

ELEMENTOS INFINITOS CON CAIDA $1/r^{1/n}$

LUIS GAVETE
ANTONIO RUIZ
y
CARLOS MANZANO

*Dpto. de Matemática Aplicada y Métodos Informáticos,
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas,
Universidad Politécnica de Madrid,
c/Ríos Rosas 21,
28003 Madrid.*

RESUMEN

Existen numerosos campos de la Matemática aplicada, en los que frecuentemente se plantea resolver un problema de ecuaciones en derivadas parciales elípticas en un medio infinito, en una o varias direcciones. Para analizar los problemas que se plantean en medios infinitos de forma eficiente utilizando el método de los elementos finitos se han desarrollado algunos elementos especiales que se denominan "elementos infinitos".

La modelización de contornos artificiales se realiza con unos nuevos elementos infinitos de aproximación inversa. Estos elementos infinitos permiten tratar cualquier tipo de caída de la forma $1/r^{1/n}$, $n \in N^*$ con soporte de tres puntos de los que uno se va al ∞ .

Los resultados numéricos obtenidos aproximan con mucha exactitud la solución exacta. Los parámetros que definen los elementos se varían sistemáticamente para establecer unos criterios de diseño.

SUMMARY

A difficulty quite often encountered in the finite element analysis of some types of problems is dealing with an unbounded exterior domain. Such problems can be analysed efficiently by using a combination of finite and infinite elements to discretize the domain of analysis.

Finite element analysis of many problems, require an effectively infinite domain be modelled by an element mesh of finite extent. Suchs problems can be analysed efficiently by using a combination of finite and infinite inverse elements.

An inverse approach that does not require any special quadrature formula to accomodate an infinite domain of integration, has been developed for $1/r^{1/n}$ decay, $n \in N^*$ with a support of three points.

A satisfactory agreement is found between the numerical results and the exact solution. The parameters influencing infinite elements are systematically varied to establish a numerical modelling criterion for the most effective use of this approach.

Recibido: Julio 1988

INTRODUCCION

Existen numerosos campos de la matemática aplicada, en los que frecuentemente se plantea resolver un problema de ecuaciones en derivadas parciales elípticas en un medio infinito, en una o varias direcciones. Para analizar los problemas que se plantean en medios infinitos de forma eficiente utilizando el método de los elementos finitos, se han desarrollado algunos elementos especiales que se denominan "elementos infinitos".

Los elementos infinitos, para ecuaciones elípticas, se pueden clasificar, extendiendo la denominación de Curnier¹ en:

- a) Aproximación directa: Esta se basa, partiendo de un elemento isoparamétrico finito, en extender el dominio de las coordenadas naturales fuera del elemento hacia el infinito, en la dirección que corresponda; para ello se mantienen las funciones de base standard, para la geometría del elemento y se alteran las funciones de base de aproximación de la función.
- b) Aproximación inversa: Partiendo igual que antes de un elemento isoparamétrico finito standard, se alteran las funciones de base de la transformación de coordenadas de modo que se envíen los nodos de un lado del elemento al infinito, sin embargo las funciones de base de la aproximación de la función no se alteran.

Entre los autores que siguen la aproximación directa cabe citar a Bettess² que utiliza un método exponencial; Chow y Smith³, que apoyándose en la formulación anterior de P. Bettess, desarrollan elementos para el análisis de casos estáticos y dinámicos. También cabe citar el trabajo de F. Medina⁴ sobre elementos finitos axialmente simétricos.

El mismo autor P. Bettess, desarrolla un método más simple y general en [5].

Dentro de estos métodos directos hay que citar también el artículo de Lynn⁵ que presenta un procedimiento directo para el desarrollo de elementos infinitos con unas funciones de caída del tipo $1/r^n$.

En cuanto a los autores que utilizan la aproximación inversa hay que citar a Beer y Meek⁷; Zienkiewicz, Emson y Bettess⁸, Prabhat Kumar⁹; Sergio Pissanetzky¹⁰ que discute una fórmula para la cuadratura numérica de soluciones infinitas.

Por otra parte Curnier¹ ha propuesto un procedimiento simple para crear un elemento infinito estático a partir de un elemento finito isoparamétrico, utilizando las dos aproximaciones directas e inversa, y probando que las dos aproximaciones presentadas por él son equivalentes siempre que se apliquen de modo consistente a un elemento isoparamétrico lineal.

En los programas de ordenador que se han desarrollado por diversos autores, diremos como norma más general que la aproximación directa requiere una fórmula de cuadratura especial para llevar a cabo la integración en el dominio infinito, lo que origina que sea más sencilla de programar la aproximación inversa.

En este artículo se emplea la aproximación inversa para desarrollar unos elementos infinitos con caída $1/\sqrt{r}$. Dichos elementos son más generales que los empleados hasta el momento presente y se pueden aplicar para la solución de una mayor variedad de ecuaciones diferenciales.

UN ELEMENTO INFINITO INVERSO CON CAIDA $1/\sqrt[n]{r}$, EN UNA DIMENSIÓN

Consideremos un elemento finito cuadrático en $\Omega \subset R$, con el tercer nodo en el infinito y definamos como sigue una aplicación de un dominio finito ($-1 \leq \xi \leq 1$), en uno semiinfinito ($x_1 \leq x < \infty$).

$$x = M_1(\xi)x_1 + M_2(\xi)x_2 \quad (1)$$

$$M_1(\xi) = \frac{2^n}{2^n - 1} \left(1 - \frac{1}{(1 - \xi)^n} \right) \quad (2)$$

$$M_2(\xi) = \frac{1}{2^n - 1} \left(\frac{2^n}{(1 - \xi)^n} - 1 \right) \quad (3)$$

Dicha aplicación ha sido representada en la Figura 1.

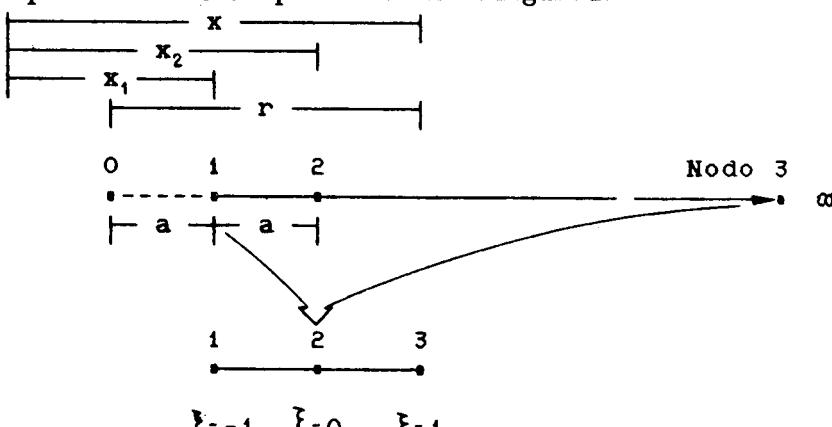


Figura 1. Elemento finito unidimensional. Aplicación inversa.

Si consideramos el caso $n = 1$ las fórmulas (2) y (3) coinciden con las utilizadas por Zienkiewicz, Emson y Bettess⁸, Kumar⁹ y Curnier¹.

En la aplicación anteriormente definida, los tres puntos que corresponden a valores enteros de ξ , se definen como sigue:

$$\xi = +1 \rightarrow x = x_3 = \infty$$

$$\xi = 0 \rightarrow x = x_2$$

$$\xi = -1 \rightarrow x = x_1, \text{ si queremos obtener despejando en (1) } \xi = f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right) \text{ se tendrá } x_2 = 2^n x_1$$

Esta última expresión fija la posición del polo en $x = 0$ (punto en el que la función a aproximar vale ∞). Si consideramos el caso de la Figura 1, con el polo en $x_0 \neq 0$ la expresión será:

$$x_2 - x_1 = (2^n - 1)(x_1 - x_0) \quad (4)$$

La función a aproximar ϕ , se interpola utilizando las funciones de forma estandar. Por ejemplo si el elemento es isoparamétrico, tenemos:

$$\phi = \frac{1}{2}\xi(\xi-1)\phi_1 + (1-\xi^2)\phi_2 + \frac{1}{2}\xi(1+\xi)\phi_3 \quad (5)$$

y resolviendo (1) para ξ :

$$\xi = 1 - \frac{2^n \sqrt[n]{x_1}}{n \sqrt[n]{x}} \quad (6)$$

siendo x la distancia al polo (ver Figura 1).

Sustituyendo (6) en (5), podemos calcular ϕ en función de x_1 , como sigue:

$$\phi = \beta_0 + \frac{\beta_1}{x^{1/n}} + \frac{\beta_2}{x^{2/n}} \quad (7)$$

siendo β_0, β_1 y β_2 constantes.

Si el elemento es superparamétrico tenemos:

$$\phi = \frac{1}{2}(1-\xi)\phi_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)\phi_3 \quad (8)$$

y operando como antes, tenemos en este caso:

$$\phi = \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{x^{(1/n)}} \quad (9)$$

En ambos casos cuando $x \rightarrow \infty$, ϕ se aproxima al valor ϕ_3 .

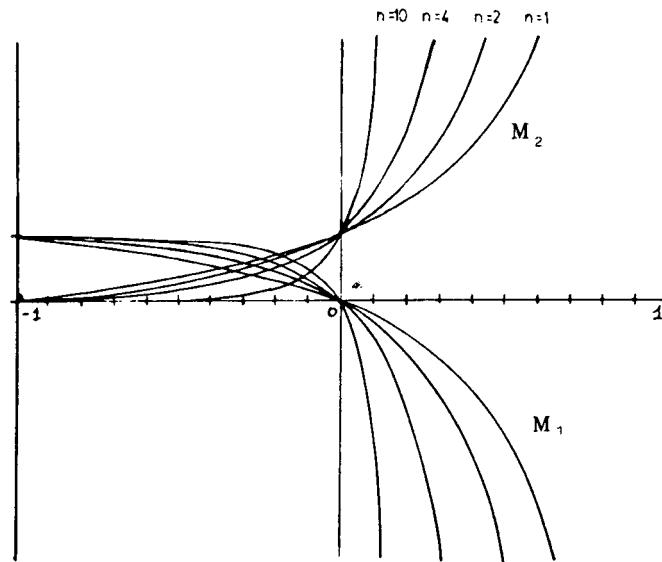


Figura 2. Representación geométrica de las funciones de aplicación.

Las funciones de la aplicación anterior (2) y (3) se han representado en la Figura 2, para distintos valores de n

ELEMENTOS INFINITOS INVERSOS CON CAIDA $1/\sqrt[n]{r}$, EN DOS DIMENSIONES

La extensión del método a $\Omega \subset R^2$ se realiza fácilmente para los elementos de Lagrange con una y dos direcciones infinitas:

- a) Elemento de Lagrange isoparamétrico de 4 nodos en R^2 (Figura 3).

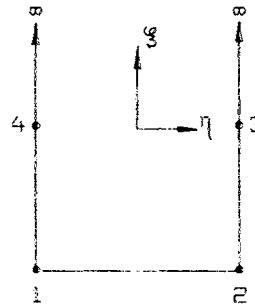


Figura 3. Elemento infinito de Lagrange de 4 nodos.

Las funciones que definen la aplicación son en este caso:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= M_1(\xi) \frac{(1-\eta)}{2} \\
 \psi_2 &= M_1(\xi) \frac{(1+\eta)}{2} \\
 \psi_3 &= M_2(\xi) \frac{(1+\eta)}{2} \\
 \psi_4 &= M_2(\xi) \frac{(1-\eta)}{2}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Siendo $M_1(\xi)$ y $M_2(\xi)$ los definidos anteriormente en (2) y (3).

- b) Elemento de Lagrange isoparamétrico de 6 nodos en R^2 (Figura 4).
En este caso las funciones que definen la aplicación serán:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= M_1(\xi) \left(-\frac{1}{2}\right) \eta (1-\eta) \\
 \psi_2 &= M_1(\xi) (1-\eta^2) \\
 \psi_3 &= M_1(\xi) \frac{1}{2} \eta (1+\eta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_4 &= M_2(\xi) \frac{1}{2}\eta (1+\eta) \\
 \psi_5 &= M_2(\xi) (1-\eta^2) \\
 \psi_6 &= M_2(\xi) \left(-\frac{1}{2}\right)\eta (1-\eta)
 \end{aligned} \tag{11}$$

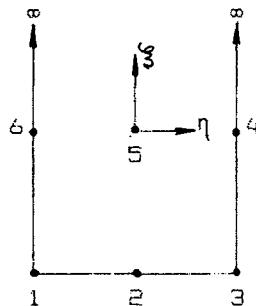


Figura 4. Elemento infinito de Lagrange de 6 nodos.

- c) Elemento de Lagrange isoparamétrico de 4 nodos doblemente infinito en R^2 (Figura 5).

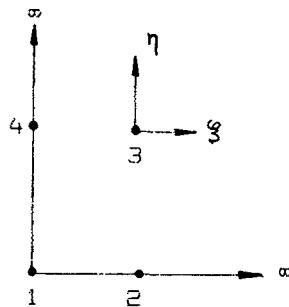


Figura 5. Elemento doblemente infinito de Lagrange de 4 nodos.

En este caso las funciones que definen la aplicación serán:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= M_1(\xi) M_1(\eta) \\
 \psi_2 &= M_2(\xi) M_1(\eta) \\
 \psi_3 &= M_2(\xi) M_2(\eta) \\
 \psi_4 &= M_1(\xi) M_2(\eta)
 \end{aligned} \tag{12}$$

Utilizando las mismas funciones de aplicación en los tres casos a), b) y c) anteriores se pueden generar elementos superparamétricos.

La extensión del procedimiento a los elementos de Serendipity no es tan sencilla y consideraremos dos métodos diferentes para generar las funciones que definen la aplicación.

El primero de los métodos origina similares funciones de aplicación a las de Marqués y Owen¹¹ para $n = 1$. Si consideramos el elemento unidimensional cuadrático de Lagrange tenemos las siguientes funciones de forma:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= -\frac{\xi(1-\xi)}{2} \\ N_2(\xi) &= (1-\xi^2) \\ N_3(\xi) &= \frac{\xi(1+\xi)}{2} \end{aligned} \quad (13)$$

y si consideramos que

$$\left. \begin{aligned} F(\xi) &= \frac{M_1(\xi)}{N_1(\xi)} \\ H(\xi) &= \frac{M_2(\xi)}{N_2(\xi)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

como conocemos las funciones de forma de la aproximación para el elemento cuadrático de Serendipity $\psi'_i(\xi, \eta)$ $i = 1, 2, \dots, 8$ y considerando $i = 1 \dots 5$, tenemos (Figura 6):

$$\begin{aligned} \psi'_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta) \\ \psi'_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \\ \psi'_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta) \\ \psi'_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\eta)(1-\xi^2) \\ \psi'_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \end{aligned} \quad (15)$$

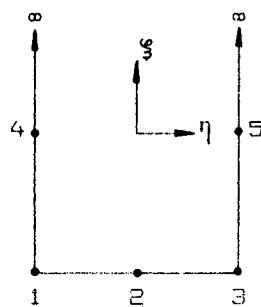


Figura 6. Elemento infinito de Serendipity de 5 nodos.

Las funciones de aplicación para el elemento de Serendipity serán:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= \psi'_1 F(\xi) \\
 \psi_2 &= \psi'_2 F(\xi) \\
 \psi_3 &= \psi'_3 F(\xi) \\
 \psi_4 &= \psi'_4 H(\xi) \\
 \psi_5 &= \psi'_5 H(\xi)
 \end{aligned} \tag{16}$$

obviamente se verifica que $\sum_{i=1}^5 \psi_i = 1$.

Si el elemento se extiende hacia el infinito en dos direcciones tendremos (ver Figura 7) que las funciones de la aplicación serán:

$$\begin{aligned}
 \psi_2 &= \psi'_2 F(\xi) H(\eta) \\
 \psi_4 &= \psi'_4 H(\xi) F(\eta) \\
 \psi_1 &= 1 - \psi_2 - \psi_4
 \end{aligned} \tag{17}$$

siendo F y H las funciones definidas en (14).

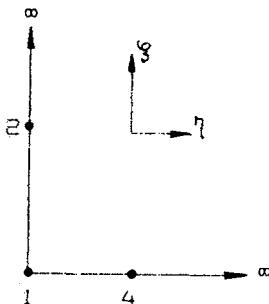


Figura 7. Elemento doblemente infinito de Serendipity de 3 nodos.

El segundo procedimiento para desarrollar funciones de aplicación en elementos de Serendipity ha sido utilizado por Kumar¹² para generar un elemento de Serendipity con una dirección infinita en el caso particular $n = 1$.

Si tenemos en cuenta la propiedad de las funciones de forma del elemento de Serendipity de coincidir con el elemento cuadrático para $\Omega \subset R$ en los lados del elemento y de coincidir con el elemento lineal para $\Omega \subset R$ en la línea de simetría del elemento que es paralela a los lados, tendremos:

Para $\xi = -1$ las funciones de forma $N_1(\eta)$, $N_2(\eta)$ y $N_3(\eta)$ serán las dadas en (13) y para $\xi = 0$ (ver Figura 6):

$$\begin{aligned}
 N_4(\eta) &= \frac{1 - \eta}{2} \\
 N_5(\eta) &= \frac{1 + \eta}{2}
 \end{aligned} \tag{18}$$

De modo que aplicamos la transformación:

$$x = M_1(\xi)[N_1(\eta)x_1 + N_2(\eta)x_2 + N_3(\eta)x_3] + M_2(\xi)[N_4(\eta)x_4 + N_5(\eta)x_5] \quad (19)$$

Los coeficientes de x_1, \dots, x_5 definen las funciones de la aplicación, que obviamente suman 1.

Para el elemento de Serendipity doblemente infinito se tendrá (ver Figura 7):

$$\begin{aligned}\psi_2 &= M_1(\xi)M_2(\eta) \\ \psi_4 &= M_2(\xi)M_1(\eta) \\ \psi_1 &= 1 - \psi_2 - \psi_4\end{aligned}\quad (20)$$

ELEMENTOS INFINITOS INVERSOS CON CAIDA $1/\sqrt[n]{r}$, EN TRES DIMENSIONES

La extensión del método a elementos tridimensionales se lleva a cabo fácilmente para los elementos de Lagrange con una, dos o tres direcciones infinitas.

La extensión del procedimiento a elementos de Serendipity en $\Omega \subset R^3$ no es tan sencilla y consideraremos como anteriormente dos modos diferentes para formular las funciones de la aplicación.

El primero es similar al caso de dos dimensiones y utilizaremos las funciones de forma del elemento cuadrático de Serendipity en tres dimensiones. En los desarrollos siguientes emplearemos las funciones M_1, M_2 definidas en (2) y (3), las F, H de (14) y las N_1, N_2, N_3 de (13). Las funciones que definen la aplicación para el elemento de Serendipity isoparamétrico de 12 nodos son de acuerdo con la Figura 8:

$$\begin{aligned}\psi_i &= \psi'_i F(\nu) \quad (i = 1, \dots, 8) \\ \psi_j &= \psi'_j H(\nu) \quad (j = 9, \dots, 12)\end{aligned}\quad (21)$$

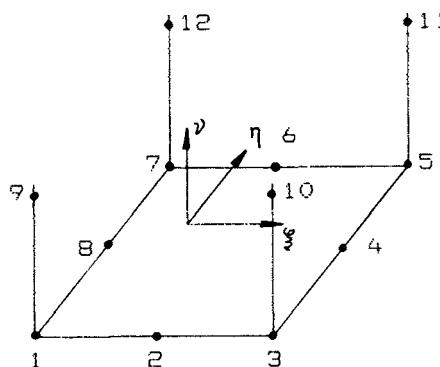


Figura 8. Elemento infinito de Serendipity de 12 nodos.

en donde ψ'_i , ($i = 1, \dots, 12$) son las funciones de forma del elemento de Serendipity que se encuentran por ejemplo en Dhatt y Touzot¹³ y $F(\nu)$, $H(\nu)$ fueron definidas anteriormente en (14).

Si consideramos el mismo elemento pero con dos direcciones infinitas, tendremos que:

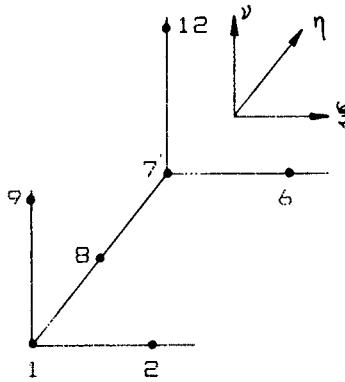


Figura 9. Elemento doblemente infinito de Serendipity de 7 nodos.

para $\eta = -1$ (ver Figura 9) podemos realizar el cálculo del mismo modo hecho anteriormente para $\Omega \subset R^2$:

$$\begin{aligned} \phi'_1 &= 1 + \frac{2^n}{(2^n - 1)^2 \xi} \left(1 - \frac{1}{(1 - \xi)^n} \right) \left(\frac{2^n}{(1 - \nu)^n} - 1 \right) + \\ &+ \frac{2^n}{(2^n - 1)^2 \nu} \left(\frac{2^n}{(1 - \xi)^n} - 1 \right) \left(1 - \frac{1}{(1 - \nu)^n} \right) \\ \phi'_2 &= -\frac{2^n}{(2^n - 1)^2 \nu} \left(\frac{2^n}{(1 - \xi)^n} - 1 \right) \left(1 - \frac{1}{(1 - \nu)^n} \right) \\ \phi'_9 &= -\frac{2^n}{(2^n - 1)^2 \xi} \left(1 - \frac{1}{(1 - \xi)^n} \right) \left(\frac{2^n}{(1 - \nu)^n} - 1 \right) \end{aligned} \quad (22)$$

y para $n = 1$

$$\phi'_7 = \phi'_1 \quad \phi'_6 = \phi'_2 \quad \phi'_{12} = \phi'_9 \quad (23)$$

Para $\xi = -1$, $\nu = -1$, tendremos en el elemento de Serendipity standard en $\Omega \subset R$ que:

$$\phi_1 = \frac{-\eta(1 - \eta)}{2} \quad \phi_8 = 1 - \eta^2 \quad \phi_7 = \frac{\eta(1 + \eta)}{2} \quad (24)$$

siendo ϕ_1 , ϕ_8 y ϕ_7 funciones de forma, de modo que finalmente las funciones que definen la aplicación son:

$$\begin{aligned}
 \psi_i &= \phi'_i \phi_1 \quad (i = 1, 2, 9) \\
 \psi_j &= \phi'_j \phi_7 \quad (i = 6, 7, 12) \\
 \psi_8 &= 1 - (\psi_1 + \psi_2 + \psi_9) - (\psi_7 + \psi_6 + \psi_{12}) = 1 - \eta^2
 \end{aligned} \tag{25}$$

Para el caso de tres direcciones infinitas se tendrá (ver Figura 10)

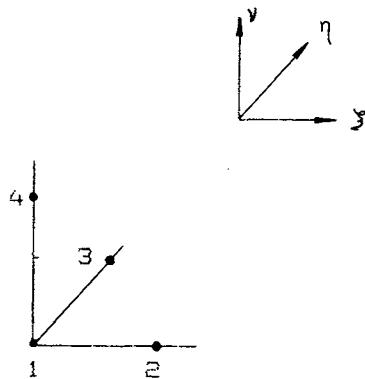


Figura 10. Elemento triplemente infinito de Serendipity de 4 nodos.

$$\begin{aligned}
 \psi_2 &= \psi'_2 H(\xi) F(\eta) F(\nu) \\
 \psi_3 &= \psi'_3 F(\xi) H(\eta) F(\nu) \\
 \psi_4 &= \psi'_4 F(\xi) F(\eta) H(\nu) \\
 \psi_1 &= 1 - (\psi_2 + \psi_3 + \psi_4)
 \end{aligned} \tag{26}$$

Siendo ψ'_2 , ψ'_3 y ψ'_4 las funciones de forma standard del elemento de Serendipity correspondiente¹³.

El segundo procedimiento sigue la misma idea utilizada en el caso de $\Omega \subset R^2$ y utilizando las funciones de forma standard del elemento cuadrático de Serendipity en $\Omega \subset R^3$, tendremos (ver Figura 8):

$$\begin{aligned}
 \psi_i &= \psi'_i M_1(\nu) \quad (i = 1, \dots, 8) \\
 \psi_j &= \psi'_j M_2(\nu) \quad (j = 9, \dots, 12)
 \end{aligned} \tag{27}$$

siendo ψ'_i , $i = 1, \dots, 12$ las funciones de forma del elemento de Serendipity correspondiente¹³, particularizadas para el valor correspondiente de ν . Obviamente

$$\sum_{i=1}^{12} \psi_i = 1.$$

Del mismo modo que en el primer procedimiento, se formulan las funciones de la aplicación para el caso de dos direcciones infinitas (para $\eta = -1$, Figura 9) se tendrá:

$$\begin{aligned}
 \phi'_1 &= 1 - \frac{2^n}{(2^n - 1)^2} \left(1 - \frac{1}{(1 - \xi)^n} \right) \left(\frac{2^n}{(1 - \nu)^n} - 1 \right) - \\
 &\quad - \frac{2^n}{(2^n - 1)^2} \left(\frac{2^n}{(1 - \xi)^n} - 1 \right) \left(1 - \frac{1}{(1 - \nu)^n} \right) \\
 \phi'_2 &= \frac{2^n}{(2^n - 1)^2} \left(\frac{2^n}{(1 - \xi)^n} - 1 \right) \left(1 - \frac{1}{(1 - \nu)^n} \right) \\
 \phi'_9 &= \frac{2^n}{(2^n - 1)^2} \left(1 - \frac{1}{(1 - \xi)^n} \right) \left(\frac{2^n}{(1 - \nu)^n} - 1 \right)
 \end{aligned} \tag{28}$$

y para ($\eta = 1$, Figura 9):

$$\phi'_7 = \phi'_1 \quad ; \quad \phi'_6 = \phi'_2 \quad ; \quad \phi'_{12} = \phi'_9 \tag{29}$$

de modo que las funciones que definen la aplicación son:

$$\begin{aligned}
 \psi_i &= \phi'_i \phi_1 \quad (i = 1, 2, 9) \\
 \psi_j &= \phi'_j \phi_7 \quad (i = 6, 7, 12) \\
 \psi_8 &= 1 - (\psi_1 + \psi_2 + \psi_9) - (\psi_7 + \psi_6 + \psi_{12}) = 1 - \eta^2
 \end{aligned} \tag{30}$$

donde ϕ_1 y ϕ_7 fueron definidas en (24).

Si consideramos el caso de tres direcciones infinitas como en la Figura 10, tendremos:

$$\begin{aligned}
 \psi_2 &= M_2(\xi) M_1(\eta) M_1(\nu) \\
 \psi_3 &= M_1(\xi) M_2(\eta) M_1(\nu) \\
 \psi_4 &= M_1(\xi) M_1(\eta) M_2(\nu) \\
 \psi_1 &= 1 - (\psi_2 + \psi_3 + \psi_4)
 \end{aligned} \tag{31}$$

En [17] se presenta una aplicación real en la que se combinan elementos finitos con elementos infinitos de Lagrange y de Serendipity bidimensionales, en la resolución de un problema axialmente simétrico cuya solución analítica es conocida, todo ello en base a poder estimar la aproximación obtenida, para cada elemento infinito, siendo con los elementos de Lagrange cuadráticos con los que se consigue una mejor aproximación (ver [17]).

APLICACION A ECUACIONES DIFERENCIALES

Con las funciones de aplicación desarrolladas se pueden modelizar las caídas hacia el infinito de la forma $1/r^{(1/n)}$, $n \in N^*$. Este tipo de caídas constituye una de las soluciones particulares de algunas ecuaciones diferenciales.

Para mostrar cómo el método propuesto sirve para modelizar este tipo de problemas en dominios no acotados vamos a resolver una ecuación diferencial cuya solución es precisamente $1/r^{(1/n)}$, $n \in N^*$.

Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1-n}{n^2} x^{-(\frac{1+2n}{n})} \quad (32)$$

con las condiciones de contorno

$$u|_{(x=1)} = 1 \quad ; \quad u|_{(x=\infty)} = 0$$

Resolvemos el problema para $x \geq 1$, con un solo elemento infinito y considerando el polo en el origen de coordenadas, tendremos:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2^n, \quad x_3 = \infty$$

de acuerdo con la Figura 1. Teniendo en cuenta (1) y (2):

$$x = 2 + \alpha \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^{1/n}} \right) \quad (33)$$

Por medio de la formulación variacional¹⁴ podemos resolver el problema planteado obteniendo como solución $u_{(x=2^n)} = \frac{1}{2}$ y teniendo en cuenta (7) obtendremos $u = 1/x^{(1/n)}$. Es decir el método propuesto reproduce la solución exacta de la ecuación diferencial.

Del mismo modo se pueden resolver otros problemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que verifiquen como solución particular $1/r^{(1/n)}$.

Un problema de gran interés en la práctica es el problema de propagación de ondas (ondas en superficie del agua, ondas electromagnéticas, acústicas, etc...), que viene dado por la ecuación de Helmholtz^{14,15}.

Para resolver este típico problema cuya solución analítica es en general $\psi = e^{ikr}/r^{(1/n)}$ utilizaremos las funciones de forma dadas en (2), (3) conjuntamente con el método de la onda envolvente¹⁶ para tener en cuenta la componente periódica.

La ecuación a resolver será:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = \left(\frac{n+1}{n^2} \frac{1}{r^2} - \frac{2ik}{nr} - k^2 \right) \psi \quad (34)$$

con las condiciones de contorno asociadas:

$$\psi_{(r=1)} = e^{ik}, \quad \psi_{r=\infty} = 0$$

Resolvemos el problema planteado utilizando un solo elemento finito.

Situado el polo en $r_0 = 0$, tenemos $r_2 = 2^n r_1$ y como $r_1 = 1$ operando en (1), (2) y (3) se tiene en este caso particular:

$$r = \left(\frac{2}{1-\xi} \right)^n \quad (35)$$

Para tener en cuenta la componente periódica e^{ikr} (en donde k es el número de onda, $k = 2\pi/\lambda$, siendo λ la longitud de onda) multiplicaremos las funciones de forma de aproximación de la función por dicha componente periódica:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\xi}{2}(\xi - 1)e^{ikr} \\ N_2 &= (1 - \xi^2)e^{ikr} \end{aligned} \quad (36)$$

No va a ser necesaria la tercera función de forma pues para $\xi = 1$ tenemos que $r = \infty$ y la función es nula en el infinito.

A fin de realizar la integración tomamos los complejos conjugados de las funciones de forma como pesos y aplicamos un método Petrov-Galerkin.

Tendremos las siguientes funciones de peso:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{\xi}{2}(\xi - 1)e^{-ikr} \\ W_2 &= (1 - \xi^2)(\xi - 1)e^{-ikr} \end{aligned} \quad (37)$$

La función se aproxima mediante:

$$\psi = N_1\psi_1 + N_2\psi_2 \quad (38)$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación diferencial (34), multiplicamos por las funciones de peso y realizamos la integración entre $r = 1$ y $r = \infty$

$$\int_1^\infty \left[W_i \frac{d^2\psi}{dr^2} - W_i \left(\frac{n+1}{n^2} \frac{1}{r^2} - \frac{2ik}{nr} - k^2 \right) \psi \right] dr = 0 \quad (39)$$

$$\sum_{j=1}^2 \int_1^\infty \left[W_i \frac{d^2N_j}{dr^2} - W_i \left(\frac{n+1}{n^2} \frac{1}{r^2} - \frac{2ik}{nr} - k^2 \right) N_j \right] \psi_j dr = 0 \quad (40)$$

Realizando la integración del primer término por partes y teniendo en cuenta que los términos de la forma

$$W_i \frac{dN_j}{dr} \Big|_1^\infty$$

se anulan, quedará:

$$\sum_{j=1}^2 \int_1^\infty \left[\frac{dW_i}{dr} \frac{dN_j}{dr} + W_i N_j \left(\frac{n+1}{n^2} \frac{1}{r^2} - \frac{2ik}{nr} - k^2 \right) \right] \psi_j dr = 0 \quad (41)$$

Vamos a obtener los valores de las derivadas de N_i , W_i ($i = 1, 2$) en función de ξ teniendo en cuenta (35):

$$\frac{dN_1}{d\xi} = \left[\xi - \frac{1}{2} - \frac{n}{2} ik \xi \left(\frac{2}{1-\xi} \right)^n \right] e^{ik \left(\frac{2}{1-\xi} \right)^n} \quad (42)$$

$$\frac{dW_1}{d\xi} = \left[\xi - \frac{1}{2} + \frac{n}{2} ik \xi \left(\frac{2}{1-\xi} \right)^n \right] e^{-ik \left(\frac{2}{1-\xi} \right)^n} \quad (43)$$

$$\frac{dN_2}{d\xi} = \left[-2\xi + ik n(1+\xi) \left(\frac{2}{1-\xi} \right)^n \right] e^{ik(\frac{2}{1-\xi})^n} \quad (44)$$

$$\frac{dW_2}{d\xi} = \left[-2\xi - ik n(1+\xi) \left(\frac{2}{1-\xi} \right)^n \right] e^{-ik(\frac{2}{1-\xi})^n} \quad (45)$$

y sustituyendo en (41) nos queda:

$$\sum_{j=1}^2 \left[\int_{-1}^{+1} \frac{dW_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} \frac{(1-\xi)^{n+1}}{n2^n} d\xi + \int_{-1}^{+1} W_i N_j \left(\frac{n+1}{n^2} \frac{(1-\xi)^{n-2}}{2^{n-2}} - \frac{2ik}{n} \frac{(1-\xi)^n}{2^n} - k^2 \right) \frac{n2^n}{(1-\xi)^{n+1}} d\xi \right] \psi_j = 0 \quad (46)$$

Esta última expresión adopta la forma:

$$\sum_{j=1}^2 (K_{ij} + f_{ij} \psi_j) = 0 \quad (47)$$

donde los K_{ij} y f_{ij} son:

$$K_{ij} = \int_{-1}^{+1} \frac{dW_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} \frac{(1-\xi)^{n+1}}{n2^n} d\xi \quad (48)$$

$$f_{ij} = \int_{-1}^{+1} W_i N_j \left(\frac{n+1}{n2^n} (1-\xi)^{n-1} - \frac{2ik}{(1-\xi)} - \frac{n2^n k^2}{(1-\xi)^{n+1}} \right) d\xi \quad (49)$$

Sabemos que se verifica:

$$(k_{21} + f_{21}) \psi_1 + (k_{22} + f_{22}) \psi_2 = 0 \quad (50)$$

y sustituyendo (48) y (49) nos queda:

$$\psi_2 = -\frac{k_{21} + f_{21}}{k_{22} + f_{22}} \psi_1 = \frac{1}{2} \psi_1 \quad (51)$$

Como $\psi_1 = 1$ vamos a tener

$$\psi_2 = \frac{1}{2}$$

y si aplicamos (38) se tiene:

$$\psi = \frac{e^{ikr}}{2} (1-\xi) \quad (52)$$

Además por la fórmula (35) $1-\xi = \frac{2}{r^{1/n}}$, de donde:

$$\psi = \frac{e^{ikr}}{r^{1/n}} \quad (53)$$

Es decir, se reproduce la solución analítica.

UN PROBLEMA MODELO

Consideremos la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{2}{x^3} \quad (54)$$

con las condiciones de contorno:

$$U(2) = \frac{1}{2} \quad ; \quad U(\infty) = 0 \quad (55)$$

El problema variacional correspondiente es hacer:

$$J = \frac{1}{2} \int_2^\infty \left[\left(\frac{dU}{dx} \right)^2 + \frac{4U}{x^3} \right] dx \quad (56)$$

estacionaria.

Consideremos un modelo como se muestra en la Figura 11.

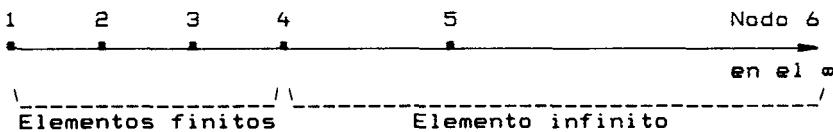


Figura 11. Modelo de tres elementos finitos con un elemento infinito.

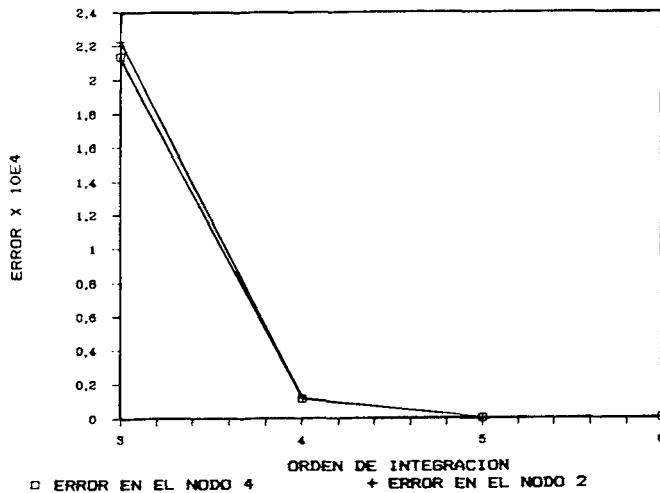


Figura 12. Error al variar el orden de integración en el elemento infinito.

El modo 1 de la Figura 11 corresponde al punto $x = 2$ y los tres elementos finitos tienen la misma longitud igual a 2. Los tres elementos finitos se calculan con orden de

integración dos, el elemento finito puede tomar diferentes órdenes de integración. El polo se encuentra situado en el origen de coordenadas. En la Figura 12 pueden verse los resultados obtenidos cuando cambiamos el orden de integración en el elemento infinito. El error disminuye cuando aumentamos el orden de integración de éste.

Es interesante conocer qué ocurre si cambiamos la posición del polo (variando convenientemente las coordenadas de x_4 , x_5 de acuerdo con la fórmula (4)). Consideremos un orden de integración 5 para el elemento infinito y diferentes posiciones del polo en $x = 0, 2, 4$ y 6 . Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 13 para los nodos 2 y 4.

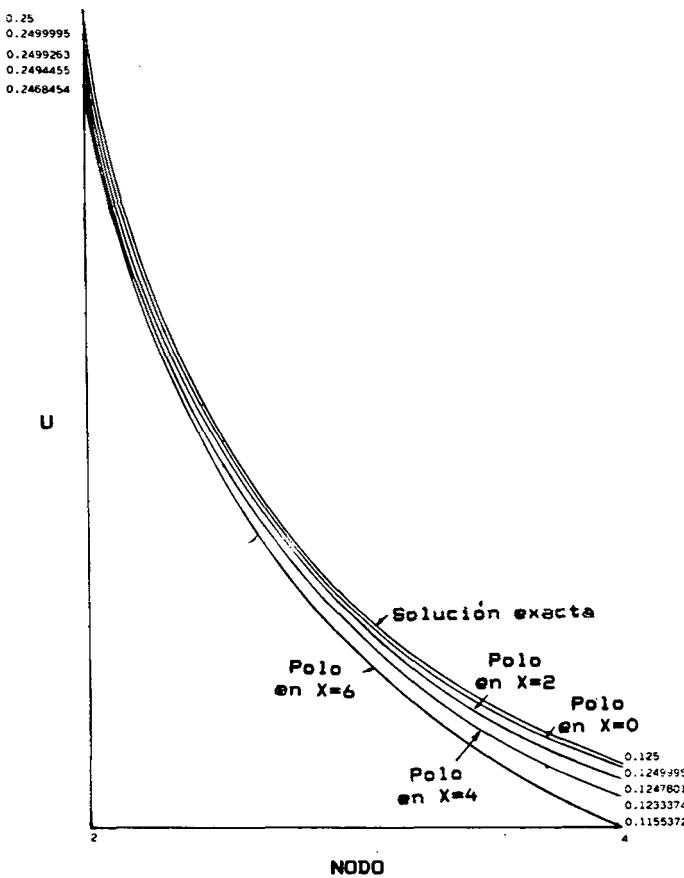


Figura 13. Función $U(x)$ para diferentes posiciones de los polos.

Definamos ahora la dispersión en un nodo i como:

$$|U_i(\text{polo en } x=0) - U_i(\text{polo en } x=6)|$$

Vamos a cambiar la longitud del elemento interfase (3-4 de la Figura 11) dando diferentes longitudes iguales a 2, 4, ..., 18. Para cada longitud del elemento interfase

cambiamos el elemento infinito de modo que obtengamos diferentes posiciones del polo entre $z = 0$ y $z = 6$. Con todo ello obtenemos las curvas de la Figura 14, que proporciona la dispersión de la solución en función de la longitud del elemento interfase para los puntos nodales 2 y 3. Estos resultados se han calculado utilizando un orden de integración 5 para el elemento infinito.

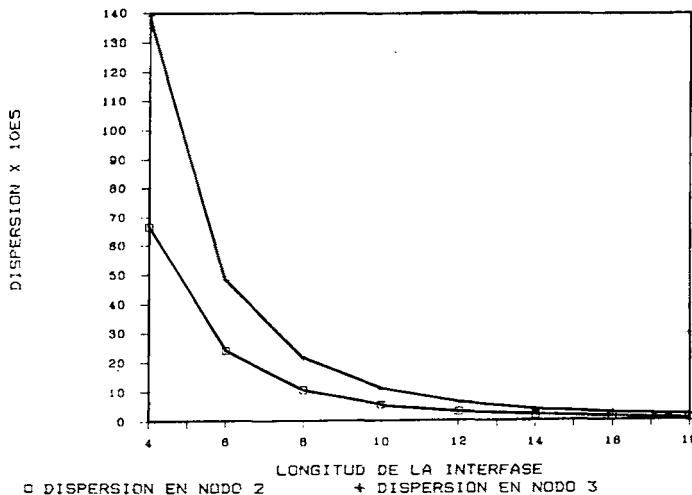


Figura 14. Dispersión de la solución en función de la longitud del elemento interfase.

Sin embargo si volvemos a realizar todos los cálculos pero con un orden de integración diferente para el elemento infinito obtenemos las mismas curvas de la Figura 14. De este modo comprobamos que la dispersión de la solución resulta ser independiente del orden de integración elegido.

El primer problema que plantea la utilización de los elementos infinitos es fijar la posición a partir de la cual se emplea el elemento infinito. Por esta razón hemos considerado diferentes posiciones de la interfase para una localización del polo fija. Los resultados obtenidos son dependientes de dicha posición de la interfase. El efecto de cambiar la posición de la interfase es un desplazamiento de la solución obtenida $U = U(z)$, ver Figura 15 (en este caso el polo se encuentra en $z = 0$).

Es muy importante antes de emplear los elementos infinitos determinar los parámetros principales que influyen en los resultados numéricos. Como hemos visto (Figura 12) el orden de integración debe ser muy alto para disminuir el error. También es importante conocer donde debemos situar la línea de interfase entre los elementos finitos e infinitos. Asimismo la dispersión de los resultados disminuye si se aumenta la longitud del elemento finito adyacente a la línea de interfase. De ese modo el impacto que tiene sobre los resultados numéricos el cambio en la posición del polo disminuye cuando llevamos hacia el infinito la línea de interfase. Sin embargo si alejamos la posición de la interfase llevándola hacia el infinito, la longitud del elemento 3-4 de la Figura 11 aumenta, y normalmente el modelo de elementos finitos no es apropiado debido a la gran longitud de ese elemento. Por todo ello vamos a utilizar otro modelo con la misma posición de la interfase pero poniendo más elementos finitos de igual

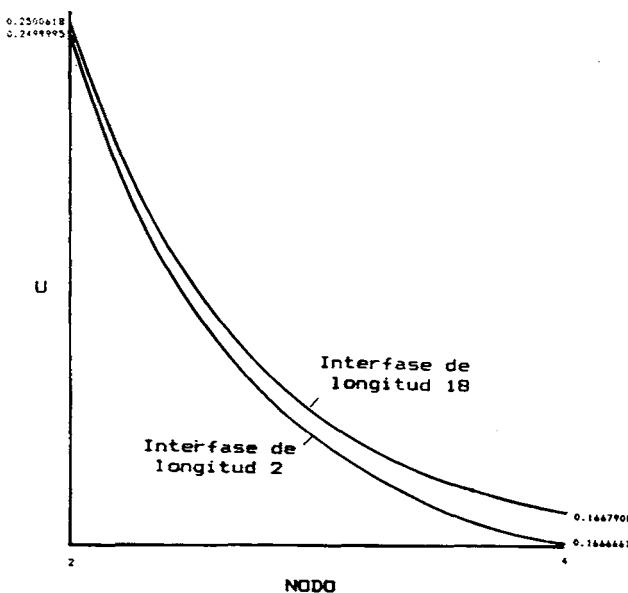


Figura 15. $U = U(x)$ para diferentes longitudes de la interfase con el polo en $x = 0$.

longitud todos ellos, en la posición que antes ocupaba el elemento 3-4 de la Figura 11, con todo ello obtendremos la Figura 16.

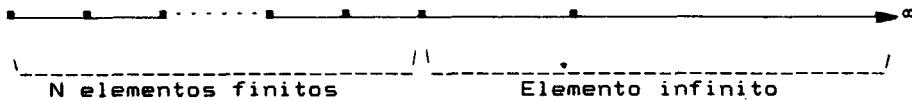


Figura 16. Modelo de N elementos finitos (de igual longitud) y un elemento infinito.

Ahora podemos verificar la exactitud obtenida con cada uno de los modelos correspondientes a las Figuras 11 y 16 (comparando con el mismo orden de integración 5 y con la misma posición de la interfase).

Como se muestra en la Figura 17 el modelo de la Figura 16 es mucho mejor que el de la Figura 11. Sin embargo la dispersión no varía, porque como se aprecia en la Figura 17 la pendiente de las curvas es la misma.

La variación del error es la misma con cualquiera de los dos modelos considerados en cada paso, cuando cambiamos la posición del polo. Como conclusión, la dispersión depende solamente de la posición de la interfase pero no depende del modelo utilizado.

También podemos ver en la Figura 17 que si utilizamos el modelo de la Figura 16, podemos tener un error nulo fijando el polo en su posición óptima. Sin embargo esta posición no es conocida "a priori", pero lo que sí podemos conseguir es un error muy pequeño si empleamos un modelo cuya dispersión sea mínima (curvas más horizontales de la Figura 17).

En orden a estudiar un problema cuya posición del polo no sea conocida podríamos realizar un modelo como el de la Figura 18, buscar la posición de la interfase de forma

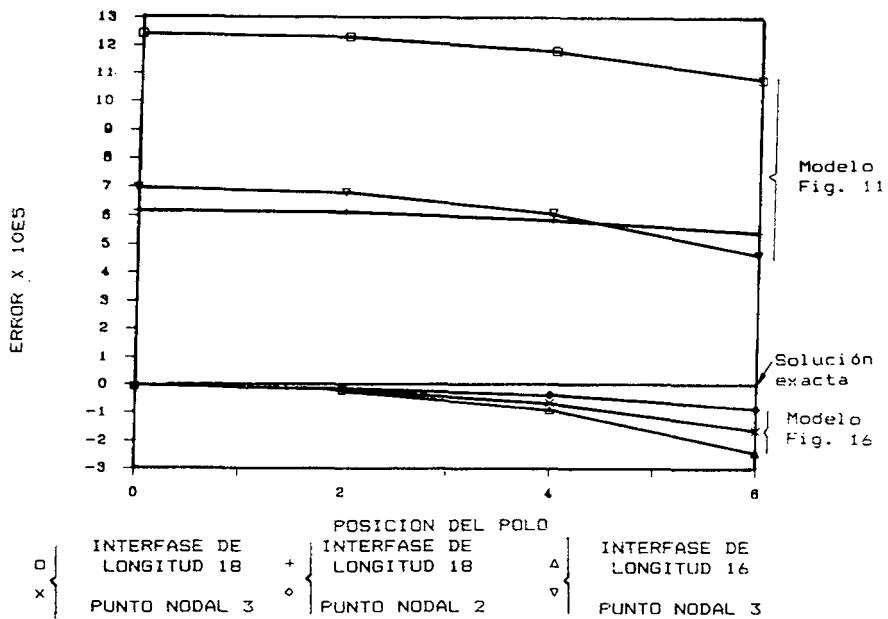


Figura 17. Comparación entre los modelos de las Figuras 11 y 16.

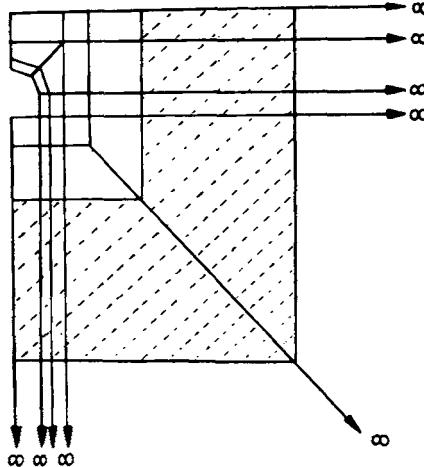


Figura 18. Modelo de un problema geotécnico en 2D.

que la dispersión sea la mínima deseada y luego realizar un modelo como el de la Figura 19, en el que no nos afectará la posición del polo y el error será mínimo, si empleamos siempre un alto orden de integración en los elementos infinitos (en dirección infinita).

En [17], [18] y [19] se hace una discusión acerca de la influencia de la ubicación de los polos en los valores obtenidos en ejemplos numéricos resueltos mediante combinaciones de elementos finitos e infinitos en problemas de una, dos y tres dimensiones. En cualquier caso los resultados coinciden con los obtenidos en este artículo y el análisis de ejemplos unidimensionales permite precisar con mayor exactitud cuáles son los criterios a seguir para el empleo de los elementos infinitos en situaciones no triviales.

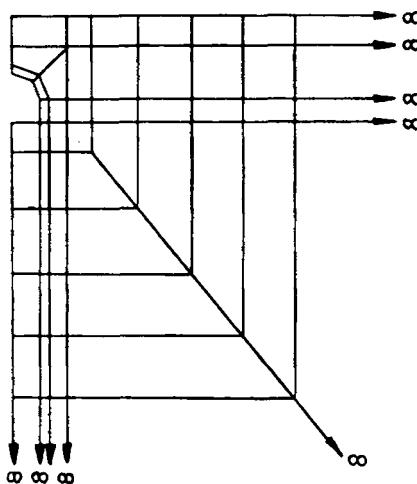


Figura 19. Mejora del modelo de la Figura 18.

CONCLUSIONES

La modelización de contornos artificiales se ha llevado a cabo mediante nuevos elementos infinitos de aproximación inversa.

Estos elementos infinitos permiten tratar cualquier tipo de caída de la forma $1/r^{(1/n)}$, $n \in N^*$ con soporte de tres puntos (de los que uno se va al ∞). Las nuevas funciones de aplicación permiten el desarrollo de los nuevos elementos infinitos, que mantienen inalteradas las funciones de forma de aproximación de la función.

En todos los casos los elementos infinitos se han desarrollado de modo que el resto del modelo contenga elementos infinitos del tipo cuadrático de Serendipity o de Lagrange. Es decir independiente del número de puntos de soporte, los nuevos elementos infinitos son compatibles en la interfase finito-infinito con elementos normales de tipo cuadrático.

En los casos numéricos estudiados se ha demostrado que si el tipo de caída que sigue la solución analítica es $1/r^{(1/n)}$, se reproduce la solución exacta, incluso en problemas de propagación de ondas.

La aplicación de los elementos infinitos en el caso estudiado nos ha permitido comprobar la influencia de una serie de parámetros y extraer unos criterios de uso a seguir en la utilización de estos elementos.

En base a todo ello se pueden plantear y solucionar problemas en los que las posiciones de los polos no sean conocidas "a priori". Es importante utilizar un orden de integración numérica mayor de 2 en el elemento infinito, en la dirección infinita.

AGRADECIMIENTO

Queremos señalar nuestro agradecimiento a la Comisión Interministerial de Investigación Científica y Técnica dentro de cuyo proyecto PA85-0053 se ha realizado el presente trabajo.

Del mismo modo expresar nuestra gratitud al Instituto Geológico y Minero por su ayuda dentro del Convenio sobre Desarrollo y Adaptación de Métodos Numéricos y programas aplicables a la investigación en Geotecnia y Geología Ambiental.

REFERENCIAS

1. A. Curnier, "A static infinite element", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **19**, pp. 1479–1488, (1983).
2. P. Bettess, "Infinite Elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **11**, pp. 53–64, (1977).
3. Y.K. Chow y J.M. Smith, "Static and Periodic infinite solid elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **17**, pp. 503–526, (1981).
4. F. Medina, "An axisymmetric infinite element", *Int. Num. Meth. Eng.*, Vol. **17**, pp. 1177–1185, (1981).
5. P. Bettess, "More on infinite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **15**, pp. 1613–1626, (1980).
6. P.P. Lynn y H.A. Hadid, "Infinite elements with $1/r^n$ type decay", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **17**, pp. 347–355, (1981).
7. G. Beer y J.L. Meek, "Infinite Domain Elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **17**, pp. 43–52, (1981).
8. O.C. Zienkiewicz, C. Emson y P. Bettess, "A novel boundary infinite element", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **19**, pp. 393–404, (1983).
9. P. Kumar, "Static Infinite Element Formulation", *Journal of structural engineering*, Vol. **11**, No. 11, Paper nº 20150, (1985).
10. S. Pissanetzky, "An infinite element and a formula for numerical quadrature over an infinite interval", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **19**, pp. 913–927, (1983).
11. J.M.M.C. Marques y D.R.J. Owen, "Infinite elements in quasi-static–materially non–linear problems", *Computer and Structures*, Vol. **18**, pp. 739–751, (1984).
12. P. Kumar, Letter to Editor "Novel infinite boundary element", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **20**, pp. 1173–1174, (1984).
13. G. Dhatt y G.G. Touzot, Une présentation de la méthode des éléments finis, Les presses de l'université Laval, Quebec, (1981).
14. P. Bettess, C. Emson y K. Bando, "Some usefull techniques for testing infinite elements", *Appl. Math. Modelling*, Vol. **6**, (1982).
15. O.C. Zienkiewicz, K. Bando, P. Bettess, C. Emson y T. Chiam, "Mapped infinite elements for exterior wave problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **21**, pp. 1229–1251, (1985).
16. P. Bettess, "A simple wave envelope example", *Commun. appl. numer. methods*, Vol. **3**, pp. 77–80, (1987).
17. A. Ruiz y L. Gavete, "Modelización matemática de medios no acotados mediante elementos infinitos inversos", *Anales de Ingeniería Mecánica*, Año 5, No. 1, pp. 369–374, Madrid (1987).
18. L. Gavete, A. Ruiz y C. Manzano "Mapped infinite Elements in unbounded domains. Application in mining engineering", *VIII Congreso Internacional de Minería y Metalurgia*, Vol. **7**, pp. 748–761, Oviedo (1988).
19. L. Gavete y A. Ruiz, "Métodos de aproximación de ecuaciones en derivadas parciales elípticas en dominios infinitos", *IX CEDYA*, pp. 199–205, Valladolid (1986).