

# ANÁLISE DE UMA CLASSE DE PROBLEMAS DE CONTACTO COM ATRITO ENTRE DOIS CORPOS ELÁSTICOS

E.B. PIRES\*

e

P. PROVIDÊNCIA E COSTA\*\*

*\*Depto. de Engenharia Civil,  
Inst. Superior Técnico,  
Universidade Técnica de Lisboa,  
Lisboa, Portugal.*

*\*\*Faculdade de Ciências e Tecnologia,  
Universidade de Coimbra,  
Coimbra, Portugal.*

## SUMÁRIO

Este artigo trata do problema de contacto com atrito entre dois corpos em elasticidade infinitesimal. Introduzem-se primeiramente, nas zonas da fronteira dos dois corpos candidatas ao contacto, as condições linearizadas relativas às componentes normais do deslocamento e da tensão e a lei do atrito considerada. Seguidamente apresentam-se as formulações clássica e variacional (P.T.V.) do problema e referem-se resultados relativos à existência e unicidade de soluções. Por último, considera-se a aproximação do problema por elementos finitos, descrevem-se os algoritmos utilizados e apresentam-se alguns exemplos numéricos.

## SUMMARY

We consider, in this work, the contact problem with friction between two elastic bodies. First we introduce the linearized conditions for the normal components of displacement and stress and the law of friction assumed to hold at the candidate contact areas. Then we present the classical and variational formulations of the problem and discuss the questions of existence and uniqueness of solutions. Finally, we consider the finite element approximation of the problem, we describe the algorithms that were used and present some numerical examples.

Recibido: Febrero 1991

## ENUNCIADO DO PROBLEMA E SUA FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Sejam dois corpos elásticos lineares em  $\mathfrak{R}^2$ , ocupando, na sua configuração de referência, o domínio  $\Omega = (\Omega^I, \Omega^{II})$ . As fronteiras  $\Gamma^z, z = I, II$ , de cada um dos subdomínios  $\Omega^z$ , supõem-se suficientemente regulares e formadas por 3 partes disjuntas  $\Gamma_D^z, \Gamma_F^z$  e  $\Gamma_C^z$  verificando:

$$\overline{\Gamma_F^z \cup \Gamma_D^z \cup \Gamma_C^z} = \Gamma^z,$$

$$\Gamma_F^z \cap \Gamma_D^z \cap \Gamma_C^z = \phi, \quad z = I, II$$

Os deslocamentos  $\mathbf{u}^z = (u_1^z, u_2^z)$  estão prescritos em  $\Gamma_D^z$ , em cada zona  $\Gamma_F^z$  estão prescritas forças de superfície e  $\Gamma_C^z$  representa as partes das fronteiras dos dois corpos que poderão eventualmente entrar em contacto entre si por efeito da solitação exterior, isto é, as áreas candidatas ao contacto (Figura 1). As forças exteriores a que os dois corpos estão sujeitos consistem no par  $(\mathbf{b}, \mathbf{t}) = ((\mathbf{b}^I, \mathbf{t}^I), (\mathbf{b}^{II}, \mathbf{t}^{II}))$  onde  $\mathbf{b}^z = (b_1^z, b_2^z), z = I, II$ , é um campo de forças de massa e  $\mathbf{t}^z = (t_1^z, t_2^z), z = I, II$ , é um campo de forças de superfície.

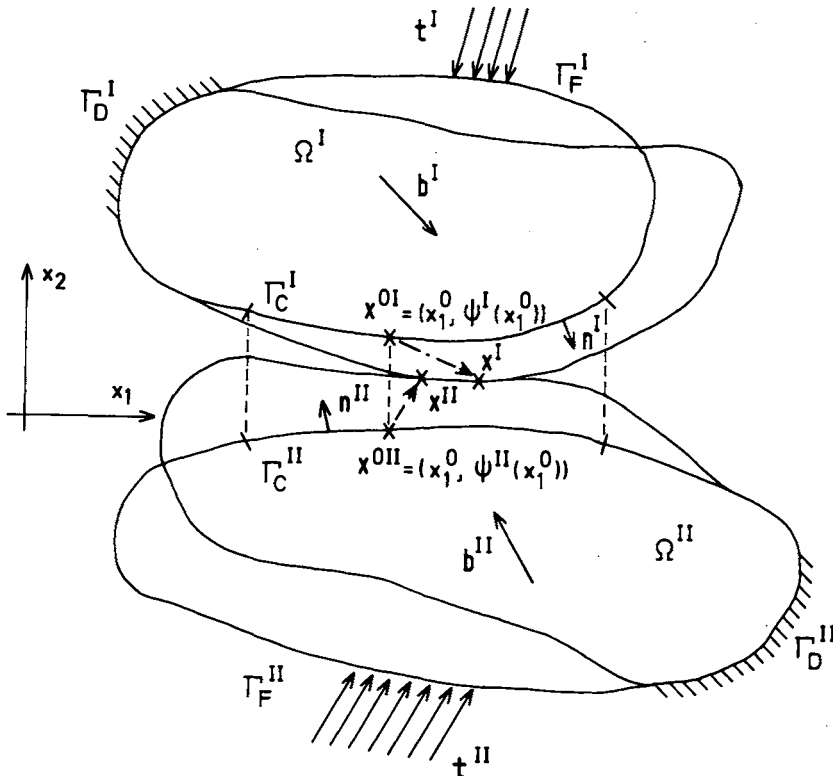


Figura 1. Dois corpos elásticos em contacto.

Supomos que os deslocamentos em  $\Gamma_D^z$  são nulos e que o contacto entre os dois corpos se realiza com atrito obedecendo a uma lei não linear e não local proposta por Oden e Pires<sup>1</sup>.

O problema do contacto com atrito entre dois corpos elásticos lineares em regime de pequenos deslocamentos consiste em achar o campo de deslocamentos  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^I, \mathbf{u}^{II})$  que satisfaz ao seguinte sistema de equações e inequações:

$$(E_{ijkl}^z u_{k,l}^z)_{,j} + b_i^z = 0 \text{ em } \Omega^z \quad (1)$$

$$u_i^z = 0 \text{ em } \Gamma_D^z \quad (2)$$

$$E_{ijkl}^z u_{k,l}^z n_j^z = t_i^z \text{ em } \Gamma_F^z \quad (3)$$

$$u_n^R \leq s_n^R, \sigma_n = \sigma_n^z(\mathbf{u}^z) = \sigma_{ij}^z(\mathbf{u}^z) n_i^z n_j^z \leq 0,$$

$$\sigma_n(u_n^R - s_n^R) = 0 \text{ em } \Gamma_C^z \quad (4)$$

$$\sigma_T^z = -\nu S_p(\sigma_n^z(\mathbf{u}^z)) \phi'_\epsilon(|\mathbf{u}_T^R|) \frac{\mathbf{u}_T^R}{|\mathbf{u}_T^R|} \text{ em } \Gamma_C^z \quad (5)$$

Em (1) e (3)  $E_{ijkl}^z$  são os coeficientes elásticos dos materiais com as propriedades habituais de simetria e elipticidade, em (3) e (4)  $\mathbf{n}^z$  representa o versor da normal exterior à fronteira  $\Gamma^z$ , (4) representa a condição de contacto unilateral e (5) a lei de atrito considerada. A primeira inequação em (4), isto é  $u_n^R \leq s_n^R$ , é uma condição linearizada de não-interpenetração e supõe a existência duma representação explícita para as superfícies de contacto<sup>2</sup>. Significa que para dois pontos, um em cada uma das fronteiras  $\Gamma_C^z$  dos dois corpos, situados sobre a mesma vertical (paralela à direcção  $x_2$ ), a componente do deslocamento relativo segundo uma direcção normal às superfícies de contacto não pode ser maior que a projecção da distância entre as duas superfícies segundo a mesma direcção. Se a configuração de referência dos dois corpos for descrita pelas coordenadas de Lagrange  $\mathbf{x}^{0z} = (x_1^{0z}, x_2^{0z})$ ,  $z = I, II$ , supõe-se então que para os pontos de coordenadas  $\mathbf{x}^{0z} \in \Gamma_C^z$

$$x_2^{0z} = \psi^I(x_1^{0z}), \quad x_1^{0z} \in I, \quad z = I, II$$

para um intervalo aberto  $I \subset \mathfrak{R}$ , independentemente de  $\Omega^I$  e  $\Omega^{II}$  e de modo que  $\Gamma_C^I$  está acima de  $\Gamma_C^{II}$ , isto é que

$$\psi^I(x_1^{0I}) \geq \psi^{II}(x_1^{0II})$$

O intervalo  $I$  pode ser definido como o troço do eixo dos  $x_1$  que contem as projecções, paralelamente à direcção  $x_2$ , de  $\Gamma_C^I$  e  $\Gamma_C^{II}$  sobre esse eixo. Passaremos a designá-lo por  $\Gamma_C$ , isto é,  $\Gamma_C \equiv I$ . Então ao considerarmos um ponto de abscissa  $x_1^0 \in \Gamma_C$  estaremos a referir-nos aos pontos  $(x_1^0, \psi^I(x_1^0)) \in \Gamma_C^I$  e  $(x_1^0, \psi^{II}(x_1^0)) \in \Gamma_C^{II}$  (Figura 1). Deste modo

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^R &= \mathbf{u}^I - \mathbf{u}^{II} \\ u_n^R &= \mathbf{u}^R \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{n} &= \mathbf{n}^I = -\mathbf{n}^{II} \\ s_n^R &= -(\psi^I - \psi^{II})n_2 \end{aligned}$$

Quanto à condição (5),  $\nu$  é o coeficiente de atrito,  $S_\rho$  é um operador de regularização para calcular uma medida ponderada da tensão normal  $\sigma_n(\mathbf{u})$  numa vizinhança de raio  $\rho$  de pontos na zona em contacto,  $\phi_\epsilon$  é uma função real contínua, monótona dependente dum parâmetro  $\epsilon > 0$  tal que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi'_\epsilon(r) = 1, \quad \forall r > 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \phi'_\epsilon(r) = 1, \quad \forall \epsilon > 0$$

e

$$\mathbf{u}_T^R = \mathbf{u}_T^I - \mathbf{u}_T^{II}, \quad \mathbf{u}_T^z = \mathbf{u}^z - u_n^z \mathbf{n}^z$$

O factor  $S_\rho(\sigma_n(\mathbf{u}))$ , que representa efeitos não-locais na superfície de contacto<sup>3</sup> é tipicamente da forma

$$S_\rho(\sigma_n(\mathbf{u}(\mathbf{x}))) = \int_{\Gamma_C} \omega_\rho(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)(-\sigma_n(\mathbf{u}(\mathbf{x}))) d\mathbf{y}$$

onde  $\omega_\rho$  é uma função regular positiva, simétrica relativamente à origem e com suporte numa bola de raio  $\rho$ , como por exemplo

$$\omega_\rho(r) = \begin{cases} c \exp(\rho^2/(r^2 - \rho^2)) & , r \leq \rho \\ 0 & , r \geq \rho \end{cases}$$

( $c$  = constante escolhida de forma a normalizar o integral de  $\omega_\rho$ ). Finalmente a função  $\phi_\epsilon$  tem por objectivo a consideração do comportamento elasto-plástico das junções que se formam no contacto tendo-se escolhido

$$\phi_\epsilon(r) = \begin{cases} r - \epsilon/2 & \text{se } r > \epsilon \\ r^2/2\epsilon & \text{se } r \leq \epsilon \end{cases}$$

em que  $\epsilon^{-1}$  é uma medida da rigidez dessas junções.

É possível mostrar<sup>4</sup> que o sistema de equações de equilíbrio, condições de fronteira e lei de atrito pode ser caracterizado pelo seguinte princípio variacional:

Determinar um campo de deslocamentos  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^I, \mathbf{u}^{II})$  num subconjunto  $K$  do espaço  $V$  de deslocamentos admissíveis tal que:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + j_{\rho, \epsilon}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j_{\rho, \epsilon}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &\geq f(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \\ \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}^I, \mathbf{v}^{II}) &\in K \end{aligned} \quad (6)$$

Um vector  $\mathbf{v}$  pertencerá a  $V$  se:

1.  $\mathbf{v}^z = \mathbf{0}$  em  $\Gamma_D^z, z = I, II$

2.  $\mathbf{v}^z$  produz energia de deformação finita, no sentido da norma de  $\mathbf{v}^z$

$$\|\mathbf{v}^z\|_{V^z} = \left( \int_{\Omega^z} v_{i,j}^z v_{i,j}^z dx \right)^{1/2} \text{ ser finita}$$

$$\begin{aligned} K &= \text{subconjunto de } V \text{ representando o} \\ &\text{constrangimento unilateral} \\ &= \left\{ (\mathbf{v}^I, \mathbf{v}^{II}) \in (V^I, V^{II}) : \mathbf{u}^R \cdot \mathbf{n} \leq s_n^R \text{ em } \Gamma_C \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \text{trabalho virtual das tensões } \sigma_{ij}^z(\mathbf{u}^z) = E_{ijkl}^z u_{k,l}^z \\ &\text{nas deformações } \epsilon_{ij}^z(\mathbf{v}^z) = (v_{i,j}^z + v_{j,i}^z)/2 \text{ (} dx = dx_1 dx_2 \text{)} \\ &= \sum_{z=I}^{II} \int_{\Omega^z} \sigma_{ij}^z(\mathbf{u}^z) \epsilon_{ij}^z(\mathbf{v}^z) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_{\rho,\epsilon}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \text{trabalho virtual das forças de atrito} \\ &= \int_{\Gamma_C} \nu S_\rho(\sigma_n) \phi_\epsilon(|\mathbf{v}_T^R|) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}) &= \text{trabalho virtual das forças exteriores} \\ &= \sum_{z=I}^{II} \left( \int_{\Omega^z} \mathbf{b}^z \cdot \mathbf{v}^z dx + \int_{\Gamma_F^z} \mathbf{t}^z \cdot \mathbf{v}^z ds \right) \end{aligned}$$

Relativamente às questões de existência e unicidade de soluções para o problema geral de contacto com atrito entre dois corpos elásticos lineares caracterizado pela inequação variacional não linear (6) o método básico de abordagem foi sugerido por Duvaut<sup>5</sup> utilizando um problema auxiliar, isto é, um caso especial de (6) e faz uso de argumentos empregando um teorema de ponto fixo. Esta abordagem foi estendida ao problema de Signorini com uma lei de atrito idêntica à usada neste trabalho por Oden e Pires<sup>3</sup>. É possível mostrar<sup>3</sup> que existe pelo menos uma solução para a inequação variacional (6) para qualquer  $\nu \geq 0, \rho > 0$  e  $\epsilon > 0$ . Se  $\nu$  for suficientemente pequeno a solução é única.

## APROXIMAÇÕES POR ELEMENTOS FINITOS

O objectivo do presente trabalho é descrever métodos dos elementos finitos para resolver a inequação variacional altamente não linear que caracteriza o problema de contacto com atrito (6).

Deste modo introduzimos o seguinte problema discreto, como uma aproximação por elementos finitos de (6).

Achar  $\mathbf{u}_h = (\mathbf{u}_h^I, \mathbf{u}_h^{II}) \in V_h$  tal que

$$\begin{aligned} &a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) + j_{\rho,\epsilon}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - j_{\rho,\epsilon}(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + \\ &+ \delta^{-1} \int_{\Gamma_{Ch}} \left( \mathbf{u}_h^R \cdot \mathbf{n} - s_{nh}^R \right)^+ \left[ \left( \mathbf{v}_h^R - \mathbf{u}_h^R \right) \cdot \mathbf{n} \right] ds \geq \end{aligned}$$

$$\geq f(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \quad (7)$$

Em (7)  $V_h$  é um subespaço de dimensão finita de  $V$  obtido utilizando elementos de 4 nós ( $Q_1$ ) ou elementos de 9 nós ( $Q_2$ ),

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h &= (V_h^I, V_h^{II}), \\ V_h^z &= \{\mathbf{v}_h^z : v_{hi}^z |_{\bar{\Omega}^z} \in Q_r(\bar{\Omega}_e^z), \\ &\quad \bar{\Omega}^z = \cup \Omega_e^z, 1 \leq e \leq E^z, i = 1, 2, r = 1, 2\} \end{aligned}$$

e tendo o constrangimento unilateral sido relaxado através da consideração duma penalização exterior:

$$\gamma^{-1} \int_{\Gamma_{Ch}} (\mathbf{u}_h^R \cdot \mathbf{n} - s_{nh}^R)^+ [(\mathbf{v}_h^R - \mathbf{u}_h^R) \cdot \mathbf{n}] ds,$$

denotando  $(\cdot)^+$  a parte positiva de  $(\cdot)$ .

Note-se finalmente que (7) pode ser substituída pela equação variacional não linear aproximada

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + I \left[ \nu S_\rho(\sigma_n(\mathbf{u}_h)) \phi'_\epsilon(|\mathbf{u}_{hT}^R|) \frac{\mathbf{u}_{hT}^R}{|\mathbf{u}_{hT}^R|} \mathbf{v}_{hT}^R \right] + \\ + \delta^{-1} I \left[ (u_{hn}^R - s_{nh}^R)^+ v_{hn}^R \right] = f(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \quad (8) \end{aligned}$$

onde  $I[\cdot]$  é uma regra de quadratura numérica para calcular o integral  $\int_{\Gamma_{Ch}} [\cdot] ds$  na superfície de contacto aproximada  $\Gamma_{Ch}$ . Assim se  $g_h \in C^0(\Gamma_{Ch})$

$$\int_{\Gamma_{Ch}} g_h ds \simeq I(g_h) = \sum_{e=1}^{E'} \sum_{j=1}^N \omega_j^e g_h(\xi_j^e)$$

onde  $E'$  é o número de elementos em  $\Gamma_{Ch}$ ,  $N$  é a ordem da regra de quadratura,  $\omega_j^e$  são os pesos e  $\xi_j^e$  as coordenadas dos pontos na regra de quadratura.

O comportamento da aproximação (7) depende dos parâmetros  $\nu, \epsilon, \rho, \delta$ , e  $h$ .

## ALGORITMO E EXEMPLOS NUMÉRICOS

O algoritmo utilizado para a resolução da aproximação por elementos finitos do problema de contacto com atrito entre dois corpos elásticos (8) baseia-se no resultado relativo à existência de soluções para o problema contínuo, seguindo-se os passos utilizados na demonstração do correspondente teorema e que reflectem a utilização do argumento de ponto fixo<sup>4,6</sup>.

Descrever-se-ão em seguida alguns exemplos numéricos executados com o algoritmo acima indicado. O primeiro problema tratado consiste numa placa simplesmente

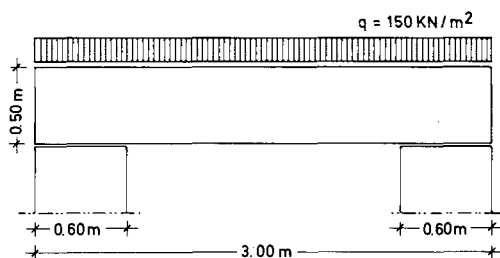
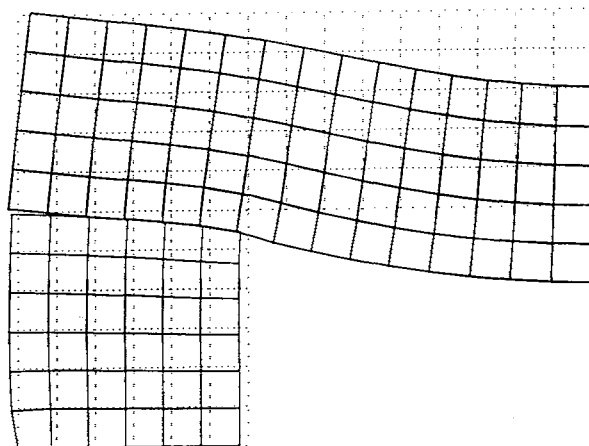


Figura 2. Placa sobre apoios.

apoiada, apresentando tanto a placa como os apoios, um comportamento elástico linear (Figura 2).

A placa está solicitada na sua face superior por uma carga uniformemente distribuída e apresenta um módulo de elasticidade  $E = 1000 \text{ kN/m}^2$  e um coeficiente de Poisson  $\mu = 0.3$ . Dada a simetria do problema, discretizou-se unicamente a metade esquerda da placa, tendo-se utilizado na placa uma malha de elementos finitos com 75 elementos bilineares de 4 nós e no apoio uma malha com 36 elementos do mesmo tipo.

Figura 3. Deformada da placa sobre apoios deformáveis para  $\nu = 0.3$ .

Apresenta-se na Figura 3 a deformada respectiva para um coeficiente de atrito de  $\nu = 0.3$  e nas Figuras 4, 5, 6 e 7 apresentam-se diagramas de tensões tangenciais, tensões normais e deslocamentos tangenciais relativos na superfície de contacto bem como deslocamentos verticais dos pontos da viga sobre o apoio. Nestes diagramas apresentam-se também resultados relativos às situações em que o apoio é rígido ( $E_{\text{apoiado}} \rightarrow \infty$ ) e não existe atrito ( $\nu = 0$ ).

As principais conclusões a tirar destes diagramas são:

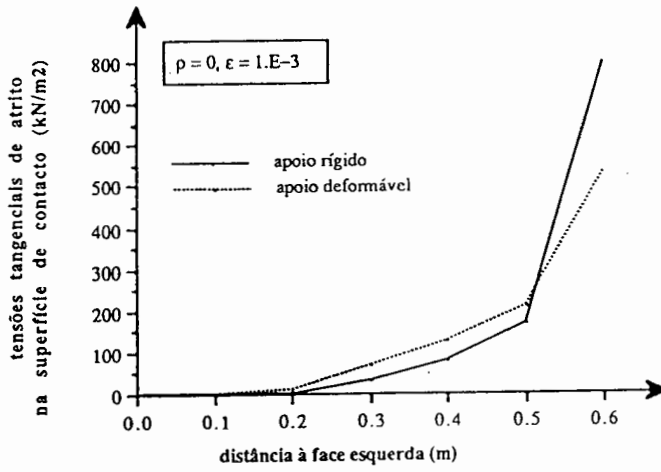


Figura 4. Tensões tangenciais na superfície de contacto para  $\nu = 0.3$ .

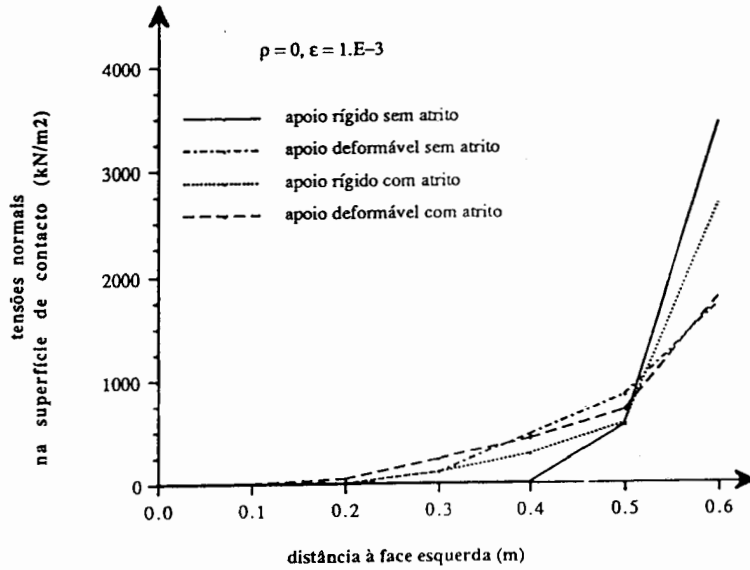


Figura 5. Tensões normais na superfície de contacto.

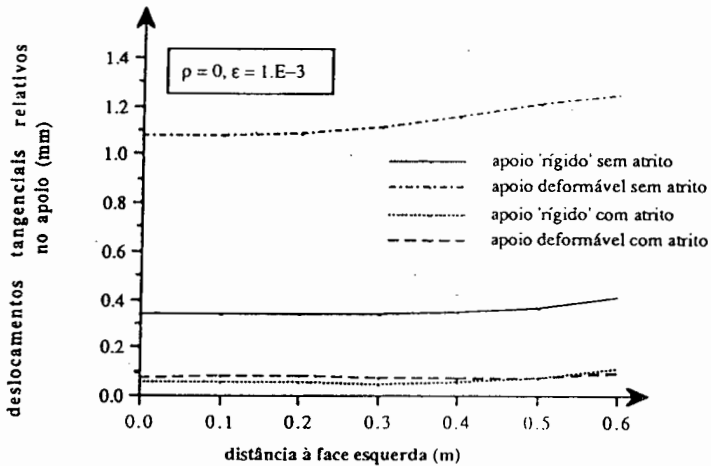


Figura 6. Deslocamentos tangenciais relativos na superfície de contacto.

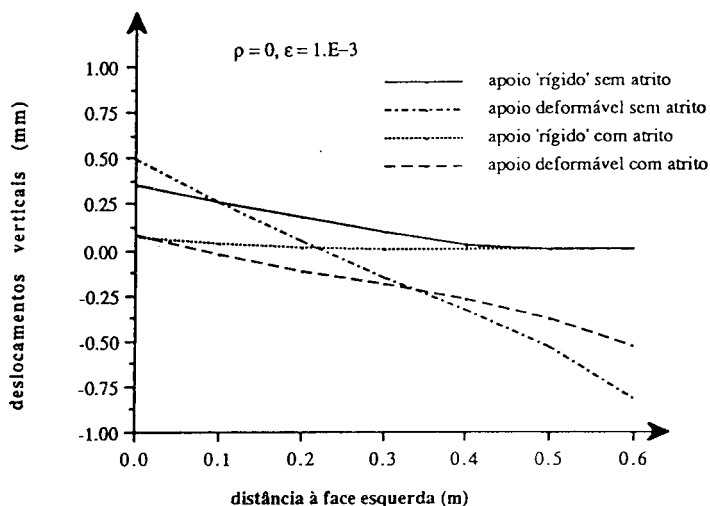


Figura 7. Deslocamentos verticais dos pontos da viga sobre o apoio.

- a amplitude das tensões no contacto diminui com a deformabilidade dos apoios,
- o atrito diminui a amplitude dos deslocamentos (tangenciais e verticais), ao mesmo tempo que aumenta a área da região de contacto efectivo, provocando a diminuição do valor absoluto das tensões normais na zona de contacto.

Os resultados obtidos são importantes pois permitem ter um conhecimento mais aproximado da distribuição das reacções nos apoios. Com efeito, as condições de unilateralidade e atrito utilizadas no modelo matemático conduzem a uma avaliação mais correcta destes esforços e, conseqüentemente, da área de contacto efectiva.

Note-se que, para o caso extremo de inexistência de atrito nos apoios ( $\nu = 0$ ) e destes serem "rígidos", a área efectiva de contacto tem um valor de 25% da área de contacto hipotética, enquanto que a tensão normal de contacto máxima é 9.1 vezes maior do que seria se fosse calculada admitindo-se uma distribuição uniforme e 4.6 vezes maior que a tensão máxima que se obtém supondo-se uma distribuição triangular. No Quadro I indicam-se estes resultados bem como os correspondentes às outras situações estudadas.

	area efect. % area total	pres. max pres.unif.	pres. max pres. trian.	d (cm)
apoio "rígido" sem atrito	25	9.1	4.6	2.4
apoio deformável s/ atrito	58	4.5	2.3	9.3
apoio "rígido" com atrito	58	7.1	3.5	6.2
apoio deformável c/ atrito	75	4.7	2.3	10.4

Quadro I.

Outro resultado interessante é relativo à distância  $d$  entre a resultante das tensões normais de contacto no apoio e a face interior do mesmo, distância essa que permite calcular o vão efectivo da viga (utilizado em dimensionamento). Estes valores surgem na última coluna do quadro, sendo de realçar que são todos muito pequenos quando comparados com o valor  $(1/3) 60 = 20 \text{ cm}$ , sugerido no REBAP<sup>7</sup>.

O segundo caso considerado diz respeito ao problema duma viga simplesmente apoiada sobre a qual se colocou uma segunda viga idêntica estando o conjunto solicitado por uma carga uniformemente distribuída (Figura 8).

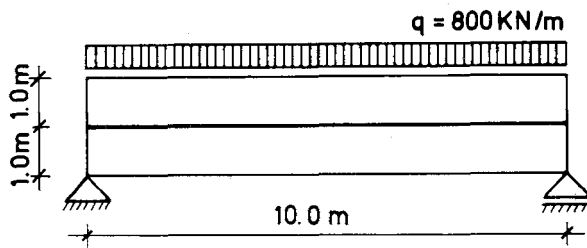


Figura 8. Placa sobre placa simplesmente apoiada.

Ambas as vigas têm módulo de elasticidade  $E = 100 \text{ GN/m}^2$  e coeficiente de Poisson  $\mu = 0.3$ . Tal como no exemplo anterior utilizou-se o elemento bilinear de 4 nós na discretização do sistema tendo-se também tirado partido da simetria do problema.

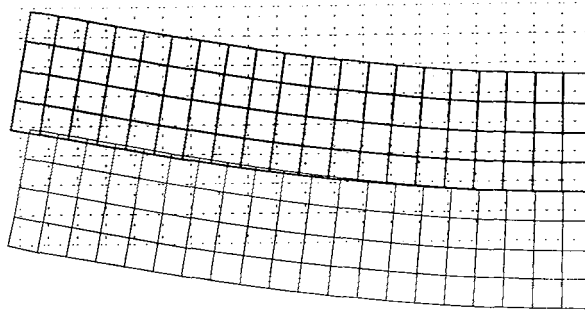


Figura 9. Deformada do sistema de placas sobrepostas para  $\nu = 0$ .

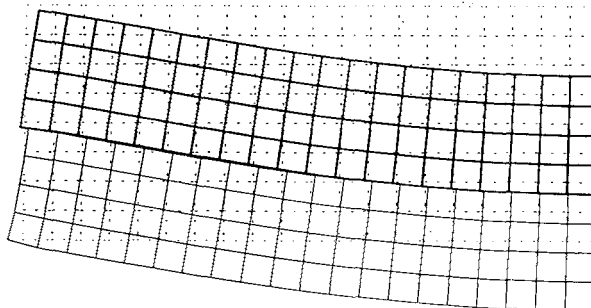


Figura 10. Deformada do sistema de placas sobrepostas para  $\nu = 1.3$ .

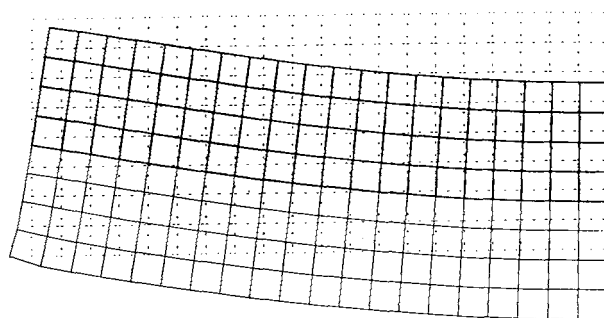


Figura 11. Deformada do sistema de placas sobrepostas para  $\nu = 100$ .

Apresentam-se nas Figuras 9, 10 e 11 as deformadas do sistema para  $\nu = 0$  (flexão independente das 2 vigas),  $\nu = 1.3$  e  $\nu = 100$  (deslocamento relativo entre as 2 vigas praticamente nulo correspondente à situação de se estar perante uma única viga de altura igual a 2 m).

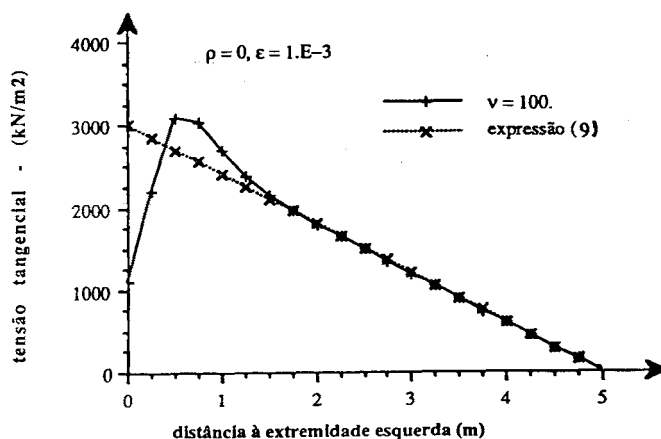


Figura 12. Esforço tangencial devido ao atrito na interface de contacto.

Na Figura 12 apresenta-se o andamento do esforço tangencial de atrito que surge entre as 2 vigas para  $\nu = 100$ . No mesmo gráfico aparece representada a equação

$$\sigma_T = \frac{3V}{22h} \quad (9)$$

em que  $V$  é o esforço transversal e  $h$  a altura de cada viga. O afastamento entre as duas situações junto do apoio é um efeito local devido à presença deste.

Nas Figuras 13 e 14 apresentam-se respectivamente os deslocamentos tangenciais relativos e os deslocamentos verticais sofridos pelas superfícies em contacto para os 3 coeficientes de atrito considerados.

O último exemplo considerado trata da indentação dum pilar num terreno com comportamento elástico (Figura 15).

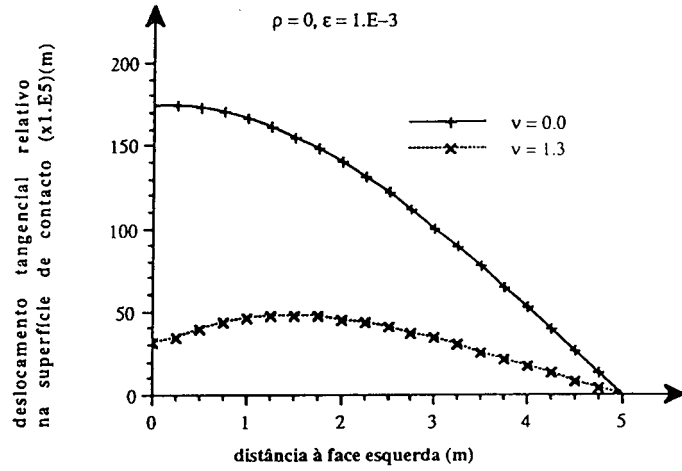


Figura 13. Deslocamento tangencial relativo.

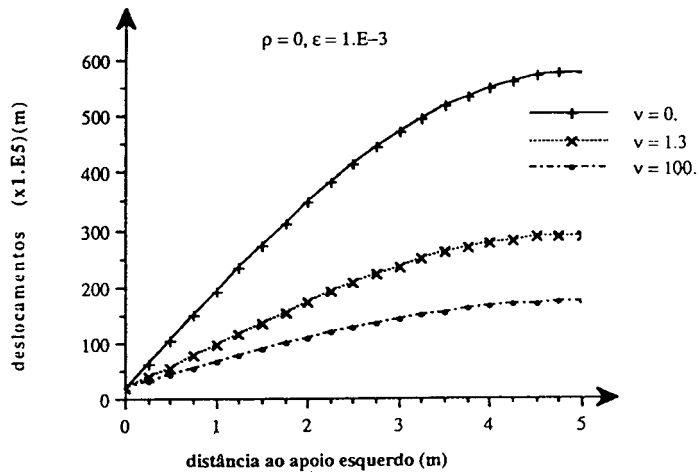


Figura 14. Deslocamento vertical dos pontos situados sobre a interface de contacto.

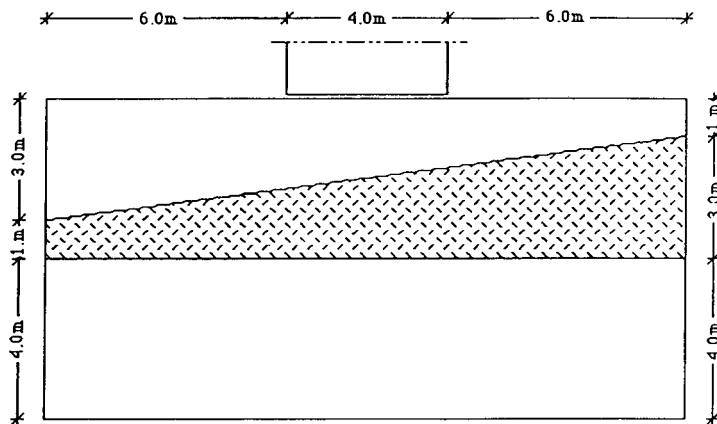


Figura 15. Indentação de um pilar num terreno.

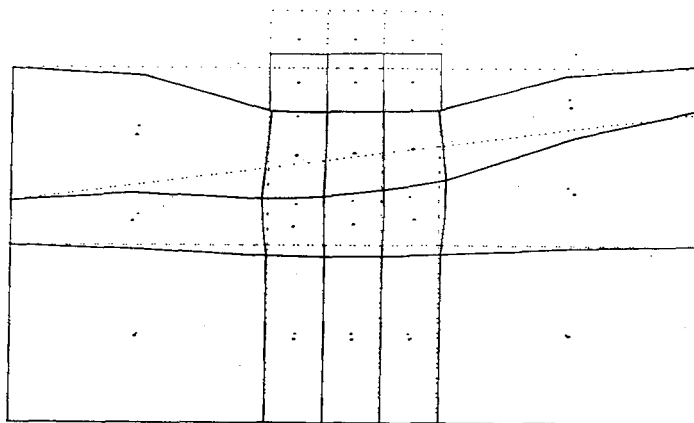


Figura 16. Deformada de indentação de um pilar num terreno.

Neste exemplo utilizou-se, para o terreno, uma malha com 15 elementos biquadráticos de 9 nós tal como mostra a Figura 16.

Por forma a indentar o pilar no terreno, forçou-se o seu topo a um deslocamento (afundamento + rotação) definido por

$$y = 0.10 + 0.001x$$

isto é, a extremidade esquerda do topo do pilar desce 0.1 m e a direita 0.096 m.

O terreno possui 3 camadas com diferentes características elásticas: a camada superior e a inferior têm um módulo de elasticidade  $E = 2.E + 6 \text{ kN/m}^2$  e um coeficiente de Poisson  $\mu = 0.3$ , enquanto que a camada intermédia, mais rígida, tem um módulo de elasticidade  $E = 5E + 6 \text{ kN/m}^2$  e um coeficiente de Poisson  $\mu = 0.3$ .

O pilar tem um módulo de elasticidade  $E = 1E + 8 \text{ kN/m}^2$  e um coeficiente de Poisson  $\mu = 0.3$ , estando representada na Figura 16 a malha deformada (deslocamentos aumentados 10 vezes) para uma situação em que os parâmetros relativos à lei de atrito têm os seguintes valores:

$$\rho = 0.1, \quad \epsilon = 1E - 4 \quad e \quad \nu = 0.3$$

Nas Figuras 17 e 18 estão representadas as variações da tensão normal e da tensão tangencial para vários valores do parâmetro  $\rho$ . À medida que  $\rho$  aumenta verifica-se um decréscimo no valor das tensões máximas.

Nas Figuras 19 e 20 apresentam-se as tensões tangenciais e os deslocamentos tangenciais relativos na interface de contacto para diferentes valores de  $\epsilon$ . À medida que  $\epsilon$  cresce o valor de  $|\sigma_T|$  decresce e consequentemente a região onde  $|\sigma_T|$  atinge o seu máximo é mais pequena.

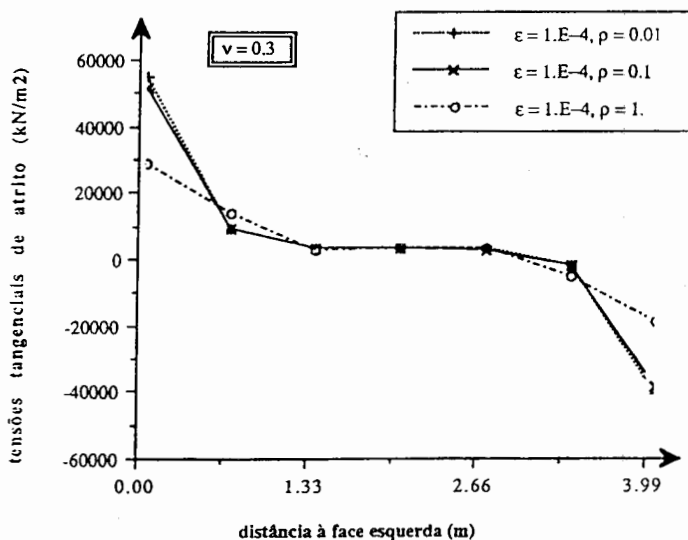


Figura 17. Variação de tensão tangencial na interface de contacto.

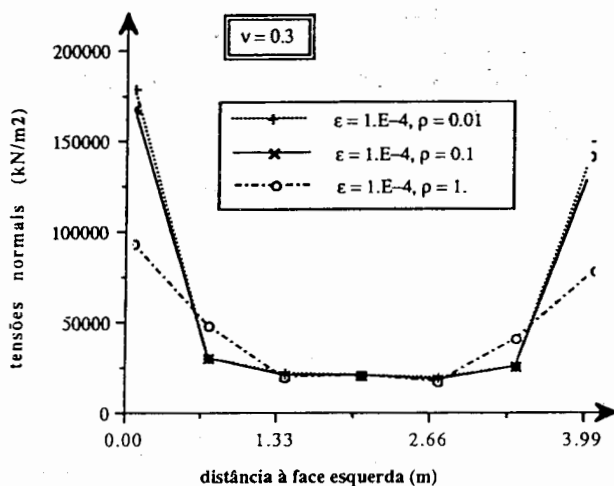


Figura 18. Variação de tensão normal na interface de contacto.

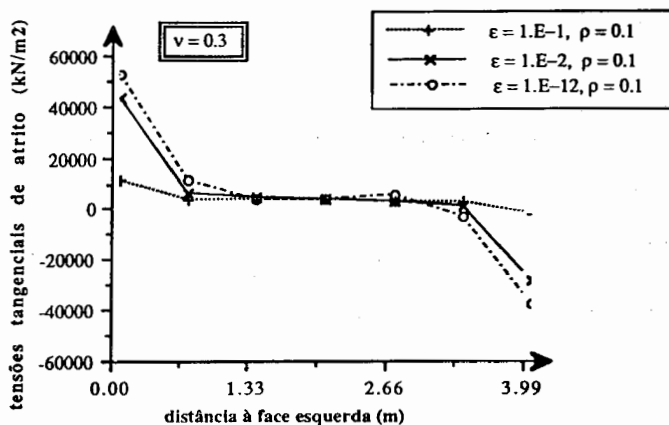


Figura 19. Variação de tensão tangencial de atrito com  $\epsilon$  na interface de contacto.

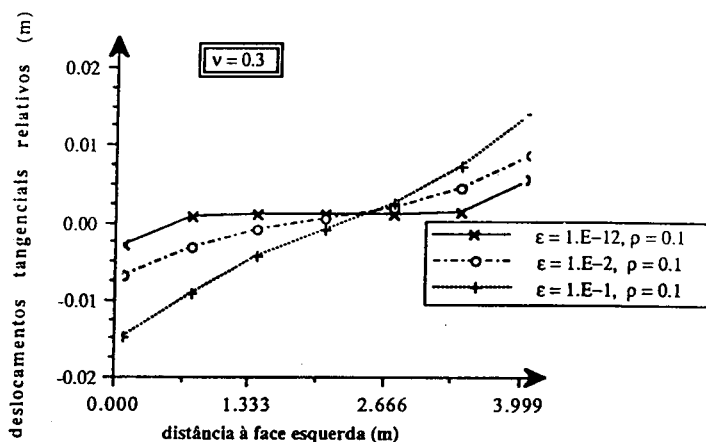


Figura 20. Variação dos deslocamentos tangenciais relativos com  $\epsilon$  na interface de contacto.

### AGRADECIMENTOS

Agradece-se o apoio da JNICT através do projecto de investigação nº 87561 e do CMEST (INIC).

### REFERÊNCIAS

1. J.T. Oden e E.B. Pires, "Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity", *J. Appl. Mech.*, Vol. 50(1), pp. 67-76, (1983).
2. P. Boeiri, F. Gastaldi e D. Kinderlehrer, "Existence, uniqueness and regularity results for the two bodies contact problem", *IAN, CNR*, Vol. 439, (1984).
3. J.T. Oden e E.B. Pires em: J.T. Oden e G.F. Carey eds., "*Finite Elements: Special Problems in Solid Mechanics*", Vol. V, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1983).
4. P. Providência e Costa, "*Análise Numérica de um Problema de Contacto com Atrito entre dois Corpos Elásticos*", Tese de Mestrado, Instituto Superior Técnico, (1989).
5. G. Duvaut, "Problèmes mathématiques de la mécanique - Équilibre d'un solide élastique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb", *C.R. Acad. Sc., Ser.A*, Vol. 290, pp. 263-265, (1980).
6. E.B. Pires, "*Contact Problems in Elastostatics with Nonclassical Friction Laws*", Ph.D. Dissertation, The University of Texas at Austin, (1982).
7. REBAP, "Regulamento de Betão Armado e Pré-Esforçado", Imprensa Nacional, Casa da Moeda, (1983).