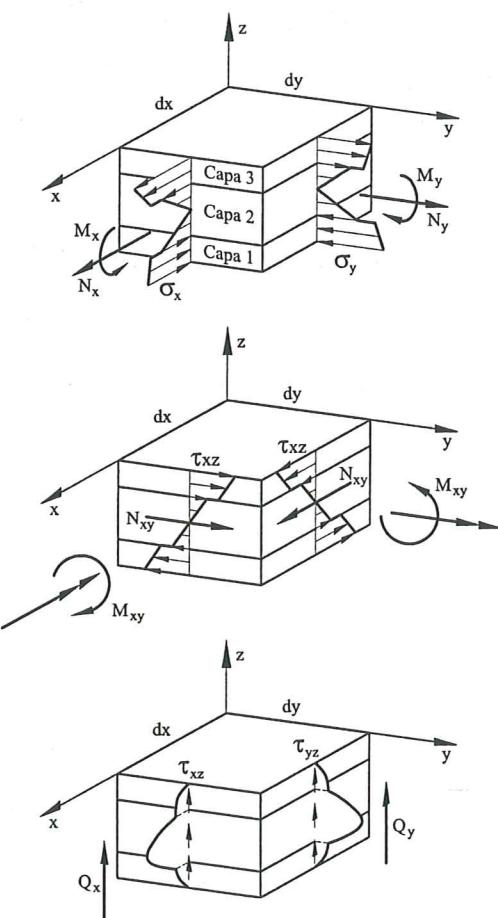


Cálculo de estructuras con materiales compuestos por el método de elementos finitos

E. Oñate



Cálculo de estructuras con materiales compuestos por el método de elementos finitos

E. Oñate

Publicación CIMNE Nº-212, Abril 2002

**Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España**

CÁLCULO DE ESTRUCTURAS CON MATERIALES COMPUESTOS LAMINADOS POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Eugenio Oñate

*Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Cataluña
08034 Barcelona, Spain
e-mail: onate@cimne.upc.es*

INTRODUCCIÓN

La utilización de materiales compuestos laminados en estructuras es creciente en todos los ámbitos de la ingeniería. El cálculo de esas estructuras requiere tener en cuenta las características de dichos materiales, tanto en cuanto a sus propiedades mecánicas, generalmente ortótropas, como a la peculiaridad de su distribución en capas laminares. Un caso particular de interés práctico de ese tipo de estructuras son las estructuras mixtas de hormigón y acero, e incluso las estructuras de hormigón armado en las que el hormigón y las armaduras se asimilan a capas de materiales con propiedades diferentes.

En este capítulo presentaremos una panorámica del cálculo por el método de elementos finitos de estructuras formadas por materiales compuestos laminados. Iniciaremos el capítulo con una introducción al cálculo de vigas planas formadas por un apilamiento de capas utilizando elementos de viga de Timoshenko de dos nodos. Tras ello estudiaremos las placas multilaminadas mediante elementos de Reissner-Mindlin, para terminar con el análisis de láminas de forma arbitraria y de revolución utilizando elementos finitos multilaminados planos y troncocónicos, respectivamente, basados también en la teoría de Reissner-Mindlin.

ANÁLISIS DE VIGAS PLANAS LAMINADAS

Consideraremos una viga de eje x recto en la que el plano xz es un plano principal de inercia. La viga tiene una longitud L y la sección transversal formada por un apilamiento de capas de material compuesto con propiedades que dependen solamente de la coordenada z (Figura 1). Admitiremos que se cumplen las hipótesis de la teoría de vigas planas de Timoshenko, es decir: 1) el desplazamiento lateral v es nulo; 2) todos los puntos de una sección tienen el mismo desplazamiento vertical, y 3) las secciones normales permanecen planas después de la deformación, pero no necesariamente ortogonales al eje deformado de la viga. Con estas hipótesis el campo de desplazamientos de una sección se expresa por [1-3]

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_o(x) - z\theta(x) \\ w(x, z) &= w_o(x) \end{aligned} \tag{1}$$

donde $(\cdot)_o$ indica los desplazamientos del eje de la viga y θ es el giro de la sección (definido positivo en sentido antihorario) (Figura 1).

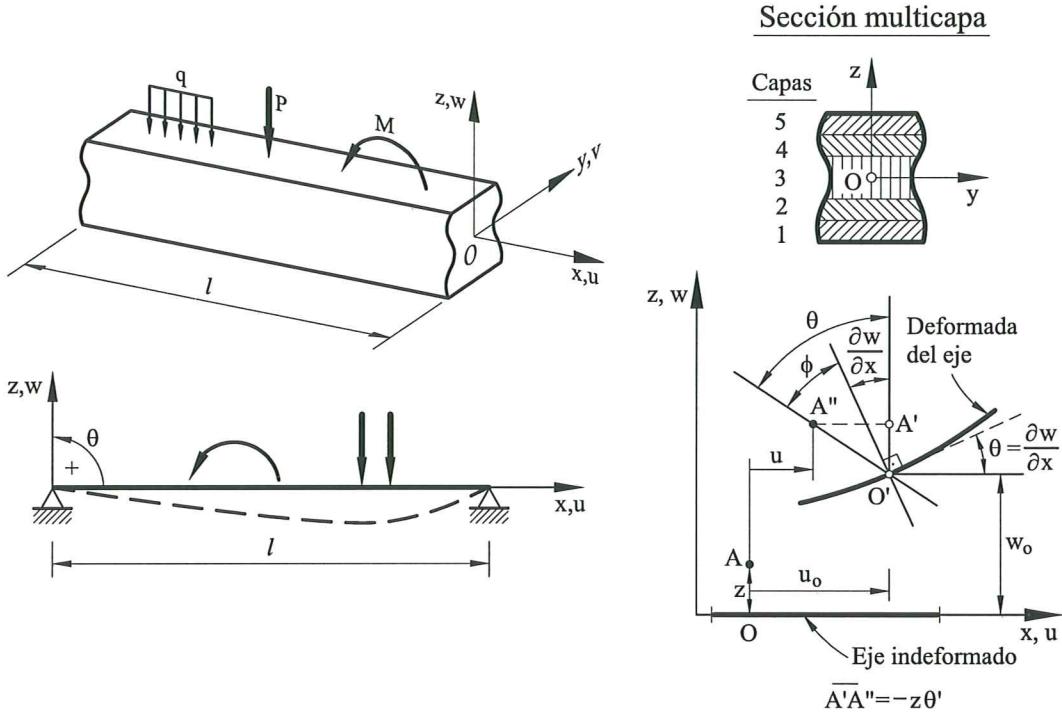


Figura 1. Viga plana. Definición del campo de desplazamientos.

El campo de deformaciones no nulas se deduce de la ec.(1) como

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2a)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_o}{\partial x} - \theta \quad (2b)$$

La cinemática anterior puede simplificarse todavía más admitiendo que las secciones transversales permanecen ortogonales al eje de la viga después de la deformación (teoría de Euler-Bernoulli) [1-3]. Esto conduce a que $\theta = \frac{\partial w_o}{\partial x}$ y por tanto la deformación por cortante γ_{xz} es nula (ec.(2b)). Esta teoría es menos aproximada que la de Timoshenko para análisis de vigas multilaminadas, debido a la gran influencia de la deformación por cortante en estas estructuras.

Hay que destacar que la hipótesis de variación lineal del campo de desplazamientos sobre toda la sección de la viga, es la más sencilla para el análisis de vigas con materiales compuestos multicapa. Puede utilizarse una aproximación de un orden más alto admitiendo que los desplazamientos varían linealmente en el interior de las capas, aunque con diferente pendiente en cada capa. Ello conduce a una formulación con tantas variables de giro como capas [4-9]. Aunque dichas variables pueden eliminarse a nivel del ensamblaje para cada sección, esta formulación es más complicada que la de vigas de Timoshenko aquí estudiada y que

conduce a resultados globalmente aceptables para análisis de vigas de materiales compuestos laminados.

Las tensiones normales σ_x y tangenciales τ_{xz} en cada punto de la sección se relacionan con las deformaciones correspondientes por

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (3a)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} - \theta \right) \quad (3b)$$

siendo $E = E(x, z)$ y $G = G(x, z)$.

En la Figura 2 se representa la variación de las deformaciones ε_x y γ_{xz} y las tensiones σ_x y τ_{xz} sobre el canto de una viga de material homogéneo y otra de material compuesto laminado.

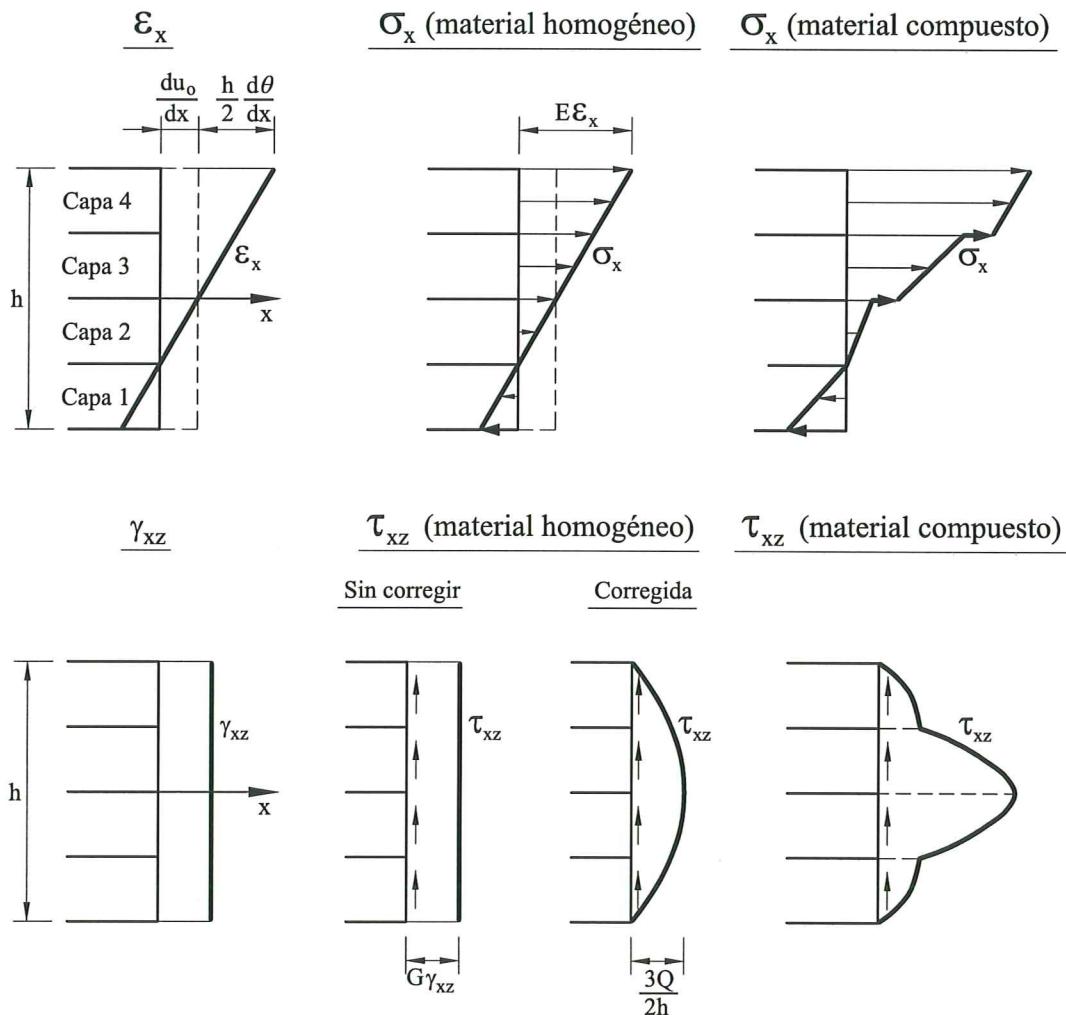


Figura 2. Distribución de las deformaciones ε_x y γ_{xz} y las tensiones σ_x y τ_{xz} sobre el canto de una viga de material homogéneo y compuesto laminado.

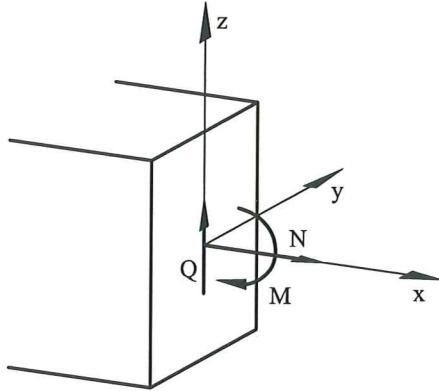


Figura 3. Convenio de signos para los esfuerzos N , M y Q .

El esfuerzo axial N , el momento flector M y el esfuerzo cortante Q en cada sección se definen por (Figura 3)

$$\hat{\sigma} = \begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \iint_A \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ z\sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dA \quad (4)$$

donde $\hat{\sigma}$ es el vector de esfuerzos. Sustituyendo (3) en (4) se deduce, tras operar

$$\hat{\sigma} = \hat{\mathbf{D}}\hat{\epsilon} \quad (5)$$

con

$$\hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \hat{D}_m & \hat{D}_{mf} & 0 \\ \hat{D}_{mf} & \hat{D}_f & 0 \\ 0 & 0 & \hat{D}_c \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_o}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial w_o}{\partial x} - \theta \end{Bmatrix} \quad (6)$$

En (6) $\hat{\epsilon}$ es el vector de deformaciones generalizadas que contiene el alargamiento $\frac{\partial u_o}{\partial x}$, la curvatura $-\frac{\partial \theta}{\partial x}$ y la cizalladura $\frac{\partial w_o}{\partial x} - \theta$. Las componentes de la matriz constitutiva $\hat{\mathbf{D}}$ son

$$\begin{aligned} \hat{D}_m &= \iint_A E(x, z) dA ; & \hat{D}_{mf} &= \iint_A E(x, z) z dA \\ \hat{D}_f &= \iint_A E(x, z) z^2 dA ; & \hat{D}_c &= k D_c \quad \text{con } D_c = \iint_A G(x, z) dz \end{aligned} \quad (7)$$

En la ec.(7), \hat{D}_m es la rigidez axial, \hat{D}_f la rigidez de flexión, \hat{D}_{mf} es la rigidez debida al acoplamiento membrana-flexión, \hat{D}_c es la rigidez de cortante y k es el denominado coeficiente de corrección del esfuerzo cortante. El valor de k suele calcularse de manera que la energía de deformación por cortante interna asociada a la distribución de τ_{xz} exacta, y la energía asociada al modelo de Timoshenko

coincidan. Así, si las energías internas de cortante “exacta” (U_1) y del modelo de Timoshenko (U_2) son (para $\tau_{xy} = 0$) [1,2]

$$U_1 = \frac{1}{2} \iint_A \frac{\tau_{xz}^2}{G} dA \quad (8a)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{kD_c} \quad (8b)$$

se tiene que, si $U_1 = U_2$

$$k = \frac{Q^2}{2D_c U_1} \quad (9)$$

En vigas rectangulares de material homogéneo esta equivalencia conduce a $k = 5/6$ [1,2].

El acoplamiento membrana-flexión se manifiesta en la ec.(5) por el hecho de que un esfuerzo axil provoca curvaturas y un momento flector provoca alargamientos.

En el caso de una viga de sección de ancho b formada por un apilamiento de n_c capas isótropas de módulos E_j, G_j y espesores h_j se tiene (Figura 4)

$$\begin{aligned} \hat{D}_m &= \sum_{j=1}^{n_c} (z_{j+1} - z_j) b E_j = b \sum_{j=1}^{n_c} h_j E_j \\ \hat{D}_{m_f} &= \sum_{j=1}^{n_c} \frac{1}{2} (z_{j+1}^2 - z_j^2) b E_j = b \sum_{j=1}^{n_c} h_j \bar{z}_j E_j \\ \hat{D}_f &= \frac{b}{3} \sum_{j=1}^{n_c} (z_{j+1}^3 - z_j^3) E_j \\ \hat{D}_c &= \sum_{j=1}^{n_c} (z_{j+1} - z_j) b G_j = b \sum_{j=1}^{n_c} h_j G_j \end{aligned} \quad (10)$$

donde \bar{z}_j es la coordenada vertical del punto medio de la capa j (Figura 4).

Adviértase que si el material es *homogéneo*, o bien sus propiedades (y la geometría) son *simétricas* con respecto al eje x , se cumple que $\hat{D}_{m_f} = 0$ (no hay acoplamiento membrana-flexión).

Para material homogéneo

$$\hat{D}_m = EA \quad , \quad \hat{D}_{m_f} = E\bar{S} \quad , \quad \hat{D}_f = EI \quad , \quad \hat{D}_c = kGA \quad (11)$$

donde A es el área de la sección transversal, I el momento de inercia con respecto al eje y y $\bar{S} = \iint_A z dA$. Si x es el *eje neutro*, $\bar{S} = 0$ (es decir, también $\hat{D}_{m_f} = 0$).

En una sección compuesta cualquiera puede encontrarse el eje neutro calculando la distancia d (entre el eje x y el eje neutro) a partir de

$$\iint_A E(z - d) dA = 0 \quad (12)$$

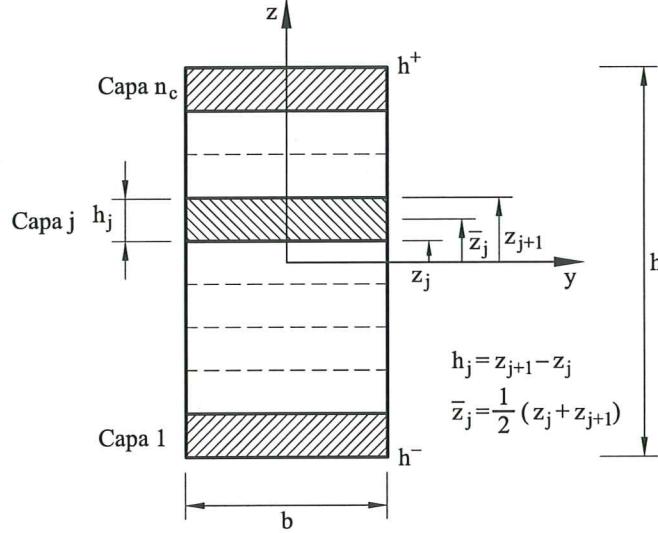


Figura 4. Coordenadas para integración de las propiedades del material a través de las capas.

de las ecs.(12) y (7) se deduce que $d = \frac{\hat{D}_{m_f}}{\hat{D}_m}$.

De la teoría anterior se desprende que en una viga de material compuesto laminado, aunque las deformaciones ε_x varían linealmente con el canto, la distribución de la tensión σ_x a lo largo del canto es *discontinua*, debido a las diferentes propiedades del material de las capas (Figura 2). Invirtiendo la ec.(5) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_o}{\partial x} &= \frac{1}{\hat{D}} [\hat{D}_f N - \hat{D}_{m_f} M] \\ -\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{\hat{D}} [-\hat{D}_{m_f} N + \hat{D}_m M]\end{aligned}\tag{13}$$

con $\hat{D} = \hat{D}_m \hat{D}_f - \hat{D}_{m_f}^2$.

Sustituyendo las ecs.(13) en (3a) se obtiene la tensión σ_x en cada capa en función de N y M por

$$\sigma_x = \frac{E}{\hat{D}} [\hat{D}_f N - \hat{D}_{m_f} M + z(-\hat{D}_{m_f} N + \hat{D}_m M)]\tag{14}$$

Por otra parte, como se aprecia de la ec.(3b) la tensión tangencial τ_{xz} que resulta de la aplicación directa de la teoría de Timoshenko es *constante* a través del canto. En la práctica, una vez obtenido el campo de movimientos, se calcula “a posteriori” una distribución de τ_{xz} *continua* sobre el canto que satisfaga las ecuaciones de equilibrio de la elasticidad [2]. Aceptando que $\tau_{xy} = 0$ puede obtenerse una sencilla expresión de τ_{xz} por [2]

$$\tau_{xz} = \frac{-Q}{\hat{D}} F(z)\tag{15a}$$

$$F(z) = \hat{D}_m S(z) - \hat{D}_{m_f} \int_{h^-}^z E(z) dz \quad , \quad S(z) = \int_{h^-}^z z E(z) dz \quad (15b)$$

siendo h^- la coordenada z de la fibra inferior de la sección ($|h^-| + h^+ = h$) y $S(z)$ el momento estático del módulo de Young con respecto a la fibra de coordenada z . Adviértase que si x es el eje neutro ($\hat{D}_{m_f} = 0$), $\hat{D} = \hat{D}_m \hat{D}_f$ y

$$\tau_{xz} = \frac{-Q}{\hat{D}_f} S(z) \quad (16)$$

En una viga isótropa de canto h , se obtiene de (16) la clásica distribución parabólica de la teoría de la elasticidad (para $\nu = 0$)

$$\tau_{xz} = \frac{3Q}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad (17)$$

En la Figura 2 se muestran las distribuciones de τ_{xz} para una sección isótropa y otra de material compuesto laminado.

De las expresiones de τ_{xz} (15a) y U_1 (8a) puede deducirse el valor del coeficiente k de la ec.(9) para vigas rectangulares de material compuesto laminado por [2]

$$k = \frac{1}{D_c} \frac{\hat{D}^2}{\iint_A \frac{F^2(z)}{G(z)} dA} \quad (18)$$

Si x es el eje neutro

$$k = \frac{1}{D_c} \frac{\hat{D}_f^2}{\iint_A \frac{S^2(z)}{G(z)} dA} \quad (19)$$

Puede comprobarse que si el material es isótropo se obtiene el clásico valor $k = 5/6$ [2].

En la Figura 5 se muestran los valores de k para diferentes secciones compuestas. Más información sobre este tema puede encontrarse en [2,10–15].

Principio de Trabajos Virtuales

El Principio de Trabajos Virtuales (PTV) se expresa por [1–3]

$$\int_l \delta \hat{\varepsilon} \hat{\sigma} dx = \int_l \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dA \quad (20)$$

donde $\delta \mathbf{u} = [\delta u_o, \delta w_o, \delta \theta]^T$ es el vector de desplazamientos virtuales, $\delta \hat{\varepsilon}$ es el vector de deformaciones generalizadas virtuales y $\mathbf{q} = [n, q, m]^T$ es el vector de fuerzas exteriores debidas a cargas repartidas horizontales n y verticales q y a un momento repartido m .

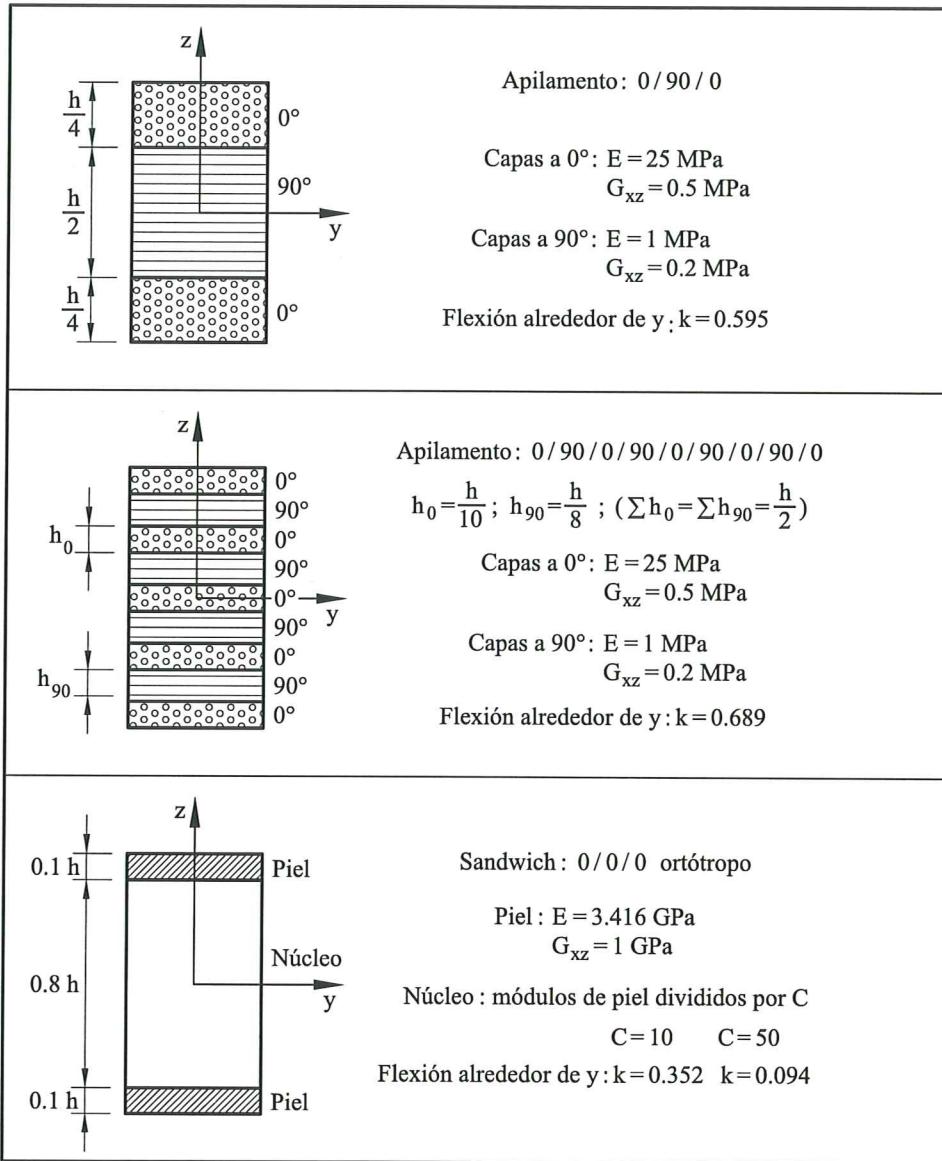


Figura 5. Valores del coeficiente de corrección del esfuerzo cortante k en diferentes secciones de vigas con material compuesto laminado.

Puesto que todas las derivadas de los movimientos en el PTV son de primer orden, puede utilizarse una aproximación de elementos finitos lagrangiana en la que únicamente se exige continuidad de los desplazamientos u_o y w_o y del giro θ [1-3].

Elemento de viga de Timoshenko de dos nodos

Discreticemos la viga en elementos de dos nodos de longitud $l^{(e)}$ con una aproximación lineal de u_o , w_o y θ como

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_o \\ w_o \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) \mathbf{a}_i^{(e)} \quad \text{con} \quad \mathbf{a}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_o \\ w_o \\ \theta \end{Bmatrix}_i \quad (21)$$

donde u_{o_i}, w_{o_i} y θ_i son los valores nodales del desplazamiento axil, la flecha y el giro, respectivamente y $N_i(\xi)$ son funciones de forma lineales dadas por

$$N_i(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_i) \quad i = 1, 2 \quad (22)$$

donde la coordenada normalizada ξ se define como $\xi = \frac{2(x-x_c)}{l^{(e)}}$, siendo x_c la coordenada del centro del elemento (Figura 6).

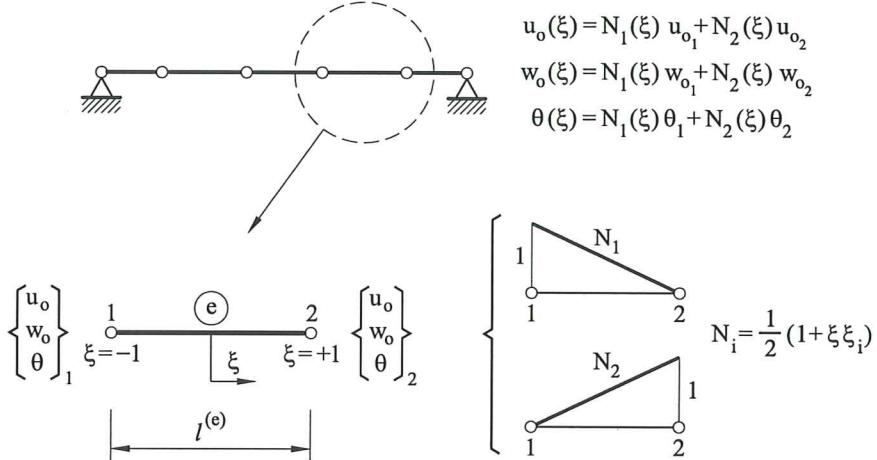


Figura 6. Elemento de viga de Timoshenko de dos nodos.

Sustituyendo la aproximación (21) en la expresión de $\hat{\epsilon}$ de (6) se obtiene

$$\hat{\epsilon} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{B}_i \mathbf{a}_i^{(e)} \quad \text{con} \quad \mathbf{B}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_{m_i} \\ \dots \\ \mathbf{B}_{f_i} \\ \dots \\ \mathbf{B}_{c_i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i \end{Bmatrix} \quad (23)$$

siendo \mathbf{B}_{m_i} , \mathbf{B}_{f_i} y \mathbf{B}_{c_i} las matrices de tamaño 1×3 de deformaciones generalizadas de membrana, flexión y cortante, respectivamente.

Los vectores de movimientos y deformaciones generalizadas virtuales se deducen de las ecs.(21) y (23) por

$$\delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^2 N_i \delta \mathbf{a}_i^{(e)} \quad \text{y} \quad \delta \hat{\epsilon} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{B}_i \mathbf{a}_i^{(e)} \quad (24)$$

donde $\delta \mathbf{a}_i^{(e)}$ son los movimientos virtuales nodales.

Sustituyendo las ec.(24) en el PTV y haciendo uso de la ecuación constitutiva (ec.(5)) se obtiene, tras simplificar los movimientos virtuales, la ecuación matricial de equilibrio como

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (25)$$

donde \mathbf{a} es el vector de movimientos nodales, \mathbf{K} es la matriz de rigidez de la viga y \mathbf{f} es el vector de fuerzas nodales equivalentes de la viga. La matriz \mathbf{K} y el vector \mathbf{f} se forman ensamblando las contribuciones de cada elemento dadas por

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{l(e)} \mathbf{B}_i^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_j dx \quad i, j = 1, 2 \quad (26)$$

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = \int_{l(e)} N_i^{(e)} \mathbf{q} dx \quad i = 1, 2 \quad (27)$$

Haciendo uso de las expresiones de $\hat{\mathbf{D}}$ y \mathbf{B}_i de las ecs.(6) y (23), la matriz de rigidez elemental puede calcularse por

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \mathbf{K}_{m_{ij}}^{(e)} + \mathbf{K}_{f_{ij}}^{(e)} + \mathbf{K}_{c_{ij}}^{(e)} + \mathbf{K}_{m_{f_{ij}}}^{(e)} + [\mathbf{K}_{m_{f_{ij}}}^{(e)}]^T \quad (28)$$

donde

$$\mathbf{K}_{a_{ij}}^{(e)} = \int_{l(e)} \mathbf{B}_{a_i}^T \hat{D}_a \mathbf{B}_{a_j} dx \quad a = m, f, c, m_f \quad (29)$$

En las expresiones anteriores el subíndice a indica las contribuciones de membrana, flexión, cortante y acoplamiento membrana-flexión a la matriz de rigidez del elemento de viga.

El valor relativo de los términos de rigidez de cortante con respecto a los de flexión afecta a la solución del problema de vigas. Dicho valor puede cuantificarse por el coeficiente β dado por [2]

$$\beta = \frac{12\hat{D}_f}{l^2\hat{D}_c} \quad (30)$$

En la Tabla 1 se muestran los valores de β para diferentes secciones de material isótropo y compuesto.

Un valor de β pequeño indica que la influencia de la deformación por cortante es despreciable. En estos casos puede utilizarse la más clásica teoría de vigas de Euler-Bernouilli para vigas esbeltas, en la que se desprecia el efecto de la deformación por cortante desde un principio [1-3].

Es importante advertir que el valor de β depende de las características geométricas y mecánicas de la sección. Así, para una viga rectangular de longitud l , canto h y material homogéneo se obtiene

$$\beta = \frac{12}{l^2} \frac{EI}{kGA} = \frac{E}{kG} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \quad (31)$$

Se aprecia en esta expresión que β depende de la esbeltez y del cociente entre E y G . Para una viga de canto moderadamente grande ($\frac{l}{h} = 4$) y material isótropo con $\frac{E}{kG} \simeq 2$, se tiene $\beta \simeq 0,125$. Por otro lado, para una viga de material compuesto con $\frac{E}{kG} \simeq 50$ y una esbeltez mucho mayor de $\frac{l}{h} = 20$, el valor de β es también

Sección rectangular isótropa $\nu = 0.25$	$k = \frac{5}{6}$; $\beta = 3 \left(\frac{h}{l}\right)^2$
Sección rectangular homogénea con $\frac{E}{kG} = 50$	$k = \frac{5}{6}$; $\beta = 50 \left(\frac{h}{l}\right)^2$
Sección compuesta de 3 capas (Figura 5)	$k = 0.595$; $\beta = 105 \left(\frac{h}{l}\right)^2$
Sección compuesta de 9 capas (Figura 5)	$k = 0.689$; $\beta = 65 \left(\frac{h}{l}\right)^2$
Sección sandwich con $C = 50$ (Figura 5)	$k = 0.094$; $\beta = 84 \left(\frac{h}{l}\right)^2$

Tabla 1. Valores del coeficiente β de la ec.(30) y del coeficiente corrector del esfuerzo cortante k para diversas secciones de vigas.

$\simeq 0.125$. Se deduce, por tanto, que la influencia de la deformación por cortante es la misma en una viga de alto canto y material isótropo, que en otra viga más esbelta de material compuesto. Esta conclusión justifica la utilización de la teoría de Timoshenko para análisis de vigas de materiales compuestos.

Las integrales de los términos de $\mathbf{K}_{ij}^{(e)}$ se evalúan mediante integración numérica de Gauss-Legendre utilizando un único punto de integración para todos los términos. Ello elimina el denominado efecto de *bloqueo* que puede aparecer en la aplicación del elemento de viga de Timoshenko de dos nodos en problemas en los que el coeficiente ϕ es pequeño. La expresión de $\mathbf{K}_{ij}^{(e)}$ se obtiene en este caso sencillamente por

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = l^{(e)} [\mathbf{B}_i^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_j]_c l^{(e)} \quad (32)$$

donde $[\cdot]_c$ indica valores en el centro del elemento. El cálculo de $[\mathbf{B}_i]_c$ es inmediato de (23) por

$$[\mathbf{B}_i]_c = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^i}{l^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(-1)^i}{l^{(e)}} \\ 0 & \frac{(-1)^i}{l^{(e)}} & -1/2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

En las referencias [1,2,3] se pueden encontrar ejemplos del buen comportamiento del elemento de viga de Timoshenko de dos nodos para análisis de vigas de diferentes esbelteces.

ANÁLISIS DE PLACAS CON MATERIAL COMPUESTO LAMINADO

Supondremos que la placa satisface las hipótesis de la teoría de Reissner-Mindlin. Esta teoría es análoga a la de vigas de Timoshenko estudiada en el apartado anterior. Las hipótesis fundamentales de la misma son: 1) todos los puntos de una normal al plano medio de la placa tienen el mismo desplazamiento vertical; 2) las normales permanecen rectas pero no necesariamente ortogonales a la deformada del plano medio, y 3) $\sigma_z = 0$ (hipótesis de tensión plana) (Figura 7).

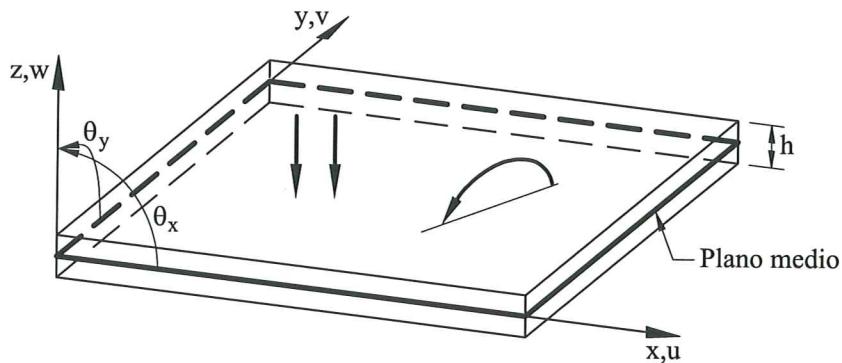


Figura 7. Convenio de signos para los desplazamientos y los giros en una placa.

Con las hipótesis anteriores el campo de desplazamientos se expresa por

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_o(x, y) - z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_o(x, y) - z\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_o(x, y) \end{aligned} \quad (34)$$

donde u_o , v_o y w_o son los desplazamientos cartesianos del punto de la normal sobre el plano medio y θ_x y θ_y son los giros de la normal contenidos en los planos xz e yz , respectivamente (Figura 8).

El vector de movimientos se define por

$$\mathbf{u} = [u_o, v_o, w_o, \theta_x, \theta_y]^T \quad (35)$$

Similarmente a lo explicado para la teoría de vigas de Timoshenko, existen teorías de placas laminadas más sofisticadas que admiten una variación lineal del campo de desplazamientos diferente dentro de cada capa [4–9,17–21]. Por otro lado, la cinemática de la ec.(34) puede simplificarse más aceptando que las normales permanecen ortogonales a la deformada del plano medio (teoría de placas delgadas de Kirchhoff) [1–3]. La cinemática de la teoría de Reissner-Mindlin de la ec.(34) es un buen compromiso entre estas dos teorías para análisis de placas multilaminadas.

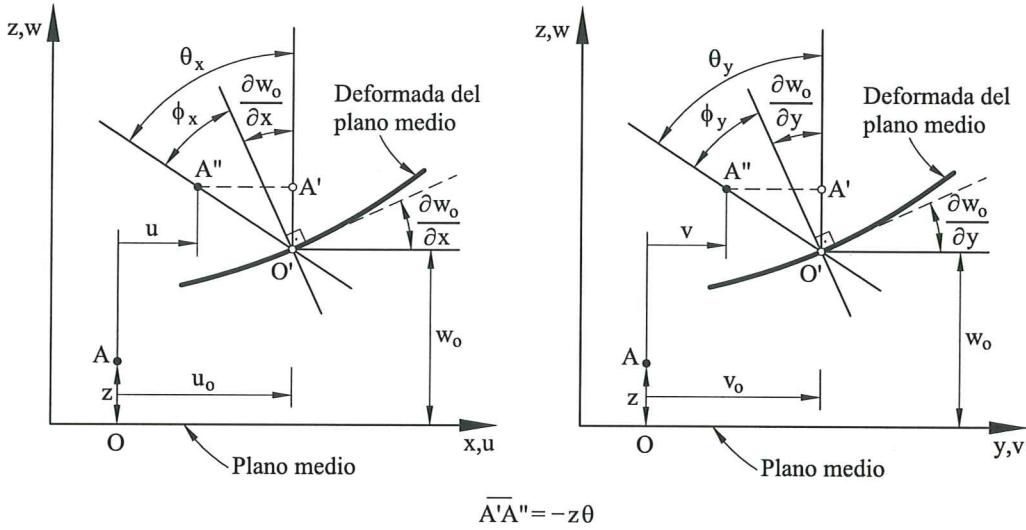


Figura 8. Campo de desplazamientos y giros de una placa.

El vector de deformaciones se obtiene a partir de las expresiones de la teoría de la elasticidad tridimensional (despreciando ε_z ya que no efectúa trabajo de deformación al ser la tensión σ_z nula) por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \dots \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \dots \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_o}{\partial x} \\ \frac{\partial v_o}{\partial y} \\ \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \dots \\ \frac{\partial w_o}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w_o}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_m \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \end{Bmatrix} \quad (36)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_m &= \left[\frac{\partial u_o}{\partial x}, \frac{\partial v_o}{\partial y}, \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \right) \right]^T \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f &= \left[-\frac{\partial \theta_x}{\partial x}, -\frac{\partial \theta_y}{\partial y}, -\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \right]^T \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c &= \left[\left(\frac{\partial w_o}{\partial x} - \theta_x \right), \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} - \theta_y \right) \right]^T \end{aligned} \quad (37)$$

son los vectores de deformaciones generalizadas de membrana, flexión y cortante transversal, respectivamente.

La ec.(36) puede escribirse como

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_m + z\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f \quad (38a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \quad (38b)$$

Relación tensión-deformación

Consideremos una placa de material compuesto y espesor h constituida por un apilamiento de capas ortótropas con ejes de ortotropía L, T, z y con isotropía a lo largo del eje L (en el plano Tz). El eje L define la dirección de las fibras embebidas en una matriz metálica o polímera. Se supone además que:

- cada capa i está definida por los planos $z = z_i$ y $z = z_{i+1}$ y $z_i \leq z \leq z_{i+1}$.
- las direcciones de ortotropía L y T varían de una capa a otra y se representan por el ángulo ϕ_i entre el eje x global y la dirección de ortotropía L_i de la capa i .
- la ley de comportamiento de cada capa cumple la hipótesis de tensión plana ($\sigma_z = 0$) y de anisotropía en el plano (el eje z es eje de ortotropía de todas las capas).
- el campo de desplazamientos es continuo entre capas (ec.(34)).

Las hipótesis anteriores permiten escribir las relaciones tensión-deformación para cada capa i en la forma siguiente

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_s \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s \quad (39a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_c \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_c \boldsymbol{\varepsilon}_c \quad (39b)$$

El convenio de signos para las tensiones se muestra en la Figura 10.

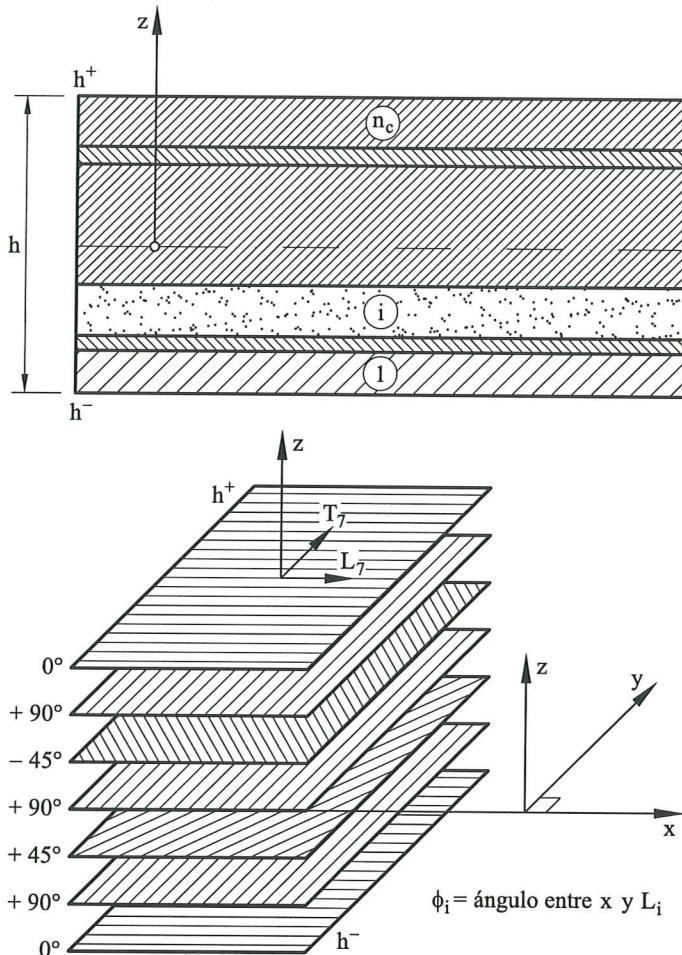
Las matrices constitutivas \mathbf{D}_s y \mathbf{D}_c son simétricas y de tamaño 3×3 y 2×2 , respectivamente y sus términos son función de cinco coeficientes independientes y del ángulo ϕ_i entre el eje x y la dirección de ortotropía L_i de la capa i .

Las ecuaciones constitutivas en los ejes de ortotropía L, T, z se escriben como

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{D}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{D}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2 \quad (40)$$

con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_1 &= [\sigma_L, \sigma_T, \tau_{LT}]^T, & \boldsymbol{\sigma}_2 &= [\tau_{Lz}, \tau_{Tz}]^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1 &= [\varepsilon_L, \varepsilon_T, \gamma_{LT}]^T, & \boldsymbol{\varepsilon}_2 &= [\gamma_{Lz}, \gamma_{Tz}]^T \\ \mathbf{D}_1 &= \begin{bmatrix} D_{LL} & D_{LT} & 0 \\ D_{TL} & D_{TT} & 0 \\ \text{Sim.} & G_{LT} & G_{TT} \end{bmatrix}, & \mathbf{D}_2 &= \begin{bmatrix} G_{Lz} & 0 \\ 0 & G_{Tz} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (41)$$



Ejemplo de estratificación de h^- a h^+ :
 $(0/+90/+45/+90/-45/+90/0)$

Figura 9. Definición de las capas en una placa multilaminada.

y

$$D_{LL} = \frac{E_{LL}}{a}, \quad D_{TT} = \frac{E_T}{a}, \quad a = 1 - \nu_{LT}\nu_{TL}$$

$$G_{LT} = \frac{E_T\nu_{LT}}{a} = \frac{E_L\nu_{TL}}{a} \quad (42)$$

Los cinco coeficientes independientes pueden ser bien

$$D_{LL}, D_{LT}, D_{TT}, G_{Lz} = G_{LT}, G_{Tz} \quad (43a)$$

o bien

$$E_L, E_T, \nu_{LT} \left(\text{o } \nu_{TL} = \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT} \right)$$

$$G_{Lz} = G_{LT}, G_{Tz} \left(\text{o } \nu_{Tz} \text{ y } G_{Tz} = \frac{E_T}{2(1 + \nu_{Tz})} \right) \quad (43b)$$

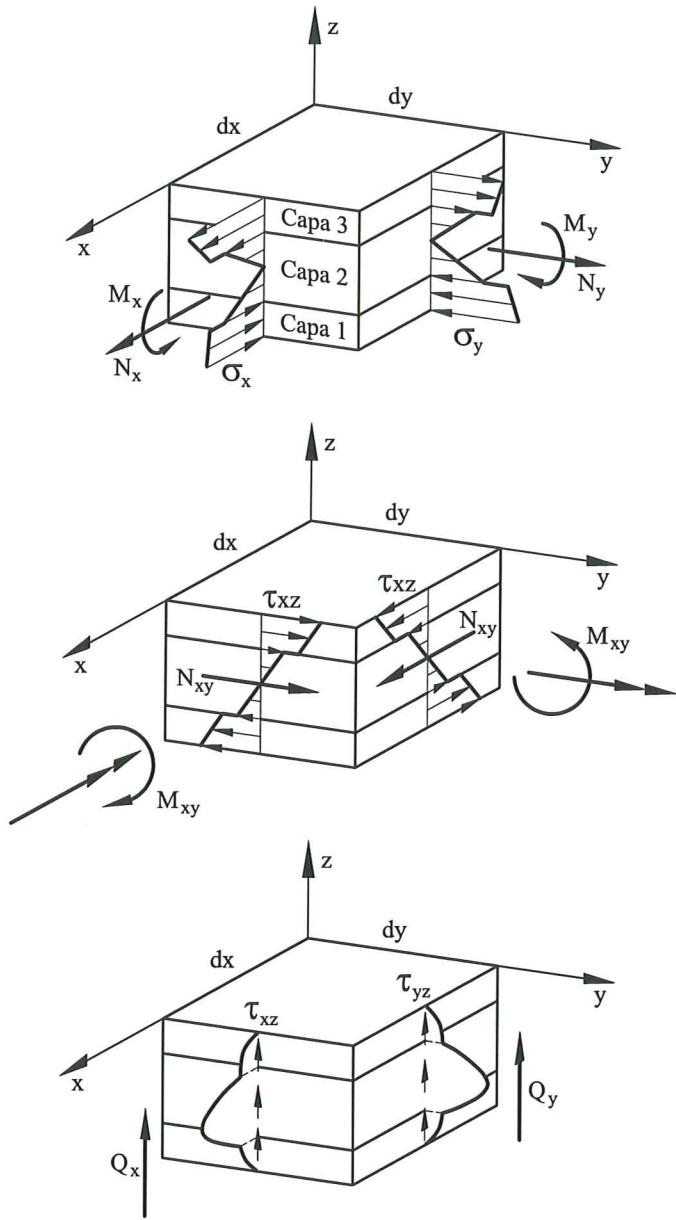


Figura 10. Convenio de signos para las tensiones y los esfuerzos en una placa multilaminada.

La relación entre las matrices \mathbf{D}_s y \mathbf{D}_c de la ecuación constitutiva y las \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 se obtiene por [1,2]

$$\mathbf{D}_s = \mathbf{T}_1^T \mathbf{D}_1 \mathbf{T}_1 \quad , \quad \mathbf{D}_c = \mathbf{T}_2^T \mathbf{D}_2 T_2 \quad (44a)$$

con

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad (44b)$$

siendo $c = \cos \phi$ y $s = \sin \phi$.

Como en el caso de vigas, si las propiedades del material varían de capa a capa, las tensiones en el plano σ_s son *discontinuas* a través del espesor.

Los vectores de esfuerzos se definen como (Figura 10):

Esfuerzos axiles

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_m = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{h^-}^{h^+} \boldsymbol{\sigma}_s dz \quad (45)$$

Movimientos flectores

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_f = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{h^-}^{h^+} z \boldsymbol{\sigma}_s dz \quad (46)$$

Esfuerzos cortantes

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_c = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{h^-}^{h^+} \boldsymbol{\sigma}_c dz \quad (47)$$

donde h^- y h^+ son las coordenadas z de las superficies superior e inferior de la placa. Sustituyendo las ecs.(39) en las (45–47) se obtiene, tras operar,

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_m &= \hat{\mathbf{D}}_m \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_m + \hat{\mathbf{D}}_{m_f} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_f &= \hat{\mathbf{D}}_{m_f} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_m + \hat{\mathbf{D}}_f \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_c &= \hat{\mathbf{D}}_c \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \end{aligned} \quad (48)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}_m &= \int_{h^-}^{h^+} \mathbf{D}_s dz \quad , \quad \hat{\mathbf{D}}_{m_f} = \int_{h^-}^{h^+} z \mathbf{D}_s dz \\ \hat{\mathbf{D}}_f &= \int_{h^-}^{h^+} z^2 \mathbf{D}_s dz \quad , \quad \hat{\mathbf{D}}_c = \begin{bmatrix} k_{11} \bar{D}_{c_{11}} & k_{12} \bar{D}_{c_{12}} \\ \text{Sim.} & k_{22} \bar{D}_{c_{22}} \end{bmatrix} \quad \text{con } \bar{D}_{c_{ij}} = \int_{h^-}^{h^+} D_{c_{ij}} dz \end{aligned} \quad (49)$$

Adviértase que la matriz $\hat{\mathbf{D}}_c$ incorpora tres coeficientes de corrección del cizallamiento transversal. En una placa isótropa se acepta $k_{12} = 0$ y $k_{11} = k_{22} = 5/6$ como en vigas de sección transversal [1,2,19,21].

En una placa constituida por n_c capas ortótropas (con propiedades constantes en cada capa) se tiene (Figura 9)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}_m &= \sum_{j=1}^{n_c} h_j \mathbf{D}_{s_j} \quad ; \quad \hat{\mathbf{D}}_{m_f} = \sum_{j=1}^{n_c} h_j \bar{z}_j \mathbf{D}_{s_j} \\ \hat{\mathbf{D}}_f &= \sum_{j=1}^{n_c} \frac{1}{3} [z_{j+1}^3 - z_j^3] \mathbf{D}_{s_j} \quad ; \quad \bar{\mathbf{D}}_c = \sum_{j=1}^{n_c} h_j \mathbf{D}_{c_j} \end{aligned} \quad (50)$$

donde $h_j = z_{j+1} - z_j$, $\bar{z}_j = \frac{1}{2}(z_{j+1} + z_j)$ y \mathbf{D}_{s_j} , \mathbf{D}_{c_j} representan las matrices constitutivas de la capa.

Si el material es isótropo o simétrico con respecto al plano $z = 0$, $\hat{\mathbf{D}}_{m_f} = 0$. En este caso el plano xy es el plano neutro y no hay acoplamiento entre los efectos de membrana y de flexión cumpliéndose que

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_m = \hat{\mathbf{D}}_m \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_m , \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_f = \hat{\mathbf{D}}_f \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f , \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_c = \hat{\mathbf{D}}_c \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \quad (51)$$

Para material *homogéneo e isótropo*

$$\hat{\mathbf{D}}_m = h \mathbf{D}_s , \quad \hat{\mathbf{D}}_f = \frac{h^3}{12} \mathbf{D}_s , \quad \hat{\mathbf{D}}_c = \frac{5}{6} h \mathbf{D}_c \quad (52a)$$

con

$$\mathbf{D}_s = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{D}_c = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (52b)$$

Las tensiones $\boldsymbol{\sigma}_s$ en cada capa se obtienen directamente en función de los esfuerzos de (39a), (38a) y (48) por

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{D}_s \mathbf{S} \hat{\mathbf{D}}_s^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_m \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_f \end{array} \right\} \quad (53a)$$

con

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z \end{bmatrix} , \quad \hat{\mathbf{D}}_s = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_m & \hat{\mathbf{D}}_{m_f} \\ \hat{\mathbf{D}}_{m_f} & \hat{\mathbf{D}}_f \end{bmatrix} \quad (53b)$$

Si $\hat{\mathbf{D}}_{m_f} = 0$

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{D}_s [\hat{\mathbf{D}}_m^{-1} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_m + z \hat{\mathbf{D}}_f^{-1} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_f] \quad (54)$$

Por otro lado, pese a que la distribución de las tensiones tangenciales transversales $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_c$ que resulta estrictamente de la teoría de Reissner-Mindlin, es constante a través del espesor, los coeficientes k_{ij} en la matriz $\hat{\mathbf{D}}_c$ corrigen en parte este “defecto”, de manera que el campo de movimientos que resulta del cálculo, se asemeja al valor exacto de la teoría tridimensional. Utilizando dicho campo de movimientos pueden calcularse “a posteriori” las tensiones tangenciales $\boldsymbol{\sigma}_c$ “correctas”, que satisfacen las ecuaciones de la elasticidad.

El cálculo de los coeficientes k_{ij} puede efectuarse igualando las energías de deformación de cortante transversal resultante de la teoría de la elasticidad (U_1) y de la teoría de Reissner-Mindlin (U_2). En un sólido elástico se cumple que

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_{h^-}^{h^+} \boldsymbol{\sigma}_c^T \mathbf{D}_c^{-1} \boldsymbol{\sigma}_c dz \quad (55)$$

Por otra parte, de la teoría de placas de Reissner-Mindlin se tiene

$$U_2 = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_c \hat{\mathbf{D}}_c^{-1} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_c \quad (56)$$

Las tensiones tangenciales transversales $\boldsymbol{\sigma}_c = [\tau_{xz}, \tau_{yz}]^T$ se obtienen en función de las tensiones en el plano a partir de las ecuaciones de equilibrio homogéneas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (57)$$

de donde

$$\boldsymbol{\sigma}_c = - \int_{h^-}^z \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \end{array} \right\} dz \quad (58)$$

con $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ para $z = h^-$ y h^+ .

Las tensiones en el plano $\boldsymbol{\sigma}_s = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$ se expresan en función de los esfuerzos por la ec.(53a). Admitiendo un estado de flexión simple ($\boldsymbol{\sigma}_m = 0$) y $\hat{\mathbf{D}}_{mf} = 0$ se tiene de (54)

$$\boldsymbol{\sigma}_s = z \mathbf{A}(z) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_c \quad \text{con} \quad \mathbf{A}(z) = \mathbf{D}_s(z) \mathbf{D}_f^{-1} \quad (59)$$

Sustituyendo (59) en (58) puede escribirse

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_c = \mathbf{D}_{c1} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_c + \mathbf{D}_{c2} \boldsymbol{\lambda} \quad (60)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{c1} &= \int_{t^-}^z -\frac{z}{2} \begin{bmatrix} A_{11} + A_{33} & A_{13} + A_{32} \\ A_{31} + A_{23} & A_{22} + A_{33} \end{bmatrix} dz \\ \mathbf{D}_{c2} &= \int_{t^-}^z -\frac{z}{2} \begin{bmatrix} A_{11} - A_{33} & A_{13} - A_{32} & 2A_{12} & 2A_{31} \\ A_{31} - A_{23} & A_{33} - A_{22} & 2A_{32} & 2A_{21} \end{bmatrix} dz \end{aligned} \quad (61)$$

siendo A_{ij} las componentes de \mathbf{A} de (59) y

$$\boldsymbol{\lambda} = \left[\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y}, \frac{\partial M_y}{\partial x}, \frac{\partial M_x}{\partial y} \right]^T \quad (62)$$

Sustituyendo (60) en (55) puede escribirse (despreciando las contribuciones de los términos en $\boldsymbol{\lambda}$) [2]

$$U_1 \simeq \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_c^T \mathbf{H}_c \hat{\boldsymbol{\sigma}}_c \quad (63)$$

con

$$\mathbf{H}_c = \int_{h^-}^{h^+} \mathbf{D}_{c_1}^T \mathbf{D}_c^{-1} \mathbf{D}_{c_1} dz \quad (64)$$

Igualando U_1 y U_2 se obtienen los coeficientes k_{ij} por

$$k_{11} = \frac{H_{c_{11}}}{\bar{D}_{c_{11}}} , \quad k_{12} = \frac{H_{c_{12}}}{\bar{D}_{c_{12}}} , \quad k_{22} = \frac{H_{c_{22}}}{\bar{D}_{c_{22}}} \quad (65)$$

Para una placa homogénea de espesor h (isótropa o anisótropa) $\mathbf{D}_{c_2} = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{D}_{c_1} = \frac{6}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \mathbf{I}, \quad k_{12} = 0, \quad k_{11} = k_{22} = k \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{D}}_c = kh\bar{\mathbf{D}}_c \quad \text{con } k = \frac{5}{6} \quad (66)$$

En este caso se recupera la clásica distribución parabólica de las tensiones tangenciales transversales.

Principio de Trabajos Virtuales

El PTV se expresa en función de los esfuerzos y las deformaciones generalizadas virtuales por

$$\int \int_A \delta \hat{\epsilon}^T \hat{\sigma} dA = \int \int_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dA \quad (67)$$

donde los términos tienen el mismo significado que en la ec.(20) con $\delta \mathbf{u} = [\delta u_o, \delta v_o, \delta w_o, \delta \theta_x, \delta \theta_y]^T$ y $\mathbf{q} = [n_x, n_y, q, m_x, m_y]^T$

Como sucedía en el problema de vigas de Timoshenko, debido a la presencia de únicamente términos en derivadas primeras de los movimientos en el PTV, pueden utilizarse elementos finitos de clase C_0 [1–3].

Discretización en elementos finitos de placa

Consideremos la placa discretizada en una malla de elementos finitos triangulares o cuadriláteros de n nodos (Figura 11). Dentro de cada elemento se interpolan los movimientos de manera independiente por

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_o \\ v_o \\ w_o \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i^{(e)} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_n] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^{(e)} \\ \mathbf{a}_2^{(e)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^{(e)} \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)} \quad (68)$$

con

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_i^{(e)} = [u_{o_i}, v_{o_i}, w_{o_i}, \theta_{x_i}, \theta_{y_i}]^T \quad (69)$$

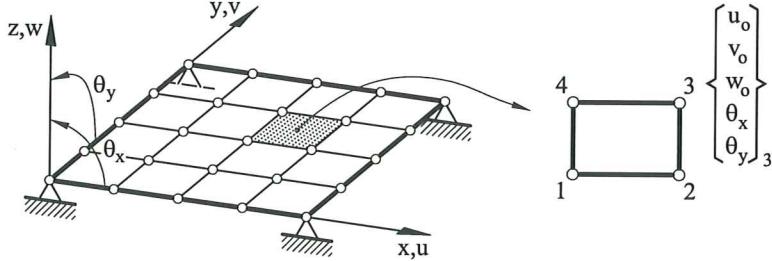


Figura 11. Discretización de una placa en elementos rectangulares de 4 nodos.

donde $N_i(\xi, \eta)$ es la función de forma de clase C_0 del nodo i del elemento.

Haciendo uso de la ec.(68) el campo de deformaciones generalizadas se expresa en función de los movimientos por

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_m \\ \dots \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f \\ \dots \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_o}{\partial x} \\ \frac{\partial v_o}{\partial y} \\ \dots \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \\ \dots \\ \frac{\partial w_o}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w_o}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} u_{o_i} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} v_{o_i} \\ \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} u_{o_i} + \frac{\partial N_i}{\partial x} v_{o_i}\right) \\ -\frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{x_i} \\ -\frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{y_i} \\ -\left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{x_i} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{y_i}\right) \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} w_{o_i} - N_i \theta_{x_i} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} w_{o_i} - N_i \theta_{y_i} \end{Bmatrix} =$$

$$= [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^{(e)} \\ \mathbf{a}_2^{(e)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^{(e)} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{a}^{(e)} \quad (70)$$

donde \mathbf{B} y \mathbf{B}_i son las matrices de deformaciones generalizadas del elemento y de un nodo, respectivamente. Esta última puede escribirse como

$$\mathbf{B}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_{m_i} \\ \mathbf{B}_{b_i} \\ \mathbf{B}_{s_i} \end{Bmatrix} \quad (71)$$

donde $\mathbf{B}_m, \mathbf{B}_f$ y \mathbf{B}_c son las matrices de deformaciones de membrana, flexión y cortante dadas por

$$\mathbf{B}_{m_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (72a)$$

$$\mathbf{B}_{b_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (72b)$$

$$\mathbf{B}_{s_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (72c)$$

Sustituyendo las ecuaciones de la discretización para cada elemento en el PTV se obtiene la ecuación de equilibrio global (25) que relaciona las fuerzas nodales equivalentes con los movimientos de todos los nodos de la malla a través de la matriz de rigidez. Como es usual, dicha matriz y el vector de fuerzas nodales equivalentes se obtienen ensamblando las contribuciones de cada elemento dadas por

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_j dA \quad (73a)$$

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = \int \int_{A^{(e)}} N_i \mathbf{q} dA \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (73b)$$

La expresión de $\mathbf{K}_{ij}^{(e)}$ puede obtenerse como suma de las matrices de rigidez de membrana, flexión, cortante y acoplamiento membrana-flexión, por una expresión *análoga a las ecs. (28) y (29), cambiando simplemente la integral de línea por otra sobre el área del elemento.*

El cálculo de las integrales del elemento se efectúa por una cuadratura de Gauss-Legendre bidimensional como [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij}^{(e)} &= \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{q=1}^{n_q} [\mathbf{B}_i^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_j | \mathbf{J} |]_{p,q} w_p w_q \\ \mathbf{f}_i^{(e)} &= \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{q=1}^{n_q} [N_i \mathbf{q} | \mathbf{J} |]_{p,q} w_p w_q \end{aligned} \quad (74)$$

donde \mathbf{J} es el jacobiano de la transformación entre las coordenadas naturales del elemento ξ, η y las cartesianas x, y ; n_p, n_q son los puntos de integración a lo largo de las direcciones ξ, η , respectivamente y w_p y w_q son los pesos asociados a cada punto de integración [1].

Para sortear el *efecto de bloqueo* debido a la excesiva influencia de los términos de rigidez provenientes de la deformación de cortante transversal en el análisis de placas delgadas, es usual subintegrar los términos de la matriz de rigidez del elemento provenientes de la matriz \mathbf{B}_c con una cuadratura *reducida* [1–3]. En la Figura 12 se muestran algunos elementos de placa de Reissner-Mindlin cuadriláteros y triangulares que presentan un comportamiento aceptable utilizando las cuadraturas que se indican. De entre ellos el más recomendable en la práctica es el *triangular de seis nodos*, ya que en el resto, o bien el efecto de bloqueo no desaparece totalmente para placas muy delgadas (cuadrilátero de 8 nodos), o

bien la integración reducida de los términos \mathbf{B}_c introduce mecanismos espúreos en la matriz de rigidez que pueden alterar la solución correcta en algunos casos (cuadriláteros de 4 y 9 nodos). Desgraciadamente, la integración reducida no basta para evitar el bloqueo en el sencillo elemento triangular lineal de tres nodos y, por tanto, su utilización con la teoría de placas de Reissner-Mindlin está vetada en la práctica [1,3].

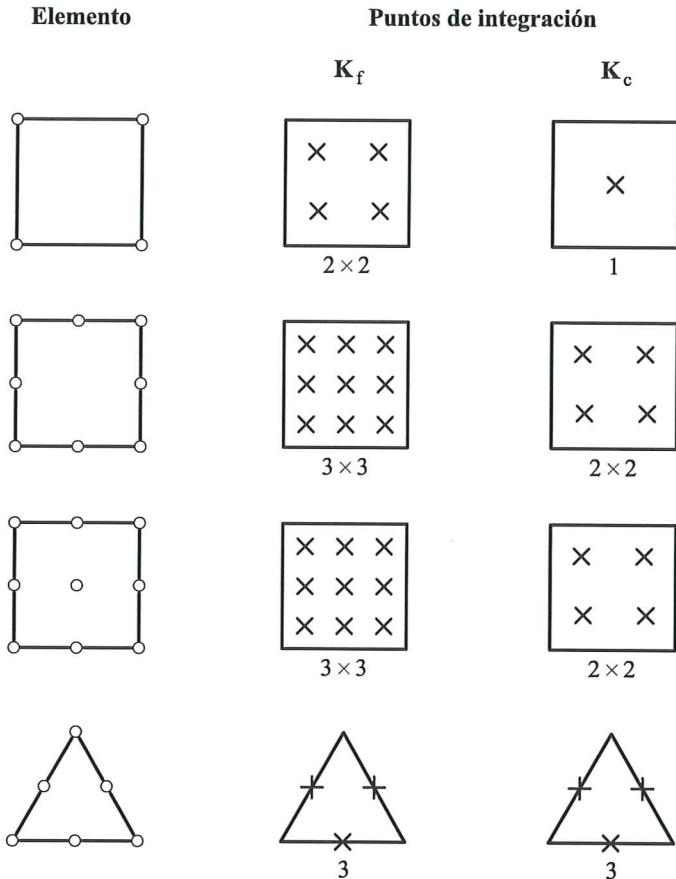


Figura 12. Elementos de placa de Reissner-Mindlin con integración reducida.

Otra alternativa para eliminar el efecto de bloqueo es utilizar una formulación mixta, utilizando como variables los desplazamientos, los giros y las deformaciones de cortante transversal, que se interpolan con aproximaciones diferentes dentro del elemento [1,3]. Eliminando las variables de deformación de cortante transversal en función de los desplazamientos y los giros nodales, se llega a unas ecuaciones de rigidez en función únicamente de los movimientos nodales. Las matrices resultantes de membrana, flexión y acoplamiento membrana-flexión se evalúan como en la formulación explicada anteriormente, y la matriz de rigidez de cortante se calcula utilizando una matriz de deformación de cortante transversal sustitutiva $\bar{\mathbf{B}}_c$, en lugar de la matriz \mathbf{B}_c . En base a esta teoría se han desarrollado diversos elementos de placa de Reissner-Mindlin, siendo el más popular el *cuadrilátero de cuatro nodos* con un campo de deformaciones de cortante transversal lineal. En las referencias [1,3] se presentan los detalles de la formulación de este elemento y de otros del mismo tipo.

ANÁLISIS DE LÁMINAS PLANAS

La formulación de láminas planas con material compuesto laminado es muy similar a la de placas explicada en el apartado anterior. La diferencia fundamental es que toda la descripción cinemática se efectúa ahora en un sistema de coordenadas locales $x'y'z'$ (Figura 13). En dicho sistema los campos de movimientos y de deformaciones (locales) tienen exactamente las mismas expresiones que en el caso de placas. Así, por ejemplo, el vector de movimientos locales se define por

$$\mathbf{u}' = [u'_o, v'_o, w'_o, \theta_{x'}, \theta_{y'}]^T \quad (75)$$

y el de deformaciones generalizadas locales por

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}' = \left\{ \begin{array}{l} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_m \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_f \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_c \end{array} \right\} \quad (76)$$

donde todos los términos tienen el mismo significado (y las mismas expresiones) que en el caso de placas, pero están referidas ahora al sistema de ejes locales.

Igualmente, son de nuevo válidas todas las consideraciones efectuadas sobre la obtención de las matrices constitutivas del material.

El PTV se escribe utilizando la definición local de las variables por

$$\int \int_{A^{(e)}} \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}' dA = \int \int_{A^{(e)}} \delta \mathbf{u}'^T \mathbf{q}' dA \quad (77)$$

La discretización en elementos finitos de los movimientos y las deformaciones generalizadas locales se efectúa por las mismas expresiones (68)-(72). La *matriz de rigidez local* del elemento se calcula por

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_i'^T \hat{\mathbf{D}}' \mathbf{B}_j' dA \quad (78)$$

donde $(\cdot)'$ indica valores referidos a los ejes locales.

La etapa final, característica del problema de láminas, es la transformación de la matriz de rigidez local para ensamblar las ecuaciones en ejes globales. La expresión de la matriz de rigidez global se obtiene por la transformación estándar [1]

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \mathbf{L}^T \mathbf{K}_{ij}^{(e)} \mathbf{L} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (79)$$

donde

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\lambda} \end{bmatrix} \quad (80)$$

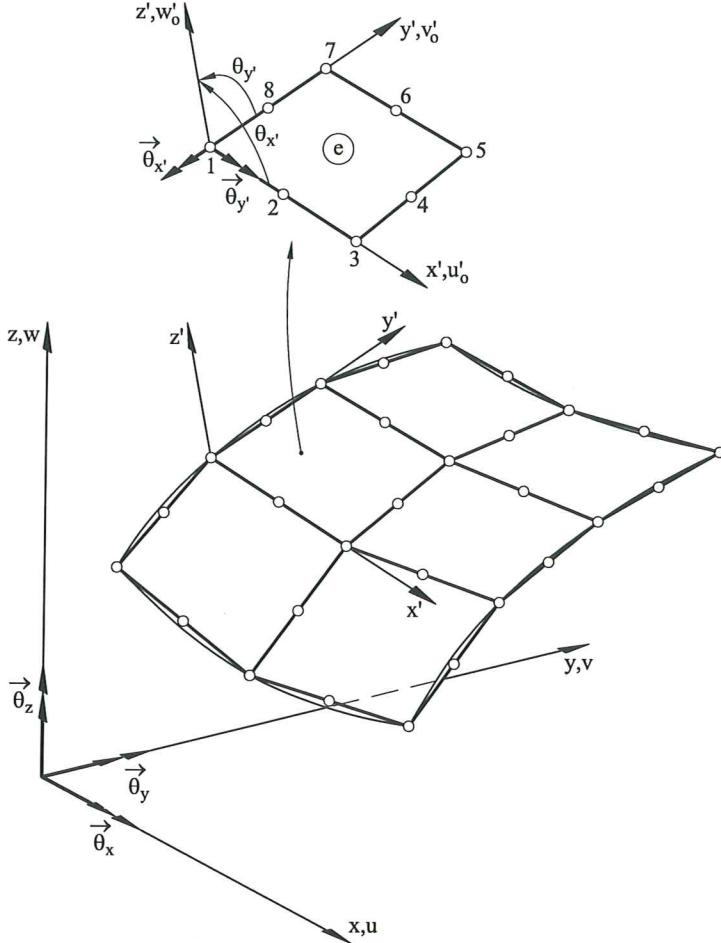


Figura 13. Definición de ejes y movimientos locales y globales en láminas planas.

con

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix}_i^{(e)}, \quad \hat{\lambda} = \begin{bmatrix} -\lambda_{y'x} & -\lambda_{y'y} & -\lambda_{y'z} \\ \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \end{bmatrix}_i^{(e)} \quad (81)$$

siendo $\lambda_{x'x}$ el coseno del ángulo entre el eje x' y el x , etc.

El vector de fuerzas equivalentes nodales se calcula directamente en *ejes globales* por una expresión idéntica a la ec.(73b).

La matriz \mathbf{L} anterior transforma los cinco movimientos nodales $(u'_o, v'_o, w'_o, \theta_{x'}, \theta_{y'})$ en seis movimientos globales $(u_o, v_o, w_o, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$. La aparición de un tercer giro nodal conduce a problemas de mal condicionamiento de la matriz de rigidez global en nodos coplanares (nodos en los que todos los elementos que concurren están situados en un mismo plano) (Figura 14). Para sortear este problema es usual utilizar la transformación (de desplazamientos y giros locales a globales) únicamente en nodos *no coplanares*. Por otra parte, en los *nodos coplanares* solo se transforman a ejes globales los desplazamientos nodales

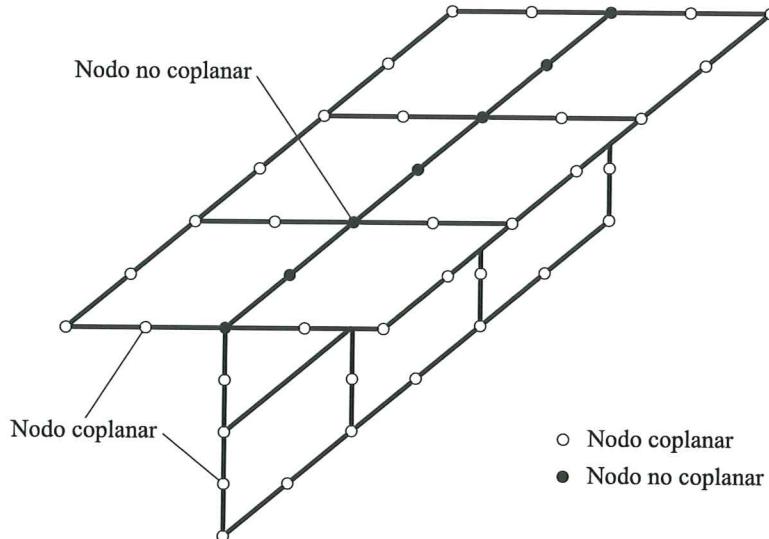


Figura 14. Nodos coplanares y no coplanares en un elemento de lámina plana.

y se mantienen los giros en ejes locales. Esto implica únicamente en los nodos coplanares cambiar la matriz λ de (81) por la matriz identidad 2×2 .

En las referencias [1,3] pueden encontrarse más detalles sobre la transformación de ejes y matrices en elementos de lámina plana.

Los elementos de lámina plana utilizables en la práctica coinciden con los de placa explicados en el apartado anterior. Son muy recomendables el triángulo de seis nodos con integración reducida de los términos de cortante transversal y el cuadrilátero de cuatro nodos con un campo de deformaciones de cortante transversal impuesto lineal [1].

La alternativa a la teoría de láminas planas de Reissner-Mindlin es la teoría de láminas delgadas de Kirchhoff, o la más general de láminas curvas utilizando elementos de sólido degenerados. De todas estas teorías de láminas y de las formulaciones de elementos finitos correspondientes pueden encontrarse los detalles en [1,3]. Para aplicaciones en el ámbito de los materiales compuestos consultar [7–9,22–25].

LÁMINAS DE REVOLUCIÓN

Para completar el capítulo presentamos de forma sucinta las etapas básicas del cálculo de una lámina de revolución con un material compuesto multicapa, utilizando elementos finitos troncocónicos de dos nodos (Figura 15).

Aceptando una cinemática lineal de los desplazamientos a través del espesor, similar a la de vigas de Timoshenko, el campo de movimientos de la sección meridional de la lámina de revolución se expresa en ejes locales x', z' (Figura 16) por

$$\begin{aligned} u'(s, z') &= u'_0(s) - z' \theta(s) \\ w'(s', z') &= w'_0(s) \end{aligned} \tag{82}$$

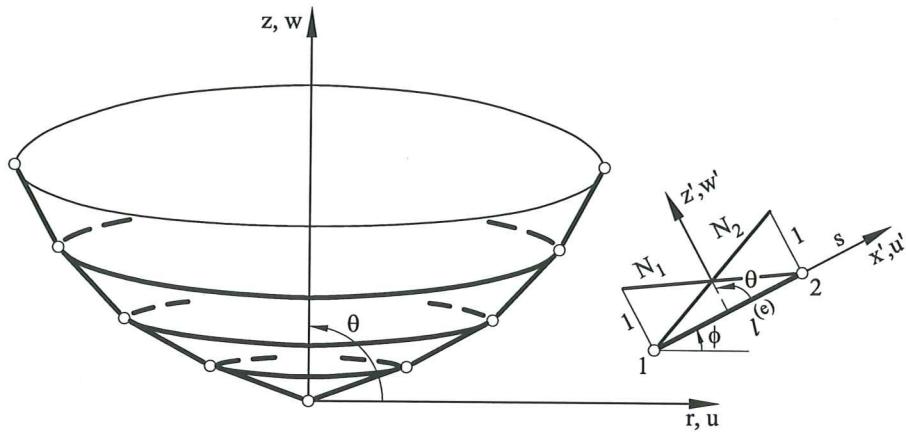


Figura 15. Discretización de una lámina de revolución en elementos troncocónicos de dos nodos.

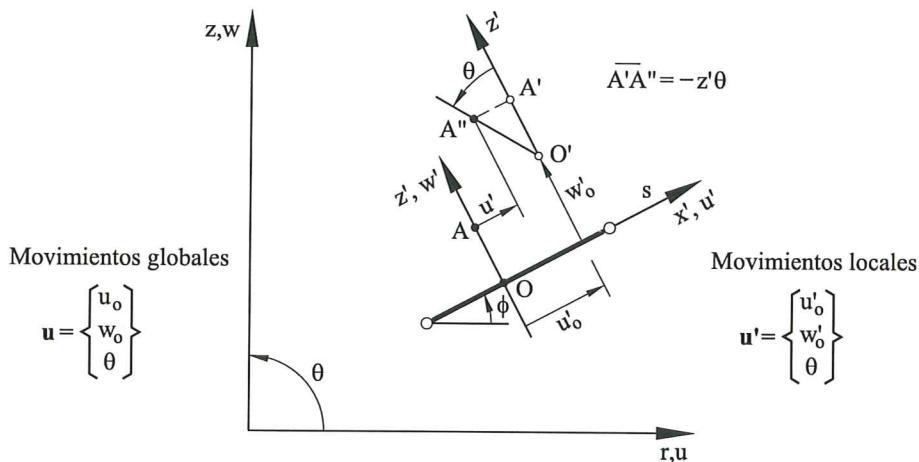


Figura 16. Definición del campo de movimientos en un elemento troncocónico.

Los vectores de movimiento locales \mathbf{u}' y globales \mathbf{u} se definen por

$$\mathbf{u}' = [u'_o, w'_o, \theta]^T , \quad \mathbf{u} = [u_o, w_o, \theta]^T \quad (83)$$

con

$$\mathbf{u}' = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad \text{y} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (84)$$

Las deformaciones locales se obtienen por [1,2,3]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}'_s &= [\varepsilon_{x'}, \varepsilon_{y'}]^T = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_m + z' \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_f \\ \boldsymbol{\varepsilon}'_c &= [\gamma_{x'y'}] = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_c \end{aligned} \quad (85)$$

con los alargamientos $\hat{\varepsilon}'_m$, las curvaturas $\hat{\varepsilon}'_f$ y la cizalladura $\hat{\varepsilon}'_c$ definidos por

$$\hat{\varepsilon}'_m = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'_0}{\partial s} \\ \frac{u'_0 \cos \phi - w'_0 \sin \phi}{r} \end{Bmatrix}, \quad \hat{\varepsilon}'_f = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \theta}{\partial s} \\ -\frac{\theta \cos \phi}{r} \end{Bmatrix}, \quad \hat{\varepsilon}'_c = \left\{ \frac{\partial w'_0}{\partial s} - \theta \right\} \quad (86)$$

En las expresiones anteriores se ha supuesto que $h \ll R_m$ con $m = s, \alpha$ siendo R_s y R_α los radios de curvatura de las líneas meridional y circunferencial de la lámina, respectivamente y h el espesor [1,2]. Obviamente, por ser el elemento troncocónico $R_s = \infty$.

La ecuación constitutiva entre tensiones y deformaciones locales es (aceptando la hipótesis de tensión plana, $\sigma_{z'} = 0$)

$$\boldsymbol{\sigma}'_s = [\sigma_{x'}, \sigma_{y'}]^T = \mathbf{D}'_s \boldsymbol{\varepsilon}'_s \quad (87a)$$

$$\sigma'_c = [\tau_{x'z'}] = D'_c \hat{\varepsilon}'_c \quad (87b)$$

con

$$\mathbf{D}'_s = \begin{bmatrix} d'_1 & \nu_{21}d'_1 \\ \nu_{12}d'_2 & d'_2 \end{bmatrix}; \quad d'_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad d'_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad D'_c = G_{sz'} \quad (88)$$

en donde E_1 y E_2 son los módulos de Young en las direcciones principales de ortotropía $1 \equiv s$ y $2 \equiv \theta$, ν_{12} y ν_{21} son los correspondientes coeficientes de Poisson (con $\nu_{12}E_2 = \nu_{21}E_1$) y $G_{sz'}$ es el módulo de rigidez en la dirección transversal. Para material isotrópico

$$\mathbf{D}'_s = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}, \quad G_{sz'} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (89)$$

Los esfuerzos locales se definen por

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_m = \begin{Bmatrix} N_{x'} \\ N_{y'} \end{Bmatrix} = \int_{h^-}^{h^+} \boldsymbol{\sigma}'_s dz', \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_f = \begin{Bmatrix} M_{x'} \\ M_{y'} \end{Bmatrix} = \int_{h^-}^{h^+} z' \sigma'_s dz', \quad \hat{\sigma}'_c = [Q_{z'}] = \int_{h^-}^{h^+} \sigma'_c dz' \quad (90)$$

En la Figura 17 se muestra el convenio de signos para las tensiones y esfuerzos locales en una lámina de revolución.

Sustituyendo las ecs.(86) en las expresiones anteriores

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_m &= \hat{\mathbf{D}}'_m \hat{\varepsilon}'_m + \hat{\mathbf{D}}'_{m_f} \hat{\varepsilon}'_f \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_f &= \hat{\mathbf{D}}'_{m_f} \hat{\varepsilon}'_m + \hat{\mathbf{D}}'_{f_f} \hat{\varepsilon}'_f \\ \hat{\sigma}'_c &= \hat{D}'_c \hat{\varepsilon}'_c \end{aligned} \quad (91)$$

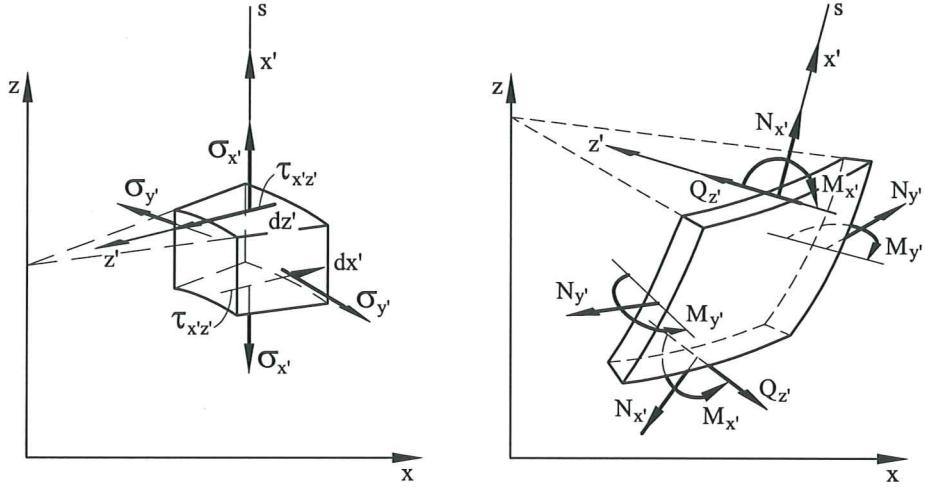


Figura 17. Convenio de signos para las tensiones y esfuerzos locales en una lámina de revolución.

En estas ecuaciones

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{D}}'_m &= \int_{h^-}^{h^+} \mathbf{D}'_s dz' , & \hat{\mathbf{D}}'_{m_f} &= \int_{h^-}^{h^+} z' \mathbf{D}'_s dz' \\ \hat{\mathbf{D}}'_f &= \int_{h^-}^{h^+} (z')^2 \mathbf{D}'_s dz' , & \hat{D}'_c &= k \int_{h^-}^{h^+} D'_c dz'\end{aligned}\quad (92)$$

Para el caso de una lámina de revolución formada por n_c capas de material compuesto (Figura 18), las integrales de $\hat{\mathbf{D}}'_m$, $\hat{\mathbf{D}}'_f$, $\hat{\mathbf{D}}'_{m_f}$ y \hat{D}'_c se obtienen por expresiones idénticas a las Ecs.(10) simplemente cambiando la coordenada z por z' .

El coeficiente de corrección de deformación de cortante transversal k se puede calcular, en primera aproximación, como en el caso de vigas de sección rectangular. Se destaca que en las expresiones resultantes intervienen las expresiones de \mathbf{D}'_s y D'_c de cada capa y los radios de curvatura. Si $h/R_{min} \ll 1$ pueden despreciarse los términos de curvatura. En este caso, y para material homogéneo se obtiene $k = 5/6$ [2].

Se remarca también que la matriz de acoplamiento membrana-flexión sería nula en el caso de material homogéneo o simétrico con respecto a la línea generatriz.

El PTV se escribe ahora aprovechando la simetría de revolución como [1]

$$2\pi \int_l \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}' r ds = 2\pi \int_l \delta \mathbf{u}'^T \mathbf{q}' r ds \quad (93)$$

donde todos los términos tienen el significado usual.

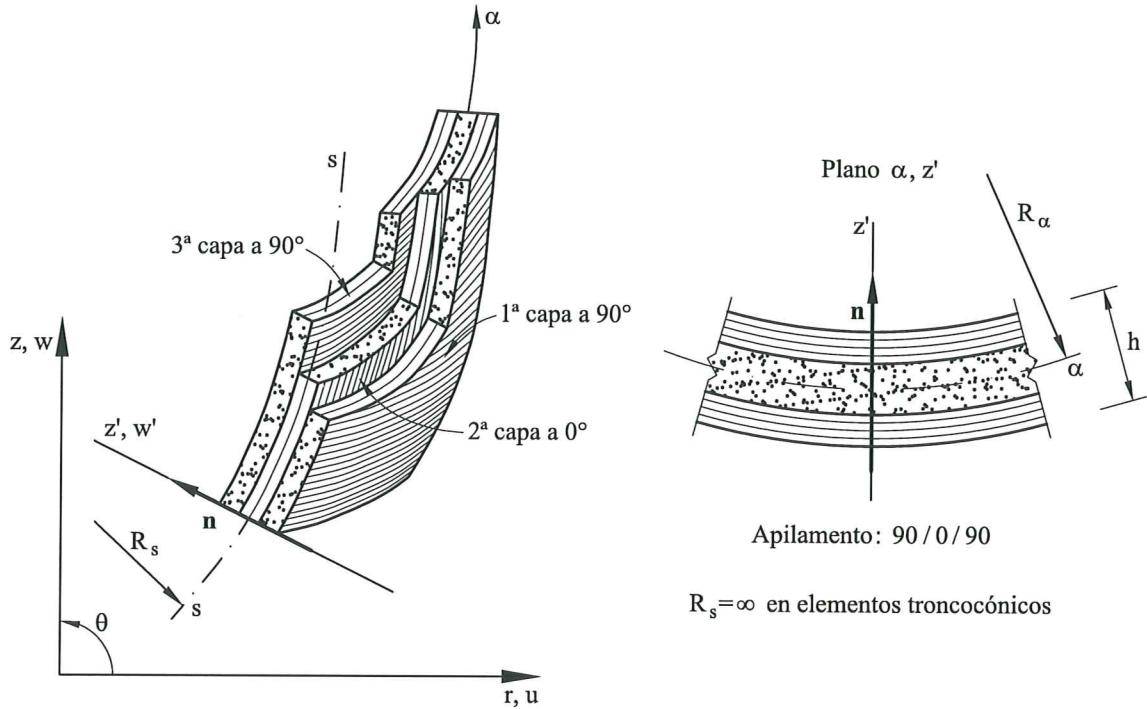


Figura 18. Ejemplo de lámina de revolución con material compuesto multicapa.

Elementos finitos troncocónicos de dos nodos

Consideraremos la lámina discretizada en elementos troncocónicos de dos nodos (Figura 15). Los movimientos locales en un elemento se interpolan por

$$\mathbf{u}' = \begin{Bmatrix} u'_o \\ w'_o \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) \mathbf{a}'^{(e)}_i \quad \text{con } \mathbf{a}'^{(e)}_i = \begin{Bmatrix} u'_o \\ w'_o \\ \theta \end{Bmatrix}_i \quad (94)$$

siendo $N_i(\xi)$ las clásicas funciones de forma unidimensionales lineales (Ec.(22)).

Las deformaciones generalizadas locales se interpolan por

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}' = \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}'_m \\ \hat{\varepsilon}'_f \\ \hat{\varepsilon}'_c \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^2 \begin{Bmatrix} \mathbf{B}'_m \\ -\mathbf{B}'_f \\ -\mathbf{B}'_c \end{Bmatrix}_i \mathbf{a}'^{(e)}_i = \sum_{i=1}^2 \mathbf{B}'_i \mathbf{a}'^{(e)}_i \quad (95a)$$

con

$$\mathbf{B}'_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}'_{m_i} \\ \mathbf{B}'_{f_i} \\ \mathbf{B}'_{s_i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} & 0 & 0 \\ \frac{N_i \cos \phi}{r} & -\frac{N_i \sin \phi}{r} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial s} \\ 0 & 0 & -\frac{N_i \cos \phi}{r} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial s} & -N_i \end{bmatrix} \quad (95b)$$

Procediendo de la forma usual se obtiene la matriz de rigidez del elemento en ejes locales por [1]

$$\mathbf{K}'^{(e)}_{ij} = 2\pi \int_{l(e)} \mathbf{B}'_i^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B}'_j r ds \quad (96)$$

En la práctica puede evaluarse la matriz de rigidez *con un solo punto de integración* (como en el caso del elemento de viga de Timoshenko de dos nodos), eliminándose de esta forma el defecto de bloqueo. La expresión resultante de $\mathbf{K}'^{(e)}_{ij}$ es en este caso simplemente

$$\mathbf{K}'^{(e)}_{ij} = 2\pi l^{(e)} [\mathbf{B}'_i^T \hat{\mathbf{D}}' \mathbf{B}'_j r]_c \quad (97)$$

donde $(\cdot)_c$ indica valores en el centro del elemento. Como en el caso de vigas, la expresión de $(\mathbf{B}_i)_c$ es inmediata de la ec.(95b) advirtiendo que en el centro del elemento troncocónico de dos nodos $N_i = \frac{1}{2}$ y $\frac{\partial N_i}{\partial s} = \frac{(-1)^i}{l^{(e)}}$.

La transformación a ejes globales de la matriz de rigidez sigue el proceso usual. La expresión resultante es idéntica a la de la ec.(79) con la matriz \mathbf{L} dada por la ec.(84).

El vector de fuerzas nodales equivalentes del elemento *en ejes globales* para fuerzas repartidas \mathbf{q} es

$$\mathbf{f}'^{(e)}_i = 2\pi \int_{l(e)} N_i \mathbf{q} r ds \quad (98)$$

El elemento troncocónico de dos nodos con un solo punto de integración tiene un comportamiento excelente para análisis de láminas de revolución delgadas y gruesas. Para más detalles sobre este elemento consultar [1,3,29]. En las referencias [25–28] pueden encontrarse aplicaciones del MEF al análisis de láminas de revolución con materiales compuestos.

COMENTARIOS FINALES

Hemos visto que la formulación de elementos finitos para cálculo de vigas, placas y láminas con materiales compuestos laminados sigue unas pautas muy similares. En todos los casos hemos admitido en la dirección del espesor una cinemática lineal del campo de desplazamientos y de deformaciones, y una variación discontinua de las tensiones normales *en el plano* dependiendo de las propiedades del material de cada capa. Las tensiones tangenciales transversales se han supuesto constantes en la dirección del espesor, pudiéndose calcular su distribución “exacta” a posteriori en base a la teoría de la elasticidad. El error de dicha hipótesis para las tensiones tangenciales en la formulación del MEF, se ha corregido mediante la modificación de la ecuación constitutiva del esfuerzo cortante transversal.

Se han obtenido en todos los casos las expresiones de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas nodales equivalentes de los correspondientes elementos finitos y se han dado recomendaciones sobre los elementos más adecuados para la práctica. Se han destacado los sencillos elementos de dos nodos con integración reducida de un punto para los problemas de vigas y láminas de revolución. Para placas y láminas de forma arbitraria se recomiendan el elemento triangular de seis nodos con integración reducida y el cuadrilátero de cuatro nodos con deformaciones impuestas lineales.

REFERENCIAS

- 1 E. Oñate, *Análisis de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos*, Segunda edición, CIMNE, Barcelona (1995).
- 2 J.L. Batoz et G. Dhatt, *Modélisation des structures para éléments finis*, Vol. 1 Poutres et plaques (1990), Vol. 2 Coques (1992), Hermès, Paris.
- 3 O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, *The Finite Element Method*, 5a. Ed., Butterworth/Heinemann, Vol. I, Vol. II, Vol. III, 2000.
- 4 J.N. Reddy, “A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation”, *In. J. Solids Struct.*, **20**, pp. 881–896, (1987).
- 5 J.N. Reddy, “A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates”, *Commun. Appl. Numer. Methods*, **3**, pp. 113–180, (1987).
- 6 J.N. Reddy, “On refined computational models of composite laminates”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **27**, pp. 361–382, (1989).
- 7 E. Oñate, S. Oller, S. Botello y J. Miquel, “Análisis de estructuras de materiales compuestos”, Monografía CIMNE 11, (1991).
- 8 S. Botello, E. Oñate y J. Miquel, “Un modelo de elementos finitos con aproximación bidimensional por capas para el análisis de estructuras

- multilaminares”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **11**, 2, 225–246, 1995.
- 9 S. Botello, E. Oñate y J. Miquel, “A layer-wise triangle for analysis of laminated composites, plates and shells”, *Computers and Structures*, Vol. **70**, N. 6, 647–666, 1999.
 - 10 C.W. Bert, “Simplified analysis of static shear factors for beams of non homogeneous cross sections”, *J. Comp. Mat.*, Vol. **7**, 525–529, 1973.
 - 11 S. Dharmarajan and H. Mac Cutchin, “Shear coefficients for orthotropic beams”, *J. Composite Materials*, Vol. **7**, 530–535, 1973.
 - 12 K.K. Teh, C.C. Huang, “Shear deformation coefficient for generally orthotropic beam”, *Fib. Sci. and Tech.*, Vol. **12**, 73–80, 1979.
 - 13 C.W. Bert and F. Gordaninejad, “Transverse shear effects in bimodular composite laminates”, *J. Comp. Mat.*, Vol. **17**, 282–298, 1983.
 - 14 L. Bank, “Shear coefficients for thin-walled composite beams”, *Composite Structures*, Vol. **8**, 47–61, 1987.
 - 15 D. Gay, *Matériaux composites*, Hermès, Paris, 1987.
 - 16 E. Reissner, “A consistent treatment of transverse shear deformation in laminated anisotropic plates”, *AIAAJ*, Vol. **10**, N. 5, 716–718, 1972.
 - 17 D.R.J. Owen, and Z.H. Li, “A refined analysis of laminated plates by finite element displacement methods-I. Fundamentals and static analysis; II Vibration and stability”, *Comp. Struct.*, **26**, pp. 907–923, (1987).
 - 18 D.R.J. Owen and Z.H. Li, “Elasto-plastic numerical analysis of anisotropic laminated plates by a refined finite element model”. In *Computational Plasticity: Models Software and Applications*, R. Owen, E. Hinton and E. Oñate (Eds.) Pineridge Press, U.K., 749–775, (1987).
 - 19 J.M. Whitney, *Structural analysis of laminated anisotropic plates*, Technomic Publishing Company, 1987.
 - 20 D.R.J. Owen and Z.H. Li, “Elasto-plastic numerical analysis of anisotropic laminated plates by a refined finite element model”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **70**, pp. 349–365, (1988).
 - 21 A. Noor and W.S. Burton, “Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates”, *ASME, Applied Mechanics Review*, Vol. **42**, N. 1, 1–13, 1989.
 - 22 D. Engrand and J. Bordas, “Calcul des coques en matériaux multicouches et sandwiches par la méthode des éléments finis”, *La Recherche Aérospatiale*, N.2, 109–118, 1973.

- 23 G.A. Cohen, "Transverse shear stiffness of laminated anisotropic shells", *Comput Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **13**, 205–220, 1978.
- 24 D.R.J. Owen and J.A. Figueiras, "Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells", *Int. J.Num. Meth. Eng.*, Vol. **19**, 541–566, 1983.
- 25 A.K. Noor, W.S. Burton and J.M. Peters, "Assessment of computational models for multilayered composite cylinders", in *Analytical and Computational Models of Shells*, (Noor, Belytschko and Simo Eds), *ASME*, CED, Vol. **3**, 419–441, 1989.
- 26 D. Engrand, "Calcul des coques multicouches de révolution par la méthode des éléments finis", *ONERA*, Chatillon, TP N. 86, 12 pages, 1976.
- 27 S.C. Panda and R. Natarajan, "Finite element analysis of laminated shells of revolution", *Comput. Struct.*, Vol. **6**, 61–64, 1976.
- 28 A.K. Noor and J. Peters, "Analysis of laminated anisotropic shells of revolution", in *Finite element methods for plate and shell structures*, Vol. **2**, Formulations and algorithms, Pineridge Press, 179–212, 1986.
- 29 O.C. Zienkiewicz, J. Bauer, K. Morgan and E. Oñate, "A simple element for axisymmetric shells with shear deformation", *Int. J.Num. Meth. Eng.*, Vol. **11**, 1545–1558, 1977.