola en (2.40) se obtiene:

$$H = \frac{1}{-\theta^2 m + i\theta c + k} \quad (2.44)$$

Y también:

$$H = \frac{1}{k} \frac{1}{-\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 + 2i\xi\left(\frac{\theta}{\omega}\right) + 1} \quad (2.45)$$

en donde se ha utilizado la relación $\omega^2 = k/m$

Por otro lado, el módulo de H viene dado por:

$$|H| = \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\left(\frac{\theta}{\omega}\right)\right]^2}} \quad (2.46)$$

y si se introduce la notación

$$D = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\left(\frac{\theta}{\omega}\right)\right]^2}} \quad (2.47)$$

la expresión (2.46) queda

$$|H| = \frac{1}{k} D \quad (2.48)$$

A la función D se le denomina función de amplificación dinámica del sistema, y viene representada en la figura 2.5. El motivo de tal denominación es el

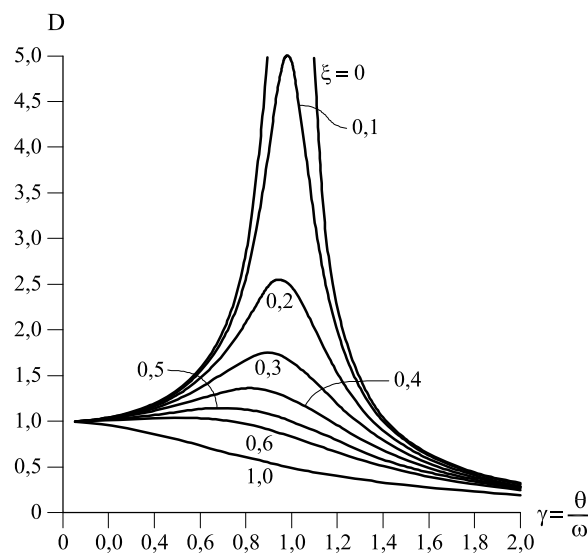


Figura 2.5 Función de amplificación D

siguiente: Si de la ecuación dinámica (2.40) sometida a la excitación dada por (2.41) se realizara un análisis puramente estático, el máximo desplazamiento valdría:

$$(u_{\max})_{est} = \frac{1}{k} \quad (2.49)$$

con lo cual la expresión (2.46) se escribe:

$$|H| = (u_{\max})_{est} D \quad (2.50)$$

Y por tanto, a partir de (2.43) el máximo desplazamiento dinámico vale:

$$u_{\max} = |H| = (u_{\max})_{est} D \quad (2.51)$$

con lo cual, como puede verse, D representa la amplificación que realiza el sistema dinámico de la respuesta estática (fenómeno de resonancia). Es interesante la observación de la figura 2.5 en donde se observa la variación de D en función de la

relación de frecuencias θ/ω (frecuencia entrante dividido por la frecuencia del sistema). Cuando la frecuencia de entrada iguala a la del sistema se produce resonancia. En este caso la función de amplificación dinámica vale

$$D = \frac{1}{2\xi} \quad (2.52)$$

con lo cual, D toma el valor infinito para amortiguamiento nulo.

Cuando la fuerza de excitación $f(t)$ corresponde al caso sísmico, y dicha excitación sísmica $a_g(t)$ viene dada por una función armónica se tendrá:

$$f(t) = -m a_g(t) = -m A e^{i\theta t} \quad (2.53)$$

con lo cual la respuesta viene dada por

$$u = -m A H \quad (2.54)$$

y también

$$u = -A \frac{1}{(\omega^2 - \theta^2) + 2i\xi\theta\omega} \quad (2.55)$$

b) Excitación cualquiera

Puede demostrarse que cuando la excitación $f(t)$ es cualquiera, la respuesta temporal viene dada por

$$u(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t f(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega(t-\tau)] d\tau \quad (2.56)$$

que para el caso de excitación sísmica se escribe

$$u(t) = -\frac{1}{\omega} \int_0^t a_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega(t-\tau)] d\tau \quad (2.57)$$

La integral (2.56) (o bien la (2.57)) recibe el nombre de integral de Duhamel.

El cálculo de la solución general de la ecuación del movimiento puede efectuarse de manera directa utilizando la ecuación (2.56), lo que requiere la evaluación de la solución particular determinada por la integral de Duhamel. En la mayoría de los casos dicha integral debe ser resuelta numéricamente, lo que requiere una previa discretización de la acción, con la consecuente distorsión de la señal de entrada.

Sin embargo, muchos tipos de acciones dinámicas como, por ejemplo, las aceleraciones sísmicas $a_g(t)$, pueden representarse por una secuencia de rectas definidas a trozos, en intervalos de tiempo desiguales (figura 2.6). En tal caso, la integral de Duhamel tiene primitiva y por lo tanto puede obtenerse la solución analítica de la ecuación del movimiento.

A fin de obtener la mencionada solución, se suponen para el sistema condiciones iniciales nulas, con lo cual el problema se reduce al cálculo de la primitiva de la integral de Duhamel de la ecuación (2.57). Es conveniente expresar dicha integral en la siguiente forma:

$$u(t) = -\frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega} [A(t)\sin \omega t - B(t)\cos \omega t] \quad (2.58)$$

donde

$$A(t) = \int_0^t a_g(\tau) e^{\xi\omega\tau} \cos \omega\tau d\tau \quad (2.59)$$

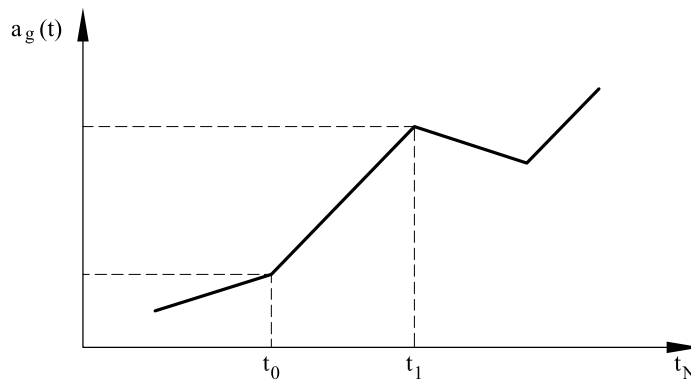


Figura 2.6 Función de excitación lineal.

$$B(t) = \int_0^t a_g(\tau) e^{\xi\omega\tau} \sen \omega\tau d\tau \quad (2.60)$$

Según se observa en la figura 2.6, la excitación $a_g(t)$ es recta dentro del intervalo (t_{i-1}, t_i) y, por tanto, puede expresarse como

$$a_g(\tau) = a_g(t_{i-1}) + s(\tau - t_{i-1}) \quad (2.61)$$

donde s corresponde a la pendiente de la recta

$$s = \frac{a_g(t_i) - a_g(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \quad (2.62)$$

Utilizando la ecuación (2.61) se obtienen primitivas exactas para las integrales (2.59) y (2.60), las cuales una vez calculadas tienen la siguiente forma:

$$A(t_i) = A(t_{i-1}) + \frac{e^{\xi\omega t}}{\omega^2} \left[(\xi\omega a_g(\tau) + s(1 - 2\xi^2)) \cos \omega\tau + (\omega a_g(\tau) - 2\xi s) \sen \omega\tau \right]_{t_{i-1}}^{t_i} \quad (2.63)$$

$$B(t_i) = B(t_{i-1}) + \frac{e^{\xi \omega t}}{\omega^2} \left[(\xi \omega a_g(\tau) + s(1 - 2\xi^2)) \text{sen } \omega \tau + (\omega a_g(\tau) - 2\xi s) \cos \omega \tau \right] \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \quad (2.64)$$

También es posible obtener la respuesta exacta para la velocidad $\dot{u}(t)$ y para la aceleración relativa $\ddot{u}(t)$ del sistema, derivando la integral de Duhamel y expresando la respuesta en términos ya conocidos

$$\dot{u}(t) = -e^{-\xi \omega t} [A(t) \cos \omega t + B(t) \text{sen } \omega t] + \omega \xi u(t) \quad (2.65)$$

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 u(t) - 2\xi \omega \dot{u}(t) + a_g(t) \quad (2.66)$$

siendo las integrales $A(t)$ y $B(t)$ las mismas de las ecuaciones (2.63) y (2.64).

La ecuación del movimiento puede resolverse utilizando métodos de integración paso a paso. Dichos métodos serán descritos para sistemas de muchos grados de libertad, por lo que no se exponen aquí.

2.2 MODELOS DE UN GRADO DE LIBERTAD. INTEGRACIÓN EN FRECUENCIAS

Considérese nuevamente la ecuación del movimiento para un sistema con un solo grado de libertad sometido a una excitación de tipo sísmico

$$m \ddot{u}(t) + 2m \xi \omega \dot{u}(t) + k u(t) = -m a_g(t) \quad (2.64)$$

Haciendo uso del hecho de que la excitación $a_g(t)$ es una señal finita y distinta de cero solamente para $t > 0$, la transformada de Fourier de la excitación dada por (2.64) se expresa

$$A(\theta) = -m \int_0^{\infty} a_g(t) e^{-i\theta t} dt \quad (2.65)$$

Con lo cual, tomando transformadas de Fourier a la izquierda y derecha de la expresión (2.64) se obtiene

$$(-\theta^2 m + 2m i \xi \omega \theta + k) U(\theta) = A(\theta) \quad (2.66)$$

Siendo $U(\theta)$ la transformada de Fourier de la respuesta:

$$U(\theta) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-i\theta t} dt$$

es decir:

$$U = A(\theta)H \quad (2.67)$$

con lo cual, la respuesta en el tiempo se obtendrá mediante la transformada inversa de Fourier

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} U(\theta) e^{i\theta t} d\theta \quad (2.68)$$

La respuesta en el tiempo del sistema puede obtenerse de esta forma aplicando sucesivamente la ecuación (2.65) para calcular la transformada de Fourier de la excitación $A(\theta)$, la ecuación (2.67) para obtener la respuesta en el campo complejo de la frecuencia $U(\theta)$ y la ecuación (2.68) para determinar la respuesta en el dominio temporal $u(t)$ del sistema. Este procedimiento implica la determinación numérica de la transformada directa de Fourier [ecuación (2.65)] así como de la transformada inversa [ecuación (2.68)].

Tal como se ha señalado anteriormente, en Ingeniería Sísmica la aceleración del terreno $a_g(t)$ viene dada en forma discreta por sus valores máximos y por sus correspondientes instantes de tiempo. De esta manera, y puesto que en general no se dispone de métodos analíticos, deben utilizarse procedimientos numéricos. Por ello, la implementación numérica de estos métodos se hizo posible en la práctica solamente después del desarrollo de la *Transformada Rápida de Fourier (FFT)* mediante el algoritmo de Cooley-Tukey.

La primera etapa para la evaluación numérica del par de transformadas de Fourier consiste en el desarrollo de las transformadas discreta de Fourier (DFT) directa e inversa, correspondientes respectivamente a las transformadas directa e inversa de Fourier expresadas por las ecuaciones (2.65) y (2.68). La transformada discreta de Fourier de la excitación se define por

$$A(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_g(n\Delta\tau) e^{-i\theta n\Delta\tau} \quad (2.69)$$

$$\theta_c = \frac{\pi}{\Delta\tau} \quad \theta \in [-\theta_c, \theta_c]$$

en donde la aceleración sísmica $a(t)$ está muestreada a intervalos regulares $\Delta\tau$. La señal sísmica es finita, esto es, $0 \leq t \leq T$. Si $a(t)$ se muestrea mediante N puntos equiespaciados, la transformada discreta limitada de Fourier se define por

$$A_N\left(k \frac{2\pi}{T}\right) = \sum_{j=0}^{N-1} a_g(j\Delta\tau) e^{-\frac{i2\pi}{N}kj} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.70)$$

Puede demostrarse que el valor de $A_N(k \frac{2\pi}{T})$ es igual al valor de A_N correspondiente a la frecuencia negativa $(k-N)2\pi/T$, cuando k es mayor que $N/2$. Por tanto, la

transformada discreta de Fourier (2.65) puede determinarse de forma aproximada mediante la transformada discreta limitada de Fourier, tal como sigue

$$\begin{aligned} A\left(k \frac{2\pi}{T}\right) &\approx \Delta\tau \sum_{j=0}^{N-1} a(j\Delta\tau) e^{-i \frac{2\pi}{N} k j} \\ &= \Delta\tau A_N\left(k \frac{2\pi}{T}\right), \quad k = 0, \dots, n \leq \frac{N}{2} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Recíprocamente, la transformada discreta inversa de Fourier de la respuesta, es decir, la respuesta del sistema en el dominio del tiempo, puede escribirse como

$$u(j\Delta\tau) \approx \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} U\left(k \frac{2\pi}{T}\right) e^{i \frac{2\pi}{N} k j} \quad (2.72)$$

Se puede demostrar [*] que el par de transformadas discretas (2.71) y (2.72) son exactas cuando $a_g(t)$ es una función limitada en banda $[-\theta_c, \theta_c]$, esto es, $A(\theta) = 0$ si $|\theta| \geq \theta_c$.

Existen diferentes algoritmos numéricos eficientes para calcular el par de transformadas discretas de Fourier de una señal finita cualquiera, pero el más comúnmente utilizado es la transformada rápida de Fourier (FFT). Dicho método tratado con detalle por numerosos autores, puede verse en los diferentes textos de Cálculo Numérico o en muchas de las librerías de los diferentes sistemas operativos.

Capítulo 3

SISTEMAS LINEALES CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

3.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se han estudiado las propiedades dinámicas de los sistemas estructurales, planteándose las ecuaciones que rigen su comportamiento frente a las acciones sísmicas. En este capítulo se aborda la solución de los sistemas elásticos con varios grados de libertad, resolviéndolos, bien en el tiempo o bien en el campo de la frecuencia. Se incluyen los métodos de integración paso a paso que, si bien tienen más aplicación en la solución de sistemas no lineales (en los cuales no es posible utilizar las técnicas descritas en este capítulo), revisten también considerable interés. Aunque los procedimientos y metodologías expuestas son válidas para cualquier acción de tipo dinámico, dada su gran importancia, dichas acciones se particularizarán para el caso sísmico.

El método del desacoplamiento modal es el más usado en el cálculo sísmico de estructuras elásticas, pues aparte de su mayor rapidez frente a otros métodos, proporciona una cierta visión conceptual al utilizar n formas modales de vibración, sirven además como nuevas coordenadas a las que referir los desplazamientos estructurales de respuesta. Dicho método permite obtener dos tipos de respuesta: primeramente la historia en el tiempo de la respuesta, mediante la cual la respuesta se obtiene en cada instante de tiempo; en segundo lugar la respuesta estructural máxima, que se calcula utilizando los espectros sísmicos de respuesta. El uso de uno u otro procedimiento depende fundamentalmente de los resultados deseados, teniendo presente que a mayor cantidad de información corresponde también una mayor necesidad de memoria del ordenador y de tiempo de cálculo; al mismo tiempo, mucha de la información que proporciona el cálculo de la historia de la respuesta en el tiempo tiene escaso valor práctico en el diseño de estructuras. En cualquier caso, es importante observar que el método del desacoplamiento modal, tal como se expone en los apartados siguientes, es válido únicamente cuando se está en presencia de matrices de amortiguamiento proporcionales.

3.2 DESACOPLAMIENTO DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

El sistema de ecuaciones dinámicas correspondientes a una estructura con n grados de libertad se escribe utilizando (1.38)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{M}\mathbf{J}a_g(t) \quad (3.1)$$

Las correspondientes vibraciones libres no amortiguadas del modelo estructural están descritas por el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

La expresión anterior admite la solución

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi} e^{i\omega t} \quad (3.3)$$

que sustituyendo en (3.2) se obtiene:

$$\left(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}\right)\boldsymbol{\varphi} = 0 \quad (3.4)$$

La expresión anterior corresponde a un problema generalizado de autovectores. Su solución consiste en n valores de ω denominados autovalores o frecuencias propias y en n valores de $\boldsymbol{\varphi}$ denominados autovectores. Dichos autovectores, denominados formas modales, son ortogonales respecto a las matrices de masa y de rigidez.

Al formar $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \boldsymbol{\varphi}_i \dots \boldsymbol{\varphi}_n]$ una base completa, es posible escribir

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_i y_i(t) \quad (3.5)$$

en donde $y_i(t)$ es un escalar función del tiempo, a determinar, llamada *respuesta generalizada*. Sustituyendo (3.5) en (3.1), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\mathbf{M} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_i \ddot{y}_i(t) + \mathbf{C} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_i \dot{y}_i(t) + \mathbf{K} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_i y_i(t) = -\mathbf{M} \mathbf{J} a_g(t) \quad (3.6)$$

y premultiplicando por el transpuesto de un autovector cualquiera $\boldsymbol{\varphi}_j$, (3.6) se escribe de la forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_i \ddot{y}_i(t) + \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{C} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_i \dot{y}_i(t) \\ + \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{K} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_i y_i(t) = -\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{J} a_g(t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

De acuerdo con la ortogonalidad de los autovectores $\boldsymbol{\varphi}$ resulta que

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j = M_j^* \quad (3.8 a)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{K} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j = K_j^* \quad (3.8 b)$$

Y, si como es lo habitual, se está frente a matrices de amortiguamiento ortogonales, se tiene también

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{C} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}_j = C_j^* \quad (3.8 c)$$

Esto quiere decir que la ecuación (3.7) puede expresarse en una forma similar a la de la ecuación de movimiento correspondiente a un sistema con un grado de libertad, como

$$M_j^* \ddot{y}_j(t) + C_j^* \dot{y}_j(t) + K_j^* y_j(t) = \boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{J} a_g(t) \quad (3.9)$$

En consecuencia, el sistema de ecuaciones (3.1) queda reducido a n ecuaciones independientes del tipo (3.9), cada una de ellas similar a la ecuación (1.23), correspondientes al modelo con un solo grado de libertad. La ecuación (3.9) puede también escribirse, como es usual, en la forma

$$\ddot{y}_j(t) + 2\xi_j \omega_j \dot{y}_j(t) + \omega_j^2 y_j(t) = -\frac{\boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{J}}{\boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_j} a_g(t) \quad (3.10)$$

En donde ω_j es la frecuencia propia asociada a la forma modal $\boldsymbol{\phi}_j$, y ξ_j es la fracción del amortiguamiento crítico para cada modo.

La ecuación (3.10) puede solucionarse utilizando cualquiera de los procedimientos estudiados en el Capítulo 2: resolviendo numéricamente la integral de Duhamel; mediante integración paso a paso; aplicando el método exacto de integración a trozos de las ecuaciones del movimiento, etc.

Con respecto al desacoplamiento modal, es preciso destacar por su importancia el siguiente aspecto: debido a la propia discretización de la estructura y a errores de cálculo numérico, a medida que se aumenta el orden de las frecuencias, los errores que éstas contienen son mayores, con lo que las correspondientes a los primeros modos de vibración son también las más exactas. Por otra parte, al ser los modos inferiores los que contienen menor energía elástica de deformación, son los que influyen en mayor medida en la respuesta de la estructura, contribuyendo los modos más elevados solamente con perturbaciones y errores. Por todo ello, la ecuación (3.5) se suele escribir de la forma.

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^q \boldsymbol{\phi}_i y_i(t) \quad (3.11)$$

Siendo usualmente $q \ll n$ y en cualquier caso $q < n$, por lo que el número de ecuaciones del tipo (3.10) a resolver es considerablemente menor que n , con todas las ventajas que de ello se derivan.

La transformación de la ecuación (3.5) en la (3.11) es muy beneficiosa, ya que la mayor cantidad de tiempo de cálculo de ordenador requerido para el cálculo de la respuesta de la estructura se invierte en la búsqueda de los valores y vectores propios, con lo cual dicho tiempo se reduce considerablemente si en vez de hallar todos los modos propios se hallan solamente unos pocos, precisamente los correspondientes a las frecuencias más bajas. Piénsese además en la gran cantidad de memoria necesaria para almacenar todos los autovectores, cuando el número de grados de libertad crece.

3.3 HISTORIA DE LA RESPUESTA EN EL TIEMPO

Una primera forma de hallar la respuesta de la estructura consiste en obtener la variación en el tiempo de los corrimientos y esfuerzos de cada grado de libertad del modelo estructural. Éste es el así llamado procedimiento de cálculo de la historia de la

respuesta en el tiempo. Para ello, una vez obtenida la solución de (3.10), es decir $y(t)$, por cualquiera de los procedimientos desarrollados en el capítulo anterior, basta sustituirla en (3.11) para obtener la historia de los desplazamientos $u(t)$. Una vez obtenida ésta, el cálculo de los esfuerzos se realiza por los procedimientos ya conocidos, como si de un análisis estático se tratara.

Este procedimiento proporciona en los casos habituales un exceso de información de la respuesta, ya que a efectos de diseño es suficiente conocer la respuesta máxima. Este exceso de información se obtiene, obviamente, a costa de un mayor tiempo de cálculo y de más necesidades de espacio de memoria. Además, hay que tener en cuenta que las normas de diseño sísmico no proporcionan la aceleración $a_g(t)$ en la base de la estructura de forma explícita, sino que definen la acción mediante sus espectros sísmicos de respuesta. Es evidente que a partir de estos últimos pueden generarse familias de acelerogramas compatibles, pero al mismo tiempo el uso de espectros de respuesta permite la aplicación de procedimientos más rápidos de obtención de la respuesta máxima.

La historia de la respuesta en el tiempo es conveniente, sin embargo, en algunos casos concretos. Considérese, por ejemplo, la estructura de la figura 3.1, en la cual en el nivel intermedio existe una cierta subestructura. Esta subestructura, por su menor significación en la respuesta, no será tenida en cuenta en el estudio global, pero para su cálculo específico es evidente que la acción que la afecta será la respuesta en el punto A de la estructura considerada globalmente.

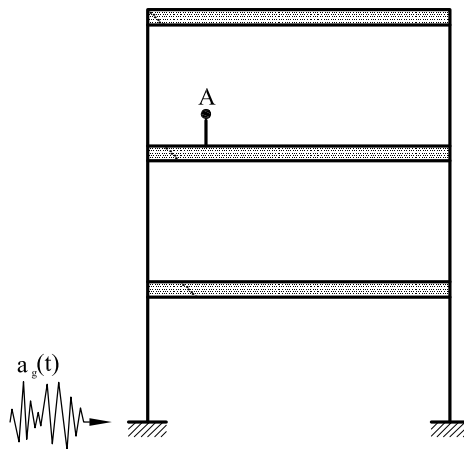


Figura 3.1 Estructura con una subestructura en una planta.

Una forma posible de proceder es hallar la historia de la respuesta en los puntos donde se sitúan subestructuras, a fin de obtener sus espectros de respuesta. Dichos espectros definen la acción de cálculo para cada subestructura.

Problema resuelto. *Considérese la estructura de la figura 3.2. La aceleración en la base expresada en m/s^2 vale:*

$$a_g(t) = 2 \operatorname{sen} 6t$$

y la fracción del amortiguamiento crítico es $\xi = 0.05$. Hallar la respuesta en desplazamientos de la estructura.

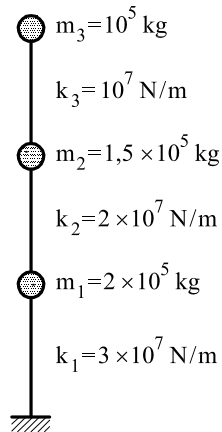


Figura 3.2 Modelo dinámico

Solución

La ecuación dinámica (3.1) se escribe como

$$10^4 \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} + [\mathbf{C}] \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} + 10^7 \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} =$$

$$-10^4 \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 2 \operatorname{sen} 6t$$

Los vectores propios y las frecuencias propias valen, respectivamente

$$\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2.15 & 0.89 & -1.04 \\ 3.31 & -1.46 & 0.41 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.92 \\ 12.69 \\ 18.81 \end{bmatrix} \operatorname{rad/s} \quad (2)$$

Los modos de vibración pueden verse representados en la figura 3.3. Procediendo a realizar el desacoplamiento modal se obtienen tres ecuaciones del tipo (3.10).

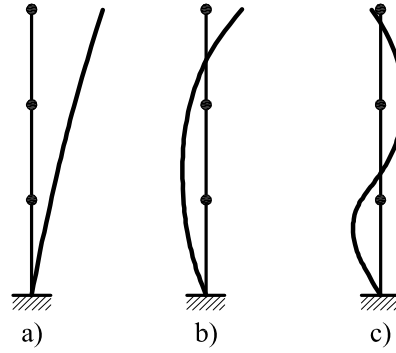


Figura 3.3 Modos de vibración de la estructura de la figura 3.2. (a) primer modo; (b) segundo modo; (c) tercer modo.

$$\ddot{y}_1(t) + 2\xi_1\omega_1\dot{y}_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) = -\frac{\boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{M} \{\mathbf{1}\}}{\boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_1} a_g(t) \quad (3a)$$

$$\ddot{y}_2(t) + 2\xi_2\omega_2\dot{y}_2(t) + \omega_2^2 y_2(t) = -\frac{\boldsymbol{\phi}_2^T \mathbf{M} \{\mathbf{1}\}}{\boldsymbol{\phi}_2^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_2} a_g(t) \quad (3b)$$

$$\ddot{y}_3(t) + 2\xi_3\omega_3\dot{y}_3(t) + \omega_3^2 y_3(t) = -\frac{\boldsymbol{\phi}_3^T \mathbf{M} \{\mathbf{1}\}}{\boldsymbol{\phi}_3^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_3} a_g(t) \quad (3c)$$

y suponiendo que el amortiguamiento para todos los modos de la estructura es el mismo ($\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0.05$), las expresiones (3) se convierten en

$$\ddot{y}_1 + 0.592\dot{y}_1 + 35.046 y_1 = -0.858 \text{ sen } 6t \quad (4a)$$

$$\ddot{y}_2 + 1.269\dot{y}_2 + 161.036 y_2 = -0.706 \text{ sen } 6t \quad (4b)$$

$$\ddot{y}_3 + 1.881\dot{y}_3 + 353.816 y_3 = -0.448 \text{ sen } 6t \quad (4c)$$

La solución de las ecuaciones (4) con condiciones iniciales de velocidad y desplazamiento nulos es

$$y_1 = 0.2326 \text{ sen } (6t - 1.3) \quad (4a)$$

$$y_2 = 0.0056 \text{ sen } (6t - 0.061) \quad (4b)$$

$$y_3 = 0.0014 \text{ sen } (6t - 0.036) \quad (4c)$$

Sustituyendo ahora las ecuaciones (4) en (3.11), se obtiene (en este caso $n = q$)

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2326 \\ 0.5001 \\ 0.7699 \end{bmatrix} \text{sen}(6t - 1.3) + \begin{bmatrix} 0.0056 \\ 0.0050 \\ -0.0082 \end{bmatrix} \text{sen}(6t - 0.061) \\ - \begin{bmatrix} 0.0014 \\ -0.0015 \\ 0.0017 \end{bmatrix} \text{sen}(6t - 0.036)$$

que es la respuesta en desplazamientos de la estructura.

3.4 INTEGRACIÓN PASO A PASO

3.4.1 Introducción

En los apartados anteriores se ha visto como el método del desacoplamiento modal puede usarse de forma eficiente, tanto si se trata de obtener la respuesta en el tiempo (*time history*) de la estructura, como si se quiere conocer únicamente la respuesta máxima. En este apartado se van a describir y analizar algunos de los métodos más comunmente usados de integración directa de las ecuaciones de equilibrio dinámico. Dichos métodos, que obviamente pueden ser empleados en un análisis lineal, tienen como ventaja frente a los vistos en el capítulo anterior que pueden ser aplicados a problemas no lineales. Como contrapartida requieren de un mayor esfuerzo de cálculo, fundamentalmente al compararlos con métodos basados en el análisis modal. El ingeniero estructural decidirá, a la vista del tipo de problema que tenga que resolver, cual de los posibles planteamientos resuelve mejor el dilema exactitud-economía.

Existen fundamentalmente dos grupos de esquemas de integración paso a paso: esquemas *implícitos* y esquemas *explícitos*. En el primer caso, el corrimiento \mathbf{u}_{i+1} correspondiente al tiempo t_{i+1} se obtiene a partir de la ecuación diferencial planteada para el tiempo t_{i+1} . La respuesta de la estructura se obtendrá, por tanto, como solución de un sistema de ecuaciones algebraicas. Por el contrario, en los métodos explícitos la solución en el tiempo t_{i+1} se obtiene a partir de la ecuación de equilibrio en el tiempo t_i , pudiendo evitarse por lo general el tener que resolver ningún sistema de ecuaciones. Esta gran ventaja de los métodos explícitos viene acompañada de un inconveniente también grande, el cual hace referencia al intervalo Δt de integración. Se plantea de esta forma el problema de la *estabilidad*, entendida en el sentido de que la solución progrese de forma acotada. En efecto, mientras que en los esquemas implícitos que se verán la solución no se ve artificialmente amplificada cualquiera que sea el incremento de tiempo Δt elegido para la integración (esquemas incondicionalmente estables), en los métodos explícitos existe un intervalo Δt crítico por encima del cual la solución se amplifica de forma artificial (esquemas condicionalmente estables). Por lo tanto, en los esquemas implícitos el intervalo de integración temporal puede ser superior (normalmente hasta un orden de magnitud) al intervalo requerido para los esquemas explícitos. Por otra parte, la programación de los métodos explícitos es más simple que en el caso de los implícitos.

De entre los métodos implícitos se van a desarrollar el de Newmark. De entre los explícitos se expondrá el método de las diferencias centrales.

Se estudian en el apartado siguiente algunas de las características más importantes de los métodos de integración directa; posteriormente, el estudio de estas características se particulariza para cada uno de los métodos específicos que aquí se tratan.

3.4.2 Conceptos básicos de los métodos paso a paso

Los métodos de integración directa tratan de hallar la historia de la respuesta dinámica en el tiempo, bien para sistemas lineales, bien para sistemas no lineales. El punto de partida lo constituirá, por tanto, la ecuación (3.1). Dicha respuesta no se obtiene como una función continua, sino únicamente en una serie de tiempos predeterminados t_i . La forma general de proceder en todos estos métodos consiste en expresar las velocidades y aceleraciones para un instante de tiempo determinado, en función únicamente del corrimiento correspondiente al tiempo en que se quiere hallar la solución y de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones ya conocidas correspondientes a tiempos anteriores. Estas ecuaciones en diferencias, juntamente con la ecuación diferencial particularizada para $t = t_i$ o $t = t_{i+1}$, permiten obtener la solución, conocida la de los instantes de tiempo anteriores. Se llega, en consecuencia, para cada paso, a una ecuación recurrente del siguiente tipo:

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{Y}_i + \mathbf{Z}_{i+\alpha}$$

en donde \mathbf{Y} es la respuesta de la estructura y \mathbf{A} es una matriz característica de cada esquema de integración. El término $\mathbf{Z}_{i+\alpha}$ hace referencia a las ordenadas del acelerograma incluidas en el análisis para el cálculo de la respuesta en t_{i+1} .

Por otra parte, se ha visto antes que los esquemas explícitos son condicionalmente estables. Seguidamente se trata con más detalle el problema de la estabilidad. Considérese el problema de vibraciones libres con condiciones iniciales. La ecuación recurrente anterior se escribe en la forma

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{Y}_i$$

Aplicando esta ecuación sucesivamente a todos los tiempos anteriores, resulta

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{Y}_i = \mathbf{A}^2\mathbf{Y}_{i-1} = \dots = \mathbf{A}^i\mathbf{Y}_1$$

Tomando normas de la ecuación anterior se tiene la desigualdad

$$\|\mathbf{Y}_{i+1}\| \leq \|\mathbf{A}^i\| \|\mathbf{Y}_1\|$$

en donde las normas de \mathbf{Y} son normas euclídeas y la norma de \mathbf{A} es la norma espectral, la cual, como es sabido, viene dada por el valor del módulo del mayor autovalor

$$\|\mathbf{Y}_{i+1}\| \leq [\rho(\mathbf{A})]^i \|\mathbf{Y}_1\|$$

siendo $\rho(\mathbf{A})$ el radio espectral

$$\rho(\mathbf{A}) = \max |\lambda_i|$$

Es evidente, por tanto, que la solución \mathbf{Y} en cualquier instante de tiempo quedará acotada si el radio espectral correspondiente al algoritmo que se esté usando es inferior o igual a la unidad. Por otra parte, $\rho(\mathbf{A})$ proporciona una indicación clara acerca del comportamiento de la solución numérica y del grado de amortiguamiento que ésta presente frente al conjunto de parámetros que caracterizan el esquema en diferencias, en particular el incremento de tiempo Δt usado en la integración.

Por otro lado, obsérvese por ejemplo la figura 3.4 correspondiente al método Newmark. En dicho método, como se verá más adelante, intervienen dos parámetros, β y γ . En la citada figura 3.4 puede verse que en la curva correspondiente a $\beta = 0.5$, $\gamma = 0.6$ y a partir de un cierto valor de $\Delta t/T$ (en donde T es el período propio), el valor de ρ baja de forma significativa por debajo de la unidad, es decir, que se produce amortiguamiento artificial. En otras palabras, fijado el incremento de tiempo Δt , la respuesta se amortigua artificialmente para todos los modos de vibración con un período inferior a uno determinado (dado por aquel valor de T a partir del cual ρ se aleja de forma sensible de la unidad). Este efecto de amortiguamiento es deseable, puesto que ocurre en los modos elevados que contienen errores numéricos inherentes a la propia discretización y en consecuencia minimiza su influencia sobre la respuesta total.

Por lo tanto, para cada algoritmo, mediante la elección de Δt , así como de los otros parámetros que intervienen en él, puede hacerse una estimación del número de los primeros modos de vibración que contribuyen a la respuesta total de una estructura.

Otro aspecto importante que debe estudiarse en un algoritmo es la elongación del período (figura 3.4), la cual hace referencia a los errores cometidos en el período propio de la respuesta. Para cada algoritmo se dará la relación $(T - \bar{T}) \times 100/T$, es decir, el error porcentual del período en función de $\Delta t/T$.

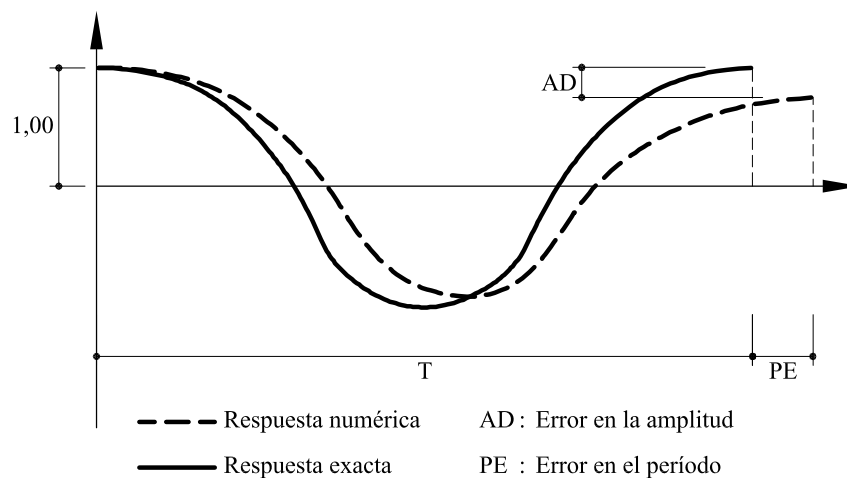


Figura 3.4 Error en el período y en la amplitud en función de $\Delta t/T$.

Como regla empírica habitualmente adoptada, puede utilizarse un incremento de tiempo tal que $\Delta t/T_c = 0.1$, siendo T_c el período correspondiente al último modo que se desea contribuya significativamente a la respuesta total de la estructura analizada.

3.4.3 Método de Newmark

Ecuaciones de diferencias finitas

Considérese la variación de la aceleración $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ entre los instantes de tiempo t_i y $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ (figura 3.5). Se realiza el cambio de variable $\tau = t - t_i$ de tal forma que para $t = t_i$ el valor de τ sea cero y para $t = t_{i+1}$, τ valga Δt . Supóngase a continuación que el valor del vector aceleración de respuesta en un instante $\tau \leq \Delta t$ se expresa como

$$\ddot{\mathbf{u}}(\tau) = \ddot{\mathbf{u}}_i + f(\tau) (\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{u}}_i) \quad (3.12)$$

de tal manera que la función $f(\tau)$ sea cero para $\tau = 0$ y valga 1 para $\tau = \Delta t$. Como fácilmente se ve, la expresión (3.12) supone que la ley de variación de las aceleraciones en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ es la misma para todos los grados de libertad.

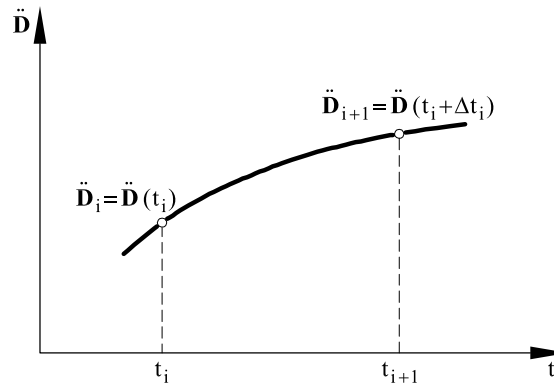


Figura 3.5 Variación de la caeleración con el tiempo.

La velocidad $\dot{\mathbf{u}}(\tau)$ puede expresarse integrando la aceleración dada por la ecuación (3.12). Se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(\tau) &= \dot{\mathbf{u}}_i + \int_0^\tau \ddot{\mathbf{u}}(\tau) d\tau = \\ &= \dot{\mathbf{u}}_i + \int_0^\tau \ddot{\mathbf{u}}_i d\tau + \int_0^\tau (\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{u}}_i) f(\tau) d\tau \\ &= \dot{\mathbf{u}}_i + \ddot{\mathbf{u}}_i \tau + (\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{u}}_i) \int_0^\tau f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.13)$$

Realizando la sustitución

$$g(\tau) = \int_0^{\tau} f(\tau) d\tau \quad (3.14)$$

y también

$$\Delta t \gamma = \int_0^{\Delta t} f(\tau) d\tau \quad (3.15)$$

la expresión (3.13) queda

$$\dot{\mathbf{u}}(\tau) = \dot{\mathbf{u}}_i + \ddot{\mathbf{u}}_i \tau + (\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{u}}_i) g(\tau) \quad (3.16)$$

y para $\tau = \Delta t$ resulta de (3.15) y (3.16)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{u}}_i + \ddot{\mathbf{u}}_i \Delta t + (\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{u}}_i) \gamma \Delta t \\ &= \dot{\mathbf{u}}_i + [(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_i + \gamma\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}] \Delta t \end{aligned} \quad (3.17)$$

Para calcular los desplazamientos se integra (3.16), lo que proporciona la expresión

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_i + \dot{\mathbf{u}}_i \tau + \ddot{\mathbf{u}}_i \frac{\tau^2}{2} + (\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{u}}_i) \int_0^{\tau} g(\tau) d\tau \quad (3.18)$$

Particularizando para $\tau = \Delta t$ y llamando

$$\Delta t^2 \beta = \int_0^{\Delta t} g(\tau) d\tau \quad (3.19)$$

se obtiene la relación final

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \dot{\mathbf{u}}_i \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{u}}_i + \beta \ddot{\mathbf{u}}_{i+1} \right] \Delta t^2 \quad (3.20)$$

Las expresiones (3.17) y (3.20) constituyen las ecuaciones en diferencias de Newmark, las cuales, juntamente con la ecuación diferencial del movimiento (3.1), permiten hallar los vectores desplazamientos, velocidad y aceleración en t_{i+1} en función únicamente de estos valores en el tiempo t_i .

Nótese que el método de Newmark depende de los parámetros γ y β . Las condiciones que deben cumplir estos parámetros para que el algoritmo sea incondicionalmente estable se verán en los apartados siguientes.

Análisis lineal

Tal como se ha explicado anteriormente, la ecuación que rige el movimiento de una estructura con varios grados de libertad en régimen elástico es

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = -\mathbf{M} \mathbf{J} a_g(t) \quad (3.21)$$

en donde \mathbf{M} es la matriz de masa, \mathbf{C} la de amortiguamiento y \mathbf{K} la de rigidez. Esta ecuación para el tiempo $t = t_{i+1}$ toma la forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{i+1} = -\mathbf{M}\mathbf{J}a_{g_{i+1}} \quad (3.22)$$

De las ecuaciones de Newmark (3.17) y (3.20) se obtiene

$$\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} [\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i - \dot{\mathbf{u}}_i \Delta t] - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_i \quad (3.23a)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{u}}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_i \quad (3.23b)$$

y sustituyendo estas expresiones en la ecuación del movimiento (7.11), ésta puede expresarse de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{P}_{i+1} \quad (3.24)$$

en donde

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i+1} = & -\mathbf{M}\mathbf{J}a_{g_{i+1}} + \mathbf{M} \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{u}_i + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_i + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_i \right] \\ & + \mathbf{C} \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{u}_i + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{u}}_i + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_i \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (3.24) se obtienen los desplazamientos \mathbf{u}_{i+1} y una vez calculado este valor, sustituyendo en (3.23a) y (3.17), resultan las aceleraciones y las velocidades para el instante de tiempo t_{i+1} .

Es interesante observar que para el primer intervalo de tiempo $t = t_1 = \Delta t$ en que se calcula la respuesta es preciso conocer los valores del desplazamiento, velocidad y aceleración en el instante cero, es decir, \mathbf{u}_0 , $\dot{\mathbf{u}}_0$ y $\ddot{\mathbf{u}}_0$, respectivamente. Habitualmente las condiciones iniciales corresponden a velocidad y desplazamiento nulos. La aceleración $\ddot{\mathbf{u}}_0$ deberá cumplir (3.21) y, por tanto

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_0 = -\mathbf{M}\mathbf{J}a_{g_0} \quad (3.27)$$

expresión que permite completar las condiciones iniciales.

Problema resuelto. *Considérese una estructura sin amortiguamiento, cuyas matrices de masa y rigidez son, respectivamente*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 400 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix}$$

El vector \mathbf{J} vale $\mathbf{J}^T = [1, 0]$, mientras que la aceleración es $a_g(t) = 2.5 \text{ sen } 2t$.

Solución

La ecuación diferencial del movimiento (3.22) queda

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \begin{bmatrix} 400 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{i+1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{sen } [2(i+1)\Delta t]$$

Los períodos propios de la estructura son $T_1 = 1.017 \text{ s}$ y $T_2 = 0.388 \text{ s}$. Tomando $\gamma = 0.5$, $\beta = 0.25$ y $\Delta t = 0.05 \text{ s}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta \Delta t^2} &= 1600 & \frac{1}{\beta \Delta t} &= 80 & \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) &= 1 \\ \frac{\gamma}{\beta \Delta t} &= 40 & \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) &= -1 & \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t &= 0 \end{aligned}$$

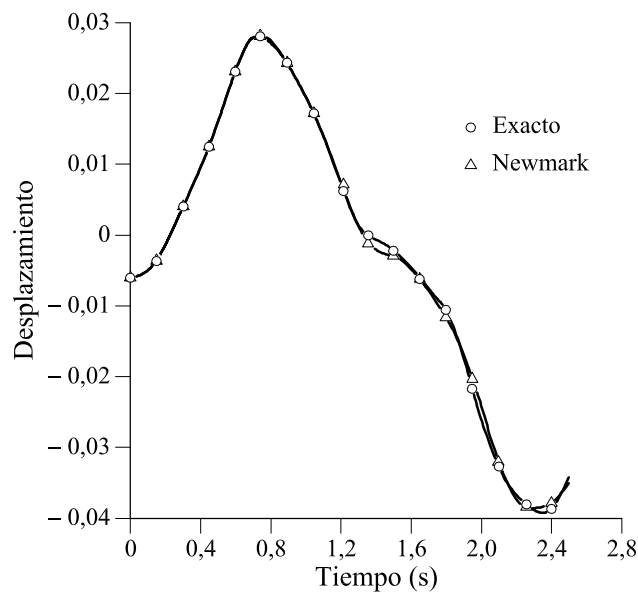


Figura 3.6 Comparación entre el movimiento del primer grado de libertad obtenido mediante el método de Newmark y la solución exacta.

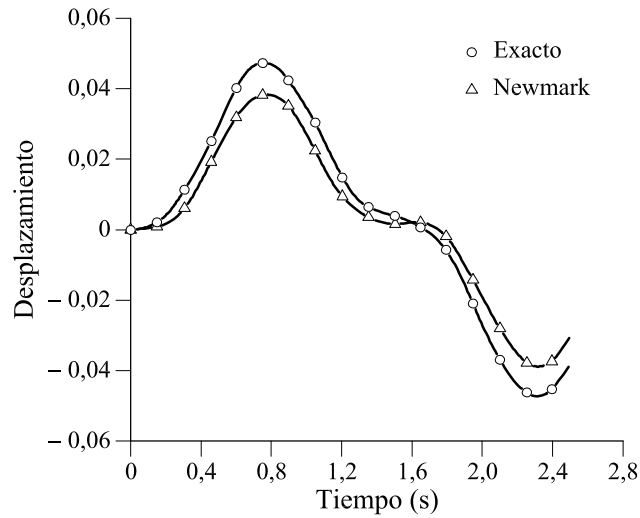


Figura 3.7 Comparación entre el movimiento del segundo grado de libertad obtenido mediante el método de Newmark y la solución exacta.

En la figura 3.6 puede verse la variación del corrimiento del primer grado de libertad con el tiempo. En la figura 3.7 la misma variación, pero referente al segundo grado de libertad. Puede observarse en ambas figuras el grado de aproximación con la solución exacta.

Aproximación y estabilidad

En el caso de una estructura con un solo grado de libertad la ecuación (3.22) se reduce a

$$\ddot{u}_{i+1} + 2\xi\omega\dot{u}_{i+1} + \omega^2u_{i+1} = -(a_g)_{i+1} \quad (3.28)$$

Las ecuaciones en diferencias de Newmark (3.17) y (3.20) serán

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1-\gamma)\ddot{u}_i + \gamma\ddot{u}_{i+1}]\Delta t \quad (3.29)$$

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}_i + \beta \ddot{u}_{i+1} \right] \Delta t^2 \quad (3.30)$$

De estas tres ecuaciones es fácil deducir la relación entre el estado $i+1$ y el anterior i . Para $\xi = 0$ y cuando las fuerzas externas son nulas, esta relación será

$$\begin{bmatrix} u_{i+1} \\ \dot{u}_{i+1} \\ \ddot{u}_{i+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} u_i \\ \dot{u}_i \\ \ddot{u}_i \end{bmatrix}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \frac{1}{B} \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \\ -\gamma \omega^2 \Delta t & 1 - (\gamma - \beta) \omega^2 \Delta t^2 & \left[1 - \gamma - \left(\frac{1}{2} \gamma - \beta\right) \Delta t^2 \omega^2\right] \Delta t \\ -\omega^2 & -\omega^2 \Delta t & -\left(\frac{1}{2} - \beta\right) \omega^2 \Delta t^2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

siendo

$$B = 1 + \beta \omega^2 \Delta t^2$$

Puede demostrarse que este esquema es incondicionalmente estable para

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad (3.32a)$$

$$\beta \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \gamma \right)^2 \quad (3.32b)$$

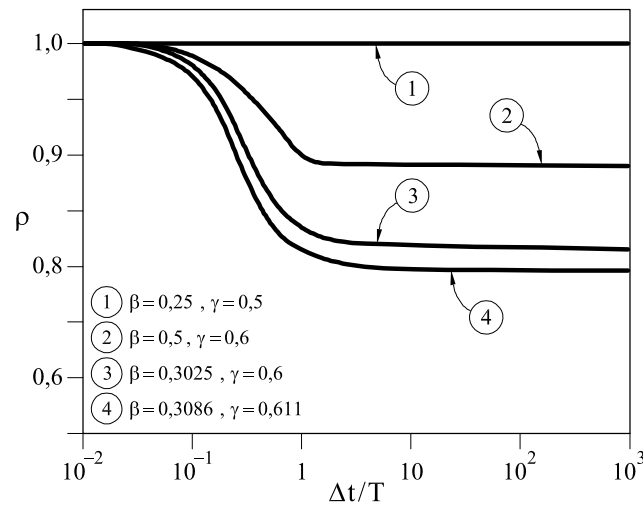


Figura 3.8 Método de Newmark. Variación del radio espectral en función de $\Delta t/T$

El grado de amortiguamiento viene dado por el parámetro γ , siendo mayor a medida que dicho valor aumenta. En la figura 3.8 puede observarse la variación del radio espectral ρ en función de $\Delta t/T$ para diversos valores de γ y β . Como puede observarse, para $\gamma = 0,5$ y $\beta = 0,25$ el amortiguamiento introducido por el algoritmo es nulo, cualquiera que sea el incremento de tiempo elegido. Para valores de $\gamma > 0,5$ el amortiguamiento es excesivamente grande, por lo que se producen imprecisiones en los resultados, a menos que se elija un Δt muy pequeño y, por lo tanto, poco económico para un esquema implícito. Habitualmente se toma $\gamma = 0,5$ y $\beta = 0,25$.

Problema resuelto. Con los datos del problema resuelto anterior, comparar la integración paso a paso por el método de Newmark, con los siguientes parámetros:

$$\gamma = 0.45, \beta = 0.25 .$$

$$\gamma = 0.5, \beta = 0.25 .$$

Solución

Los resultados pueden verse en la figura 3.9.

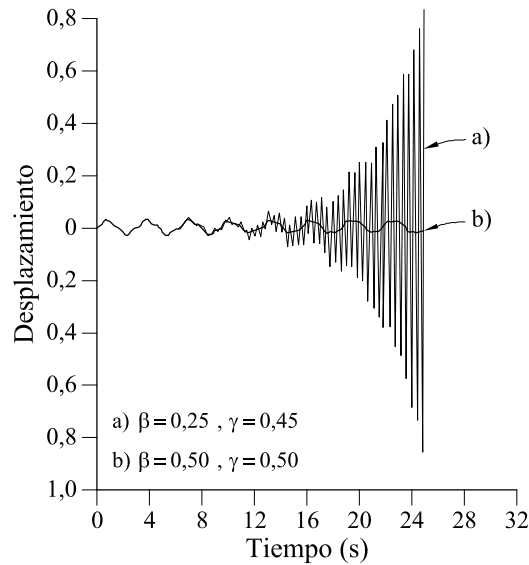


Figura 3.9 Estabilidad en el método de Newmark:

Caso (a) $\gamma = 0.45, \beta = 0.25$;

Caso (b) $\gamma = 0.5, \beta = 0.25$.

Puede observarse que en los primeros incrementos de tiempo las soluciones prácticamente no difieren. Sin embargo, a partir de un cierto tiempo, la solución obtenida con $\gamma = 0.45$ diverge de forma manifiesta.

Por lo que respecta a los errores en el período, en la figura 3.10 puede observarse el error relativo $(\bar{T} - T)/T$ para distintos valores de los parámetros α y β .

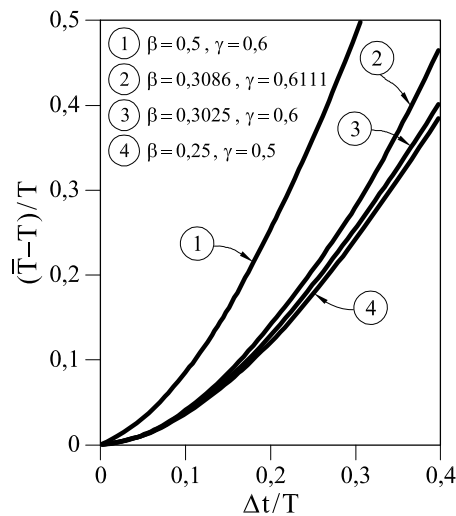


Figura 3.10 Método de Newmark. Errores en el período.

3.4.4 Método de las diferencias centrales

Ecuaciones de diferencias finitas y análisis lineal

A diferencia de los métodos implícitos vistos anteriormente, el método de las diferencias centrales constituye un esquema explícito, basado en el hecho de que la respuesta en el tiempo $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ se halla a partir de la ecuación de equilibrio en el tiempo t_i . Como se verá, ello implica que no es necesario resolver ningún sistema de ecuaciones, con lo que la solución del problema se simplifica notablemente. Como contrapartida, este método es condicionalmente estable, es decir, para intervalos de integración mayores que el incremento de tiempo crítico Δt_{cr} la solución se hace inestable y no converge.

En el método de las diferencias centrales, las ecuaciones en diferencias se escriben en la forma

$$\ddot{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{\Delta t^2} [\mathbf{u}_{i+1} - 2\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i-1}] \quad (3.33)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{2\Delta t} [\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_{i-1}] \quad (3.34)$$

Estas expresiones, junto con la ecuación diferencial del movimiento en el tiempo t_i

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{K}\mathbf{u}_i = -\mathbf{M}\mathbf{J}(a_g)_i \quad (3.35)$$

darán la solución para $t = t_i + \Delta t$. En efecto, si se introduce (3.33) y (3.34) en (3.35), se obtiene

$$\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} [\mathbf{u}_{i+1} - 2\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i-1}] + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} [\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_{i-1}] + \mathbf{K}\mathbf{u}_i = -\mathbf{M}\mathbf{J}(a_g)_i$$

de donde despejando \mathbf{u}_{i+1}

$$\hat{\mathbf{M}}\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{P}_i \quad (3.36)$$

Siendo

$$\hat{\mathbf{M}} = \left[\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right] \quad (3.37a)$$

$$\mathbf{P}_i = -\mathbf{M}\mathbf{J}(a_g)_i + \left(\frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \mathbf{K} \right) \mathbf{u}_i + \left(\frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} - \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{u}_{i-1} \quad (3.37b)$$

Nótese la diferencia entre el sistema de ecuaciones (3.36) y los planteados anteriormente: en la expresión de $\hat{\mathbf{M}}$ no figura la matriz de rigidez.

Evidentemente, este método de integración será más efectivo si la matriz \mathbf{M} es diagonal y la matriz \mathbf{C} es de Rayleigh, con el coeficiente que afecta a la matriz de rigidez igual a cero. En este caso

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} \quad (3.38)$$

y la matriz inversa $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$ se obtiene directamente sin necesidad de realizar ningún tipo de triangularización. Aparece aquí, sin embargo, un primer inconveniente del método explícito, por cuanto la resolución de (3.36) en las favorables hipótesis que se están considerando sólo es posible si en la matriz de masa no existe ningún término nulo. Se deberá por tanto tener especial cuidado en aquellas formulaciones en elementos finitos en que aparecen términos de masa nulos, correspondientes en general a los grados de libertad asociados a los giros.

Obsérvese, además, en las expresiones (3.36) y (3.37), que para obtener \mathbf{u}_1 es preciso conocer no sólo \mathbf{u}_0 sino también \mathbf{u}_{-1} . Este último valor puede obtenerse, conocidas las condiciones iniciales de desplazamiento, velocidad y aceleración, a partir de las expresiones (3.33) y (3.34), de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_0 &= \frac{1}{\Delta t^2} [\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_{-1}] \\ \dot{\mathbf{u}}_0 &= \frac{1}{2\Delta t} [\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{-1}] \end{aligned}$$

de donde, despejando \mathbf{u}_{-1} , se obtiene

$$\mathbf{u}_{-1} = \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_0 - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_0 + \mathbf{u}_0 \quad (3.39)$$

Estabilidad

Aplicando el método de las diferencias centrales a un sistema con un grado de libertad sin fuerzas externas y no amortiguado, resulta

$$\begin{bmatrix} u_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i-1} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 - \omega^2 \Delta t^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Del análisis de los valores propios de la matriz \mathbf{A} se concluye que la integración es únicamente estable si $\Delta t < \frac{2}{\omega_{\max}}$, siendo ω_{\max} la frecuencia más elevada del sistema.

Ello representa un doble inconveniente: por una parte obliga a incrementos de tiempo

muy pequeños, mucho más pequeños en ocasiones que el necesario para obtener una completa descripción de la solución acorde con los deseos del calculista. Por otra parte obliga a calcular ω_{\max} . Esta frecuencia, al ser la mayor, está sometida a errores de discretización, por lo que su valor interesa únicamente a efectos de estabilidad numérica. Es decir, interesa hallar ω_{\max} correspondiente a la discretización realizada y no la correspondiente a la estructura real. Fundamentalmente hay dos formas de hallar ω_{\max} . La primera consiste en hallar la mayor frecuencia propia del sistema ensamblado. La segunda, es tener en cuenta que la mayor frecuencia del sistema ensamblado es menor que la máxima frecuencia de cada uno de los elementos considerados individualmente. Además, como es sabido

$$\omega_{\max}^e = \lambda \frac{c}{l_e} \quad (3.42)$$

en donde ω_{\max}^e es la máxima frecuencia de un elemento, c es la velocidad de transmisión de las ondas

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.43)$$

l_e es una longitud característica del elemento y λ es un parámetro que depende del tipo de problema y del tipo de elemento²

Problema resuelto. *Integrar, mediante el esquema en diferencias centrales, las ecuaciones del movimiento correspondientes al problema resuelto anteriormente. Se supondrán incrementos de tiempo de $\Delta t_1 = 0.05 s$ y $\Delta t_2 = 0.15 s$*

Solución:

La máxima frecuencia del sistema vale

$$\omega_{\max} = 16,18 \text{ radn/s}$$

por lo que el incremento de tiempo crítico se escribe

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{\max}} = \frac{2}{16,18} = 0,124 s$$

En la figura 3.11 pueden verse los resultados de la integración con $\Delta t = 0.15 s$, comparados con los correspondientes a $\Delta t = 0.05 s$. Como puede observarse, ya a partir de los primeros intervalos de tiempo, la solución correspondiente a $\Delta t = 0.15 s$ diverge claramente ya que este incremento de tiempo es superior al crítico.

² Una descripción más detallada del valor de l_e puede verse en alguno de los textos clásicos de elementos finitos.

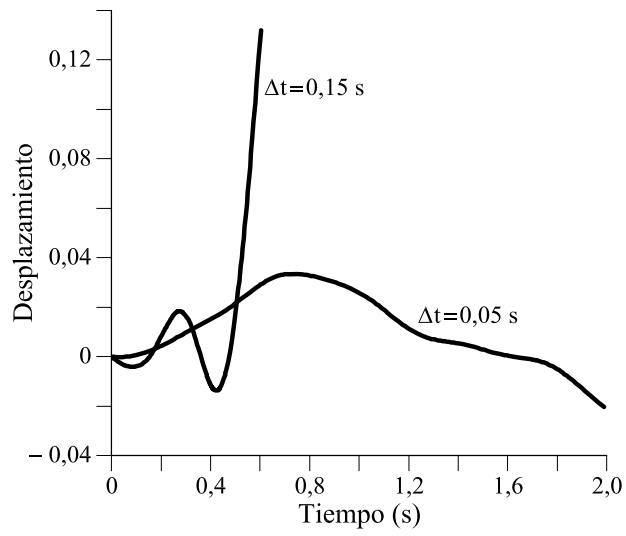


Figura 3.11 Método de las diferencias centrales. Incrementos de tiempo inferior y superior al crítico.

Capítulo 4

RESPUESTA ESTRUCTURAL PARA EL CASO SÍSMICO

4.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se han desarrollado diversas metodologías para el cálculo de estructuras sometidas a acciones que causan efectos dinámicos en las mismas. Dichas metodologías son completamente generales independientemente de la naturaleza de la acción. Existe, sin embargo, un tipo determinado de acción dinámica de extraordinaria importancia en la Ingeniería Civil. Por ello, en este capítulo se va a tratar de las especificidades de esta acción y de la forma característica de obtener la respuesta estructural.

4.2 ESPECTROS SÍSMICOS DE RESPUESTA

4.2.1 Definición de los espectros sísmicos de respuesta

La solución de las vibraciones estacionarias de un sistema con un solo grado de libertad vienen dadas por (2.57), en donde $u(t)$ es una función de ξ , ω y $a_g(t)$. Derivando respecto al tiempo dicha expresión, se obtiene la historia de la respuesta en velocidades

$$\dot{u}(t) = -\int_0^t a_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cos \omega(t-\tau) d\tau + \xi \omega u(t) \quad (4.1)$$

Derivando de nuevo, se obtiene la respuesta en aceleraciones totales del sistema

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) + a_g(t) &= \omega \int_0^t a_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \operatorname{sen} \omega(t-\tau) d\tau \\ &\quad - 2\xi\omega\dot{u}(t) - (\xi\omega)^2 u(t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Los espectros de respuesta en desplazamientos, velocidades y aceleraciones se definen, para un cierto acelerograma, como los máximos valores de las respuestas del sistema, expresados en función de la frecuencia ω o del período T , para una fracción del amortiguamiento crítico dada ξ

$$S_d^r(\omega, \xi) = |u(t)|_{\max} \quad (4.3)$$

$$S_v^r(\omega, \xi) = |\dot{u}(t)|_{\max} \quad (4.4)$$

$$S_a^\tau(\omega, \xi) = \left| \ddot{u}(t) + a_g(t) \right|_{\max} \quad (4.5)$$

Utilizando las expresiones (2.57), (4.1) y (4.2), las ecuaciones de definición de los espectros pueden escribirse en la siguiente forma explícita:

$$S_d^\tau(\omega, \xi) = \left| -\frac{1}{\omega} \int_0^t a_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (4.6)$$

$$S_v^\tau(\omega, \xi) = \left| -\int_0^t a_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cos \omega(t-\tau) d\tau + \xi \omega u(t) \right|_{\max} \quad (4.7)$$

$$S_a^\tau(\omega, \xi) = \left| \omega \int_0^t a_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega(t-\tau) d\tau - 2\xi \omega \dot{u}(t) - (\xi \omega)^2 u(t) \right|_{\max} \quad (4.8)$$

Puede verse que S_d^τ y S_v^τ son, respectivamente, los valores máximos de los desplazamientos y velocidades relativos, mientras que S_a^τ es el máximo valor de la aceleración total de la respuesta de un oscilador con un grado de libertad.

4.2.2 Seudoespectros de respuesta

El concepto de espectro de respuesta fue introducido por Benioff en 1934 con el propósito de utilizarlo en el cálculo sísmico de estructuras. Usaba un analizador mecánico para dibujar los espectros sobre una hoja registradora. En esta primera etapa se utilizaron también sistemas ópticos para obtener los espectros de respuesta.

Posteriormente, Biot, Housner y otros desarrollaron la teoría de los espectros sísmicos de respuesta en la forma en que se conoce hoy en día. Al objeto de obtener expresiones más simples que las dadas por las expresiones (4.6), (4.7) y (4.8) se han introducido algunas aproximaciones. En primer lugar, como el amortiguamiento es normalmente pequeño en las aplicaciones propias de Ingeniería Civil ($0,02 < \xi < 0,2$) los términos fuera de la integral en el segundo miembro de las expresiones (4.7) y (4.8) que multiplican a la fracción del amortiguamiento crítico, se desprecian. Asimismo, Hudson estableció que la función coseno que aparece en el espectro de velocidades, puede sustituirse a efectos de cálculo por la función seno, sin que ello implique importantes variaciones en los valores máximos de la velocidad del sistema. Esta aproximación, teóricamente basada en la aleatoriedad de las aceleraciones del terreno $a_g(t)$, es válida en el rango usual de las frecuencias que aparecen en el diseño sísmico y deja de cumplirse para períodos muy elevados. De esta manera, se introducen tres nuevas cantidades, definidas como *seudoespectros de respuesta* de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Sus expresiones son:

$$S_d(\omega, \xi) = \left| -\frac{1}{\omega} \int_0^t a_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (4.9)$$

$$S_v(\omega, \xi) = \left| -\int_0^t a_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (4.10)$$

$$S_a(\omega, \xi) = \left| \omega \int_0^t a_g(\tau) e^{-\xi \omega(t-\tau)} \text{sen } \omega(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (4.11)$$

Las aproximaciones introducidas permiten calcular S_v y S_a en función de S_d , utilizando las ecuaciones

$$S_v = \omega S_d \quad (4.12)$$

$$S_a = \omega^2 S_d \quad (4.13)$$

A partir de éstas, los tres seudoespectros de respuesta pueden dibujarse en la misma gráfica utilizando una escala trilogarítmica, tal como puede observarse en el ejemplo de la figura 4.1.

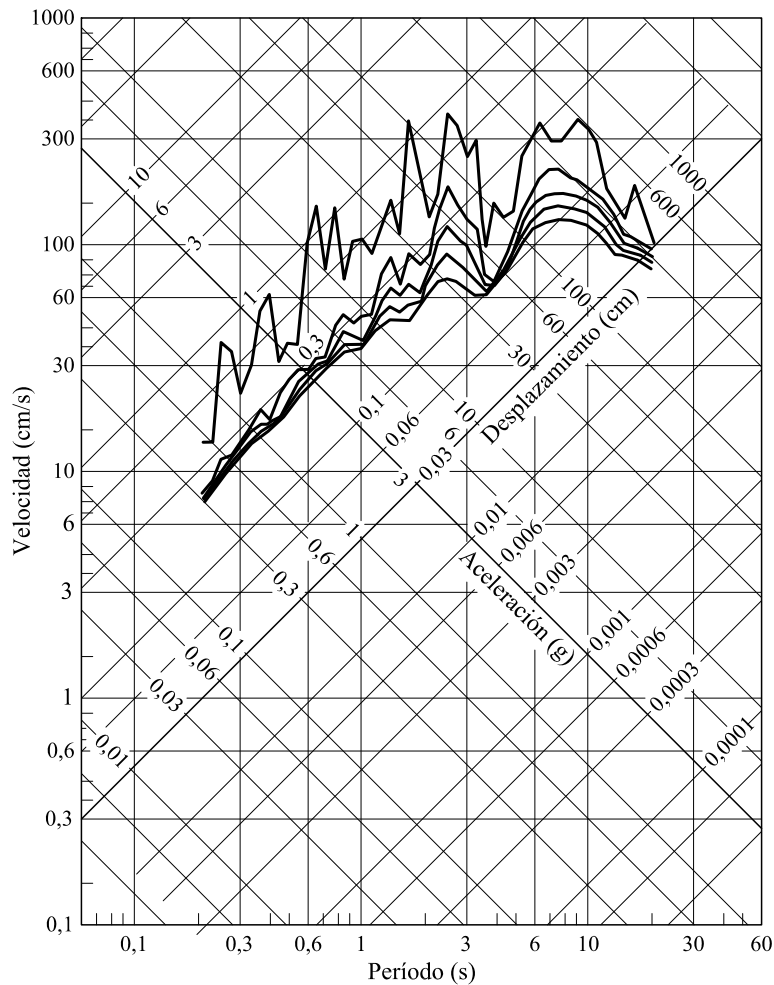


Fig. 4.1 Representación trilogarítmica de un espectro sísmico de respuesta

Los espectros sísmicos de respuesta son interesantes solamente desde un punto de vista histórico y teórico. Contrariamente, los seudoespectros sísmicos de respuesta tienen una gran importancia práctica desde el punto de vista de la ingeniería, siendo ampliamente utilizados en el diseño sísmico de estructuras. En lo que sigue se utilizarán los seudoespectros sísmicos de respuesta, tal como viene siendo habitual en la ingeniería.

Lo visto anteriormente presupone el conocimiento del acelerograma de un determinado terremoto. Sin embargo, en la práctica diaria del cálculo sísmico de estructuras es preceptivo aplicar determinados espectros de respuesta estandarizados

que figuran en las normas de los respectivos países. Dichos espectros suelen obtenerse promediando, ponderando y suavizando un número suficiente de espectros de respuesta determinados de la forma que se ha descrito hasta ahora.

Al objeto de comparar los seudoespectros de respuesta y los espectros de respuesta, se han generado dos acelerogramas artificiales utilizando técnicas estándar (véase la figura 4.2). La diferencia entre el seudoespectro de respuesta en desplazamientos y el espectro de desplazamientos es muy pequeña. Los espectros de velocidades y aceleraciones, así como los seudoespectros de velocidades y aceleraciones, correspondientes a una fracción del amortiguamiento crítico $\xi = 0.05$, calculados para incrementos del período de 0.05 s, en el rango de períodos comprendido entre 0.0 s y 5.0 s, pueden verse dibujados en las figuras 4.3 y 4.4. Como se observa, las diferencias entre espectros y seudoespectros son mayores para períodos elevados, pero en ningún caso superiores al 15%.

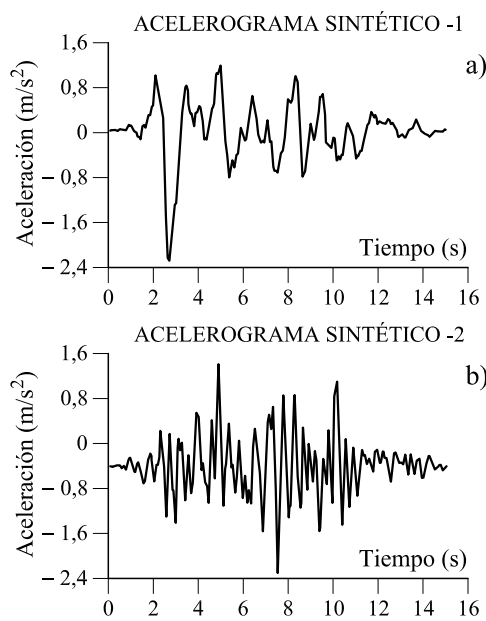


Figura 4.2 (a) Acelerograma artificial de período fundamental $2\pi/\omega = 1.25\text{ s}$. (b) Acelerograma artificial de período fundamental $2\pi/\omega = 0.4\text{ s}$

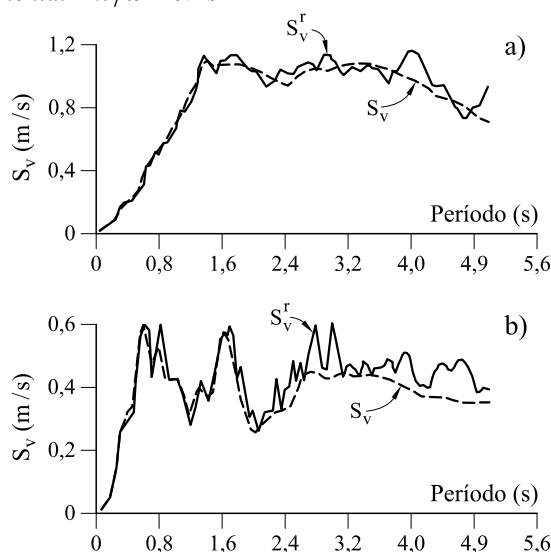


Figura 4.3 Seudoespectro y espectro de velocidades; (a) corresponde al acelerograma (1); (b) corresponde al acelerograma (2).

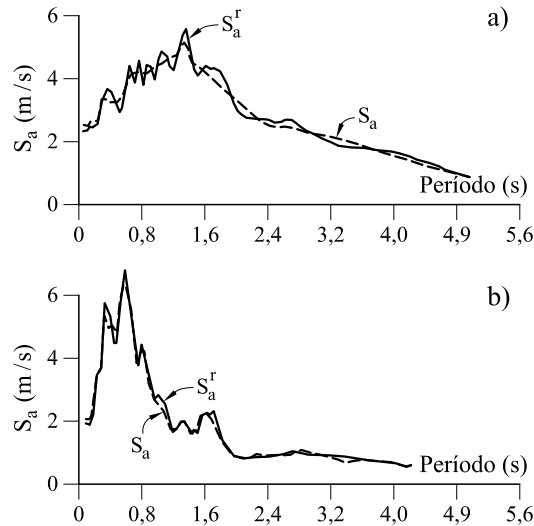


Figura 4.4 Seudoespectro y espectro de aceleraciones;
 (a) corresponde al acelerograma (1);
 (b) corresponde al acelerograma (2).

4.3 RESPUESTA MÁXIMA UTILIZANDO ESPECTROS DE RESPUESTA

La ecuación desacoplada (3.10) puede también resolverse usando los espectros de respuesta, proporcionando en este caso únicamente la respuesta estructural máxima. En efecto, si para la ecuación

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = a_g(t) \quad (4.14)$$

la máxima aceleración $|\ddot{y}(t)|_{\max}$ vale S_a , es evidente que la aceleración máxima para (3.10) o (4.14) será

$$|\ddot{y}_j(t)|_{\max} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{J}}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j} (S_a)_j \quad (4.15)$$

Como consecuencia, el desplazamiento máximo es:

$$|y_j(t)|_{\max} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{J}}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j} \frac{(S_a)_j}{\omega_j^2} \quad (4.16)$$

Con lo que los desplazamientos máximos en todos los nodos, para el modo j son, por tanto

$$\mathbf{u}_{\max}^j = \begin{bmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ \vdots \\ u_n^j \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varphi}_j |y_j(t)|_{\max} = \boldsymbol{\varphi}_j \frac{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{J}}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j} \frac{(S_a)_j}{\omega_j^2} = \mathbf{A}_j \frac{(S_a)_j}{\omega_j^2} \quad (4.17)$$

donde \mathbf{A}_j es el vector de los coeficientes de participación modal correspondientes al modo j de vibración. Puesto que en cada grado de libertad el máximo de cada modo no se produce en el mismo instante de tiempo, la respuesta máxima de la estructura no será igual a la suma de los máximos correspondientes a cada modo. Es decir

$$\mathbf{u}_{\max} \neq \sum_{j=1}^q \mathbf{u}_{\max}^j \quad (4.18)$$

Se han propuesto diferentes fórmulas para hallar el valor de \mathbf{u}_{\max} a partir de \mathbf{u}_{\max}^j . La más simple y a la vez la más usada es la que establece que la respuesta es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las respuestas modales

$$\mathbf{u}_{\max} = \sqrt{\sum_{j=1}^q (\mathbf{u}_{\max}^j)^2} \quad (4.19)$$

En la expresión anterior, tanto el cuadrado como la raíz cuadrada debe entenderse que se refieren a cada uno de los elementos de los correspondientes vectores columna. Por lo que respecta a las tensiones, reacciones y, en general, a cualquier respuesta \mathbf{R} que quiera determinarse, se tendrá igualmente

$$\mathbf{R}_{\max} = \sqrt{\sum_{j=1}^q (\mathbf{R}_{\max}^j)^2} \quad (4.20)$$

Problema resuelto Hallar la respuesta máxima de la estructura de la figura 3.2, siendo el espectro de respuesta el representado en la figura 4.5. Esta forma de representación del espectro es la que se utiliza habitualmente en las normas sísmicas.

Solución

Las ecuaciones del movimiento desacopladas serán las (ver el problema resuelto del Capítulo 3).

Primer modo

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5.92} = 1.061 \text{ s}$$

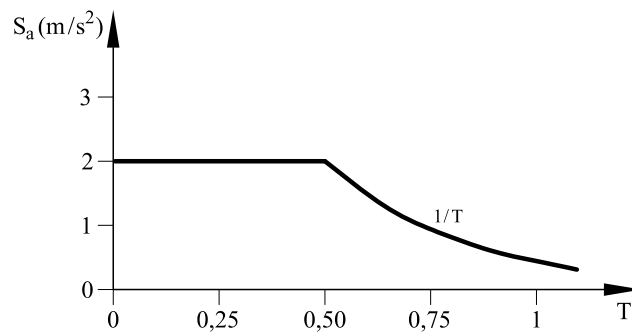


Fig. 4.5 Espectro de respuesta en aceleraciones para el problema resuelto.

por lo que

$$(S_a)_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.061} = 0.942 \text{ m/s}^2$$

De acuerdo con (4.17), se obtiene

$$\mathbf{u}_{\max}^1 = \boldsymbol{\varphi}_1 \frac{\boldsymbol{\varphi}_1^T \mathbf{M} \mathbf{J}}{\boldsymbol{\varphi}_1^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_1} \frac{(S_a)_1}{\omega_1^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.15 \\ 3.31 \end{bmatrix} 0.429 \frac{0.942}{(5.92)^2} = \begin{bmatrix} 0.0115 \\ 0.0246 \\ 0.0379 \end{bmatrix} m$$

Segundo modo

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{12.69} = 0.495 \text{ s}$$

$$(S_a)_2 = 2 \text{ m/s}^2$$

Por tanto

$$\mathbf{u}_{\max}^2 = \boldsymbol{\varphi}_2 \frac{\boldsymbol{\varphi}_2^T \mathbf{M} \mathbf{J}}{\boldsymbol{\varphi}_2^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_2} \frac{(S_a)_2}{\omega_2^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.89 \\ -1.46 \end{bmatrix} 0.353 \frac{2}{(12.69)^2} = \begin{bmatrix} 0.0044 \\ 0.0039 \\ -0.0064 \end{bmatrix} m$$

Tercer modo

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{18.81} = 0.334 \text{ s}$$

$$(S_a)_3 = 2 \text{ m/s}^2$$

Por lo que se tendrá

$$\mathbf{u}_{\max}^3 = \boldsymbol{\varphi}_3 \frac{\boldsymbol{\varphi}_3^T \mathbf{M} \mathbf{J}}{\boldsymbol{\varphi}_3^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_3} \frac{(S_a)_3}{\omega_3^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.04 \\ 0.41 \end{bmatrix} 0.224 \frac{2}{(18.81)^2} = \begin{bmatrix} 0.0013 \\ -0.0013 \\ 0.0005 \end{bmatrix} m$$

En consecuencia, de acuerdo con la ecuación (4.19), se obtiene

$$\mathbf{u}_{\max} = \sqrt{\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} (0.0115)^2 \\ (0.0246)^2 \\ (0.0379)^2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} (0.0044)^2 \\ (0.0039)^2 \\ (-0.0064)^2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} (0.0013)^2 \\ (-0.0013)^2 \\ (0.0005)^2 \end{array} \right] \end{array} \right]} = \begin{bmatrix} 0.0124 \\ 0.0249 \\ 0.0384 \end{bmatrix} m$$

que es el vector de los desplazamientos máximos.

4.4 CÁLCULO DE EDIFICIOS DE CORTANTE

4.4.1 Introducción

En el cálculo tridimensional de las estructuras de edificación son necesarios, en el caso más general, seis grados de libertad por nodo. Por otra parte, la diversidad de formas estructurales así como el gran número de grados de libertad resultantes, hacen que el análisis general y riguroso sea complejo incluso en el cálculo estático. Por ello, como es sabido, en los casos más usuales se recurre a algoritmos de cálculo que si bien llevan consigo algunas simplificaciones, proporcionan resultados cuya exactitud es considerada satisfactoria.

Cuando se estudia la respuesta de los edificios de cortante frente a cargas sísmicas (véase la figura 4.6), las aproximaciones son mayores todavía. Usualmente, la estructura se separa en sus dos componentes ortogonales realizándose un análisis plano, por separado, de cada una de ellas. Dichos pórticos planos se idealizan mediante diafragmas rígidos en los pisos y considerando la traslación horizontal como único grado de libertad por planta.

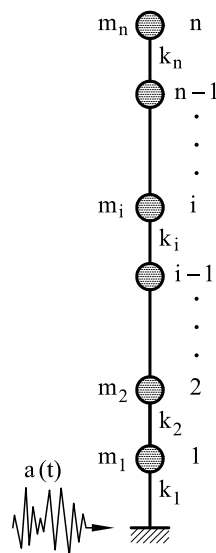


Fig. 4.6 Modelo de edificio de cortante

Sin embargo, casos especiales, derivados fundamentalmente del acoplamiento de los modos de vibración transversales y de torsión, deben ser tenidos en cuenta. El esquema de cálculo usado halla la respuesta máxima, tal como queda desarrollado en el apartado anterior. La respuesta estructural consiste en las fuerzas estáticas equivalentes que actúan en las plantas, en los corrimientos en dichas plantas y en el cortante en la base.

4.4.2 Formulación del problema

Un típico modelo de edificio de cortante, como el que puede verse representado en la figura 4.6, tendrá la siguiente ecuación dinámica:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{M}\{\mathbf{1}\}a_g(t) \quad (4.21)$$

en donde \mathbf{M} es una matriz diagonal, cuyos términos son la masa del piso correspondiente. La expresión de la matriz \mathbf{K} viene dada en el Capítulo 1 por la expresión (1.29) y $\{\mathbf{1}\}$ es un vector columna en el cual todos sus elementos valen 1.

Procediendo al desacoplamiento modal de (4.21), se obtienen n expresiones de la forma (4.17)

$$\mathbf{u}_{\max}^j = \boldsymbol{\varphi}_j \frac{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \{\mathbf{1}\} (S_a)_j}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j \omega_j^2} \quad (4.22)$$

y llamando

$$q_j = \frac{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \{\mathbf{1}\}}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j} \quad (4.23)$$

la expresión (4.22) se convierte en

$$\mathbf{u}_{\max}^j = \boldsymbol{\varphi}_j q_j \frac{(S_a)_j}{\omega_j^2} \quad (4.24)$$

A partir de esta expresión, sumando los cuadrados de los desplazamientos correspondientes a un número $q < n$ de modos de acuerdo con (4.19), pueden calcularse los corrimientos totales máximos.

Para hallar las fuerzas estáticas equivalentes que actúan en cada planta (ver figura 4.7), partiendo de (4.24) se obtiene

$$\mathbf{f}_j = \begin{bmatrix} f_{j1} \\ f_{j2} \\ \vdots \\ f_{jn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_j = \mathbf{K} \mathbf{u}_{\max}^j = \mathbf{K} \frac{1}{\omega_j^2} \boldsymbol{\varphi}_j q_j (S_a)_j \quad (4.25)$$

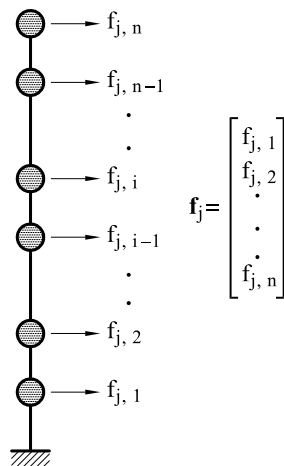


Fig. 4.7 Fuerzas actuantes en un edificio de cortante.

y teniendo presente que

$$\mathbf{K} \frac{1}{\omega_j^2} = \mathbf{M} \quad (4.26)$$

la expresión (4.25) se transforma en

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j q_j (S_a)_j \quad (4.27)$$

Asimismo, el cortante en la base Q_j valdrá

$$Q_j = \mathbf{f}_j^T \{\mathbf{1}\} \quad (4.28)$$

Para obtener tanto el valor de las fuerzas como el del cortante en la base, resultantes de la combinación de los modos, se aplica nuevamente el criterio (4.20) de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados.

Problema resuelto *En la estructura de la figura 3.2, sometida a una fuerza sísmica, cuyo espectro de respuesta es el de la figura 4.5, hallar las fuerzas en las plantas, así como el cortante en la base.*

Solución

Los valores q_j de la expresión (4.23) valdrán para cada modo

$$q_1 = 0.429$$

$$q_2 = 0.353$$

$$q_3 = 0.224$$

Asimismo, las ordenadas del espectro de respuesta son

$$(S_a)_1 = 0.942 \text{ m/s}^2$$

$$(S_a)_2 = 2 \text{ m/s}^2$$

$$(S_a)_3 = 2 \text{ m/s}^2$$

por lo que las fuerzas en las plantas, en Newton, valen

$$\mathbf{f}_1 = 10^4 \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2.15 \\ 3.31 \end{bmatrix} 0.429 \times 0.942 = \begin{bmatrix} 8.08 \\ 13.38 \end{bmatrix} 10^4$$

$$\mathbf{f}_2 = 10^4 \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.89 \\ -1.46 \end{bmatrix} 0.353 \times 2 = \begin{bmatrix} 14.12 \\ 9.43 \\ -10.31 \end{bmatrix} 10^4$$

$$\mathbf{f}_3 = 10^4 \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1.04 \\ 0.41 \end{bmatrix} 0.224 \times 2 = \begin{bmatrix} 8.96 \\ -6.99 \\ 1.84 \end{bmatrix} 10^4$$

Los esfuerzos cortantes en la base valdrán para cada modo

$$Q_1 = (8.08 + 13.03 + 13.38) \times 10^4 = 34.49 \times 10^4 \text{ N}$$

$$Q_2 = (14.12 + 9.43 - 10.31) \times 10^4 = 13.24 \times 10^4 \text{ N}$$

$$Q_3 = (8.96 - 6.99 + 1.84) \times 10^4 = 3.81 \times 10^4 \text{ N}$$

En consecuencia se obtiene el vector

$$\mathbf{f} = \sqrt{\left\{ \begin{bmatrix} (8.08)^2 \\ (13.03)^2 \\ (13.38)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (14.12)^2 \\ (9.43)^2 \\ (-10.31)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (8.96)^2 \\ (-6.99)^2 \\ (1.84)^2 \end{bmatrix} \right\}} \times 10^4 = \begin{bmatrix} 18.57 \\ 17.54 \\ 16.99 \end{bmatrix} 10^4 \text{ N}$$

que contiene las fuerzas máximas en cada planta, resultantes de la combinación de los modos y

$$Q = \sqrt{(34.49)^2 + (13.24)^2 + (3.81)^2} \times 10^4 = 37.14 \times 10^4 \text{ N}$$

que es el cortante máximo en la base

Capítulo 5

SISTEMAS CONTINUOS

5.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se ha estudiado el comportamiento dinámico de estructuras con un solo grado de libertad. En este capítulo se van a plantear las ecuaciones diferenciales de equilibrio dinámico para un conjunto de sistemas continuos. En algunos casos, tales como las vigas, se estudiará la respuesta dinámica para el caso de vibraciones libres, lo cual permitirá obtener las características de frecuencias propias y formas modales, mientras que para el caso general de elasticidad tridimensional se enunciarán únicamente algunas propiedades de interés.

5.2 VIGA RECTA SOMETIDA A ESFUERZO AXIL

5.2.1 Formulación

Considérese una pieza recta (figura 5.1) de longitud L sometida únicamente a esfuerzos axiales variables con el tiempo. Sea ρ_L la masa de la viga por unidad de longitud (densidad lineal). Sea p_x la fuerza externa (también variable con el tiempo) por unidad de longitud que actúa en la viga en dirección x , si en un punto cualquiera

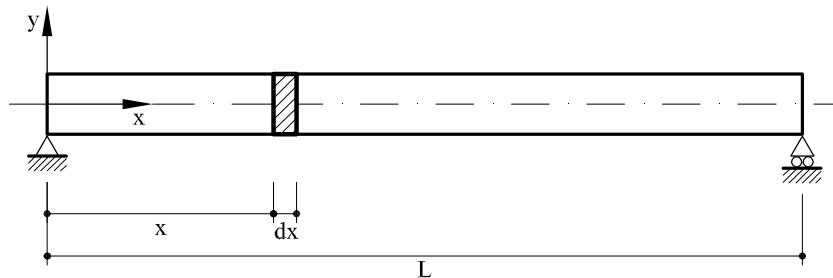


Fig. 5.1 Viga sometida a esfuerzos axiales dinámicos

de la viga se separa una rebanada diferencial de longitud dx (figura 5.2) por equilibrio se tendrá:

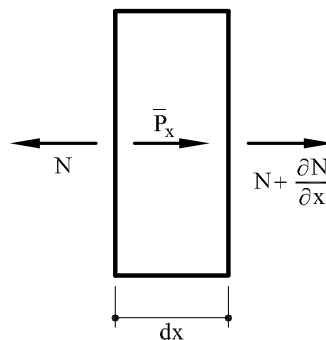


Fig. 5.2 Equilibrio en una rebanada elemental

$$N + \frac{\partial N}{\partial x} dx - N + \bar{p}_x = 0 \quad (5.1)$$

en donde \bar{p}_x es la fuerza repartida por unidad de longitud que actúa en la viga en dirección x . Esta fuerza \bar{p}_x es la suma de las fuerzas externas más las de inercia. Es decir:

$$\bar{p}_x = p_x - \rho_L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5.2)$$

siendo u el movimiento de dirección x . Sustituyendo en (5.1) se obtiene:

$$\rho_L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial N}{\partial x} = p_x \quad (5.3)$$

Y dado que:

$$N = \sigma A = E \varepsilon A = E A \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.4)$$

Sustituyendo se obtiene finalmente

$$\rho_L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(E A \frac{\partial u}{\partial x} \right) = p_x \quad (5.5)$$

En la expresión anterior, A es la sección recta de la viga. Dicha sección puede ser variable o bien constante en toda la longitud. La deformación longitudinal de la viga viene dada por $\varepsilon = \partial u / \partial x$.

5.2.2 Vibraciones libres

Para el caso de piezas prismáticas en las cuales el producto $E A$ es constante en toda la longitud de la viga, y ante la ausencia de cargas externas ($p_x = 0$), la expresión (5.5) se escribe

$$\rho_L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (5.6)$$

La expresión anterior puede resolverse mediante separación de variables:

$$u = \varphi(x) z(t) \quad (5.7)$$

y sustituyendo en (5.6) y reordenando términos:

$$\frac{\rho_L}{E A} \frac{\ddot{z}(t)}{z(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -a^2 \quad (5.8)$$

en donde a es una constante real. De la ecuación anterior se desprende:

$$\ddot{z}(t) + \omega^2 z(t) = 0 \quad (5.9.a)$$

$$\varphi''(x) + a^2 \varphi(x) = 0 \quad (5.9.b)$$

en donde

$$\omega^2 = a^2 E A / \rho_L \quad (5.10)$$

y por tanto

$$a^2 = \omega^2 \frac{\rho_L}{E A} \quad (5.11)$$

Como es sabido, la solución de la ecuación (5.9.a) es:

$$z = \bar{A} e^{i\omega t} \quad (5.12.a)$$

en donde la constante compleja A depende de las condiciones iniciales. La expresión anterior puede también escribirse:

$$z(t) = \bar{A}_1 \sin \omega t + \bar{A}_2 \cos \omega t \quad (5.12.b)$$

en donde igualmente las constantes \bar{A}_1 y \bar{A}_2 dependen de las condiciones iniciales.

Por lo que respecta a la solución de (5.9.b), es también armónica pero con la variable independiente x en lugar de t :

$$\varphi(x) = B_1 \sin a x + B_2 \cos a x \quad (5.13)$$

en donde $\varphi(x)$ es la forma modal de la vibración. Las constantes B_1 y B_2 se obtienen a partir de las condiciones cinemáticas de los apoyos. Para el caso de una ménsula las condiciones de contorno son:

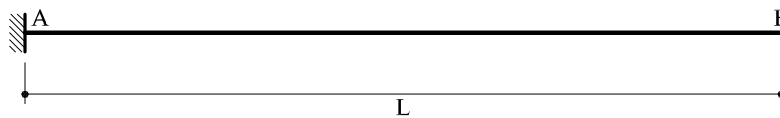


Fig. 5.3 Ménsula sometida a vibraciones axiales libres

$$\varphi(x=0) = 0$$

$$N(x=L) = E A \varphi'(x=L) = 0$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (5.13):

$$B_1 \sin(0) + B_2 \cos(0) = 0$$

$$a B_1 \cos(aL) - a B_2 \sin(aL) = 0$$

De la primera de ellas se obtiene que $B_2 = 0$. De la segunda:

$$B_1 \cos aL = 0$$

cuya solución (prescindiendo de la trivial $B_1 = 0$) es:

$$aL = \frac{2j-1}{2} \pi \quad (j=1,2,\dots) \quad (5.14)$$

y dado que, de acuerdo con (5.11) $a^2 = \omega^2 \rho_L / EA$, sustituyendo en (5.14) se obtienen las frecuencias propias ω_j de vibración de la pieza

$$\omega_j = \frac{2j-1}{2} \pi \sqrt{\frac{EA}{\rho_L L^2}} \quad (5.15)$$

Una vez obtenidos los valores de a , sustituyendo en (5.13) se obtienen las formas modales $\varphi_j(x)$:

$$\varphi_j(x) = \sin\left(\frac{2j-1}{2} \frac{\pi}{L} x\right) \quad (5.16)$$

En la figura 5.4 pueden verse las tres primeras formas modales así como las respectivas frecuencias.

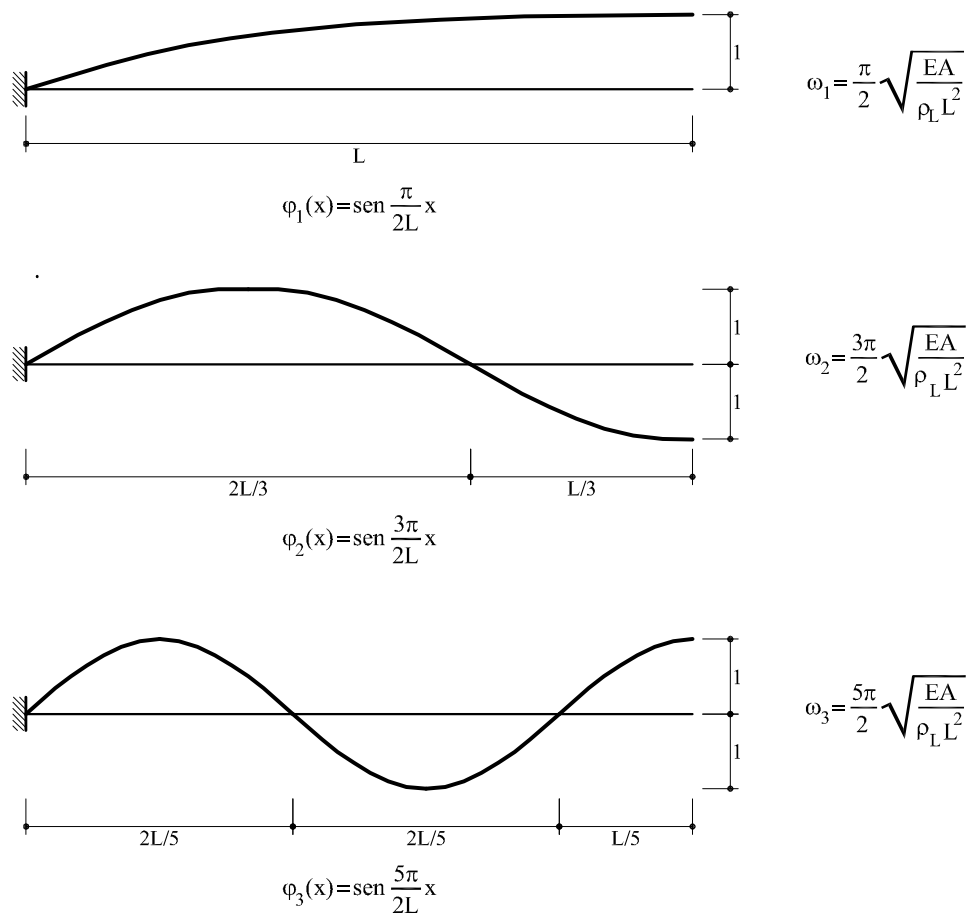


Fig. 5.4 Tres primeros modos de vibración

Para el caso de una viga con los dos extremos fijos (figura 5.5), las condiciones de contorno a imponer serán:

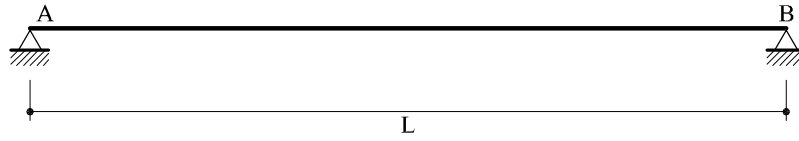


Fig. 5.5 Viga con los dos extremos fijos

$$\varphi(x=0) = 0$$

$$\varphi(x=L) = 0$$

Y sustituyendo en (5.13):

$$B_1 \sin(0) + B_2 \cos(0) = 0$$

$$B_1 \sin(aL) + B_2 \cos(aL) = 0$$

De la primera ecuación se obtiene que $B_1 = 0$. De la segunda:

$$\sin(aL) = 0 \tag{5.17}$$

es decir:

$$aL = j\pi \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

o sea:

$$\omega_j = j\pi \sqrt{\frac{EA}{\rho L^2}} \tag{5.18}$$

y las formas modales $\varphi(x)$ valdrán:

$$\varphi_j(x) = \sin \frac{j\pi x}{L} \tag{5.19}$$

En la figura 5.6 se representan los tres primeros modos de vibración

Puede verse, por tanto, que en general la solución de la ecuación dinámica (5.6) consistirá en la suma de unas formas modales (autofunciones) $\varphi_j(x)$ multiplicadas por unas amplitudes $z_j(t)$ dependientes del tiempo, es decir que forman una base. Por tanto:

$$u = \sum_j \varphi_j(x) z_j(t) \tag{5.20}$$

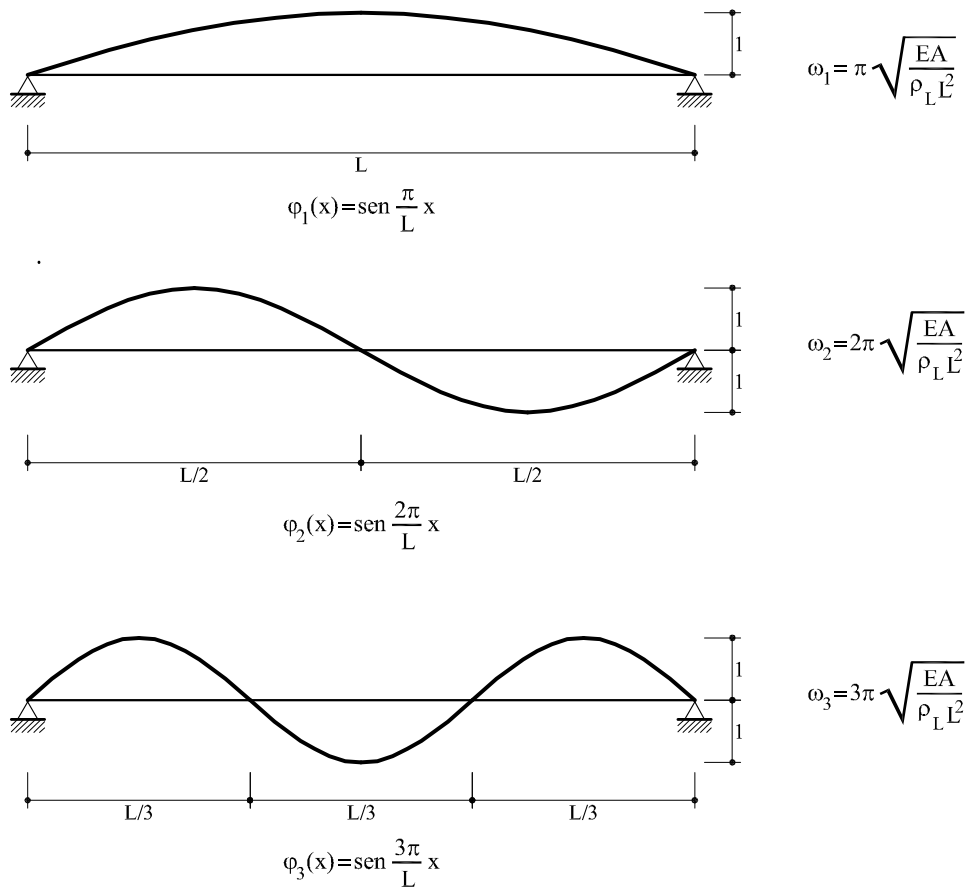


Fig. 5.6 Modos de vibración

Asimismo, es posible demostrar que las funciones $\varphi_j(x)$ son ortogonales entre sí, es decir que la integral

$$\int_0^L \varphi_j(x) \varphi_k(x) \quad (5.21)$$

Se anula si $j \neq k$

Por otra parte, dado que para vibraciones libres $z_j(t)$, de acuerdo con (5.12.a), pueden escribirse

$$z_j(t) = \bar{A} e^{i\omega_j t}$$

para el modo j la expresión (5.7) toma la forma

$$u_j(t) = \bar{A} \varphi_j e^{i\omega_j t} \quad (5.22)$$

e introduciendo esta expresión en (5.6):

$$-\frac{\rho_L}{EA} \omega_j^2 \bar{A} \varphi_j e^{i\omega_j t} - \bar{A} \frac{d^2 \varphi_j(x)}{dx^2} e^{i\omega_j t} = 0$$

Es decir:

$$-\omega_j^2 \frac{\rho_L}{EA} \varphi_j(x) = \frac{d^2 \varphi_j(x)}{dx^2} \quad (5.23)$$

Expresión que será utilizada más adelante.

5.2.3 Vibraciones forzadas

Considérese la ecuación (5.5) con $p_x \neq 0$ y en donde se supondrá que el producto EA es constante en toda la pieza. Introduciendo la expresión (5.20) en (5.5) se obtiene:

$$\rho_L \sum_j \varphi_j(x) \ddot{z}_j(t) - EA \sum_n \varphi_n''(x) z_n(t) = \rho_x(x, t) \quad (5.24)$$

Multiplicando por $\varphi_k(x)$ e integrando:

$$\rho_L \sum_n \ddot{z}_n(t) \int_0^L \varphi_k(x) \varphi_n(x) dx - EA \sum_j z_j(t) \int_0^L \varphi_k(x) \varphi_j''(x) dx = \int_0^L \varphi_k(x) p_x dx \quad (5.25)$$

Introduciendo ahora la expresión $\varphi_j''(x)$ dada por (5.23), y teniendo en cuenta la ortogonalidad de las funciones $\varphi_j(x)$, la ecuación anterior queda:

$$\ddot{z}_j(t) + \omega_j^2 z_j = \frac{1}{M_j} \int_0^L \varphi_j(x) p_x(x, t) dx \quad (5.26)$$

en donde el valor de M_j viene dado por

$$M_j = \rho_L \int_0^L [\varphi_j(x)]^2 dx \quad (5.27)$$

De la resolución de la ecuación (5.26) se obtendrán los valores de las amplitudes $z_j(t)$, con lo cual, sustituyendo en (5.20) se obtendrá la solución en desplazamientos.

Para mejor comprensión de lo hasta ahora expuesto, considérese una viga biapoyada de longitud $L=1$, producto $EA=1$ constante y densidad por unidad de longitud $\rho_L=1$ también constante (figura 5.5) y sometida a una carga externa de valor $p_x = p \sin \theta t$. Las frecuencias propias de la pieza valen:

$$\omega_j = j\pi \quad (j=1, 2, \dots)$$

y las formas modales φ_j :

$$\varphi_j(x) = \sin j\pi x$$

La masa generalizada M_j (expresión 5.27) se escribe:

$$M_j = \int_0^1 \sin^2 j\pi x dx = \frac{1}{2}$$

Se calcula la integral

$$\int_0^1 \varphi_j(x) p_x(x,t) dx = p \int_0^1 \sin j\pi x \sin \theta t dx = p \frac{1 - \cos j\pi}{j\pi} \sin \theta t$$

$$\begin{cases} = \frac{2p}{\pi j} \sin \theta t & (j = 1, 3, 5 \dots) \\ = 0 & (j = 2, 4, 6 \dots) \end{cases}$$

Por lo tanto, la expresión (5.26) resultará

$$\ddot{z}_j(t) + (j\pi)^2 z_j = \frac{4p}{\pi j} \sin \theta t \quad (j = 1, 3, 5 \dots)$$

y prescindiendo de las condiciones iniciales, es decir, buscando únicamente la solución estacionaria

$$z_j(t) = \frac{4p}{\pi j} \frac{1}{(j\pi)^2 - \theta^2} \sin \theta t \quad (j = 1, 3, 5 \dots)$$

Obsérvese que si $\theta = j\pi$, es decir si la frecuencia de excitación es igual a una frecuencia propia, el valor de $y_j(t)$ se hace infinito. En este caso se dice que hay resonancia.

Si para fijar ideas, se toma $\theta = 2\pi$, las sucesivas funciones $z_j(t)$ valdrán:

$$z_1(t) = \frac{4p}{\pi} \frac{1}{\pi^2 - 4\pi^2} \sin 2\pi t = -\frac{1}{3} \frac{4p}{\pi^3} \sin 2\pi t$$

$$z_3(t) = \frac{4p}{\pi \cdot 3} \frac{1}{9\pi^2 - 4\pi^2} \sin 2\pi t = \frac{1}{15} \frac{4p}{\pi^3} \sin 2\pi t$$

$$z_5(t) = \frac{4p}{\pi \cdot 5} \frac{1}{25\pi^2 - 4\pi^2} \sin 2\pi t = \frac{1}{105} \frac{4p}{\pi^3} \sin 2\pi t$$

$$z_7(t) = \frac{4p}{\pi \cdot 7} \frac{1}{49\pi^2 - 4\pi^2} \sin 2\pi t = \frac{1}{315} \frac{4p}{\pi^3} \sin 2\pi t$$

Como puede verse, según aumenta j las amplitudes de $z_j(t)$ son cada vez menores.

Los desplazamientos $u(x,t)$ valdrán:

$$u(x,t) = \sum_{j=1,3,5\dots} \varphi_j(x) z_j(t) = \sum_{j=1,3,5\dots} \sin j\pi x \frac{4p}{\pi j} \frac{\sin 2\pi t}{(j\pi)^2 - (2\pi)^2} =$$

$$= \frac{4p}{\pi^3} \left[\sum_{j=1,3,5\dots} \frac{1}{j(j^2 - 4)} \right] \sin 2\pi t$$

5.3 VIGA RECTA TRABAJANDO A FLEXIÓN

5.3.1 Formulación

Considérese (figura 5.7) una viga recta sometida a flexión. Sean $p_y(x,t)$ las cargas externas que actúan por unidad de longitud. Se supone que no actúan esfuerzos axiales

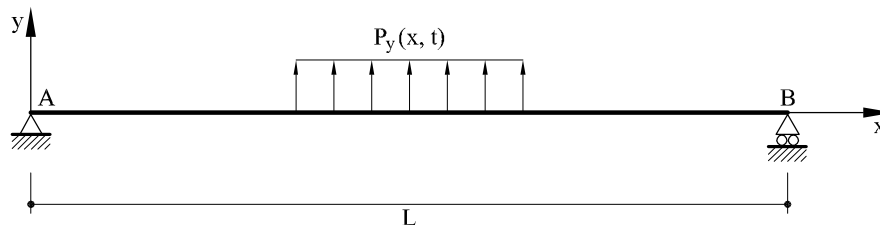


Fig. 5.7 Viga recta trabajando a flexión

Si en un punto cualquiera de coordenada x se separa una rebanada diferencial, puede establecerse el equilibrio (figura 5.8):

$$\frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} = p_y(x,t) - f_I(x,t) \quad (5.28)$$

en donde f_I son las fuerzas de inercia. Nótese que en (5.28) no se han tenido en cuenta los efectos de inercia a rotación de la viga.

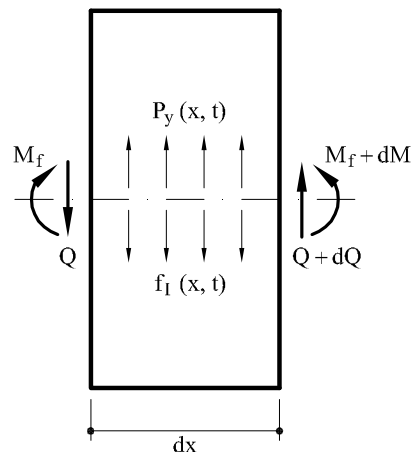


Fig. 5.8 Equilibrio de la rebanada diferencial

Si se denomina $v(x,t)$ al movimiento de la viga en dirección y , y despreciando la deformación por cortante se tiene que

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = M_f$$

$$f_i = \rho_L \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Con lo cual sustituyendo en (5.28) se obtiene la ecuación dinámica:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho_L \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p_y(x,t) \quad (5.29)$$

5.3.2 Vibraciones libres

Para el caso de piezas prismáticas de rigidez EI constante en toda la longitud, y ante la ausencia de cargas externas, la expresión (5.29) se escribe

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\rho_L}{EI} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (5.30)$$

Para la resolución de la ecuación anterior se procede, igual que antes a separar variables:

$$v(x,t) = \varphi(x) z(t) \quad (5.31)$$

y sustituyendo en (5.30)

$$-\frac{\rho_L}{EI} \frac{\ddot{z}(t)}{z(t)} = \frac{\varphi^{IV}(x)}{\varphi(x)} = a^4 \quad (5.32)$$

siendo a una constante real. Desarrollando la expresión anterior

$$\ddot{z}(t) + \omega^2 z = 0 \quad (5.32.a)$$

$$\varphi^{IV} - a^4 \varphi = 0 \quad (5.32.b)$$

en donde ω es la frecuencia propia de vibración:

$$\omega^2 = \frac{a^4 EI}{\rho_L} \quad (5.33)$$

La solución de (5.32.a) es del tipo

$$z(t) = \bar{A} e^{i\omega t} \quad (5.34)$$

siendo \bar{A} una constante de integración (en general imaginaria). Y también:

$$z(t) = \bar{A}_1 \sin \omega t + \bar{A}_2 \cos \omega t \quad (5.35)$$

Por lo que respecta a (5.32.b) la solución general se escribe:

$$\varphi(x) = B_1 \sin ax + B_2 \cos ax + B_3 \operatorname{Sh} ax + B_4 \operatorname{Ch} ax \quad (5.36)$$

siendo B_1 , B_2 , B_3 y B_4 constantes de integración. Su valor se obtendrá a partir de las condiciones de vínculo de la viga. Asimismo, al igual que anteriormente, las funciones $\varphi(x)$ son las formas modales de vibración.

En lo sucesivo, va a considerarse una viga de longitud L y valores de ρ_L y EI constantes a lo largo de la longitud de la pieza.

Viga biapoyada (figura 5.9)

Las condiciones de contorno a aplicar a las funciones $\varphi(x)$ son:

$$\begin{aligned} \varphi(x=0) &= 0 \\ M_f(x=0) &= EI \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0 \\ \varphi(x=L) &= 0 \\ M_f(x=L) &= EI \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} B_2 &= B_4 = 0 \\ -B_1 \sin aL + B_3 \operatorname{Sh} aL &= 0 \\ B_1 \sin aL + B_3 \operatorname{Sh} aL &= 0 \end{aligned}$$

y dado que siempre $\operatorname{Sh} aL \neq 0$, resulta que $B_3 = 0$ y además:

$$\sin aL = 0$$

o sea:

$$aL = j\pi$$

Con lo cual, teniendo en cuenta la expresión (5.33) se obtiene el valor de las frecuencias propias de vibración de la pieza

$$\omega_j = j^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho_L L^4}} \quad (5.37)$$

Por lo que respecta a las formas modales $\varphi_j(x)$, sustituyendo en (5.36):

$$\varphi_j(x) = \sin j \pi \frac{x}{L} \quad (5.38)$$

habiéndose tomado de forma arbitraria $B_1 = 1$

En la figura 5.9 pueden verse representados los valores tres primeros modos de vibración

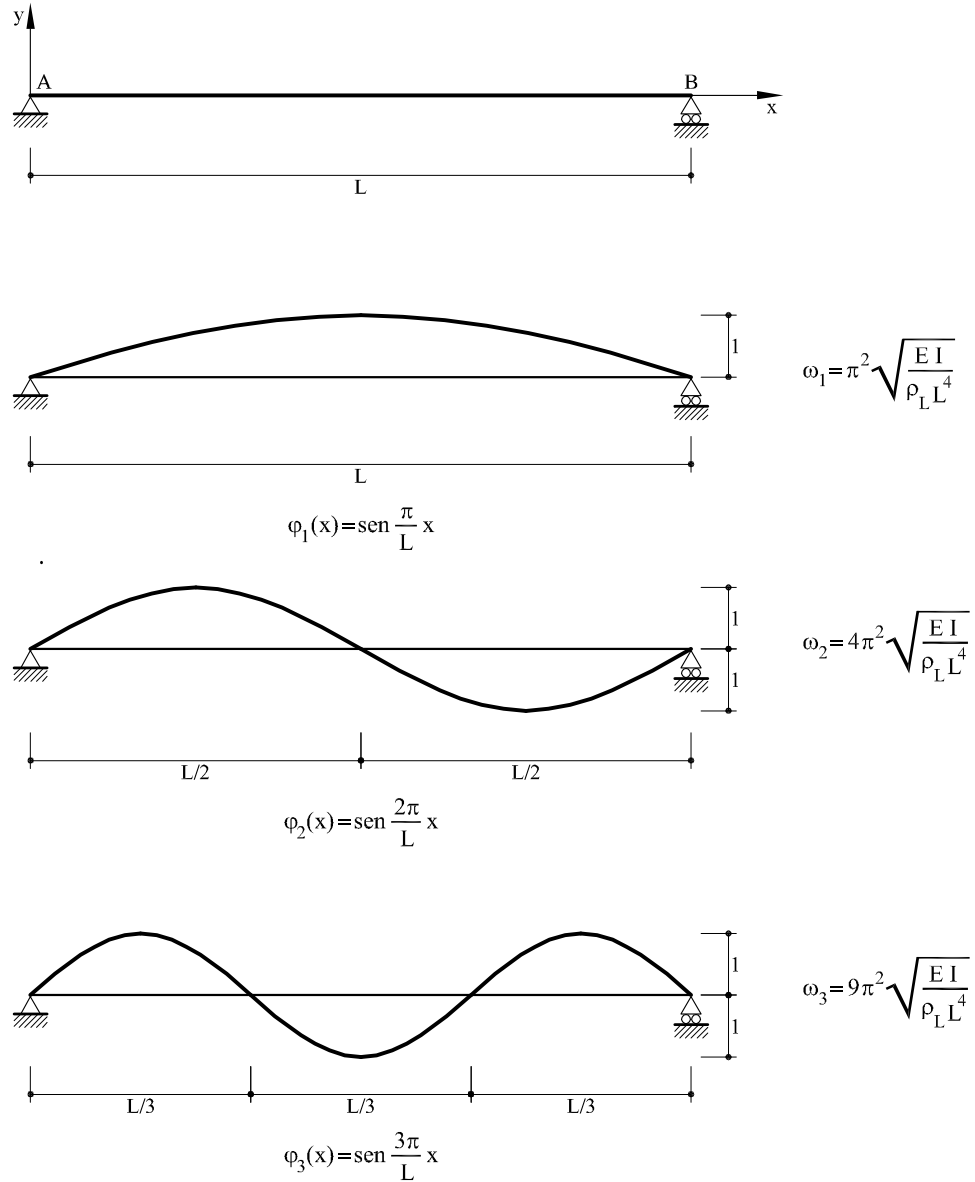


Fig. 5.9 Modos correspondientes a la viga biapoyada.

Ménsula (figura 5.10)

Las condiciones de contorno a aplicar a la expresión (5.36) para el caso de una ménsula serán:

$$v(x=0) = 0$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

$$M_f(x=L) = EI \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0$$

$$Q(x=L) = -EI \left. \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right|_{x=L} = 0$$

Es decir:

$$B_2 + B_4 = 0$$

$$B_1 + B_3 = 0$$

$$-B_1 \sin aL - B_2 \cos aL + B_3 \operatorname{Sh} aL + B_4 \operatorname{Ch} aL = 0$$

$$-B_1 \cos aL + B_2 \sin aL + B_3 \operatorname{Ch} aL + B_4 \operatorname{Sh} aL = 0$$

El anterior sistema homogéneo admite otras soluciones aparte de la trivial si:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\sin aL & -\cos aL & \operatorname{Sh} aL & \operatorname{Ch} aL \\ -\cos aL & \sin aL & \operatorname{Ch} aL & \operatorname{Sh} aL \end{vmatrix} = 0$$

y desarrollando:

$$1 + \cos aL \operatorname{Ch} aL = 0$$

La ecuación anterior es una ecuación trascendente cuyas tres primeras soluciones son:

$$a_1 L = 1,875$$

$$a_2 L = 4,694$$

$$a_3 L = 7,855$$

con lo cual a partir de (5.33) pueden obtenerse las tres primeras frecuencias propias

$$\omega_1 = (1,875)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho_L L^4}} \quad (5.39.a)$$

$$\omega_2 = (4,694)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho_L L^4}} \quad (5.39.b)$$

$$\omega_3 = (7,855)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho_L L^4}} \quad (5.39.c)$$

En cuanto a las autofunciones (5.36), tomando de forma arbitraria $B_1 = 1$ se obtiene el valor de las otras constantes B_2 , B_3 y B_4 :

$$B_2 = \frac{\cos aL + \operatorname{Ch} aL}{\sin aL - \operatorname{Sh} aL}$$

$$B_3 = -1$$

$$B_4 = -\frac{\cos aL + ChaL}{\sin aL - ShaL}$$

con lo cual, sustituyendo en (5.36)

$$\varphi_j(x) = \sin a_j x + \frac{\cos a_j L + Cha_j L}{\sin a_j L - Sha_j L} \cos a_j x - Sha_j x - \frac{\cos a_j L + Cha_j L}{\sin a_j L - Sha_j L} Cha_j x \quad (5.40)$$

con los valores de a_j obtenidos anteriormente.

En la figura 5.10 pueden verse representados los tres primeros modos de vibración.

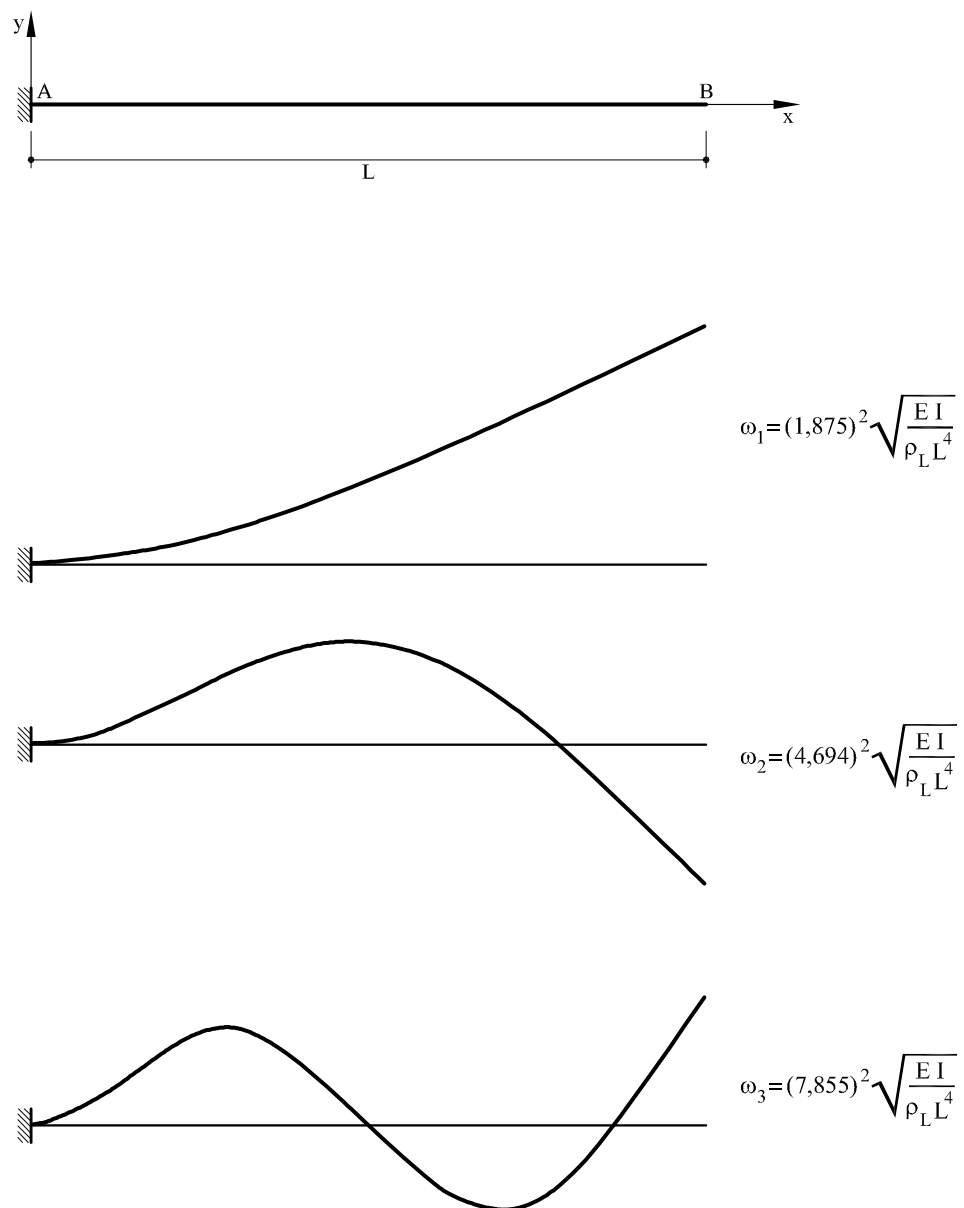


Fig. 5.10 Modos de vibración en una ménsula.

Viga empotrada y apoyada (figura 5.11)

En este caso, las nuevas condiciones de contorno a aplicar a las formas modales $\varphi(x)$ serán:

$$\begin{aligned} v(x=0) &= 0 \\ \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0 \\ v(x=L) &= 0 \\ M_f(x=L) &= EI \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} B_2 + B_4 &= 0 \\ B_1 + B_3 &= 0 \\ B_1 \sin aL + B_2 \cos aL + B_3 \operatorname{Sh} aL + B_4 \operatorname{Ch} aL &= 0 \\ -B_1 \sin aL - B_2 \cos aL + B_3 \operatorname{Sh} aL + B_4 \operatorname{Ch} aL &= 0 \end{aligned}$$

El anterior sistema homogéneo tiene otras soluciones aparte de la trivial si se anula el determinante, es decir si:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \sin aL & \cos aL & \operatorname{Sh} aL & \operatorname{Ch} aL \\ -\sin aL & -\cos aL & \operatorname{Sh} aL & \operatorname{Ch} aL \end{vmatrix} = 0$$

y desarrollando:

$$\tan aL = \operatorname{Th} aL$$

La anterior ecuación trascendente tiene como primeras soluciones

$$\begin{aligned} a_1 L &= 3,927 \\ a_2 L &= 7,069 \\ a_3 L &= 10,210 \end{aligned}$$

Con lo cual, las tres primeras frecuencias propias valen:

$$\omega_1 = (3,927)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho_L L^4}} \quad (5.41.a)$$

$$\omega_2 = (7,069)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho_L L^4}} \quad (5.41.b)$$

$$\omega_3 = (10,210)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho_L L^4}} \quad (5.41.c)$$

Por lo que respecta a las autofunciones (5.36) y tomando de forma arbitraria $B_1 = 1$, el valor del resto de constantes es:

$$B_2 = -\frac{\sin aL - Sh aL}{\cos aL - Ch aL}$$

$$B_3 = -1$$

$$B_4 = \frac{\sin aL - Sh aL}{\cos aL - Ch aL}$$

Y sustituyendo en (5.36)

$$\varphi_j(x) = \sin a_j x - \frac{\sin a_j L - Sh a_j L}{\cos a_j L - Ch a_j L} \cos a_j x - Sh a_j x + \frac{\sin a_j L - Sh a_j L}{\cos a_j L - Ch a_j L} Ch a_j x \quad (5.42)$$

En la figura 5.11 pueden verse representados los modos propios de vibración

Viga biempotrada (figura 5.12)

Finalmente, para la viga biempotrada se procederá como hasta ahora. Las condiciones de contorno a imponer a las funciones $\varphi(x)$ son:

$$\varphi(x=0) = \varphi(x=L) = 0$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

Con lo cual se llega al sistema de ecuaciones homogéneo:

$$B_1 + B_3 = 0$$

$$B_2 + B_4 = 0$$

$$B_1 \sin aL + B_2 \cos aL + B_3 Sh aL + B_4 Ch aL = 0$$

$$B_1 \cos aL - B_2 \sin aL + B_3 Ch aL + B_4 Sh aL = 0$$

Imponiendo nuevamente la condición de nulidad del determinante se llega a la ecuación trascendente:

$$1 - \cos aL Ch aL = 0$$

cuyas tres primeras soluciones son

$$a_1 L = 4,73$$

$$a_2 L = 7,853$$

$$a_3 L = 10,995$$

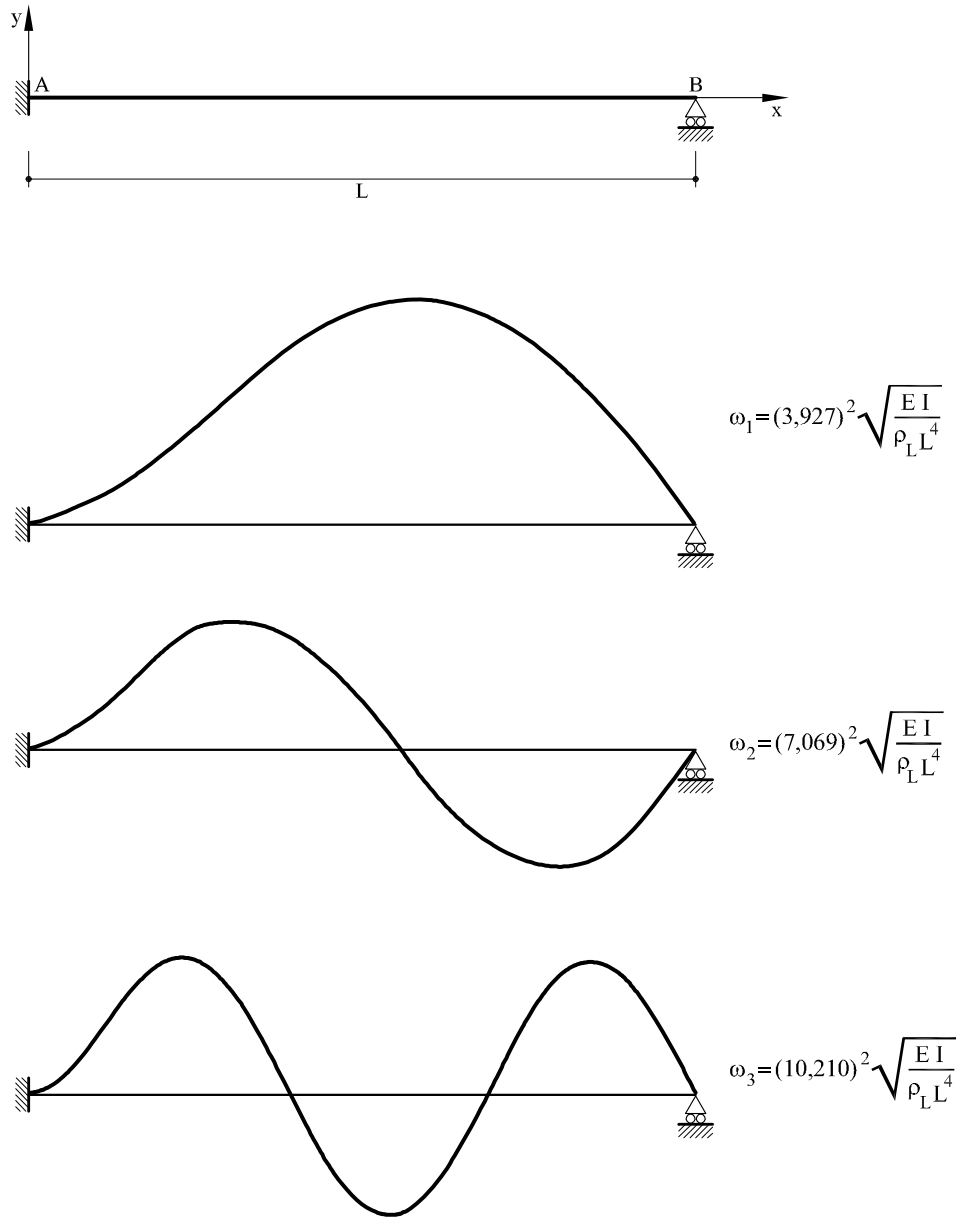


Fig. 5.11 Modos de vibración de una viga empotrada y apoyada.

Con lo cual, las tres primeras frecuencias propias valdrán

$$\omega_1 = (4,73)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho_L L^4}} \quad (5.43.a)$$

$$\omega_2 = (7,853)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho_L L^4}} \quad (5.43.b)$$

$$\omega_3 = (10,995)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho_L L^4}} \quad (5.43.c)$$

Tomando nuevamente el valor $B_1 = 1$, el resto de constantes toman el valor

$$B_2 = -\frac{\sin aL - Sh aL}{\cos aL - Ch aL}$$

$$B_3 = -1$$

$$B_4 = \frac{\sin aL - Sh aL}{\cos aL - Ch aL}$$

Y sustituyendo en (5.36) se obtiene la expresión de las formas modales

$$\varphi_j(x) = \sin a_j x - \frac{\sin a_j L - Sh a_j L}{\cos a_j L - Ch a_j L} \cos a_j x - Sh a_j x + \frac{\sin a_j L - Sh a_j L}{\cos a_j L - Ch a_j L} Ch a_j x$$

En la figura 5.12 se representan los tres primeros modos de vibración

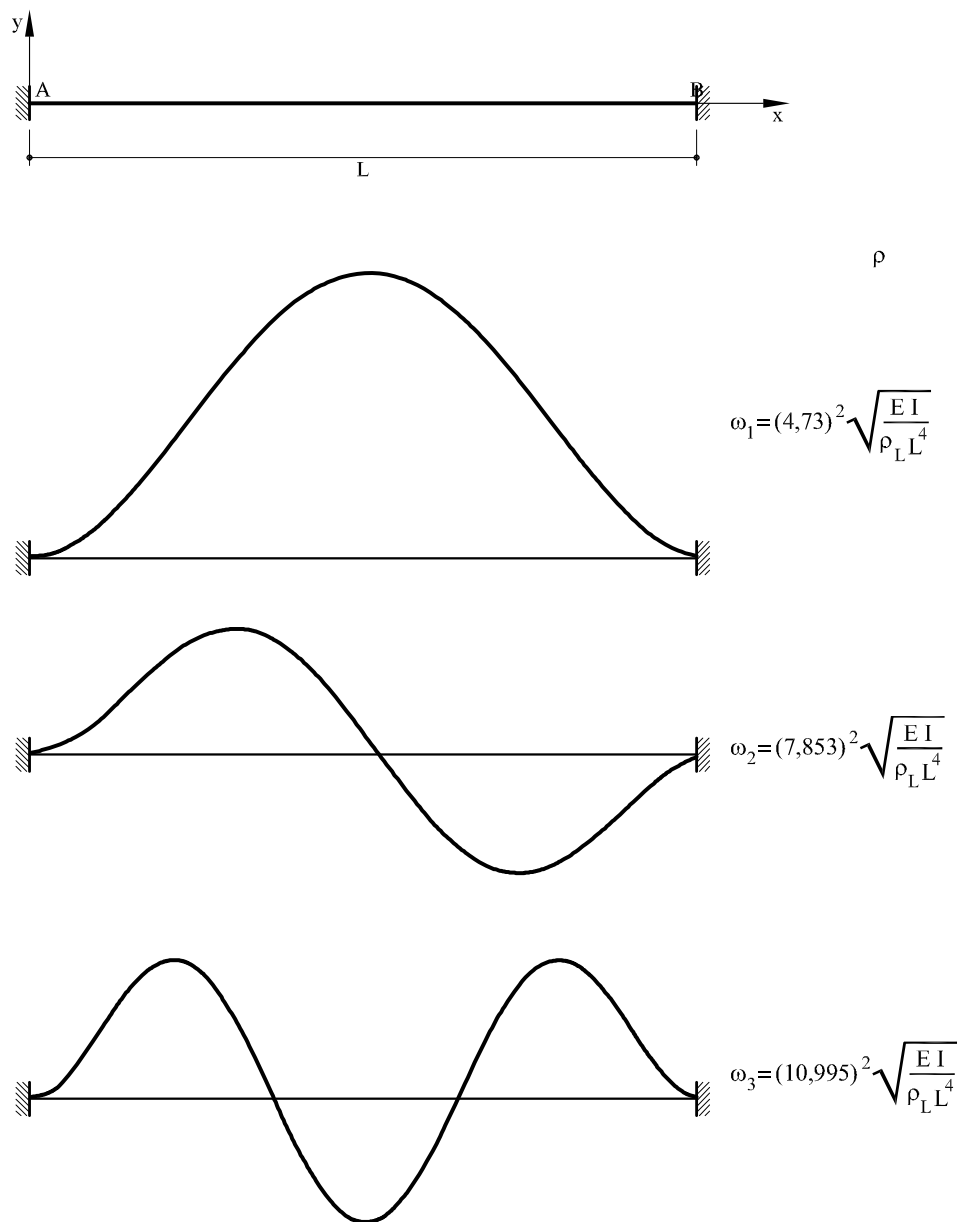


Fig. 5.12 Modos propios de vibración en una viga biempotrada.