

Modelización Numérica de Materiales Friccionales

S. Oller

Modelización Numérica de Materiales Friccionales

S. Oller

Monografía CIMNE N^o-10, Enero 1991

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA
Edificio C1, Campus Norte UPC
Gran Capitán s/n
08034 Barcelona, España
www.cimne.upc.es

PRIMERA EDICIÓN: Enero 1991

MODELIZACIÓN NUMÉRICA DE MATERIALES FRICCIONALES
Monografía CIMNE M10
© Los autores

ISBN: 84-87867-09-X

Depósito legal: B-35884-94

PROLOGO

La presente monografía trata el problema del comportamiento de los materiales friccionales, especialmente del hormigón, más allá de su límite elástico. Estudia los problemas de aplastamiento y fractura y describe un modelo constitutivo amplio que permite una muy adecuada simulación de estos fenómenos.

La formulación que aquí se presenta, surge del estudio realizado en la tesis doctoral: "UN MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO CONTINUO PARA MATERIALES FRICCIONALES", escrita en la Escuela de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Cataluña, en el año 1988, por SERGIO OLLER bajo la dirección de los Profs. EUGENIO OÑATE y JAVIER OLIVER y con el continuo asesoramiento del Prof. JACOBO LUBLINER. A pesar de los años transcurridos desde su escritura, se considera que actualmente tiene mucha vigencia por las posibilidades que brinda y por las potenciales derivaciones que permite la formulación de este modelo constitutivo. Por otro lado, desde su escritura hasta el presente se han distribuido más de cien ejemplares, sin que haya habido un publicación oficial de la misma, considerando por ello que puede ser de importancia su publicación bajo el formato monográfico del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE).

Con el modelo que aquí se presenta, se ha resuelto muchos problemas del hormigón y se ha experimentado con éxito, en diversos centros de investigación, una gran cantidad de derivaciones destinadas a estudiar el comportamiento de otros materiales con aplicaciones en el área de la ingeniería en general. Por otro lado, esta línea de trabajo mantiene actualmente toda su potencialidad para continuar con nuevos desarrollos y/o mejorar los ya iniciados.

PROF. SERGIO OLLER

BARCELONA, 1992

NOTACION

α	:	Parámetro de la función de fluencia propuesta, que define la relación entre la resistencia uniaxial, y equis-biaxial.
α_R	:	Parámetro de la función de fluencia de Mohr-Coulomb modificada, que define la relación entre resistencias uniaxiales;
β	:	Parámetro de la función de fluencia propuesta, que define la relación entre la resistencia uniaxial a compresión y a tracción.
β_G	:	Factor de retención de tensiones cortantes.
γ	:	Parámetro de la función de fluencia propuesta, que define la relación entre radios octaédricos máximos.
γ_{oct}	:	Deformación octaédrica de corte.
δ_{ij}	:	Función de Kronecker.
δ^{max}	:	Desplazamiento máximo.
$\epsilon_{ij} \equiv \underline{\underline{\epsilon}}$:	Tensor de segundo orden de deformaciones, expresado en notación indicial y tensorial.
ϵ	:	Parte simétrica del tensor de segundo orden de deformaciones, expresado como matriz columna.
$\epsilon^e \equiv \epsilon^{eo}$:	Deformación desarrollada durante un proceso elástico.
ϵ^d	:	Deformación desarrollada durante un proceso de degradación.
ϵ^p	:	Deformación desarrollada durante un proceso de plástico.
ϵ^{cr}	:	Deformación desarrollada durante un proceso de fisuración.
ϵ_i	:	Componente de deformación principal i -ésima, del tensor de deformaciones.
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$:	Deformación principal mayor, intermedia y menor en un punto.
$\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}_C, \bar{\epsilon}_T$:	Deformación uniaxial equivalente, de Compresión, de tracción.
$\bar{\epsilon}^p$:	Deformación plástica uniaxial equivalente.
ϵ_{oct}	:	Deformación octaédrica normal.
$\vartheta_\sigma, \vartheta_\epsilon$:	Angulo entre la tensión principal mayor, o la deformación principal mayor, con el eje de referencia global x_1 .
κ	:	Variable de endurecimiento plástico.

κ^p	: Variable de daño plástico.
κ^l	: Valor de la variable de daño plástico, a partir de la cual, la cohesión se hace cero.
\mathcal{K}	: Factor de escala de la función de endurecimiento plástico.
$\lambda \equiv \lambda^p$: Factor de consistencia plástica.
$\lambda^d \equiv \mu$: Factor de consistencia de degradación.
ν, ν_0, ν^*	: Módulo de Poisson, valor inicial, y módulo ficticio.
Ξ	: Disipación total de energía.
ξ, ρ, θ	: Invariantes definidos en el espacio de Westergard. Dependen de I_1, J_2 y J_3 respectivamente.
$\sigma_{ij} \equiv \underline{\underline{\sigma}}$: Tensor de segundo orden de tensiones, expresado en notación indicial y tensorial.
σ	: Parte simétrica del tensor de segundo orden de tensiones, expresado como matriz c
σ^e	: Tensión desarrollada durante un proceso elástico.
σ^d	: Tensión relajada durante un proceso de degradación.
σ^p	: Tensión relajada durante un proceso de plástico.
σ_i	: Componente de tensión principal i -ésima del tensor de tensiones.
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: Tensión principal mayor, intermedia y menor en un punto.
$\sigma_C, \sigma_C^0, \sigma_C^{max}, \sigma_C^{pic}$: Tensión uniaxial de compresión, resistencia a compresión en el primer límite de discontinuidad, resistencia máxima o de pico.
$\sigma_T, \sigma_T^0, \sigma_T^{max}, \sigma_T^{pic}$: Tensión uniaxial de tracción, resistencia a tracción en el primer límite de discontinuidad, resistencia máxima o de pico.
$\sigma_{cb}, \sigma_{cb}^0$: Tensión equls-biaxial a compresión, y resistencia a en el primer límite de discontinuidad.
$\bar{\sigma}, \bar{\sigma}_C, \bar{\sigma}_T$: Tensión uniaxial equivalente, de Compresión, de tracción.
σ_{oct}	: Tensión octaédrica normal.
τ_{oct}	: Tensión octaédrica de corte.
Φ^d	: Función de degradación definida en el espacio de deformaciones.
Ψ^d	: Función potencial de degradación, definida en el espacio de deformaciones.
ϕ, ϕ^{max}	: Angulo de rozamiento interno, y su valor máximo.
ϕ_{cv}	: Angulo de rozamiento interno a volumen constante.
$\hat{\phi}_i, \hat{\phi}_K, \hat{\phi}_G$: Escalares de degradación elástica.
ψ, ψ^{max}	: Angulo de dilatación interno, y su valor máximo.
Ψ	: Energía potencial libre.
Ψ^e, Ψ^p	: Parte elástica y parte plástica de la energía potencial libre.

Ω	: Energía específica complementaria.
\mathfrak{S}	: Parámetro que considera la influencia de la tensión principal máxima en las componentes del vector \mathbf{f} .
A	: Parámetro de endurecimiento plástico.
A^f	: Superficie de la cara de una fisura.
c_n	: Constante que interviene en la determinación de las deformaciones efectivas – depende de la función Q .
c	: Cohesión entre partículas – función de endurecimiento plástico, expresada a partir de una ley de evolución interna del proceso.
c^0	: Valor inicial de la cohesión – corresponde al límite de discontinuidad inicial.
$c_C(\kappa^p)$: Función de evolución explícita de la cohesión para un proceso de compresión uniaxial.
$c_T(\kappa^p)$: Función de evolución explícita de la cohesión para un proceso de tracción uniaxial.
C_T^n	: Tensor de cuarto orden de rigidez elástica degradado, expresado como una matriz de 6×6 .
C_T^p	: Tensor de cuarto orden de rigidez elástica degradado durante un proceso plástico, expresado como una matriz de 6×6 .
C_T^{ep}	: Tensor de cuarto orden de rigidez elasto-plástica degradado, expresado como una matriz de 6×6 .
$[D_{ijkl}]_S \equiv \underline{\underline{\underline{D}}}_S$: Tensor de cuarto orden de rigidez elástica secante, expresado en notación indicial y tensorial.
$[D_{ijkl}]_T^{ep} \equiv \underline{\underline{\underline{D}}}_T^{ep}$: Tensor de cuarto orden de rigidez elasto-plástica tangente, expresado en notación indicial y tensorial.
D_S	: Tensor de cuarto orden de rigidez elástica secante, expresado como una matriz de 6×6 .
D_T^{ep}	: Tensor de cuarto orden de rigidez elasto-plástica tangente, expresado como una matriz de 6×6 .
D^{oa}	: Matriz de rigidez del material virgen.
D^{of}	: Matriz de rigidez del material fisurado.
\mathcal{D}	: Función de degradación definida en el espacio de tensiones.
dev	: Operador desviador.
\hat{d}	: Variable escalar de degradación.
$\hat{\tilde{d}}^e$: Variable tensorial de degradación elástica.
$\hat{\tilde{d}}^p$: Variable tensorial de degradación elástica.

$\epsilon_{ij} \equiv \underline{\underline{\epsilon}}$: Tensor de segundo orden desviador de deformaciones, expresado en notación indicial y tensorial.
e^{cr}	: Deformación de una fisura en ejes locales.
E, E^0, E_S	: Módulo elástico o de Young, en el instante inicial, y secante.
$f(\sigma)$: Función escalar de tensiones.
F	: Función de fluencia plástica, definida en el espacio de tensiones.
G, G^0, G_S	: Módulo de rigidez a cizalladura, inicial, y secante.
f	: Vector normal a la superficie de fluencia plástica.
g	: Vector normal a la superficie de potencial plástico.
g	: Función de degradación definida en el espacio de deformaciones.
g^f	: Energía específica de fractura.
g^p	: Energía específica plástica disipada.
g_C^p	: Energía específica plástica disipada al finalizar un proceso uniaxial inelástico de compresión.
g_T^p	: Energía específica plástica disipada al finalizar un proceso uniaxial inelástico de tracción.
G	: Función de potencial plástico, definida en el espacio de tensiones.
G^f, G^c	: Energía de fractura por unidad de área fracturada, y energía de aplastamiento.
h_n	: Tensor de segundo orden, función del estado actual del proceso elasto-plástico.
h_c	: Escalar, función del estado actual del proceso elasto-plástico.
H_{cr}	: Función tensorial de evolución interna de la deformación plástica.
H_n	: Función escalar de evolución interna, de la variable de daño plástico.
H_c	: Función escalar de evolución interna, de la variable de cohesión.
\hat{H}_j	: Función escalar de evolución interna de la variable j de degradación plástica.
H^d	: Función de endurecimiento de degradación.
$H_{ijkl} \equiv \underline{\underline{\underline{H}}}$: Tensor de cuarto orden de flexibilidad elástica, expresado en notación indicial y tensorial.
I	: Matriz unidad o identidad.
I_1, I_2, I_3	: Primer, segundo y tercer invariante del tensor de tensiones σ_{ij} .
I'_1, I'_2, I'_3	: Primer, segundo y tercer invariante del tensor de deformaciones ϵ_{ij} .
$J_1 = 0, J_2, J_3$: Primer, segundo y tercer invariante del tensor desviador de tensiones s_{ij} .
$J'_1 = 0, J'_2, J'_3$: Primer, segundo y tercer invariante del tensor desviador de deforma-

$\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_K, \hat{\mathbf{k}}_G$: Vectores que dan la dirección de la degradación elástica.
k_G, k_T	: Coeficiente de escala entre la cohesión y la tensión uniaxial de compresión y tracción respectivamente – dependen del criterio de fluencia
\mathcal{K}	: Función de endurecimiento plástico.
K, K^0, K_S	: Módulo de rigidez volumétrico, en el instante inicial, y secante.
K_I, K_{II}, K_{III}	: Factores de intensidad de tensión.
K_{Ic}	: Tenacidad del material.
$\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \mathbb{K}_3$: Constantes de ajuste entre resistencias uniaxiales, para la la función de Mohr-Coulomb modificada.
$\tilde{\mathbf{l}}_j$: Vector definido en el espacio de tensiones.
L^f	: Ancho de una fisura distribuida.
L^p	: Ancho de la zona dañada plásticamente.
\mathbb{M}	: Matriz de transformación de un sistema de referencia local a uno global.
\mathbf{q}_β	: Variables internas elásticas.
\mathbf{q}_α	: Variables internas plásticas.
$R(\kappa^p)$: Función de la relación de resistencias uniaxiales.
r_d^0	: Límite inicial de degradación.
r_ξ	: Factor de peso correspondiente al volumen del material inerte.
\mathbf{S}	: Tensión en una fisura en ejes locales.
$s_{ij} \equiv \underline{\underline{s}}$: Tensor de segundo orden desviador de tensiones, expresado en notación indicial y tensorial.
w	: Energía específica primal.
x_1, x_2, x_3	: Sistema de referencia global.

INDICE**PARTE PRINCIPAL****CAPITULO I :
INTRODUCCION Y OBJETIVOS.**

I.1.- INTRODUCCION	3
I.2.- OBJETIVOS	5
I.3.- CONTENIDO	7

**CAPITULO II :
RESEÑA SOBRE LAS PROPIEDADES BASICAS DEL HORMIGON.**

II.1.- INTRODUCCION	9
II.2.- MECANISMOS DE FALLO EN EL HORMIGON	10
II.3.- COMPORTAMIENTO DEL HORMIGON SOMETIDO A CARGAS, Y SU RELACION CON LOS MECANISMO DE FALLO	12
II.3.a- Comportamiento uniaxial a compresión	12
II.3.b- Comportamiento uniaxial a tracción	14
II.3.c- Comportamiento biaxial	16
II.3.d- Comportamiento triaxial	19
II.3.e- Conclusiones generales sobre el comportamiento del hormigón sometido a cargas ..	20
II.4.- RELACION TENSION-DEFORMACION VOLUMETRICA y DISTORSIONAL	22

**CAPITULO III :
RESEÑA SOBRE LOS MODELOS CONSTITUTIVOS PARA HORMIGONES -
ESTADO DEL ARTE.**

III.1.- INTRODUCCION	25
III.2.- MODELOS ELASTICOS	26
III.2.a- Formulación secante total	27

• Modelo de Cedolin et al.	27
• Modelo de Kotsovos-Newman	29
III.2.b- Formulación diferencial	30
• Modelo de Shareef and Buyukozturk	31
• Modelo de Fractura Progresiva de Dougill	34
III.3.- MODELOS BASADOS EN LA TEORIA DE LA PLASTICIDAD	37
III.3.a- Modelos de plasticidad perfecta o plasticidad sin endurecimiento	37
III.3.b- Modelos de plasticidad con ablandamiento, con o sin degradación de rigidez	38
• Modelo elasto-plástico con ablandamiento ortotrópico de Murray et al.	38
III.3.c- Modelos de plasticidad con endurecimiento, con o sin degradación de rigidez	41
• Modelo elasto-plástico con endurecimiento de A. Chen and W.F. Chen	42
• Modelo elasto-plástico con endurecimiento de Z. Bazant and S. Kim.	44
• Modelo elasto-plástico con endurecimiento de D. Han and W. Chen	48
• Modelo elasto-plástico con endurecimiento de M. Klisinski and Z. Mroz	50
• Modelo elasto-plástico con endurecimiento de J. C. Simo and Ju	54
III.3.d- Modelo de zona inerte combinado con plasticidad con endurecimiento	60
• Modelo de Frantziskonis and G. Desai	60
III.4.- MODELOS BASADOS EN LA TEORIA ENDOCRONICA DE LA PLASTICIDAD	64
III.5.- MODELOS DE FRACTURA	66
III.5.a- Modelos de fisura distribuida	67
• Modelo de fisuración distribuida de J. Rots et al.	70
III.5.b- Modelos de fisura-discreta	76
III.5.c- Modelos basados en la mecánica de fractura clásica - elástica lineal.	77
III.6.- NECESIDAD DE UN NUEVO MODELO CONSTITUTIVO	78

CAPITULO IV :

MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO PLASTICO: - PARTICULARIZACION PARA HORMIGONES - .

IV.1.- INTRODUCCION	79
IV.2.- CARACTERISTICAS GENERALES DEL MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO PLASTICO	84

IV.3.- VENTAJAS MAS IMPORTANTES DEL MODELO DE DAÑO PLASTICO	87
IV.4.- VARIABLES FUNDAMENTALES DEL MODELO DE DAÑO PLASTICO	88
IV.4.a- Definición de la variable de daño plástico κ^p	88
IV.4.b- Definición de la ley de evolución de la cohesión – Relación $c - \kappa^p$	95
• Límite de discontinuidad inicial o primer límite de fallo	100
• Límite de tensión máxima o segundo límite de fallo	100
• Límite de tensión última o tercer límite de fallo	100
IV.4.c- Definición de la variable ϕ , ángulo de rozamiento interno – Relación $\phi - \kappa^p$..	100
IV.4.d- Definición de la variable ψ , ángulo de dilatancia – Relación $\psi - \kappa^p$	105
• Introducción	105
• Angulo de dilatancia y su movilidad	109
IV.5.- CRITERIO DE FLUENCIA PLASTICO PROPUESTO	112
IV.5.a- Definición del criterio – Introducción	112
IV.5.b- Determinación de los parámetros α, β, γ	115
• Parámetro α	115
• Parámetro β	116
• Parámetro γ	117
IV.5.c- Forma de la función de fluencia	123
IV.6.- CRITERIO DE POTENCIAL PLASTICO	125
IV.7.- RIGIDEZ TANGENTE – CALCULO DEL VECTOR NORMAL A LA SUPERFICIE DE FLUENCIA PLASTICA	126
IV.7.a- Vector normal a la superficie de fluencia plástica	128
IV.7.b- Puntos singulares en la superficie de fluencia – definición del vector normal	129
• Primer caso de singularidad	130
• Segundo caso de singularidad	132
IV.7.c- Vector normal a la superficie de fluencia plástica expresado según la forma de Nayak-Zienkiewicz	135
• Indeterminación de la constante C_2	136
• Indeterminación de la constante C_3	137
IV.8.- GENERALIZACION DEL MODELO DE DAÑO PLASTICO PARA PROCESOS CON DEGRADACION DE RIGIDEZ	138

<i>IV.8.a-</i> Consideraciones generales	138
<i>IV.8.b-</i> Ecuación constitutiva y rigidez tangente para procesos con degradación	140
<i>IV.8.c-</i> Degradación elástica simple	145
<i>IV.8.d-</i> Degradación elástica diferenciada	150
<i>IV.8.e-</i> Degradación plástica	160
<i>IV.8.f-</i> Regla de flujo asociada para materiales con degradación	163

**CAPITULO IV – ANEXO A :
PARTICULARIZACION DE LA VARIABLE DE DAÑO PLASTICO.**

<i>An-A.1.-</i> PARTICULARIZACION DE LA VARIABLE DE DAÑO PLASTICO PARA CASOS DE CARGAS ESPECIALES	171
<i>An-A.1.a-</i> Introducción	171
<i>An-A.1.b-</i> Problema de tracción uniaxial	171
<i>An-A.1.c-</i> Problema de Compresión uniaxial	172
<i>An-A.1.d-</i> Problema de Compresión biaxial simétrica	173
<i>An-A.1.e-</i> Problema de corte puro	175

**CAPITULO IV – ANEXO B :
FUNCIONES DE COHESION UTILIZADAS EN EL MODELO DE DAÑO PLASTICO.**

<i>An-B.1.-</i> FUNCIONES DE COHESION UTILIZADAS EN EL MODELO DE DAÑO PLASTICO	177
<i>An-B.1.a-</i> Introducción	177
<i>An-B.1.b-</i> Función tensión-deformación plástica lineal y su transformación en una función tensión-daño plástico	178
<i>An-B.1.c-</i> Función tensión-deformación plástica exponencial y su transformación en una función tensión-daño plástico lineal	180
<i>An-B.1.d-</i> Función tensión-deformación plástica exponencial y su transformación en una función tensión-daño plástico	183

**CAPITULO IV – ANEXO C :
CRITERIO DE FLUENCIA DE MOHR-COULOMB MODIFICADO.**

<i>An-C.1.-</i> CRITERIO DE FLUENCIA DE MOHR-COULOMB MODIFICADO	189
<i>An-C.2.-</i> REGLA DE FLUJO ASOCIADA AL CRITERIO DE FLUENCIA DE MOHR-COULOMB MODIFICADO	195

CAPITULO IV – ANEXO D :

ABLANDAMIENTO POR DEFORMACION COMO PROPIEDAD DEL MATERIAL – DIRECCIONALIDAD DEL DAÑO PLASTICO – POST-PROCESO DE RESULTADOS.

An-D.1.-	ABLANDAMIENTO POR DEFORMACION COMO PROPIEDAD DEL MATERIAL	199
An-D.1.a-	Introducción	199
An-D.1.b-	Introducción al fenómeno de localización de deformaciones y bifurcación de la respuesta de un sólido cargado	200
An-D.1.c-	Objetividad en la respuesta y su relación con la localización de deformaciones – Energías disipadas por unidad de área G^I y G^C	201
	An-D.1.c.1 Problema de objetividad en un hipotético modelo uniaxial	202
	• Energía específica plástica para un proceso de tracción uniaxial – Relación con G^I	208
	• Energía específica plástica para un proceso de compresión uniaxial – Relación con G^C	210
	• Particularización de la longitud de daño al dominio discreto	212
	An-D.1.c.2 Problema de objetividad en el modelo multiaxial de daño plástico	216
	An-D.1.c.3 Longitud característica de un elemento finito L^{pl}	217
An-D.2.-	DIRECCIONALIDAD DEL DAÑO PLASTICO EN UN PUNTO Y SU RELACION CON EL FLUJO PLASTICO – POST-PROCESAMIENTO DE RESULTADOS	219
An-D.2.a-	Introducción	219
An-D.2.b-	Dirección del daño plástico en función de las deformaciones plásticas – Relación con otros modelos	220
An-D.2.C-	Forma en que se obtiene la dirección del daño plástico, la magnitud, la energía disipada por cada fisura y el factor de retención de tensiones cortantes	222
	• Direccionalidad del daño plástico	222
	• Magnitud del daño plástico	224
	• Energía disipada por cada punto de la zona dañada	226
	• Factor de retención de tensiones cortantes	226

CAPITULO V :

EJEMPLOS DE APLICACION del "MODELO DE DAÑO PLASTICO".

V.1.-	INTRODUCCION	229
V.2.-	ENSAYO DE COMPRESION Y/O TRACCION BIAxIAL	229
V.2.a-	Consideraciones generales sobre el ensayo	229

V.2.b-	Análisis del ensayo	231
V.3.-	ENSAYO DE TRACCION EN DOS DIRECCIONES ORTOGONALES – PRUEBA DE LA DIRECCIONALIDAD DEL DAÑO	252
V.3.a-	Consideraciones generales sobre el ensayo	252
V.3.b-	Análisis del ensayo	253
V.4.-	ENSAYO A TRACCION SIMPLE DE UNA PROBETA ENTALLADA	265
V.4.a-	Consideraciones generales sobre el ensayo	265
V.4.b-	Análisis del ensayo	265
V.5.-	ENSAYO A FLEXION SIMPLE DE UNA VIGA EN VOLADIZO	273
V.5.a-	Consideraciones generales sobre el ensayo	273
V.5.b-	Análisis del ensayo	273
V.6.-	ENSAYO A FLEXION DE UNA VIGA ENTALLADA SIMPLEMENTE APOYADA	280
V.6.a-	Consideraciones generales sobre el ensayo	280
V.6.b-	Análisis del ensayo	280
V.7.-	ENSAYO A TRACCION DE UNA VIGA CANTILEVER PRETENSADA	290
V.7.a-	Consideraciones generales sobre el ensayo	290
V.7.b-	Análisis del ensayo	291
V.8.-	ENSAYO DE FLEXION Y CORTE EN UNA VIGA ENTALLADA – MODO-MIXTO DE FRACTURA: Modos -I- y -II-	297
V.8.a-	Introducción	297
V.8.b-	Consideraciones generales sobre el ensayo	298
V.8.c-	Análisis del ensayo	299
V.9.-	ENSAYO A FLEXION DE UNA VIGA ARMADA	311
V.9.a-	Consideraciones generales sobre el ensayo	311
V.9.b-	Análisis del ensayo	311

CONCLUSIONES

• Conclusiones sobre la "formulación del modelo constitutivo" propuesto	317
• Conclusiones sobre la "aplicación del modelo constitutivo" propuesto	319

REFERENCIAS

325

PARTE AUXILIAR

APENDICE I :	
FUNDAMENTOS BASICOS DE LOS MODELOS CONSTITUTIVOS ELASTO-PLASTICOS.	
Ap-I.1.-	TEORIA DE LA PLASTICIDAD CLASICA –INTRODUCCION 341
Ap-I.2.-	SOLIDO ELASTICO IDEAL o SOLIDO HOOKEANO 341
Ap-I.3.-	SOLIDO INELASTICO IDEAL –TEORIA DE LA PLASTICIDA CON PEQUEÑAS DEFORMACIONES 345
Ap-I.3.a-	Introducción 345
Ap-I.3.b-	Criterio límite de discontinuidad, o criterio de fluencia plástica para metales 347
Ap-I.3.c-	Comportamiento más allá del límite de elasticidad – Comportamiento elasto-plástico 354
•	Teoría de Levy-Mises 354
•	Teoría de Prandtl-Reus 355
•	Teoría de la plasticidad clásica: Descomposición de la deformación total – Regla de flujo generalizada 357
•	Teoría de la plasticidad clásica: Trabajo plástico unitario – Deformación plástica efectiva 358
•	Teoría de la plasticidad clásica: Superficie de carga plástica – Variable de endurecimiento plástico: κ 361
•	Teoría de la plasticidad clásica: Relación tensión deformación generalizada .. 365
Ap-I.3.d-	Postulados de estabilidad de DRUCKER – Condiciones de PRAGER 367
Ap-I.3.e-	Condiciones de KUHN-TUCKER en plasticidad 370
Ap-I.3.f-	Criterios clásicos de fluencia, o discontinuidad plástica 371
•	Criterio de fluencia plástica de Rankine – De máxima tensión de tracción ... 372
•	Criterio de fluencia plástica de Tresca – De máxima tensión cortante 374
•	Criterio de fluencia plástica de Von Mises – De tensión cortante octaédrica . 378
•	Criterio de fluencia plástica de Mohr-Coulomb – De tensión cortante octaédrica 384
•	Criterio de fluencia plástica de Drucker-Prager 393
Ap-I.3.g-	Comentarios sobre la combinación de criterios de fluencia plástica 403
Ap-I.3.h-	Regla de flujo en puntos singulares 410

APENDICE I – ANEXO E :
TENSOR DE TENSIONES, DEFORMACIONES Y SUS INVARIANTES.

<i>An-E.1.-</i> INTRODUCCION	415
<i>An-E.2.-</i> VECTOR DE TENSIONES: p_t	415
<i>An-E.3.-</i> TENSOR DE TENSIONES: $\sigma_{ij} \equiv \underline{\underline{\sigma}}$	416
<i>An-E.4.-</i> RELACION ENTRE EL VECTOR DE TENSIONES, CORRESPONDIENTE A UN PLANO CUALQUIERA Y EL TENSOR DE TENSIONES – TETRAEDRO DE CAUCHY,	419
<i>An-E.5.-</i> DIRECCIONES PRINCIPALES DE TENSION – INVARIANTES DEL TENSOR DE TENSIONES	421
<i>An-E.6.-</i> COMPONENTE ESFERICA Y DESVIADORA DEL TENSOR DE TENSIONES	425
<i>An-E.7.-</i> TENSOR DE DEFORMACIONES: $\epsilon_{ij} \equiv \underline{\underline{\epsilon}}$	428
<i>An-E.8.-</i> DIRECCIONES PRINCIPALES DE DEFORMACION – INVARIANTES DEL TENSOR DE DEFORMACIONES	429
<i>An-E.9.-</i> COMPONENTE ESFERICA Y DESVIADORA DEL TENSOR DE DEFORMACIONES	431

APENDICE I – ANEXO F :
CASO PARTICULAR DEL TENSOR DE FLUJO PLASTICO.

<i>An-F.1.-</i> INTRODUCCION	435
<i>An-F.2.-</i> VECTOR DE FLUJO PLASTICO DE NAYAK-ZIENKIEWICZ	435

APENDICE II :
ALGUNOS ASPECTOS SOBRE EL TRATAMIENTO NUMERICO DEL MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO PLASTICO.

<i>Ap-II.1.-</i> EQUILIBRIO DEL SOLIDO CONTINUO – PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES	439
<i>Ap-II.1.a-</i> Campos virtuales	439
<i>Ap-II.1.b-</i> Campo de desplazamientos virtuales	439
<i>Ap-II.1.c-</i> Ecuación general de los trabajos virtuales – Identidad fundamental	440
<i>Ap-II.1.d-</i> Formulación del PTV a partir de las variables de desplazamiento y deformación virtual – Principio de los desplazamientos virtuales	441
<i>Ap-II.1.e-</i> Criterio de energía para formular la condición de estabilidad en la solución	443
<i>Ap-II.1.f-</i> Criterio de energía para formular la condición de unicidad en la solución	446
<i>Ap-II.2.-</i> EQUILIBRIO DEL SOLIDO DISCRETO	447

Ap-II.3.- RESOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO NO LINEAL . . .	453
Ap-II.3.a- Introducción	453
Ap-II.3.b- Método general de control de respuesta	454
Ap-II.3.c- Método de control de respuesta, a través de un camino esférico	456
Ap-II.3.d- Propuesta de una variante simple de control, a través de un camino plano	458
Ap-II.3.e- Algoritmo de control de plastificación	461
Ap-II.4.- INTEGRACION DE LA ECUACION CONSTITUTIVA	464
Ap-II.4.a- Introducción	464
Ap-II.4.b- Justificación y validez del factor de consistencia plástica adoptado	468
Ap-II.4.c- Implementación del algoritmo de retorno radial	469

– PARTE PRINCIPAL –

CAPITULO I

INTRODUCCION Y OBJETIVOS

I.1.- INTRODUCCION

El comportamiento de las estructuras sometidas a solicitaciones externas, ha sido objeto de intenso estudio desde principios de este siglo. Debido a la gran complejidad que involucraba su análisis mediante la "mecánica-teórica" [70] [81], se recurría frecuentemente, a procedimientos basados en hipótesis que simplificaban drásticamente los principios de esta ciencia, combinados con formulaciones empíricas elaboradas a partir de una gran cantidad de resultados experimentales. Así, en un pasado reciente (primera mitad de este siglo), mediante estos procedimientos simplificativos, solo se podían resolver algunos de los innumerables problemas del diseño estructural. Estas técnicas, aún hoy siguen teniendo vigencia en la resolución de problemas triviales, donde las hipótesis simplificativas no son tan severas y el bagaje de conocimientos experimentales, sobre el tema de análisis, es muy amplio.

Pero en la actualidad existe, entre otras, una técnica basada en procedimientos numéricos de aproximación de funciones, que se conoce con el nombre de "método de los elementos finitos" [25] [144] y que es, para algunos casos de diseño y verificación estructural, una necesidad de uso antes que una alternativa. Esta potente técnica numérica permite desarrollar estudios más realistas sobre el comportamiento de las estructuras, que los llevados a cabo en el pasado por medio de simplificaciones necesarias debido a razones prácticas.

La investigación basada en cualquier técnica numérica, se nutre necesariamente de análisis experimentales que corroboran su fiabilidad. De esta forma, los estudios numéricos tratan de reproducir los resultados experimentales desarrollados en pequeña escala (muestras de laboratorio), y los "extrapola" a una escala mayor (nivel estructural). Esta posibilidad de extender el concepto de

un *comportamiento físico simple a uno complejo*, se logra gracias al uso de una formulación matemática, capaz de describir el *funcionamiento físico macroscópico de los sólidos*, que recibe el nombre de “*modelo constitutivo de un material*”. Los fundamentos de la aplicación práctica de estos modelos de simulación de comportamiento, se encuentran en la concurrencia de la “*mecánica-teórica*” junto a las “*técnicas numéricas*”; conjunción de conocimientos teórico- numéricos que en la actualidad ya se conoce con el nombre de “*mecánica- computacional*”.

Los modelos constitutivos destinados a simular el comportamiento de los materiales friccionales, han tenido un marcado desarrollo en los últimos años. La razón de ser de estas formulaciones matemáticas y de su constante evolución, se encuentra en la insuficiencia que presentan las teorías constitutivas más simples (como la *ley elástica-lineal*) para reproducir el comportamiento físico de los materiales friccionales dentro de todo su rango de trabajo. En general, se han formulado diversos tipos de modelos constitutivos que van desde reproducir *procesos elásticos lineales o no-lineales*, a *inelásticos dependientes (o no) del tiempo*. Además, estos modelos también han sido formulados considerando *leyes de compatibilidad* en pequeñas y/o grandes deformaciones, y en *configuraciones de equilibrio* para pequeños y/o grandes desplazamientos.

Para el caso particular del material estructural llamado “*hormigón-armado*”, existen *distintas alternativas* que permiten simular su respuesta ^[33]. Entre éstas, es posible definir dos modelos constitutivos, uno para el acero y otro para el hormigón; siendo el método de los elementos finitos el encargado de obtener el comportamiento compuesto de ambos a la vez. En el caso que la unión *acero-hormigón* no sea *perfecta*, el mismo método, mediante elementos finitos especialmente definidos (elementos de juntas), puede contemplar una adherencia *cuasi-perfecta* entre los dos materiales, permitiendo así emular el comportamiento del material compuesto. Con esta técnica no es necesario afectar a las leyes constitutivas de cada material simple, ni definir un modelo constitutivo especial para el hormigón-armado.

El trabajo desarrollado en esta tesis, formula un “*modelo constitutivo que permite simular el comportamiento de un material cohesivo-friccional*”, con especial énfasis en el hormigón (*cap. IV*). Las bases del modelo se encuentran en la “*mecánica de los medios continuos*”, la que permite presentar una formulación consistente sobre el comportamiento físico de los sólidos en general, y en particular

de aquellos que resisten gracias a la acción conjunta de la *cohesión* y la *fricción* entre sus partículas granulares.

Para aplicar la formulación teórica del modelo, y poder resolver los ejemplos de comprobación (*cap. V*), ha sido necesario recurrir a soluciones numéricas, que en algunos casos presentan ligeros cambios respecto a las ya existentes (*Ap-II*). Este trabajo teórico-numérico, ha sido introducido en un programa de elementos finitos, desarrollado para este fin exclusivo (*Ap-II*).

Para poder establecer una comparación más objetiva entre este modelo, formulado para describir el comportamiento del hormigón, y otros ya existentes destinados al mismo fin, se presenta una relación de modelos constitutivos que incluye las más recientes investigaciones sobre el tema (*cap. III*).

I.2.- OBJETIVOS

Con el ánimo de aumentar el conocimiento sobre el comportamiento *físico, mecánico y numérico* de los hormigones, se han desarrollado en el mundo diversas corrientes investigadoras que han profundizado en estas *tres disciplinas básicas*, dejando un apreciable cúmulo de experiencias aprovechables. En este trabajo se pretende hacer un aporte al conocimiento ya existente, analizando el comportamiento del hormigón desde el punto de vista "mecánico-numérico".

Las motivaciones que impulsaron a este estudio se encuentran en los innumerables interrogantes que, a pesar de todo lo que se ha investigado en los últimos años, aún subsisten sobre el conocimiento del hormigón, dentro de su rango total de comportamiento.

Hasta la escritura de esta tesis, el continuado trabajo de investigación ha producido diversos modelos constitutivos, unos más potentes que otros (*cap. III*); pero por norma general, cada modelo ha tratado de solucionar uno o más problemas, según sea la exigencia y la motivación que haya conducido a su desarrollo. El modelo constitutivo que aquí se presenta, como todos los ya formulados, tiene una estructura matemática limitada; pero está orientado a solucionar algunos aspectos que otros no han considerado : *El comportamiento total y unificado de procesos a compresión y/o tracción, considerando los respectivos fenómenos de aplastamiento y fisuración, a través de una única*

formulación teórica. Los resultados obtenidos son bastante buenos comparados con los que proporcionan los estudios experimentales (*cap. V*).

Entre las características más destacadas del modelo que se presenta, se pueden citar las siguientes:

- *Trata en forma unificada los procesos multiaxiales a tracción y compresión, mediante una formulación inelástica sólidamente fundada en la teoría matemática de la plasticidad.*
- *Define entre sus variables internas, la variable de daño plástico y la cohesión, y permite, si fuese necesario, definir también como variables internas el rozamiento entre partículas, y la dilatancia. Estas variables internas, siguen una ley de evolución que depende del proceso elasto-plástico mismo, y de unas funciones que son ajustadas a partir de resultados experimentales uniaxiales.*
- *Permite definir distintos tipos de criterios de discontinuidad inicial (fluencia inicial para los metales) y subsecuentes superficies de carga plástica, controladas por una regla de endurecimiento que tiene un sentido físico directo, estableciendo así los distintos estados elasto-plásticos consistentes.*
- *Trata el flujo plástico a través de una regla de normalidad, asociada a una superficie de potencial plástico, que puede o no coincidir con las de carga plástica. Esta función potencial es la que garantiza el control del fenómeno de dilatancia.*
- *Considera que los materiales no solo tienen distintos límites tensionales de falla a tracción y a compresión, sino también distingue para cada uno de estos procesos, deformaciones últimas diferentes. Esto se consigue mediante una generalización de la variable de endurecimiento plástico, a la que en este modelo se le ha dado el nombre de variable de daño plástico.*
- *Permite simular el comportamiento multiaxial, a partir de datos que surgen de ensayos experimentales uniaxiales.*
- *Trata el concepto de daño y su macro-direccionalidad, a partir del fenómeno de localización de deformaciones.*
- *A modo informativo, obtiene el daño local (daño en un punto), y su dirección,*

mediante un *post-procesamiento de resultados*, una vez que se converge al estado de equilibrio.

- La inclusión de una formulación constitutiva de este tipo en un *programa de elementos finitos de propósito general*, capacitado para el cálculo no-lineal no es excesivamente costoso, más bien relativamente simple.

I.3.- CONTENIDO

La tesis formula un *modelo constitutivo para simular el comportamiento de un material cohesivo-friccional, con una especial orientación hacia los hormigones*. Está dividida en cinco capítulos, de los cuales esta introducción es el primero.

En el *capítulo segundo*, se hace una breve descripción de las *propiedades básicas del hormigón*. Estas permiten comprobar el *grado de aproximación*, al comportamiento real, que se logra con el modelo constitutivo formulado.

En el *capítulo tercero*, se presentan, en forma sintética los *modelos constitutivos más usuales*, incluyendo los de reciente aparición. Se da especial importancia al tratamiento de aquellos que hacen uso de la *teoría de la plasticidad*.

En el *capítulo cuarto*, tema central de la tesis, se describe *in-extenso* la formulación del modelo, comenzando por la presentación de sus *variables internas*, hasta llegar a *establecer su forma más general*, incluyendo el fenómeno de *degradación de rigidez durante el proceso elástico y/o plástico*. En este mismo capítulo, se presenta un nuevo *criterio de fluencia* desarrollado para mejorar las aplicaciones del modelo. También en los anexos de éste, se desarrollan temas que complementan la formulación del modelo, y que fueron separados del cuerpo principal del capítulo para ofrecer una presentación más clara. Entre los temas tratados en dichos anexos, se encuentra una *modificación de la función de Mohr-Coulomb*, con la que se han resuelto gran parte de los ejemplos de verificación.

En el *capítulo quinto*, se describen algunos *ejemplos de verificación*, que dan muestra de la bondad de los resultados obtenidos para distintos problemas seleccionados. Especialmente, a partir de éstos se puede controlar el funcionamiento del modelo numérico frente a cada comportamiento mecánico.

Por último, al final de la tesis se presentan *apéndices* que desarrollan todos aquellos conceptos ya conocidos y que sirven de apoyo al tema central desarrollado

en el *capítulo IV*. No obstante, en éstos se describen también algunos *enfoques particulares de gran importancia sobre la teoría de la plasticidad clásica*. Además, se propone una *modificación simple y original sobre la técnica numérica de control de desplazamientos, a través de un camino plano*, que mejora la convergencia hacia la solución durante la resolución del sistema de ecuaciones no-lineales; y se desarrolla una *variante sobre el algoritmo de retroceso radial de Euler*, que mejora la integración numérica de la *ecuación constitutiva elasto-plástica* para procesos que incluyen *ablandamiento por deformación*, y por último, se propone también un algoritmo de *control de plastificación* para ser tratado dentro de los métodos de control de desplazamiento antes mencionados.

La estructura con que se ha redactado la tesis, *permite consultar directamente la formulación del modelo constitutivo que se propone, mediante una lectura del capítulo IV y sus respectivos anexos (An-A, An-B, An-C y An-D); y verificar sus cualidades* a través de los ejemplos presentados en el *capítulo V*. Debido a que durante la lectura de estos dos capítulos pueden presentarse algunos conceptos que requieren mayor explicación, se desarrolla una *parte auxiliar* compuesta de dos *apéndices*. El primero de ellos (*Ap-I*), junto con sus dos *anexos (An-E y An-F)*, tratan algunos conceptos de la teoría de la plasticidad clásica que sirven de base para la interpretación del modelo constitutivo; y el segundo, *Ap-II*, está orientado al tratamiento numérico de los temas que han requerido mayor atención en la implementación de este modelo constitutivo.

En los *capítulos II y III* se hace un estudio sobre el *conocimiento actual del comportamiento del hormigón y las distintas formas de modelar matemáticamente dicho comportamiento*, respectivamente, permitiendo cotejar el concepto básico de los distintos modelos existentes con el que se propone en esta tesis.

CAPITULO II

PROPIEDADES BASICAS DEL HORMIGON

II.1.- INTRODUCCION.

En este capítulo, se hace una breve presentación, de algunas de las características y propiedades básicas del hormigón sometido a estados de tensión uniaxial, biaxial y triaxial.

Es evidente que un mejor conocimiento del material que se pretende modelar matemáticamente, asegura una mejor concordancia del modelo constitutivo que se formula, con la realidad que se desea simular. Así, este capítulo puede servir como una guía breve de las propiedades básicas más importantes que deben considerarse en la formulación de un modelo constitutivo para hormigones, y también como información sobre los valores y rangos de validez de las magnitudes más significativas que condicionan la respuesta mecánica de este material.

El comportamiento del hormigón es altamente complicado e influenciado por distintos fenómenos, intrínsecos y extrínsecos, que hacen necesario recurrir a hipótesis simplificadoras que conduzcan a drásticas *idealizaciones* sobre su comportamiento, con el fin de poder modelarlos matemáticamente ^[34]. Es bien sabido, que éste resulta muy influenciado por la formación y desarrollo de *micro-fisuras* en el mortero y en la interfase entre mortero y agregado pétreo ^[44]. Estos defectos se inician en la etapa de *curado*, y crecen en función del estado tensional al que se somete el cuerpo del sólido ^[46] durante su vida útil. El fenómeno de micro-fisuración y deslizamiento entre partículas granulares, conduce a un comportamiento altamente no-lineal e inelástico, tal que la ley constitutiva tensión-deformación, está caracterizada por un período elástico inicial, seguido de un comportamiento inelástico con *endurecimiento* y gradual pérdida de rigidez, que conduce a una etapa posterior dominada por *ablandamiento*. Esta micro-fisuración es la responsable del fenómeno de expansión de volumen inelástico, conocido con el nombre de *dilatancia* ^{[33][35]}.

Debido a que la resistencia a tracción es sensiblemente más baja en la interfase *mortero-agregado pétreo*, se produce una pérdida de tensión en el material compuesto (hormigón), que se refleja en una resistencia a tracción sensiblemente menor que a compresión ^[33].

II.2.- MECANISMOS DE FALLO EN EL HORMIGÓN.

Existe una gran cantidad de investigadores que en los últimos años han trabajado en el estudio experimental del comportamiento del hormigón. Entre el cúmulo de conclusiones que han alcanzado, se puede encontrar la descripción de los mecanismos de iniciación y avance progresivo del daño por fractura. Es posible observar que las micro-fisuras existen en la masa del hormigón, aún antes de iniciar cualquier proceso de carga ^{[27][41][44][46]}. Esta micro-fisuración previa, se encuentra normalmente localizada en la zona de transición entre el agregado pétreo y el mortero de cemento o matriz, y algunas veces alcanza a penetrar dentro de esta última ^{[33][44]}.

De la observación realizada en hormigones sometidos a efectos de carga, resultan identificables cuatro mecanismos de daño, que pueden ser clasificados según su orden cronológico de aparición *fig.(II.1)* ^[44], en:

- Microfisuras en la interfase entre agregado pétreo y la pasta de cemento, debido al desprendimiento del árido.
- Incursiones en la pasta de cemento, de las micro-fisuras originadas en la interfase con el agregado pétreo.
- Fisuras originadas en el mortero o pasta de cemento, con una orientación dominante, normal a la deformación principal de tracción ^{[35][129][130]}. También aparecen en esta etapa, nuevas fisuras que interconectan las oquedades o espacios vacíos que existen en la matriz.
- Conexiones entre las distintas fisuras, lo que conduce al fallo total del sólido. En este límite último, el árido provoca un efecto de *cuña o engranamiento* entre las caras de las fisuras, contrarrestando la pérdida de resistencia que se ha producido en la dirección normal a ella.

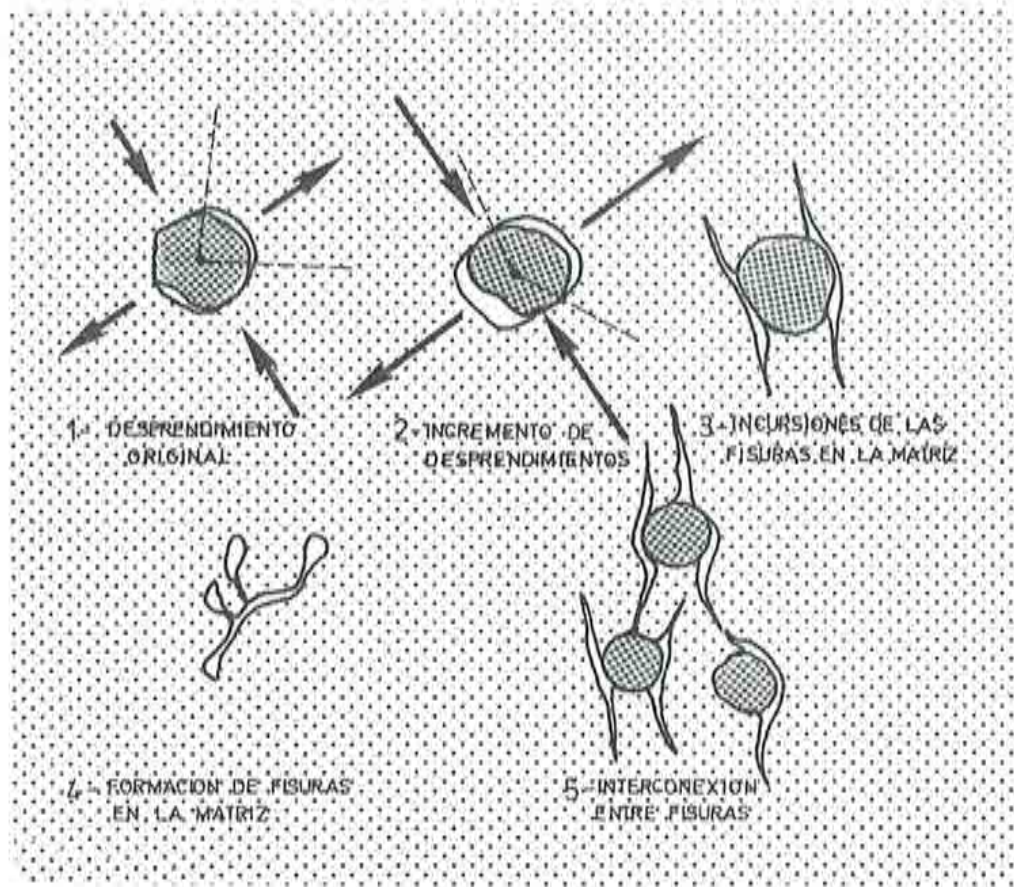


fig.(II.1): Mecanismos de daño en el hormigón [44] .

A esta descripción, se pueden agregar estudios realizados por Mindess and Diamond [11][85], sobre fisuración de morteros de cemento, donde se puede ver que en lugar de fisuras continuas, existe una gran cantidad de *fisuras discontinuas no orientadas*. De todo esto, se deduce que la micro-fisuración sigue una distribución microscópica errática.

Esta descripción cronológica, de los mecanismos de fallo que sufre el hormigón, es actualmente sostenida en sus aspectos generales por un gran número de investigadores [11][14][28][33][34][42][46][85][116][121][129][136], y muestra que la fisuración a nivel microscópico (en un punto de la masa del sólido) no es un fenómeno direccional, sino adireccional, que a su vez se *propaga en determinadas direcciones*

dentro del sólido, llegando a concentrarse en determinadas zonas del mismo (zona de daño).

Superando el nivel microscópico, se puede observar una dirección predominante de las fisuras. Así pues, la orientación de éstas queda marcada por el lugar geométrico que describen los puntos dañados (fenómeno *macro-direccional* o *no-local*) y no por cada simple punto dañado (fenómeno *micro-direccional* o *local*).

II.3.- COMPORTAMIENTO DEL HORMIGÓN SOMETIDO A CARGAS, Y SU RELACION CON LOS MECANISMOS DE FALLO.

II.3.a- Comportamiento uniaxial a compresión.

El proceso por el cual el hormigón sufre deformaciones en estado de compresión uniaxial y llega al fallo como consecuencia del desarrollo e interconexión de micro-fisuras, ha sido muy estudiado por diversos investigadores [1][34][35][44][46][72][74][136]... En este apartado, se tratarán las características fundamentales del comportamiento tensión-deformación del hormigón fig.(II.2), que surge de estudios uniaxiales a compresión simple. Los resultados que se comentan, se obtienen normalmente a través de una medición de la deformación, referida a una longitud menor que tres veces el tamaño máximo del árido grueso ^[44]. En este contexto las fisuras no son evaluadas como una discontinuidad del material ^[44].

Mediante el tipo de comportamiento volumétrico que exhibe el sólido, se pueden distinguir durante un proceso de carga cinco estados de respuesta bien definidos:

Estado I : *período de acomodamiento*, donde los poros tienden a cerrarse, tramo ($O-E'$) fig.(II.2). Este período se caracteriza por una disminución de la deformación volumétrica (*apart. IV.4.d*), manteniendo constante su rigidez.

Estado II : *período elástico lineal*, que se inicia a una tensión aproximada del 10% de la máxima, tramo ($E'-E$) fig.(II.2), y su característica fundamental es el mantenimiento constante de la rigidez y del módulo de Poisson.

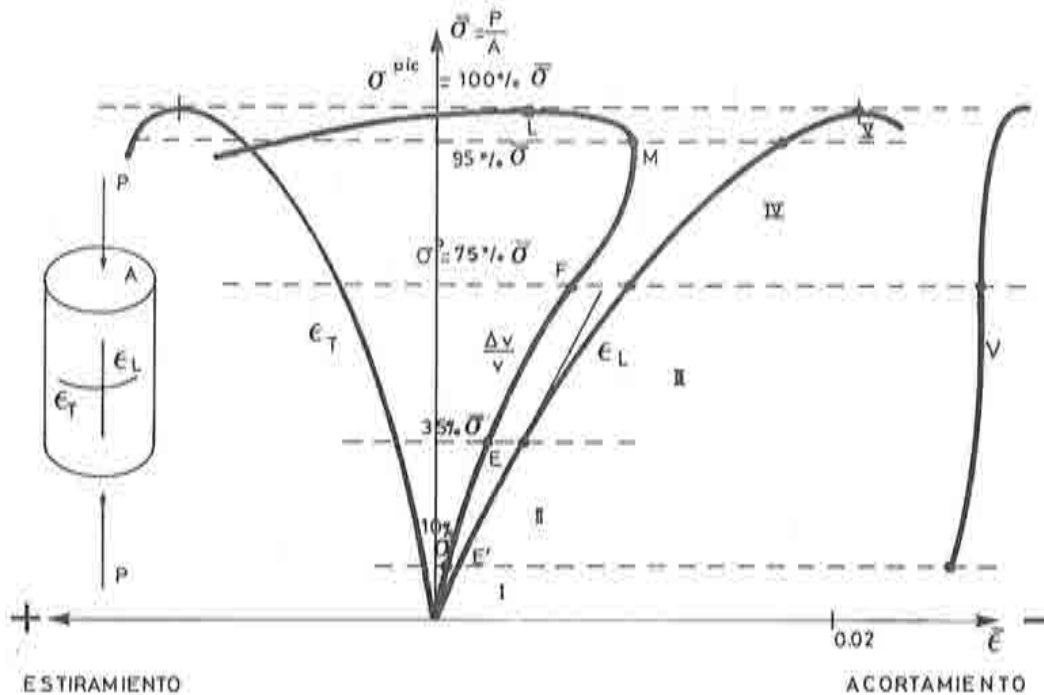


fig.(II.2): Respuesta esquemática a compresión uniaxial, estados de tensión en el hormigón ^[44].

Estado III : período elástico no-lineal, que se inicia a una tensión de alrededor del 35% de la máxima, tramo (E-F) fig.(II.2), y su característica fundamental está marcada por un proceso donde las deformaciones, que son totalmente recuperables, crecen más que las tensiones. Esto se debe a la presencia de un fenómeno de *degradación de rigidez* ^[56].

Estado IV : período inelástico acompañado por un hinchamiento, que se inicia a una tensión del orden del 75% de la máxima (límite de discontinuidad de Newman ^[130]), tramo (F-M) fig.(II.2). Se caracteriza por el aumento de las deformaciones inelásticas, mayor pérdida de rigidez, incremento del coeficiente de Poisson (hinchamiento) y crecimiento de las micro-fisuras, en la pasta de cemento, cuyo plano se orienta generalmente en forma normal a la deformación máxima positiva (estiramiento) ^{[36][136]}. En compresión uniaxial, estos planos se orientan paralelamente a la máxima tensión de compresión ^{[72][129]}, situación

que coincide con el criterio antes mencionado. Este estado de comportamiento, puede asociarse con un proceso plástico, siempre que se relacione el desarrollo de deformaciones permanentes con el fenómeno de micro-fisuración ^{[29][34]}.

Estado V : *período inelástico acompañado por un importante incremento de deformación y pérdida de la estabilidad bajo carga sostenida.* Se inicia a una tensión del orden del 95% de la máxima, tramo (M-L) fig.(II.2). Se caracteriza por que en algunos puntos, comienza un proceso de propagación inestable de fisuras. Para el estudio experimental del comportamiento más allá del pico de tensiones, es necesario realizar un ensayo con control de desplazamiento; situación que conduce a observar un ablandamiento en el material (pérdida de tensión con incrementos de deformación). Inmediatamente después de superar la tensión de pico, ocurre un fenómeno de disminución brusca del incremento de volumen, llegando rápidamente a producirse fuertes incrementos negativos de volumen fig.(II.2). Con el inicio de este quinto estado, concluye el fenómeno de micro-fisuración para dar lugar a un fenómeno de fisuración macroscópica ^{[33][34][46][120]} (macro-fisuración).

Estos cinco estados, se encuentran en general para cualquier hormigón, independientemente de su resistencia. Se encuentra además, que el pico de tensiones máximas ocurre siempre para deformaciones del orden del -2.5% , y que el aumento de la resistencia máxima, hace que el material tenga un comportamiento más frágil ^[33].

En lo que respecta al módulo de elasticidad inicial E^0 , se puede decir que depende de la resistencia máxima a compresión. Es habitual estimar su magnitud, a través de expresiones formuladas empíricamente ^{[66][134]}.

Para hormigones, la relación de Poisson ν oscila entre $0.15 \leq \nu \leq 0.22$, siendo un valor razonable 0.19 o 0.20. Esta relación, para procesos uniaxiales, se mantiene constante hasta el 75 - 80% de la tensión pico, incrementándose después de este límite hasta valores próximos a $\nu \simeq 0.5$ ^[33].

II.3.b- Comportamiento uniaxial a tracción.

La forma de las curvas tensión-deformación a tracción, muestra mucha similitud con la de compresión uniaxial descrita en el apartado anterior ^{[33][134][136]}, sólo que el rango de comportamiento lineal se mantiene hasta límites más cercanos al

pico de tensiones (resistencia máxima a tracción) fig.(II.3). Se pueden distinguir tres estados de comportamiento:

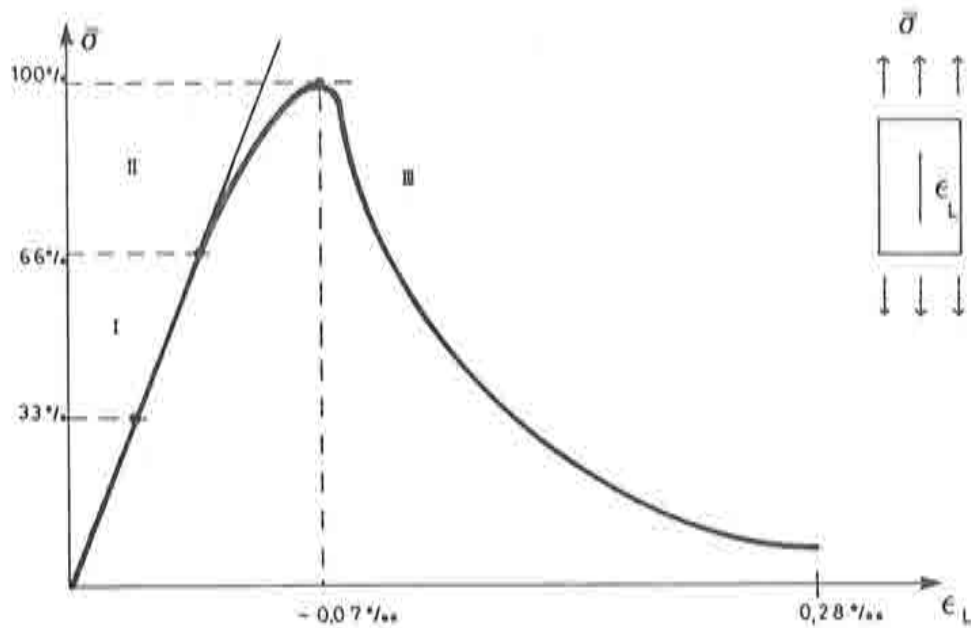


fig.(II.3): Respuesta esquemática a tracción uniaxial, estados de tensión en el hormigón ^[44].

Estado I : Hasta tensiones menores al 60% de la máxima resistencia a tracción, se puede despreciar el fenómeno de formación de nuevas fisuras, manteniendo un comportamiento elástico-lineal. El final de este período marca el límite elástico fig.(II.3).

Estado II : Por encima del límite elástico se inicia un crecimiento de las microfisuras (mayor desprendimiento del agregado pétreo), bajo un proceso de carga estable ^[44], que se mantiene hasta alcanzar el 75% de la tensión pico, donde la propagación de algunas microfisuras se hace inestable, exhibiendo en la curva tensión deformación un comportamiento ligeramente no-lineal hasta alcanzar el pico de tensiones.

Estado III : El desarrollo de las fisuras se localiza en una zona pequeña del

sólido ^[44] y se inicia un proceso inestable con rápida propagación de las fisuras, que sólo puede ser capturado por máquinas de ensayo muy rígidas ^{[5][33][44]}. En caso contrario sólo se registra una caída brusca de tensión, que hace pensar que se trata de un material mucho más frágil de lo que es.

Es importante remarcar que Hughes and Chapman ^[33] han registrado, durante ensayos de tracción uniaxial, deformaciones últimas treinta veces mayores que las correspondientes al pico de tensiones. En cambio DiTommaso ^[44] mantiene que la deformación máxima de tracción es del orden de cuatro veces más alta que la registrada en el momento de alcanzar el pico de tensiones. Es probable que esta seria discrepancia surja de la forma en que ambos investigadores han realizado los ensayos.

La relación entre la resistencia uniaxial inicial a compresión y tracción puede variar considerablemente entre los siguientes límites $10.0 \leq \sigma_c^0 / \sigma_t^0 \leq 20.0$ ^{[33][133]}.

El módulo de elasticidad en tracción uniaxial es algo mayor que a compresión uniaxial, el coeficiente de Poisson algo más bajo, y la deformación en el pico de tensiones oscila entre 0.07% y 0.15% .

II.3.c- Comportamiento biaxial.

El vasto espectro del comportamiento de las estructuras puede ser muchas veces aproximado mediante estados planos de tensión o deformación, resultando por lo tanto de gran interés el estudio de la respuesta del hormigón bajo estados de tensión biaxial. Para diferentes combinaciones biaxiales de tensiones, el hormigón exhibe propiedades distintas que las descritas para procesos uniaxiales de tracción o compresión. En lo que respecta a su resistencia máxima, se pueden observar incrementos del orden del $22.0 - 25.0\%$ para estados de compresión biaxial con una relación entre tensiones principales máximas y mínimas de $(\sigma_3 / \sigma_1) = 0.5$, y del 16.0% para estados de compresión biaxial con una relación entre tensiones principales máximas y mínimas de $(\sigma_3 / \sigma_1) = 1.0$ ^{[74][136]} fig.(II.4,a). Además, para estados de tracción-compresión, la resistencia decrece casi linealmente cuando la tensión de tracción crece. Para tracción biaxial, la resistencia es muy similar a la que se obtiene en tracción uniaxial ^{[35][74][136]}.

Para compresión biaxial, el hormigón sufre un incremento de rigidez inicial,

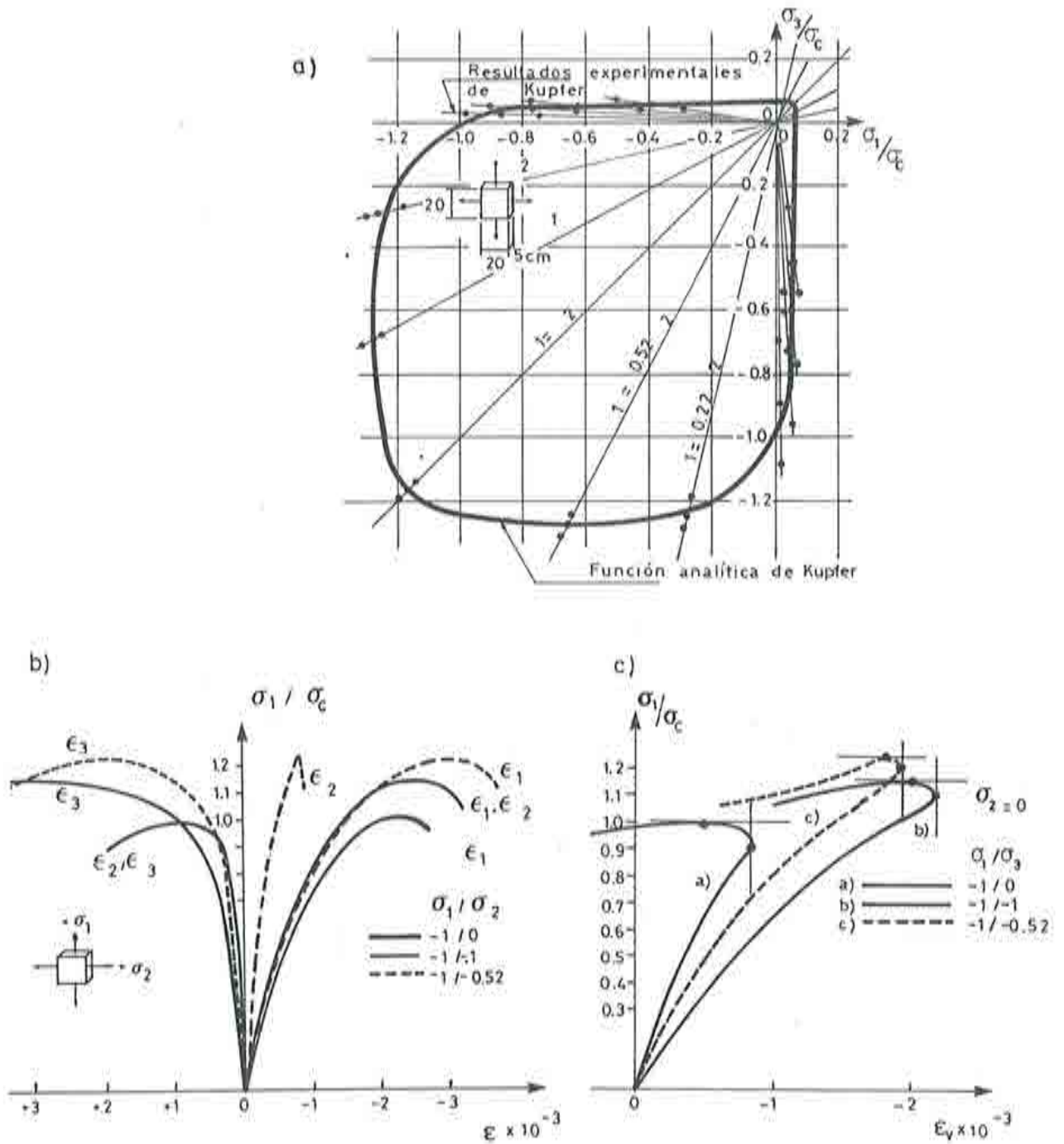


fig.(II.4): Resultados de un ensayo biaxial de compresión biaxial en una probeta de hormigón de $20 \times 20 \times 5\text{cm}$. (Kupfer et al. [74]): a) Superficie de resistencia máxima del hormigón. b) Relaciones tensión-deformación. c) Deformación volumétrica.

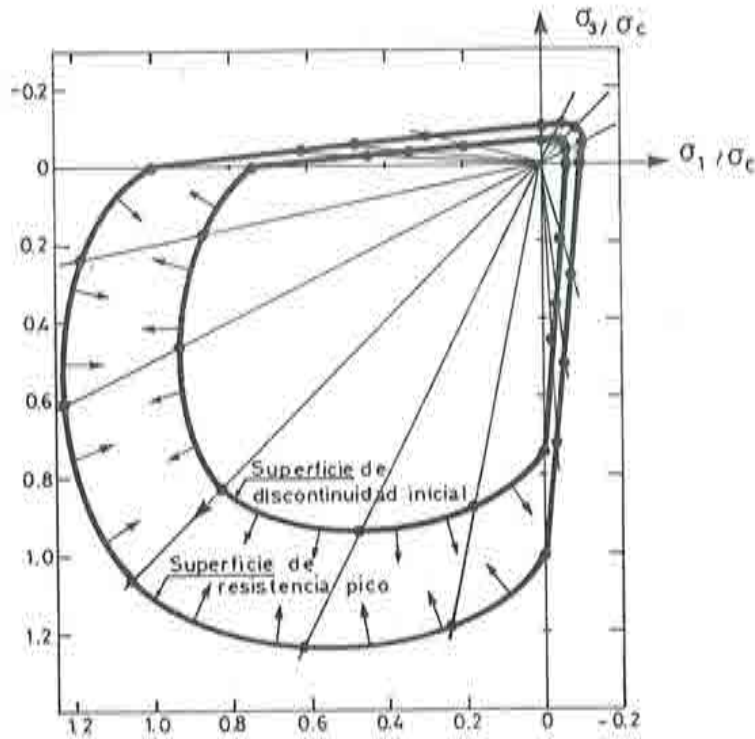


fig.(II.5): Superficie de discontinuidad inicial y de resistencia pico ^[136].

respecto de la respuesta uniaxial, que puede ser atribuido al efecto Poisson ^[134], y un incremento de ductilidad en el pico de tensión fig.(II.4,b), que indica que hay una reducción del daño interno ^[134]. Hay también una disminución de volumen más marcada que para el proceso uniaxial de compresión fig.(II.4,c).

La formación de las fisuras ocurre aproximadamente en una *dirección perpendicular a la máxima deformación de tracción* ^{[35][130]}, situación que puede ser comprobada en los modos de fallo que da Nilssen ^[33] para las distintas combinaciones posibles de tensión biaxial fig.(II.6).

Esta micro-fisuración, es una de las principales causas que producen un comportamiento no lineal en el hormigón, y que conducen a desarrollar el fenómeno denominado *dilatancia* ^[35].

La *superficie de discontinuidad inicial* en hormigones (para los metales la primera superficie de fluencia), mantiene su forma a medida que evoluciona el proceso de carga ^[136], de manera que el *endurecimiento* o el *ablandamiento*

isotrópico producen, como es obvio, un *crecimiento* o *decrecimiento homotético* del dominio elástico, respectivamente fig.(II.5).

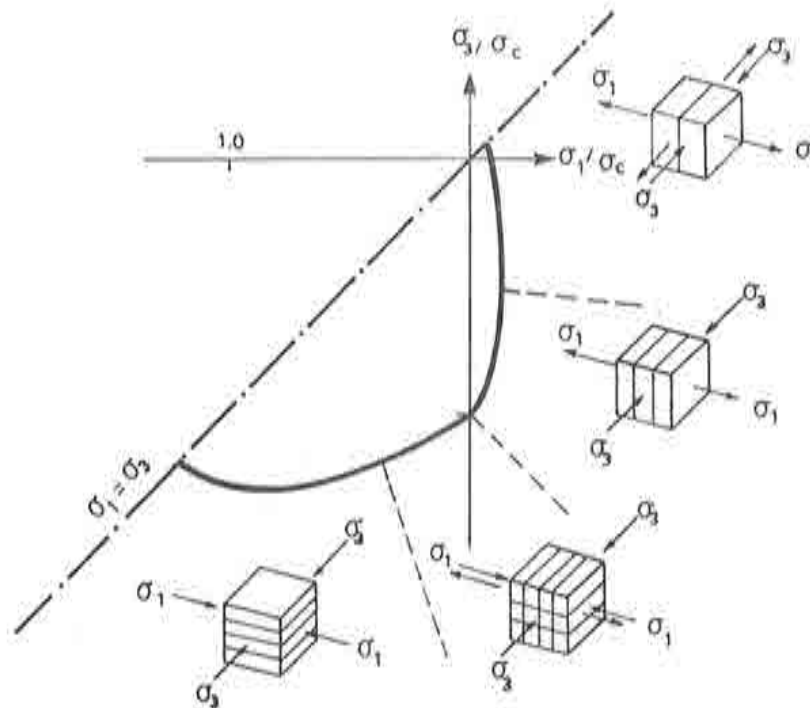


fig.(II.6): Modos de fallo para distintas combinaciones biaxiales de tensión [33] .

II.3.d- Comportamiento triaxial [134] .

Bajo comportamiento triaxial de tensiones, el hormigón exhibe una superficie de discontinuidad como la que muestra la fig.(II.7,a). Estudios experimentales realizados sobre hormigones, demuestran que estas superficies pueden ser definidas en función de tres invariantes ξ , ρ , θ (*anexo-E*), que se interpretan geoméricamente como las coordenadas cilíndricas de la superficie de fluencia en el espacio de Haigh-Westergard (espacio de tensiones principales). Algunas propuestas indican que la condición de fluencia, bajo estados triaxiales de tensión, puede ser representada por sólo dos invariantes de tensión σ_{oct} y τ_{oct} , siendo éstas las tensiones octaédricas normal y de corte respectivamente, sin embargo las

formulaciones más generales tienen en cuenta la influencia del tercer invariante, a través del ángulo de similaridad θ .

Algunos investigadores encuentran que la forma y posición de la superficie de fluencia, es independiente del proceso de carga, al tiempo que otros afirman lo contrario [134].

Ensayos experimentales [72], indican que el hormigón exhibe un comportamiento no-lineal en tensión deformación bajo estados hidrostáticos de tensión. Ensayos de este tipo, indican que para un punto que se encuentra sobre la superficie de fluencia, con una presión hidrostática constante $\sigma_{oct} = cte.$, si se incrementa la tensión octaédrica desviadora en $\Delta\tau_{oct}$ se produce, como es obvio, un incremento de la deformación tangencial octaédrica $\Delta\gamma_{oct}$, que viene acompañado por un incremento en la deformación normal octaédrica $\Delta\epsilon_{oct}$, situación que deriva de considerar un flujo plástico con una componente octaédrica distorsional y otra normal (característica de los materiales friccionales) (ver también el concepto de dilatación *apart. IV.4.d*). Este incremento de deformación octaédrica normal, marca una de las características más significativas del hormigón, que es su incremento de volumen (dilatación). Otra característica digna de destacar, es el incremento de ductilidad que se produce con el incremento de la presión hidrostática fig.(II.7,b).

II.3.e- Conclusiones generales sobre el comportamiento del hormigón sometido a cargas.

De los trabajos realizados por los distintos investigadores, que han sido mencionados a lo largo de este capítulo, pueden extraerse las siguientes conclusiones generales sobre el comportamiento del hormigón sometido a cargas:

- La relación entre las resistencias iniciales uniaxiales de compresión y tracción, oscila entre $10.0 \leq \sigma_c^0 / \sigma_t^0 \leq 20.0$, dependiendo del grado de micro-fisuración previa al estado de carga.
- La resistencia última del hormigón bajo compresión biaxial, es mayor que la obtenida para compresión uniaxial, con incrementos de un 22.0% para relaciones de tensión $(\sigma_3 / \sigma_1) = 0.5$. Para estados biaxiales de compresión-tracción, la resistencia a compresión decrece casi linealmente con el aumento

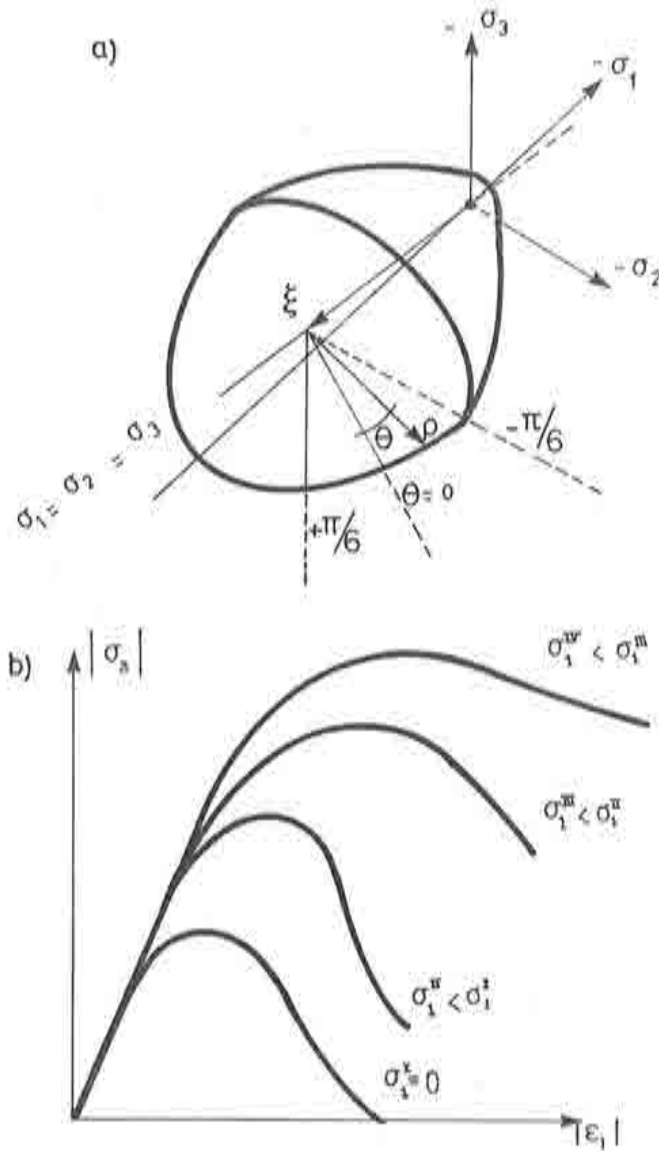


fig.(11.7): a) Superficie de discontinuidad genérica para el hormigón. b) Comportamiento triaxial $\sigma_3 \leq \sigma_2 = \sigma_1$ para distintos incrementos de σ_1 .

de la tracción aplicada. Bajo tracción biaxial la resistencia del hormigón crece un poco respecto a la correspondiente uniaxial.

- Las curvas de tensión-deformación uniaxial, poseen la misma forma a compresión que a tracción.

- En compresión uniaxial y biaxial, la deformación para el pico de tensiones oscila alrededor de $-2.5\%/\sigma_0$, siendo ligeramente mayor para compresión biaxial. Para tracción uniaxial y biaxial, la deformación correspondiente al pico de tensiones oscila entre $0.07\%/\sigma_0$ y $0.15\%/\sigma_0$.
- El módulo elástico en tracción uniaxial es ligeramente mayor que en compresión uniaxial, al tiempo que el coeficiente de Poisson en tracción es algo más baja que en compresión.
- El módulo elástico inicial en compresión biaxial, es significativamente mayor que en compresión uniaxial.
- Por lo general, para todos los ensayos uniaxiales y biaxiales, el fallo ocurre como una rotura por estiramiento, cuya superficie es aproximadamente ortogonal a la deformación de tracción máxima.
- El inicio e incremento de la fisuración, configura una discontinuidad en la respuesta tensión-deformación del hormigón, tanto en compresión como en tracción uniaxial, cuando se alcanzan tensiones del orden del 75.0% de la resistencia máxima a compresión en el primer caso, y del 60.0% de la resistencia máxima a tracción en el segundo. Previo a alcanzar estos límites, durante el periodo elástico actúa preponderantemente el fenómeno de degradación de rigidez. Esta continúa durante el período inelástico, pero en este caso se torna menos importante mientras más crece el proceso irreversible.

II.4.- RELACIONES TENSION-DEFORMACION VOLUMETRICA y DISTORSIONAL.

Suponiendo que el hormigón tiene un comportamiento isotrópico ^[29], es posible estudiar su respuesta en un punto, a partir de la combinación de un comportamiento volumétrico con otro de cizalladura ^{[29][33]}. De esta manera, se puede tratar al fenómeno de degradación de rigidez en forma diferenciada para los módulos volumétrico K^0 y de cizalladura G^0 , situación que se evidencia en los ensayos experimentales. Así, la ley tensión deformación puede ser expresada por una relación de componentes octaédricas ^{[29][33]}, del siguiente tipo:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{oct} &= 3 K_S \epsilon_{oct} = K_S \epsilon_v \\ \tau_{oct} &= G_S \gamma_{oct}\end{aligned}\tag{II.1}$$

siendo $K_S = K_S(I'_1, I'_2, I'_3)$, y $G_S = G_S(I'_1, I'_2, I'_3)$, y I'_i el invariante i -ésimo del tensor de deformaciones ϵ . Debido a la limitada cantidad de información experimental que existe sobre este comportamiento diferenciado, el módulo de rigidez volumétrico secante y el de cizalladura, son expresados normalmente en función del primer invariante I'_1 del tensor de deformaciones y del segundo invariante J'_2 del tensor desviador de deformaciones, respectivamente. Existen varias expresiones cuasi-empíricas para definir estos módulos secantes ^[33], y en el *apart. IV.8.d*, se proponen expresiones simples, que se ajustan bastante bien a las experiencias de Cedolin et al. ^[20] y de Kotsovos-Newman ^[72].

CAPITULO III

MODELOS CONSTITUTIVOS PARA HORMIGONES - ESTADO DEL ARTE -

III.1.- INTRODUCCION.

Existe una gran cantidad de *modelos constitutivos* que permiten describir el comportamiento de los materiales friccionales, especialmente de los hormigones, sometidos a estados de cargas. Estos modelos intentan simular el comportamiento de un *material ideal* que resulta de considerar ciertas hipótesis simplificativas en el *sólido real*. Varios autores han dedicado una gran cantidad de trabajo para clasificar, ordenar y analizar gran parte de estos modelos constitutivos [13][20][33][35][134][149], por lo que se considera innecesario realizar un "verdadero" *estado del arte* sobre el tema. Con el fin de *encuadrar el modelo que se presenta* en el contexto general existente, y sin caer en la repetición de las formas y temas ya tratados en los artículos previamente citados, se presentará una clasificación general de los modelos constitutivos desarrollados para el tratamiento del hormigón, citándose algunos de los más destacados.

Existen distintos puntos de vista para clasificar los modelos constitutivos aplicados al hormigón, sin embargo, parece adecuado presentarlos ordenados en cuatro grupos: 1) Modelos basados en las teorías de elasticidad lineal y no lineal, 2) Modelos basados en la teoría de la plasticidad, 3) Modelos basados en la teoría endocrónica de la plasticidad y 4) Modelos de fractura. Otras formas de realizar este ordenamiento, con ligeras diferencias, pueden ser consultadas en las referencias [13][20][33][35][134]. Cada uno de estos grupos incluye modelos constitutivos que reproducen, en forma numérica, el comportamiento del hormigón dentro de ciertos rangos más o menos limitados. En este momento existen investigaciones de vanguardia en casi todos estos grupos, sin que aún se pueda marcar, en forma objetiva, una mayor preponderancia de unos sobre otros.

A continuación se hará una breve presentación de algunos de los modelos ya existentes, formulados para tratar el comportamiento del hormigón.

III.2.- MODELOS ELASTICOS.

Muchos estudios se siguen realizando mediante el uso de modelos elásticos que suponen el comportamiento del hormigón como un sólido ideal de características elásticas y lineales . Esta hipótesis simplificativa, surge de la similitud que presenta el comportamiento del hormigón con el de un material *elástico-lineal e isótropo* para situaciones de cargas bajas (tensiones muy inferiores al límite elástico). No obstante esta limitación, es normal ver modelos constitutivos que mantienen el comportamiento elástico lineal hasta alcanzar la tensión límite de elasticidad, para luego proseguir con un comportamiento *elástico lineal ortótropo* ^[26] (ver también al final de este *apart. III.2*). A pesar de las evidentes limitaciones que presenta el uso de las teorías elásticas para simular el comportamiento de materiales como el hormigón, estas corrientes de investigación se mantienen vigentes, debido a las dificultades encontradas en la evaluación de los diversos parámetros que intervienen en los modelos basados en teorías más complicadas.

Las leyes constitutivas *elásticas no-lineales*, dan respuestas muy concordantes con la realidad mientras se mantengan ciertas características tenso-deformacionales derivadas de estados de *carga radial o proporcional monotónica creciente*. Estos modelos elásticos, generalmente atribuyen el comportamiento no lineal del hormigón a la degradación que sufre la rigidez del material durante un proceso de carga sostenida.

Hay dos formas clásicas de presentar las leyes constitutivas formuladas para los modelos elásticos ^{[43][134]} : 1) a través de una *formulación total* basada en una relación tensión-deformación secante ^{[26][20]} , incluyéndose aquí tanto las *formulaciones elásticas de Cauchy* ^[43] , como las *hiperelásticas o elásticas de Green* ^{[33][43][134]} ; y 2) mediante una *formulación diferencial* basada en una relación tensión deformación tangente ^{[3][43][137]} , denominada *formulación hipoelástica*.

III.2.a- Formulación secante total.

En la formulación secante total o de Cauchy, el estado tensional actual σ , viene definido por una función del estado de deformaciones actual ϵ , o viceversa:

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\epsilon_{kl}) = [D_{ijkl}(\epsilon_{kl})]_S \epsilon_{kl} \quad (III.1)$$

donde se puede ver que f_{ij} es una función tensorial de la respuesta del material. De ésta, resulta que se trata de un modelo donde el comportamiento del material es independiente del camino recorrido, situación que conduce a denominarlo *modelo de material sin memoria*. Debido a esto, se pueden violar las leyes de la termodinámica, razón que restringe el rango general de aplicación de estos modelos, se restringe a regímenes de carga monotónica creciente y radiales.

Para evitar las inconsistencias termodinámicas que podrían presentarse durante situaciones de cargas cíclicas, se recurre a la *formulación total hipolástica* o de Green ^[43]. En ésta se admite que el campo de tensiones y deformaciones deriva de una función de energía específica w y de su complementaria Ω , respectivamente. Esto es:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \epsilon_{ij}} \quad ; \quad \epsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} \quad (III.2)$$

donde $\dot{w} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$, y $\dot{\Omega} = \epsilon_{ij} \dot{\sigma}_{ij}$. Entre los modelos basados en esta formulación, está el de Evans and Pister (1966) y el de Ko and Masson (1976), que se tratan brevemente en la referencia ^[33], y los de Cedolin, Crutzen and Dei Poli ^{[20][29]}, y Kotsovos and Newman ^{[20][73]} que se presentan a continuación en forma sintética.

- Modelo de Cedolin et al. ^[20],

Este modelo, propone una relación tensión-deformación elástica no-lineal e isotrópica para el tratamiento del comportamiento triaxial del hormigón. Su formulación se basa en una ley secante-desacoplada, que permite el tratamiento del problema volumétrico y transversal en forma diferenciada (ver también *apart. IV.8.d* y *apart. A-I.2.*). Esto es:

$$\begin{aligned}\sigma_{oct} &= 3 K_S^D(\epsilon_{oct}) \epsilon_{oct} \quad , \\ \tau_{oct} &= G_S^D(\gamma_{oct}) \gamma_{oct} \quad ,\end{aligned}\tag{III.3}$$

con:

$$\begin{aligned}K_S^D &= K^0 [a b^{-\epsilon_{oct}/c} + d] \quad , \\ G_S^D &= G^0 [p q^{-\gamma_{oct}/r} - s \gamma_{oct} + t] \quad , \\ a &= 0.85 \quad , \quad b = 2.50 \quad , \quad c = 0.0014 \quad , \quad d = 0.15 \quad , \quad p = 0.81 \quad , \\ q &= 2.00 \quad , \quad r = 0.002 \quad , \quad s = 2.00 \quad , \quad t = 0.19 \quad ,\end{aligned}$$

siendo las funciones $K_S^D(\epsilon_{oct})$ y $G_S^D(\gamma_{oct})$, una aproximación funcional de resultados experimentales [20]. En un modelo de este tipo, suponer que el módulo volumétrico $K_S^D(\epsilon_{oct})$ depende sólo de la deformación octaédrica normal ϵ_{oct} es bastante cuestionable, puesto que se ha encontrado en ensayos experimentales que la micro-fisuración y la dilatancia, se deben fundamentalmente al efecto que producen las tensiones desviadoras [73]. Los módulos iniciales, volumétrico y distorsional, pueden ser obtenidos a partir de su relación con el módulo de Young inicial E^0 , y la relación de Poisson inicial ν^0 [33], y viceversa:

$$\begin{aligned}K^0 &= \frac{E^0}{3(1-2\nu^0)} \quad , \quad G^0 = \frac{E^0}{2(1+\nu^0)} \quad , \\ E^0 &= \frac{9K^0G^0}{3K^0+G^0} \quad , \quad \nu^0 = \frac{3K^0-2G^0}{2(3K^0+G^0)}\end{aligned}\tag{III.4}$$

Las ecs.(III.3) han sido también presentadas en forma diferencial [20]. Esto es:

$$\frac{d\sigma_{oct}}{d\epsilon_{oct}} = 3 K_T^D \quad , \quad \frac{d\tau_{oct}}{d\gamma_{oct}} = G_T^D\tag{III.5}$$

con:

$$K_T^D = K^0 \left[a \left(1 - \frac{\ln b \epsilon_{oct}}{c} \right) b^{-\gamma/\epsilon} + d \right] ,$$

$$G_T^D = G^0 \left[p \left(1 - \frac{\ln q \gamma_{oct}}{r} \right) q^{-\gamma/r} + t \right] ,$$

• **Modelo de Kotsovos-Newman** [72] .

Este modelo, presenta una relación tensión-deformación *elástica no-lineal e isótropa*, que permite simular el comportamiento triaxial del hormigón. La diferencia con el modelo mencionado anteriormente (Cedolin et al. [20]), consiste en que incorpora en su relación constitutiva el acoplamiento entre la deformación normal y la tensión desviadora. Para ello, el modelo de Kotsovos-Newman propone la siguiente función de variación del módulo secante volumétrico y distorsional:

$$K_s^D = K^0 \left[1 + 0.52(\sigma_{oct}/\sigma_C^{pic})^{1.09} \right]^{-1} ,$$

$$G_s^D = G^0 \left[1 + 3.57(\tau_{oct}/\sigma_C^{pic})^{1.7} \right]^{-1} ,$$
(III.6)

donde σ_C^{pic} es la resistencia uniaxial pico a compresión uniaxial. Para los módulos tangentes, han propuesto las siguientes expresiones:

$$K_T^D = K^0 \left[1 + 1.08(\sigma_{oct}/\sigma_C^{pic})^{1.09} \right]^{-1} ,$$

$$G_T^D = G^0 \left[1 + 9.63(\tau_{oct}/\sigma_C^{pic})^{1.7} \right]^{-1} ,$$
(III.7)

Tanto el modelo de Cedolin et al., como el de Kotsovos-Newman, concuerdan bastante bien hasta un cierto límite, a partir del cual muestran grandes divergencias fig.(III.1).

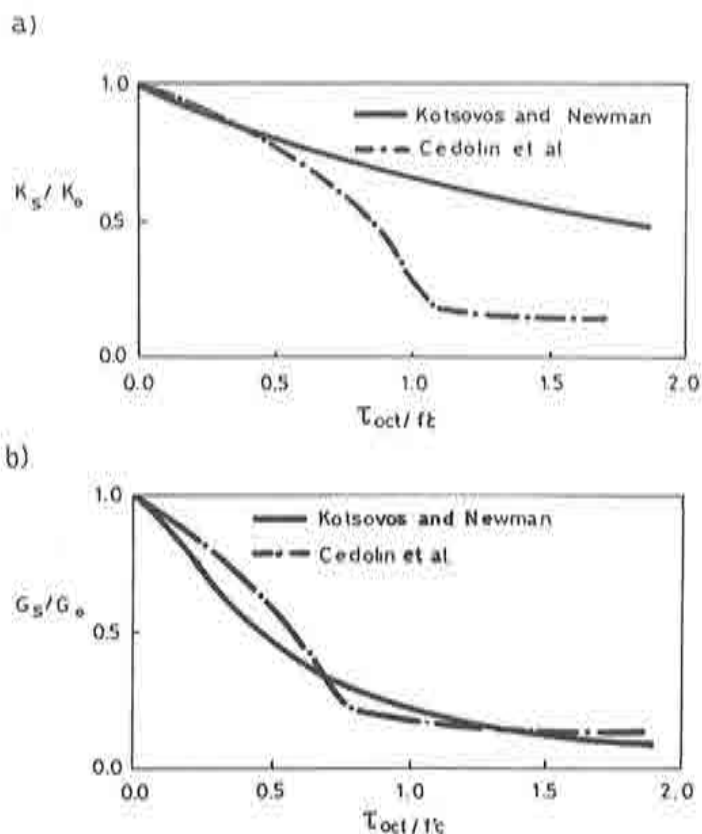


fig.(III.1): Comparación entre módulos elásticos correspondientes a las formulaciones de Cedolin et al. [29] y Kotsovos and Newman [72], a) Módulo volumétrico secante, b) módulo de corte secante.

III.2.b- Formulación diferencial.

La formulación diferencial o también denominada elástica incremental, contiene a los modelos conocidos con el nombre de *hipoelásticos* [33][43]. Esta formulación, se utiliza a menudo para describir el comportamiento de materiales en los que el estado de tensión depende del estado de deformación actual y del camino de tensión que ha seguido el proceso. En general, la relación constitutiva incremental puede presentarse como:

$$\dot{\sigma}_{ij} = f_{ij}(\dot{\epsilon}_{kl}, \sigma_{mn}) \tag{III.8}$$

siendo f_{ij} una función tensorial de la respuesta del material.

En los casos particulares, donde el incremento de deformación $\dot{\epsilon}_{kl}$ es lineal respecto del incremento de tensión $\dot{\sigma}_{ij}$, se puede escribir la ec.(III.8) como:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= [D_{ijkl}(\sigma_{mn})]_T \dot{\epsilon}_{kl} \\ \text{o} & \\ \dot{\sigma}_{ij} &= [D_{ijkl}(\epsilon_{mn})]_T \dot{\epsilon}_{kl} \end{aligned} \tag{III.9}$$

siendo $[D_{ijkl}]_T$ el tensor de rigidez tangente del material, que puede estar en función de los tensores de tensión o deformación. Debido a que el comportamiento del material depende del camino recorrido, estos modelos ofrecen una estructura más realista del comportamiento del hormigón para estados general de carga (régimenes de carga creciente no-monotónica y no-radial). Sin embargo, estos modelos fallan en procesos que involucren descargas ^[134]. Por ello, se dice que los modelos hipoelásticos tienen memoria limitada para procesos de carga reversible. ^[26].

Entre los modelos más destacados de este grupo, se encuentran: El modelo de Bathe and Ramaswamy y el de Saenz, que pueden ser consultados en las referencias ^[3] y ^[127], respectivamente, y los de Shareef and Buyukozturk ^[26], que juntamente con el de Dougill ^{[46][56]} serán presentados seguidamente, en forma sintética

• **Modelo de Shareef and Buyukozturk** ^[26].

Este modelo, se basa en una formulación hipoelástica ortótropa, que permite simular el comportamiento tridimensional del hormigón. La relación constitutiva empleada, se basa en el concepto de una particular *deformación uniaxial equivalente*, similar a la formulación de Saenz ^[127]. En este modelo, la relación constitutiva tangente se formula en función del estado de tensión y deformación en cada dirección principal del tensor de tensiones actualizado, por separado. Las tres direcciones principales de tensión, definen tres direcciones de comportamiento ortotrópico. Así, la relación constitutiva puede ser escrita en forma incremental del siguiente modo:

$$\dot{\sigma}_{ij} = [D_{ijkl}]_T \dot{\epsilon}_{kl} \quad (III.10)$$

siendo la matriz de 6×6 correspondiente al tensor de rigidez tangente de cuarto orden;

$$D = \frac{1}{\phi_\nu} \begin{bmatrix} (1-\nu^2)E_1 & \nu(1+\nu)\sqrt{E_1E_2} & \nu(1+\nu)\sqrt{E_1E_3} & & & \\ & (1-\nu^2)E_2 & \nu(1+\nu)\sqrt{E_1E_3} & & & \\ & & (1-\nu^2)E_3 & & & \\ & & & \phi_\nu G_{12} & & \\ & \text{sim.} & & & \phi_\nu G_{23} & \\ & & & & & \phi_\nu G_{31} \end{bmatrix}$$

donde $E_1, E_2, y E_3$ son los módulos de Young en las direcciones principales 1, 2, y 3, respectivamente; $\phi_\nu = 1 - 3\nu^2 - 2\nu^3$, donde ν es el coeficiente de Poisson. $G_{12}, G_{23}, y G_{31}$ son los módulos de corte para los planos formados por las direcciones principales (1-2), (2-3), y (3-1) respectivamente, siendo $G_{ij} = \alpha_\nu \sqrt{E_i E_j}$, donde α_ν es un coeficiente de transferencia de corte, que para el hormigón no fisurado vale $\alpha_\nu = \frac{1}{2}(1+\nu)$ y oscila entre $0 \leq \alpha_\nu \leq 0.2$ una vez que ha fisurado, según el grado de engranamiento que hay entre caras de fisura. El coeficiente de Poisson se mantiene constante hasta valores de 0.75-0.80 de la resistencia uniaxial pico σ_C^{pic} , y luego crece rápidamente.

La *deformación uniaxial equivalente* $\bar{\epsilon}_{i u}$, para cada dirección principal del tensor de tensiones σ , viene dada por la siguiente expresión particular:

$$\bar{\epsilon}_{i u} = \frac{\epsilon_i}{1 - \nu \frac{\sigma_j + \sigma_h}{\sigma_i}} \quad (III.11)$$

La relación tensión-deformación equivalente, para cada dirección principal del tensor de tensiones, se expresa de la siguiente forma:

$$\sigma_i = \frac{\sigma_{i c}}{\epsilon_{i c}} \frac{n \epsilon_{i u}}{n - 1 + (\epsilon_{i u}/\epsilon_{i c})^n} \quad (III.12)$$

tal que en la ec.(III.11) y ec.(III.12), i representa una de las direcciones principales de tensión, $\sigma_{i c}$ y $\epsilon_{i c}$ corresponden a la resistencia y deformación correspondientes al pico de tensiones, asociadas a la dirección i respectivamente, y $n = (E^0 \epsilon_{i c}) / (E^0 \epsilon_{i c} - \sigma_{i c})$ es un factor de forma fig.(III.2).

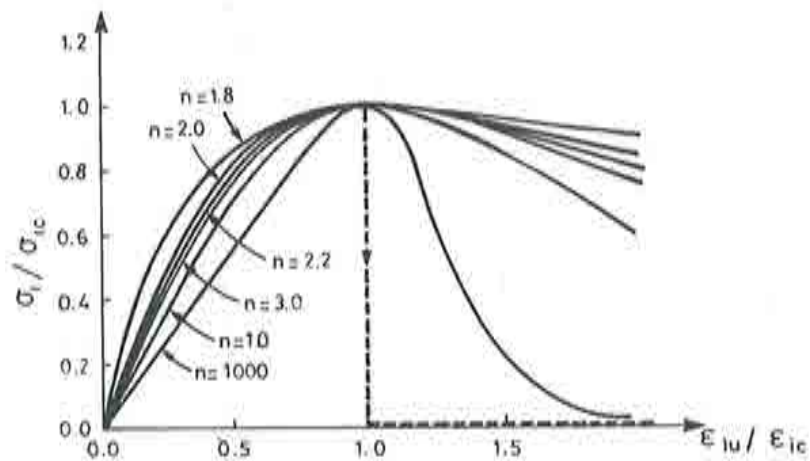


fig.(III.2): Relación tensión-deformación uniaxial equivalente en una dirección principal de tensión.

Estas relaciones de tensión-deformación uniaxial equivalente, se utilizan para la determinación de los módulos de Young tangentes que intervienen en la ec.(III.10). Esto es:

$$E_i = \frac{d\sigma_i}{d\epsilon_{i u}} = \frac{[1 - (\epsilon_{i u}/\epsilon_{i c})^n] n(n-1)(\sigma_{i c}/\epsilon_{i c})}{[n - 1 + (\epsilon_{i u}/\epsilon_{i c})^n]^2} \quad (III.13)$$

Esta formulación puede también extenderse a cargas cíclicas, por lo que se recomienda consultar la referencia [20].

• **Modelo de fractura progresiva de Dougill** [46][56].

Dentro de los modelos *elásticos no lineales*, se puede incluir también el **modelo de fractura progresiva de Dougill** [46][56]. Esta teoría pone énfasis en modelar la degradación de la rigidez elástica, ocurrida en un sólido durante un estado de *fractura progresiva*. Este modelo introduce una *superficie de fractura o degradación*, en el espacio de deformaciones, del siguiente tipo:

$$\Phi^d(\epsilon_{ij}, w^d) = \phi^d(\epsilon_{ij}) - H^d(w^d) = 0 \quad (III.14)$$

con:

$$\phi^d(\epsilon_{ij}) = \epsilon_{ij} c_{ij}^d \quad ; c_{ij}^d = \text{cte.}$$

donde ϵ_{ij} y w^d representan la deformación actual y el trabajo específico de degradación, respectivamente; $\phi^d(\epsilon_{ij})$ es una función que depende del estado actual de las deformaciones, y $H^d(w^d)$ es la función de endurecimiento por degradación. Durante un proceso de *fractura progresiva*, cuando se cumple que $\Phi^d(\epsilon_{ij}, w^d) = 0$, la superficie homónima *ec.(III.14)* se expande isotrópicamente en función del trabajo específico de degradación w^d , que conceptualmente tiene el sentido de una *variable de endurecimiento por degradación*, permitiendo obtener en cada instante del proceso pseudo-estático, la deformación ϵ_{ij} que satisface la *ec.(III.14)*.

Este modelo, considera que el comportamiento es siempre elástico, y por ello durante la evolución del proceso no-lineal no se desarrollan mecanismos inelásticos. De esta forma, al suspender la carga el material retorna a su estado original, siguiendo una ley elástica lineal secante, sin que aparezcan deformaciones permanentes. O sea, en todo proceso de descarga se cumple la siguiente relación constitutiva secante total:

$$\sigma_{ij} = [D_{ijkl}] \epsilon_{kl} \quad (III.15)$$

Durante el proceso de *fractura progresiva*, se sigue una ley constitutiva tangente incremental, donde el incremento de tensiones $\dot{\sigma}_{ij}$ resulta de un *incremento elástico* $\dot{\sigma}_{ij}^e$, menos un *decremento por degradación de rigidez* $\dot{\sigma}_{ij}^d$ que se obtiene mediante una regla de normalidad a la *superficie de fractura* ec.(III.14) definida en el espacio de deformaciones. Esto es:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^e - \dot{\sigma}_{ij}^d \quad (III.16)$$

con:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}^e &= [D_{ijkl}]_S \dot{\epsilon}_{kl} \\ -\dot{\sigma}_{ij}^d &= \left\{ \frac{d[D_{ijkl}]_S}{d\epsilon_{mn}} \dot{\epsilon}_{mn} \right\} \epsilon_{kl} = [\dot{D}_{ijkl}]_S \epsilon_{kl} = -\dot{\lambda}^d \frac{\partial \Phi^d(\epsilon_{ij}, w^d)}{\partial \epsilon_{ij}} \end{aligned} \quad (III.17)$$

siendo la ec.(III.17) la denominada *regla de flujo de fractura* propuesta por Dougill, y $\dot{\lambda}^d$ el *parámetro de consistencia de fractura* que se obtiene de una *condición de consistencia de degradación*, análoga a la que se define en plasticidad ecs.(A-1.3.d). Esto es:

$$\Phi^d(\epsilon_{ij}, w^d) = \phi^d(\epsilon_{ij}) - H^d(w^d) = 0 \quad , \quad (III.18,a)$$

$$\dot{\Phi}^d(\epsilon_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}, w^d, \dot{w}^d) = \frac{\partial \Phi^d(\epsilon_{ij}, w^d)}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\partial \Phi^d(\epsilon_{ij}, w^d)}{\partial w^d} \dot{w}^d = 0 \quad (III.18,b)$$

donde el incremento de trabajo específico de degradación es: $\dot{w}^d = \frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij}^d \epsilon_{ij} =$

$\frac{1}{2} \dot{\lambda}^d \frac{\partial \Phi^d(\epsilon_{ij}, w^d)}{\partial \epsilon_{ij}} \epsilon_{ij}$, tal que sustituido en las ecs.(III.18), se obtiene:

$$\dot{\lambda}^d = 2 \left[\frac{dH}{dw^d} \right] \frac{(\partial \Phi^d / \partial \epsilon_{kl}) \dot{\epsilon}_{kl}}{(\partial \Phi^d / \partial \epsilon_{mn}) \epsilon_{mn}} \quad (III.19)$$

Sustituyendo ésta en la ec.(III.16), se llega a la ecuación constitutiva con rigidez tangente, del modelo de fractura progresiva:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left[D_{ijkl} - 2 \left[\frac{dH}{dw^d} \right] \frac{(\partial\Phi^d/\partial\epsilon_{ij})(\partial\Phi^d/\partial\epsilon_{kl})}{(\partial\Phi^d/\partial\epsilon_{mn})\epsilon_{mn}} \right] \dot{\epsilon}_{kl} \quad (III.20)$$

De esta forma, este modelo considera que durante un proceso de cargas no hay deformaciones inelásticas, y que todo el proceso elástico no-lineal se debe fundamentalmente a la degradación de la rigidez.

• Por último, antes de concluir con los modelos elásticos, es conveniente mencionar que cada una de estas teorías pueden ser combinadas con un *criterio de fractura definido en el espacio de tensiones*. Así, a partir de un cierto límite establecido en el espacio de tensiones, se puede considerar además un comportamiento no lineal-inelástico que puede ser atribuido al fenómeno de micro-fisuración desarrollado en la masa del sólido. Los modelos constitutivos que reciben este tratamiento adicional, se los puede denominar modelos *elasto-fracturables*, y a pesar de pertenecer al grupo 4) citado en el *apart. III.1.*, resulta interesante hacer una simple mención de los mismos en este apartado, ya que son modelos que basan parte de su comportamiento en la teoría de la elasticidad. Los orígenes de la combinación de teorías elásticas con teorías de fisuración, se encuentran en los modelos de Ngo and Scordelis ^[100] y de Rashid ^[115], y se basan en admitir que el hormigón falla cuando se alcanza su resistencia máxima a tracción uniaxial σ_T^0 . Ambos modelos consideran un comportamiento elástico-isótropo-lineal hasta que el estado tensional satisface el *criterio de fractura*, situación que ocurre cuando la tensión principal mayor σ_1 alcanza la resistencia máxima a tracción del hormigón. A partir de este momento, ambos modelos se diferencian en la forma de tratar el comportamiento no lineal que es atribuido a la fisuración. El modelo de Ngo and Scordelis realiza una continua redefinición de la malla de elementos finitos, debido a que la fisura viene modelada a través de la desconexión de nodos entre elementos. En el modelo de Rashid, el material fisurado se trata como un sólido ortótropo que se comporta de modo diferente en la dirección normal y paralela a la fisura. Más adelante (*apart. III-5*), al tratar los *modelos de fractura*, se presentarán bajo otro enfoque estos *modelos de fisuración*

basados en la mecánica del sólido continuo, juntamente con otros basados en la mecánica de fractura.

III.3.- MODELOS BASADOS EN LA TEORIA DE LA PLASTICIDAD.

En este apartado, sólo se mostrará un enfoque particular que permite clasificar los modelos constitutivos que han sido definidos para tratar el comportamiento del hormigón y que utilizan de alguna manera en su formulación la *teoría de la plasticidad*. Se distinguirán cuatro grupos: 1) Modelos de plasticidad perfecta, 2) Modelos de plasticidad con ablandamiento, con o sin degradación de rigidez, 3) Modelos de plasticidad con endurecimiento, con o sin degradación de rigidez, 4) Modelos de zona inerte, combinados con plasticidad con endurecimiento. Cada uno de estos grupos, incluye modelos constitutivos que permiten reproducir bastante bien, en forma numérica, el comportamiento del hormigón dentro de un cierto rango más o menos limitado, según del modelo que se trate.

Resultados experimentales, confirman que el comportamiento no-lineal del hormigón, se debe fundamentalmente a un fenómeno altamente inelástico donde sólo se puede recuperar una pequeña parte de la deformación total desarrollada (micro-fisuración). Por esto, el comportamiento tensión-deformación, puede ser desdoblado en una *componente recuperable y otra irre recuperable* ^[43]. Esta es una de las razones que indican que la teoría de la plasticidad puede proveer una estructura teórica para el estudio del comportamiento del hormigón.

III.3.a.- Modelos de plasticidad perfecta o plasticidad sin endurecimiento.

Entre los modelos plásticos más simples, se encuentran aquellos basados en la teoría de la plasticidad perfecta ^[43] (*apart. A-I.3.c*). Estos modelos, consideran que bajo carga monótona creciente, después de que el estado de tensión alcanza la superficie de fluencia plástica, el material fluye indefinidamente. Para evitar esta inconsistencia física, se puede definir en el espacio de deformaciones una *superficie de fallo* ^[35], que ponga límite al crecimiento indefinido del campo de deformaciones, a partir de la cual se pueden proponer dos comportamientos hipotéticos alternativos: Uno, el más simple, que considera una pérdida total de la resistencia del punto en análisis (*límite de fallo total*); y el otro que consiste en modelar el comportamiento post-fallo mediante una teoría de fisuración como la de Rashid ^[113]; o bien a través de una teoría de degradación como la de

Dougill ^{[46][6]}. Así, se podría presentar la relación tensión-deformación, para un modelo de este tipo, resumida en tres etapas: a) estado elástico inicial, b) estado elasto-plástico perfecto que cumple en cada instante con la condición de fluencia de Prager (*part. A-I.3.d*, y c) un estado alternativo de pérdida violenta de la resistencia, o bien de fisuración, o bien de degradación de la rigidez elástica.

Entre los modelos clásicos basados en la teoría de la plasticidad perfecta, se encuentran los de: Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, y Willam-Warnke, que pueden ser consultados en forma sintética en la referencia ^[33].

III.3.b.- Modelos de plasticidad con ablandamiento con o sin degradación de rigidez.

Debido a que la *plasticidad perfecta* considera una regla de endurecimiento plástico constante, constituye una estructura teórica incompleta para tratar el rango total del comportamiento de los hormigones, siendo necesario considerar una formulación más general de esta misma teoría. Dentro de esta generalización se encuentra la teoría de la *plasticidad con ablandamiento*, que marca una diferencia fundamental en la forma de tratar el concepto de la *evolución del criterio de fluencia plástico*. Así, para cada *punto del sólido*, se define en el espacio de tensiones un *límite*, a partir del cual se inicia un proceso de *ablandamiento* que concluye con el agotamiento total de la resistencia de ese punto. Esta generalización, sumada a la posibilidad de considerar el fenómeno de degradación de rigidez elástica y o plástica, permite formular modelos muy potentes. En el *cap. IV.*, se presenta el modelo constitutivo desarrollado en esta tesis, que se ha denominado *modelo de daño plástico* y que cumple con estas características básicas, además de otras que no son propias de este grupo.

- Modelo elasto-plástico con ablandamiento ortotrópico de Murray et al. ^{[33][87]}.

Dentro de los modelos de plasticidad con ablandamiento, se tiene el *modelo elasto-plástico con ablandamiento ortotrópico de Murray et al.* ^{[33][87]}, el cual sólo cuenta con la definición de un flujo plástico asociado para sólidos sin degradación de rigidez elástica. Una de las características más destacada de este modelo es la de utilizar una superficie de fluencia plástica ortótropa con movimientos independientes según los ejes de tensiones principales en la zona de tracción del

espacio de Westergard fig.(III.3). La forma matemática de esta superficie es la siguiente:

$$\mathcal{F}(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_c, \sigma_{T1}, \sigma_{T3}) = 0 \quad (III.21)$$

donde σ_1 y σ_3 son las componentes principales máximas y mínimas del tensor de tensión σ en el estado actual; σ_c es el valor actual de la tensión de fluencia en compresión; y σ_{T1}, σ_{T3} son los valores actuales de la tensión de fluencia a tracción para cada dirección principal del tensor de tensión.

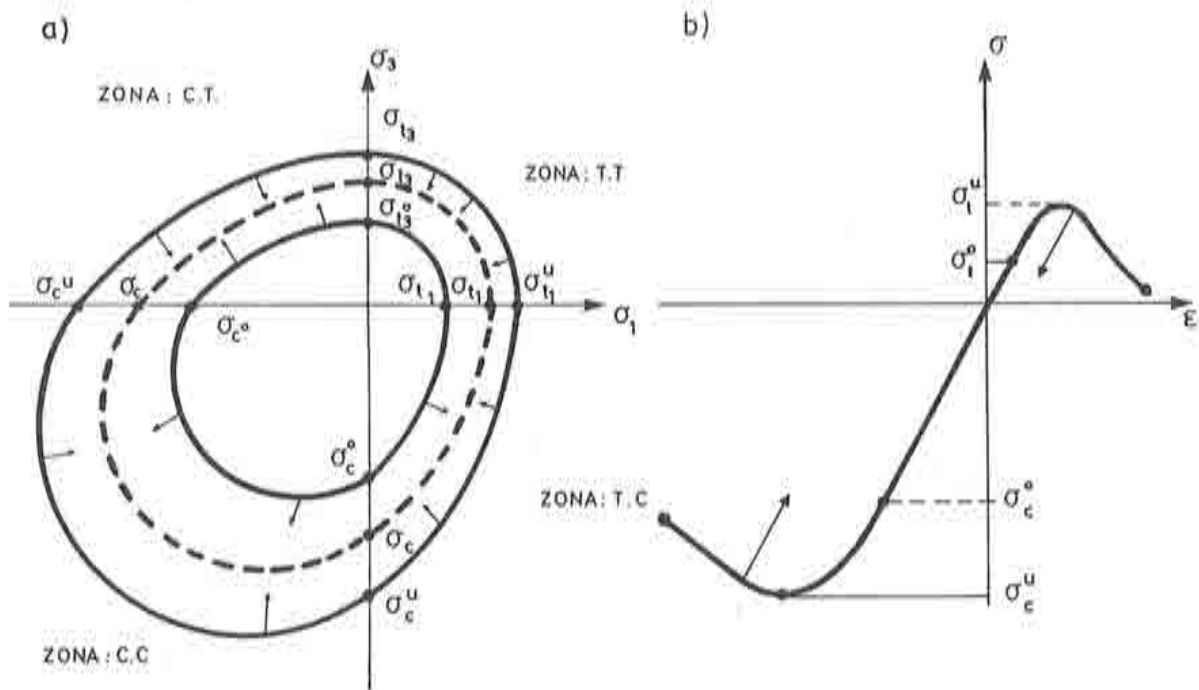


fig.(III.3): Función de fluencia genérica, propuesta por Murray et al. [33][67] : a) Función de fluencia inicial y subsiguientes funciones de carga plástica en el espacio $(\sigma_1 - \sigma_3)$: b) Idealización de la respuesta uniaxial.

Este modelo considera como hipótesis básica, que el aplastamiento ocurrido durante un estado de compresión produce un daño local adireccional, en tanto

admite que a tracción se produce un daño local (en un punto) orientado que provoca un movimiento no-simétrico de la superficie de fluencia $ec.(III.21)$. Este movimiento está gobernado por una *regla de endurecimiento* en función de unas *variables de endurecimiento* definidas de una manera muy particular, como deformaciones plásticas efectivas. Así, la regla de endurecimiento se formula a través de las tres funciones de endurecimiento explícitas que se presentan a continuación:

$$\begin{cases} \text{Proc. de compresión} & : & \sigma_C = \sigma_C^0 + \mathcal{K}_C(\bar{\epsilon}_C^p) \\ \text{Proc. de tracción dir.-1} & : & \sigma_{T1} = \sigma_{T1}^0 + \mathcal{K}_{T1}(\bar{\epsilon}_{T1}^p) \\ \text{Proc. de tracción dir.-3} & : & \sigma_{T3} = \sigma_{T3}^0 + \mathcal{K}_{T3}(\bar{\epsilon}_{T3}^p) \end{cases} \quad (III.22)$$

siendo: $\dot{\epsilon}_C^p = \zeta_C \dot{\epsilon}^p$, $\dot{\epsilon}_{T1}^p = \zeta_{T1} \dot{\epsilon}^p$, $\dot{\epsilon}_{T3}^p = \zeta_{T3} \dot{\epsilon}^p$, las reglas de evolución de las variables de endurecimiento (deformaciones plásticas efectivas) para un proceso de compresión pura, tracción según la dirección de la tensión principal mayor y tracción según la dirección de la tensión principal menor, respectivamente. $\dot{\epsilon}^p = \sqrt{\dot{\epsilon}^{pT} \dot{\epsilon}^p}$ es la norma del vector incremento de deformación plástica; $\mathcal{K}_C, \mathcal{K}_{T1}, \mathcal{K}_{T3}$ son funciones de endurecimiento explícitas definidas en el espacio uniaxial $\sigma - \epsilon^p$ a partir de ensayos físicos; y $\zeta_C, \zeta_{T1}, \zeta_{T3}$ son constantes que definen la zona del espacio de tensiones principales (espacio de Haigh-Westergard) donde se encuentra el estado actual de tensión, sus magnitudes pueden ser consultadas en la referencia [87], cumpliendo siempre, para cada instante t del proceso de carga cuasi estático, la siguiente relación $\zeta_C + \zeta_{T1} + \zeta_{T3} = 1$.

La ley constitutiva incremental, resulta de considerar una regla de flujo asociada a la superficie de fluencia plástica. Esto es:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}_s (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \quad (III.23)$$

donde el incremento de deformación plástica queda definido por la siguiente ecuación de evolución $\dot{\epsilon}^p = \lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} = \mathbf{C} \dot{\epsilon}$, siendo $\mathbf{C} = \frac{1}{A \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T} \mathbf{D}_s$ la

matriz de transformación de incrementos de deformación total en incrementos

de deformación plástica, obtenida a partir de la condición de consistencia plástica de Prager (*apart. A-I.3.d*), de donde surge también, para este caso

particular, el parámetro de endurecimiento plástico: $A = \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{D}_S \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} -$

$$\sqrt{\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}} \left[\zeta_C \mathcal{K}_C(\bar{\epsilon}_C^p) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \zeta_{T1} \mathcal{K}_{T1}(\bar{\epsilon}_{T1}^p) + \zeta_{T3} \mathcal{K}_{T3}(\bar{\epsilon}_{T3}^p) \right]. \quad \text{Obteniéndose la}$$

siguiente ley constitutiva tangente:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_T^{ep} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{D}_S [\mathbf{I} - \mathbf{C}] \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{III.24})$$

Para mayores detalles sobre este modelo, se recomienda recurrir a la referencia original [87].

La formulación que se ha presentado, permite ver que se trata de un modelo constitutivo que considera un enfoque muy particular de la teoría matemática de la plasticidad con ablandamiento. El problema más serio que muestra esta formulación, es la definición casi arbitraria de la variable de endurecimiento plástico. Las tres *deformaciones efectivas* $\bar{\epsilon}_C^p$, $\bar{\epsilon}_{T1}^p$, $\bar{\epsilon}_{T3}^p$ surgen de una descomposición arbitraria de la norma del vector incremento de deformación plástica $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ (denominado por algunos autores como deformación plástica efectiva [34]), dependiendo del valor de las constantes ζ_C , ζ_{T1} , ζ_{T3} . Además de este inconveniente, se puede decir que la direccionalidad del daño local, forzada por una formulación como la que se acaba de presentar, es innecesaria en los modelos que consideran el *ablandamiento como una propiedad del material (anexo-D)*, ya que la orientación del daño se manifiesta en forma espontánea sin que sea necesario recurrir a una formulación ortótropa para representar el comportamiento del hormigón [30]. Por último, se puede decir que la aproximación que tienen los resultados con los ensayos experimentales no es del todo satisfactoria [87].

III.3.c.- Modelos de plasticidad con endurecimiento con o sin degradación de rigidez.

Existen otros modelos constitutivos basados en la teoría de la plasticidad, que establecen una *condición de fluencia con endurecimiento*, hasta que se alcanza

un cierto *límite* en el espacio de tensiones, que se denomina normalmente *límite de fractura*. A partir de este límite se pueden seguir dos caminos alternativos que permiten formular dos modelos constitutivos diferentes: Uno que considera a este límite como una *superficie de daño total* definida en el espacio de tensiones, a partir de la cual se produce una caída violenta de tensión en el punto fig.(III.4), y otro que añade a la formulación elasto-plástica con endurecimiento una formulación de *micro-fisuración*, que cada modelo tratará en una forma particular.

• **Modelo elasto-plástico con endurecimiento de A. Chen and W. F. Chen** [33][34][35].

Un modelo que adopta en su formulación la *superficie de daño total* es el de A. Chen and W. F. Chen [33][34][35]. Este modelo admite que en cada punto del sólido que plastifica, la función de fluencia cumple con la condición de consistencia plástica de Prager (*apart. A-I.3.d*) durante el proceso de endurecimiento a medida que evoluciona la *variable de endurecimiento plástico*. Esta teoría plástica con endurecimiento se mantiene hasta alcanzar el *límite de fractura o superficie de daño total* (definida en el espacio de tensiones), donde se produce una caída violenta de tensión. El modelo constitutivo considera una función de fluencia con movimiento isotrópico, que tiene la siguiente forma genérica:

$$\mathcal{F}(I_1, J_2, \alpha_1, \beta_1, \tau_\kappa) = 0 \quad (III.25)$$

donde I_1 es el primer invariante del tensor de tensiones, J_2 es el segundo invariante del tensor desviador de tensiones, α_1, β_1 son parámetros del material que se definen en función de la resistencia del hormigón bajo condiciones de carga uniaxial y biaxial, y τ_κ es una función de endurecimiento formulada en forma explícita que vale: $\tau_\kappa = \tau_\kappa^0$ al inicio del proceso plástico (define la posición de la *superficie de discontinuidad inicial*), $\tau_\kappa = \tau_\kappa^u$ al final del proceso plástico (define la posición de la *superficie de daño total*), y $\tau_\kappa^0 \leq \tau_\kappa \leq \tau_\kappa^u$ durante el desarrollo del proceso plástico (define la posición de la *superficie las distintas superficies de carga intermedia*). El modelo considera también que el incremento de deformación total está compuesto de una parte elástica y una plástica $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p$, donde el incremento de deformación plástica se obtiene a partir de una regla de flujo plástico asociada, que queda expresada del siguiente modo:

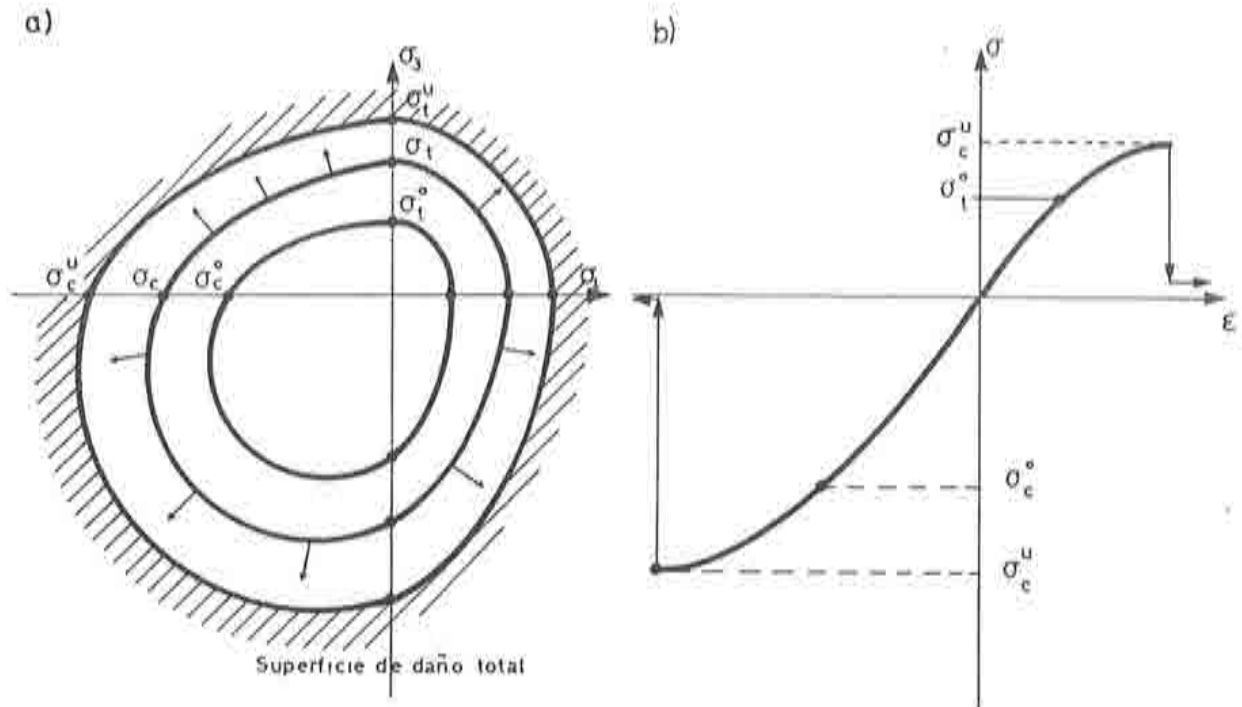


fig.(III.4): Función de fluencia genérica, propuesta por Chen and Chen [33][34][35] : a) Función de fluencia inicial y subsiguientes funciones de carga plástica en el espacio $(\sigma_1 - \sigma_3)$. b) Idealización de la respuesta uniaxial.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{A} \frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl}}{\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{nm}} \right)^{1/2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (III.26)$$

donde A es el parámetro de endurecimiento plástico, definido en una forma particular [34] .

Para este modelo, la ley constitutiva elasto-plástica incremental queda expresada por la siguiente formulación:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \left[H_{ijkl} + \frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{kl}}}{A \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{rr}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{rr}} \right)^{1/2}} \right] \dot{\sigma}_{kl} \quad ; \quad \forall \mathcal{F} < \tau_K^u \quad (III.27)$$

donde H_{ijkl} es el tensor de flexibilidad elástica. Para mayores detalles sobre este modelo, se recomienda ver las referencias [33][34][35].

Este modelo de material ideal, logra obtener buena concordancia con los resultados experimentales, hasta el instante en que alcanza la *superficie de daño total*, límite que produce una simplificación muy grosera del comportamiento, y por lo tanto los resultados no son tan buenos. En menor grado se pueden notar también los siguientes problemas: Trabaja con una regla de flujo asociada a la superficie de fluencia, por lo que no puede controlar el fenómeno de dilatancia, y por último, no puede adoptar cualquier superficie de fluencia plástica, ya que todo el modelo está formulado en *forma cerrada* a partir de esta función no-homogénea.

• **Modelo elasto-plástico con endurecimiento de Z. Bažant and S. Kim [13].**

Los modelos alternativos al de Chen-Chen, son aquellos que utilizan plasticidad con endurecimiento hasta alcanzar el límite de fractura, y luego agregan a esta formulación básica, una que considere la *micro-fisuración*. A estos se los podrían denominar *modelos plásticos con endurecimiento-fracturable*. El modelo de Bažant-Kim [13], fué uno de los primeros en considerar la teoría de la plasticidad rigidizable junto a un concepto de fractura; entendida como *degradación de la rigidez del material*. Para modelizar la degradación de rigidez ha utilizado como base el *modelo de fractura progresiva de Dougill* [46][56], tratado en el *apart. III.2.* De esta manera, una vez alcanzada la superficie de fractura en el espacio de tensiones, se tiene que el incremento de tensión resulta de la contribución de tres componentes: un *incremento elástico* debido al comportamiento del material no dañado $\dot{\sigma}_{ij}^e$, menos un *incremento plástico* $\dot{\sigma}_{ij}^p$ debido a la relajación que producen las deformaciones irrecuperables, y menos un *incremento de fractura* (o degradación en este caso), $\dot{\sigma}_{ij}^d$ provocado por deformaciones de degradación que son recuperables fig.(III.5). Esto es:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^e - \dot{\sigma}_{ij}^p - \dot{\sigma}_{ij}^d \quad (III.28)$$

con:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}^e &= [D_{ijkl}]_S \dot{\epsilon}_{kl} \\ \dot{\sigma}_{ij}^p &= [D_{ijkl}]_S \dot{\epsilon}_{kl}^p \\ \dot{\sigma}_{ij}^d &= [D_{ijkl}]_S \dot{\epsilon}_{kl}^d \end{aligned}$$

donde $[D_{ijkl}]_S$ es el tensor de rigidez secante y ϵ_{ij} , ϵ_{ij}^p , y ϵ_{ij}^d , son los incrementos de deformación total, plástica, y de degradación, respectivamente, que quedan relacionados entre si a través de fig.(III.5):

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{\epsilon}_{ij}^d \quad , \quad \text{con:} \quad \dot{\epsilon}_{ij}^e = [D_{ijkl}]_S^{-1} \dot{\sigma}_{kl} \quad (III.29)$$

Este modelo, define una *superficie de fluencia* en el espacio de tensiones $\mathcal{F}(\sigma_{ij}, \bar{\mathcal{K}})$ del tipo de la de Drucker-Prager y una *superficie de fractura o degradación* en el espacio de deformaciones $\Phi^d(\epsilon_{ij}, \bar{\mathcal{K}}')$ análoga a la Drucker-Prager. Esto es:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\sigma_{ij}, \bar{\mathcal{K}}) &= \bar{\alpha} I_1 + \sqrt{J_2} - \bar{\mathcal{K}}(w^p) \\ \Phi^d(\epsilon_{ij}, \bar{\mathcal{K}}') &= \bar{\alpha}' I'_1 + \sqrt{J'_2} - \bar{\mathcal{K}}'(w^d) \end{aligned} \quad (III.30)$$

donde I_1 , J_2 y I'_1 , J'_2 representan el primer y segundo invariante del tensor de tensiones y deformaciones respectivamente; $\bar{\alpha}$, $\bar{\mathcal{K}}$ y $\bar{\alpha}'$, $\bar{\mathcal{K}}'$ representan los coeficientes de ajuste de la superficie definida en el espacio de tensiones y deformaciones respectivamente (*apart. A-I.3.e*)

De acuerdo con esta teoría de material ideal, los incrementos de deformación plástica $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ y de tensión de degradación $\dot{\sigma}_{ij}^d$, se determinan respectivamente, a partir de *dos reglas de flujo*: 1) una regla de *flujo asociada a la superficie de fluencia plástica* definida en el espacio de tensiones, la cual está basada en el *segundo postulado de Drucker* (*apart. A-I.3.d*), (que requiere que *el trabajo*

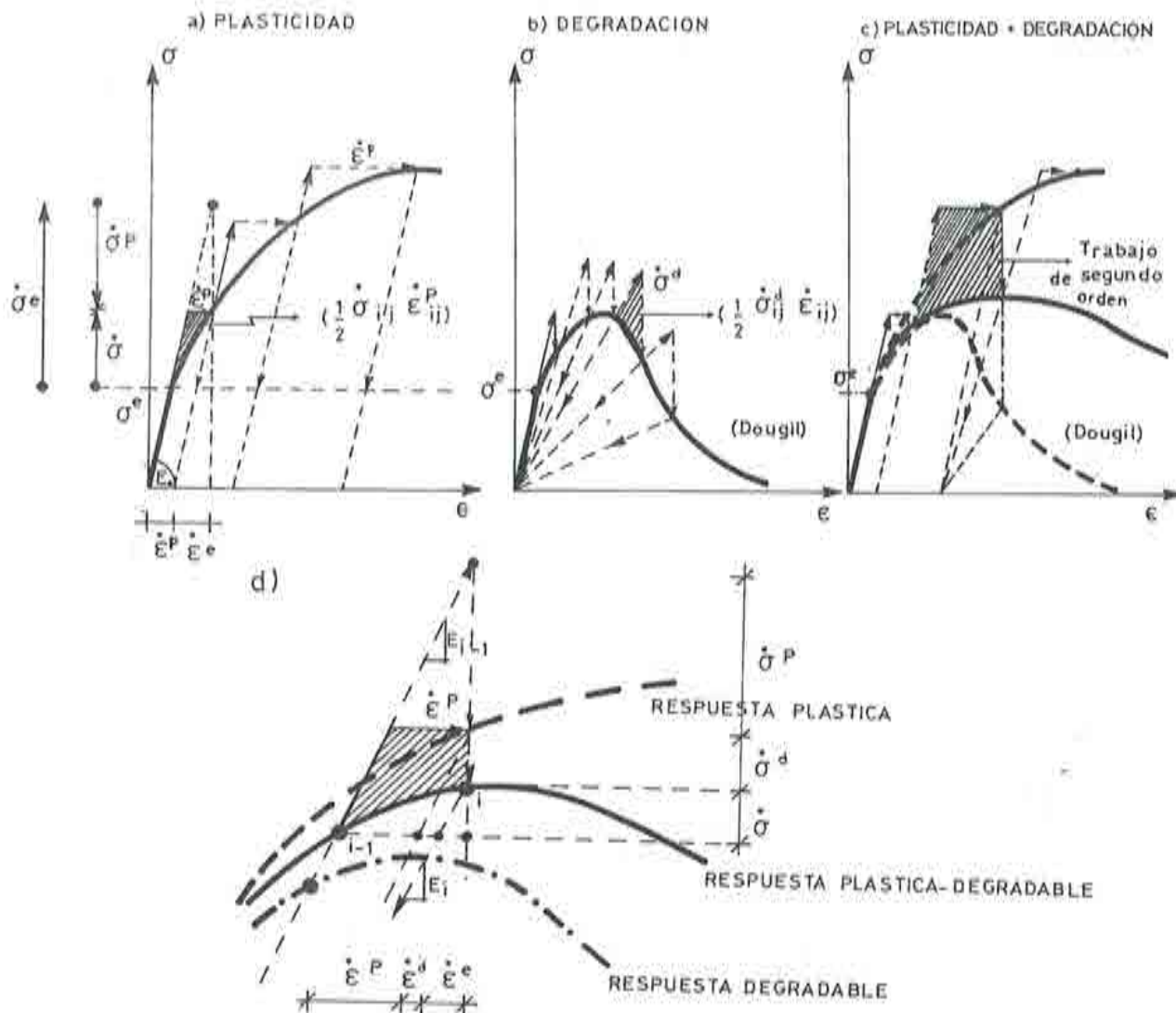


fig.(III.5): Relación esquemática entre: a) un genérico modelo plástico con endurecimiento, b) el modelo de fractura progresiva de Dougill (*apart. III.2.*), c) el modelo plástico con endurecimiento-fracturable, d) detalle del comportamiento del modelo plástico con degradación.

plástico de segundo orden realizado en un punto durante un ciclo de aplicación y remoción del incremento de tensión $\dot{\sigma}_{ij}$ sea no-negativo $\dot{w}'' = \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}'' \geq 0$ - conocido como postulado de estabilidad local de Drucker) - (forma particular de presentar el axioma de la Máxima Disipación Plástica para procesos sin degradación rigidez (*apart. IV.8.f*)); 2) una regla de flujo asociada a la superficie de fractura o degradación definida en el espacio de deformaciones, la

cual está basada en el *postulado de Il'yushin* ^[13] (análogo al segundo postulado de Drucker), (que requiere que el trabajo de degradación de segundo orden realizado en un punto durante la aplicación y remoción del incremento de deformación $\dot{\epsilon}_{ij}$ sea no-negativo $\dot{w}^d = \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\sigma}_{ij}^d \geq 0$). Esto es:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma_{ij}, \bar{K})}{\partial \sigma_{ij}} \\ \dot{\sigma}_{ij}^d &= \dot{\lambda}^d \frac{\Phi^d(\epsilon_{ij}, \bar{K}^d)}{\partial \epsilon_{ij}} \end{aligned} \tag{III.31}$$

tal que la primera de las ec.(III.31) es la regla de flujo plástica asociada ec.(A-1.22), y la segunda de las ec.(III.31) es la regla de flujo de fractura propuesta por Dougill ec.(III.17).

Finalmente, a través de un largo tratamiento algebraico que puede ser consultado en la referencia ^[13], se obtiene la ecuación constitutiva incremental como:

$$\dot{\sigma}_{ij} = [D_{ijkl}]_T \dot{\epsilon}_{kl} \tag{III.32}$$

con:

$$\begin{aligned} [D_{ijkl}]_T &= [D_{ijkl}]_S - [D_{ijkl}^p] - [D_{ijkl}^d] \\ [D_{ijkl}]_T & : \text{rigidez tangente} \\ [D_{ijkl}]_S & : \text{rigidez secante} \\ [D_{ijkl}^p], [D_{ijkl}^d] & : \text{pérdida de rigidez debido a la acción} \\ & \text{de la plasticidad y la degradación.} \end{aligned}$$

Para mayores detalles sobre este modelo, se recomienda recurrir a la referencia original ^[13].

Entre los inconvenientes que presenta este modelo, se encuentra su difícil implementación, y el complicado manejo de los criterios de fluencia y degradación, que son totalmente independientes entre sí. Resultando por lo tanto, algo confuso para determinar durante un proceso de carga con ablandamiento, la situación del punto del sólido en los espacios de tensión y deformación a la vez ^[56]. Para cumplir durante un proceso de carga con ablandamiento, con la condición de consistencia plástica *ec.(A-1.58)* y con su análoga condición de consistencia de degradación, y que a la vez sea posible definir un estado de tensión-deformación único para el punto, es necesario proceder por aproximaciones sucesivas, anidadas dentro de las iteraciones que conducen a la convergencia en la solución ^[23]. Por último, conviene observar que este modelo no considera la posibilidad de trabajar con una regla de flujo no-asociada a la superficie de fluencia plástica.

• **Modelo elasto-plástico con endurecimiento de D. Han and W. Chen** ^[56].

Este modelo, presenta una versión más evolucionada de los *modelos plásticos degradables*. Su reciente formulación considera como variable de endurecimiento el *trabajo específico plástico degradable* (o plástico fracturable) w^{pd} fig.(III.6). Este modelo, a diferencia del de Bazant-Kim, propone una *única superficie de carga*, formulada en el espacio de deformaciones. Esta superficie cumple la función de una superficie de fluencia plástica, más una superficie de degradación de rigidez. Su forma matemática es la siguiente:

$$\Phi^{pd}(\epsilon_{ij}, w^{pd}) = \epsilon_{ij} \delta_{ij} - \mathcal{K}^{pd}(w^{pd}) = 0 \quad (III.33)$$

Además, se considera un único decremento de tensión, debido a la acción conjunta de los fenómenos de plasticidad y degradación de rigidez. Esto es:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{pd} = \dot{\sigma}_{ij}^p + \dot{\sigma}_{ij}^d = \dot{\lambda}^{pd} \frac{\partial \Phi^{pd}(\epsilon_{ij}, w^{pd})}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (III.34)$$

donde $\dot{\lambda}^{pd}$ es el factor de consistencia plástica-fracturable único, que puede ser obtenido de la *condición de consistencia* en la manera usual: $\dot{\lambda}^{pd} = \frac{1}{h} \frac{\partial \Phi^{pd}}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij}$, y

que satisface a la vez ambos estados (el plástico y el de degradación de rigidez). h es el parámetro de endurecimiento plástico, definido en forma muy particular [50].

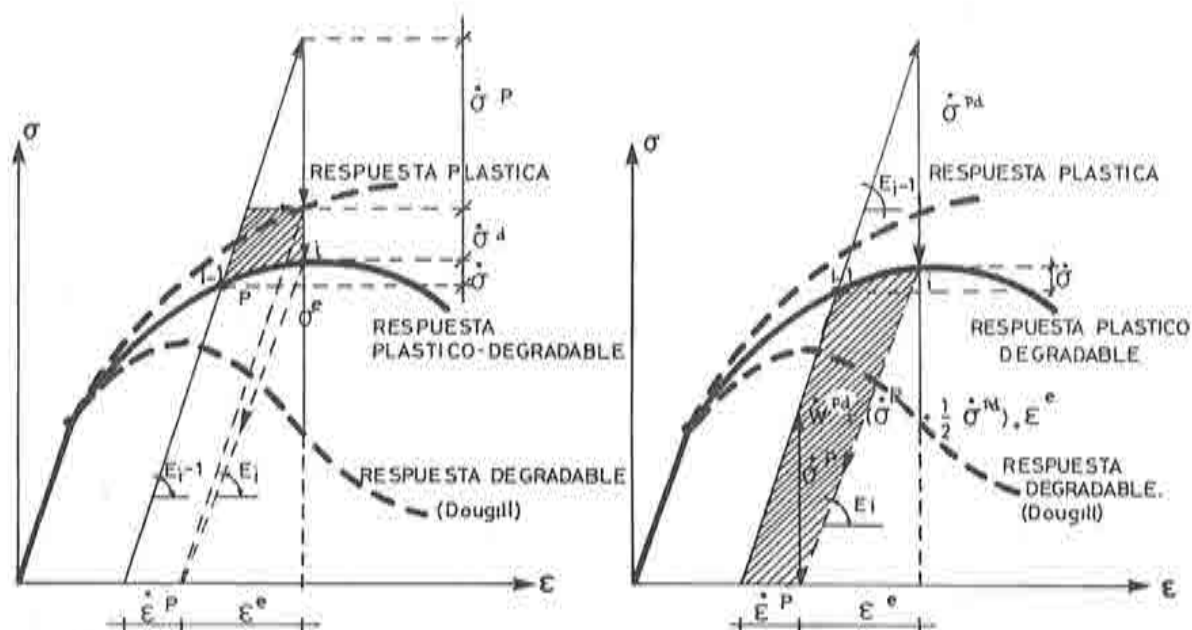


fig.(III.6): Descripción esquemática de las formulaciones que combinan plasticidad con degradación de rigidez: a) formulación incremental tensión-deformación b) formulación en función del trabajo plástico fracturable w^{pd} .

El modelo, permite también adoptar una regla de flujo no-asociada, en el espacio de deformaciones, del tipo de la de Dougill ec.(III.17):

$$\dot{\sigma}_{ij}^{pd} = \dot{\lambda}^{pd} \frac{\partial \Phi^{pd}(\epsilon_{ij}, w^{pd})}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (III.35)$$

con $\Phi^{pd}(\epsilon_{ij}, w^{pd}) \neq \Phi^{pd}(\epsilon_{ij}, w^{pd})$. Teniendo en cuenta la ec.(III.35), resulta el

incremento de tensión igual a:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^e - \dot{\sigma}_{ij}^{pd} \quad (III.36)$$

donde $\dot{\sigma}_{ij}^{pd} = [D_{ijkl}]_S \dot{\epsilon}_{ij}$. A través de un largo trabajo algebraico, que puede ser consultado en la ref. [56], se llega a formular la siguiente relación constitutiva tangente para este modelo plástico-fracturable:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left[[D_{ijkl}]_S - \frac{1}{h} \frac{\partial \Phi^{pd}}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \Phi^{pd}}{\partial \epsilon_{kl}} \right] \dot{\epsilon}_{kl} \quad (III.37)$$

Este modelo marca dos diferencias fundamentales respecto del de Bažant-Kim: La primera, consiste en el uso de la teoría de la plasticidad definida en el espacio de deformaciones, que permite también formular el fenómeno de fisuración, eliminando así el criterio de fluencia en el espacio de tensiones; y la segunda, consiste en el uso de una variable de endurecimiento basada en el trabajo específico *plástico-degradable*.

La mayor dificultad que presenta, consiste en encontrar un criterio de fluencia y degradación único, definido en el espacio de deformaciones, que emule un comportamiento realista del hormigón. Otro problema que presenta este modelo, es la inapropiada simulación del comportamiento del hormigón para altos niveles de tensión [56].

• **Modelo elasto-plástico con endurecimiento de M. Klisinski and Z. Mroz^[70].**

Este modelo, al igual que los dos anteriores, presenta una formulación *plástica-degradable*. Sus fundamentos se encuentran en una extensión de la formulación del modelo de Bažant-Kim [13], y por lo tanto supone que el daño interno (denominado aquí degradación de rigidez [70]), es acompañado de un fenómeno inelástico irreversible (proceso plástico). La deformación total está compuesta por tres partes: una elástica totalmente recuperable, otra de degradación también recuperable, y una inelástica o plástica irrecuperable fig.(III.6,a):

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^d + \dot{\epsilon}^p \quad (III.38)$$

y el incremento de tensión en un punto del sólido viene definido por la siguiente expresión fig.(III.6,a):

$$\dot{\sigma} = D_S \dot{\epsilon} = D_S (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^d - \dot{\epsilon}^p) = \dot{\sigma}^e - \dot{\sigma}^d - \dot{\sigma}^p \quad (III.39)$$

donde la rigidez D_S , depende del estado actual del tensor de tensiones σ , deformaciones ϵ y de las variables vectoriales de endurecimiento κ y de degradación w^d . Esto es:

$$D_S = D_S(\sigma, \epsilon, \kappa, w^d) \quad (III.40)$$

El efecto acoplado que existe entre la degradación y la plasticidad, es tenido en cuenta a través de las variables internas w^d y κ , y sus reglas de evolución respectivamente, pueden ser formuladas mediante la introducción de la superficie de fluencia y degradación, expresadas en el espacio de tensiones o deformaciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\sigma, \kappa) = 0 & \quad \text{o} \quad \Phi(\epsilon, \kappa) = 0 \\ \mathcal{D}(\sigma, w^d) = 0 & \quad \text{o} \quad \Delta(\epsilon, w^d) = 0 \end{aligned} \quad (III.41)$$

donde $\mathcal{F} = 0$ y $\mathcal{D} = 0$ son las condiciones de fluencia y degradación en el espacio de tensiones; y en forma alternativa, se tiene $\Phi = 0$ y $\Delta = 0$ que son también las condiciones de fluencia y degradación en el espacio de deformaciones. Si se trabaja en el espacio de tensiones, el modelo admite como condición suficiente para considerar su comportamiento plástico, que se cumpla la *condición de consistencia plástica de Prager*: $\mathcal{F} = 0$ y $\dot{\mathcal{F}} = 0$, y admite como condición suficiente de degradación, el cumplimiento de $\mathcal{D} = 0$ y $\dot{\mathcal{D}} = 0$. Estas dos funciones dividen el espacio de tensiones en cuatro regiones fig.(III.7):

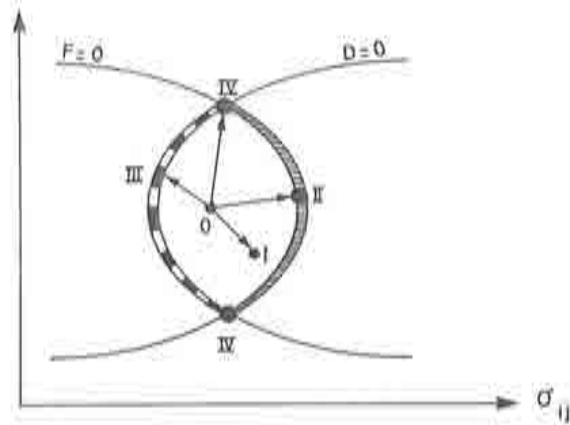


fig.(III.7): Delimitación de las regiones de comportamiento plástico-degradable en el espacio de tensiones.

- (I) -Comportamiento puramente elástico : $\mathcal{F} < 0$ y $\mathcal{D} < 0$
- (II) -Comportamiento puramente plástico : $\mathcal{F} = 0$; $\dot{\mathcal{F}} = 0$ y $\mathcal{D} < 0$
- (III) -Comportamiento puramente degradable : $\mathcal{F} < 0$ y $\mathcal{D} = 0$; $\dot{\mathcal{D}} = 0$
- (IV) -Comportamiento plástico-degradable : $\mathcal{F} = 0$; $\dot{\mathcal{F}} = 0$ y $\mathcal{D} = 0$; $\dot{\mathcal{D}} = 0$

Para el comportamiento plástico, se define una regla de flujo no asociada del mismo tipo que la teoría de la plasticidad clásica ec.(A-1.21):

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \tag{III.42}$$

donde $\dot{\lambda}$ es el factor de consistencia plástica no-negativo, y $\mathcal{G} \neq \mathcal{F}$ es la función de potencial plástico, definida en el espacio de tensiones.

Durante un proceso degradable, se obtiene el incremento de deformación $\dot{\epsilon}^d$ o el decremento de tensión de degradación $\dot{\sigma}^d$, según se trabaje en uno u otro espacio, a través de dos reglas de flujo:

$$\dot{\epsilon}^d = \dot{\lambda}^d \frac{\partial D}{\partial \sigma} \quad (III.43)$$

$$\dot{\sigma}^d = \dot{\lambda}^d \frac{\partial \Delta}{\partial \epsilon}$$

con: $\frac{\partial \Delta}{\partial \epsilon} = \frac{\partial D}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} = \frac{\partial D}{\partial \sigma} \mathbf{D}_T$, de donde se deduce la relación que hay entre $\dot{\epsilon}^d$ y $\dot{\sigma}^d$. A través de varios pasos algebraicos, que pueden ser consultados en la referencia original [70], se obtiene la ecuación constitutiva tangente incremental como:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}_T \dot{\epsilon} \quad (III.44)$$

con:

$$\mathbf{D}_T = \mathbf{D}_S - \mathbf{D}'' - \mathbf{D}^d ;$$

\mathbf{D}_S : Rigidez secante definida en la ec.(III.40) ,

\mathbf{D}'' : Decremento de rigidez debido al fenómeno plástico,
obtenido a partir de la condición de consistencia plástica ,

\mathbf{D}^d : Decremento de rigidez debido al fenómeno de degradación

Por último, la influencia del cambio de rigidez por efecto de la degradación, surge de la siguiente relación (ver también ec.(IV.92)):

$$\sigma = \mathbf{D}_S \epsilon^e = \mathbf{D}_S (\epsilon - \epsilon'') \quad (III.45)$$

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}_S \dot{\epsilon} - \mathbf{D}_S \dot{\epsilon}'' + \dot{\mathbf{D}}_S (\epsilon - \epsilon'') \quad (III.46)$$

Comparando la ec.(III.46) con la ec.(III.44), se deduce que:

$$\dot{\sigma}^d = \mathbf{D}^d \dot{\epsilon} = \dot{\mathbf{D}}_s (\epsilon - \epsilon^p) \quad (\text{III.47})$$

Para mayores detalles sobre este modelo, se recomienda recurrir a la referencia original [70] .

Entre las desventajas que presenta este modelo, se encuentra su complicada forma de formular el comportamiento acoplado del fenómeno de degradación con el de plasticidad. Además, se observa en los ejemplos de comprobación [70] , que el modelo necesita definir una superficie \mathcal{F} y \mathcal{D} , para cada caso particular, con el fin de alcanzar una mejor coincidencia con los resultados experimentales, no llegando a ser totalmente satisfactoria.

• **Modelo elasto-plástico con endurecimiento de J.C Simo and J.M Ju** [131] .

Este modelo, denominado por sus autores *modelo de tensión-deformación basado en la mecánica del continuo dañado** , es otra formulación del tipo *plástico-degradable*. Ha sido desarrollado a partir de dos estructuras teóricas alternativas, duales: Una *formulación en el campo primal* donde las variables independientes son las deformaciones, y otra *formulación en el campo dual* donde las variables independientes son las tensiones. En esta breve presentación, sólo se verá la formulación primal.

La *mecánica del continuo dañado*, basada en procesos termodinámicos irreversibles y dependiente del estado de las variables internas, ha sido introducida y empleada extensivamente para describir el mecanismo de *degradación progresiva* que se desarrolla antes de la formación de macro-fisuras. Fué Kachanov [131] , el primero en introducir el concepto de *tensión efectiva*, para describir el comportamiento de un sólido con degradación de rigidez. El modelo supone que la degradación física del material, es el resultado de la iniciación, crecimiento e interconexión de micro-fisuras y micro-poros. Según la *mecánica del continuo dañado*, se puede modelizar este proceso a través de la introducción de una variable de daño que puede estar representada por una magnitud escalar o tensorial.

* Nota: Entiendase el concepto de "Daño" como equivalente al de "degradación de rigidez".

En el caso de una degradación anisotrópica (orientada), se tiene que la *tensión efectiva* $\bar{\sigma}$, en el *sólido equivalente no-degradado*, está relacionada con la tensión σ , en el *sólido real degradado* fig.(III.8), mediante la siguiente expresión:

$$\sigma = \mathbf{M} \bar{\sigma} \quad (III.48)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de transformación de tensiones de un espacio equivalente y el real.

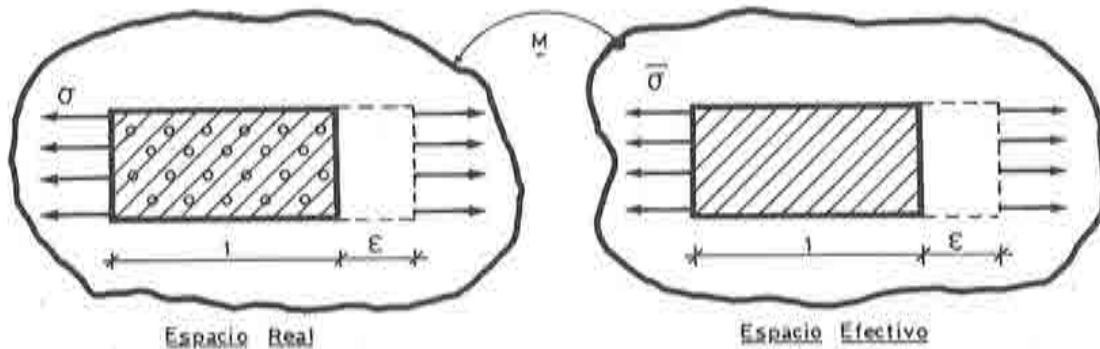


fig.(III.8): Representación esquemática de la hipótesis de "tensión efectiva".

Los autores del modelo, han considerado suficiente establecer un proceso degradable isotrópico, para simular el comportamiento de un sólido frágil, considerando que el comportamiento mecánico de las micro-fisuras es independiente de su orientación ^[130], dependiendo sólo de una variable de degradación escalar \hat{d} . Así, la matriz de transformación \mathbf{M} se reduce a;

$$\mathbf{M} = (1 - \hat{d}) \mathbf{I} \quad (III.49)$$

quedando la ec.(III.48) como:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - \hat{d}) \bar{\boldsymbol{\sigma}}$$

o bien: (III.50)

$$\mathbf{D}_s = (1 - \hat{d}) \bar{\mathbf{D}}_s$$

donde $\bar{\mathbf{D}}_s$ es la rigidez secante del sólido equivalente, \mathbf{D}_s es la rigidez secante del sólido degradado (sólido real), $\hat{d} = 0$ si el punto del sólido no ha sufrido daño alguno, y $\hat{d} = 1$ cuando se ha alcanzado el daño total en el punto. La ley de evolución de esta variable de degradación de rigidez, para un caso isotrópico simple, viene dada a partir de la regla de normalidad al criterio de *degradación*, formulado en el espacio de deformaciones. Esto es:

$$\dot{\hat{d}} = \dot{\mu} \frac{\partial g(\bar{\tau}, r_d)}{\partial \bar{\tau}} \quad (III.51)$$

donde $\bar{\tau} = \sqrt{\boldsymbol{\epsilon}^T \bar{\mathbf{D}}_s \boldsymbol{\epsilon}}$ es la *norma de energía del material no dañado*, $g(\bar{\tau}, r_d) = \bar{\tau} - r_d \leq 0$ es el criterio de degradación formulado en el espacio de deformaciones, r_d es el umbral de degradación, tal que r_d^0 denota el límite inicial de degradación, y $\dot{\mu}$ es el parámetro de consistencia del daño.

La condición de carga/descarga en degradación, se define de acuerdo a las condiciones de Kuhn-Tucker ^[131] (principio de la máxima disipación por degradación):

$$\dot{\mu} \geq 0 \quad ; \quad g(\bar{\tau}, r_d) \leq 0 \quad ; \quad \dot{\mu} g(\bar{\tau}, r_d) = 0 \quad (III.52)$$

que establece que: 1) si $g(\bar{\tau}, r_d) < 0$ el criterio de daño no se satisface, y por la tercera condición de Kuhn-Tucker debe ocurrir que $\dot{\mu} = 0$, por lo tanto resulta

que la regla de degradación *ec.(III.51)* queda $\dot{d} = 0$; 2) si $\dot{\mu} > 0$, se tiene por la tercera condición de Kuhn-Tucker que $g(\bar{\tau}, r_d) = 0$, por lo tanto implica que se trata de un proceso de carga con degradación. En esta situación, $\dot{\mu}$ puede ser determinado por la *condición de consistencia de degradación* (análoga a la condición de consistencia plástica de Prager). Esto es:

$$g(\bar{\tau}, r_d) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{g}(\bar{\tau}, r_d) = 0 \quad (\text{III.53})$$

de donde resulta que $\dot{\mu} = \dot{\bar{\tau}} = \frac{1}{\bar{\tau}} \boldsymbol{\sigma}^{0T} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, siendo $\boldsymbol{\sigma}^0 = \bar{\mathbf{D}}_s \boldsymbol{\epsilon}$.

La ley constitutiva incremental para un proceso elástico-degradable, denominado proceso de daño dúctil, resulta a partir de la ley de Clasius-Duhem (disipación reducida) (ver *apart. IV.8.b*), de la regla de flujo *ec.(III.51)* y de la condición de consistencia de degradación *ec.(III.53)*. Esto es:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}, \hat{d}) = \left[(1 - \hat{d}) \bar{\mathbf{D}}_s \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \right] - \left[\left(\frac{1}{\bar{\tau}} \boldsymbol{\sigma}^{0T} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{\tau}} \right) \boldsymbol{\sigma}^0 \right] \quad (\text{III.54})$$

de donde resulta:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}, \hat{d}) = \mathbf{C}_T^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{III.55})$$

donde $\mathbf{C}_T^e = \left[(1 - \hat{d}) \bar{\mathbf{D}}_s - \frac{1}{\bar{\tau}} \frac{\partial g}{\partial \bar{\tau}} \left(\boldsymbol{\sigma}^0 \boldsymbol{\sigma}^{0T} \right) \right]$ (obsérvese la similitud que guarda con la *ec.(IV.108)*).

Dentro de la estructura teórica formulada, la respuesta plástica viene caracterizada en el espacio de tensiones por medio de las ecuaciones constitutivas clásicas:

$$\begin{aligned}
 \text{-Una regla de flujo plástica:} \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}, \hat{d})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\
 \text{-Una regla de endurecimiento plástica:} \quad \dot{\mathbf{q}} &= \dot{\lambda} \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}, \hat{d}) \\
 \text{-Y la condición de fluencia plástica:} \quad \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}, \hat{d}) &\leq 0.
 \end{aligned}
 \tag{III.56}$$

además, es necesario considerar una condición de carga/descarga en plasticidad, que puede ser formulada mediante las condiciones de Kuhn-Tucker (*apart. A-I.3.e*):

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad ; \quad \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}, \hat{d}) \leq 0 \quad ; \quad \dot{\lambda} \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}, \hat{d}) = 0 \quad ; \tag{III.57}$$

siendo en la ec.(III.56) y en la ec.(III.57), $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ el incremento de deformación plástica en un punto, $\dot{\lambda}$ el parámetro de consistencia plástica, \mathbf{H} las funciones de evolución de las variables internas \mathbf{q} , y \mathcal{F} la función de fluencia plástica, definida en el espacio de tensiones, en función de $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}$, y \hat{d} (este modelo utiliza la conocida función de fluencia : *cap-damage* ^{[131][43]}).

Finalmente, la ley constitutiva incremental para un proceso *elasto-plástico degradable*, se obtiene considerando que $\dot{\lambda} > 0$ y $\dot{\mu} > 0$ en las condiciones de consistencia plástica y de degradación, $\dot{\mathcal{F}} = 0$ y $\dot{g} = 0$, respectivamente. Resultando luego de desarrollos algebraicos ^[31], de la siguiente forma:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^p, \hat{d}) = \mathbf{C}_T^{\text{ep}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{III.58}$$

donde:

$$\mathbf{C}_T^{np} = \left[(1 - \hat{d}) \bar{\mathbf{D}}_T^{np} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial g}{\partial \tau} (\boldsymbol{\sigma}^0 \boldsymbol{\sigma}^{0T}) \right]$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{(1 - \hat{d})} \boldsymbol{\sigma} \quad ; \text{ siendo } \boldsymbol{\sigma} \text{ la tensión actual}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \bar{\mathbf{D}}_s \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

$$\bar{\mathbf{D}}_T^{np} = \bar{\mathbf{D}}_s - \frac{\bar{\mathbf{D}}_s \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right\} \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right\}^T \bar{\mathbf{D}}_s}{-\mathbf{H}^T \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}} \right\} + \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right\}^T \bar{\mathbf{D}}_s \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right\}}$$

El modelo ha sido generalizado para problemas con degradación anisotrópica, y reformulado para problemas con grandes deformaciones. Mayores detalles sobre este modelo se pueden consultar en las referencias de origen ^{[130][131]}.

Este modelo ha sido presentado al final de este grupo de *modelos plásticos con endurecimiento y degradación*, por que se considera una de las formulaciones mejor fundada en la mecánica de los sólidos continuos.

El problema más serio que presenta este modelo, es que considera una única cuota de degradación que se aplica por igual a la parte volumétrica y distorsional del tensor de rigidez. Trabajos realizados por Cedolin et al. ^[29], y por Kotsovos-Newman ^[72], demuestran que es necesario considerar una degradación diferenciada para la parte volumétrica y distorsional del tensor de rigidez. Otro concepto importante que omite este modelo, es la consideración de un flujo no asociado, que impide controlar los efectos de la dilatancia.

Una importante ventaja de los modelos plásticos degradables, respecto de los plásticos con ablandamiento como propiedad del material, es que para incrementos de tensión tangente a la superficie de fluencia (estado de carga neutra en plasticidad asociada), pueden simular un comportamiento inelástico, en vez de la respuesta elástica que producen aquellos con ablandamiento ^[134]. Esto se puede corregir en estos últimos, modificando la regla de flujo asociada cuando se

considera el fenómeno de degradación de rigidez, situación que ha sido tenida en cuenta en el *modelo de daño plástico* que se presenta en esta tesis (*apart. IV.8.f*).

III.3.d.- Modelo de zona inerte, combinado con plasticidad con endurecimiento.

Dentro de este grupo existen varios modelos que han sido utilizados en materiales metálicos ^{[68][69]}, sin embargo sólo hay uno formulado para materiales friccionales. Se trata del modelo presentado por G. Frantziskonis and G. Desai ^{[51][52]}. Este modelo marca una sustancial diferencia con todos aquellos citados hasta el momento. Se fundamenta en considerar un *proceso elasto-plástico con endurecimiento*, combinado con un criterio capaz de considerar, mediante la participación de un factor de peso r_ξ , la influencia del tamaño de la zona inerte* en la respuesta total del sólido. De esta combinación de respuestas (endurecimiento plástico más respuesta nula), resulta un comportamiento en tensión-deformación con ablandamiento fig.(III.9).

Al iniciar el proceso plástico, el peso de la respuesta del material inerte es nula ($r_\xi = 0$) y a medida que evoluciona el proceso inelástico, el factor de peso r_ξ crece hasta alcanzar un valor próximo a ($r_\xi \simeq 1$) situación que indica que la zona inerte cubre el volumen total del sólido. Este crecimiento, viene condicionado por una ley de evolución explícita, que se ha supuesto de la siguiente forma fig.(III.10):

$$r_\xi(\xi_D) = r_\xi^u - r_\xi^u e^{-\chi_D \xi_D^R} = \frac{V^0}{V} \quad (III.59)$$

siendo:

r_ξ^u , χ_D y R : constantes relacionadas con el material.

$$\dot{\xi}_D = (\dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p)^{1/2}$$

V^0 : volumen de la zona inerte.

V : volumen total.

* Nota: Zona donde el material no tiene capacidad de responder a las acciones externas, con una ley tensión-deformación constante e igual a cero durante todo el proceso de carga.

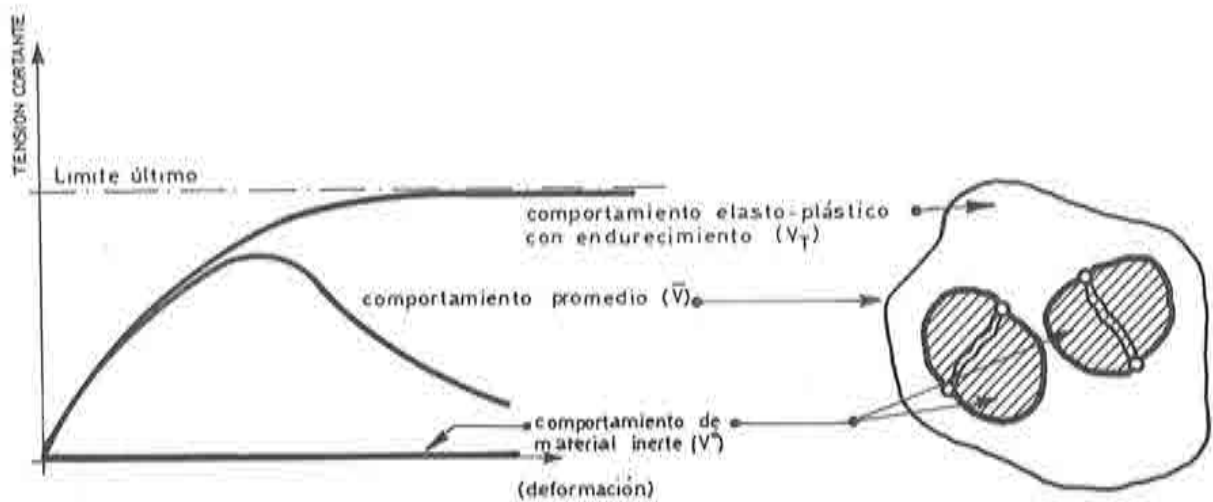


fig.(III.9): Concepto de descomposición del comportamiento del material, según el modelo de G. Frantziskonis and G. Desai ^{[51][52]}.

De esta manera, el modelo descompone el comportamiento del sólido en dos partes: - La primera parte, de volumen $\bar{V} = V - V^0$, simula una respuesta de *sólido continuo equivalente*, y está gobernada por un proceso irreversible representado por medio de la teoría de la plasticidad con endurecimiento; y - La segunda parte, referida a la zona *inerte* de volumen V^0 , tiene un comportamiento tensión-deformación con rigidez nula. Estos dos comportamientos, combinados conducen a simular bastante bien la respuesta del hormigón ^[51].

Los autores del modelo, relacionan este comportamiento mecánico con la degradación de rigidez que sufre el material durante un proceso de carga, y en tal sentido, consideran que se trata de una extensión multiaxial de la teoría de Kachanov ^[61] ya mencionada en el modelo que se ha presentado anteriormente. De aceptar esta hipótesis de degradación*, resulta necesario resaltar que la diferencia entre este tratamiento y el anterior radican en considerar una formulación *no-local* y *local*, respectivamente. Así, se obtiene una tensión en

* Nota: En este caso, es importante notar la similitud entre la variable escalar de degradación \bar{d} propuesta por Silmo and Ju ^[131], y el factor de peso τ_ξ propuesto en este modelo.

el sólido real degradado σ_{ij} , que está relacionada con la tensión efectiva $\bar{\sigma}_{ij}$, en el sólido equivalente no-degradado, a través de la siguiente expresión:

$$\dot{\sigma}_{ij} = (1 - r_{\xi}) \left[\bar{D}_{ijkl}^{ep} \right]_T \dot{\epsilon}_{kl} + \frac{r_{\xi}}{3} \delta_{ij} \left[\bar{D}_{ppkl}^{ep} \right]_T \dot{\epsilon}_{kl} - \bar{s}_{ij} \dot{r}_{\xi} \quad (III.50)$$

siendo:

$\left[\bar{D}_{ijkl}^{ep} \right]_T$: tensor de rigidez elasto-plástico equivalente.

$\bar{s}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} - \frac{1}{3} \bar{\sigma}_{pp} \delta_{ij}$: tensor desviador de tensiones, para el sólido equivalente.

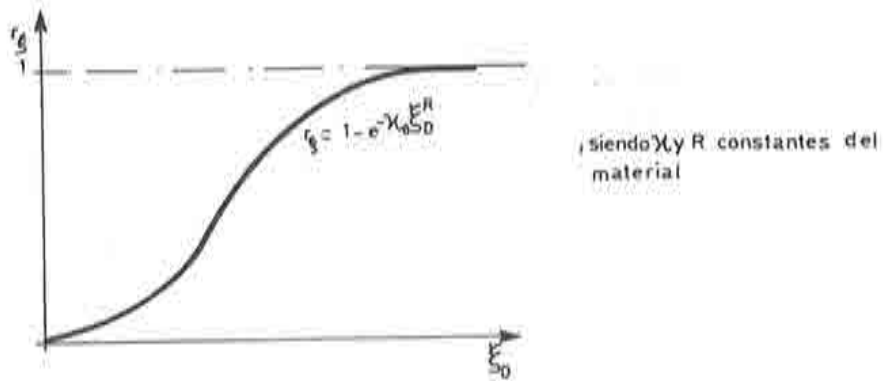


fig.(III.10): Regla de evolución del tamaño de la zona "inerte".

Dentro de esta estructura teórica, la respuesta plástica viene caracterizada en el espacio de tensiones, por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \text{-Una regla de flujo plástica:} \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma_{ij}, \alpha_\ell)}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \\
 \text{-Una regla de endurecimiento plástica:} \quad \dot{q}_i &= \dot{\lambda} H_i \equiv \dot{\alpha}_\ell = \frac{\alpha_{\ell 1}}{\xi^{\eta_\ell}} \quad (III.61) \\
 \text{-Y la condición de fluencia plástica:} \quad \mathcal{F}(\sigma_{ij}, \alpha_\ell) &\leq 0.
 \end{aligned}$$

donde $\mathcal{F}(\sigma_{ij}, \alpha_\ell)$ es una función de fluencia no-homogénea definida en el espacio de tensiones, que puede consultarse en las referencias ^{[51][53]}, α_ℓ es la variable de endurecimiento plástico, $\alpha_{\ell 1}$ y η_ℓ son unas constantes de endurecimiento,

y por último $\dot{\xi} = (\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p)^{1/2}$.

De acuerdo a esto, y a la condición de consistencia plástica, resulta una relación constitutiva elasto-plástica equivalente, igual a:

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij} = [\bar{D}_{ijkl}^{ep}]_T \dot{\epsilon}_{kl} \quad (III.62)$$

donde:

$$[\bar{D}_{ijkl}^{ep}]_T = [\bar{D}_{ijkl}]_S - \frac{[\bar{D}_{ijpq}]_S \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\sigma}_{pq}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\sigma}_{mn}} [\bar{D}_{mnkl}]_S}{-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} \right)^{1/3} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\sigma}_{uv}} [\bar{D}_{uvrs}]_S \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\sigma}_{rs}}}$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = [\bar{D}_{ijkl}]_S^{-1} \dot{\sigma}_{kl}$$

Para más detalle, se puede consultar las referencias de origen ^{[51][52]}.

Este modelo, puede ser considerado como una formulación no-local, ya que el comportamiento tensión-deformación de un punto *ec.(III.60)*, depende del volumen de la zona inerte, a través del factor de peso r_{ξ} .

III.4.- MODELOS BASADOS EN LA TEORIA ENDOCRONICA DE LA PLASTICIDAD.

Todas las teorías mencionadas en las secciones precedentes, son por lo general *incrementalmente lineales*. Los modelos constitutivos basados en la teoría endocrónica de la plasticidad, constituyen el más importante ejemplo donde esto no ocurre ^[134].

Las teorías de flujo incremental, como la teoría de la plasticidad, suponen la existencia de un *criterio de fluencia* y una *regla de endurecimiento* para definir la evolución de la superficie de fluencia durante el proceso de carga cuasi-estático. De esta forma, el modelo elasto-plástico puede ser visto como un material ideal con distintos comportamientos mecánicos: inicialmente elástico hasta alcanzar la superficie de discontinuidad inicial, luego plástico con endurecimiento hasta alcanzar la superficie de tensión máxima o pico, y por último plástico con ablandamiento hasta alcanzar la superficie de tensión última. Sin embargo, el material real tiene una respuesta única y condicionada por muchos fenómenos ^[35] que inducen a comportamientos no tan claros como los que idealiza la teoría elasto-plástica. Por ejemplo, es usual que en los materiales existan deformaciones permanentes antes de iniciar el proceso de cargas. Si se agrega a esto el desconocimiento sobre estas deformaciones y el tipo de comportamiento previo, se presenta la dificultad de no poder establecer con precisión la posición de la superficie de discontinuidad inicial.

Motivado por las razones mencionadas, entre otras, se han realizado considerables esfuerzos dentro de la mecánica de los medios continuos, con el fin de formular una teoría de material ideal, que permita describir el comportamiento inelástico de los sólidos, y que no requiera de la existencia de un criterio de fluencia, evitando así la definición de su función, la posición inicial y las complicadas reglas de endurecimiento que marcan la evolución de este criterio durante el período post-elástico. Con estas características generales, Valanis en 1971 ^{[138][139]}, dió origen a la llamada *teoría endocrónica* aplicada a materiales metálicos. Para ello formuló un modelo que puede ser considerado como un caso

general de la *visco-plasticidad* ^[35], en el que no sólo se incluye una descripción de la *historia de su comportamiento en la variable pseudo-tiempo*, sino también una *historia de su comportamiento en la variable de deformación*, que permite reproducir satisfactoriamente los fenómenos de endurecimiento, carga y recarga. Todo esto, sin la necesidad de que exista una función de fluencia ni reglas de endurecimiento.

Usando los conceptos de Valanis, Bazant y un grupo de colaboradores, han extendido la formulación de la teoría endocrónica con el fin de describir el comportamiento de materiales friccionales (suelos, rocas, hormigones, etc.) ^[6].

Aunque algunos aspectos de esta teoría parecen necesitar futuros estudios, se presenta como un procedimiento potente para las aplicaciones prácticas ^[36].

A continuación se describe brevemente algunos conceptos fundamentales del modelo endocrónico de Bazant ^[6].

La relación entre el tensor de tensiones σ_{ij} y el de deformaciones ϵ_{ij} , viene dada por la siguiente integral, modificada por Bazant, donde se introduce un *pseudo-tiempo* ξ . Esto es:

$$\sigma_{ij} = \int_0^{\xi} E_{ijkl} (\xi - \xi') \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial \xi'} d\xi' \quad (III.63)$$

donde:

$$\xi = \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{f(\zeta)} \quad : \text{pseudo tiempo}$$

$$d\zeta^2 = k_1 de_{ii} de_{jj} + k_2 de_{ij} de_{ij} + b dt^2$$

$$k_1, k_2, b \quad : \text{constantes del material}$$

$$f(\zeta) > 0 \quad : \text{función que depende de la historia del material}$$

$$E_{ijkl} \quad : \text{constante del material}$$

Esta última ecuación, representa una típica ecuación constitutiva de la teoría endocrónica lineal.

En las referencias ^[138] y ^[139], Valanis propone una función de relajación simple, del tipo : $E_{ijkl} = E^0 e^{-\alpha(t-t')}$, que permite analizar el comportamiento uniaxial de los metales. Sustituyendo esta función de relajación en la ec.(III.63), el modelo endocrónico se reduce a un simple modelo de Maxwell.

Para profundizar el estudio de este modelo, se recomienda consultar las referencias ^{[6][138][139]}.

III.5.- MODELOS DE FRACTURA.

Estos modelos, hacen la hipótesis de que el comportamiento no lineal del hormigón se debe fundamentalmente al fenómeno de fisuración que se origina debido a la baja resistencia a tracción que tiene este material. Normalmente consideran una simplificación de su comportamiento, suponiendo que se trata de un material *elasto-frágil*, y por lo tanto sólo reconocen dos estados mecánicos: - uno puramente elástico, y - otro fracturable.

Dentro del contexto del método de los elementos finitos, se pueden clasificar estos modelos en tres grupos ^[33]: 1) Modelos de fisura-distribuída, 2) Modelos de fisura-discreta, 3) Modelos de la mecánica de fractura clásica.

Si bien los modelos de fisura-distribuída han cobrado mucho auge en este último tiempo, se puede decir que esto no va en perjuicio de los modelos de fisura-discreta, ni de los de mecánica de fractura, ya que cada grupo tiene un campo de aplicación propio. En general, si sólo se quiere obtener un comportamiento carga desplazamiento y un camino aproximado de la evolución de las fisuras, resulta adecuado un modelo de fisura-distribuída. Si lo que importa es una detallada descripción de una zona muy localizada del hormigón, y conocer con más precisión el desarrollo de las fisuras, resulta más adecuado un modelo de fisura discreta. Para problemas especiales de fractura localizada, donde el tamaño del espécimen es muy grande respecto de la zona fracturada, es más apropiado escoger como herramienta de trabajo la mecánica de fractura.

III.5.a.- Modelos de fisura-distribuida.

Esta técnica, introducida por Y. Rashid ^[115], admite un comportamiento elástico lineal hasta alcanzar el *límite de fallo* que viene establecido por la máxima resistencia a tracción σ_T^{max} (que en estos casos coincide con la tensión de elasticidad a tracción σ_T^0). Este límite queda definido a través de una función que describe una superficie en el espacio de tensiones principales. Luego de alcanzar esta frontera, se considera que el material adopta la forma de un sólido ortótropo con respuesta diferenciada según cada dirección principal de tensión. Esta respuesta se debe a que el modelo supone, por hipótesis, que se desarrollan planos de fisuras normales a la tensión principal mayor luego de alcanzar la máxima resistencia de tracción. Estos planos paralelos de fisura, tratan de representar la formación de una fisura discreta real fig.(III.11).

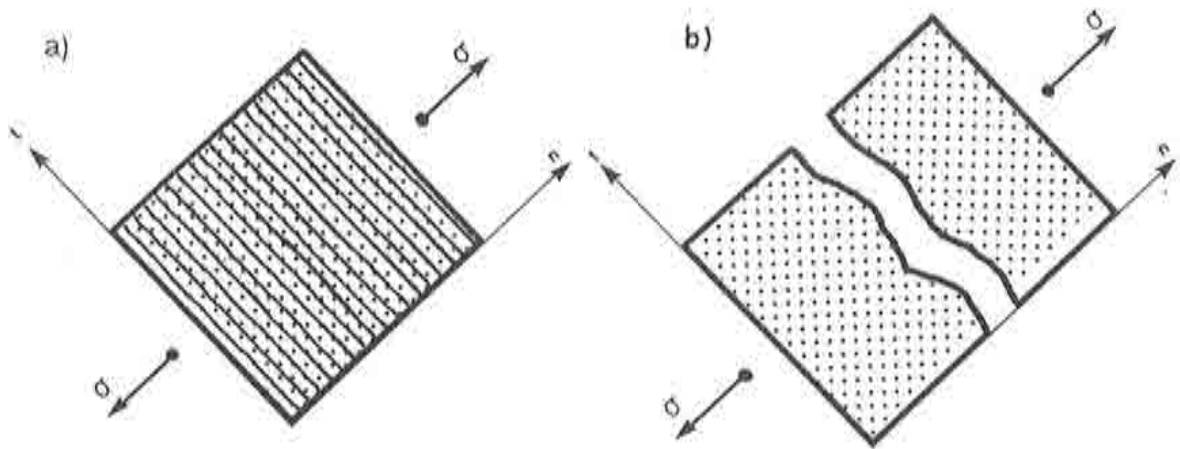


fig.(III.11): Idealización de una fractura real por medio de planos paralelos de fisura-distribuida. a) Fisura-distribuida. b) Fisura real.

Los primeros modelos de este grupo sostienen que una vez producida la primera fisura, después de alcanzar la resistencia máxima a tracción, el módulo de elasticidad en la dirección normal a la misma se hace nulo (modelo de Rashid ^[115]);

de manera que se produce una pérdida violenta de su resistencia a tracción $\sigma_T \rightarrow 0$. Posteriormente A. Hillerborg et al. ⁽⁶⁰⁾, basados en resultados experimentales, propusieron un modelo que considera al hormigón como un sólido no tan frágil, caracterizado por una respuesta tensión-desplazamiento, entre caras de fisura, donde la pérdida de tensión se produce gradualmente a medida que crece el desplazamiento entre ellas (material con ablandamiento). Este modelo, denominado de *fisura ficticia*, considera que la microfisuración resulta de una pérdida gradual de cohesión en una cierta región de tamaño finito. Asimismo, formula dos ecuaciones constitutivas distintas, una para la zona dañada provista por una relación tensión-desplazamiento, y otra para la zona no dañada provista por una relación tensión deformación ⁽⁶⁰⁾ fig.(III.12).

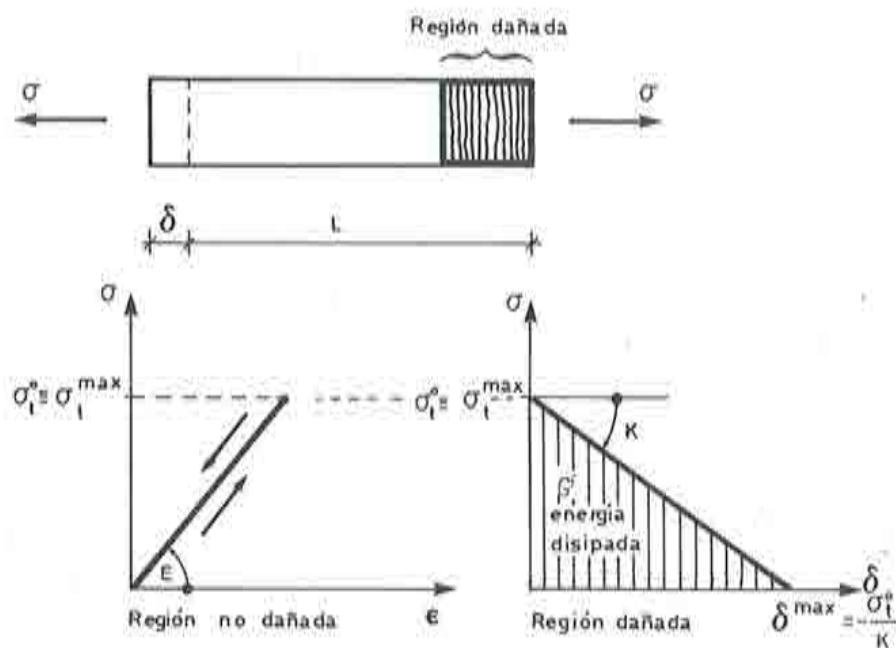


fig.(III.12): Modelo de A. Hillerborg. Esquema de comportamiento para la zona dañada y no-dañada.

Para explicar en forma sintética el funcionamiento de este modelo clásico, se considera, a modo de ejemplo, la barra de la fig.(III.12). En ella el desplazamiento en el extremo vale:

$$\delta = L \frac{\sigma}{E^0} + \frac{1}{K} (\sigma - \sigma_T^{max}) \quad (III.64)$$

donde E^0 es el módulo de Young inicial, σ_T^{max} es la resistencia máxima a tracción, y K la pendiente de la curva $(\sigma - \delta)$.

La energía que se disipa durante el proceso de fractura será :

$$W^f = \frac{1}{2} \sigma_T^{max} \delta^{max} A^f = G^f A^f \quad (III.65)$$

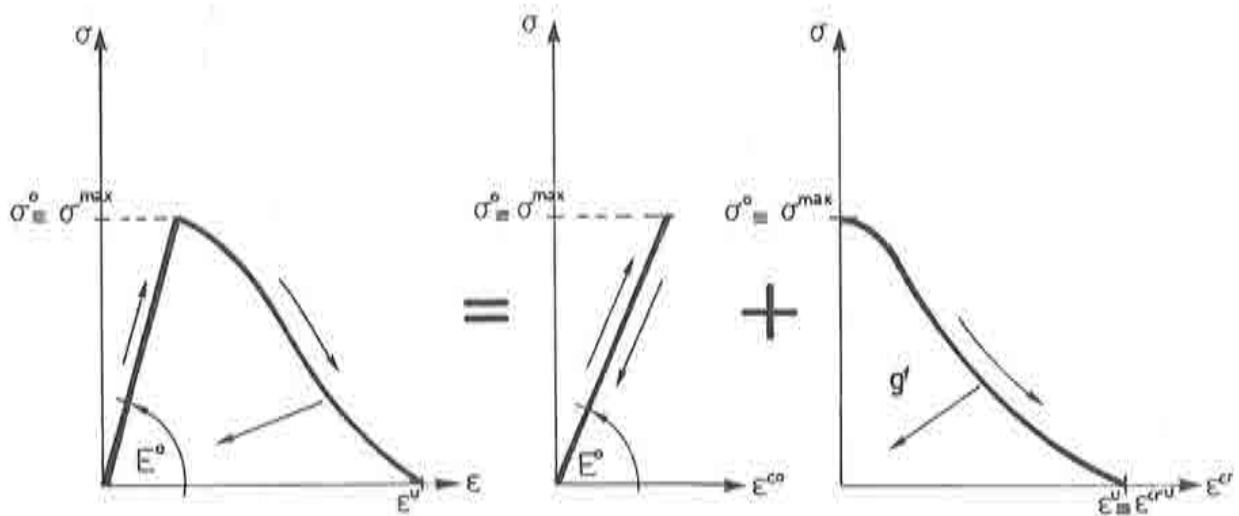


fig.(III.13): Comportamiento esquemático uniaxial del hormigón, en la zona dañada.

donde A^f es la superficie de la cara de la fisura, que para el ejemplo de la fig.(III.12) coincide con la sección transversal de la barra, y G^f es la *energía de fractura por unidad de área fracturada ec.(An-D.21)*. Esta energía es considerada como una propiedad del material ^{[10][11][14][48][60][123]}, y permite encontrar a partir

de la ec.(III.65), el valor del desplazamiento máximo δ^{max} para el cual la fisura pierde totalmente su capacidad de resistir tensiones, y con ello se puede definir la pendiente de la curva $(\sigma - \delta)$:

$$\delta^{max} = \frac{2 G^f}{\sigma_T^{max}} \implies K = -\frac{(\sigma_T^{max})^2}{2 G^f} \quad (III.66)$$

Entre los modelos de fisuración distribuída más recientes, se encuentran los formulados por Z. Bažant et al. ^{[10][14]}, J. Rots et al. ^[123], R. De Borst ^[18], E. Hinton and M. Cervera ^[30], R. Glemberg ^[54], que consideran una ecuación constitutiva elástica en tensión-deformación para la zona no-dañada, y otra con ablandamiento para la zona dañada fig.(III.13).

• **Modelo de fisuración distribuida de Rots et al.** ^[123] .

A continuación, por ser uno de los modelos de fisuración distribuída más significativos, se presenta en forma breve el **Modelo de J. Rots et al.** ^[123], que resulta ser un caso particular del propuesto por Bažant and Ho ^{[14][22]}.

El rasgo fundamental de este modelo, es la descomposición aditiva que aplica sobre el incremento total de deformación $\Delta\epsilon$, en un incremento de deformación correspondiente al hormigón sin fisurar $\Delta\epsilon^{eo}$, más otro incremento de deformación correspondiente al hormigón fisurado $\Delta\epsilon^{er}$ fig.(III.14):

$$\Delta\epsilon = \Delta\epsilon^{eo} + \Delta\epsilon^{er} \quad (III.67)$$

aparentemente, la teoría de la plasticidad utiliza una descomposición similar, sin embargo es necesario establecer una diferencia fundamental entre ambas formas de considerar esta descomposición aditiva. La deformación ϵ^{er} se recupera totalmente si se descarga el sólido, por lo tanto se puede interpretar como un comportamiento de degradación de la rigidez secante durante el período post-elástico; en cambio en plasticidad, la deformación plástica es irrecuperable, por que resulta de la acción de un proceso inelástico fig.(III.14).

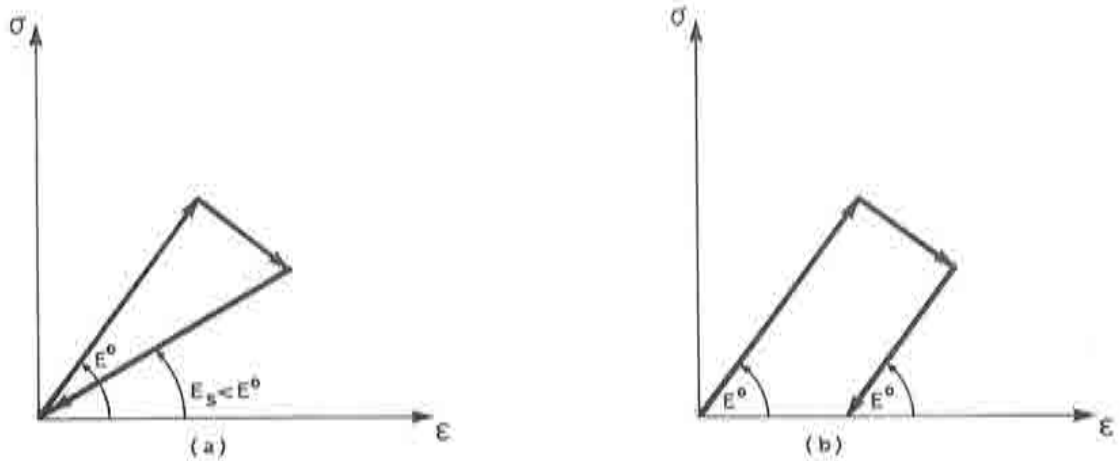


fig.(III.14): Diferencias esquemáticas, entre: a) el comportamiento del modelo de fisura distribuida, y b) el modelo de plasticidad clásica con ablandamiento.

El incremento de deformación $\Delta \epsilon^{cr}$, puede ser descompuesto en varias contribuciones que dependen del número de fisuras ficticias que se desarrollen en un punto. Esto es:

$$\Delta \epsilon^{cr} = \Delta \epsilon_1^{cr} + \Delta \epsilon_{II}^{cr} + \dots + \Delta \epsilon_n^{cr} \quad (III.68)$$

donde $\Delta \epsilon_1^{cr}$ es el incremento de deformación correspondiente a la fisura primaria, $\Delta \epsilon_{II}^{cr}$ es el incremento de deformación correspondiente a la fisura secundaria, etc. La relación entre cada incremento de deformación en la fisura, y el respectivo incremento de tensión, se define en un sistema de referencia local a la fisura, y luego es transformado al sistema global de referencia. El modelo supone que el incremento de deformación $\Delta \epsilon_n^{cr}$, definido en el sistema de referencia local de la fisura n -ésima que se desarrolla en un punto, sólo tiene dos componentes: Una normal a la fisura $\Delta \epsilon_n^{cr}$ (Modo-I de fractura), y otro tangencial a la misma $\Delta \gamma_n^{cr}$ (Modo-II de fractura) fig.(III.15). Esto es:

$$\Delta \mathbf{e}_n^{cr} = \mathbb{N}_n \Delta \mathbf{e}_n^{cr}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_{11}^{cr} \\ \Delta \epsilon_{22}^{cr} \\ \Delta \gamma_{12}^{cr} \end{Bmatrix}_n = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta_n & -\sin \vartheta_n \cos \vartheta_n \\ \sin^2 \vartheta_n & \sin \vartheta_n \cos \vartheta_n \\ 2 \sin \vartheta_n \cos \vartheta_n & \cos^2 \vartheta_n - \sin^2 \vartheta_n \end{bmatrix}_n \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_n^{cr} \\ \Delta \gamma_n^{cr} \end{Bmatrix}_n \quad (III.69)$$

donde ϑ_n es el ángulo que hace la normal al plano de la fisura n -ésima con el eje de referencia global x_1 . Esta dirección, por hipótesis, coincide con la de la tensión principal mayor de tracción e_c . (An-D.2.b.).

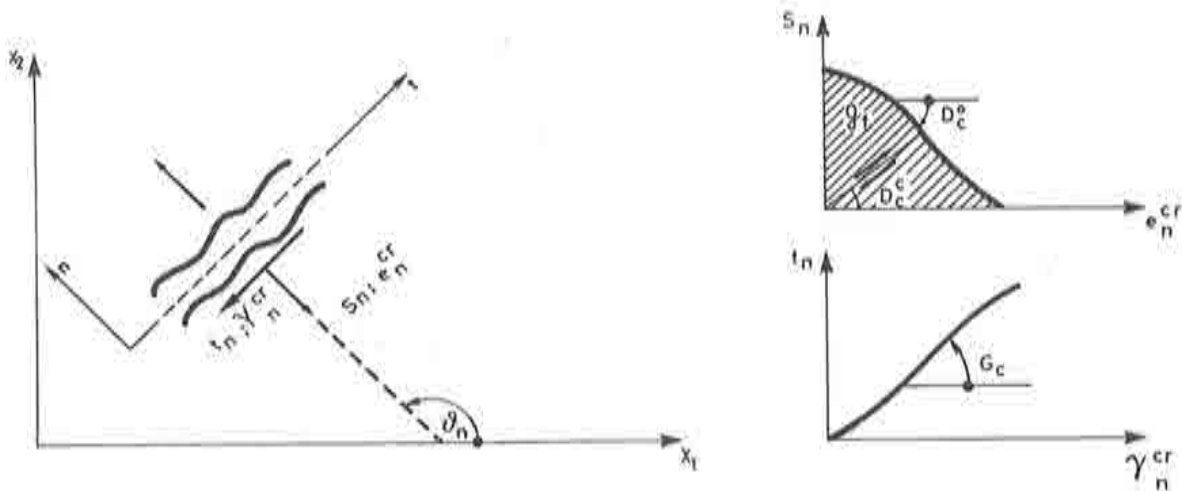


fig.(III.15): Deformaciones y tensiones desarrolladas en una fisura según un sistema de referencia local.

Sustituyendo la ec.(III.69) en la ec.(III.68), queda expresada la deformación de fisuración total, en un punto, como:

$$\Delta \mathbf{e}^{cr} = \mathbb{N} \Delta \mathbf{e}^{cr} \quad (III.70)$$

con:

$$\mathbb{W} = [\mathbb{W}_I \quad \mathbb{W}_{II} \quad \dots \quad \mathbb{W}_n]$$

$$\Delta \mathbf{e}^{cr} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{e}_I^{cr} \\ \Delta \mathbf{e}_{II}^{cr} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{e}_n^{cr} \end{array} \right\}$$

En forma análoga, se define el vector $\Delta \mathbf{S}_n$, que representa el estado tensional en la fisura n -ésima según el sistema de referencia local fig.(III.15), y que tiene dos componentes: -Una normal al plano de la fisura ΔS_n , y -Otra tangencial a dicho plano Δt_n . La transformación del sistema de referencia global al local, se realiza a través de la siguiente expresión:

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbb{W}^T \Delta \boldsymbol{\sigma} \tag{III.71}$$

con:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{array} \right\} ; \quad \Delta \mathbf{S} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{S}_I \\ \Delta \mathbf{S}_{II} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{S}_n \end{array} \right\} ; \quad \Delta \mathbf{S}_n = \left\{ \begin{array}{c} \Delta S_n \\ \Delta t_n \end{array} \right\}$$

Conocido el concepto básico del modelo y sus variables fundamentales, se presenta a continuación la relación tensión-deformación para los puntos no dañados, y otra para los puntos fisurados. Para el hormigón no fisurado, se acepta una relación elástica lineal del tipo:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{co} \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{co} \tag{III.72}$$

donde \mathbf{D}^{co} es el tensor de rigidez elástico del material, expresado como matriz para un sistema plano (*apart. A-I.2.*). La relación tensión-deformación para el

material fisurado, se formula en el sistema de referencia local de la fisura fig.(III.15). Esto es:

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{D}^{cr} \Delta \mathbf{e}^{cr} \quad (III.73)$$

con:

$$\mathbf{D}^{cr} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_I^{cr} & & & \\ & \mathbf{D}_{II}^{cr} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{D}_u^{cr} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{D}_u^{cr} = \begin{bmatrix} D_c & \\ & G_c \end{bmatrix}_u$$

$$D_c = D_c^0 \quad \text{para fisuras activas}$$

$$D_c = D_c^c \quad \text{para fisuras en descarga o recarga}$$

A partir de las ecs.(III.67),(III.70),(III.71),(III.72) y (III.73) se puede formular la relación constitutiva tangente incremental para el hormigón:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \left\{ \mathbf{D}^{co} - \mathbf{D}^{co} \mathbb{N} \left[\mathbf{D}^{cr} + \mathbb{N}^T \mathbf{D}^{co} \mathbb{N} \right]^{-1} \mathbb{N}^T \mathbf{D}^{co} \right\} \Delta \boldsymbol{\epsilon} \quad (III.74)$$

Para definir el módulo de rigidez extensional D_c^0 , que interviene en cada \mathbf{D}_u^{cr} , es necesario suponer, al igual que en el modelo de Hillerborg, que la energía de fractura por unidad de superficie fracturada G^f es una constante del material. Así, para una fractura real se tiene:

$$G^f = \int_0^{\delta^{max}} S \, d\delta \quad \text{y además} \quad W^f = \frac{G^f}{A^f} \quad (III.75)$$

pero la energía total disipada por este modelo, durante un proceso de fisuración, vale:

$$W^f = \int_{V^{cr}} g^f dV = \int_{V^{cr}} \left[\sum_{i=1}^n \left(\int_0^{e^{cr}} S_n de_n^{cr} \right) \right] dV \quad (III.76)$$

de las ecs.(III.75) y (III.76) resulta la relación entre G^f y g^f :

$$g^f = \frac{G^f}{L^f} \quad (III.77)$$

donde L^f es el ancho de la zona de influencia de una fisura distribuída. Con g^f y la función $S(e^{cr})$ queda perfectamente definida la curva $(S - e^{cr})$.

El módulo de rigidez de corte G_c , se toma constante e igual a:

$$G_c|_n = [\beta_G G^0]_n \quad (III.78)$$

siendo $G^0 = \frac{E^0}{2(1+\nu)}$, $\beta_G = cte. = \frac{t_n^e}{t_n^a}$ el factor de retención de tensiones

cortantes para cada fisura, t_n y t_n^e son la tensiones tangenciales actual y elástica de la fisura n -ésima, expresadas en el sistema de referencia local, respectivamente.

Este modelo a sido actualizado por sus autores, con el objeto de considerar además, un comportamiento elasto-plástico con endurecimiento ^{[20][22]}, lo que supuso que la deformación incremental definida en la ec.(III.67), quede formulada ahora de la siguiente manera:

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon^{eo} + \Delta \epsilon^{er} = (\Delta \epsilon^e + \Delta \epsilon^p) + \Delta \epsilon^{er} \quad (III.79)$$

donde el comportamiento inelástico, es gobernado por la la teoría de la plasticidad clásica (*apen. A-I*). Recientes cambios que se han practicado sobre esta última modificación del modelo, permite trabajar en problemas dominados por el comportamientos en modo-II de fractura ^[123] y en fluencia diferida ^[20].

III.5.b.- Modelos de fisura-discreta.

El primer modelo para el análisis, por el método de los elementos finitos, de la fisuración del hormigón fué desarrollado por Ngo and Scordelis en el año 1967 ^[90]. Este modelo ha sido propuesto para realizar un análisis elástico lineal en problemas de tensión plana, con una *trayectoria pre-definida para las fisuras*. Cada *fisura pre-definida*, debe ser modelada mediante la desconexión de los nodos de la malla de elementos finitos, marcando así la trayectoria que se ha previsto para dicha fisura fig.(III.16). En trabajos posteriores de dichos autores, se incluyeron efectos como el de *clavija*, producido por el acero y el rozamiento entre las caras de una fisura.

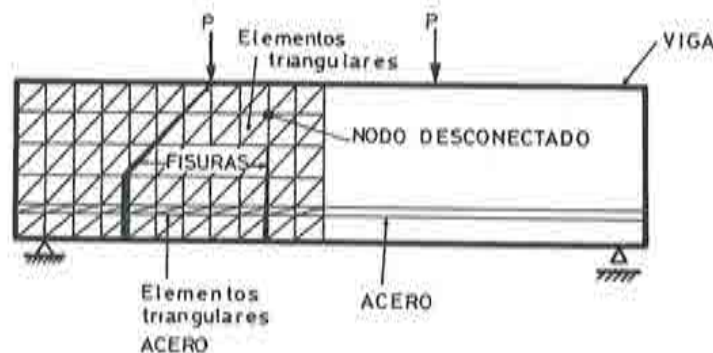


fig.(III.16): Modelo de fractura-discreta de Ngo and Scordelis ^[90].

El problema que se encontró en este modelo, además de la arbitraria elección del camino de fisuración, fué la dependencia de la respuesta del sólido, de la forma y tamaño de la malla de elementos finitos.

A. Nilson ^[91] presentó una modificación de este procedimiento, que permite que las fisuras se propaguen inter-elementalmente a través de una desconexión automática de los nodos, la que ocurre cuando el promedio de tensión en un lado de un elemento finito supera la máxima resistencia a tracción del hormigón. Esto permitió prescindir de la definición arbitraria del camino de las fisuras, ya que esto depende del proceso mismo.

Sucedieron a estos trabajos, otros que mejoraron el procedimiento, no obstante siempre se presenta el inconveniente del elevado costo de *re-definición* de la malla de elementos finitos ^{[48][134]}.

III.5.e.- Modelos basados en la mecánica de fractura clásica – Elástica lineal.

Los parámetros que gobiernan la iniciación y propagación de las fisuras en la *mecánica de fractura elástica lineal* son los factores de intensidad de tensiones K_I , K_{II} , K_{III} y la tenacidad del material a la fractura K_{IC} ^{[48][134]}. En esta aproximación se supone que el tamaño de la zona de fractura es despreciable frente a su longitud. De esta forma, se pueden obtener las tensiones en el fondo de una fisura, con el sólo conocimiento de los factores K_i . La tenacidad del material a fractura, es una propiedad de éste y permite estudiar la estabilidad de una fisura, así pues, si el factor de intensidad de tensiones alcanza el valor crítico, la fisura se propaga en forma inestable. Este comportamiento parece razonable para fisuras muy grandes, en caso contrario pueden aparecer errores importantes ^[48] (efecto medida ^{[11][28][50]}).

El proceso operativo (de la ref. ^[48]), consiste en los siguientes pasos generales:

– Cálculo de los factores de intensidad de tensiones, a través de las expresiones de Ingraffea fig.(III.17):

$$K_I = \sqrt{2 \frac{\pi}{L} \frac{G}{(\kappa_k + 1)}} [4(v_B - v_D) + v_e - v_C] \quad (III.80)$$

$$K_{II} = \sqrt{2 \frac{\pi}{L} \frac{G}{(\kappa_k + 1)}} [4(u_B - u_D) + u_e - u_C]$$

donde u y v son los desplazamientos en un sistema de referencia local a la fisura, G es el módulo de rigidez a corte, $\kappa_k = 3 - 4\nu$ para problemas de tensión plana y $\kappa_k = 3 - \nu/1 + \nu$ para problemas de deformación plana, y ν el coeficiente de Poisson.

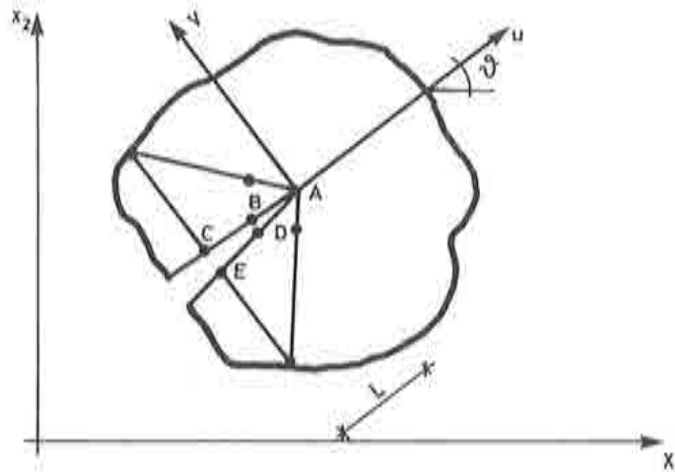


fig.(III.17): Elementos singulares que rodean una fisura ^[48] (los más usados son los isoparamétricos con nodos en los cuartos de lado).

- Estudio de la estabilidad de la fisura, para ver la magnitud y dirección de crecimiento. Existen distintos criterios de inestabilidad que predicen la carga crítica y la dirección de propagación de la fisura ^[48] .
- El estudio de la propagación, el cual se debe realizar cuando se detecta la inestabilidad en la fisura. De esta forma se establece un nuevo punto, que requiere calcular los K_I , y nuevamente su estabilidad.

Este tema puede consultarse en las referencias ^{[28][33][48][134]} .

III.6.- NECESIDAD DE UN NUEVO MODELO CONSTITUTIVO.

De los distintos modelos constitutivos presentados en este capítulo, se advierte que existen algunos problemas en simular el comportamiento del hormigón a partir de soluciones aisladas. Ciertos modelos ofrecen formulaciones más o menos generales, sin embargo es necesario dar un tratamiento amplio basado en una teoría única. Es por ello que en el capítulo siguiente se presentan los fundamentos de un modelo constitutivo, que trata los fenómenos más importante del hormigón, basado en una única estructura teórica (la teoría de la plasticidad).

CAPITULO IV

MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO PLÁSTICO: -PARTICULARIZADO PARA HORMIGONES-

IV.1.- MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO PLÁSTICO PARA MATERIALES FRICCIONALES PARTICULARIZADO PARA HORMIGONES — INTRODUCCION.

En este capítulo se presenta un modelo constitutivo, objeto fundamental de este trabajo, que puede ser denominado *modelo de daño plástico* ^[78]. Su nombre se debe a la *hipótesis* que considera que el *comportamiento no-lineal inelástico que sufre un sólido cohesivo-friccional*, como consecuencia de la formación y desarrollo de micro-fisuras debido al deslizamiento entre las partículas de su masa, *es asimilable a un fenómeno elasto-plástico* ^[46].

La posibilidad de la aplicación de la teoría matemática de la plasticidad a un material friccional, parte de suponer que la deformación no recuperable, o *deformación por micro-fisuración* ^[34], puede ser entendida en forma análoga que en los materiales plásticos ^[29].

La teoría matemática de la plasticidad clásica está basada en una formulación tenso-deformacional isotrópica para cada punto del sólido ($\mathcal{A}P-I$), lo que significa que la *función de fluencia plástica* se ve sometida a un movimiento homotético fig.(IV.1,a) que es gobernado por la evolución de la variable de endurecimiento plástico κ ($\mathcal{A}P-I$). La interpretación física de este daño isotrópico ^[29], puede ser entendida a partir del fenómeno de *daño adireccional* que sufre *cada punto del sólido real* ^[85].

Así, en un primer análisis, el concepto de *daño adireccional* resulta contrapuesto al de *daño macroscópico* (fractura), debido a que este último constituye un *fenómeno direccional* fig.(IV.1,b).

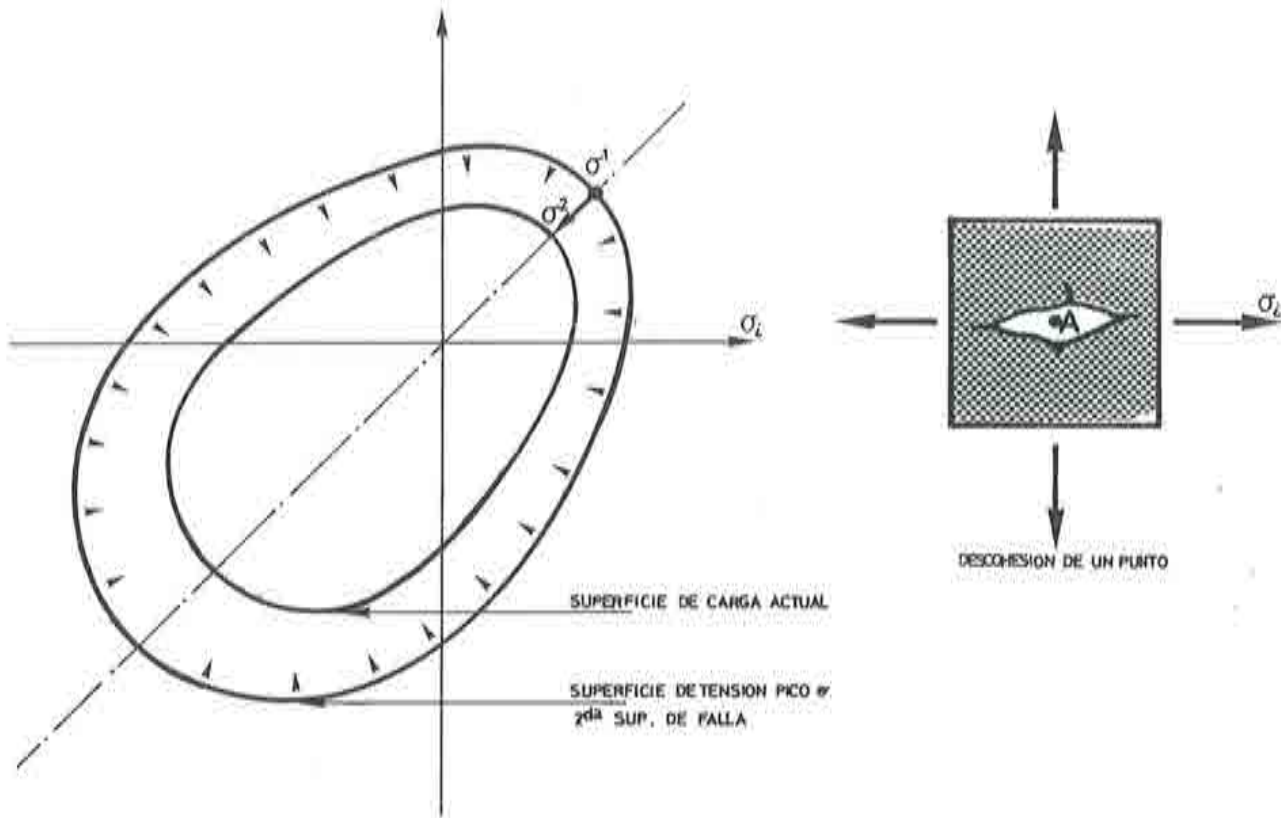


fig.(IV.1,a): Comportamiento isotrópico de un punto del sólido

Del análisis realizado en el *cap. II*, sobre el comportamiento del hormigón, se puede admitir como hipótesis que el *daño macroscópico direccional* (fisura), proviene de un comportamiento *microscópico adireccional* de los puntos situados en una cierta zona del sólido, que se denominará *zona de daño*. con base en esto, una fisura quedará definida por el lugar geométrico de los puntos que han sufrido un daño adireccional fig.(IV.1,b).

La concentración del daño en una determinada zona del sólido, se debe a un fenómeno denominado *localización* o *concentración de deformaciones* fig.(IV.2) (*Anexo-D*) que se desarrolla en una zona del sólido de dimensiones reducidas ^[100], donde una cierta cantidad de puntos se encuentran sometidos a un proceso de endurecimiento negativo o ablandamiento.

De acuerdo con este razonamiento, el sólido se encuentra constituido por puntos situados dentro de la zona de daño, que siguen un proceso

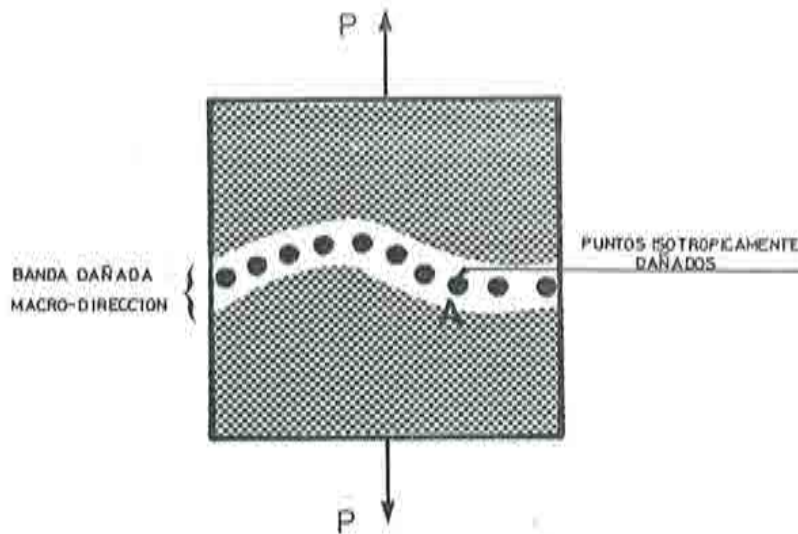


fig.(IV.1,b): Aspecto macroscópico de los infinitos puntos isotrópicamente dañados

tenso-deformacional con pérdida de tensión y crecimiento de la deformación (ablandamiento), así como por puntos que están fuera de la zona de localización del daño y que experimentan un proceso de descarga manteniendo el nivel de daño ya alcanzado fig.(IV.2).

El modelo constitutivo que se presenta es capaz de memorizar la *macro-direccionalidad del daño* producido durante todo el proceso de carga, admitiendo condiciones de *carga no-radial* * o *no-proporcional* (cap. V).

En virtud de lo antes dicho, se considera que el fenómeno de localización del daño posibilita el uso de la teoría de la plasticidad como base de un "modelo constitutivo de daño total, para materiales friccionales", ofreciendo así una herramienta que satisface en buen modo los mecanismos de daño descritos para el hormigón en el cap. II, y que cumple rigurosamente con los principios básicos de la mecánica de medios continuos [35][79][81].

* Nota: Se dice que un proceso de carga es "radial" o "proporcional" cuando se cumple durante toda la aplicación de la misma la siguiente relación $\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11}^0} = \frac{\tau_{12}}{\tau_{12}^0} = \dots = \frac{\sigma_{33}}{\sigma_{33}^0}$ entre las componentes del tensor de tensiones en el estado actual y el estado inicial, respectivamente

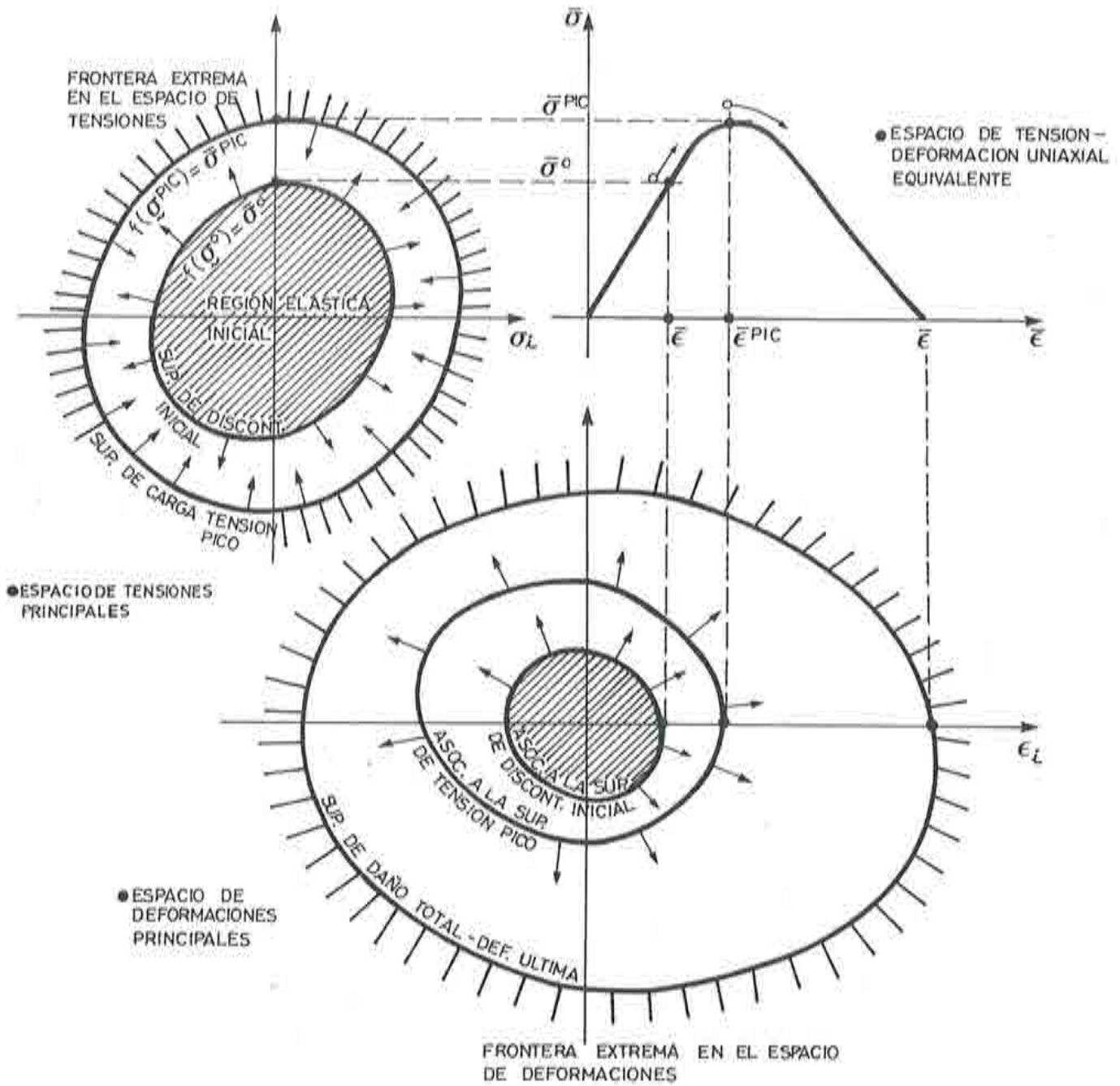


fig.(IV.2): Estado del daño en distintos puntos del sólido:

a) Comportamiento de un punto del sólido en la zona dañada.

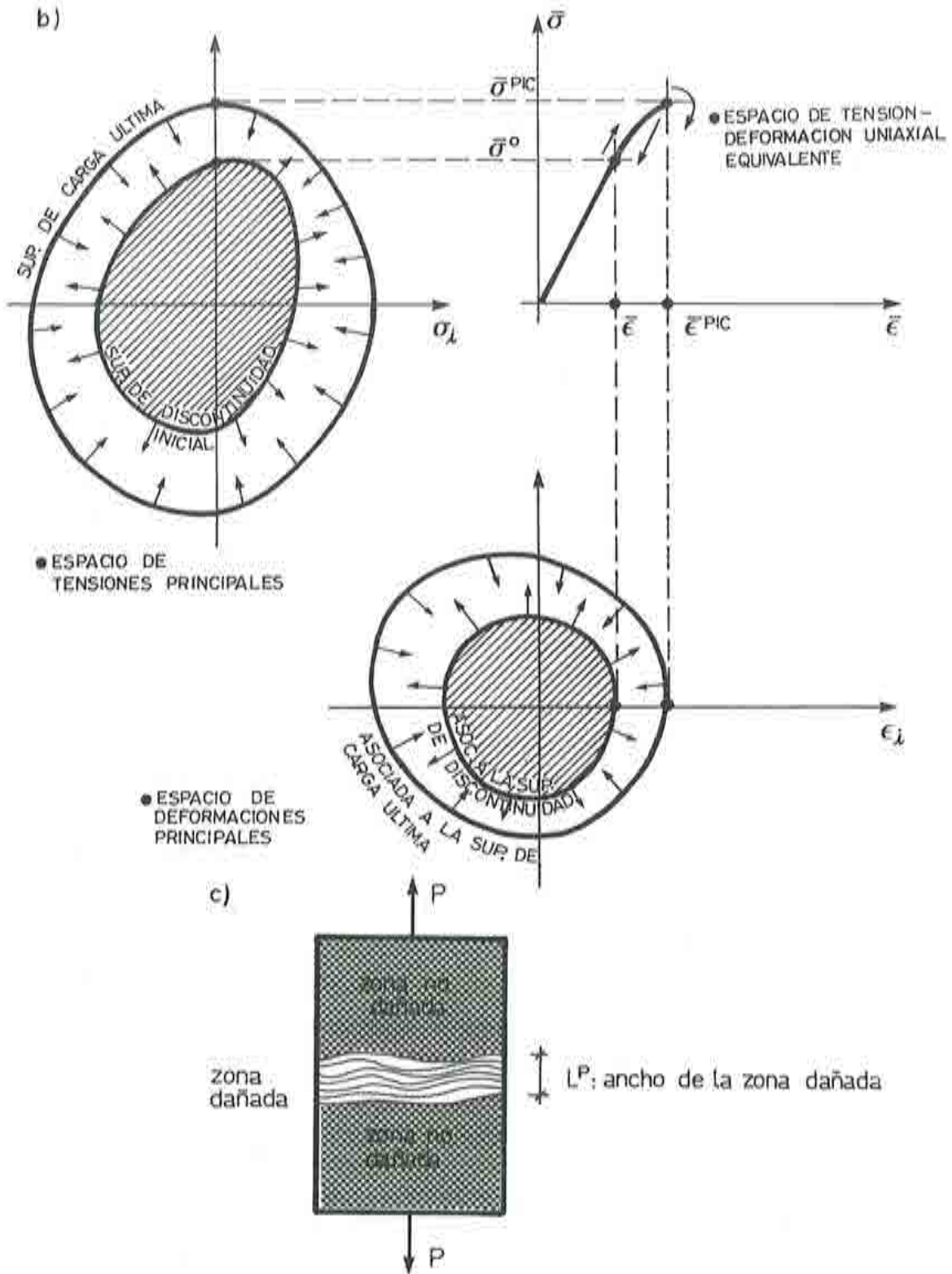


fig.(IV.2): Estado del daño en distintos puntos del sólido:

b) Comportamiento de un punto del sólido en la zona no-dañada.

c) Localización del daño en un zona del sólido.

IV.2.- CARACTERISTICAS GENERALES DEL MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO PLASTICO.

La teoría de la plasticidad proporciona una adecuada estructura físico-matemática, que permite formular el comportamiento de los materiales friccionales sometidos a estados de carga. De la extensión de sus principios básicos y de la reinterpretación de sus variables fundamentales, ha surgido este modelo de daño plástico. Así, a partir de la *variable de endurecimiento plástico* κ , definida en el *Ap-I*, se ha formulado una *variable de daño plástico* κ^p , que crece *si y solo si* hay deformaciones plásticas no llegando nunca a decrecer. Esta variable interna está tratada como una magnitud adimensional, normalizada a la unidad, que varía entre $0 \leq \kappa^p \leq 1$, tal que para $\kappa^p = 0$ no hay daño plástico, y para $\kappa^p = 1$ se define el límite de *daño total de un punto del sólido*. Este *estado último* puede ser interpretado desde el punto de vista de la mecánica de los medios continuos, como una *pérdida total de tensión*, y desde un punto de vista físico, como un desmembramiento de la masa del sólido en el punto de análisis (discontinuidad física).

El criterio de *fluencia plástica* presentado en la *ec.(Ap-1.7)*, es tratado en este modelo a través de una expresión matemática que puede ser escrita en la siguiente forma general:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, c) = f(\boldsymbol{\sigma}) - c = 0 \quad (IV.1)$$

donde $f(\boldsymbol{\sigma})$ es una función escalar homogénea de primer grado en las componentes del tensor de tensiones, que permite definir la cohesión c , o una tensión uniaxial escalada, como una *función de endurecimiento plástico*. Los criterios de plasticidad de Mohr-Coulomb y Drucker-Prager (*Ap-I*) también pueden representarse por una expresión similar a la *ec.(IV.1)*, pero no aproximan adecuadamente el comportamiento real de los hormigones ^[33], ni de los geomateriales en general ^[43]. Numerosos criterios de fluencia plástica han tratado de mejorar esta aproximación para los materiales cohesivos-friccionales ^{[33][34][47][50][73][102][113]}, pero solo se ha logrado una mejora formulando funciones $f(\boldsymbol{\sigma})$ *no-homogéneas* en las componentes del tensor de tensiones, característica que impide definir una *función de endurecimiento plástico* con una interpretación física directa. Para el modelo constitutivo que se propone, se han definido

dos criterios de fluencia: Una simple modificación del de Mohr-Coulomb (*anexo-C*), que permite obtener una relación inicial de resistencia uniaxial $|\sigma_C^0|/|\sigma_T^0|$ adecuada para el hormigón, a partir de un ángulo de rozamiento interno ϕ apropiado (*apart. Ap-I.3.f*); y otro más general (*apart. IV.5*), definido como una función homogénea de primer grado en las tensiones, que concuerda bastante bien con el comportamiento experimental del hormigón excepto en el dominio de altas presiones hidrostáticas.

La *cohesión* c , es tratada como una magnitud escalada con la resistencia inicial a compresión uniaxial del hormigón σ_C^0 (*umbral de discontinuidad tensional*), que es el nivel de tensiones para el cual la deformación volumétrica ϵ_v es máxima. Consecuentemente se define: La *cohesión inicial*, o cohesión del material virgen, como $c = c^0 \propto \sigma_C^0$ para $\kappa^p = \kappa^{p0} = 0$, situación que establece la posición inicial del criterio de fluencia o criterio de discontinuidad inicial, y la *cohesión final*, o cohesión del material totalmente dañado, como $c = c^u = 0$ para $\kappa^p = \kappa^{pu} = 1$ situación que define la posición final del criterio de fluencia o discontinuidad. A diferencia de la plasticidad clásica con endurecimiento isotrópico, la cohesión no es una simple función de la *variable de endurecimiento plástico* $c(\kappa)$ (*apart. Ap-I.3.c.*), sino que es una *variable interna* que depende del proceso elasto-plástico, gobernada por una ecuación de evolución.

A pesar de que el *ángulo de rozamiento interno* ϕ también podría definirse como una variable interna, a partir de una ley de evolución que dependa del proceso elasto-plástico, se plantea simplemente una función explícita de la variable de daño plástico $\phi(\kappa^p)$. Con esta hipótesis se ha obtenido una buena aproximación al comportamiento real del hormigón. Este ángulo vale $\phi = \phi^0 = 0$ al iniciar el proceso plástico, para $\kappa^p = 0$, y $\phi = \phi^{max}$ al finalizar el proceso para $\kappa^p = 1$.

El *ángulo de dilatación* ψ , que al igual que el ángulo de rozamiento interno podría definirse como una variable interna, también en este caso se obtiene explícitamente como una función de la variable de daño plástico $\psi(\kappa^p)$, dado que con esta hipótesis también se ha obtenido una buena aproximación al comportamiento real del hormigón. Este ángulo vale $\psi = \psi^0 = 0$ al iniciar el proceso plástico, para $\kappa^p = 0$, y $\psi = \psi^{max}$ al finalizar el proceso para $\kappa^p = 1$.

En definitiva, para un proceso plástico sin degradación de rigidez, el vector de variables internas \mathbf{q} (Ap-I.3.b), queda expresado por $\mathbf{q} = (\boldsymbol{\epsilon}^p; c; \kappa^p)$ ^[140], donde $\boldsymbol{\epsilon}^p$ es la deformación plástica, c la cohesión entre partículas, y κ^p la variable de daño plástico; cuyas reglas de evolución serán definidas seguidamente, como parte de las ecuaciones fundamentales que gobiernan el modelo. Estas son:

- Un criterio de fluencia plástica como el definido por la ec.(IV.1).
- Una descomposición de la deformación en una cuota elástica y otra plástica ec.(Ap-I.20):

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}_S^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\epsilon}^p = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p \quad (IV.2)$$

siendo \mathbf{D}_S el tensor de rigidez elástico secante.

- Una regla de flujo plástica no asociada, definida como una variable interna mediante la siguiente ecuación de evolución ec.(Ap-I.21):

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{H}_{e^p}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \equiv \dot{\lambda} \left[\frac{\partial \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, c)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] = \dot{\lambda} \mathbf{g} \quad (IV.3)$$

donde $\dot{\lambda}$ es un escalar no-negativo denominado parámetro de consistencia plástica.

- Una ecuación de evolución de la variable de daño plástico, definida mediante la siguiente hipótesis ec.(Ap-I.37):

$$\dot{\kappa}^p = \dot{\lambda} H_{\kappa}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \equiv \dot{\lambda} \left[\mathbf{h}_{\kappa}^T(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \frac{\partial \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, c)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] = \mathbf{h}_{\kappa}^T(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (IV.4)$$

donde $\mathbf{h}_{\kappa}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c)$ es un tensor de segundo orden, función del estado actual de las variables $\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c$.

- Y una ecuación de evolución de la cohesión, definida mediante la siguiente hipótesis:

$$\dot{c} = \dot{\lambda} \quad H_c(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) \equiv \dot{\lambda} \left[h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \mathbf{h}_n^T(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \frac{\partial \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, c)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] = h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \dot{\kappa}^p \quad (IV.5)$$

donde $h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c)$ es un función escalar del estado actual de las variables $\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c$.

IV.3.- VENTAJAS MAS IMPORTANTES DEL MODELO DE DAÑO PLASTICO PROPUESTO

Los rasgos generales dados sobre el modelo en los apartados anteriores, permiten valorar algunas de sus ventajas y anticipar otras. Entre las características más importantes se pueden mencionar las siguientes:

- Formula una *ley constitutiva* que permite considerar satisfactoriamente procesos de carga dominados por estados de comportamiento volumétricos y distorsionales a la vez.
- *Trata en forma unificada los procesos multiaxiales a tracción y compresión*, mediante una formulación inelástica sólidamente fundada en la teoría matemática de la plasticidad.
- Define como *variables internas*, la cohesión y la variable de daño plástico, y como variables explícitas el el ángulo de rozamiento interno y el ángulo de dilatación; pudiendo condicionar la *evolución* de éstas, durante el proceso elasto-plástico, mediante funciones que deben ajustarse a partir de resultados experimentales uniaxiales.
- Considera que los materiales no solo tienen *distintos límites tensionales de fallo a tracción y a compresión*, sino que también distingue para cada uno de estos procesos, *deformaciones últimas diferentes*. Esto se consigue mediante una generalización de la *variable de endurecimiento plástico*, que en este modelo se la denomina *variable de daño plástico*.

- Permite definir distintos criterios de discontinuidad inicial (fluencia inicial para los metales) y subsecuentes superficies de carga plástica, controladas por una función de endurecimiento con un sentido físico directo, estableciendo así distintos estados elasto-plásticos consistentes.
- Trata el flujo plástico a través de una regla de normalidad, asociada a una superficie de potencial plástico, que puede o no coincidir con las de carga plástica. Esta función potencial es la que garantiza el control del fenómeno de la dilatancia.
- Permite simular el comportamiento multiaxial, a partir de datos que surgen de ensayos experimentales uniaxiales.
- Adopta la variable de daño plástico como medida relativa del daño en un punto.
- Determina el daño local (daño en un punto), y su dirección, mediante un post-procesamiento de resultados, una vez que se converge al estado de equilibrio.

IV.4.- VARIABLES FUNDAMENTALES DEL MODELO DE DAÑO PLÁSTICO.

IV.4.a- Definición de la variable de daño plástico: κ^p .

Como una primera posibilidad, la teoría de la plasticidad clásica define la variable interna de *endurecimiento plástico isotrópico* (apart. Ap-I.3.c.), como una *deformación plástica efectiva* que tiene la siguiente ley de evolución $\dot{\kappa} = \dot{\bar{\epsilon}}^p$ ec.(Ap-1.41), o también en forma más general como un *trabajo plástico específico* que evoluciona durante el proceso plástico con la siguiente ley $\dot{\kappa} = \dot{w}^p = \sigma^T \dot{\epsilon}^p$ ec.(Ap-1.39). En el primer caso se asocia el daño plástico a la *deformación plástica efectiva* $\bar{\epsilon}^p$ y se supone que el estado último sobreviene cuando se alcanza el valor último de ésta $\bar{\epsilon}^{p,u}$. Esto es ec.(Ap-1.41):

$$\bar{\epsilon}^p \equiv \bar{\epsilon}^{p,u} = \int_{t=0}^{\infty} \dot{\kappa} dt = \int_{t=0}^{\infty} \dot{\bar{\epsilon}}^p dt = \int_{t=0}^{\infty} \sqrt{c_u} \sqrt{(\dot{\epsilon}^p)^T \dot{\epsilon}^p} dt \quad (IV.6)$$

siendo:

$\dot{\epsilon}^p$: Incremento temporal del tensor de deformaciones plásticas.

$\sqrt{G_{ik}}$: Constante a determinar para cada criterio de potencial plástico G .

Esta definición de la variable de endurecimiento plástico, supone que el *daño total* ocurre siempre para una deformación plástica efectiva $\bar{\epsilon}^{pu}$, ya sea que se desarrollen procesos mecánicos uniaxiales, de tracción o compresión, o procesos multiaxiales en general. Esto hace muy limitativo su utilización en los materiales cohesivo-friccionales, que para cada proceso mecánico, tienen una deformación última distinta ⁽³³⁾⁽¹³⁶⁾, por ej.: los hormigones tienen deformaciones últimas entre 10 y 15 veces mayores a compresión uniaxial que a tracción uniaxial : $10 \leq |\epsilon_c^{pu}|/|\epsilon_T^{pu}| \leq 15$.

En el segundo caso, cuando se adopta el *trabajo plástico específico* como variable de endurecimiento, se asocia el daño de un punto del sólido a la energía específica disipada durante el proceso de carga w^p , y se supone que se ha alcanzado el nivel de daño total cuando el punto alcanza a disipar una energía específica igual a la *energía específica de daño plástico* g^p , (área encerrada por la curva tensión-deformación para un proceso de carga uniaxial que ha alcanzado el estado último).

$$g^p \equiv w^{pu} = \int_{t=0}^{\infty} \dot{\kappa}^p dt = \int_{t=0}^{\infty} \sigma^T \dot{\epsilon}^p dt \quad (IV.7)$$

Al igual que la *variable de endurecimiento* anterior, ésta constituye una magnitud única independiente del proceso de carga desarrollado, lo que no cumple con el comportamiento de los materiales friccionales que disipan distinta energía específica según sea el proceso mecánico desarrollado. Así, por ej.: en hormigones se disipa entre 100 y 150 veces más energía en un proceso a compresión uniaxial que a tracción uniaxial.

Debido a estos inconvenientes, ha surgido como una necesidad definir una nueva la *variable de daño plástico*, que constituye una "medida relativa" de la

energía disipada durante el proceso plástico. Por simplicidad y orden en la presentación, es conveniente definir esta variable para procesos uniaxiales simples, y luego generalizarla a procesos multiaxiales.

Definición de la variable de daño plástico para estados de tensión uniaxial.

De un ensayo experimental uniaxial a tracción y otro a compresión, se obtienen los diagramas tensión-deformación, y a partir de ellos se pueden deducir las curvas $\sigma - \epsilon^p$ fig.(IV.3) que encierran las áreas g_T^p y g_C^p (anexo-D), respectivamente.

La *energía específica* disipada al final de un proceso elasto-plástico, cuasi-estático, de tracción uniaxial vale:

$$g_T^p = \int_{t=0}^{\infty} \sigma_T \dot{\epsilon}_T^p dt \quad , \quad (IV.8)$$

siendo

σ_T : Tensión uniaxial de tracción

$\dot{\epsilon}_T^p$: Deformación plástica uniaxial de tracción

y a partir de ésta se define la **variable de daño plástico** para un proceso cuasi-estático, de tracción uniaxial, como:

$$\kappa^p = \frac{1}{g_T^p} \int_{t=0}^t \sigma_T \dot{\epsilon}_T^p dt \quad , \quad (IV.9)$$

resultando así una variable relativa con respecto a la energía específica máxima a tracción, que tomará valores comprendido entre $0 \leq \kappa^p \leq 1$ para el inicio y fin del proceso plástico, respectivamente. Con κ^p como variable independiente se puede transformar el diagrama uniaxial de tensión-deformación plástica en otro que dependa del daño plástico: $\sigma_T - \kappa^p$ (anexo-B). Esto es : $\sigma_T = \sigma_T(\kappa^p)$ en el intervalo $[0, 1]$, tal que en los extremos vale:

$$\begin{cases} \sigma_T(0) = \sigma_T^0 \\ \sigma_T(1) = 0 \end{cases} \quad (IV.10)$$

Similarmente, la *energía específica* disipada al final de un proceso elasto-plástico, cuasi-estático, de compresión uniaxial vale:

$$g_C^p = \int_{t=0}^{\infty} \sigma_C \dot{\epsilon}_C^p dt \quad , \quad (IV.11)$$

σ_C : Tensión uniaxial de compresión

$\dot{\epsilon}_C^p$: Deformación plástica uniaxial de compresión

y a partir de ésta se define la *variable de daño plástico* para un proceso de compresión uniaxial, cuasi-estático, como:

$$\kappa^p = \frac{1}{g_C^p} \int_{t=0}^t \sigma_C \dot{\epsilon}_C^p dt \quad , \quad (IV.12)$$

resultando así una variable relativa con respecto a la energía específica máxima a compresión, que tomará valores comprendido entre $0 \leq \kappa^p \leq 1$ para el inicio y fin del proceso plástico, respectivamente. Con κ^p como variable independiente se puede transformar el diagrama uniaxial de tensión-deformación plástica en otro que dependa del daño plástico: $\sigma_C - \kappa^p$ (*anexo-B*). Esto es : $\sigma_C = \sigma_C(\kappa^p)$ en el intervalo $[0, 1]$; tal que en los extremos vale:

$$\begin{cases} \sigma_C(0) = \sigma_C^0 \\ \sigma_C(1) = 0 \end{cases} \quad (IV.13)$$

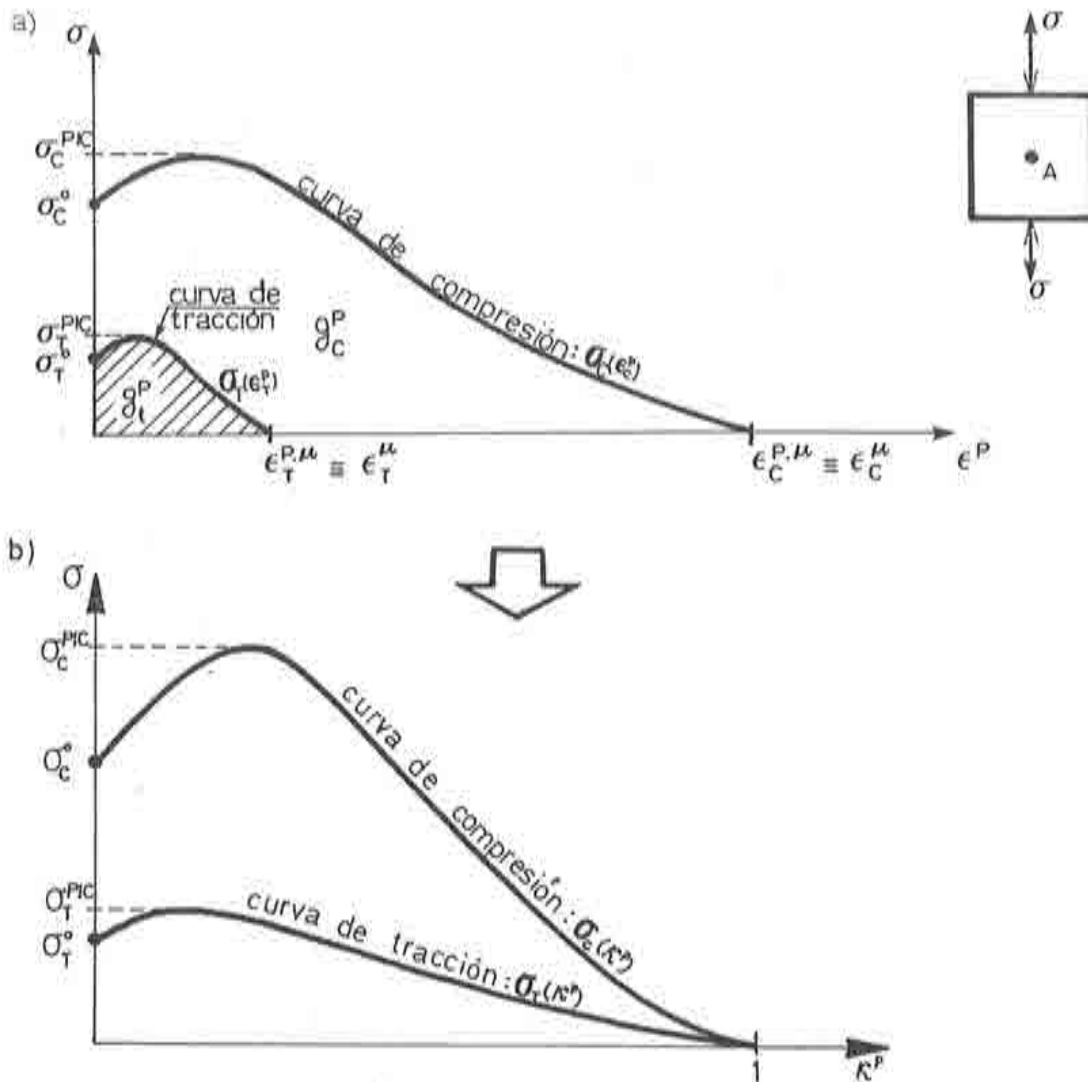


fig.(IV.3): Ensayo uniaxial de tracción y compresión: a) Diagramas tensión-deformación plástica. b) Diagramas tensión-daño plástico.

De las ec.(IV.9) y ec.(IV.12) resulta una *variable de endurecimiento plástico isotrópico* objetiva respecto a los dos procesos uniaxiales desarrollados, debido a que en cualquiera de los dos casos varía dentro de los mismos límites. De esta forma, el daño total en un punto se alcanza cuando $\kappa^p = 1$, pero la energía disipada a tracción es g_T y a compresión g_C .

Definición de la variable de daño plástico para estados de tensión multiaxial.

De modo general, para un proceso de carga genérico, se define la *variable de daño plástico* como ec.(IV.4):

$$\dot{\kappa}^p = \mathbf{h}_\kappa^T(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (IV.14)$$

donde $\mathbf{h}_\kappa(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c)$ es un tensor de segundo orden que, para los casos particulares de tracción y compresión uniaxial, da lugar a una variable de daño plástico κ^p que cumple con la ec.(IV.9) y ec.(IV.12), respectivamente, y para los restantes casos es capaz de desarrollar una magnitud de daño consecuente con el proceso de carga. En su forma más simple resulta igual al tensor de tensiones $\mathbf{h}_\kappa(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) \equiv \boldsymbol{\sigma}$, y para materiales isotrópos puede ser definido a partir de sus magnitudes principales, quedando la ec.(IV.14) expresada como:

$$\dot{\kappa}^p = \sum_{i=1}^3 (h_{\kappa_i} \dot{\epsilon}_i^p) \quad (IV.15)$$

A partir de esta forma general de la variable de daño plástico, se podrían formular distintas leyes de evolución con el fin de evaluar correcta y objetivamente la magnitud del daño en un punto del sólido, para cualquier proceso de carga cuasi-estático [78]. Con el presente modelo, se propone una generalización de las definiciones uniaxiales ec.(IV.9) ec.(IV.12), considerando como hipótesis básica, que la energía total disipada durante un proceso multiaxial puede ser tratada como la suma de una energía a tracción más otra a compresión, disipadas por procesos uniaxiales equivalentes. En otras palabras, esta hipótesis admite que todo proceso multiaxial es susceptible de ser descompuesto en procesos uniaxiales

desarrollados en las direcciones principales. Esto es:

$$\dot{\kappa}^p = \dot{\kappa}_T^p + \dot{\kappa}_C^p = \sum_{i=1}^3 [(h_{ni})_T + (h_{ni})_C] \dot{\epsilon}_i^p \quad (IV.16)$$

$$\dot{\kappa}^p = \sum_{i=1}^3 [(h_{ni})_T \dot{\epsilon}_i^p + (h_{ni})_C \dot{\epsilon}_i^p]$$

siendo:

$$(h_{ni})_T = \frac{1}{g_T^{p*}} \langle \sigma_i \rangle \quad ; \quad (h_{ni})_C = \frac{1}{g_C^{p*}} \langle -\sigma_i \rangle$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle x \rangle = x \quad ; \quad \forall x > 0 \\ \langle x \rangle = 0 \quad ; \quad \forall x \leq 0 \end{array} \right\} : \text{Función rampa [79][131],}$$

las magnitudes g_T^{p*} y g_C^{p*} son las energías específicas a tracción ec.(IV.8) y compresión ec.(IV.11), ajustadas de acuerdo al criterio de fluencia adoptado, respectivamente. Esto es:

$$g_T^{p*} = g_T^p \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sigma_T} \quad (IV.17)$$

$$g_C^{p*} = g_C^p \frac{\sum_{i=1}^3 \langle -\sigma_i \rangle}{\sigma_C}$$

siendo:

σ_T : Tensión uniaxial de tracción correspondiente al estado multiaxial actuante.

σ_C : Tensión uniaxial de compresión correspondiente al estado multiaxial actuante.

Sustituyendo en la ec.(IV.16) $(h_{n_i})_T$ y $(h_{n_i})_C$, por sus respectivas expresiones, resulta la variable de daño plástico según una forma *uniaxial equivalente*:

$$\dot{\kappa}^p = \mathbf{h}_n^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \frac{1}{g_T^p} \sigma_T \dot{\epsilon}_T^p + \frac{1}{g_C^p} \sigma_C \dot{\epsilon}_C^p \quad (IV.18)$$

donde: $\dot{\epsilon}_T^p = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle \dot{\epsilon}_i^p}{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}$, y $\dot{\epsilon}_C^p = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle -\sigma_i \rangle \dot{\epsilon}_i^p}{\sum_{i=1}^3 \langle -\sigma_i \rangle}$ pueden tratarse como

definiciones particulares de la *deformación uniaxial equivalente* a tracción y compresión, respectivamente. En el *anexo-A* se realiza una evaluación de esta variable de daño plástico, para algunos casos particulares.

IV.4.b- Definición de la ley de evolución de la cohesión – Relación: $c - \kappa^p$.

El modelo que se propone supone que la *micro-fisuración* y posterior *fisuración*, de los materiales friccionales, se debe a una pérdida de cohesión intergranular instantánea ^[11], producida por el deslizamiento entre granos, o partículas, de la masa del sólido ^{[23][44][46][95][97][129]}. Esta pérdida de cohesión intergranular se inicia, en los puntos más solicitados, inmediatamente después de superar el umbral de la *cohesión límite* o *cohesión inicial* c^0 ^{[34][41][130]}, y a medida que evoluciona el proceso de carga crece la cantidad de partículas descohesionadas hasta llegar a conformar un volumen de dimensiones considerables que conduce a la ruptura de todo el sólido (fractura). Debido a este mecanismo de fallo, el *ablandamiento* por deformación es un *fenómeno inexistente a nivel intergranular* ^[11], manifestándose solamente como un efecto macroscópico provocado por el *comportamiento promedio de un conjunto de partículas*.

Debido a que el modelo constitutivo de daño plástico realiza un análisis numérico en el *espacio discreto* mediante la técnica de aproximación funcional de los elementos finitos, cada *punto de análisis* representa *infinitos puntos materiales* contenidos en su área de influencia. Por ello, a nivel discreto, sí tiene sentido considerar al fenómeno de *ablandamiento* por deformación como una *propiedad*

del material * contenido dentro de la zona de influencia del punto discreto ^[18] y en tal caso es necesario definir una *función de endurecimiento plástico* que tenga en cuenta este *fenómeno de conjunto*, que para este modelo constitutivo no es más que la cohesión entre partículas.

La ecuación de evolución de la cohesión c debe considerar, para cualquier proceso de carga cuasi-estático, que $c \rightarrow 0$ cuando $\kappa^p \rightarrow 1$, y $c = c^0$ cuando $\kappa^p = 0$. En general, se puede escribir la ley de evolución de esta variable, como se.(IV.5):

$$\dot{c} = h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \dot{\kappa}^p \quad (IV.19)$$

La cohesión, definida de esta forma, se convierte en una *variable interna dependiente del proceso plástico* fig.(IV.4), donde $h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c)$ es una función escalar del estado actual de las variables $\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c$. La forma adoptada para la función $h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c)$, es la siguiente:

$$h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) = c \left[\frac{r(\boldsymbol{\sigma})}{c_T(\kappa^p)} \frac{dc_T(\kappa^p)}{d\kappa^p} + \frac{1-r(\boldsymbol{\sigma})}{c_C(\kappa^p)} \frac{dc_C(\kappa^p)}{d\kappa^p} \right] \quad (IV.20)$$

donde $r(\boldsymbol{\sigma})$ es una *función de peso* que define el tipo de proceso de carga que se desarrolla a cada instante (tracción o compresión o tracción-compresión), y que varía entre $0 \leq r(\boldsymbol{\sigma}) \leq 1$, dependiendo del estado actual de las tensiones en el punto. Así se tendrá $r(\boldsymbol{\sigma}) = 1$ si $\sigma_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, 3$ (estados de tracción), y $r(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ si $\sigma_i \leq 0$ para todo $i = 1, 2, 3$ (estados de compresión). Una forma particular de $r(\boldsymbol{\sigma})$ para procesos de carga *no radial* * es:

* Nota: Read and Hegemier ^[110] consideran que el fenómeno de ablandamiento es una "propiedad estructural"; (Anexo-D).

* Nota: En particular, para procesos de "carga radial" $r(\boldsymbol{\sigma})$ se mantiene constante, no siendo necesario su actualización durante el desarrollo del proceso elasto-plástico.

$$r(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} \quad (IV.21)$$

La función $c_C(\kappa^p)$ puede obtenerse en forma explícita y representa la evolución de la cohesión durante un ensayo uniaxial de *compresión* simple fig.(IV.4). Su relación con la tensión uniaxial de compresión viene dada por la siguiente expresión:

$$c_C(\kappa^p) = \frac{1}{R} \sigma_C(\kappa^p) \quad (IV.22)$$

siendo:

R : Un coeficiente que depende del criterio de fluencia, y representa el factor de escala entre la cohesión y la tensión uniaxial de compresión. Para los criterios clásicos de Mohr-Coulomb y drucker-Prager vale:

• para Mohr-Coulomb:

$$\left| \begin{array}{l} \text{de la ec. (Ap-I.90)} \rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{2 \sqrt{R_{Mohr}}} \end{array} \right.$$

• para Drucker-Prager:

$$\left| \begin{array}{l} \text{de la ec. (Ap-I.102), y ec. (Ap-I.106)} \rightarrow \frac{1}{R} = \left[\frac{\sin \phi - 3}{6 \cos \phi} \right]_{ins} \\ \text{de la ec. (Ap-I.102), y ec. (Ap-I.108)} \rightarrow \frac{1}{R} = \left[\frac{3 \sin \phi - 3}{6 \cos \phi} \right]_{cir} \end{array} \right.$$

La función $c_T(\kappa^p)$ también está formulada explícitamente y representa la evolución de la cohesión durante un ensayo uniaxial de *tracción* simple fig.(IV.4). Su relación con la tensión uniaxial de tracción viene dada por la siguiente expresión:

$$c_T(\kappa^p) = \frac{1}{R} [R^0 \sigma_T(\kappa^p)] \quad (IV.23)$$

donde:

$R^0 = \frac{\sigma_c(\kappa^p=0)}{\sigma_T(\kappa^p=0)}$: Es la relación entre resistencias uniaxiales iniciales; tal que $\frac{R^0}{N}$ vale para los criterios clásicos de Mohr-Coulomb y Drucker-Prager:

• para Mohr-Coulomb:

$$\left| \begin{array}{l} \text{de la ec. (Ap-1.90)} \rightarrow \frac{R^0}{N} = \frac{\sqrt{R_{Mohr}}}{2} \end{array} \right.$$

• para Drucker-Prager:

$$\left| \begin{array}{l} \text{de la ec. (Ap-1.102), y ec. (Ap-1.106)} \rightarrow \frac{R^0}{N} = \left[\frac{3 + 3 \sin \phi}{6 \cos \phi} \right]_{tra} \\ \text{de la ec. (Ap-1.102), y ec. (Ap-1.108)} \rightarrow \frac{R^0}{N} = \left[\frac{3 + \sin \phi}{6 \cos \phi} \right]_{civ} \end{array} \right.$$

En el *anexo-B* se formulan algunas de las funciones de *cohesión-variable* de daño plástico que utiliza el modelo.

Algunos investigadores sostienen que las curvas de resistencia a tracción y compresión simple del hormigón, que resultan de ensayos experimentales uniaxiales, tienen formas análogas ^{[33][134][136]}, lo que equivale a afirmar que la relación de escalas entre ellas es una constante durante todo el proceso de carga cuasi-estático, y viene dado por:

$$R(\kappa^p) = \frac{\sigma_c(\kappa^p)}{\sigma_T(\kappa^p)} = \text{cte.} = R^0 \frac{c_c(\kappa^p)}{c_T(\kappa^p)} = R^0 \quad ; \forall 0 \leq \kappa^p \leq 1 \quad (IV.24)$$

en tal caso las funciones explícitas de la cohesión a tracción uniaxial (ec.(IV.22)) y a compresión uniaxial (ec.(IV.23)) coinciden. Esto es:

$$c(\kappa^p) = c_T(\kappa^p) = c_c(\kappa^p) = \frac{1}{N} \sigma_c(\kappa^p) \quad (IV.25)$$

Esta definición única de la cohesión, permite formular una función de estado $h_c(\sigma, \kappa^p, c)$, más simple que la expresada en la ec.(IV.20):

$$h_c(\sigma, \kappa^p, c) = \left[\frac{dc(\kappa^p)}{d\kappa^p} \right] , \quad (IV.26)$$

por lo tanto, para este caso particular, la ley de evolución de la cohesión \dot{c} ec.(IV.19), se reduce a una función explícita, no siendo necesario tratarla como variable interna:

$$\dot{c} = h_c(\sigma, \kappa^p, c) \dot{\kappa}^p = \left[\frac{dc(\kappa^p)}{d\kappa^p} \right] \dot{\kappa}^p \xrightarrow{\text{integrando}} c = \frac{1}{R} \sigma_c(\kappa^p) = \frac{R^0}{R} \sigma_T(\kappa^p) \quad (IV.27)$$

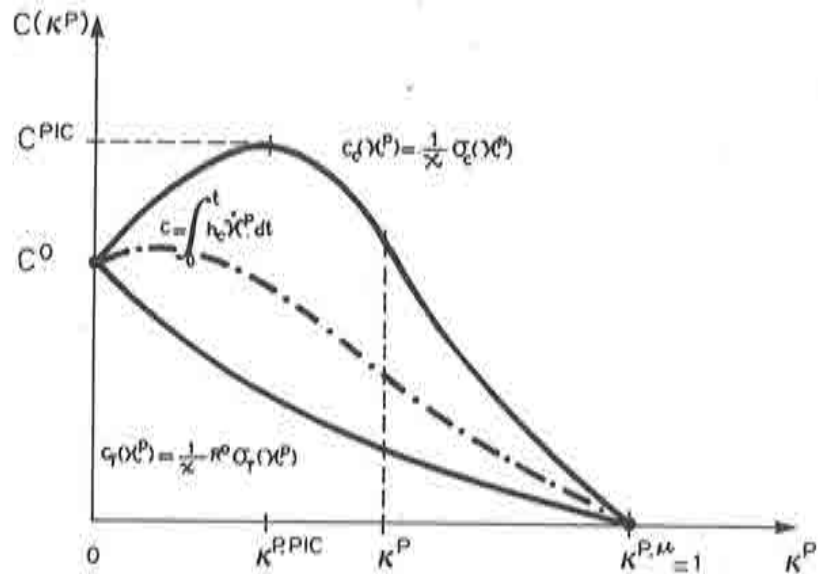


fig.(IV.4): Función de cohesión a tracción y compresión uniaxial, y su evolución para un caso general de tensiones.

Tanto la ec.(IV.19) como la ec.(IV.27), gobiernan el movimiento isotrópico de la función de fluencia plástica. Durante esta evolución, la *función de endurecimiento*

c definirá *tres límites de discontinuidad o límites de cambio de comportamiento mecánico* fig.(IV.4):

- **Límite de discontinuidad inicial o primer límite de fallo** ^{[34][35]}; Delimita una frontera dentro del espacio de tensiones, a partir de la cual un punto del sólido abandona su comportamiento elástico, para iniciar un comportamiento elasto-plástico con endurecimiento. En este modelo, se conoce a esta frontera como *límite convencional de inicio del mecanismo de micro-fisuración* en el punto ^{[1][27][34][35][41][46][136]}, y quedará definido por:

$$[c = c^0] \quad \text{para : } \kappa^p = 0 \quad (IV.28)$$

- **Límite de tensión máxima o segundo límite de fallo** ^{[34][35]}; Marca una frontera dentro del espacio de tensiones, a partir de la cual cesa el crecimiento de las tensiones en el punto, iniciándose un proceso de ablandamiento inelástico. En este modelo, se conoce a esta frontera como *límite convencional de inicio del mecanismo de macro-fisuración* del punto ^{[72][123][133]}, y queda definido por:

$$[c = c^{pc}] \quad \text{para : } \kappa^p = \kappa^{p^{tu}} \quad (IV.29)$$

- **Límite de tensión última o tercer límite de fallo**; Define una frontera dentro del espacio de tensiones, a partir de la cual el estado tensional se mantiene constante e igual a cero. En este modelo, se conoce a esta frontera como *límite convencional de daño total* del punto, y queda definido por:

$$[c = c^n = 0] \quad \text{para : } \kappa^p = \kappa^{pn} = 1 \quad (IV.29)$$

IV.4.c- Definición de la variable ϕ , ángulo de rozamiento interno – Relación:
 $\phi = \kappa^p$.

A medida que se aumenta la carga sobre un sólido cohesivo-friccional, en su interior ocurre un deslizamiento entre partículas (micro-fisuración), que conduce a una pérdida de cohesión intergranular, haciendo que el sólido tienda a comportarse, cada vez más, como un simple material friccional no-cohesivo. Así ,

la pérdida de cohesión implica una ganancia de rozamiento interno, provocando un comportamiento más dúctil a compresión ^{[18][23]} debido al incremento de la fuerza de rozamiento entre partículas, y una disminución de la resistencia a tracción por la pérdida de las fuerzas cohesivas fig.(IV.6,b). Esto inducirá a un crecimiento de la relación entre resistencias uniaxiales $R(\kappa^p) = \sigma_c(\kappa^p)/\sigma_T(\kappa^p)$ a medida que evolucione el proceso plástico.

En una primera instancia, se podría formular una *variable interna* de fricción, con una ley de evolución del tipo $\dot{\phi} = \dot{\lambda} H_\phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$, que reprodujera el mecanismo antes mencionado durante todo el desarrollo del proceso de carga cuasi-estático. Sin embargo, los estudios realizados por R. Borst y P. Vermeer ^[23] sobre la propiedad cohesivo-friccional del hormigón *, demuestran que es suficiente plantear la evolución del ángulo de rozamiento interno ϕ como una función explícita del daño plástico κ^p que afecte la movilidad de la función de fluencia, provocando el efecto deseado de aumento de ductilidad a compresión y disminución de la resistencia a tracción. Por esta razón, se ha adoptado una función explícita del siguiente tipo ^[23] fig.(IV.5):

$$\sin \phi = \begin{cases} 2 \frac{\sqrt{\kappa^p \kappa^L}}{\kappa^p + \kappa^L} \sin \phi^{\max} & ; \forall \kappa^p \leq \kappa^L \\ \sin \phi^{\max} & ; \forall \kappa^p > \kappa^L \end{cases} \quad (IV.30)$$

donde κ^p es la variable de endurecimiento, denominada *variable de daño plástico* ec.(IV.14), y κ^L es el límite de daño, a partir del cual la cohesión se anula y el rozamiento interno se mantiene constante e igual a su valor máximo ϕ^{\max} , por lo tanto este límite coincide con el de daño total: $\kappa^L = \kappa^p = 1$.

* Nota: Estudios realizados por Borst y Vermeer ^[23] sobre la propiedad cohesivo-friccional del hormigón, confirman que la pérdida de cohesión, producida por el incremento del daño plástico κ^p (en la referencia citada se utiliza como medida del daño la deformación plástica efectiva $\bar{\epsilon}^p$ ec.(Ap-I.35)), provoca la movilización del ángulo de rozamiento interno, desde $\phi^0 = 0$ para c^0 , hasta $\phi = \phi^{\max}$ para $c^u \rightarrow 0$.

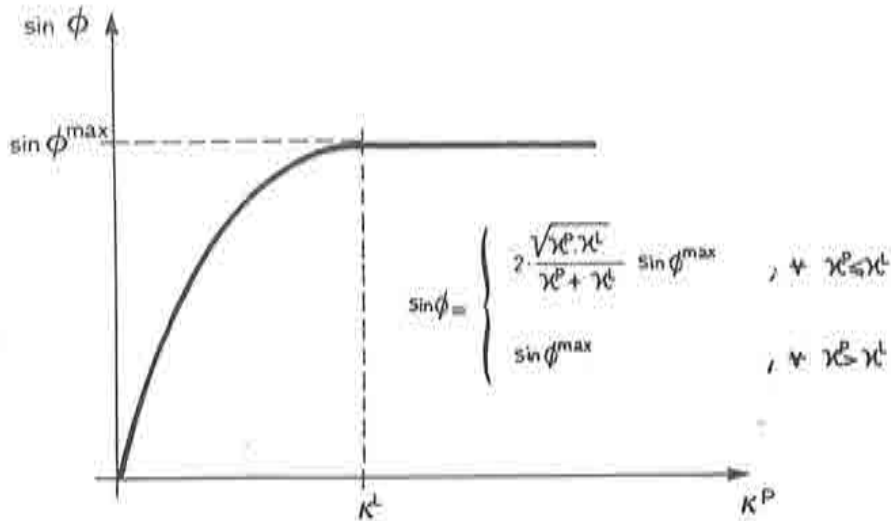


fig.(IV.5): Función cuasi-empírica [23] que define la evolución del ángulo de rozamiento interno en función de la variable de daño plástico.

Utilizando la función de rozamiento interno expresada por la ec.(IV.30), y suponiendo en un primer momento la hipótesis de que la cohesión $c = cte.$, se puede observar que se desarrolla un proceso elasto-plástico que pasa de un estado inicial $\phi = \phi^0 = 0$ donde la presión hidrostática es despreciable, a otro final $\phi = \phi^{\max}$ donde es muy importante su influencia fig.(IV.6,b). De esta forma, y pensando en una superficie de fluencia del tipo de la de Mohr-Coulomb además de la *movilidad isotrópica* que adquiriría la superficie de fluencia por efecto de la evolución de la cohesión (*apart. IV.4.b*), aparece una *movilidad anisotrópica* provocada por el incremento del rozamiento interno fig.(IV.6). Este movimiento consiste en un acercamiento de la cúspide de la superficie hacia el origen, acompañada de un crecimiento de su base. Presentándose como un fenómeno de *endurecimiento* para procesos de compresión y como un *ablandamiento* para procesos de tracción fig.(IV.7). Así pues, bajo estados de compresión triaxial con presión de confinamiento, se obtiene un comportamiento dúctil para altas presiones hidrostáticas [18], prevaleciendo inicialmente el efecto de endurecimiento por rozamiento interno sobre el ablandamiento por cohesión, y posteriormente crece la influencia del segundo fenómeno sobre el primero logrando un ligero ablandamiento fig.(IV.8).

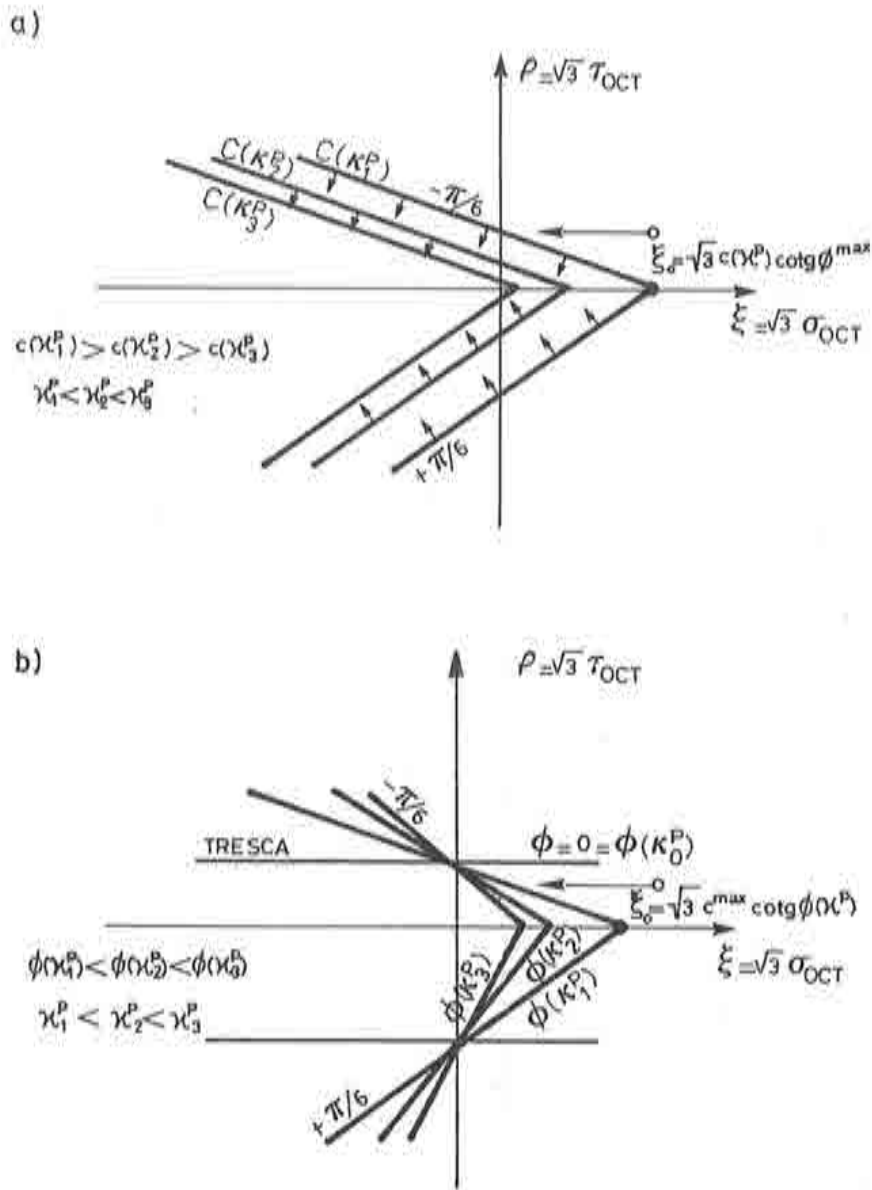


fig.(IV.6): Movilidad del criterio de fluencia de Mohr-Coulomb según sus planos meridianos: a) Movilidad isotrópica debido a la cohesión $c(\kappa^P)$; b) Movilidad anisotrópica debido al rozamiento interno $\phi(\kappa^P)$.

En materiales frágiles con alta cohesión inicial, como los hormigones, es posible utilizar durante todo el proceso plástico un ángulo de rozamiento interno constante y máximo, sin que esto induzca a resultados insatisfactorios en la

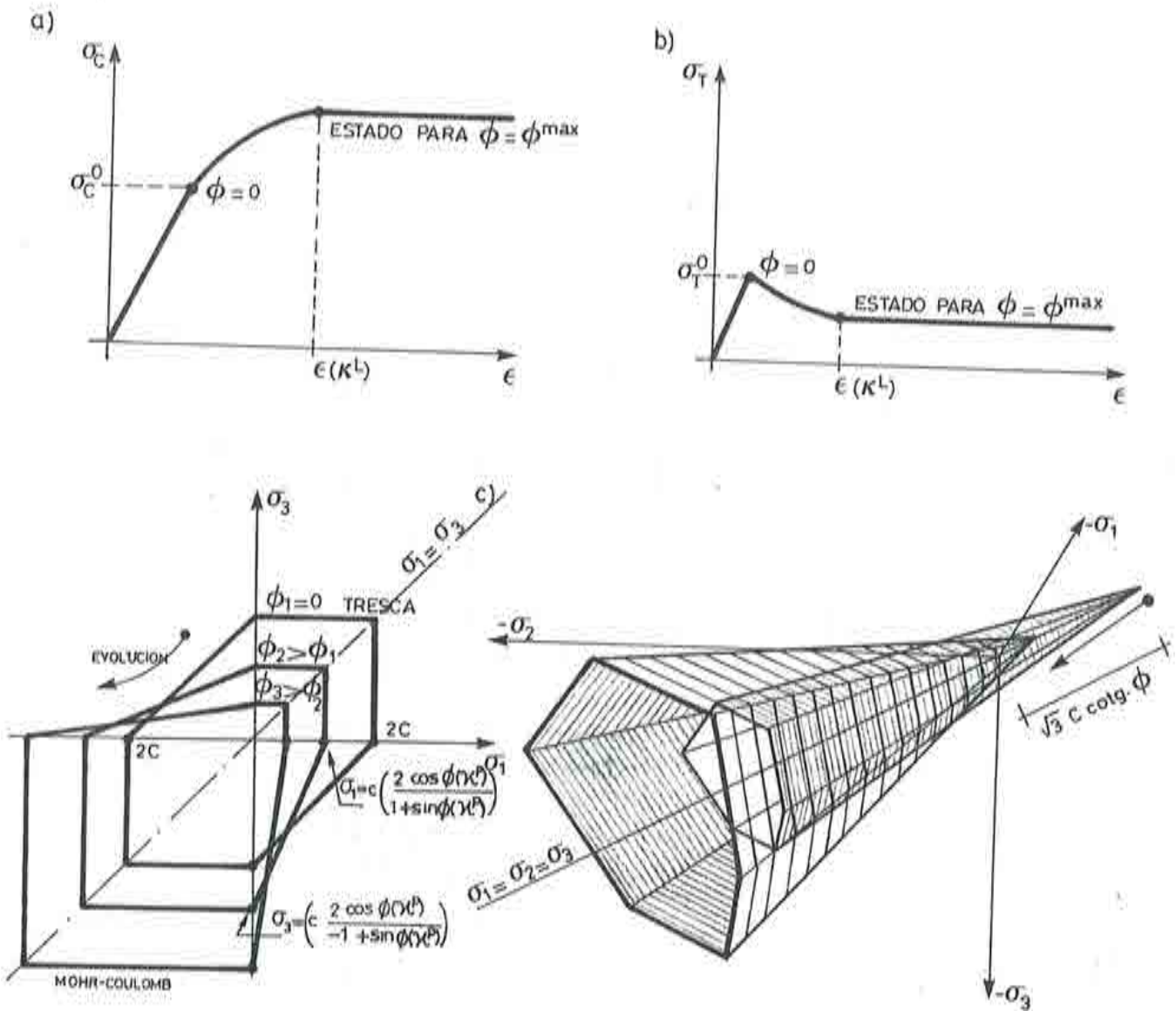


fig.(IV.7): Movilidad del criterio de fluencia de Mohr-Coulomb para una hipotética situación de cohesión constante: a) Caso de compresión simple; b) Caso de tracción simple; c) Movilidad anisotrópica debido al rozamiento interno $\phi(\kappa^P)$.

resolución de problemas biaxiales (cap. V). Esto es, en sustitución de la ec.(IV.30) se utiliza la siguiente particularización:

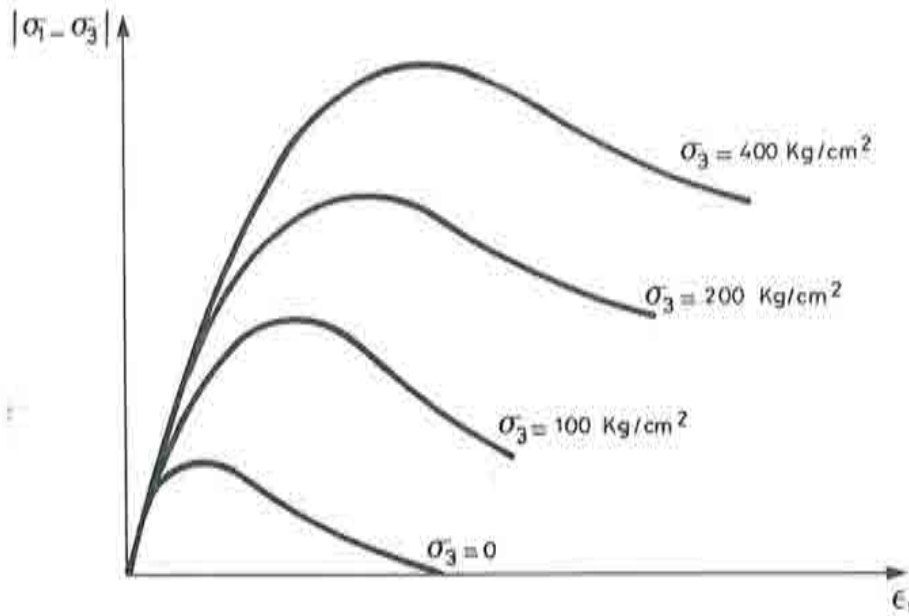


fig.(IV.8): Simulación del comportamiento a compresión de un sólido confinado, considerando endurecimiento por rozamiento interno y ablandamiento por cohesión ^[23] .

$$\sin \phi = \sin \phi^{max} = cte. \quad ; \forall \kappa^p \quad (IV.31)$$

IV.4.d- Definición de la variable ψ , ángulo de dilatancia - Relación: $\psi - \kappa^p$.

Introducción:

Un fenómeno que caracteriza a los materiales friccionales, es el cambio de volumen inelástico que experimentan por efecto de la distorsión plástica ^{[23][36]} . Este fenómeno, denominado dilatancia, puede ser atribuido al crecimiento de los mecanismos de micro-fisuración que sufre el hormigón durante el período inelástico ^[35] fig.(IV.9). Una forma apropiada de ponderar este fenómeno, es mediante el *ángulo de dilatancia* ψ fig.(IV.9), que fue inicialmente introducido por B. Hansen ^[67] y que representa la relación que hay entre el incremento de volumen plástico y la distorsión plástica.

Este fenómeno no puede controlarse dentro de la teoría de la plasticidad asociada, donde $\mathcal{G} \equiv \mathcal{F}$, ya que en tal caso la regla de flujo depende del criterio de fluencia *ec.(Ap-I.22)*, que normalmente se encuentra muy afectado por la influencia de la presión hidrostática $\sigma_m = \frac{\sigma_{II}}{3}$. Por ello, el control de la dilatación necesariamente debe ser tratado a partir de una función de potencial plástico \mathcal{G} que produzca un flujo plástico con una componente de dilatación *fig.(IV.11)* concordante con los estudios experimentales ^{[1][76]}.

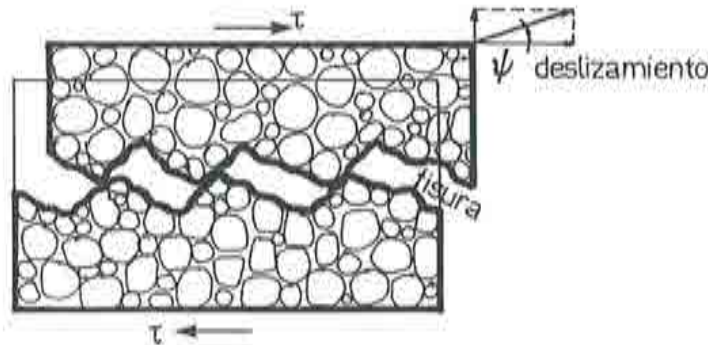


fig.(IV.9): Fenómeno de dilatación provocado por la distorsión plástica.

La explicación física de este fenómeno, se puede conseguir a través de la relación que hay entre el incremento temporal de deformación plástica $\dot{\epsilon}^p$ y el ángulo de dilatación ψ . Para ello, partiendo de la regla de flujo generalizada *ec.(Ap-I.21)*:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} H_{\epsilon^p}(\sigma, q) = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{G}(\sigma, q)}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \mathbf{g} \quad , \quad (IV.32)$$

y del incremento de volumen plástico:

$$\dot{\epsilon}_v^p = \dot{\epsilon}_1^p + \dot{\epsilon}_2^p + \dot{\epsilon}_3^p = \dot{\lambda} \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_3} \right] \quad , \quad (IV.33)$$

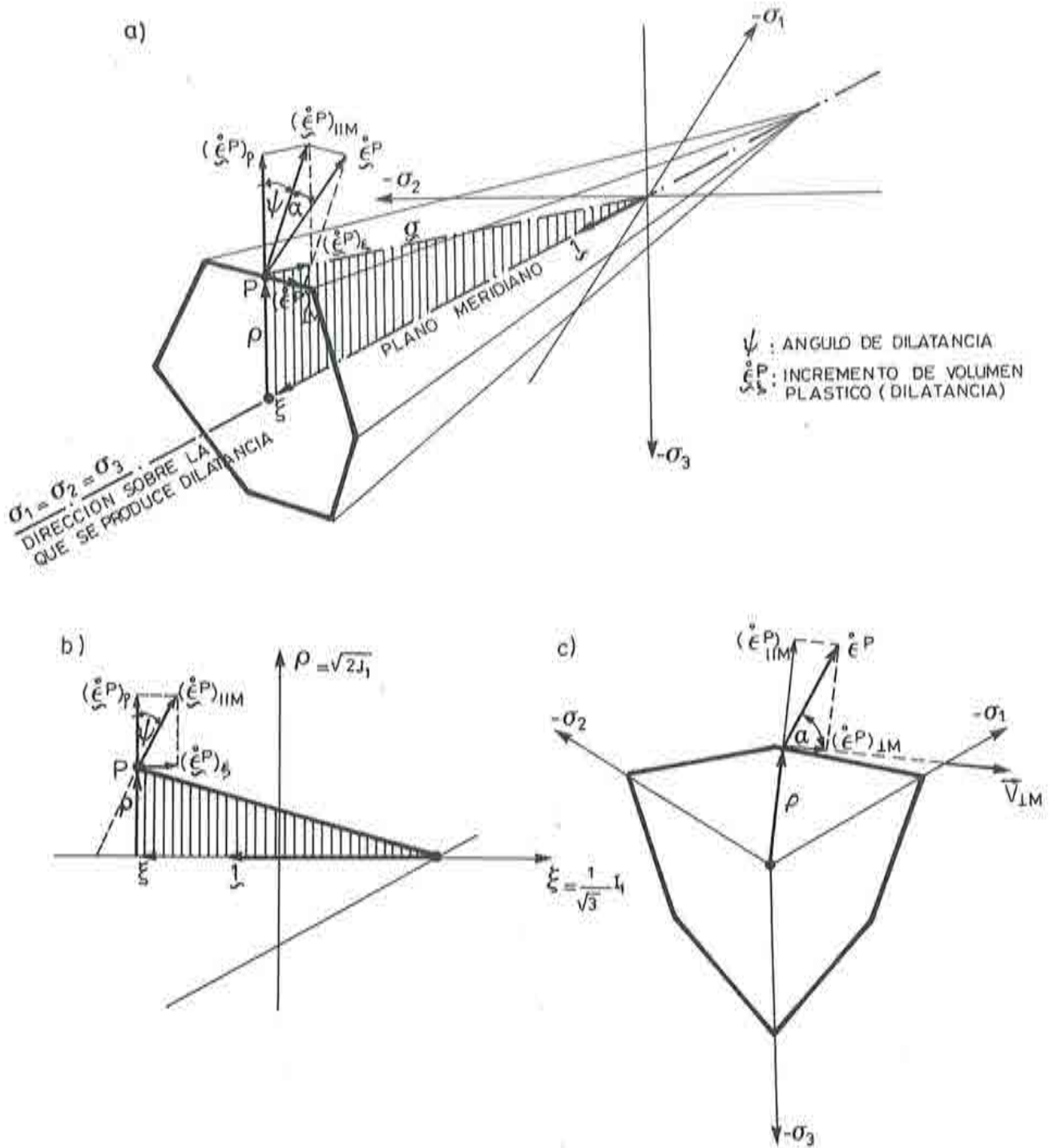


fig.(IV.10): a)Componentes de la deformación plástica en el espacio de tensiones principales; b)Deformación plástica y sus componentes en un plano meridiano; c)Deformación plástica y sus componentes en un plano octaédrico.

y que sustituyendo el parámetro de consistencia plástica obtenido de la ec.(IV.33) en la ec.(IV.32), resulta el siguiente incremento temporal de deformación plástica:

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\left[\frac{\partial G}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial G}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial G}{\partial \sigma_3} \right]} \frac{\partial G(\sigma, q)}{\partial \sigma} \quad (IV.34)$$

Este vector, definido en el espacio de tensiones principales, tiene dos componentes fig.(IV.10): -una normal al plano meridiano $(\dot{\epsilon}^p)_{\perp M}$, y -otra contenida en el plano meridiano $(\dot{\epsilon}^p)_{\parallel M}$. A su vez, esta última tiene dos componentes: -una de distorsión plástica, contenida en el plano octaédrico $(\dot{\epsilon}^p)_\rho$, y -otra normal al plano octaédrico, o paralela a la dirección volumétrica, $(\dot{\epsilon}^p)_\xi$ que representa la componente de cambio de volumen plástico fig.(IV.10). Las expresiones matemáticas de estos vectores componentes de la deformación plástica son:

$$\begin{aligned} (\dot{\epsilon}^p)_{\parallel M} &= \dot{\epsilon}^p \sin \alpha \\ (\dot{\epsilon}^p)_\rho &= (\dot{\epsilon}^p)_{\parallel M} \cos \psi = \dot{\epsilon}^p \sin \alpha \cos \psi \\ (\dot{\epsilon}^p)_\xi &= (\dot{\epsilon}^p)_{\parallel M} \sin \psi = \dot{\epsilon}^p \sin \alpha \sin \psi \end{aligned} \quad (IV.35)$$

donde:

- α : ángulo que forma: $\dot{\epsilon}^p$, con la normal al plano meridiano: $\vec{v}_{\perp M}$:

$$\cos \alpha = \frac{\dot{\epsilon}^{pT} \vec{v}_{\perp M}}{\|\dot{\epsilon}^p\| \|\vec{v}_{\perp M}\|} = \frac{(\sigma_{jj} - \sigma_{kk}) \dot{\epsilon}_{ii}^p}{\tau_{oct} \sqrt{3J_2' + I_2'}}$$

- $\vec{v}_{\perp M}$: versor normal al plano meridiano :

$$\vec{v}_{\perp M} = \sigma \times \vec{1} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \sigma_3 - \sigma_3 \\ \sigma_3 - \sigma_1 \\ \sigma_1 - \sigma_2 \end{Bmatrix}$$

- ψ : ángulo de dilatación. De la fig.(IV.10) y de la ec.(IV.34) se obtiene:

$$(\dot{\epsilon}^p)_{||M}^T \vec{\mathbf{I}} = \dot{\epsilon}^{pT} \vec{\mathbf{I}} \sin \alpha = \|\dot{\epsilon}^p\| \sin \alpha \sin \psi$$

$$\left[\frac{\partial G}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial G}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial G}{\partial \sigma_3} \right] \left[\left\{ \frac{\partial G(\sigma, \mathbf{q})}{\partial \sigma} \right\}^T \vec{\mathbf{I}} \right] \sin \alpha = \|\dot{\epsilon}^p\| \sin \alpha \sin \psi$$

$$\sin \psi = \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\sqrt{3} \|\dot{\epsilon}^p\|} = \frac{\|(\dot{\epsilon}^p)_\xi\|}{\|\dot{\epsilon}^p\|}$$

o también:

$$\tan \psi = \frac{\|(\dot{\epsilon}^p)_\xi\|}{\|(\dot{\epsilon}^p)_\rho\|}$$

Conocido el fundamento físico de la dilatación, y las expresiones matemáticas que relacionan el ángulo de dilatación ψ con las componentes del vector incremento de deformaciones plásticas, definido en el espacio de tensiones principales, se estudiará la movilidad de este ángulo y el efecto que produce durante el desarrollo de un proceso plástico.

Ángulo de dilatación y su movilidad:

Debido a que los sólidos friccionales no exhiben un ángulo de dilatación constante durante todo el proceso elasto-plástico, es necesario formular una función de evolución de esta magnitud. Este parámetro también podría ser definido como una *variable interna* del proceso inelástico, pero dado que su variación puede ser descrita en forma simple y satisfactoria mediante una función explícita, cuasi-empírica de la variable de daño plástico $\psi = \psi(\kappa^p)$, se ha abandonado la idea de una formulación más compleja.

Entre las posibles formas de definir la evolución de la dilatación a lo largo del proceso elasto-plástico, se ha utilizado en este modelo una modificación de la ecuación de P.Rowe ^[125], desarrollada por P. Vermeer y R. Borst ^[23], que se adapta muy bien al comportamiento de los hormigones. También se ha formulado

en esta tesis, a partir de esta última, otra función más simple que presenta una buena aproximación. La modificación de Vermeer y Borst es la siguiente:

$$\psi(\kappa^p) = \arcsin \left[\frac{\sin \phi(\kappa^p) - \sin \phi_{cv}}{1 - \sin \phi(\kappa^p) \sin \phi_{cv}} \right] \quad (IV.35)$$

siendo:

$\phi(\kappa^p)$: función de rozamiento interno apart. IV.4.c;

ϕ_{cv} : constante denominada "ángulo de rozamiento interno a volumen constante".

Su expresión surge a partir de ϕ^{max} , y ψ^{max} :

$$\sin \phi_{cv} = \left[\frac{\sin \phi^{max} - \sin \psi^{max}}{1 - \sin \phi^{max} \sin \psi^{max}} \right]$$

$$\text{Como dato orientativo, para hormigones: } \begin{cases} \phi^{max} \sim 35^\circ \\ \psi^{max} \sim 13^\circ \end{cases}$$

La ec.(IV.35) describe una evolución tal, que al iniciar el proceso plástico se produce una disminución de la dilatancia con un ángulo $\psi(\kappa^p)$ negativo, creciendo luego con el incremento de κ^p hasta alcanzar el valor de dilatancia nula $\psi(\kappa^p) = 0$ para $\phi = \phi_{cv}$ (ángulo de rozamiento interno que permite un proceso inelástico a volumen constante), a partir de este estado, la dilatancia crece hasta alcanzar su valor máximo $\psi(\kappa^p) = \psi^{max}$, finalmente sigue un proceso con dilatancia máxima constante fig.(IV.11). Para los hormigones no deben utilizarse ángulos de dilatancia negativos, situación que exige considerar la siguiente limitación sobre la ec.(IV.35):

$$\psi(\kappa^p) = \begin{cases} 0 & ; \forall \phi(\kappa^p) \leq \phi_{cv} \\ \arcsin \left[\frac{\sin \phi(\kappa^p) - \sin \phi_{cv}}{1 - \sin \phi(\kappa^p) \sin \phi_{cv}} \right] & ; \forall \phi(\kappa^p) > \phi_{cv} \end{cases} \quad (IV.36)$$

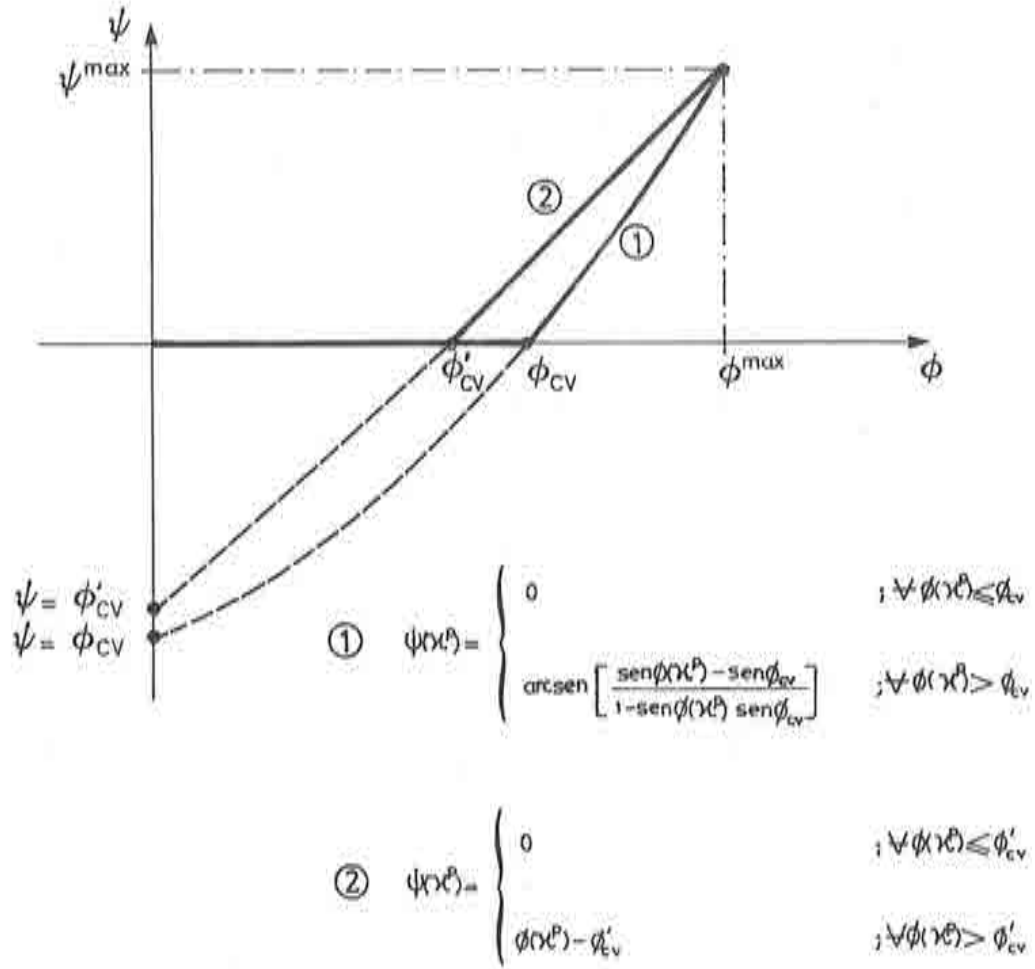


fig.(IV.11): Evolución del ángulo de dilatación ψ en función del ángulo de rozamiento interno ϕ .

Una alternativa sencilla a esta función de dilatación, viene dada por una relación lineal entre ψ y ϕ fig.(IV.11). Esto es:

$$\psi(\kappa^p) = \begin{cases} 0 & ; \forall \phi(\kappa^p) \leq \phi'_{cv} \\ \phi(\kappa^p) - \phi'_{cv} & ; \forall \phi(\kappa^p) > \phi'_{cv} \end{cases} \quad (IV.37)$$

siendo:

$\phi(\kappa'')$: función de rozamiento interno apart. IV.4.c;

ϕ'_{cv} : constante denominada "ángulo de rozamiento interno a volumen constante".

Su expresión surge a partir de ϕ^{max} , y ψ^{max} :

$$\phi'_{cv} = \phi^{max} - \psi^{max}$$

Tanto la ec.(IV.36) como la ec.(IV.37) son similares en el hormigón, para el rango que interesa $\phi_{cv} \leq \phi \leq \phi^{max}$ fig.(IV.11).

IV.5.- CRITERIO DE FLUENCIA PLASTICO PROPUESTO [78].

IV.5.a- Definición del criterio - Introducción.

Mientras en ensayos biaxiales de hormigones [74][136] es usual encontrar que la *superficie de discontinuidad inicial* es similar en su forma a las sucesivas *superficies de carga plástica*. En estados de compresión triaxial no se encuentran ensayos experimentales para altas presiones hidrostáticas que permitan afirmar lo mismo. No obstante, esta falta de conocimiento sobre el comportamiento del hormigón para estados de tensión triaxial afectados por altas presiones hidrostáticas, existen criterios como el denominado *cap model* [43][131], que hacen la hipótesis de que la *superficie de discontinuidad inicial* se cierra sobre el eje de presiones hidrostáticas, mientras la *superficie de tensión máxima o segundo límite de fallo* así como las *sucesivas superficies de fluencia* (incluida la *superficie límite de tensión última*), se encuentran abiertas hacia el infinito sobre el mencionado eje de presiones hidrostáticas en la zona de compresión total. Esto implicaría, que para estos estados, donde $-\sigma_1 = -\sigma_2 = -\sigma_3$, se desarrollaría un proceso de endurecimiento indefinido, sin alcanzar la superficie de de fallo total. Por otro lado, debido a que el presente modelo está orientado hacia el estudio del daño total, no se ha intentado formular un criterio de fluencia que considere el comportamiento plástico en la *región diagonal* donde aparentemente no se puede alcanzar la situación de daño total; por lo tanto se propone una función de fluencia ec.(IV.1) que sólo será válida en la zona del espacio de tensiones en la cual se tiene la certeza de que una carga radial conduce a alcanzar un estado de fallo total.

Es por lo tanto un rasgo característico de este modelo, que la misma función $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, c)$ describa el *límite de discontinuidad inicial*, y luego evolucione durante el proceso de carga, fijando los *sucesivos límites de fallo*.

En el (*apart. IV.2.*) se ha mencionado, que este modelo elasto-plástico adopta el uso de funciones de fluencia homogéneas de primer grado en las componentes del tensor de tensiones. Esta decisión permite definir una *función de endurecimiento plástico* simple y con un claro sentido físico, en este caso la cohesión c . No obstante esta aparente ventaja, los criterios de fluencia que gozan de esta característica no pueden simular el comportamiento de los sólidos friccionales a muy altas presiones hidrostáticas, donde se exige que los meridianos se curven hasta hacerse paralelos al eje de presión hidrostática ^[102]. Sin embargo, no hay evidencias experimentales de que esto ocurra en hormigones, pues los resultados experimentales aprovechables ^{[33][113][102]}, que surgen de ensayos triaxiales a compresión, no alcanzan tan altas presiones hidrostáticas, evidenciando solamente una leve curvatura en los meridianos sin que lleguen a ser paralelos al eje de presión hidrostática fig.(IV.12). Resultando de aquí que los meridianos rectos pueden ser una buena aproximación dentro del dominio de trabajo al que normalmente se somete al hormigón. Consecuente con la decisión de adoptar el uso de funciones de fluencia homogéneas de primer grado, se propone el siguiente criterio:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, c) = \frac{1}{(1-\alpha)} \left[\sqrt{3} J_2 + \alpha I_1 + \beta \langle \sigma^{\max} \rangle - \gamma \langle -\sigma^{\max} \rangle \right] - c = 0 \quad (IV.38)$$

donde α , β y γ son constantes adimensionales que modifican la forma de la función de fluencia, σ^{\max} es la tensión principal mayor * $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 = \sigma^{\max}$ y

* Nota: De la ec.(An-E.35), resulta:

$$\sigma^{\max} = \sigma_1 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3}$$

c es la función de cohesión o endurecimiento plástico * definida en el (apart. IV.4.b).

También se puede presentar la ec.(IV.38) a partir de las coordenadas cilíndricas definidas en el espacio de Westergard. Esto es:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\rho, \xi, c) = \frac{1}{(1-\alpha)} \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \rho + \alpha \sqrt{3} \xi + \beta \langle \sigma^{max} \rangle - \gamma \langle -\sigma^{max} \rangle \right] - c = 0 \quad (IV.39)$$

Si en la ec.(IV.38) o en la ec.(IV.39) se hace $\sigma^{max} = 0$ (estado de compresión biaxial: $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 = 0$), este criterio toma la forma del criterio de Drucker-Prager en la zona de compresión total, salvo el valor de sus constantes de ajuste [78]. Esto es:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\rho, \xi, c) = \rho + \alpha' \sqrt{6} \xi - \sqrt{2} \mathcal{K}' = 0 \quad (IV.40)$$

siendo:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$$

$$\mathcal{K}' = \frac{(1-\alpha)}{\sqrt{3}} c$$

donde se advierte que α también puede ser considerada como una función del ángulo de rozamiento interno: $\alpha = f(\phi)$.

* Nota: Para este criterio de fluencia, la relación entre las funciones de cohesión, a compresión simple y tracción simple, con las respectivas tensiones uniaxiales ecs.(IV.22) (IV.23), se obtienen a partir de las siguientes expresiones:

$$c_C(\kappa^p) = \frac{1}{N} \sigma_C(\kappa^p) \equiv \sigma_C(\kappa^p)$$

$$c_T(\kappa^p) = \frac{1}{N} [R^0 \sigma_T(\kappa^p)] \equiv R^0 \sigma_T(\kappa^p)$$

IV.5.b- Determinación de los parámetros α, β, γ .

Parámetro α : Este parámetro, es el encargado de ajustar la función de discontinuidad inicial en la zona de compresión, con el fin de obtener la relación deseada entre la resistencia uniaxial y la resistencia equibiaxial fig.(IV.12). Debido a que la ec.(IV.40) describe la función de fluencia en el plano $\sigma_2 - \sigma_3$, es posible deducir de ella la magnitud de α . Para ello, considerando un estado de compresión plano y simétrico $\sigma_{cb} = \sigma_3 = \sigma_2 \leq \sigma_1 = 0$ en la ec.(IV.40), se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sqrt{2J_2} = \sqrt{\frac{2}{3}(\sigma_{cb})^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{cb} \\ \xi &= \frac{I_1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{cb} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_{cb} \frac{(1-2\alpha)}{(1-\alpha)} - c = 0 \quad (IV.41)$$

Por otro lado, puesto que es un proceso de compresión pura ($\sigma_i \leq 0$), se tiene que la función de peso ec.(IV.21) es constante y nula $r(\sigma) = 0$, resulta la siguiente ecuación de evolución para la cohesión ec.(IV.20):

$$\dot{c} = h_c(\sigma, \kappa^p, c) \dot{\kappa}^p = c \left[\frac{1}{c_c(\kappa^p)} \frac{dc_c(\kappa^p)}{d\kappa^p} \right] \dot{\kappa}^p \quad (IV.42)$$

integrando esta ecuación de evolución, resulta:

$$\bar{c} = c_c(\kappa^p) \quad (IV.43)$$

y debido a que en este criterio de fluencia, la relación entre la función de cohesión a compresión simple y la respectiva tensión uniaxial viene dada por ec.(IV.22):

$$c = e_c(\kappa'') = \frac{1}{R} \sigma_c(\kappa'') \equiv \sigma_c(\kappa'') \quad (IV.44)$$

se puede escribir la ec.(IV.41), como:

$$\frac{\sigma_{cb}}{\sigma_c} = \frac{1 - \alpha}{1 - 2\alpha} \quad (IV.45)$$

resultando de aquí la expresión del parámetro α :

$$\alpha = \frac{\frac{\sigma_{cb}}{\sigma_c} - 1}{2\frac{\sigma_{cb}}{\sigma_c} - 1} \quad (IV.46)$$

donde σ_c y σ_{cb} representan la resistencias de compresión uniaxial y equibiaxial para el *límite de discontinuidad inicial* $\kappa'' = 0$, respectivamente. Según estudios experimentales sobre el comportamiento de hormigones ^{[74][106][102]}, la relación $\frac{\sigma_{cb}}{\sigma_c}$ oscila entre 1.10 y 1.16, de donde se obtienen valores de α comprendidos entre 0.08 y 0.1212... .

Parámetro β : La relación que hay entre las resistencias uniaxiales de compresión y tracción $R(\kappa'') = \sigma_c(\kappa'')/\sigma_T(\kappa'')$, cuando se alcanza el *primer límite de discontinuidad*, para: $\kappa'' = 0$, puede ser controlada a través del parámetro β .

Conocido α , y sustituyendo un estado de tracción simple $0 = \sigma_3 = \sigma_2 \leq \sigma_1 = \sigma_T$ en la ec.(IV.38), se tiene:

$$\frac{1}{(1 - \alpha)} [\sigma_T + \alpha \sigma_T + \beta (\sigma_T)] = c \quad (IV.47)$$

y debido a que en este criterio de fluencia, la relación entre la función de cohesión a tracción simple y la respectiva tensión uniaxial viene dada por ec.(IV.23):

$$c_T(\kappa^p) = \frac{1}{8} [R^0 \sigma_T(\kappa^p)] \equiv R^0 \sigma_T(\kappa^p) \quad (IV.48)$$

se puede escribir la ec.(IV.47), como:

$$1 + \alpha + \beta = (1 - \alpha) R^0 \quad (IV.49)$$

resultando de aquí la expresión del parámetro β

$$\beta = (1 - \alpha)R^0 - (1 + \alpha) \quad (IV.50)$$

donde R^0 representa la relación uniaxial que hay entre la resistencia uniaxial de compresión y tracción cuando se alcanza el *primer límite de discontinuidad*, (para $\kappa^p = 0$). Según estudios experimentales sobre el comportamiento de hormigones [74][136], la relación $R(\kappa^p = 0)$ es del orden de 10.0, que junto a un $\alpha = 0.1212$, da valores de β del orden de 7.66 .

Parámetro γ : Este parámetro, función de la relación de radios octaédricos máximos a tracción y compresión r_{oct}^{max} , aparece solamente para estados de compresión triaxial, o sea cuando $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 = \sigma^{max} \leq 0$. Designando con [T.M.] y [C.M.] los meridianos a tracción ($\sigma_3 = \sigma_2 < \sigma_1$; o $\theta = -\frac{\pi}{6}$) y compresión ($\sigma_3 < \sigma_2 = \sigma_1$; o $\theta = \frac{\pi}{6}$), de la superficie de fluencia plástica, respectivamente, y expresando las tensiones máximas a partir de la ec.(An-E.35), como:

$$\text{para [T.M.]: } \theta = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sigma^{max} = \frac{1}{3} (I_1 + 2 \sqrt{3} J_2) \quad (IV.51)$$

$$\text{para [C.M.]: } \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sigma^{max} = \frac{1}{3} (I_1 + \sqrt{3} J_2) \quad (IV.52)$$

tal que, sustituyendo éstas en la ec.(IV.38) con $\sigma^{max} < 0$, resultan las siguientes ecuaciones que describen meridianos rectos de tracción y compresión:

$$\text{para [T.M.]: } (2\gamma + 3) \sqrt{3J_2} + (\gamma + 3\alpha) I_1 = 3(1 - \alpha) c \quad (\text{IV.53})$$

$$\text{para [C.M.]: } (\gamma + 3) \sqrt{3J_2} + (\gamma + 3\alpha) I_1 = 3(1 - \alpha) c \quad (\text{IV.54})$$

donde c es el valor actual de la cohesión, que viene descrita por la función de evolución presentada en la *ec.*(IV.19). Considerando la relación de radios octaédricos máximos a tracción y compresión r_{oct}^{max} , en un plano octaédrico cualquiera $I_1 = cte.$, se tiene de las *ecs.*(IV.53) y (IV.54):

$$r_{oct}^{max} = \frac{\rho_T}{\rho_c} = \frac{(\sqrt{2J_2})_T}{(\sqrt{2J_2})_c} = \frac{(\sqrt{J_2})_T}{(\sqrt{J_2})_c} = \frac{3(1 - \alpha)c - (\gamma + 3\alpha)}{(2\gamma + 3)\sqrt{3}} = \frac{\gamma + 3}{2\gamma + 3} = cte. \quad (\text{IV.55})$$

resultando de aquí la expresión del parámetro γ , que es constante debido a que los meridianos son rectos *ecs.*(IV.53) y (IV.54):

$$\gamma = \frac{3(1 - r_{oct}^{max})}{2r_{oct}^{max} - 1} \quad (\text{IV.56})$$

Según N.S. Ottosen ^{[33][102][103]}, la *relación máxima entre radios octaédricos* r_{oct}^{max} , debe ser una función de la presión hidrostática I_1 , variando desde $r_{oct}^{max} = 0.5$ para $I_1 \rightarrow 0$, hasta $r_{oct}^{max} = 1.0$ para $I_1 \rightarrow \infty$, esto significa que la función de fluencia pasa de una sección octaédrica triangular, a una circular, respectivamente. No obstante esto, los ensayos experimentales no muestran tal incremento ^[113], sino que tiende a una constante que oscila alrededor de $r_{oct}^{max} \sim 0.65$. De esto último, se obtiene un valor de $\gamma = 3.5$. El criterio de fluencia plástica de Willam-Warnke ^[33], al igual que el que se propone, mantiene la *relación máxima entre radios octaédricos* constante durante todo el proceso inelástico, y comprendida entre $0.5 \leq r_{oct}^{max} \leq 1.0$ según sean las constantes de ajuste que se utilizan.

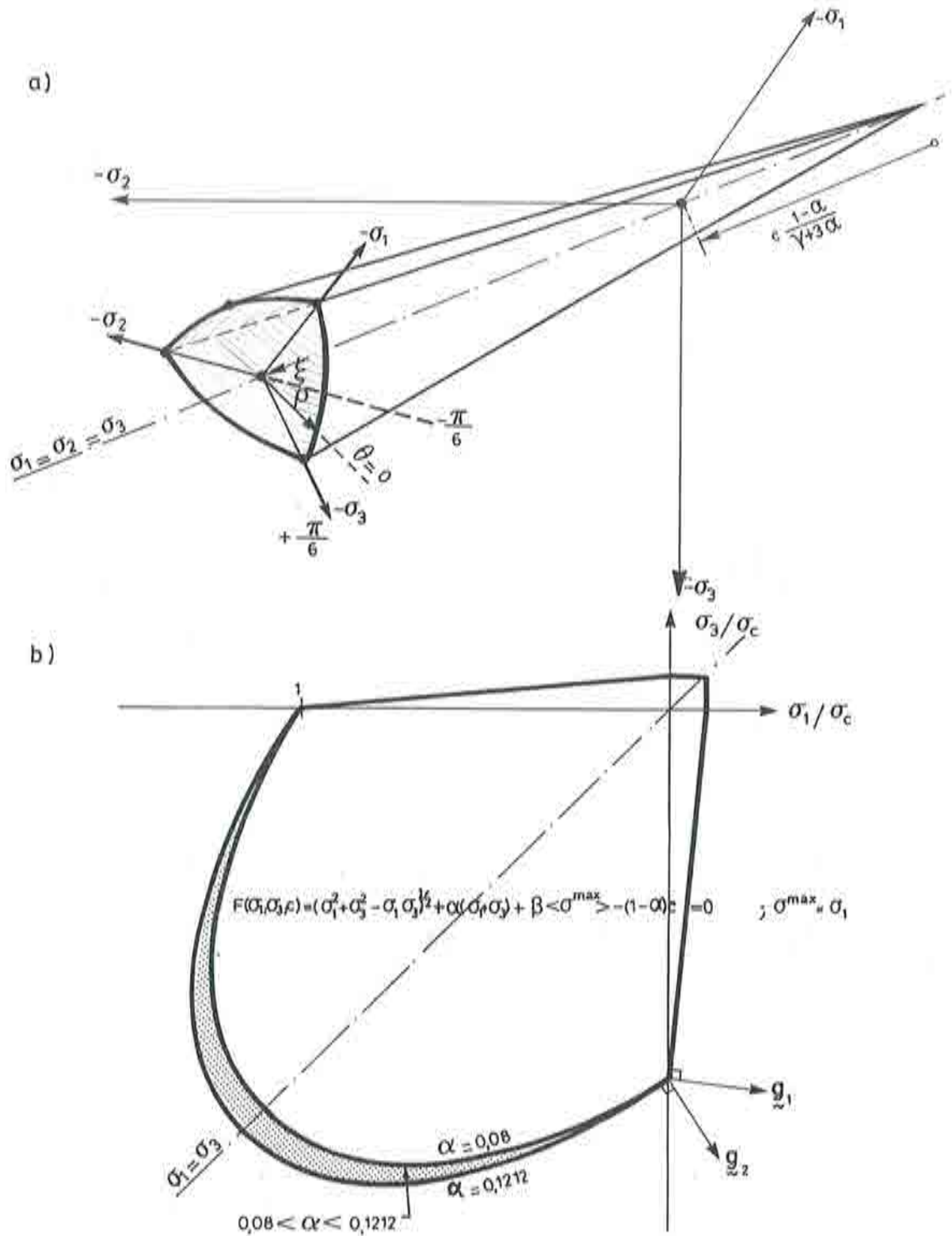


fig.(IV.12): Criterio de fluencia propuesto: a) En el espacio de tensiones principales o espacio de Westergard; b) Según el plano $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$.

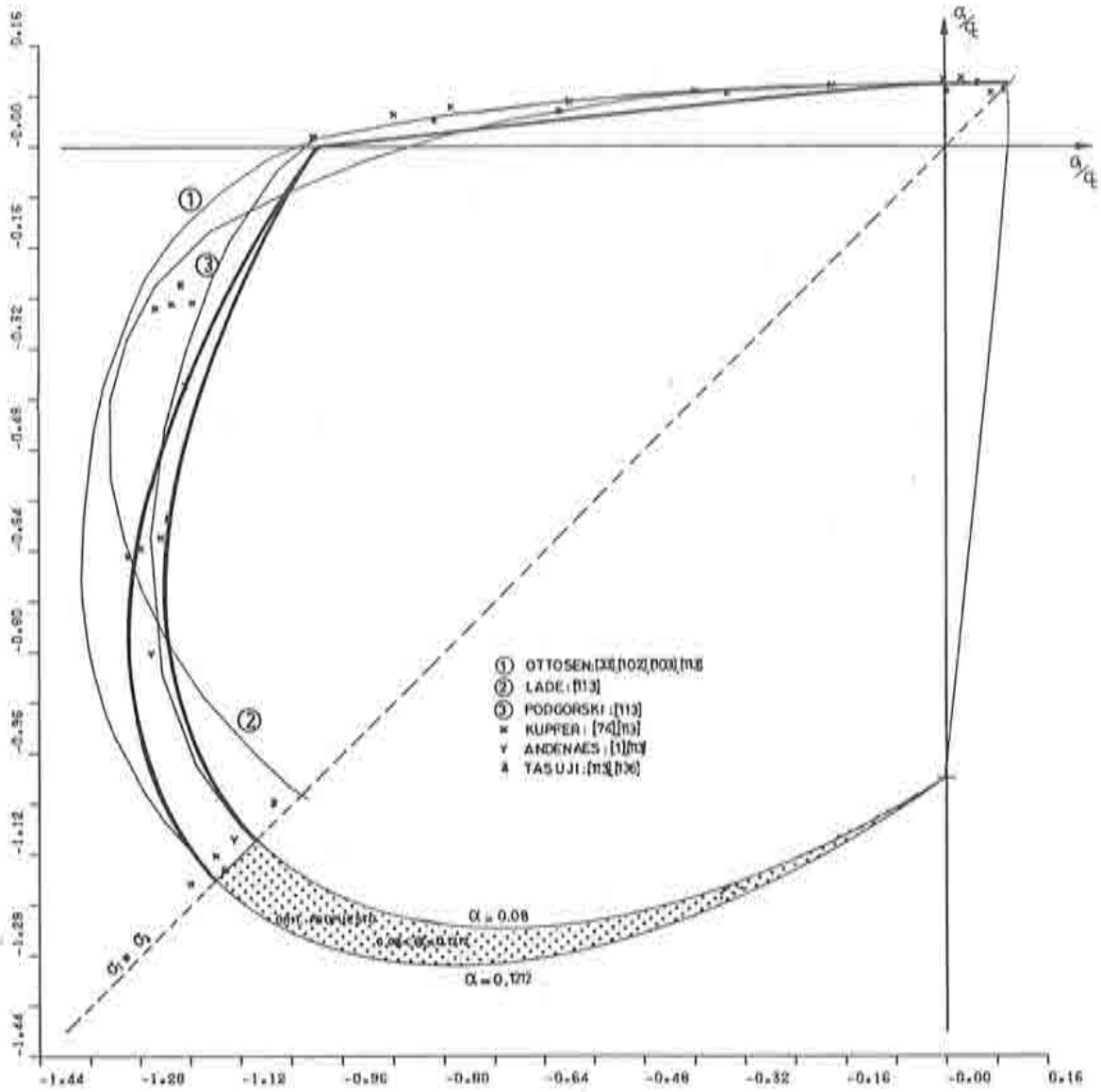


fig.(IV.12): Criterio de fluencia propuesto: según el plano $\sigma_1 = \sigma_3, \sigma_2 = 0$.

c) Comparación con otros criterios de fluencia plástica

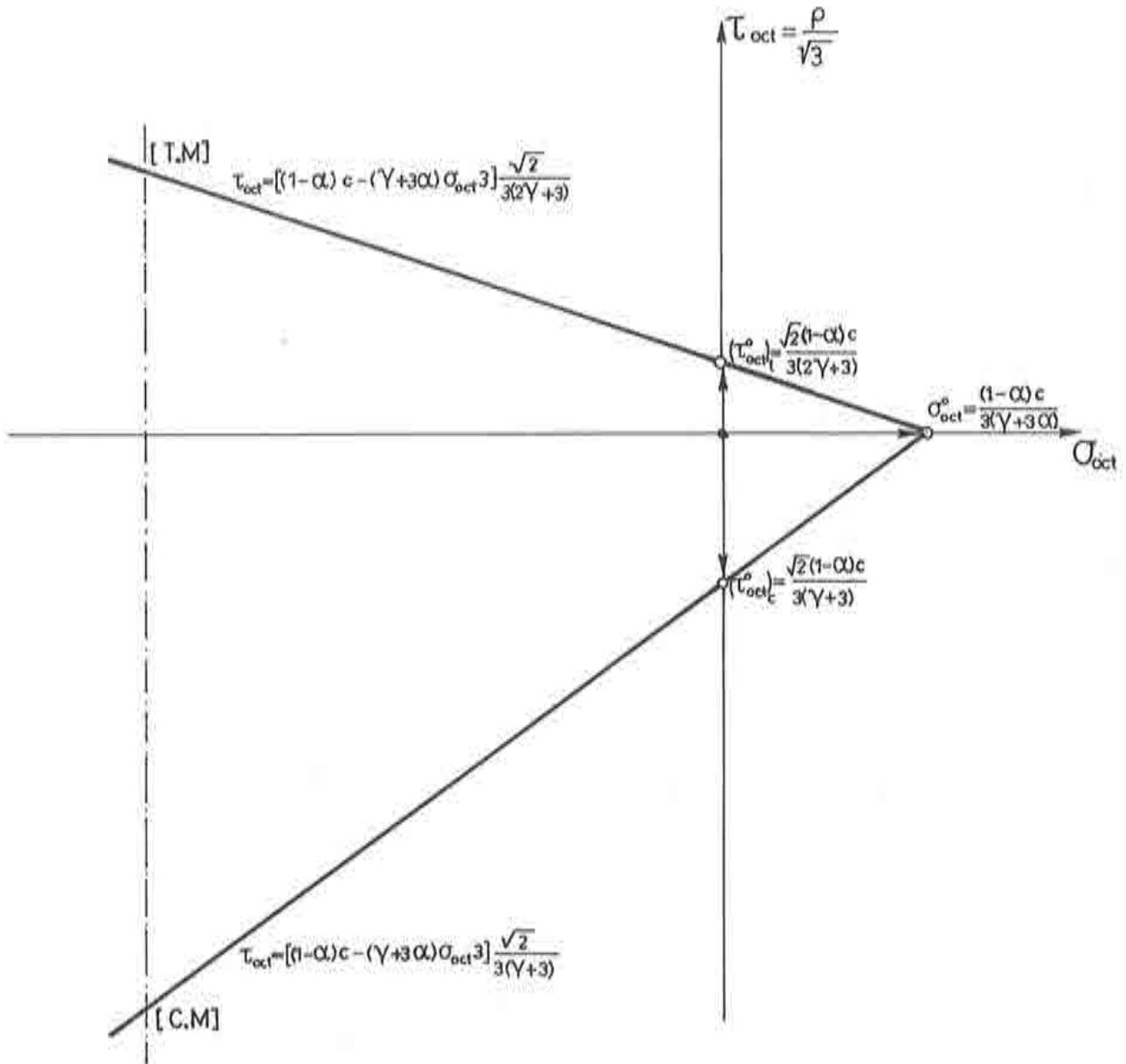


fig.(IV.12): Criterio de fluencia propuesto:

d) Según los meridianos de tracción y compresión máxima.

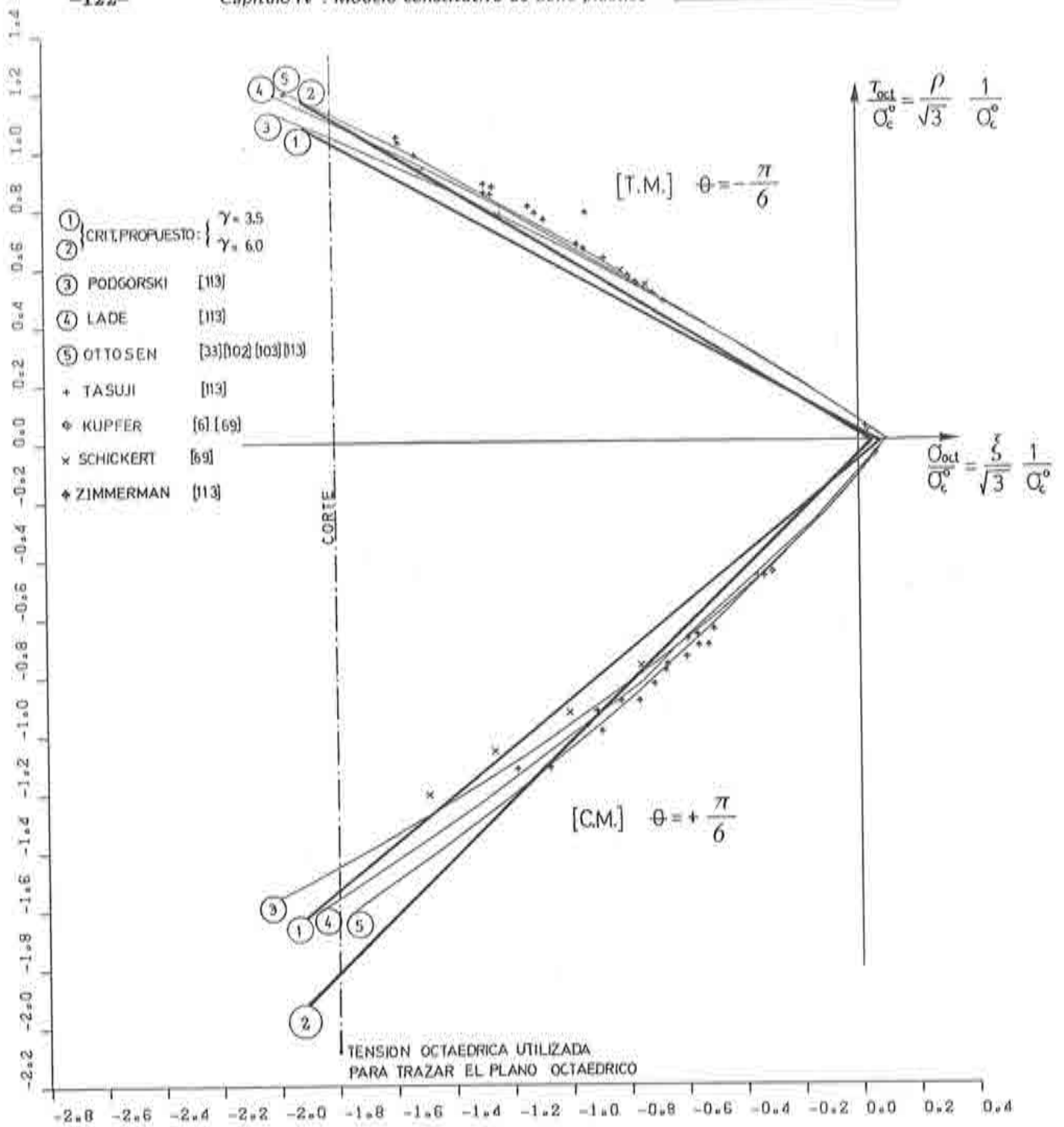


fig.(IV.12): Criterio de fluencia propuesto: e) Comparación con otros criterios de fluencia plástica según los meridianos de tracción y compresión máxima.

PLANO OCTAEDRICO para: $\sigma_{oct} = -1,8$

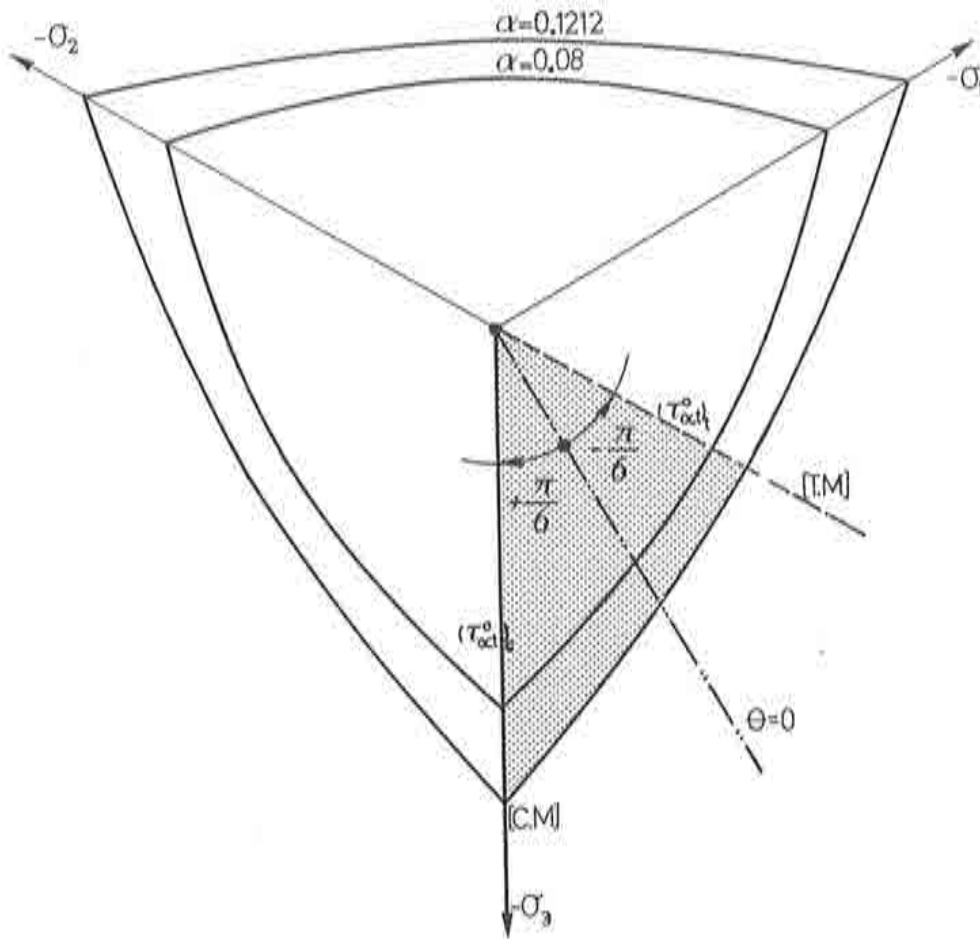


fig.(IV.12): Criterio de fluencia propuesto: f) Según el plano octaédrico $\sigma_{oct} = -1,8$.

IV.5.c- Forma de la función de fluencia.

La función de fluencia propuesta, describe en el *espacio de tensiones principales*, o espacio de Westergard, una pirámide como la que muestra la fig.(IV.12,a). En los *planos meridianos de tracción máxima y compresión máxima* fig.(IV.12,d), debido a que depende en forma lineal de ρ y de ξ , describe dos rectas con una relación máxima de radios octaédricos como la expresada en la ec.(IV.55). En el

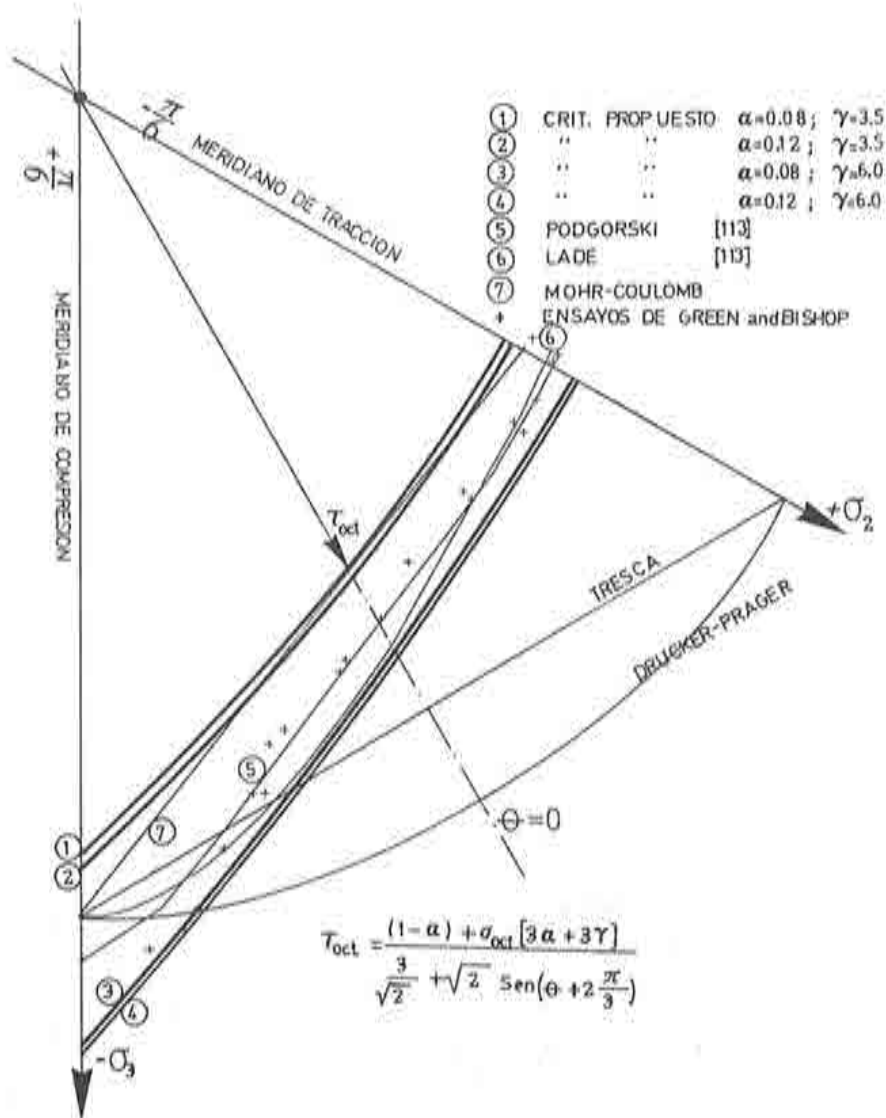


fig.(IV.12): Criterio de fluencia propuesto: g) Comparación con otros criterios de fluencia plástica según el plano octaédrico $\sigma_{oct} = -1.8$.

plano octaédrico fig.(IV.12.f) describe una curva con tres vértices, por donde pasan los tres meridianos de compresión máxima y donde presenta uno de los tipos de singularidad que produce una definición múltiple del vector normal a la superficie f (IV.7). Por último, en el plano principal fig.(IV.12.b) $[\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0]$, en la zona de compresión total, presenta una función similar a la de Drucker-Prager ec.(IV.40), y en la intersección con el octante de compresión total, presenta el otro

tipo de singularidad que también produce definición múltiple del vector normal a la superficie (IV.7.).

Del análisis de las figs.(IV.12) se puede deducir que, tanto en el *plano octaédrico* como en los *planos meridianos* y en el *plano principal* $[\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0]$ el criterio propuesto aproxima bien los resultados experimentales ^{[1][74][113][134]}. Además, se puede observar que para los valores de tensión octaédrica comprendidos entre:

$$\sim -2.0 \leq \frac{\sigma_{oct}}{|\sigma_c(\kappa^p = 0)|} \leq \frac{\sigma_{oct}^0}{|\sigma_c(\kappa^p = 0)|}, \text{ (dominio donde se encuentran}$$

numerosos ensayos experimentales para los hormigones), las funciones meridianas rectas aproximan bastante bien el comportamiento real de este material.

IV.6.- CRITERIO DE POTENCIAL PLÁSTICO.

De la regla de flujo expresada mediante la ec.(Ap-1.21), resulta obvio que el incremento de deformación plástica ϵ^p queda definido a partir del criterio de potencial plástico \mathcal{G} , quedando así establecida la cuota de dilatación admitida en el *material ideal propuesto*, durante el desarrollo de un proceso de carga elasto-plástico. En otras palabras, la definición de la función de potencial plástico establece indirectamente la magnitud del efecto de la dilatación que se producirá en el sólido ideal que se modela. La variación de este ángulo de dilatación, a lo largo del proceso de carga inelástico, ha sido presentada en el (*apart. IV.4.d*), y mediante esta función se puede dar movilidad al criterio de potencial plástico con el fin de lograr una mejor simulación del fenómeno de dilatación.

Existe una gran cantidad de funciones de potencial plástico \mathcal{G} , definidas para lograr la dilatación deseada para cada material friccional ideal ^{[53][75]}. En este modelo constitutivo se ha utilizado una *extensión* de la propuesta realizada por D. Radenkovic ^{[23][114]}, consistiendo en adoptar el *criterio de fluencia de Mohr-Coulomb*, que en este caso se considera su modificación (*anexo-C*) como criterio de potencial plástico. Sustituyendo el ángulo de rozamiento interno por el de dilatación (*apart. IV.4.d*): $\psi = \phi$. Esto es:

$$G(I_1, J_2, \theta, \psi, \alpha_R) = \frac{I_1}{3} \mathbb{K}_3 + \sqrt{J_2} \left(\mathbb{K}_1 \cos \theta - \mathbb{K}_2 \frac{\sin \theta \sin \psi}{\sqrt{3}} \right) - cte. = 0 \quad (IV.57)$$

o bien:

$$G(\xi, \rho, \theta, \psi, \alpha_R) = \sqrt{2\xi} \mathbb{K}_3 + \sqrt{3\rho} \left(\mathbb{K}_1 \cos \theta - \mathbb{K}_2 \frac{\sin \theta \sin \psi}{\sqrt{3}} \right) - cte. = 0 \quad (IV.58)$$

donde \mathbb{K}_i son constantes que dependen de la relación inicial entre las resistencias uniaxiales a compresión y a tracción (*Anexo-C*). Esta modificación de la función de Mohr-Coulomb, provee un vector de flujo plástico que se acerca a los resultados experimentales obtenidos, sobre morteros de cemento y hormigones, por E. Andenaes y otros ^[1] fig.(IV.13). En esta misma figura se puede observar el error cometido en considerar un flujo asociado a la función de fluencia propuesta (IV.7.), y la ventaja que proporciona el uso de la propuesta de Radenkovic aplicada a la función de Mohr-Coulomb modificada (*anexo-C*). Esta última, puede presentar una discrepancia con los resultados experimentales obtenidos por Andenaes ^[1] para la relación de tensión $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{0}{3}$ (punto singular), pudiendose solucionar mediante la definición del flujo plástico de Köiter *ec.(Ap-1.126)*, con una selección apropiada del factor de peso $p^{(1)}$.

IV.7.- RIGIDEZ TANGENTE - CALCULO DEL VECTOR NORMAL A LA SUPERFICIE DE FLUENCIA PLASTICA (*apart. IV.5.*) - :

Para este modelo constitutivo, en ausencia de degradación de rigidez, el tensor tangente elasto-plástico se expresa de la misma manera que en la teoría de la plasticidad clásica *ec.(Ap-1.54)*. Esto es:

$$D_{\sigma}^{ep} = D_S - \frac{\begin{bmatrix} D_S & \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T & D_S \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} h_c & \left(\mathbf{h}_c^p \right)^T \frac{\partial G}{\partial \sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T & D_S & \frac{\partial G}{\partial \sigma} \end{bmatrix}} \quad (IV.59)$$

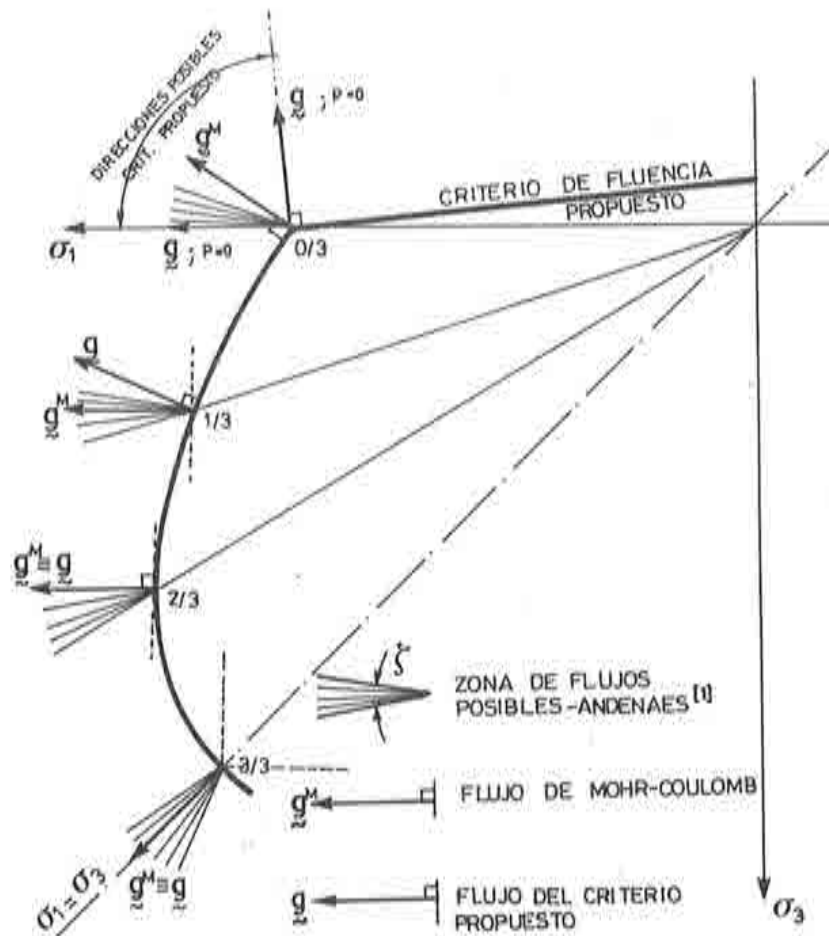


fig.(IV.13): Flujo plástico producido por la superficie de fluencia presentada en el (apart. IV.5); flujo plástico obtenido por E. Andenaes y otros ^[1], y flujo según la propuesta de D. Radenkovic ^{[23][114]}.

donde $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$ representa al vector normal a la superficie de fluencia plástica definida

en el apart. IV.5; y $\frac{\partial G}{\partial \sigma}$ representa al vector normal a la superficie de potencial plástico *. D_S es el tensor de rigidez secante de cuarto orden, representado por una matriz de treinta y seis elementos; $h_c(\sigma, q)$ es una función del estado del proceso plástico que describe la evolución de la variable interna de cohesión

* Nota: La función de fluencia plástica propuesta en el apart. IV.5 provee un flujo plástico que no cumple plenamente con los resultados experimentales obtenidos por Andenaes y otros ^[1] (ver fig. IV.13). Sin embargo, en el capítulo V se muestran algunos ejemplos tratados con la regla de flujo asociada a este criterio de fluencia dando resultados satisfactorios. La modificación del criterio de Mohr-Coulomb propuesto en el anexo-C, junto a un ángulo de rozamiento interno igual al de dilatación $\phi = \psi$ (función de Radencovich modificada apart. IV-6) da una superficie de potencial plástico que se ajusta bastante bien a los resultados experimentales ^[1].

c ec.(IV.20), y $h'_n(\sigma, q)$ es otra función del estado del proceso plástico que describe la evolución de la variable interna de daño plástico κ^p ec.(IV.16).

A continuación se definirá, en el espacio de tensiones principales, el vector normal a la superficie de fluencia plástica propuesta (apart. IV.5), y se tratará también el problema de definición múltiple de este vector en los puntos singulares que presenta esta función.

IV.7.a- Vector normal a la superficie de fluencia plástica.

El vector normal al criterio de fluencia plástica $f = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma}$, expresado en el espacio de tensiones principales, queda definido como:

$$f = \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma, q)}{\partial \sigma} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_1} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_2} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_3} \end{pmatrix} \quad (IV.61)$$

siendo una componente genérica de este vector:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_i} = \frac{2\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k}{2\sqrt{3}J_2} + \alpha + \beta \frac{\partial \langle \sigma^{max} \rangle}{\partial \sigma_i} - \gamma \frac{\partial \langle -\sigma^{min} \rangle}{\partial \sigma_i} \quad (IV.62)$$

tal que sustituyendo en ésta: $2\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k = 3 \left[\sigma_i - \left(\frac{\sigma_i + \sigma_j + \sigma_k}{3} \right) \right] = 3 s_i$, resulta:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_i} = \frac{3 s_i}{2\sqrt{3}J_2} + \alpha + \mathfrak{S}_i \quad (IV.63)$$

donde \mathfrak{S}_i es un parámetro que considera la de influencia de la tensión principal

máxima en la componente de flujo $f_i = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_i}$ ec.(IV.61), y vale:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_i &= \beta \frac{\partial \langle \sigma^{max} \rangle}{\partial \sigma_i} - \gamma \frac{\partial \langle -\sigma^{max} \rangle}{\partial \sigma_i} = \left[\beta \frac{\partial \langle \sigma^{max} \rangle}{\partial \sigma^{max}} - \gamma \frac{\partial \langle -\sigma^{max} \rangle}{\partial \sigma^{max}} \right] \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \sigma_i} \\ \mathfrak{S}_i &= \left[\beta \frac{\langle \sigma^{max} \rangle}{|\sigma^{max}|} - \gamma \frac{\langle -\sigma^{max} \rangle}{|\sigma^{max}|} \right] \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \sigma_i} = \delta \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \sigma_i} \end{aligned} \quad (IV.64)$$

donde *:

$$\begin{aligned} \langle \pm \sigma^{max} \rangle &= \frac{1}{2} (\sigma^{max} \pm |\sigma^{max}|) \\ \sigma^{max} &= \frac{I_1}{3} + \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \sigma_i} &= \frac{I_1}{3} + \frac{s_i}{\sqrt{3J_2}} \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{\cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}{\cos(3\theta)} \left[\frac{1}{3} + \frac{s_j s_k}{J_2} - \frac{3 s_i J_3}{2(J_2)^2} \right] \quad (*) \end{aligned}$$

IV.7.b- Puntos singulares de la superficie de fluencia - definición del vector normal.

La superficie de fluencia que se propone en el (apart. IV.5) tiene puntos no alisados donde el vector normal no es único en el sentido dado por Köiter

* Nota: La derivada de la tensión máxima respecto de las componentes de tensión principal es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \sigma_i} &= \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_i} \\ \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \sigma_i} &= \frac{I_1}{3} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_i} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \frac{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma_i} + \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_i} \\ \text{con: } \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_i} &= 1 \quad ; \quad \frac{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma_i} = \frac{s_i}{2\sqrt{J_2}} \quad ; \quad \frac{\partial (J_3)}{\partial \sigma_i} = s_j s_k + \frac{J_3}{3} \end{aligned}$$

[71] (*apart. Ap-I.3.h*). Estos puntos singulares se encuentran fig.(IV.14): a) donde la tensión normal máxima cambia de dirección, en los tres meridianos de compresión máxima, y en los meridianos de tracción máxima y b) donde la tensión normal máxima cambia de signo, en la intersección de la superficie de fluencia con los tres planos que definen el octante de compresión triaxial en el espacio de tensiones principales: $[\sigma_1 = 0, \sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0]$, $[\sigma_1 < 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0]$ y $[\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0, \sigma_3 = 0]$.

• Primer caso de singularidad.

En la intersección de cada uno de los tres planos meridianos de compresión máxima y de tracción máxima, con la superficie de fluencia, se presenta una definición múltiple de su vector normal, configurando un típico caso de simetría respecto de cada plano meridiano. Esta situación se resuelve definiendo un *vector normal intermedio*, comprendido entre los dos simétricos, que tenga dos de las tres componentes iguales fig.(IV.14,a). Por ejemplo, en el meridiano de compresión $[\sigma_3 < \sigma_2 = \sigma_1 \text{ o } \theta = \frac{\pi}{6}]$, se presentan dos vectores simétricos y normales a la superficie de fluencia fig.(IV.14,a):

$$\begin{aligned}
 \text{para la sup. (1)} : \quad \frac{\partial \mathcal{F}^{(1)}}{\partial \sigma} \Big|_{+\frac{\pi}{6}} &= \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}^{(1)}}{\partial \sigma_1} \quad \frac{\partial \mathcal{F}^{(1)}}{\partial \sigma_2} \quad \frac{\partial \mathcal{F}^{(1)}}{\partial \sigma_3} \right\}^T \Big|_{+\frac{\pi}{6}} \\
 \text{para la sup. (2)} : \quad \frac{\partial \mathcal{F}^{(2)}}{\partial \sigma} \Big|_{+\frac{\pi}{6}} &= \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}^{(2)}}{\partial \sigma_1} \quad \frac{\partial \mathcal{F}^{(2)}}{\partial \sigma_2} \quad \frac{\partial \mathcal{F}^{(2)}}{\partial \sigma_3} \right\}^T \Big|_{+\frac{\pi}{6}}
 \end{aligned}
 \tag{IV.65}$$

donde sus componentes tienen la siguiente característica:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{F}^{(1)}}{\partial \sigma_3} \Big|_{+\frac{\pi}{6}} &\equiv \frac{\partial \mathcal{F}^{(2)}}{\partial \sigma_3} \Big|_{+\frac{\pi}{6}} \\
 \frac{\partial \mathcal{F}^{(1)}}{\partial \sigma_1} \Big|_{+\frac{\pi}{6}} &\equiv \frac{\partial \mathcal{F}^{(2)}}{\partial \sigma_3} \Big|_{+\frac{\pi}{6}} \\
 \frac{\partial \mathcal{F}^{(1)}}{\partial \sigma_2} \Big|_{+\frac{\pi}{6}} &\equiv \frac{\partial \mathcal{F}^{(2)}}{\partial \sigma_1} \Big|_{+\frac{\pi}{6}}
 \end{aligned}$$

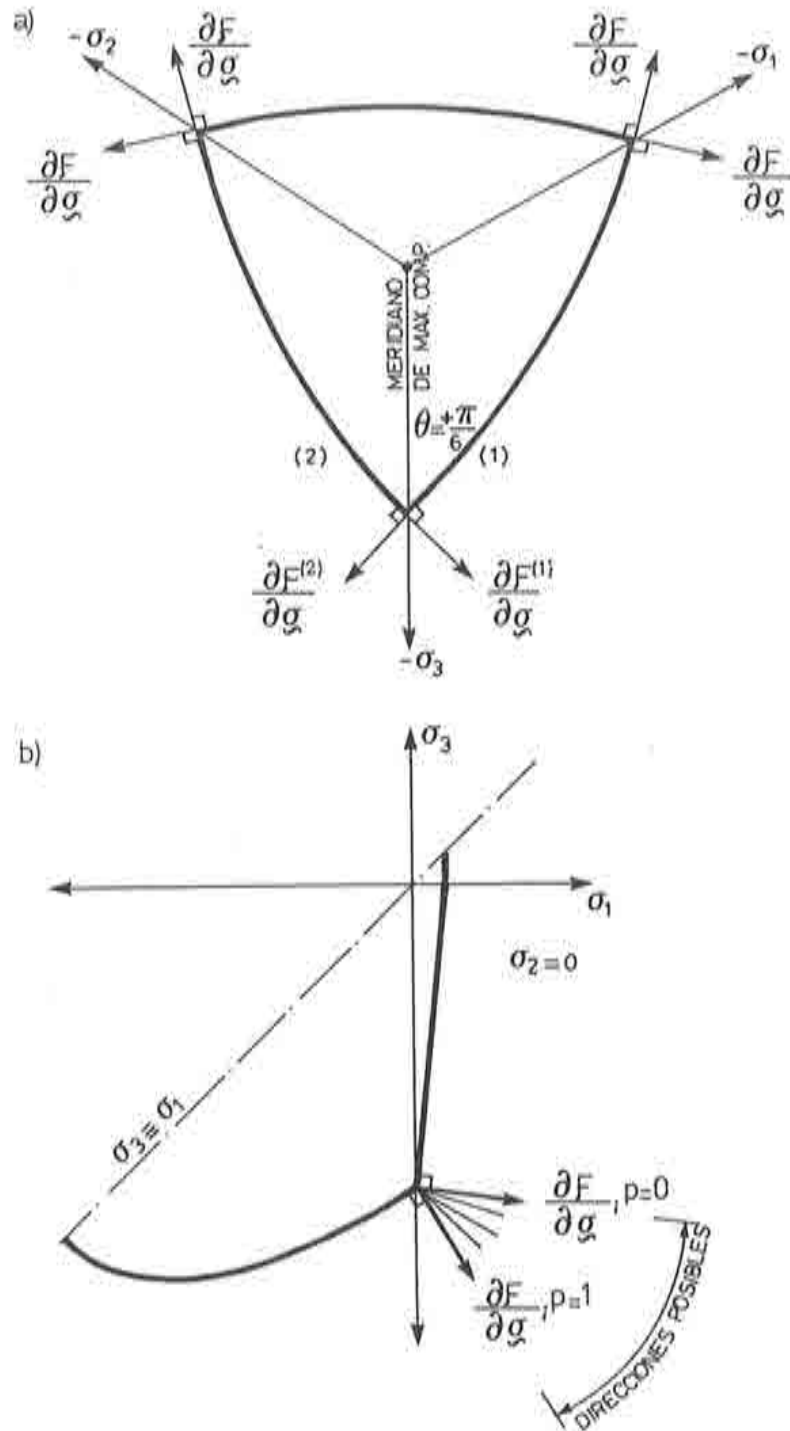


fig.(IV.14): Tipos de singularidades que presenta la función de fluencia plástica (apart. IV.5): a) Plano octaédrico: singularidades en los tres meridianos de compresión; b) Plano $(\sigma_1 - \sigma_3)$, $\sigma_2 = 0$: singularidades en la intersección con el octante de compresión.

permitiendo definir un nuevo vector normal único, comprendido entre los dos vectores antes citados es decir:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right|_{+\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} \left[\left. \frac{\partial \mathcal{F}^{(1)}}{\partial \sigma} \right|_{+\frac{\pi}{3}} + \left. \frac{\partial \mathcal{F}^{(2)}}{\partial \sigma} \right|_{+\frac{\pi}{3}} \right] \quad (IV.66)$$

donde:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_1} \right|_{+\frac{\pi}{3}} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_2} \right|_{+\frac{\pi}{3}}$$

Se puede extender este criterio a todos los casos de singularidad que se presentan en los tres meridianos de compresión máxima y tracción máxima.

• Segundo caso de singularidad.

En la intersección de la superficie de fluencia con el octante de compresión total, se presenta otra situación de discontinuidad en las derivadas. Esta singularidad afecta a los estados de tensión biaxial que coinciden con los planos del octante de compresión total, como así también a los problemas uniaxiales de compresión. Para un estado tensional del tipo $[\sigma_3 \leq \sigma_2 < \sigma_1]$, se tiene un vector normal a la superficie de fluencia, cuyas componentes principales están definidas por la ec.(IV.63):

$$f_i = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_i} = \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{3 s_i}{2 \sqrt{3} J_2} + \alpha + \mathfrak{S}_i \right] \quad (IV.67)$$

donde $\mathfrak{S}_i = \beta$ si $\sigma_1 > 0$ ec.(IV.64), $\mathfrak{S}_i = \gamma$ si $\sigma_1 < 0$ ec.(IV.64) y \mathfrak{S}_i está indeterminado entre β y γ para $\sigma_1 = 0$ fig.(IV.14,b). La indeterminación de este *parámetro de influencia* provoca la indeterminación de las componentes f_i del vector normal a la superficie. En estos casos de indeterminación, se puede recurrir a estudios experimentales para decidir su dirección más apropiada. Para

ello, en este modelo constitutivo se ha considerado una formulación quasi-empírica que decide la magnitud del parámetro \mathfrak{S}_i :

$$\text{si: } \sigma_1 = 0 \Rightarrow \mathfrak{S}_i = \delta \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \sigma_i} = [\beta (1-p) + \gamma p] \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \sigma_i} ; \quad \forall 0 \leq p \leq 1. \quad (IV.68)$$

En el caso de trabajar con plasticidad asociada, este criterio permite seleccionar, para estados de *compresión uniaxial*, un flujo normal a la superficie de fluencia definida en el cuadrante de compresión ($p = 1 \rightarrow \mathfrak{S}_i = \gamma$) fig.(IV.14.b), situación que coincide con los resultados experimentales de Andenaes ^[1]. De aquí , para un estado tensional del tipo $[\sigma_3 < \sigma_2 = \sigma_1 = 0]$, resulta a partir de las *ecs.*(IV.67) y (IV.68) el siguiente vector normal:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_1} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_2} = \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{2} + \alpha + \gamma \right] ; \quad \text{con: } p = 1 \quad (IV.69)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_3} = \frac{1}{1-\alpha} [-1 + \alpha] = -1$$

Aprovechando esta expresión del vector normal a la superficie de fluencia, resulta de particular interés conocer la relación que hay entre las deformaciones longitudinal-transversal, para un problema de compresión uniaxial. En el caso de trabajar con plasticidad asociada $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, el vector normal a la superficie de fluencia *ec.*(IV.69) pasa a trabajar como vector de flujo plástico, y a partir de él se obtiene el incremento temporal de deformación plástica $\dot{\epsilon}_3^p$, en la dirección de la carga, y $\dot{\epsilon}_1^p$ en la dirección normal al incremento anterior. Así se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1^p &= \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_1^e \\ \dot{\epsilon}_3^p &= \dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_3^e \end{aligned} \quad (IV.70)$$

donde:

$$\dot{\epsilon}_i^e = \frac{1}{E_S} [\dot{\sigma}_i - \nu(\dot{\sigma}_j + \dot{\sigma}_k)] \rightarrow \begin{cases} \dot{\epsilon}_1^e = -\frac{\nu}{E_S} \dot{\sigma}_3 = -\nu \frac{E_T}{E_S} \dot{\epsilon}_3 \\ \dot{\epsilon}_3^e = \frac{\dot{\sigma}_3}{E_S} = \frac{E_T}{E_S} \dot{\epsilon}_3 \end{cases}$$

$$\dot{\epsilon}_1^p = \dot{\lambda} \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{2} + \alpha + \gamma \right]$$

$$\dot{\epsilon}_3^p = \dot{\lambda} \frac{1}{1-\alpha} [-1 + \alpha] = \dot{\lambda}$$

de donde resulta:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{2} + \alpha + \gamma \right] &= \dot{\epsilon}_1 + \nu \frac{E_T}{E_S} \dot{\epsilon}_3 \\ -\dot{\lambda} &= \dot{\epsilon}_3 \left(1 - \frac{E_T}{E_S} \right) \end{aligned} \quad (IV.71)$$

dividiendo m.a.m estas dos expresiones, se tiene:

$$-\frac{1 + 2\alpha + 2\gamma}{2(1-\alpha)} = \frac{\dot{\epsilon}_1 + \nu \frac{E_T}{E_S} \dot{\epsilon}_3}{\dot{\epsilon}_3 \left(1 - \frac{E_T}{E_S} \right)} \quad (IV.72)$$

de donde surge la relación de incrementos de deformaciones buscada:

$$-\frac{\dot{\epsilon}_1}{\dot{\epsilon}_3} = -\frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_3} = \left[\frac{1 + 2\alpha + 2\gamma}{2(1-\alpha)} \right] \left(1 - \frac{E_T}{E_S} \right) + \nu \left(\frac{E_T}{E_S} \right) = \nu^* \quad (IV.73)$$

donde ν^* recibe le nombre de *módulo de Poisson ficticio* que depende el proceso elasto-plástico que se desarrolla.

IV.7.c- Vector normal a la superficie de fluencia plástica expresado según la forma de Nayak-Zienkiewicz (*anexo-F*).

Resulta de particular interés, para el cálculo numérico, la expresión del vector normal a la superficie de fluencia dada por Nayak-Zienkiewicz (*anexo-F*). Para ello, a partir de la ec.(IV.63) y la ec.(IV.64), se tiene:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sqrt{J_2}} \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ 2\tau_{23} \\ 2\tau_{31} \\ 2\tau_{12} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \sigma} \quad (IV.74)$$

comparando ésta, con la ec.(An-F.4), resulta:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} = \sqrt{3} f_2 + \alpha f_1 + \delta \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \sigma} \quad (IV.75)$$

sustituyendo en ésta, la derivada $\frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \sigma}$ por su expresión ec.(IV.64), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} = & \sqrt{3} f_2 + \alpha f_1 + \\ & + \delta \left[\frac{1}{3} f_1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{3J_3 \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)}{(J_2)^{\frac{3}{2}} \cos(3\theta)} \right) f_2 - \frac{1 \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)}{J_2 \cos(3\theta)} f_3 \right] \end{aligned} \quad (IV.76)$$

reordenando ésta, resulta una expresión análoga a la ec.(An-F.4). Esto es:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} = f = C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 \quad ; \quad \forall -\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3} \quad (IV.77)$$

siendo los vectores f_i los mismos que los expresados en la ec.(An-F.4), y las

constantes C_i iguales a:

$$C_1 = \left(\alpha + \frac{\delta}{3} \right)$$

$$C_2 = \sqrt{3} + \frac{2\delta}{\sqrt{3}} \left[\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) - \tan(3\theta) \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$C_3 = -\frac{\delta}{(J_2)} \frac{\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)}{\cos(3\theta)}$$

$$\text{con: } \delta = \begin{cases} \gamma & ; \text{ si } \sigma_1 < 0 \\ \beta & ; \text{ si } \sigma_1 > 0 \\ [(1-p)\beta + p\gamma] & ; \text{ si } \sigma_1 = 0 \end{cases}$$

Como era de esperar, las constantes C_2 y C_3 , se indeterminan sobre los meridianos de compresión y tracción, para $\theta = \frac{\pi}{6}$ y para $\theta = -\frac{\pi}{6}$ respectivamente.

• Indeterminación de la constante C_2 .

Para solucionar la indeterminación de la constante C_2 , es necesario obtener su valor límite en el meridiano de compresión $\theta \rightarrow +\frac{\pi}{6}$, y en el meridiano de tracción $\theta \rightarrow -\frac{\pi}{6}$. Esto es:

$$C_2 = \sqrt{3} + \frac{2\delta}{\sqrt{3}} L \quad (\text{IV.78})$$

siendo:

$$L = \left[\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) - \tan(3\theta) \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$L = \frac{\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \cos(3\theta) - \sin(3\theta) \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)}{\cos(3\theta)}$$

aplicando a L la regla de L'Hospital, y tomando el límite para cuando: $\theta \rightarrow +\frac{\pi}{6}$, y cuando: $\theta \rightarrow -\frac{\pi}{6}$. Resulta

$$L^{\frac{\pi}{6}} = \lim_{\theta \rightarrow +\frac{\pi}{6}} \left[\frac{2}{3} \frac{\cos(3\theta) \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) + \sin(3\theta) \sin(\theta + \frac{2\pi}{3})}{\sin(3\theta)} \right] = \frac{1}{3}$$

$$L^{-\frac{\pi}{6}} = \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \left[\frac{2}{3} \frac{\cos(3\theta) \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) + \sin(3\theta) \sin(\theta + \frac{2\pi}{3})}{\sin(3\theta)} \right] = \frac{2}{3}$$

de donde surgen las expresiones de C_2 para los dos casos particulares de discontinuidad:

$$\text{para: } \theta = +\frac{\pi}{6} \Rightarrow C_2^{+\frac{\pi}{6}} = \lim_{\theta \rightarrow +\frac{\pi}{6}} C_2 = \sqrt{3} + \frac{2\delta}{3\sqrt{3}} \quad (\text{IV.79})$$

$$\text{para: } \theta = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow C_2^{-\frac{\pi}{6}} = \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{6}} C_2 = \sqrt{3} + \frac{4\delta}{3\sqrt{3}}$$

• Indeterminación de la constante C_3 .

Para solucionar la indeterminación de la constante C_3 , es necesario obtener su valor límite en el meridiano de compresión $\theta \rightarrow +\frac{\pi}{6}$, y en el meridiano de tracción $\theta \rightarrow -\frac{\pi}{6}$. Esto es:

$$C_3 = -\frac{\delta}{(J_2)} \frac{\cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}{\cos(3\theta)} \quad (\text{IV.80})$$

aplicando la regla de L'Hospital, y tomando el límite para cuando: $\theta \rightarrow +\frac{\pi}{6}$, y cuando: $\theta \rightarrow -\frac{\pi}{6}$, surgen las expresiones de C_3 para los dos casos particulares de discontinuidad:

$$\begin{aligned} \text{para: } \theta = +\frac{\pi}{6} &\Rightarrow C_3^{+\frac{\pi}{6}} = \lim_{\theta \rightarrow +\frac{\pi}{6}} \left[-\frac{\delta}{(J_2)} \frac{-\sin(\theta + \frac{2\pi}{3})}{3 \sin(3\theta)} \right] = -\frac{\delta}{6 J_2} \\ \text{para: } \theta = -\frac{\pi}{6} &\Rightarrow C_3^{-\frac{\pi}{6}} = \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \left[-\frac{\delta}{(J_2)} \frac{-\sin(\theta + \frac{2\pi}{3})}{3 \sin(3\theta)} \right] = -\frac{\delta}{3 J_2} \end{aligned} \quad (IV.81)$$

IV.8.- GENERALIZACION DEL MODELO DE DAÑO PLÁSTICO PARA PROCESOS CON DEGRADACION DE RIGIDEZ ^[78].

IV.8.a- Consideraciones generales.

Los resultados experimentales muestran que para procesos de carga, mientras el sólido se encuentra en período elástico, se produce a medida que crece la deformación total un cambio en la rigidez secante que se denomina *degradación elástica de la rigidez*. Este cambio de rigidez secante se manifiesta también durante los procesos plásticos, en función del incremento de deformación plástica, sólo que en esta situación *la degradación plástica* viene acompañada de fenómenos de cambio de cohesión, rozamiento interno y dilatancia.

Físicamente la degradación de la rigidez se inicia con el crecimiento y posterior conexión entre micro-fisuras ^{[130][131]} o entre micro-poros existentes en la masa del hormigón. Dentro del contexto de la *mecánica de los medios continuos*, se puede considerar este fenómeno mediante una actualización del tensor de rigidez D_S , en función de la evolución de dos variables internas (escalares o tensoriales): 1) La variable de degradación elástica \hat{d}^e , y 2) La variable de degradación plástica \hat{d}^p . Estas variables tienen una forma similar a la descrita por Simo and Ju ^{[131][131]} y por otros investigadores ^{[46][70]} pero, a diferencia de éstas, en el caso que se presenta no es necesario definir una *superficie de degradación de rigidez* para formular su regla de evolución.

Se supone una regla de evolución de la *variable de degradación elástica*, a través de la siguiente expresión, en función del incremento de deformación total:

$$\dot{d}_i^c = \bar{\Phi}_i \langle \hat{\mathbf{k}}_i^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle \quad (IV.82)$$

donde $\hat{\mathbf{k}}_i^T$ es un vector definido en el espacio de tensiones que proporciona la *dirección de degradación* \dot{d}_i^c , y $\bar{\Phi}_i$ es un escalar positivo.

La variable de *degradación plástica* está asociada a la deformación plástica, y tiene una regla de evolución general de la siguiente forma:

$$\dot{d}_j^p = \dot{\lambda} \hat{H}_j \quad (IV.83)$$

donde $\dot{\lambda}$ es el parámetro de consistencia plástica que interviene en la regla de flujo *ec.(Ap-1.21)*. Haciendo $\hat{H}_j = \hat{\boldsymbol{\zeta}}_j^T \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ en la *ec.(IV.83)*, se tiene una ecuación de evolución del tipo:

$$\dot{d}_j^p = \hat{\boldsymbol{\zeta}}_j^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (IV.84)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\zeta}}_j$, es un vector definido en el espacio de tensiones que da la *dirección de degradación* plástica. Este, al igual que $\hat{\mathbf{k}}_i$ puede obtenerse a través del gradiente de dos funciones definidas respectivamente en el espacio de tensiones principales. *Estas superficies de degradación*, fueron introducidas inicialmente en el espacio de deformaciones principales por Dougill ^{[46][56]} (*cap. 3*) y posteriormente fueron utilizadas en el espacio de tensiones principales, o en ambos espacios a la vez, por distintos investigadores (Bažant and Kim ^{[13][134]}), Han and Chen ^[66], Simo and Ju ^{[130][131]}, Klisinski and Mroz ^[70]. En el modelo que se presenta, estas superficies quedan implícitamente definidas, adoptando formas muy particulares, que serán tratadas en los siguientes apartados.

IV.8.b- Ecuación constitutiva y rigidez tangente para procesos con degradación.

El fenómeno de degradación de rigidez modifica la ecuación constitutiva elasto-plástica tangente presentada para plasticidad con pequeñas deformaciones en el *apart. Ap-I.3.c ec.(Ap-1.53)*. Esta debe ser formulada nuevamente, y para ello se partirá definiendo una *energía potencial libre* (a una temperatura dada) compuesta de una parte elástica y otra plástica ^[79], de la forma:

$$\Psi(\epsilon^e, \mathbf{q}_\alpha, \mathbf{q}_\beta) = \Psi^e(\epsilon^e, \tilde{\mathbf{d}}', \mathbf{q}_\beta) + \Psi^p(\mathbf{q}_\alpha) \tag{IV.85}$$

Donde, $\Psi^p(\mathbf{q}_\alpha)$ es una *función de potencial plástico* y $\Psi^e(\epsilon^e, \tilde{\mathbf{d}}', \mathbf{q}_\beta)$ una *función de energía elástica*, siendo: ϵ^e una *variable libre* del proceso, que representa la deformación elástica en un cierto instante t del proceso cuasi-estático; \mathbf{q}_α las *variables internas plásticas* que siguen una ley de evolución del tipo $\dot{\mathbf{q}}_\alpha = \dot{\lambda} \mathbf{H}_\alpha(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}_\alpha)$, y que incluyen, entre otras, la deformación plástica ϵ^p y la degradación plástica $\tilde{\mathbf{d}}'$; \mathbf{q}_β otras *variables internas* entre las que se encuentra la degradación elástica $\tilde{\mathbf{d}}^e$.

A partir de los principios de la mecánica clásica, se puede escribir la disipación total de energía Ξ mediante la siguiente expresión simplificada de la desigualdad de Clausius-Duhem ^[79] (disipación reducida):

$$\Xi = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\Psi} \geq 0 \tag{IV.86}$$

Esta desigualdad expresa el balance de entropía para un continuo de Cauchy, y es válida para cualquier proceso de carga admisible. Haciendo la derivada temporal de la energía libre *ec.(IV.85)*, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} \right\}^T \dot{\epsilon}^e + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}_\alpha} \right\}^T \dot{\mathbf{q}}_\alpha + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}_\beta} \right\}^T \dot{\mathbf{q}}_\beta \\ \dot{\Psi} &= \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} \right\}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} \right\}^T \dot{\epsilon}^p + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}_\alpha} \right\}^T \dot{\mathbf{q}}_\alpha + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}_\beta} \right\}^T \dot{\mathbf{q}}_\beta \end{aligned}$$

y sustituyendo esta última en la ec.(IV.86), resulta la siguiente expresión para la disipación:

$$\dot{W} = \left[\boldsymbol{\sigma}^T - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \right\}^T \right] \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p} \right\}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}_\alpha} \right\}^T \dot{\mathbf{q}}_\alpha - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}_\beta} \right\}^T \dot{\mathbf{q}}_\beta \geq 0 \quad (IV.87)$$

Para garantizar el cumplimiento de la desigualdad de Clausius-Duhem ec.(IV.87), cualquiera sea el incremento temporal de deformación $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ durante el proceso de carga, y siempre que el proceso de descarga sea elástico no-degradable, debe ocurrir necesariamente que:

$$\left[\boldsymbol{\sigma}^T - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \right\}^T \right] = 0 \quad ; \quad \forall \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (IV.88)$$

de donde se deduce que la tensión vale:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \quad (IV.89)$$

En particular, para un sólido elasto-plástico que exhibe un comportamiento elástico lineal con degradación de rigidez, la *energía libre* ec.(IV.85) puede ser escrita como:

$$\Psi(\boldsymbol{\epsilon}^e, \mathbf{q}_\alpha, \mathbf{q}_\beta) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p)^T \mathbf{D}_s(\tilde{\mathbf{d}}^e, \tilde{\mathbf{d}}^p) (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) + \Psi^p(\mathbf{q}_\alpha) \quad (IV.90)$$

donde $\mathbf{D}_s(\tilde{\mathbf{d}}^e, \tilde{\mathbf{d}}^p)$ es el tensor de rigidez secante, de cuarto orden, que depende de las variables de degradación elástica y plástica.

Sustituyendo la ec.(IV.90) en la ec.(IV.89), queda expresada la ecuación constitutiva para un sólido elasto-plástico, a partir de la rigidez secante:

$$\sigma = D_s(\tilde{d}^e, \tilde{d}^p) (\epsilon - \epsilon^p) \quad (IV.91)$$

resultando de aquí una ley constitutiva incremental, tangente, para un proceso de carga elasto-plástico:

$$\dot{\sigma} = \left[\frac{\partial D_s}{\partial \tilde{d}^e} \dot{\tilde{d}}^e + \frac{\partial D_s}{\partial \tilde{d}^p} \dot{\tilde{d}}^p \right] (\epsilon - \epsilon^p) + D_s (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \quad (IV.92)$$

reagrupando los sumandos, se puede escribir la relación incremental tangente ec.(IV.92) en forma análoga a la ec.(Ap-I.49):

$$\dot{\sigma} = C_T^e(\tilde{d}^e, \tilde{d}^p) \dot{\epsilon} - C_T^p(\tilde{d}^e, \tilde{d}^p) \dot{\epsilon}^p = \dot{\sigma}^e - \dot{\sigma}^p \quad (IV.93)$$

siendo:

$$\dot{\sigma}^e = C_T^e \dot{\epsilon} = D_s \dot{\epsilon} + \frac{\partial D_s}{\partial \tilde{d}^e} \dot{\tilde{d}}^e (\epsilon - \epsilon^p) = D_s \dot{\epsilon} + \left[\sum_i \frac{\partial D_s}{\partial \tilde{d}_i^e} \dot{\tilde{d}}_i^e \right] D_s^{-1} \sigma \quad (IV.94)$$

donde $\dot{\sigma}^e$ es el *incremento de tensión elástico degradado*, que es igual al *incremento de tensión total* más el *incremento de tensión provocado por la degradación elástica*; y siendo:

$$\dot{\sigma}^p = C_T^p \dot{\epsilon}^p = D_s \dot{\epsilon}^p - \frac{\partial D_s}{\partial \tilde{d}^p} \dot{\tilde{d}}^p (\epsilon - \epsilon^p) = D_s \dot{\epsilon}^p - \left[\sum_j \frac{\partial D_s}{\partial \tilde{d}_j^p} \dot{\tilde{d}}_j^p \right] D_s^{-1} \sigma \quad (IV.95)$$

donde $\dot{\sigma}^p$ es el *incremento de tensión plástico degradado*, que es igual al *incremento de tensión plástico total* más el *incremento de tensión provocado por la degradación plástica*.

Conviene observar, que para un proceso de carga sin degradación elástica ni plástica $C_T^n \equiv C_T^p \equiv D_S = cte.$, la ec.(IV.93) se reduce al caso simple formulado en la ec.(Ap-I.49).

Al igual que en plasticidad clásica (apart. Ap-I.3.c), para expresar la ecuación constitutiva elasto-plástica tangente, es necesario partir de la condición de consistencia plástica de Prager (apart. Ap-I.3.d); esto es:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, c) = f(\boldsymbol{\sigma}) - c = 0 \quad , \quad (IV.96,a)$$

$$\dot{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, c, \dot{c}) = \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, c)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, c)}{\partial c} \dot{c} = 0 \quad (IV.96,b)$$

Sustituyendo la ec.(IV.96,a) en la ec.(IV.96,b), se tiene:

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = - \dot{c} \quad (IV.97)$$

y sustituyendo en esta última la ec.(IV.19), resulta:

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \dot{\kappa}^p = h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \left(\mathbf{h}_c^T(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \right) \quad (IV.98)$$

y sustituyendo a su vez en esta última, el incremento de deformación plástica $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ por la expresión de su regla de evolución ec.(IV.3), se tiene:

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} h_c \left(\mathbf{h}_c^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \quad , \quad (IV.99)$$

donde el incremento temporal de tensión, durante un proceso de carga plástica, queda definido por la ec.(IV.93). Así, la ec.(IV.99) resulta:

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T C_T^n \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\lambda} \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T C_T^p \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} h_c \left(\mathbf{h}_c^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \quad (IV.100)$$

agrupando términos se obtiene el *parámetro de consistencia plástica*; esto es:

$$\dot{\lambda} \left\{ \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{C}_T^v \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] + \left[h_c \left(\mathbf{h}_n^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right] \right\} = \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{C}_T^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{C}_T^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\left[h_c \left(\mathbf{h}_n^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right] + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{C}_T^v \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]} \quad ; \text{con : } \dot{\lambda} \geq 0 \quad (\text{IV.101})$$

y sustituyendo esta última en la ec.(IV.93), resulta la siguiente relación incremental de tensión-deformación:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_T^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\left[\mathbf{C}_T^v \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \right] \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{C}_T^e \right]}{\left[h_c \left(\mathbf{h}_n^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right] + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{C}_T^v \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{IV.102})$$

Pudiéndose escribir finalmente, a partir de esta última, la *ley constitutiva incremental tangente* para un proceso elasto-plástico no-asociado con degradación de rigidez elástica y plástica, como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_T^{ep}(\tilde{\mathbf{d}}^e, \tilde{\mathbf{d}}^p) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{IV.103})$$

siendo \mathbf{C}_T^{ep} el *tensor de rigidez elasto-plástico tangente del material*, que contempla los fenómenos de degradación elástica y plástica a la vez.

$$\mathbf{C}_T^{ep} = \mathbf{C}_T^e - \frac{\left[\mathbf{C}_T^v \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \right] \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{C}_T^e \right]}{\left[h_c \left(\mathbf{h}_n^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right] + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{C}_T^v \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]} \quad (\text{IV.104})$$

La rigidez tangente *ec.(IV.104)* será simétrica, si C_T^e es simétrica y si $C_T^p \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\}$ es proporcional a $C_T^e \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}$. Se demostrará (en el *apart. IV.8.f*),

que esta proporcionalidad es una forma más general de definir la regla de flujo asociada para procesos con degradación elástica y plástica.

A continuación, se presentan dos formas particulares para formular la degradación de rigidez elástica para obtener C_T^e , y una para formular la degradación de rigidez plástica para obtener C_T^p .

IV.8.c- Degradación elástica simple.

La hipótesis más simple para considerar la degradación de rigidez que ocurre durante un proceso de carga elástico, ha sido introducida por Kachanov ^[130] y se basa en utilizar una única *variable de degradación elástica* \hat{d}^e , de la que se obtiene el *factor de reducción* de rigidez secante $(1 - \hat{d}^e)$. De acuerdo a esto, la rigidez secante degradada resulta:

$$D_s(\hat{d}^e) = (1 - \hat{d}^e) D^0 \quad (IV.105)$$

donde D^0 es el tensor de rigidez inicial, $D_s(\hat{d}^e)$ es el tensor de rigidez secante que depende de la variable de degradación elástica \hat{d}^e . Esta variable vale $\hat{d}^e = 0$ para un material en su estado inicial no degradado, y $\hat{d}^e = 1$ para un material totalmente degradado. El sentido físico de esta variable está dado por el concepto de *área nominal degradada*, que es la relación que hay entre el área degradada y el área total de una determinada zona del sólido.

Distintos investigadores ^{[1][29][33][34][42][44][74][136]}, coinciden en que durante un proceso de carga uniaxial, de compresión o tracción, existe un comportamiento inicial elástico-degradable con módulo de Poisson constante hasta alcanzar el 75–80% de la tensión pico de compresión σ_C^{pic} o tracción σ_T^{pic} , respectivamente (*cap. 2*) (este límite puede tomarse para fijar la posición de la *superficie de discontinuidad inicial*). La *ec.(IV.105)* permite cumplir con este requisito hipotético. Así mismo, se admite que a partir de este límite se produce un

incremento del módulo de Poisson, acompañado de un proceso de micro-fisuración que colabora en producir mayor degradación (degradación plástica (*apart. IV.8.d*)). En este caso, la *ec.(IV.103)*, provee una relación tensión-deformación que cumple con toda esta hipótesis de comportamiento.

Para estudiar el caso particular de degradación elástica de Kachanov, es necesario sustituir el *tensor de rigidez secante ec.(IV.105)* en la *ec.(IV.94)* que da el *incremento de tensión elástico degradado* y en la que resulte de éstas, sustituir la *regla de evolución de la variable de degradación elástica ec.(IV.82)*, resultando de aquí :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^e &= C_T^e \dot{\epsilon} = D_S(\hat{d}^e) \dot{\epsilon} - \left[D^0 \hat{\Phi} \langle \hat{k}^T \dot{\epsilon} \rangle \right] D_S^{-1}(\hat{d}^e) \sigma \\ \dot{\sigma}^e &= C_T^e \dot{\epsilon} = D_S(\hat{d}^e) \dot{\epsilon} - \left[D^0 \hat{\Phi} \langle \hat{k}^T \dot{\epsilon} \rangle \right] \frac{(D^0)^{-1}}{(1 - \hat{d}^e)} \sigma \\ \dot{\sigma}^e &= C_T^e \dot{\epsilon} = D_S(\hat{d}^e) \dot{\epsilon} - \frac{\hat{\Phi}}{(1 - \hat{d}^e)} \langle \hat{k}^T \dot{\epsilon} \rangle \sigma \end{aligned} \tag{IV.106}$$

donde C_T^e es simétrica, sí y sólo sí \hat{k} es proporcional o igual a σ (esta es una forma de definir la dirección de la degradación elástica, en la que la degradación de rigidez en un proceso elástico está asociada al *incremento total de trabajo de deformación* * *ec.(Ap-1.23)*).

Si se considera que $\hat{\Phi}$ se mantiene constante durante todo el proceso de carga, y además que $\hat{k}^T \dot{\epsilon} \equiv \sigma^T \dot{\epsilon}$, la *ec.(IV.106)* quedaría formulada como sigue:

* Nota: Para el rango de comportamiento elástico degradado, el "incremento total de trabajo de deformación" vale: $\sigma^T \dot{\epsilon} = (1 - \hat{d}^e) \dot{w}^0$, donde $2 w^0 = \epsilon^T D^0 \epsilon$ es el cuadrado de la norma de energía de deformación para un punto no dañado ⁽¹³³⁾.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^e = \mathbf{C}_T^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{D}_s(\hat{d}^e) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\dot{\hat{\Phi}}}{(1 - \hat{d}^e)} (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (IV.107)$$

Resultando de aquí el tensor de rigidez degradado elásticamente:

$$\mathbf{C}_T^e(\hat{d}^e) = \mathbf{D}_s(\hat{d}^e) - \frac{\dot{\hat{\Phi}}}{(1 - \hat{d}^e)} (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T) \quad (IV.108)$$

• En las ecuaciones antes mencionadas, el *factor de reducción* $(1 - \hat{d}^e)$ puede estar formulado a través de cualquier regla de evolución del tipo de la ec.(IV.82) que, dependiendo del proceso mismo, produzca la degradación deseada. Aquí se ha hecho la hipótesis de relacionar este factor con el *trabajo de deformación elástica*, resultando la siguiente función de degradación propuesta:

$$(1 - \hat{d}^e) = (1 - \hat{\Phi} w^e) \quad (IV.109)$$

donde $\dot{w}^e = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$ es el incremento temporal de *energía específica elástica*. Sustituyendo la ec.(IV.109) en la ec.(IV.108), se puede expresar la tensión total como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_s(\hat{d}^e) \boldsymbol{\epsilon}^e = \mathbf{D}^0 (1 - \hat{\Phi} w^e) \boldsymbol{\epsilon}^e \quad (IV.110)$$

y el incremento de *energía específica elástica* será :

$$\dot{w}^e = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e = \boldsymbol{\epsilon}^{eT} \mathbf{D}^0 (1 - \hat{\Phi} w^e) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \quad (IV.111)$$

de donde surge el *factor de reducción* buscado:

$$\begin{aligned}
\int_{t=0}^t \frac{\dot{w}^e}{(1 - \hat{\Phi} w^e)} dt &= \int_{t=0}^t \boldsymbol{\epsilon}^e{}^T \mathbf{D}^0 \boldsymbol{\epsilon}^e dt \\
- \frac{1}{\hat{\Phi}} \ln(1 - \hat{\Phi} w^e) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^e{}^T \mathbf{D}^0 \boldsymbol{\epsilon}^e \\
(1 - \hat{d}^e) &= (1 - \hat{\Phi} w^e) = e^{- (\hat{\Phi} \boldsymbol{\epsilon}_D^e{}^T \mathbf{D}_{(D)}^0 \boldsymbol{\epsilon}_D^e) / 2} \quad (IV.112)
\end{aligned}$$

A partir de ésta, se puede escribir la energía específica de la siguiente forma:

$$w^e = \frac{1}{\hat{\Phi}} \left(1 - e^{- (\hat{\Phi} \boldsymbol{\epsilon}_D^e{}^T \mathbf{D}_{(D)}^0 \boldsymbol{\epsilon}_D^e) / 2} \right) \quad (IV.113)$$

y de aquí la tensión valdrá :

$$\frac{dw^e}{d\boldsymbol{\epsilon}^e} = \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^0 e^{- (\hat{\Phi} \boldsymbol{\epsilon}_D^e{}^T \mathbf{D}_{(D)}^0 \boldsymbol{\epsilon}_D^e) / 2} \boldsymbol{\epsilon}^e \quad (IV.114)$$

por lo tanto, el tensor de rigidez secante resulta:

$$\mathbf{D}_s(\hat{d}^e) = (1 - \hat{d}^e) \mathbf{D}^0 = \mathbf{D}^0 e^{- (\hat{\Phi} \boldsymbol{\epsilon}_D^e{}^T \mathbf{D}_{(D)}^0 \boldsymbol{\epsilon}_D^e) / 2} \quad (IV.115)$$

Sustituyendo las ecs.(IV.112), (IV.114), y (IV.115) en la ec.(IV.108) resulta el tensor de rigidez degradado elásticamente, esto es:

$$G_T(\hat{d}^c) = D^0 e^{- (\hat{\Phi} \epsilon_{ij}^c D_{ij}^0 \epsilon_{ij}^c)/2} - \hat{\Phi} \left(\epsilon^{cT} D^0 \epsilon^c \right) D^0 e^{- (\hat{\Phi} \epsilon_{ij}^c D_{ij}^0 \epsilon_{ij}^c)/2} \quad (IV.116)$$

$$G_T(\hat{d}^c) = D^0 \left[1 - \hat{\Phi} \left(\epsilon^{cT} D^0 \epsilon^c \right) \right] e^{- (\hat{\Phi} \epsilon_{ij}^c D_{ij}^0 \epsilon_{ij}^c)/2}$$

En éstas sólo queda por determinar la magnitud del escalar $\hat{\Phi}$, que será considerado como una constante.

• La determinación de la constante $\hat{\Phi}$, surge de estudios llevados a cabo sobre ensayos unidimensionales. Aplicando la ec.(IV.115) a un problema uniaxial, resulta:

$$E_s = E^0 e^{- (\hat{\Phi} E^0 (\epsilon^c)^2)/2} \quad (IV.117)$$

donde E^0 es el módulo de elasticidad inicial (módulo de Young) y E_s es el módulo secante para un cierto instante t del proceso cuasi-estático. Determinando este último módulo para una cierta deformación ϵ_1^c , se puede obtener de la ec.(IV.117) la magnitud de $\hat{\Phi}$ fig.(IV.15). Esto es:

$$\begin{aligned} E_s = E^1 &= E^0 e^{- (\hat{\Phi} E^0 (\epsilon_1^c)^2)/2} \rightarrow \frac{E^1}{E^0} = e^{- (\hat{\Phi} E^0 (\epsilon_1^c)^2)/2} \\ \ln \frac{E^1}{E^0} &= - \frac{\hat{\Phi}}{2} E^0 (\epsilon_1^c)^2 \\ \hat{\Phi} &= - \frac{2}{E^0 (\epsilon_1^c)^2} \ln \frac{E^1}{E^0} \quad (IV.118) \end{aligned}$$

donde E^1 es el módulo de elasticidad secante, correspondiente al punto donde concluye el período elástico fig.(IV.15).

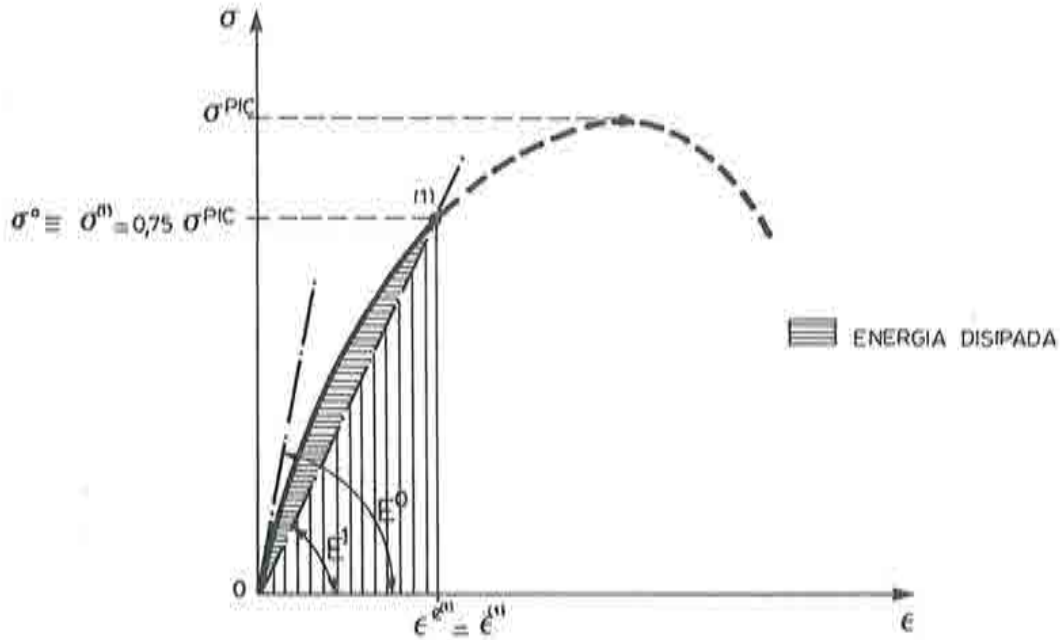


fig.(IV.15): Curva uniaxial de tensión deformación con un período elástico no-lineal.

La energía disipada durante un proceso elástico con degradación de rigidez, será :

$$w^d = \frac{1}{\Phi} \left(1 - e^{-\frac{\Phi \epsilon_{ij}^e D_{ijkl}^0 \epsilon_{kl}^e}{2}} \right) - \frac{1}{2} \epsilon^e T D^0 \epsilon^e \quad (IV.119)$$

IV.8.d- Degradación elástica diferenciada.

Algunos investigadores ^{[29][33]}, sostienen que la degradación propuesta por Kachanov es insuficiente para representar el comportamiento elástico del hormigón, siendo necesario recurrir a diferentes grados de degradación para el *módulo volumétrico secante* K_S^D , y para el *módulo de corte secante* G_S^D . Este tipo de degradación selectiva, se debe a la diferencia que hay entre las curvas volumétricas $\sigma_{oct} - \epsilon_{oct}$, y la distorsional $\tau_{oct} - \gamma_{oct}$ fig.(IV.16).

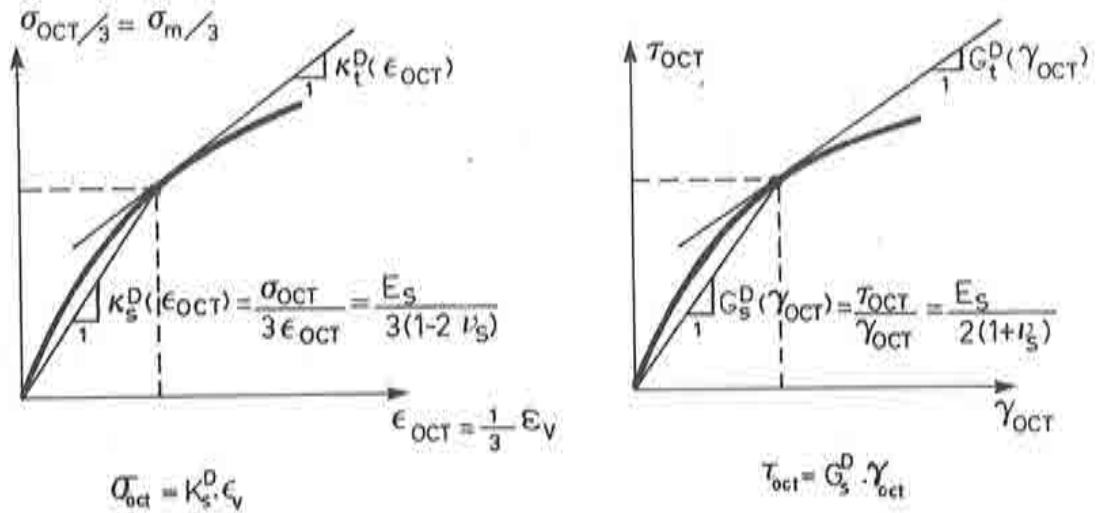


fig.(IV.16): Curva uniaxial de: a) Tensión-deformación octaédrica normal, b) Tensión-deformación octaédrica de corte.

Del mismo modo que para la *degradación simple*, la *degradación diferenciada* puede presentarse como un caso general de la de Kachanov ec.(IV.105). Esto es:

$$K_s^D(\hat{d}_K^c) = (1 - \hat{d}_K^c) K^0$$

$$G_s^D(\hat{d}_G^c) = (1 - \hat{d}_G^c) G^0$$

(IV.120)

resultando el tensor de rigidez física secante, para un sólido isótropo, de la contribución de una parte volumétrica y otra de corte. Esto es, escrito en la forma de matriz de 6×6 :

$$D_s(\hat{\mathbf{d}}^e) = K_s^D \mathbf{1} \mathbf{1}^T + G_s^D U \mathbf{dev} \tag{IV.121}$$

$$D_s(\hat{\mathbf{d}}^e) = (1 - \hat{d}_K^e) K^0 \mathbf{1} \mathbf{1}^T + (1 - \hat{d}_G^e) G^0 U \mathbf{dev}$$

$$D_s(\hat{\mathbf{d}}^e) = \begin{bmatrix} D_s^I & D_s^{II} & D_s^{II} & 0 & 0 & 0 \\ & D_s^I & D_s^{II} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_s^I & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_s^D & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & & G_s^D & 0 \\ & & & & & G_s^D \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} D_s^I &= K_s^D + \frac{4}{3} G_s^D \\ D_s^{II} &= K_s^D - \frac{2}{3} G_s^D \end{aligned}$$

y su inversa resulta:

$$D_s^{-1}(\hat{\mathbf{d}}^e) = \frac{1}{9K_s^D} \mathbf{1} \mathbf{1}^T + \frac{1}{G_s^D} U^{-1} \mathbf{dev} \tag{IV.122}$$

$$D_s^{-1}(\hat{\mathbf{d}}^e) = \frac{1}{9(1 - \hat{d}_K^e)K^0} \mathbf{1} \mathbf{1}^T + \frac{1}{(1 - \hat{d}_G^e)G^0} U^{-1} \mathbf{dev}$$

donde $\mathbf{1} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^T$ es un vector unidad, $\mathbf{dev} = \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \mathbf{1}^T$ es el operador desviador, \mathbf{I} es la matriz identidad, y:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

Para estudiar el caso particular de degradación elástica diferenciada, es necesario sustituir el tensor de rigidez secante ec.(IV.121) y su inversa ec.(IV.122)

en la ec.(IV.94) que da el incremento de tensión elástico degradado, y en la expresión que resulte de éstas, sustituir las reglas de evolución de las variables

de degradación elástica ec.(IV.82): $\dot{d}_K^e = \hat{\Phi}_K \langle \hat{\mathbf{k}}_K^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle$, y $\dot{d}_G^e = \hat{\Phi}_G \langle \hat{\mathbf{k}}_G^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle$, resultando de aquí :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^e = \mathbf{C}_T^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{D}_S(\hat{\mathbf{d}}^e) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \left[\frac{\partial \mathbf{D}_S(\hat{\mathbf{d}}^e)}{\partial \hat{d}_K^e} \dot{d}_K^e + \frac{\partial \mathbf{D}_S(\hat{\mathbf{d}}^e)}{\partial \hat{d}_G^e} \dot{d}_G^e \right] \mathbf{D}_S^{-1}(\hat{\mathbf{d}}^e) \boldsymbol{\sigma}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^e = \mathbf{C}_T^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{D}_S(\hat{\mathbf{d}}^e) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} +$$

$$+ \left[(-K^0 \mathbf{1} \mathbf{1}^T) \left(\hat{\Phi}_K \langle \hat{\mathbf{k}}_K^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle \right) + (-G^0 \mathbf{U} \mathit{dev}) \left(\hat{\Phi}_G \langle \hat{\mathbf{k}}_G^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle \right) \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{1}{9(1 - \hat{d}_K^e) K^0} \mathbf{1} \mathbf{1}^T + \frac{1}{(1 - \hat{d}_G^e) G^0} \mathbf{U}^{-1} \mathit{dev} \right] \boldsymbol{\sigma}$$

(IV.123)

operando algebraicamente con ésta, y teniendo en cuenta que: $\mathit{dev} \mathbf{1} \mathbf{1}^T = 0$; $\mathbf{U} \mathit{dev} \mathbf{U}^{-1} \mathit{dev} = \mathit{dev} \mathit{dev} = \mathit{dev}$; $\boldsymbol{\epsilon} = \mathit{dev} \boldsymbol{\epsilon}$; $(\mathbf{1} \mathbf{1}^T) (\mathbf{1} \mathbf{1}^T) = 3 (\mathbf{1} \mathbf{1}^T)$; $\boldsymbol{\sigma}_{oct} = \frac{1}{3} \mathbf{1}^T \boldsymbol{\sigma}$; $\boldsymbol{s} = \mathit{dev} \boldsymbol{\sigma}$; la ec.(IV.123) resulta:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^e = \mathbf{C}_T^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{D}_S(\hat{\mathbf{d}}^e) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\hat{\Phi}_K}{(1 - \hat{d}_K^e)} \langle \hat{\mathbf{k}}_K^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle \boldsymbol{\sigma}_{oct} \mathbf{1} - \frac{\hat{\Phi}_G}{(1 - \hat{d}_G^e)} \langle \hat{\mathbf{k}}_G^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle \boldsymbol{s}$$

(IV.124)

donde \mathbf{C}_T^e será simétrica durante todo el proceso de degradación elástica, si y sólo si $\hat{\mathbf{k}}_K = \boldsymbol{\sigma}_{oct} \mathbf{1}$ y $\hat{\mathbf{k}}_G = \boldsymbol{s}$ *. En otras palabras, la degradación de

* Nota: Estas dos formas de definir las direcciones de degradación elástica, contienen implícitamente "dos funciones de degradación": una para la parte volumétrica y otra para la parte de corte.

rigidez volumétrica y distorsional están asociadas al incremento de trabajo de deformación volumétrico y distorsional, respectivamente.

Si se considera que $\hat{\Phi}_K$ y $\hat{\Phi}_G$ son constantes durante el proceso de carga, y además que: $\hat{\mathbf{h}}_K^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \sigma_{oct} \mathbf{1}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ y que: $\hat{\mathbf{h}}_G^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{s}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, se tiene que la ec.(IV.124) quedaría formulada como sigue:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^e = \mathbf{C}_T^n \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{D}_s(\hat{\mathbf{d}}^e) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\hat{\Phi}_K}{(1 - \hat{d}_K^e)} (\sigma_{oct} \mathbf{1}) (\mathbf{1}^T \sigma_{oct}) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\hat{\Phi}_G}{(1 - \hat{d}_G^e)} \mathbf{s} \mathbf{s}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (IV.125)$$

Se puede deducir inmediatamente, que la anterior se cumple cualquiera sea el $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ impuesto, resultando así el tensor de rigidez degradado elásticamente:

$$\mathbf{C}_T^n = \mathbf{D}_s(\hat{\mathbf{d}}^e) - \frac{\hat{\Phi}_K}{(1 - \hat{d}_K^e)} (\sigma_{oct} \mathbf{1}) (\mathbf{1}^T \sigma_{oct}) - \frac{\hat{\Phi}_G}{(1 - \hat{d}_G^e)} \mathbf{s} \mathbf{s}^T \quad (IV.126)$$

donde:

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} \mathbf{1}^T \boldsymbol{\sigma} = K_s^D(\hat{d}_K^e) \epsilon_v = (1 - \hat{d}_K^e) K^0 \epsilon_v$$

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{\mathbf{s}^T \boldsymbol{\sigma}}{3}} = G_s^D(\hat{d}_G^e) \gamma_{oct} = (1 - \hat{d}_G^e) G^0 \gamma_{oct}$$

$$\epsilon_v = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\epsilon}$$

$$\frac{\gamma_{oct}}{2} = \sqrt{\frac{\mathbf{e}^T \boldsymbol{\epsilon}}{3}}$$

• En las ecuaciones antes mencionadas, los dos *factores de reducción* $(1 - \hat{d}_K^e)$ y $(1 - \hat{d}_G^e)$, pueden estar directamente relacionados con el *trabajo elástico de deformación volumétrica* y con el *trabajo elástico de deformación distorsional*, respectivamente. A continuación se propondrá una regla de evolución, para cada una de estas dos variables internas de degradación elástica, que cumpla con la ley general presentada en la ec.(IV.82).

Factor de reducción volumétrico: Se propone la siguiente función de degradación del módulo volumétrico:

$$(1 - \hat{d}_K^e) = (1 - \hat{\Phi}_K w_K^e) \quad (IV.127)$$

donde $\dot{w}_K^e = \sigma_{oct} \dot{\epsilon}_v^e$ es el incremento temporal de *energía específica elástica volumétrica*. Sustituyendo la ec.(IV.127) en la ec.(IV.120), se puede expresar la tensión normal octaédrica como:

$$\sigma_{oct} = K_s^D (\hat{d}_K^e) \epsilon_v^e = K^0 (1 - \hat{\Phi}_K w_K^e) \epsilon_v^e \quad (IV.128)$$

y el incremento de *energía específica elástica volumétrica* será :

$$\dot{w}_K^e = \sigma_{oct} \dot{\epsilon}_v^e = K^0 (1 - \hat{\Phi}_K w_K^e) \epsilon_v^e \dot{\epsilon}_v^e \quad (IV.129)$$

de donde surge el *factor de reducción* buscado:

$$\int_{t=0}^t \frac{\dot{w}_K^e}{(1 - \hat{\Phi}_K w_K^e)} dt = \int_{t=0}^t K^0 \epsilon_v^e \dot{\epsilon}_v^e dt$$

$$-\frac{1}{\hat{\Phi}_K} \ln(1 - \hat{\Phi}_K w_K^e) = \frac{1}{2} K^0 \epsilon_v^e{}^2$$

$$\left(1 - \hat{d}_K^e\right) = (1 - \hat{\Phi}_K w_K^e) = e^{- (\hat{\Phi}_K K^0 \epsilon_v^e{}^2)/2} \quad (IV.130)$$

a partir de ésta, se puede escribir la energía específica volumétrica, de la siguiente forma:

$$w_K^e = \frac{1}{\hat{\Phi}_K} \left(1 - e^{- (\hat{\Phi}_K K^0 \epsilon_v^e{}^2)/2}\right) \quad (IV.131)$$

y de aquí la tensión normal octaédrica valdrá :

$$\frac{dw_K^e}{d\epsilon_v^e} = \sigma_{oct} = K^0 e^{- (\hat{\Phi}_K K^0 \epsilon_v^e{}^2)/2} \epsilon_v^e \quad (IV.132)$$

donde:

$$K_S^D(\hat{d}_K^e) = (1 - \hat{d}_K^e)K^0 = K^0 e^{- (\hat{\Phi}_K K^0 \epsilon_v^e{}^2)/2} \quad (IV.133)$$

Factor de reducción distorsional: Se propone la siguiente función de degradación del módulo distorsional:

$$\left(1 - \hat{d}_G^e\right) = \left(1 - 3\hat{\Phi}_G w_G^e\right) \quad (IV.134)$$

donde $\dot{w}_G^e = \tau_{oct} \dot{\gamma}_{oct}^e$ es el incremento temporal de *energía específica elástica distorsional*. Sustituyendo la ec.(IV.134) en la ec.(IV.120), se puede expresar la tensión cortante octaédrica como:

$$\tau_{oct} = G_s^D(\hat{d}_G^e) \gamma_{oct}^e = G^0 \left(1 - 3\hat{\Phi}_G w_G^e\right) \gamma_{oct}^e \quad (IV.135)$$

y el incremento de *energía específica elástica distorsional* será :

$$\dot{w}_G^e = \tau_{oct} \dot{\gamma}_{oct}^e = G^0 \left(1 - 3\hat{\Phi}_G w_G^e\right) \gamma_{oct}^e \dot{\gamma}_{oct}^e \quad (IV.136)$$

de donde surge el *factor de reducción* buscado:

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^t \frac{\dot{w}_G^e}{(1 - 3\hat{\Phi}_G w_G^e)} dt &= \int_{t=0}^t G^0 \gamma_{oct}^e \dot{\gamma}_{oct}^e dt \\ &= \frac{1}{3\hat{\Phi}_G} \ln(1 - 3\hat{\Phi}_G w_G^e) = \frac{1}{2} G^0 \gamma_{oct}^e{}^2 \\ \left(1 - \hat{d}_G^e\right) &= (1 - 3\hat{\Phi}_G w_G^e) = e^{- (3\hat{\Phi}_G G^0 \gamma_{oct}^e{}^2)/2} \end{aligned} \quad (IV.137)$$

a partir de ésta, se puede escribir la *energía específica distorsional*, de la siguiente forma:

$$w_G^e = \frac{1}{3\hat{\Phi}_G} \left(1 - e^{- (3\hat{\Phi}_G G^0 \gamma_{oct}^e{}^2)/2}\right) \quad (IV.138)$$

y de aquí la *tensión cortante octaédrica* valdrá :

$$\frac{dw_G^e}{d\gamma_{oct}^e} = \tau_{oct} = G^0 e^{- (3\hat{\Phi}_G G^0 \gamma_{oct}^e{}^2)/2} \gamma_{oct}^e \quad (IV.139)$$

y por lo tanto:

$$\mathbf{s} = \frac{2 \tau_{oct}}{\gamma_{oct}^e} \mathbf{e}^e = 2 G^0 e^{- (3\hat{\Phi}_G G^0 \gamma_{oct}^{e^2})/2} \mathbf{e}^e \quad (IV.140)$$

donde:

$$G_s^D(\hat{d}_G^e) = (1 - \hat{d}_G^e) G^0 = G^0 e^{- (3\hat{\Phi}_G G^0 \gamma_{oct}^{e^2})/2} \quad (IV.141)$$

Sustituyendo los factores de reducción volumétrico y distorsional *ecs.(IV.130) y (IV.137)*, y las tensiones octaédrica *ec.(IV.132)* y desviadora *ec.(IV.140)* en la *ec.(IV.126)*, resulta la expresión del el tensor de rigidez degradado elásticamente en forma diferenciada, esto es:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_T^e(\hat{\mathbf{d}}^e) &= \mathbf{D}_s(\hat{\mathbf{d}}^e) - (1 - \hat{d}_K^e) \hat{\Phi}_K (K^0)^2 (\epsilon_v^e)^3 (\mathbf{1} \mathbf{1}^T) - \\ &\quad - (1 - \hat{d}_G^e) \hat{\Phi}_G (2G^0)^2 \mathbf{e}^e \mathbf{e}^{eT} \\ \mathbf{C}_T^e(\hat{\mathbf{d}}^e) &= \mathbf{D}_s(\hat{\mathbf{d}}^e) - e^{- (\hat{\Phi}_K K^0 \epsilon_v^{e^2})/2} \hat{\Phi}_K (K^0)^2 (\epsilon_v^e) (\mathbf{1} \mathbf{1}^T) - \\ &\quad - e^{- (3\hat{\Phi}_G G^0 \gamma_{oct}^{e^2})/2} \hat{\Phi}_G (2G^0)^2 \mathbf{e}^e \mathbf{e}^{eT} \end{aligned} \quad (IV.142)$$

sustituyendo en ésta la *ec.(IV.121)*, y operando algebraicamente resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_T^e(\hat{\mathbf{d}}^e) &= K^0 (\mathbf{1} \mathbf{1}^T) \left[1 - \hat{\Phi}_K (K^0) (\epsilon_v^e)^2 \right] e^{- (\hat{\Phi}_K K^0 \epsilon_v^{e^2})/2} + \\ &\quad + G^0 \left[\mathbf{U} dev - \hat{\Phi}_G 4G^0 \mathbf{e}^e \mathbf{e}^{eT} \right] e^{- (3\hat{\Phi}_G G^0 \gamma_{oct}^{e^2})/2} \end{aligned} \quad (IV.143)$$

- La determinación de las constantes $\hat{\Phi}_K$ y $\hat{\Phi}_G$, surgen de considerar el valor que toman los módulos $K_s^D(\hat{d}_K^e)$ y $G_s^D(\hat{d}_G^e)$ cuando se alcanza el límite de elasticidad, durante ensayos uniaxiales. Así, a partir de la *ec.(IV.133)* se tiene:

$$K_S^D(\hat{d}_K^e) = (1 - \hat{d}_K^e)K^0 = K^0 e^{- (\hat{\Phi}_K K^0 \epsilon_v^{*2})/3} \quad (IV.144)$$

tal que en el límite elástico, cuando $\epsilon^e = (\epsilon^e)_1$, se tiene:

$$\hat{\Phi}_K = \frac{2}{K^0(\epsilon_v^e)_1^2} \ln \frac{(K_S^D)_1}{K^0} \quad (IV.145)$$

siendo $(K_S^D)_1$ el módulo volumétrico secante en límite elástico, y $(\epsilon_v^e)_1$ la deformación volumétrica en el límite de elasticidad. La relación $\frac{(K_S^D)_1}{K^0} \simeq \frac{3}{4}$ en el momento en que se inicia el crecimiento del módulo de Poisson ^[33] (Límite convencional de inicio de la plasticidad, admitido por el modelo).

A partir de la ec.(IV.141) se tiene:

$$G_S^D(\hat{d}_G^e) = (1 - \hat{d}_G^e)G^0 = G^0 e^{- (3\hat{\Phi}_G G^0 \gamma_{oct}^{*2})/2} \quad (IV.146)$$

tal que en el límite elástico, cuando $\epsilon^e = (\epsilon^e)_1$, se tiene:

$$\hat{\Phi}_G = \frac{2}{3G^0(\gamma_{oct}^e)_1^2} \ln \frac{(G_S^D)_1}{G^0} \quad (IV.147)$$

siendo $(G_S^D)_1$ el módulo distorsional secante al límite de elasticidad, y $(\gamma_{oct}^e)_1$ la distorsión octaédrica en el límite de elasticidad. La relación $\frac{(G_S^D)_1}{G^0} \simeq \frac{1}{2}$ en el momento en que se inicia el crecimiento del módulo de Poisson ^[33] (Límite convencional de inicio de la plasticidad, admitido por el modelo)

A partir del ajuste de las constantes $\hat{\Phi}_K$ y $\hat{\Phi}_G$, las ecs.(IV.133) y (IV.139) permiten obtener buenos resultados de comportamiento elástico degradado (cap. 5). Como alternativa al uso de las ec.(IV.120), existen expresiones empíricas que permiten considerar la degradación de los módulos volumétrico y distorsional ^{[20][33]}.

• Por último, para un sólido isótropo y como una alternativa desde un punto de vista operativo, es conveniente presentar el tensor de rigidez secante degradado elásticamente $D_S(\hat{\mathbf{d}}^e)$ ec.(IV.121) como:

$$D_S(\hat{\mathbf{d}}^e) = D_S(E_S(\hat{\mathbf{d}}^e), \nu_S(\hat{\mathbf{d}}^e)) \quad (IV.148)$$

siendo:

$$E_S(\hat{\mathbf{d}}^e) = \frac{9 K_S^D(\hat{d}_K^e) G_S^D(\hat{d}_G^e)}{3 K_S^D(\hat{d}_K^e) + G_S^D(\hat{d}_G^e)} \quad (IV.149,a)$$

$$\nu_S(\hat{\mathbf{d}}^e) = \frac{3 K_S^D(\hat{d}_K^e) - 2 G_S^D(\hat{d}_G^e)}{2 (3 K_S^D(\hat{d}_K^e) + G_S^D(\hat{d}_G^e))} \quad (IV.149,b)$$

$$K_S^D(\hat{d}_K^e) = (1 - \hat{d}_K^e) K^0 = K^0 e^{- (\hat{\Phi}_K K^0 \epsilon_p^2)/2} \quad (IV.149,c)$$

$$G_S^D(\hat{d}_G^e) = (1 - \hat{d}_G^e) G^0 = G^0 e^{- (3\hat{\Phi}_G G^0 \gamma_{\text{pl}}^2)/2} \quad (IV.149,d)$$

$$K^0 = \frac{E_0}{3 (1 - 2\nu_0)} \quad (IV.149,e)$$

$$G^0 = \frac{E_0}{2 (1 + \nu_0)} \quad (IV.149,f)$$

IV.8.e- Degradación plástica.

En este apartado se presenta un modelo simple para tratar el fenómeno de degradación de rigidez que ocurre en el hormigón por efecto de la deformación plástica. Se basa en admitir como hipótesis, que este fenómeno de *degradación plástica* se desarrolla a partir del momento en que se inicia el ablandamiento del material (pérdida de cohesión), situación que coincide con el inicio del período de *macro-fisuración* (límite convencional adoptado por distintos investigadores

[46][123][133]). Así, se formula la rigidez secante en un punto del sólido, en función de la evolución de la cohesión en dicho punto, situación que se confirma con resultados experimentales que muestran claramente que cerca y más allá del pico de tensiones, existe una pérdida de cementación intergranular que se evidencia también como un fenómeno de degradación de la rigidez [46][56]. Este comportamiento se pone de manifiesto cuando se aplican cargas cíclicas fig.(IV.17).

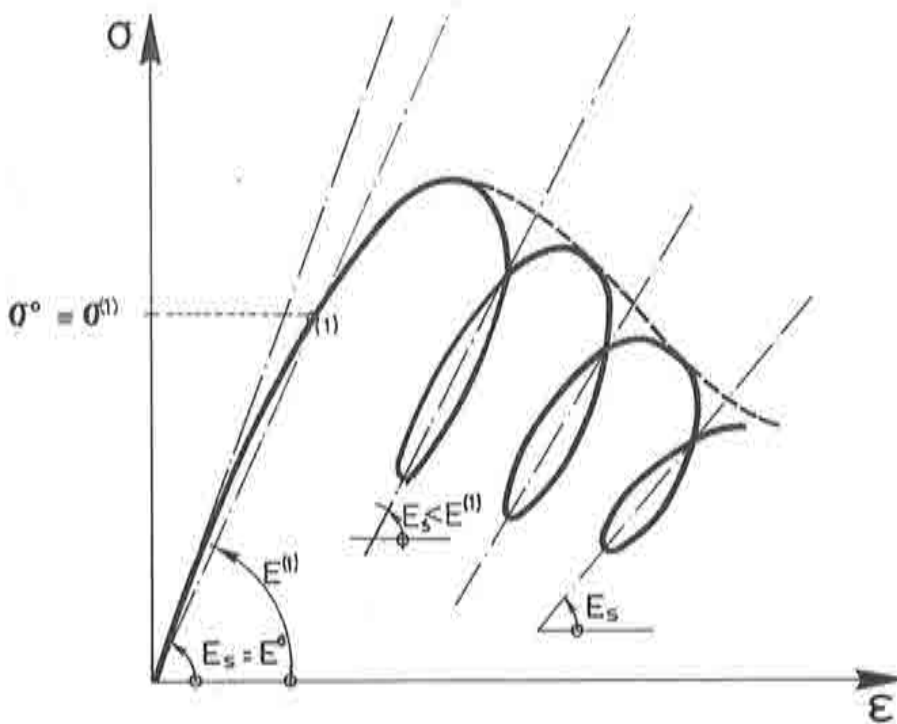


fig.(IV.17): Esquema uniaxial de degradación de la rigidez secante.

Definido el problema con base en la hipótesis antes realizada, se tiene un sola variable de degradación plástica $\hat{\mathbf{d}}^p \equiv \hat{\mathbf{d}}^p$, que permite formular la *rigidez secante degradada*, por efecto del fenómeno plástico, del siguiente modo:

$$D_s(\hat{\mathbf{d}}^p, \hat{\mathbf{d}}^e) = (1 - \hat{\mathbf{d}}^p) D_s(\hat{\mathbf{d}}^e) \quad (IV.150)$$

donde $D_s(\hat{\mathbf{d}}^p, \hat{\mathbf{d}}^e)$ es el tensor de rigidez que resulta de un proceso de degradación

elástica y plástica, $\mathbf{D}_S(\hat{d}^p)$ es el tensor de rigidez secante degradado elásticamente ec.(IV.105), y \hat{d}^p es la variable de degradación plástica, cuya regla de evolución es la siguiente:

$$\dot{\hat{d}}^p = \frac{(1 - \hat{d}^p)}{c} \langle -\dot{\epsilon} \rangle \quad (IV.151)$$

donde c es la cohesión definida según la regla de evolución expresada mediante la ec.(IV.19). El valor inicial de \hat{d}^p será nulo y se mantendrá sin cambios hasta que se inicie el proceso de ablandamiento ($\dot{\epsilon} < 0$), a partir del cual valdrá :

$$\hat{d}^p = 1 - \frac{c}{\sigma^{peak}} \quad (IV.152)$$

Sustituyendo la ec.(IV.14) en la ec.(IV.19), y ésta en la ec.(IV.151), resulta:

$$\dot{\hat{d}}^p = \frac{(1 - \hat{d}^p)}{c} \langle -h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \mathbf{h}_n^T(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \rangle \quad (IV.153)$$

de donde se puede obtener una formulación que se identifica con la regla de evolución general de las variables de degradación plástica ec.(IV.84); esto es:

$$\dot{\hat{d}}^p = \hat{\boldsymbol{\ell}}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (IV.154)$$

donde:

$$\hat{\boldsymbol{\ell}} = \frac{(1 - \hat{d}^p)}{c} \langle -h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \rangle \mathbf{h}_n(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \quad , \quad (IV.155)$$

es un vector, que representa la dirección de *degradación plástica*. Esta forma particular de definir $\hat{\boldsymbol{\ell}}$ lleva implícito una superficie de degradación en el espacio de tensiones.

Sustituyendo la ec.(IV.154) y la ec.(IV.150) en la ec.(IV.95), resulta el *incremento de tensión plástico degradado* expresado de la siguiente forma:

$$\dot{\sigma}^p = C_T^p \dot{\epsilon}^p = D_s(\hat{d}^p, \hat{d}^e) \dot{\epsilon}^p - \frac{\partial D_s(\hat{d}^p, \hat{d}^e)}{\partial \hat{d}^p} \hat{d}^p \dot{\epsilon}^e \quad (IV.156)$$

$$\dot{\sigma}^p = D_s(\hat{d}^p, \hat{d}^e) \dot{\epsilon}^p - \left[D_s(\hat{d}^e) \hat{\ell}^T \dot{\epsilon}^p \right] \frac{D_s^{-1}(\hat{d}^e)}{(1 - \hat{d}^p)} \sigma$$

y a partir de esta última, se puede escribir el tensor de rigidez degradado plásticamente, como:

$$C_T^p = D_s(\hat{d}^p, \hat{d}^e) - \frac{\langle -h_c(\sigma, \kappa^p, c) \rangle}{c} \sigma h_n^T(\sigma, \kappa^p, c) \quad (IV.157)$$

Por simplicidad, en la implementación de estos modelos de degradación (cap. V), se ha tenido en cuenta una hipótesis adicional a las ya realizadas, que considera que la degradación elástica y plástica no ocurren simultáneamente (la degradación elástica actúa hasta alcanzar la tensión pico, y luego se hace actuar la degradación plástica), sin embargo la formulación presentada, permite considerar ambos fenómenos a de degradación de rigidez a la vez.

IV.8.f- Regla de flujo asociada para materiales con degradación .

La teoría de la plasticidad clásica, introduce el concepto de *flujo plástico asociado* a través de una regla de normalidad a la superficie de fluencia plástica, la que está definida en el espacio de tensiones mediante la ec.(Ap-1.22). La regla de flujo asociada definida en esta forma, es equivalente el axioma de máxima disipación plástica (MDP) para el caso en que la rigidez se mantenga constante ^[70] . Esta idea sobre plasticidad asociada deja de ser válida para sólidos que sufren

degradación de rigidez durante el proceso de carga. Para una definición más general del *flujo asociado*, válido para estos sólidos, es necesario admitir:

• en primer lugar que la *energía libre puede ser descompuesta en una parte plástica y otra elástica* ec.(IV.85), situación que permite escribir la disipación total de energía Ξ mediante una expresión simplificada de la desigualdad de Clausius-Duhem ec.(IV.87), esto es:

$$\Xi = \left[\sigma^T - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} \right\}^T \right] \dot{\epsilon} + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} \right\}^T \dot{\epsilon}^p - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial q_\alpha} \right\}^T \dot{q}_\alpha - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial q_\beta} \right\}^T \dot{q}_\beta \geq 0 \quad (IV.158)$$

pero según la ec.(IV.89), se tiene que la tensión vale: $\sigma = \partial \Psi / \partial \epsilon^e$, tal que sustituida en la expresión anterior, permite formular la desigualdad de Clausius-Duhem como la suma de una disipación elástica más otra plástica. Esto es:

$$\Xi = \Xi^e + \Xi^p \geq 0 \quad (IV.159)$$

donde la *disipación elástica* que se desarrolla durante el proceso de carga, vale:

$$\Xi^e = - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial q_\beta} \right\}^T \dot{q}_\beta = - \sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial q_{\beta_i}} \dot{q}_{\beta_i} \quad (IV.160)$$

y la *disipación plástica*, que se desarrolla durante el mismo proceso de carga, vale:

$$\Xi^p = \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} \right\}^T \dot{\epsilon}^p - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial q_\alpha} \right\}^T \dot{q}_\alpha = \sigma^T \dot{\epsilon}^p - \sum_j \frac{\partial \Psi}{\partial q_{\alpha_j}} \dot{q}_{\alpha_j} \quad (IV.161)$$

considerando además los tipos de degradación elástica y plástica propuesto en los dos apartados anteriores, donde las *variables internas plásticas* son: $\mathbf{q}_p = \{\epsilon^p, \tilde{\mathbf{d}}^p\}$, y las *variables internas elásticas* son: $\mathbf{q}_e = \{\tilde{\mathbf{d}}^e\}$, la disipación elástica y plástica, formuladas anteriormente, quedan expresadas respectivamente por las siguientes ecuaciones:

$$\Xi^e = - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\mathbf{d}}^e} \right\}^T \dot{\tilde{\mathbf{d}}}^e = - \sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{d}_i^e} \dot{\tilde{d}}_i^e \quad (IV.162)$$

$$\Xi^p = \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} \right\}^T \dot{\epsilon}^e - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\mathbf{d}}^p} \right\}^T \dot{\tilde{\mathbf{d}}}^p - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^p} \right\}^T \dot{\epsilon}^p = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\epsilon}^e - \sum_j \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{d}_j^p} \dot{\tilde{d}}_j^p - \dot{\Psi}^p \quad (IV.163)$$

Sustituyendo en estas dos últimas la *energía libre* propuesta en la ec.(IV.90), y luego las *reglas de evolución* de las variables internas de degradación elástica ec.(IV.82) y plástica ec.(IV.84), resultan las siguientes expresiones para la disipación de energía elástica y plástica, respectivamente:

$$\left\{ \begin{aligned} \Xi^e &= - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\mathbf{d}}^e} \right\}^T \dot{\tilde{\mathbf{d}}}^e = - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p)^T \frac{\partial D_s(\tilde{\mathbf{d}}^e, \tilde{\mathbf{d}}^p)}{\partial \tilde{\mathbf{d}}^e} (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) \dot{\tilde{\mathbf{d}}}^e \\ \Xi^p &= - \sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{d}_i^p} \dot{\tilde{d}}_i^p = - \frac{1}{2} \sum_i \hat{\Psi}_i (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p)^T \frac{\partial D_s(\tilde{\mathbf{d}}^e, \tilde{\mathbf{d}}^p)}{\partial \tilde{d}_i^p} (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) \langle \hat{\mathbf{k}}_i^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle \end{aligned} \right. \quad (IV.164)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 \Xi^p &= \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} \right\}^T \dot{\epsilon}^e - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{d}^p} \right\}^T \dot{\hat{d}}^p - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^p} \right\}^T \dot{\epsilon}^p = \\
 &= (\epsilon - \epsilon^p)^T D_S(\hat{d}^e, \hat{d}^p) \dot{\epsilon}^e - \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon^p)^T \frac{\partial D_S(\hat{d}^e, \hat{d}^p)}{\partial \hat{d}^p} (\epsilon - \epsilon^p) \dot{\hat{d}}^p - \dot{\Psi}^p \\
 \Xi^p &= \sigma^T \dot{\epsilon}^p - \sum_j \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{d}_j^p} \dot{\hat{d}}_j^p - \dot{\Psi}^p = \\
 &= (\epsilon - \epsilon^p)^T \left[D_S(\hat{d}^e, \hat{d}^p) - \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial D_S(\hat{d}^e, \hat{d}^p)}{\partial \hat{d}_j^p} (\epsilon - \epsilon^p) \hat{\ell}_j^T \right] \dot{\epsilon}^p - \dot{\Psi}^p
 \end{aligned} \right.$$

(IV.165)

donde la *disipación elástica* se debe al proceso de degradación elástica, y la *disipación plástica* se debe al proceso de degradación plástica, más la energía disipada por el mismo proceso plástico irreversible. La desigualdad de Clasius-Duhem (segunda ley de la termodinámica) ec.(IV.159) se satisface siempre que $\Xi^p \geq 0$ y $\Xi^e \geq 0$, cumpliéndose esta última para cada \hat{d}_i^e si se tiene una

$\frac{\partial D_S(\hat{d}^e, \hat{d}^p)}{\partial \hat{d}_i^e}$ definida negativa (ver la definición de D_S en las ecs.(IV.105, IV.121)).

• y en segundo lugar, se debe admitir también, que el axioma de la (MDP) supone que ^[79] :

$$\Xi^p(\epsilon - \epsilon^p, q_\alpha, q_\beta, \dot{\epsilon}^p, \dot{q}_\alpha) \geq \Xi^p(\epsilon^* - \epsilon^p, q_\alpha, q_\beta, \dot{\epsilon}^p, \dot{q}_\alpha) \tag{IV.166}$$

donde ϵ^* es un estado de deformación que puede ser obtenido a partir de ϵ por medio de un proceso elástico, ($\epsilon^p = cte.$). En ausencia de degradación de rigidez, se obtiene un caso simple de la desigualdad anterior, la que toma la conocida forma del *segundo postulado* de Drucker ec.(Ap-1.56): $\sigma^T \dot{\epsilon}^p \geq \sigma^{*T} \dot{\epsilon}^p$.

Desarrollando la desigualdad (IV.166) se obtiene una *forma local* del axioma de la (MDP):

$$\dot{\epsilon}^T \frac{\partial \Xi^p}{\partial \epsilon^e} \geq 0 \quad (IV.167)$$

sustituyendo en esta última la disipación plástica por su expresión ec.(IV.165), resulta:

$$\dot{\epsilon}^T \left[D_s(\tilde{d}^e, \tilde{d}^p) - \sum_j \frac{\partial D_s(\tilde{d}^e, \tilde{d}^p)}{\partial \tilde{d}_j^p} (\epsilon - \epsilon^p) \tilde{\xi}_j^T \right] \dot{\epsilon}^p \geq 0 \quad , \quad (IV.168)$$

que puede ser escrita, según la ec.(IV.95) y la ec.(IV.84), como:

$$\dot{\epsilon}^T \left[C_T^p(\tilde{d}^e, \tilde{d}^p) \right] \dot{\epsilon}^p \geq 0 \quad , \quad (IV.169)$$

sustituyendo en ésta la regla de flujo ec.(IV.3), resulta:

$$\dot{\epsilon}^T C_T^p(\tilde{d}^e, \tilde{d}^p) \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma} \geq 0 \quad , \quad (IV.170)$$

pero en un estado de carga plástica se debe cumplir siempre que $\dot{\lambda} \geq 0$ (ver también las condiciones de Kuhn-Tucker *apart. Ap-I.3.e*), por lo tanto la ecuación anterior se puede escribir, como:

$$\dot{\epsilon}^T C_T^p(\tilde{d}^e, \tilde{d}^p) \frac{\partial G}{\partial \sigma} \geq 0 \quad , \quad (IV.171)$$

y teniendo en cuenta que, durante la misma situación de carga plástica para que $\dot{\lambda} \geq 0$, se debe cumplir en la ec.(IV.101) que:

$$\left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_T^e(\hat{\mathbf{d}}^e, \hat{\mathbf{d}}^p) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \right]^T \geq 0 \rightarrow \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \mathbf{C}_T^e(\hat{\mathbf{d}}^e, \hat{\mathbf{d}}^p) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \quad (\text{IV.172})$$

Para que las desigualdades ec.(IV.171) y ec.(IV.172) se cumplan a la vez, es necesario que exista proporcionalidad entre ambas, o sin perder generalidad exigir su igualdad, esto es:

$$\mathbf{C}_T^e(\hat{\mathbf{d}}^e, \hat{\mathbf{d}}^p) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} = \mathbf{C}_T^e(\hat{\mathbf{d}}^p, \hat{\mathbf{d}}^p) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \quad (\text{IV.173})$$

resultando así, una definición más general de *regla de flujo asociada, válida para materiales con degradación de rigidez*. Se puede verificar que en el caso particular de rigidez secante constante (sin degradación de rigidez): $\mathbf{C}_T^e(\hat{\mathbf{d}}^p, \hat{\mathbf{d}}^p) = \mathbf{C}_T^e(\hat{\mathbf{d}}^e, \hat{\mathbf{d}}^p) = \mathbf{D}_s = \text{cte.}$, la regla de flujo asociada se reduce a la forma clásica

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma}, \text{ ya presentada en el Ap-I.}$$

Para plasticidad asociada con degradación, donde $\mathbf{C}_T^e(\hat{\mathbf{d}}^p, \hat{\mathbf{d}}^p) \neq \mathbf{C}_T^e(\hat{\mathbf{d}}^e, \hat{\mathbf{d}}^p)$, el incremento de tensión ec.(IV.102) queda definido por:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_T^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\left[\mathbf{C}_T^e \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\} \right] \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_T^e \right]}{\left[h_c \left(\mathbf{h}_n^T \underbrace{\mathbf{C}_T^{p-1} \mathbf{C}_T^e \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma}}_{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma}} \right) \right] + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_T^e \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right]} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{IV.174})$$

donde $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma}$ representa el nuevo vector de flujo asociado que tiene en cuenta el fenómeno de degradación de rigidez. De la ecuación anterior resulta la

siguiente relación constitutiva tangente, para un proceso elasto-plástico asociado con degradación de rigidez:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}_T^{ep} \dot{\epsilon} \quad (IV.175)$$

siendo \mathbf{C}_T^{ep} el *tensor de rigidez elasto-plástico tangente del material* para plasticidad asociada, que contempla los fenómenos de degradación elástica y plástica a la vez y puede ser presentado en la siguiente forma:

$$\mathbf{C}_T^{ep} = \mathbf{C}_T^e - \frac{\left[\mathbf{C}_T^e \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\} \right] \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_T^e \right]}{\underbrace{\left[h_c \left(\mathbf{h}_n^T \mathbf{C}_T^{p-1} \mathbf{C}_T^e \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right) \right]}_A + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_T^e \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right]} \quad (IV.176)$$

Para el caso de la degradación plástica propuesta en en el (*apart. IV.8.e*), el *flujo plástico asociado* toma una forma particular, que puede ser obtenido a partir de la *ec.(IV.173)*. Esto es:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} = \mathbf{C}_T^{p-1}(\tilde{d}', \tilde{d}'') \mathbf{C}_T^e(\tilde{d}', \tilde{d}'') \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \quad (IV.177)$$

sustituyendo en ésta el *tensor de rigidez degradado plásticamente ec.(IV.157)*, resulta:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} = \left[\mathbf{D}_s(\tilde{d}', \tilde{d}'') - \frac{\langle -h_c(\sigma, \kappa^p, c) \rangle}{c} \sigma \mathbf{h}_n^T(\sigma, \kappa^p, c) \right]^{-1} \mathbf{C}_T^e(\tilde{d}', \tilde{d}'') \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} = \mathbf{D}_s^{-1}(\tilde{d}', \tilde{d}'') \left[\mathbf{C}_T^e \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} - \frac{\langle -h_c \rangle \mathbf{h}_n^T \mathbf{D}_s^{-1}(\tilde{d}', \tilde{d}'') \mathbf{C}_T^e \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma}}{c + \langle -h_c \rangle \mathbf{h}_n^T \mathbf{D}_s^{-1}(\tilde{d}', \tilde{d}'') \sigma} \right] \sigma$$

(IV.178)

siendo ésta la regla de normalidad asociada a la superficie de fluencia plástica, modificada por la acción de la degradación de la rigidez. A partir de esta definición de flujo plástico asociado, se puede obtener para este caso particular de degradación plástica, el *parámetro de endurecimiento plástico* que se expresa en la ec.(IV.176). Esto es:

$$A = \frac{c h_c \mathbf{h}_n^T \mathbf{D}_S^{-1}(\hat{\mathbf{d}}^p, \hat{\mathbf{d}}^p) \mathbf{C}_T^e \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{c + \langle -h_c \rangle \mathbf{h}_n^T \mathbf{D}_S^{-1}(\hat{\mathbf{d}}^p, \hat{\mathbf{d}}^p) \boldsymbol{\sigma}} \quad (IV.178)$$

sustituyendo esta ecuación en la ec.(IV.176), se obtiene el tensor de rigidez elasto-plástico tangente degradado \mathbf{C}_T^{ep} , para este caso particular de degradación plástica.

(CAPITULO IV) ANEXO A

PARTICULARIZACION DE LA VARIABLE DE DAÑO PLASTICO.

An-A.1.- PARTICULARIZACION DE LA VARIABLE DE DAÑO PLASTICO PARA CASOS DE CARGAS ESPECIALES.

An-A.1.a- Introducción.

En el *capítulo-IV (apart IV.4.a)* se ha definido la *variable de daño plástico* que utiliza el modelo constitutivo presentado en esta tesis. En aquel apartado se presentó la definición de esta variable para procesos de carga uniaxial de tracción y compresión, y luego se la generalizó a procesos de carga multiaxial mediante las *ecs.(IV.14), (IV.15), (IV.16) y (IV.18)*. En este anexo, con el fin de controlar el buen funcionamiento de la definición multiaxial de la variable de daño plástico κ^p , se hará una particularización de ésta para los siguientes casos simples de carga radial: *tracción uniaxial, compresión uniaxial, problema de compresión biaxial simétrica, y problema de corte puro.*

An-A.1.b- Problema de tracción uniaxial.

Dado un estado de tracción pura y simple para un punto de un sólido friccional $0 = \sigma_3 = \sigma_2 < \sigma_1$, resulta de la *ec.(IV.16)* la siguiente expresión para el incremento temporal de la variable de daño plástico:

$$\dot{\kappa}^p = \sum_{i=1}^3 [(h_{ni})_T + (h_{ni})_C] \dot{\epsilon}_i^p ,$$

$$\dot{\kappa}^p = (h_{n1})_T \dot{\epsilon}_1^p + \underbrace{(h_{n2})_T \dot{\epsilon}_2^p}_{=0} + \underbrace{(h_{n3})_T \dot{\epsilon}_3^p}_{=0} + \underbrace{(h_{n1})_C \dot{\epsilon}_1^p}_{=0} + \underbrace{(h_{n2})_C \dot{\epsilon}_2^p}_{=0} + \underbrace{(h_{n3})_C \dot{\epsilon}_3^p}_{=0} , \quad (An-A.1)$$

$$\dot{\kappa}^p = (h_{n1})_T \dot{\epsilon}_1^p = \frac{1}{g_T^p} \langle \sigma_1 \rangle \dot{\epsilon}_1^p ,$$

y sustituyendo en ésta la *energía específica de tracción ajustada*, por su expresión matemática:

$$g_T^{p*} = g_T^p \frac{[\langle \sigma_1 \rangle + \langle \sigma_2 \rangle + \langle \sigma_3 \rangle]}{\sigma_T} = g_T^p \frac{\langle \sigma_1 \rangle}{\sigma_T} , \quad (An-A.2)$$

se obtiene, previa sustitución de $\dot{\epsilon}_1^p$ por $\dot{\epsilon}_T^p$ (que coinciden en este caso particular), la siguiente expresión:

$$\dot{\kappa}^p = \frac{1}{g_T^p} \frac{\sigma_T}{\langle \sigma_1 \rangle} \langle \sigma_1 \rangle \dot{\epsilon}_1^p , \quad (An-A.3)$$

$$\dot{\kappa}^p = \frac{1}{g_T^p} \sigma_T \dot{\epsilon}_T^p ,$$

de donde resulta, como es obvio, la definición de la *variable de daño plástico*, para un problema de tracción uniaxial ec.(IV.9):

$$\kappa^p = \frac{1}{g_T^p} \int_{t=0}^t \sigma_T \dot{\epsilon}_T^p dt . \quad (An-A.4)$$

An-A.1.c- Problema de compresión uniaxial.

En forma análoga al problema de tracción, se deduce para un estado tensional de compresión pura y simple $\sigma_3 < \sigma_2 = \sigma_1 = 0$, de la ec.(IV.16), la siguiente expresión para el incremento temporal de la variable de daño plástico:

$$\dot{\kappa}^p = \sum_{i=1}^3 [(h_{ni})_T + (h_{ni})_C] \dot{\epsilon}_i^p ,$$

$$\dot{\kappa}^p = \underbrace{(h_{n1})_T \dot{\epsilon}_1^p}_{=0} + \underbrace{(h_{n3})_T \dot{\epsilon}_3^p}_{=0} + \underbrace{(h_{n3})_T \dot{\epsilon}_3^p}_{=0} + \underbrace{(h_{n1})_C \dot{\epsilon}_1^p}_{=0} + \underbrace{(h_{n2})_C \dot{\epsilon}_2^p}_{=0} + \underbrace{(h_{n3})_C \dot{\epsilon}_3^p}_{=0} , \quad (An-A.5)$$

$$\dot{\kappa}^p = (h_{n3})_C \dot{\epsilon}_3^p = \frac{1}{g_C^{p*}} \langle -\sigma_3 \rangle \dot{\epsilon}_3^p ,$$

y sustituyendo en ésta la *energía específica de compresión ajustada*, se tiene:

$$g_C^{p*} = g_C^p \frac{[\langle -\sigma_1 \rangle + \langle -\sigma_2 \rangle + \langle -\sigma_3 \rangle]}{\sigma_C} = g_C^p \frac{\langle -\sigma_3 \rangle}{\sigma_C} , \quad (An-A.6)$$

resultando, previa sustitución de $\dot{\epsilon}_3^p$ por $\dot{\epsilon}_C^p$ (que coinciden en este caso particular), la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}^p &= \frac{1}{g_C} \frac{\sigma_C}{\langle -\sigma_3 \rangle} \langle -\sigma_3 \rangle \dot{\epsilon}_3^p , \\ \dot{\kappa}^p &= \frac{1}{g_C} \sigma_C \dot{\epsilon}_C^p , \end{aligned} \quad (An-A.7)$$

de donde resulta la definición de la *variable de daño plástico*, para un problema de compresión uniaxial ec.(IV.12):

$$\kappa^p = \frac{1}{g_C} \int_{t=0}^t \sigma_C \dot{\epsilon}_C^p dt \quad , \quad (An-A.8)$$

An-A.1.d- Problema de compresión biaxial simétrica.

Siguiendo el mismo procedimiento que en los dos casos anteriores, se puede obtener, para el caso de un estado tensional de compresión biaxial doble simétrica $\sigma_3 = \sigma_2 = \sigma < \sigma_1 = 0$, la expresión para el incremento temporal de la variable de daño plástico. Par ello a partir de la ec.(IV.16), se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}^p &= \sum_{i=1}^3 [(h_{ni})_T + (h_{ni})_C] \dot{\epsilon}_i^p , \\ \dot{\kappa}^p &= \underbrace{(h_{n1})_T}_{=0} \dot{\epsilon}_1^p + \underbrace{(h_{n2})_T}_{=0} \dot{\epsilon}_2^p + \underbrace{(h_{n3})_T}_{=0} \dot{\epsilon}_3^p + \underbrace{(h_{n1})_C}_{=0} \dot{\epsilon}_1^p + (h_{n3})_C \dot{\epsilon}_2^p + (h_{n3})_C \dot{\epsilon}_3^p , \quad (An-A.9) \\ \dot{\kappa}^p &= (h_{n3})_C \dot{\epsilon}_2^p + (h_{n3})_C \dot{\epsilon}_3^p = \frac{1}{g_C^{p*}} [\langle -\sigma_2 \rangle \dot{\epsilon}_2^p + \langle -\sigma_3 \rangle \dot{\epsilon}_3^p] , \end{aligned}$$

y sustituyendo en ésta la *energía específica de compresión ajustada*

$$g_C^{p*} = g_C^p \frac{[\langle -\sigma_1 \rangle + \langle -\sigma_2 \rangle + \langle -\sigma_3 \rangle]}{\sigma_C} = g_C^p \frac{[\langle -\sigma_2 \rangle + \langle -\sigma_3 \rangle]}{\sigma_C} = 2 g_C^p \frac{\langle -\sigma \rangle}{\sigma_C} \quad (\text{An-A.10})$$

resulta:

$$\dot{\kappa}^p = \frac{1}{2 g_C^p} \frac{\sigma_C}{\langle -\sigma \rangle} \langle -\sigma \rangle [\dot{\epsilon}_2^p + \dot{\epsilon}_3^p] , \quad (\text{An-A.11})$$

$$\dot{\kappa}^p = \frac{1}{2 g_C^p} \sigma_C [\dot{\epsilon}_2^p + \dot{\epsilon}_3^p] ,$$

que escrita en función de la regla de flujo generalizada ec.(IV.3), resulta:

$$\dot{\kappa}^p = \frac{\dot{\lambda}}{2 g_C^p} \sigma_C \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_3} \right] , \quad (\text{An-A.12})$$

pero dado que $\mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, c)$ es una *función de potencial plástico* de comportamiento isotrópico, en el punto $\sigma_3 = \sigma_2 = \sigma < \sigma_1 = 0$ del espacio de tensiones principales el vector de flujo plástico $\mathbf{g} = \partial \mathcal{G} / \partial \boldsymbol{\sigma}$ tiene dos componentes g_2 y g_3 iguales y simétricas, por lo tanto $\partial \mathcal{G} / \partial \sigma = \partial \mathcal{G} / \partial \sigma_2 = \partial \mathcal{G} / \partial \sigma_3$, quedando expresada la ec.(IV.12) de la siguiente forma:

$$\dot{\kappa}^p = \frac{\dot{\lambda}}{g_C^p} \sigma_C \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} = \frac{1}{g_C^p} \sigma_C \dot{\epsilon}_C^p \quad (\text{An-A.13})$$

de donde resulta, la definición de la *variable de daño plástico*, para un problema de compresión uniaxial ec.(IV.12),

$$\kappa^p = \frac{1}{g_C^p} \int_{t=0}^t \sigma_C \dot{\epsilon}_C^p dt \quad . \quad (\text{An-A.14})$$

De esta última, se observa que la *variable de daño plástico*, transforma el problema multiaxial (en este caso biaxial doble simétrico) en uno de características uniaxiales equivalentes.

An-A.1.e- Problema de corte puro.

Siguiendo con el mismo esquema deductivo, se puede probar que en el caso de corte puro, la variable de daño o plástico interpreta el estado multiaxial actuante, como la combinación de dos estados uniaxiales equivalentes. Para probar esta afirmación, se introduce un estado tensional plano de corte puro $-\sigma_3 = \sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, resultando de la ec.(IV.16) la siguiente expresión para el incremento temporal de la variable de daño plástico:

$$\dot{\kappa}^p = \sum_{i=1}^3 [(h_{\kappa i})_T + (h_{\kappa i})_C] \dot{\epsilon}_i^p ,$$

$$\dot{\kappa}^p = (h_{\kappa 1})_T \dot{\epsilon}_1^p + \underbrace{(h_{\kappa 2})_T \dot{\epsilon}_2^p}_{=0} + \underbrace{(h_{\kappa 3})_T \dot{\epsilon}_3^p}_{=0} + \underbrace{(h_{\kappa 1})_C \dot{\epsilon}_1^p}_{=0} + \underbrace{(h_{\kappa 2})_C \dot{\epsilon}_2^p}_{=0} + (h_{\kappa 3})_C \dot{\epsilon}_3^p , \quad (\text{An-A.15})$$

$$\dot{\kappa}^p = (h_{\kappa 1})_T \dot{\epsilon}_1^p + (h_{\kappa 3})_C \dot{\epsilon}_3^p = \frac{1}{g_T^{p*}} \langle \sigma_1 \rangle \dot{\epsilon}_1^p + \frac{1}{g_C^{p*}} \langle -\sigma_3 \rangle \dot{\epsilon}_3^p ,$$

y sustituyendo en ésta las *energías específicas de compresión y a tracción ajustadas*, por sus respectivas expresiones matemáticas:

$$g_T^{p*} = g_T^p \frac{[\langle \sigma_1 \rangle + \langle \sigma_2 \rangle + \langle \sigma_3 \rangle]}{\sigma_T} = g_T^p \frac{\langle \sigma_1 \rangle}{\sigma_T} ,$$

(An-A.16)

$$g_C^{p*} = g_C^p \frac{[\langle -\sigma_1 \rangle + \langle -\sigma_2 \rangle + \langle -\sigma_3 \rangle]}{\sigma_C} = g_C^p \frac{\langle -\sigma_3 \rangle}{\sigma_C} ,$$

se obtiene, previa sustitución de $\dot{\epsilon}_1^p$ por $\dot{\epsilon}_T^p$ y $\dot{\epsilon}_3^p$ por $\dot{\epsilon}_C^p$ (que coinciden en este caso particular), la siguiente expresión:

$$\dot{\kappa}^p = \frac{1}{g_T^p} \frac{\sigma_T}{\langle \sigma_1 \rangle} \langle \sigma_1 \rangle \dot{\epsilon}_T^p + \frac{1}{g_C^p} \frac{\sigma_C}{\langle -\sigma_3 \rangle} \langle -\sigma_3 \rangle \dot{\epsilon}_C^p ,$$

(An-A.17)

$$\dot{\kappa}^p = \frac{1}{g_T^p} \sigma_T \dot{\epsilon}_T^p + \frac{1}{g_C^p} \sigma_C \dot{\epsilon}_C^p ;$$

de donde resulta, como es obvio, una *variable de daño plástico*, formada por la contribución de la variable correspondiente a un problema de tracción uniaxial ec.(IV.9) más un problema de compresión uniaxial ec.(IV.12):

$$\kappa^p = \frac{1}{g_T^p} \int_{t=0}^t \sigma_T \dot{\epsilon}_T^p dt + \frac{1}{g_C^p} \int_{t=0}^t \sigma_C \dot{\epsilon}_C^p dt \quad . \quad (\text{An-A.18})$$

(CAPITULO IV) ANEXO B

FUNCIONES DE COHESION UTILIZADAS EN EL MODELO DE DAÑO PLASTICO.

An-B.1.- FUNCIONES DE COHESION UTILIZADAS EN EL MODELO DE DAÑO PLASTICO.

An-B.1.a- Introducción.

Para hormigones, se podrían proponer diferentes expresiones analíticas que describan la evolución que sufre la cohesión en función de la variable de daño plástico κ^p durante un proceso de carga uniaxial de tracción $c_T(\kappa^p)$ y compresión $c_C(\kappa^p)$. Una posibilidad, que es la que se ha utilizado en este modelo de daño plástico, es deducirlas a partir de curvas uniaxiales de tensión deformación plástica ($\sigma_T - \epsilon_T^p$, $\sigma_C - \epsilon_C^p$), que surgen de otras curvas uniaxiales de tensión deformación total ($\sigma_T - \epsilon_T$, $\sigma_C - \epsilon_C$) que resultan a su vez de estudios experimentales de tracción y compresión respectivamente. En forma esquemática esto es:

$$\text{a partir de: } \sigma - \epsilon \xrightarrow{\text{se tiene}} \sigma - \epsilon^p \xrightarrow{\text{resulta}} c - \kappa^p$$

Las curvas $\sigma - \epsilon^p$ se pueden obtener a partir de las curvas $\sigma - \epsilon$, a través de una integración en el tiempo de la ecuación constitutiva elasto-plástica, para un problema uniaxial. Así,

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon} - E_s^{-1} \dot{\sigma} \quad , \quad (\text{An-B.1})$$

integrada para cada tiempo t del proceso de carga uniaxial cuasi-estático, proporciona la magnitud actual de la deformación plástica buscada:

$$\epsilon^p = \int_{t=0}^t \dot{\epsilon}^p dt = \int_{t=0}^t \dot{\epsilon} dt - \int_{t=0}^t E_s^{-1} \dot{\sigma} dt \quad (\text{An-B.2})$$

Una vez conocidas las curvas $\sigma - \epsilon^p$ se transforman a curvas de $\sigma - \kappa^p$, mediante la propia definición de la variable de daño plástico para un proceso uniaxial de tracción ec.(IV.9) o compresión ec.(IV.12), según sea el caso (ver subsiguientes apartados). A partir de las curvas $\sigma - \kappa^p$, mediante un factor de escala k_C o k_T ec.(IV.22) o ec.(IV.23), según se trate de una curva de tracción o compresión respectivamente, se obtienen las curvas $c_C - \epsilon^p$ y $c_T - \epsilon^p$ que intervienen en la regla de evolución de la *variable interna de cohesión* ec.(IV.19).

A continuación, se presentarán tres expresiones de la tensión en función de la variable de daño plástico $\sigma - \kappa^p$, y se detallará la forma en que han sido obtenidas a partir de funciones uniaxiales del tipo $\sigma - \epsilon^p$.

An-B.1.b- Función tensión-deformación plástica lineal y su transformación en una función tensión-daño plástico.

Desde un punto de vista simple, se puede hacer la hipótesis de que el comportamiento uniaxial tensión-deformación del hormigón a tracción, después de finalizar el período elástico, carece de endurecimiento e inicia inmediatamente una etapa de ablandamiento lineal ^{[23][123]} fig.(An-B.1). Esto es:

$$\sigma_T(\epsilon_T^p) = \sigma_T^0 \left(1 - \frac{\epsilon_T^p}{\epsilon_T^{p,u}} \right) \quad (\text{An-B.3})$$

La energía específica plástica que disipará un punto del sólido durante todo el proceso de carga cuasi-estático a tracción, será para este caso particular:

$$g_T^p = \int_{t=0}^{\infty} \sigma_T \dot{\epsilon}_T^p dt = \frac{\sigma_T^0 \epsilon_T^{p,u}}{2} \quad (\text{An-B.4})$$

Partiendo de la misma definición de κ^p , para un proceso de carga uniaxial ec.(IV.9), se puede obtener la transformación de $(\sigma_T - \epsilon_T^p) \xrightarrow{\text{an}} (\sigma_T - \kappa^p)$. Esto es:

$$\kappa^p = \frac{1}{g_T^p} \int_{t=0}^t \sigma_T \dot{\epsilon}_T^p dt = \frac{1}{g_T^p} \int_{t=0}^t \sigma_T^0 \left(1 - \frac{\epsilon_T^p}{\epsilon_T^{p,u}} \right) \dot{\epsilon}_T^p dt \quad (\text{An-B.5})$$

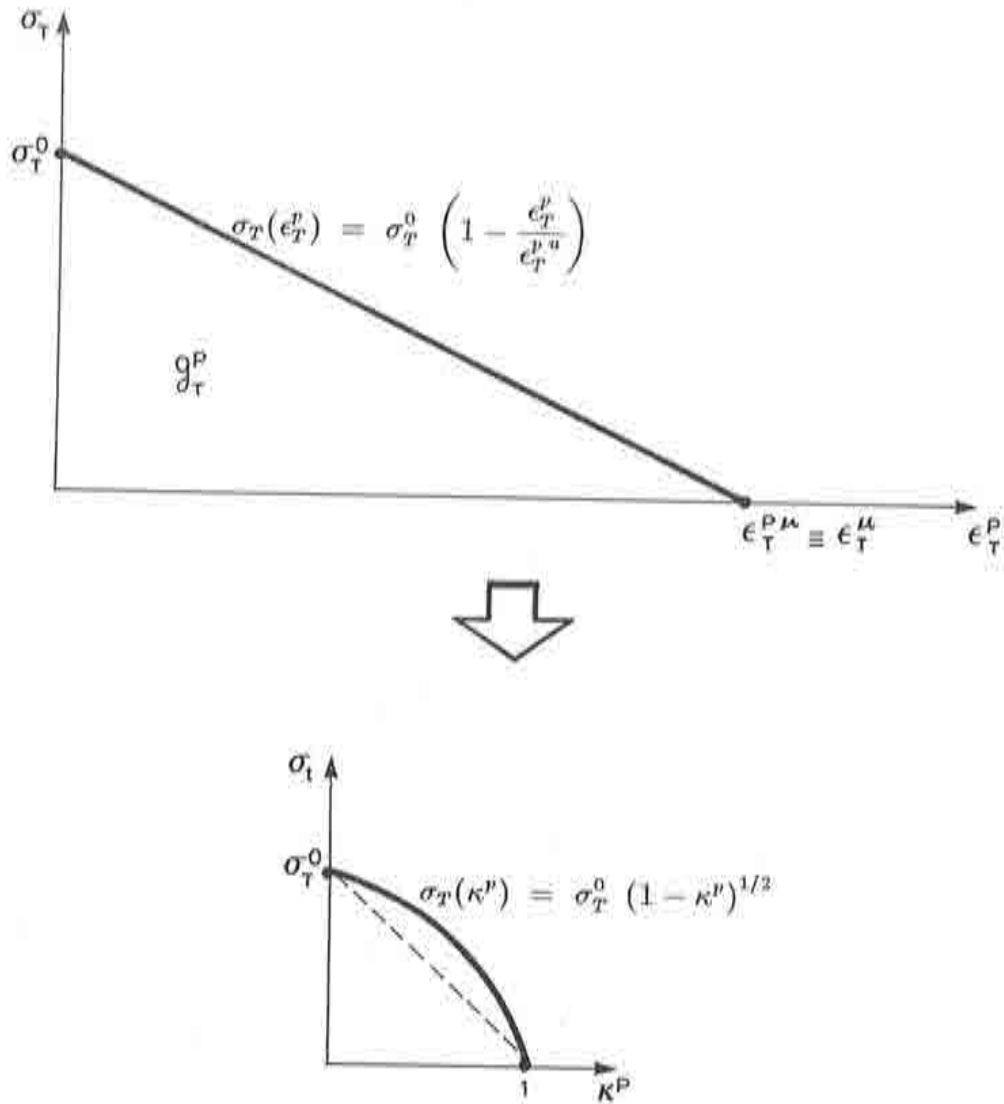


fig.(An-B.1): Función tensión-deformación plástica lineal, para tratar el comportamiento del hormigón a tracción, y su transformación en una función tensión-daño plástico.

resolviendo la ec.(An-B.5) y sustituyendo en ella la ec.(An-B.4), resulta:

$$\kappa^p = \frac{2}{\sigma_T^0 \epsilon_T^{p, \mu}} \sigma_T^0 \left[\epsilon_T^p - \frac{(\epsilon_T^p)^2}{2 \epsilon_T^{p, \mu}} \right] = 2 \frac{\epsilon_T^p}{\epsilon_T^{p, \mu}} - \left(\frac{\epsilon_T^p}{\epsilon_T^{p, \mu}} \right)^2 \quad (\text{An-B.6})$$

y de aquí :

$$1 - \kappa^p = 1 - 2 \frac{\epsilon_T^p}{\epsilon_T^{p,u}} + \left(\frac{\epsilon_T^p}{\epsilon_T^{p,u}} \right)^2 = \left(1 - \frac{\epsilon_T^p}{\epsilon_T^{p,u}} \right)^2 \quad (\text{An-B.7})$$

$$(1 - \kappa^p)^{1/2} = \left(1 - \frac{\epsilon_T^p}{\epsilon_T^{p,u}} \right)$$

sustituyendo esta última en la ec.(An-B.3), queda la función de tensión uniaxial, expresada a partir de la variable de daño plástico κ^p :

$$\sigma_T(\kappa^p) = \sigma_T^0 (1 - \kappa^p)^{1/2} \quad (\text{An-B.8})$$

de donde surge su derivada como:

$$\frac{d\sigma_T(\kappa^p)}{d\kappa^p} = - \frac{\sigma_T^0}{2 (1 - \kappa^p)^{1/2}} \quad (\text{An-B.9})$$

An-B.1.c- Función tensión-deformación plástica exponencial y su transformación en una función tensión-daño plástico lineal.

En tracción pura, se pueden utilizar también funciones de *tensión-deformación plástica* que aproximen en mejor modo el comportamiento del hormigón. Existe un gran número de funciones de este tipo que han sido formuladas a partir de estudios experimentales [33][124][126]. En este trabajo, se ha considerado una función exponencial simple fig.(An-B.2) que se aproxima bastante bien a otras expresiones más complejas [124] que han sido propuestas para la simulación del comportamiento del hormigón a tracción con ablandamiento. Esto es:

$$\sigma_T(\epsilon_T^p) = \sigma_T^0 \left[a e^{-b\epsilon_T^p} \right] \quad (\text{An-B.10})$$

La energía específica total que disipará un punto del sólido durante todo el proceso de carga cuasi-estático a tracción, será para este caso particular:

$$g_T^p = \int_{t=0}^{\infty} \sigma_T \dot{\epsilon}_T^p dt = \sigma_T^0 \int_{t=0}^{\infty} a e^{-b\epsilon_T^p} \dot{\epsilon}_T^p dt = \sigma_T^0 a \left(- \frac{e^{-b\epsilon_T^p}}{b} \right) \Big|_{\epsilon_T^p=0}^{\infty} = \sigma_T^0 \frac{a}{b} \quad (\text{An-B.11})$$

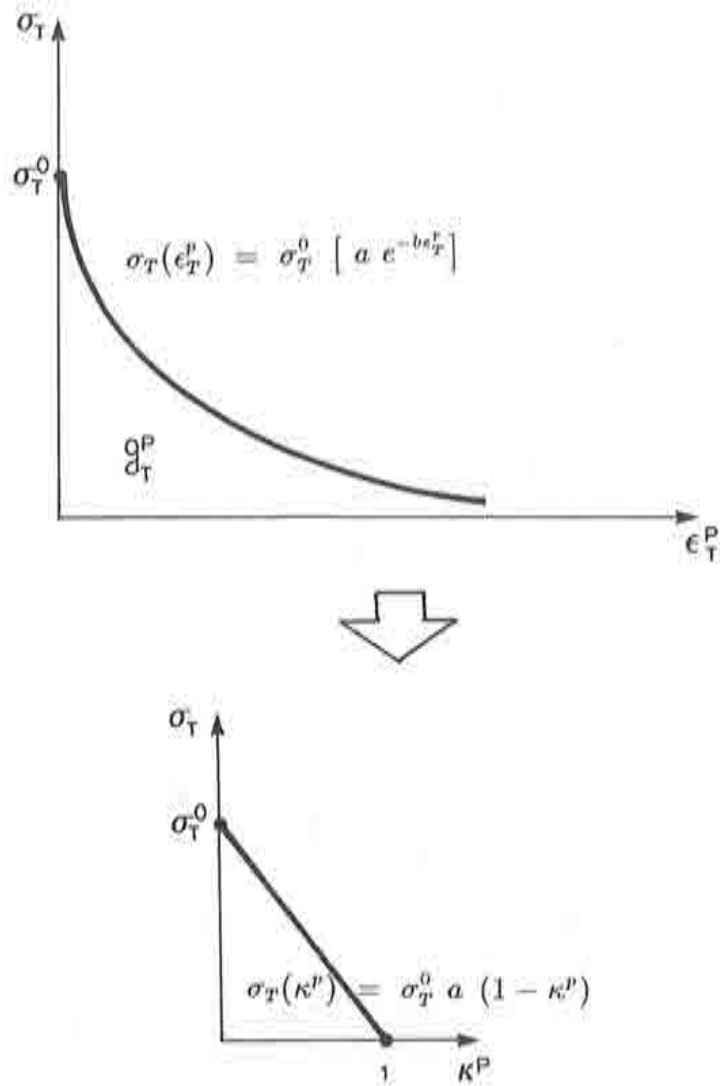


fig.(An-B.2): Función tensión-deformación plástica exponencial, para tratar el comportamiento del hormigón a tracción, y su transformación en una función tensión-daño plástico lineal.

La pendiente al iniciar el proceso plástico, surge de particularizar la derivada de la ec.(An-B.10) en $\epsilon_T^p = 0$. Esto es:

$$A' = \left. \frac{d\sigma_T(\epsilon_T^p)}{d\epsilon_T^p} \right|_{\epsilon_T^p=0} = -\sigma_T^0 a b e^{-b\epsilon_T^p} \Big|_{\epsilon_T^p=0} = -\sigma_T^0 a b \quad (\text{An-B.12})$$

de donde se deduce, que para $a > 0$ se tienen pendientes A' negativas. De la ec.(An-B.11) y ec.(An-B.12), se pueden encontrar las constantes a y b . Esto es:

$$\begin{cases} a = \frac{\sqrt{-A' g_T^p}}{\sigma_T^0} \\ b = \sqrt{-\frac{A'}{g_T^p}} \end{cases} \quad (\text{An-B.13})$$

Para transformar la función de la ec.(An-B.10) en otra del tipo $\sigma_T - \kappa^p$, será necesario partir de la definición de κ^p , para un proceso de carga uniaxial ec.(IV.9). Así se tiene:

$$\kappa^p = \frac{1}{g_T^p} \int_{t=0}^t \sigma_T \dot{\epsilon}_T^p dt = \frac{1}{g_T^p} \int_{t=0}^t \sigma_T^0 [a e^{-b\epsilon_T^p}] \dot{\epsilon}_T^p dt \quad (\text{An-B.14})$$

resolviendo la ec.(An-B.14) y sustituyendo en ella la ec.(An-B.11), resulta:

$$\begin{aligned} \kappa^p &= \frac{1}{g_T^p} \left[\sigma_T^0 a \left(-\frac{e^{-b\epsilon_T^p}}{b} \right) \Big|_{\epsilon_T^p=0}^{\infty} \right] \\ \kappa^p &= \underbrace{\frac{\sigma_T^0 a}{g_T^p b}}_{=1} [1 - e^{-b\epsilon_T^p}] \quad (\text{An-B.15}) \\ e^{-b\epsilon_T^p} &= 1 - \kappa^p \end{aligned}$$

sustituyendo ésta en la ec.(An-B.10), resulta una función de tensión uniaxial lineal, expresada a partir de la variable de daño plástico κ^p :

$$\sigma_T(\kappa^p) = \sigma_T^0 a (1 - \kappa^p) \quad (\text{An-B.16})$$

donde la constante a surge de la pendiente al origen en el espacio $\sigma - \kappa^p$:

$$\left. \frac{d\sigma_T(\epsilon_T^p)}{d\kappa^p} \right|_{\kappa^p=0} = -\sigma_T^0 a \equiv -\frac{\sigma_T^0}{1} \longrightarrow a = 1 \quad (\text{An-B.17})$$

tal que sustituida en la ec.(An-B.16) resulta:

$$\sigma_T(\kappa^p) = \sigma_T^0 (1 - \kappa^p) \quad (\text{An-B.18})$$

de donde surge su derivada como:

$$\frac{d\sigma_T(\kappa^p)}{d\kappa^p} = -\sigma_T^0 = \text{cte.} \quad (\text{An-B.19})$$

An-B.1.d- Función tensión-deformación plástica exponencial y su transformación en una función tensión-daño plástico.

Para los casos más generales de tracción o compresión uniaxial en hormigones, se propone una función tensión-deformación plástica, compuesta de una primera parte con *endurecimiento*, hasta alcanzar la tensión pico σ^{pic} , seguida de un *ablandamiento* hasta hacerce nula la tensión. Una función analítica $\sigma - \epsilon^p$ que concuerda bastante bien con los estudios experimentales, tanto a tracción como a compresión uniaxial, viene dada por la siguiente expresión* fig.(An-B.3):

$$\sigma(\epsilon^p) = \sigma^0 [a_1 e^{-b\epsilon^p} - a_2 e^{-2b\epsilon^p}] \quad (\text{An-B.20})$$

siendo:

$$a_1 = \chi (1 + a)$$

$$a_2 = a$$

donde χ es una constante que determina la posición del pico de tensiones σ^{pic} , y a y b son dos constantes adimensionales que se obtienen a partir de las dos condiciones siguientes:

* Nota: Debido a que la función que se propone servirá para aproximar tanto el comportamiento a tracción como a compresión uniaxial, mediante el ajuste de unas constantes, se obviará el uso de una notación con sub-índices "T" o "C", ya que la formulación podrá utilizarse indistintamente en uno u otro caso.

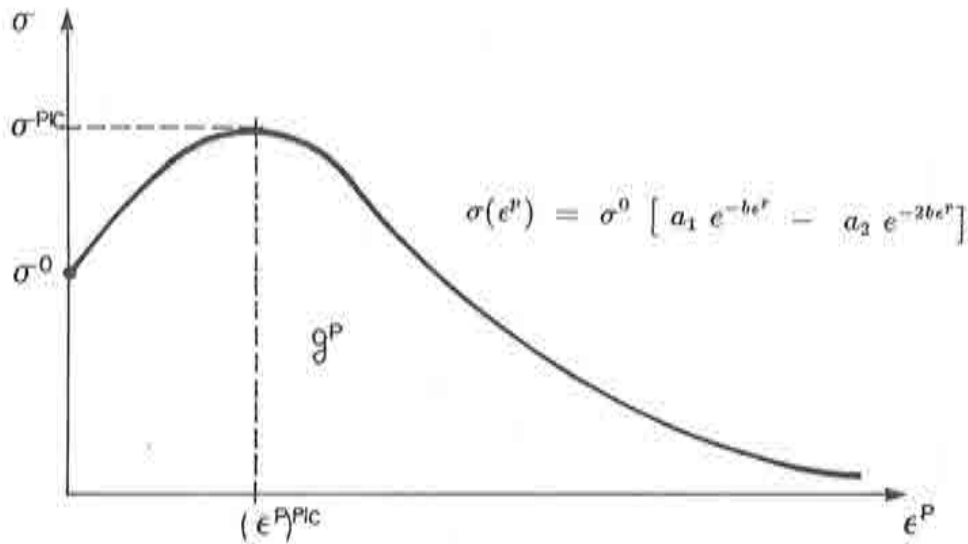


fig.(An-B.3): Función tensión-deformación plástica exponencial, para tratar el comportamiento del hormigón a tracción o compresión.

• Condición de energía:

$$g^p = \int_{t=0}^{\infty} \sigma \dot{\epsilon}^p dt = \sigma^0 \int_{t=0}^{\infty} [\chi(1+a) e^{-b\epsilon^p} - a e^{-2b\epsilon^p}] \dot{\epsilon}^p dt$$

$$g^p = \sigma^0 \left[\chi(1+a) \left(-\frac{e^{-b\epsilon^p}}{b} \Big|_{\epsilon^p=0}^{\infty} \right) - a \left(-\frac{e^{-2b\epsilon^p}}{2b} \Big|_{\epsilon^p=0}^{\infty} \right) \right] \quad (An-B.21)$$

$$g^p = \sigma^0 \left[\frac{\chi}{b} + \frac{\chi a}{b} + \frac{a}{2b} \right] = \frac{\sigma^0}{b} \left[\chi + \frac{a}{2}(2\chi - 1) \right]$$

• Condición de pendiente al origen:

$$A' = \frac{d\sigma(\epsilon^p)}{d\epsilon^p} \Big|_{\epsilon^p=0} = \sigma^0 [-\chi(1+a) e^{-b\epsilon^p} b + a e^{-2b\epsilon^p} 2b] \Big|_{\epsilon^p=0} \quad (An-B.22)$$

$$A' = \sigma^0 [-\chi(1+a) b + 2 a b] = \sigma^0 b [-\chi + a(2 - \chi)]$$

así , fijando la posición del pico de tensiones χ , de la ec.(An-B.21) y ec.(An-B.22) se obtiene a y b . Obsérvese que para $\chi = 1$ y $a > 1$, la función parte con pendiente inicial positiva (endurecimiento inicial), en cambio para $a < 1$ la función comienza con una pendiente inicial negativa (ablandamiento inicial).

Para transformar la función de la ec.(An-B.20) en otra del tipo $\sigma_T = \kappa^p$, será necesario, como en los casos anteriores, partir de la definición de κ^p para un proceso de carga uniaxial de tracción ec.(IV.9) o de compresión ec.(IV.12), según sea el caso. En este apartado se deducirá una función genérica que luego puede ser utilizada para estados de tracción o compresión indistintamente. Esto es:

$$\kappa^p = \frac{1}{g^p} \int_{t=0}^t \sigma \dot{\epsilon}^p dt = \frac{\sigma^0}{g^p} \left[\chi(1+a) \left(-\frac{e^{-be^r}}{b} \Big|_0^{e^r} \right) - a \left(-\frac{e^{-3be^r}}{2b} \Big|_0^{e^r} \right) \right]$$

$$\kappa^p = \frac{\sigma^0}{g^p} \left[\frac{\chi(1+a)}{b} (-e^{-be^r} + 1) - \frac{a}{2b} (-e^{-3be^r} + 1) \right]$$

(An-B.23)

reagrupando términos, se tiene:

$$\kappa^p = \frac{\sigma^0}{g^p} \left[\frac{\chi(1+a)}{b} - \frac{a}{2b} \right] + \frac{\sigma^0}{g^p} \left[-\frac{\chi(1+a)}{b} e^{-be^r} + \frac{a}{2b} e^{-3be^r} \right] \quad (\text{An-B.24})$$

y sustituyendo en ésta g^p por su expresión ec.(IV.21), resulta:

$$\kappa^p = 1 + \left[-\frac{\chi(1+a)}{\left[\chi + \frac{a}{2}(2\chi - 1) \right]} e^{-be^r} + \frac{a}{2 \left[\chi + \frac{a}{2}(2\chi - 1) \right]} e^{-3be^r} \right]$$

$$\kappa^p = 1 + \frac{1}{[2\chi + a(2\chi - 1)]} [-2\chi(1+a) e^{-be^r} + a e^{-3be^r}]$$

(An-B.25)

si se multiplican ambos miembros por: $a [2\chi + a(2\chi - 1)]$, y a lo que resulte de aquí se le suma a ambos miembros: $[\chi(1+a)]^2 - a [2\chi + a(2\chi - 1)]$,

se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left\{ [\chi(1+a)]^2 - a [2\chi + a(2\chi-1)] \right\} + a [2\chi + a(2\chi-1)] \kappa^p = \\ & = [\chi(1+a)]^2 - 2a\chi(1+a) e^{-be^p} + (e^{-be^p})^2 \\ & (\chi - a^2\chi + a^2) + \{a [2\chi + a(2\chi-1)] \kappa^p\} = \{[\chi(1+a)] - [a e^{-be^p}]\}^2 \end{aligned} \quad (\text{An-B.26})$$

de donde resulta:

$$e^{-be^p} = \frac{1}{a} \left\{ \chi(1+a) - \sqrt{\vartheta(\kappa^p)} \right\} \quad (\text{An-B.27})$$

siendo: $\vartheta(\kappa^p) = (\chi - a^2\chi + a^2) + \{a [2\chi + a(2\chi-1)] \kappa^p\}$. Sustituyendo la ec.(An-B.27) en la ec.(An-B.20), se obtiene:

$$\sigma(\kappa^p) = \sigma^0 \left\{ \frac{\chi(1+a)}{a} \left[\chi(1+a) - \sqrt{\vartheta(\kappa^p)} \right] - \left[\frac{1}{a} \left\{ \chi(1+a) - \sqrt{\vartheta(\kappa^p)} \right\}^2 \right] \right\} \quad (\text{An-B.28})$$

de donde resulta la expresión de tensión uniaxial en función de la variable de daño plástico:

$$\sigma(\kappa^p) = \frac{\sigma^0}{a} \left\{ \chi(1+a) \sqrt{\vartheta(\kappa^p)} - \vartheta(\kappa^p) \right\} \quad (\text{An-B.29})$$

de donde surge su derivada como:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(\kappa^p)}{d\kappa^p} &= \frac{d\sigma(\kappa^p)}{d\vartheta(\kappa^p)} \frac{d\vartheta(\kappa^p)}{d\kappa^p} \\ \frac{d\sigma(\kappa^p)}{d\kappa^p} &= \sigma^0 \left\{ \frac{\chi(1+a)}{2\sqrt{\vartheta(\kappa^p)}} - 1 \right\} \{2\chi + a(2\chi-1)\} \end{aligned} \quad (\text{An-B.30})$$

El máximo de la función expresada en la ec.(An-B.29), se encuentra para $a > 0$; al anular su derivada; esto es:

$$\frac{d\sigma(\kappa^p)}{d\kappa^p} = 0 \quad \rightarrow \quad \chi(1+a) = 2\sqrt{\theta(\kappa^p)}$$

$$[\theta(\kappa^p)]^{pic} = \left(\frac{\chi^{pic}}{2}\right)^2 (1+a)^2 \quad (An-B.31)$$

sustituyendo en ésta $\theta(\kappa^p)$ por su expresión, se obtiene la siguiente ecuación

$$\text{cuadrática en } \chi^{pic} : -(\chi^{pic})^2 + \chi^{pic} \underbrace{\left[\frac{4}{(1+a)^2} (1-a^2 + 2a(\kappa^p)^{pic} + 2a^2(\kappa^p)^{pic}) \right]}_B +$$

$$+ \underbrace{\frac{4a^2}{(1+a)^2} (1 - (\kappa^p)^{pic})}_c = 0 \quad , \text{ que permite obtener el valor de } \chi^{pic} \text{ para el que}$$

se produce el pico de tensión.

Sustituyendo la ec.(An-B.31) en la ec.(An-B.29), resulta el valor de la tensión en el pico, en función de los parámetros a y χ^{pic} . Esto es:

$$\sigma^{pic} = \frac{\sigma^0}{a} \left(\frac{\chi^{pic}}{2}\right)^2 (1+a)^2 \quad (An-B.32)$$

de donde resulta la siguiente ecuación cuadrática en a :

$$a^2 - a \cdot 2 \left[\frac{2}{(\chi^{pic})^2} \frac{\sigma^{pic}}{\sigma^0} - 1 \right] + 1 = 0 \quad , \text{ cuya raíz máxima vale:}$$

$$a = 2 \left(\frac{\sigma^{pic}}{(\chi^{pic})^2 \sigma^0} \right) - 1 + 2 \sqrt{\left(\frac{\sigma^{pic}}{(\chi^{pic})^2 \sigma^0} \right)^2 - \left(\frac{\sigma^{pic}}{(\chi^{pic})^2 \sigma^0} \right)} \quad (An-B.33)$$

(CAPITULO IV) ANEXO C

CRITERIO DE FLUENCIA DE MOHR-COULOMB MODIFICADO.

An-C.1.- CRITERIO DE FLUENCIA DE MOHR-COULOMB MODIFICADO.

La utilización del criterio de fluencia original de Mohr-Coulomb para materiales del tipo del hormigón, presenta el inconveniente de no cumplir con la *relación inicial entre la resistencia uniaxial de tracción y compresión* $R^0 = |\sigma_c^0|/|\sigma_t^0|$ para *ángulos de rozamiento interno* ϕ comprendidos dentro de los valores naturales del hormigón, $30^\circ \leq \phi \leq 35^\circ$ (*apart. Ap-I.3.f*). Entre las soluciones que se adoptan habitualmente para resolver el problema, está la de aumentar este ángulo de rozamiento interno hasta alcanzar la relación inicial de resistencia uniaxial requerida. No obstante, ésta no es una solución si se trabaja con plasticidad asociada, pues el criterio de Mohr-Coulomb definido como superficie de potencial plástico con un ángulo de dilatancia $\psi = \phi$, produciría en el sólido un efecto excesivo del *fenómeno de dilatancia* (*apart. IV.4.d*). Debido a esto, se presenta

la necesidad de utilizar una regla de flujo no-asociada $\frac{\partial G}{\partial \sigma} \neq \frac{\partial F}{\partial \sigma}$ con el fin de controlar el incremento de deformación plástica volumétrica $\dot{\epsilon}_v^p$. Otra solución que se utiliza muy a menudo, es la de limitar el dominio del criterio de fluencia de Mohr-Coulomb en la zona de tracción total, dentro del espacio de tensiones principales, con un *criterio de barrera* que no es otra cosa que una *disminución de tensión* llevada a cabo mediante el criterio de Rankine ^{[33][126]} (*apart. Ap-I.3.f*). Pero esta combinación de criterios (Mohr-Coulomb con Rankine), adolece de algunos inconvenientes que se indican en el *apart. Ap-I.3.f*.

Con el fin de poder trabajar con plasticidad asociada, y de evitar el inconveniente que presenta la utilización de la función de Mohr-Coulomb definida con un ángulo de rozamiento interno muy alto (*apart. Ap-I.3.f*), se propone en este apartado una *simple modificación del criterio original* antes mencionado, consistente en afectar la tensión principal mayor σ_1 de un parámetro de ajuste

α_R que permite regular la relación de resistencia uniaxial, hasta cumplir con el valor deseado. Esto es, a partir de la ec.(Ap-1.84) se tiene:

$$\mathcal{F}(\sigma, c, \phi, \alpha_R) = \left(\frac{\alpha_R \sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) + \left(\frac{\alpha_R \sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \sin \phi - c \cos \phi = 0 \quad (\text{An-C.1})$$

siendo:

$\sigma_1 = \sigma^{\max}$: Tensión principal mayor ;

$\sigma_3 = \sigma^{\min}$: Tensión principal menor ;

c : Cohesión interna entre partículas del sólido. Apart. IV.4.b. ;

ϕ : Ángulo de rozamiento interno entre partículas del sólido. Apart. IV.4.c.

α_R : Parámetro de ajuste de la tensión principal mayor σ_1 .

operando algebraicamente con ésta, puede ser presentada en forma análoga a la ec.(Ap-1.89):

$$\sigma^{\min} = \alpha_R \sigma^{\max} R_{Mohr} - 2 c \sqrt{R_{Mohr}} \quad (\text{An-C.2})$$

siendo:

$$R^0 = R_{Mohr} = \left. \frac{|\sigma_c^0|}{|\sigma_T^0|} \right|_{Mohr} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) ,$$

A partir de la ec.(An-C.2) se puede obtener el valor de α_R necesario para cumplir con la relación de resistencia uniaxial requerida $R'_{Mohr} = \alpha_R R_{Mohr}$, cualquiera que sea el ángulo de rozamiento interno ϕ que se proponga (cuidando que este ángulo esté comprendido entre $0^\circ < \phi < 90^\circ$). Esto es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{para: } \sigma^{\max} = 0 \quad \longrightarrow \quad \sigma^{\min} = -2 c \sqrt{R_{Mohr}} \\ \text{para: } \sigma^{\min} = 0 \quad \longrightarrow \quad \sigma^{\max} = \frac{2 c}{\alpha_R \sqrt{R_{Mohr}}} \end{array} \right.$$

(An-C.3)

resultando como es obvio:

$$R^0 = R'_{Mohr} = \frac{|\sigma_c^0|}{|\sigma_T^0|} = \frac{|\sigma^{\min}|}{|\sigma^{\max}|} = \frac{2 c \sqrt{R_{Mohr}}}{\frac{2 c}{\alpha_R \sqrt{R_{Mohr}}}} = \alpha_R R_{Mohr}$$

obteniendose, a partir de esta última, la expresión del ángulo de rozamiento interno ϕ , en función de la relación de resistencia uniaxial requerida R'_{Mohr} , y el parámetro de ajuste α_R :

$$\phi = 2 \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{R'_{Mohr}}{\alpha_R}} \right) - \frac{\pi}{4} \right] \quad (An-C.4)$$

Para formular la ec.(An-C.1) en función de los invariantes del tensor de tensiones σ y de su desviador s , es necesario partir de la expresión de las tensiones principales en función de dichos invariantes (ec.(An-F.35)). Esto es:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{2 \sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\theta) \\ \sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) \end{Bmatrix} + \frac{I_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (An-C.5)$$

pero dado que el criterio de Mohr-Coulomb no tiene en cuenta la tensión principal intermedia σ_2 , se obtiene de la anterior:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} (J_2)^{1/2} \sin\left(\theta + 2\frac{\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} (J_2)^{1/2} \left[\sin\theta \cos\left(\theta + 2\frac{\pi}{3}\right) + \cos\theta \sin\left(\theta + 2\frac{\pi}{3}\right) \right] + \frac{I_1}{3} \\ \sigma_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}} (J_2)^{1/2} \sin\left(\theta + 4\frac{\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} (J_2)^{1/2} \left[\sin\theta \cos\left(\theta + 4\frac{\pi}{3}\right) + \cos\theta \sin\left(\theta + 4\frac{\pi}{3}\right) \right] + \frac{I_1}{3} \end{aligned} \right.$$

operando con éstas, se llega a:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} (J_2)^{1/2} \sin\theta + (J_2)^{1/2} \cos\theta + \frac{I_1}{3} = \sqrt{J_2} \left(\cos\theta - \frac{\sin\theta}{\sqrt{3}} \right) + \frac{I_1}{3} \\ \sigma_3 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} (J_2)^{1/2} \sin\theta - (J_2)^{1/2} \cos\theta + \frac{I_1}{3} = \sqrt{J_2} \left(-\cos\theta - \frac{\sin\theta}{\sqrt{3}} \right) + \frac{I_1}{3} \end{aligned} \right.$$

(An-C.6)

de donde resulta :

$$(\alpha_R \sigma_1 - \sigma_3) = \sqrt{J_2} \left[(1 - \alpha_R) \cos\theta + \frac{(1 - \alpha_R)}{\sqrt{3}} \sin\theta \right] + \frac{I_1}{3} (\alpha_R - 1)$$

$$y: (\alpha_R \sigma_1 + \sigma_3) = \sqrt{J_2} \left[(1 + \alpha_R) \cos\theta - \frac{(1 + \alpha_R)}{\sqrt{3}} \sin\theta \right] + \frac{I_1}{3} (\alpha_R + 1)$$

(An-C.7)

sustituyendo estas dos últimas en la ec.(An-C.1), resulta la función de Mohr-Coulomb, expresada en forma análoga a la ec.(Ap-1.85):

$$\mathcal{F}(I_1, J_2, \theta, c, \phi, \alpha_R) = \frac{I_1}{3} \mathbb{K}_3 + \sqrt{J_2} \left(\mathbb{K}_1 \cos \theta - \mathbb{K}_2 \frac{\sin \theta \sin \phi}{\sqrt{3}} \right) - c \cos \phi = 0 \quad (\text{An-C.8})$$

siendo:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_1 &= \frac{(\alpha_R + 1)}{2} - \frac{(1 - \alpha_R)}{2} \sin \phi \\ \mathbb{K}_2 &= \frac{(\alpha_R + 1)}{2} - \frac{(1 - \alpha_R)}{2} \frac{1}{\sin \phi} \\ \mathbb{K}_3 &= \frac{(\alpha_R + 1)}{2} \sin \phi - \frac{(1 - \alpha_R)}{2} = \mathbb{K}_2 \sin \phi \end{aligned}$$

También se puede escribir ésta en función de los invariantes definidos en el espacio de Westergard. Esto es, multiplicando la ec.(An-C.8) por $\sqrt{3}$, resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\xi, \rho, \theta, c, \phi, \alpha_R) &= \\ &= \sqrt{2\xi} \mathbb{K}_3 + \sqrt{3\rho} \left(\mathbb{K}_1 \cos \theta - \mathbb{K}_2 \frac{\sin \theta \sin \phi}{\sqrt{3}} \right) - \sqrt{6}c \cos \phi = 0 \quad (\text{An-C.9}) \end{aligned}$$

expresión que da una superficie de fluencia con meridianos rectos, y que permite ajustar la relación de resistencia uniaxial para un dado ángulo de rozamiento interno fig.(An-C.1).

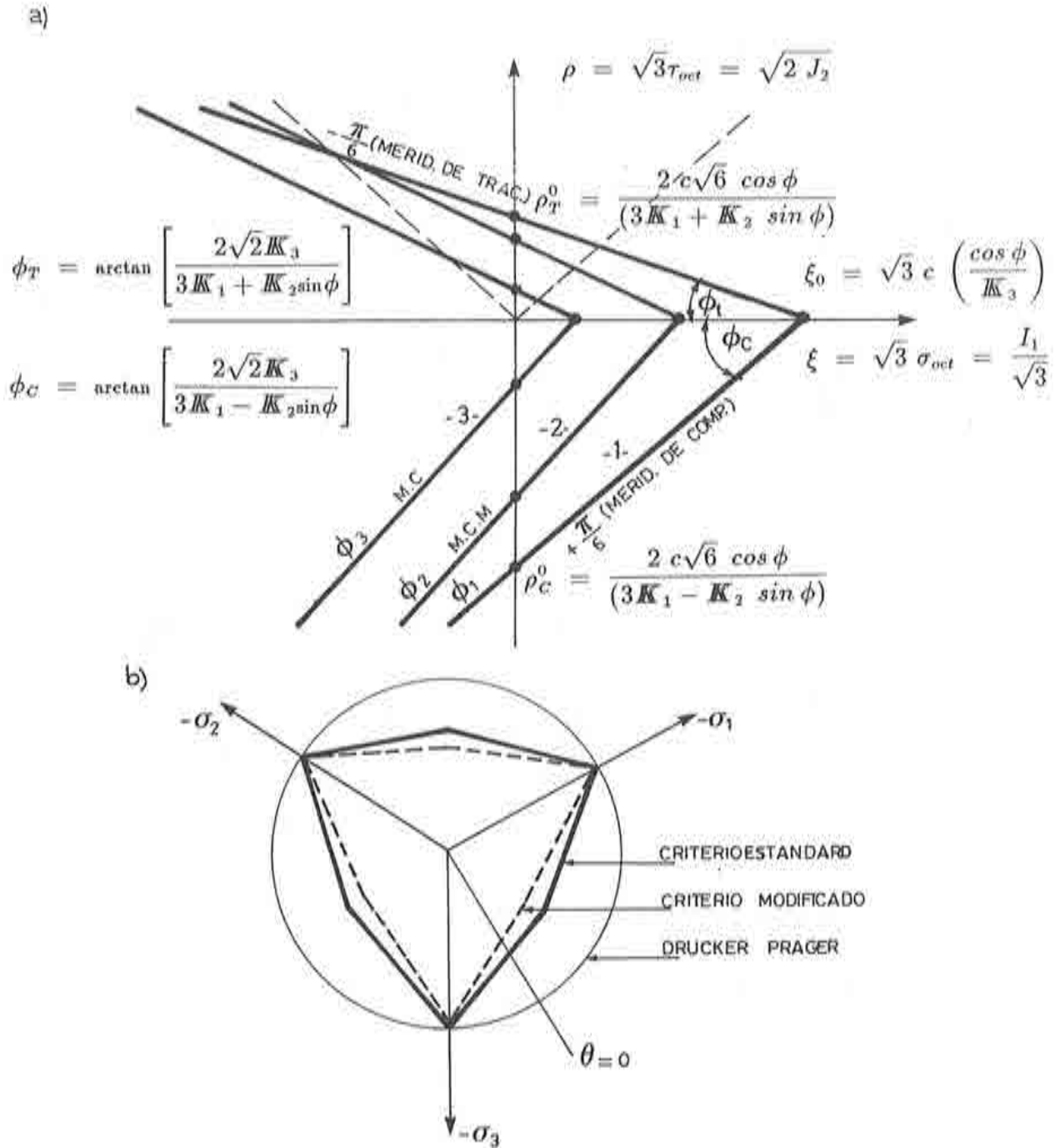


fig.(An-C.1): Criterio de fluencia de Mohr-Coulomb modificado: a) Según los meridianos de tracción y compresión máxima. b) Según un plano octaédrico cualquiera.

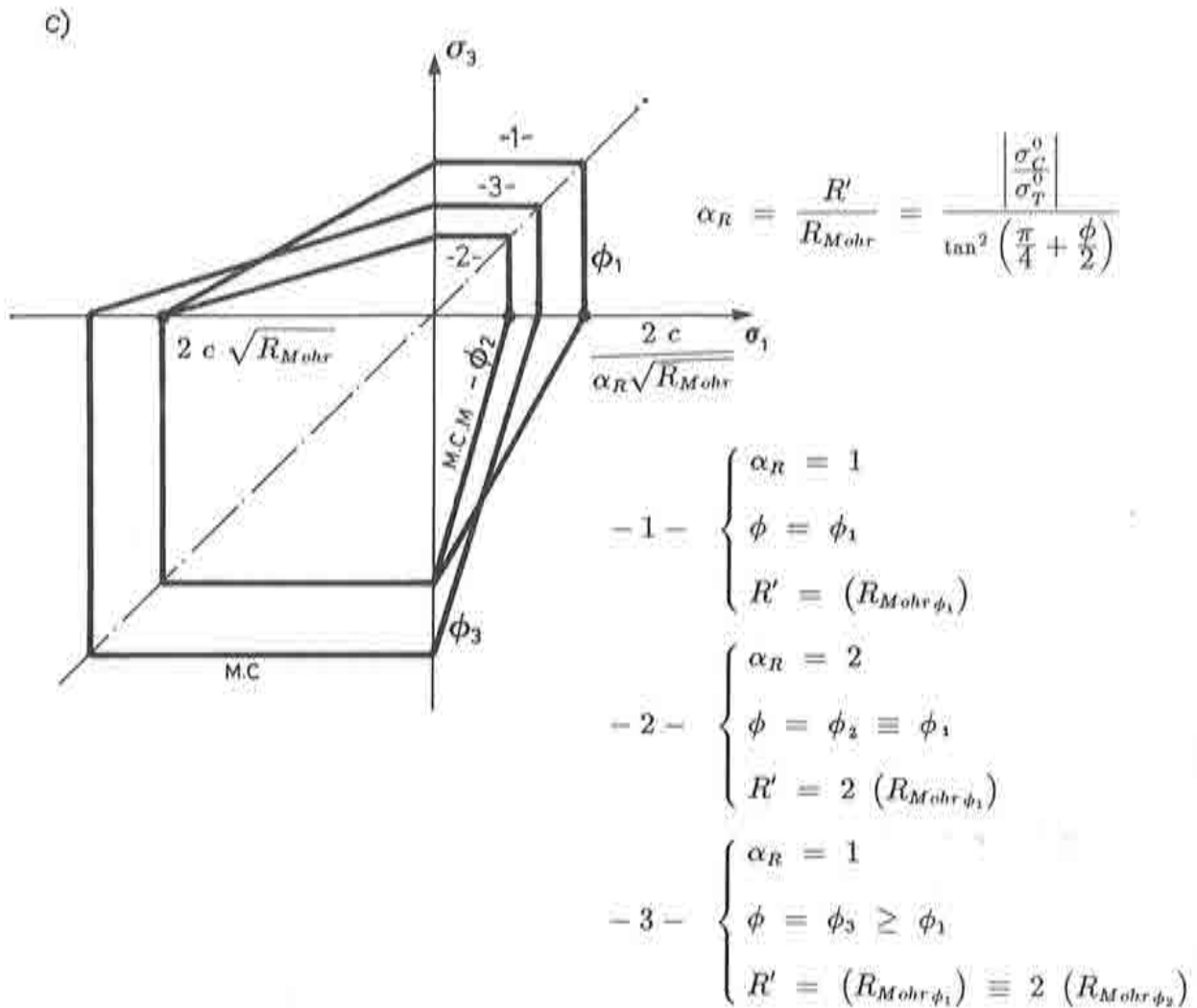


fig.(An-C.1): Criterio de fluencia de Mohr-Coulomb modificado:
 $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$.

c) Según el plano principal

An-C.2.- REGLA DE FLUJO ASOCIADA A LA FUNCION DE FLUENCIA DE MOHR-COULOMB MODIFICADO.

La regla de flujo asociada a esta *función modificada*, para un problema sin degradación de rigidez, resulta de una generalización de la expresión correspondiente a la función original de Mohr-Coulomb. Expresando el *vector de flujo plástico* en la forma detallada en el *apart. An-G.1*, a partir de los invariantes del tensor de tensión y su desviador, resulta:

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma} = \mathbf{g} = C_1 \mathbf{g}_1 + C_2 \mathbf{g}_2 + C_3 \mathbf{g}_3 \quad ; \quad \forall \quad -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6} \quad (\text{An-C.10})$$

donde los vectores \mathbf{g}_1 , \mathbf{g}_2 , y \mathbf{g}_3 son independientes de la función de potencial plástico (*apart. An-G.1*), en tanto las constantes C_i sí dependen de esta función, y valen:

$$C_1 = \frac{\partial G}{\partial I_1} = \frac{\mathbb{K}_3}{3} \quad ;$$

$$C_2 = \frac{\partial G}{(J_2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\partial G}{\partial \theta} \frac{\tan(3\theta)}{(J_2)^{\frac{1}{2}}} = \left(\mathbb{K}_1 \cos \theta - \mathbb{K}_2 \frac{\sin \theta \sin \phi}{\sqrt{3}} \right) -$$

$$- \frac{\tan(3\theta)}{(J_2)^{\frac{1}{2}}} \left(-\mathbb{K}_1 \sin \theta - \mathbb{K}_2 \frac{\cos \theta \sin \phi}{\sqrt{3}} \right)$$

$$C_2 = \cos \left[\mathbb{K}_1 (1 + \tan(3\theta) \tan \theta) + \mathbb{K}_2 \frac{\sin \phi}{\sqrt{3}} (\tan(3\theta) - \tan \theta) \right] \quad ;$$

$$C_3 = -\frac{\partial G}{\partial \theta} \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta)} \frac{1}{(J_2)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$C_3 = \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta)} \frac{(J_2)^{\frac{1}{2}}}{(J_2)^{\frac{3}{2}}} \left(-\mathbb{K}_1 \sin \theta - \mathbb{K}_2 \frac{\cos \theta \sin \phi}{\sqrt{3}} \right)$$

$$C_3 = \frac{(\mathbb{K}_1 \sqrt{3} \sin \theta + \mathbb{K}_2 \cos \theta \sin \phi)}{(2J_2 \cos(3\theta))} \quad ;$$

Para salvar las singularidades que se presentan en la definición del flujo plástico, en correspondencia con los puntos angulosos, se sigue el método del *redondeo de*

aristas (*apart. Ap-I.3.g*). Para ello, se sustituyen los valores de θ correspondiente a cada punto singular en la superficie de Mohr-Coulomb *ec.(An-C.8)*, de donde resulta una particularización de ésta en las aristas.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para: } \theta = \frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{I_1}{3} \mathbb{K}_3 + \frac{\sqrt{J_2}}{2} \left[\mathbb{K}_1 \sqrt{3} - \mathbb{K}_2 \frac{\sin \phi}{\sqrt{3}} \right] - c \cos \phi = 0 \\ \text{Para: } \theta = -\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{I_1}{3} \mathbb{K}_3 + \frac{\sqrt{J_2}}{2} \left[\mathbb{K}_1 \sqrt{3} + \mathbb{K}_2 \frac{\sin \phi}{\sqrt{3}} \right] - c \cos \phi = 0 \end{array} \right.$$

(An-C.11)

con lo que se obtienen las siguientes constantes C_i para los puntos singulares:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para: } \theta = \frac{\pi}{6} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{1}{3} \mathbb{K}_3 \\ C_2 = \frac{1}{2} \left[\mathbb{K}_1 \sqrt{3} - \mathbb{K}_2 \frac{\sin \phi}{\sqrt{3}} \right] \\ C_3 = 0 \end{array} \right. \\ \text{Para: } \theta = -\frac{\pi}{6} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{1}{3} \mathbb{K}_3 \\ C_2 = \frac{1}{2} \left[\mathbb{K}_1 \sqrt{3} + \mathbb{K}_2 \frac{\sin \phi}{\sqrt{3}} \right] \\ C_3 = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(An-C.12)

(CAPITULO IV) ANEXO D**ABLANDAMIENTO POR DEFORMACION COMO PROPIEDAD DEL MATERIAL.
DIRECCIONALIDAD DEL DAÑO PLASTICO - POST-PROCESO DE RESULTADOS.****An-D.1.- ABLANDAMIENTO POR DEFORMACION COMO PROPIEDAD DEL MATERIAL.****An-D.1.a- Introducción.**

Los materiales friccionales sometidos a procesos inelásticos provocados por la acción de deformaciones impuestas, exhiben después de un cierto límite un fenómeno denominado *ablandamiento*. Durante un proceso de carga* cuasi-estático uniaxial, este ablandamiento se presenta físicamente como una disminución de la tensión total acompañado de un incremento en las deformaciones [7]. Este mismo concepto ha sido expresado por K.Z. Valanis en el espacio *n-dimensional* [34][116][140], de la siguiente forma:

$$\dot{\sigma}^T \dot{\epsilon} < 0 \quad , \quad (\text{An-D.1})$$

Esta ecuación, establece una *condición suficiente* para definir la existencia de ablandamiento durante el comportamiento de un punto del sólido. En la ec.(An-D.1), el incremento temporal de tensión viene definido por la ec.(IV.103), como:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}_T^{sp}(\tilde{\mathbf{d}}^s, \tilde{\mathbf{d}}^p) \dot{\epsilon} \quad , \quad (\text{An-D.2})$$

donde $\mathbf{C}_T^{sp}(\tilde{\mathbf{d}}^s, \tilde{\mathbf{d}}^p)$ es el tensor de rigidez física tangente degradado, expresado como matriz de (6×6) . Sustituyendo la ec.(An-D.1) en la ec.(An-D.2), se obtiene la siguiente forma cuadrática:

$$\dot{\epsilon}^T \mathbf{C}_T^{sp}(\tilde{\mathbf{d}}^s, \tilde{\mathbf{d}}^p) \dot{\epsilon} < 0 \quad ; \quad \forall \quad \epsilon_{ij} \neq 0 \quad , \quad (\text{An-D.3})$$

* Nota: Entiendase el concepto de "carga", en el sentido dado por la "condición de consistencia plástica" de Prager ec.(Ap-1.58).

de donde se deduce que para que exista un proceso de *ablandamiento* en un punto del sólido, se debe cumplir que la matriz $C_T^{op}(\tilde{\mathbf{d}}^i, \tilde{\mathbf{d}}^j)$ sea definida negativa [7][116].

Como se ha mencionado en los apartados. IV.1 y IV.4.b, subsiste en el criterio de muchos investigadores, la hipótesis de que la micro-fisuración en los materiales friccionales, se debe a una pérdida instantánea de la cohesión intergranular (consecuencia del deslizamiento sufrido entre granos o partículas del sólido [11][23][44][95][97][120]), luego de superar ciertos límites de deformación. Debido a esto, se considera que el *ablandamiento* es un fenómeno inexistente a nivel intergranular [11], manifestándose solamente a nivel macroscópico, como consecuencia del *comportamiento promedio de una zona del sólido de dimensiones finitas*. Coincidente con este razonamiento, varios investigadores [50][51][52][110], han puesto en duda la validez del concepto de *ablandamiento como una propiedad de cada punto del material* (fenómeno local), considerando que es un *fenómeno de estructura o de conjunto* [43] (fenómeno no local) que provoca una situación indeseable de inobjetividad en la respuesta [50][51][52][140], y han propuesto modelos constitutivos que parten de la hipótesis de no admitir el *ablandamiento como una propiedad del material* [51]. No obstante, en total acuerdo con esta hipótesis, el modelo que se presenta realiza un *análisis numérico en el espacio discreto*, donde cada punto de este espacio representa el comportamiento de los infinitos puntos materiales encerrados en su área de influencia. Por ello, se considera que a este nivel, sí tiene sentido admitir el *ablandamiento como un fenómeno dependiente del material y del tamaño de la zona de influencia del punto en el espacio discreto*. Este concepto es aceptado implícitamente por distintos investigadores [5][7][11][12][14][18][23][26][30][54][56][123][124], quienes consideran de una u otra forma la *medida del punto discreto* en la ecuación constitutiva.

An-D.1.b- Introducción al fenómeno de localización de deformaciones y bifurcación en la respuesta de un sólido cargado.

Cuando el sólido ha sido deformado suficientemente dentro del rango plástico, más allá del pico de tensiones máximas [11], se observa frecuentemente que a partir de un cierto instante del proceso de carga cuasi-estático, se produce una *fuerte concentración de deformaciones* en una zona muy limitada [100][118], que en el presente modelo constitutivo se ha denominado *zona de daño plástico*. Este fenómeno, llamado también *localización de deformaciones*, ocurre en una gran variedad de materiales dúctiles y frágiles, y a menudo es el motivo que conduce a

la rotura del material ^{[100][118]}. Una vez que se inicia la localización, comienza a crecer la deformación en la zona dañada, acompañada de una disminución de la deformación (proceso de descarga) en la zona restante no-dañada ^{[11][18][89]} fig.(An-D.1). Según algunos investigadores ^{[11][18][89][100][118]}, la aparición del *fenómeno de localización de deformaciones* está ligado a una *bifurcación (apen. II)* en la respuesta de los puntos situados en la zona de daño. Esto coincide con algunos resultados numéricos obtenidos en el *cap. V*. También hay otros investigadores que consideran que los fenómenos de localización y bifurcación en la respuesta, no están asociados entre sí y ocurren en instantes diferentes ^[18].

La estructura teórica para el *análisis clásico de bifurcación en elasto-plasticidad*, ha sido presentada por R. Hill dentro de su teoría general de unicidad y estabilidad para sólidos elasto-plásticos (1958) ^{[69][89]}, donde relaciona la bifurcación en la respuesta con una localización de deformaciones en una banda, denominada banda transversal. Este estudio teórico, tema que no es objeto de la tesis, ha sido ampliado por Rudnicki and Rice (1975) ^[89], y en un reciente trabajo de K. Willam and N. Solbh ^[142] se considera que la bifurcación en la respuesta no sólo debe ser analizada a partir de un simple estudio de valores propios de $C_T^{np}(\mathcal{A}^e, \mathcal{A}^p)$, sino que también debe ser complementado con el estudio de las *condiciones críticas de propagación de ondas de aceleración plana*. Por ello, estos últimos autores proponen un análisis de valores propios del tensor acústico de segundo orden, o *matriz de localización* ^[100]: $Q_{T,jk}(\mathbf{n}) = n_i C_T^{np}{}_{ijkl} n_l$, donde \mathbf{n} representa el *vector normal al plano de discontinuidad de deformaciones* o plano de fallo, que se forma por efecto del fenómeno de la localización de deformaciones. Para mayores detalles sobre este tema, se recomienda consultar las referencias ^{[16][21][69][89][100][111][142]}.

An-D.1.c- Objetividad en la respuesta y su relación con la localización de deformaciones – Energías disipadas por unidad de área G^I y G^e .

Como se ha visto, el *ablandamiento* da origen a rigideces tangentes $C_T^{np}(\mathcal{A}^e, \mathcal{A}^p)$ definidas negativas y esto junto a la definición negativa de la *matriz acústica* Q_T , determinan la localización de deformaciones, fenómeno que podría estar ligado a la bifurcación de la respuesta en el punto ^[100]

El problema de la *objetividad en la respuesta* de los modelos basados en *formulaciones locales*, que consideran el *ablandamiento* como una propiedad

del material en el punto de análisis, no está totalmente aclarado, habiendo resultado de este tema una gran cantidad de opiniones controvertidas [6][7][11][12][14][18][23][26][30][31][50][51][52][54][56][116][118][123][124][140][146]. No obstante, se dará seguidamente una explicación al procedimiento que se ha utilizado en el presente modelo constitutivo, para garantizar la objetividad en la respuesta. Se parte aceptando como hipótesis, que la *localización de deformaciones* define una marcada *zona de daño plástico*, donde se disipa una energía plástica limitada al tamaño de esta zona, mientras tanto fuera de esta zona de daño se desarrolla un proceso de descarga elástico. De acuerdo a este razonamiento, la magnitud de la energía disipada dependerá de las dimensiones de la *zona de daño plástico*, a menos que este tamaño sea tenido en cuenta en la ley constitutiva del material.

Por simplicidad en la explicación, se tratará primeramente la objetividad en un hipotético modelo uniaxial y luego se extenderán las consideraciones al modelo propuesto.

An-D.1.c.1 Problema de objetividad en un hipotético modelo uniaxial.

En un problema uniaxial esquemático, como el de una simple barra constituida de un material homogéneo e isótropo y sin degradación de rigidez, de sección transversal constante fig.(An-D.1), que incluye el *ablandamiento* como propiedad del material, se puede ver en forma sencilla el comportamiento con localización de deformaciones, y también el problema de inobjetividad en la respuesta en caso de no considerar las dimensiones de la zona dañada en la ley constitutiva.

Si se somete la barra de la fig.(An-D.1) a sostenidos incrementos de desplazamientos ϵ en sus extremos, llegará el instante del proceso de carga cuasi-estático, en que el nivel de tensiones en cualquier punto del sólido habrá alcanzado la tensión de pico (punto C), o segundo límite de fallo (*apart. IV.4.b*). A partir de este punto se iniciará un proceso de carga con ablandamiento que continuará con una bifurcación en la respuesta como consecuencia de una localización de deformaciones en una zona del sólido de dimensiones L' .

La ecuación constitutiva uniaxial tangente, para un material sin degradación de rigidez, es:

$$\dot{\sigma} = E_T \dot{\epsilon} \quad , \quad (\text{An-D.4})$$

tal que aplicada al ejemplo propuesto, permite escribir:

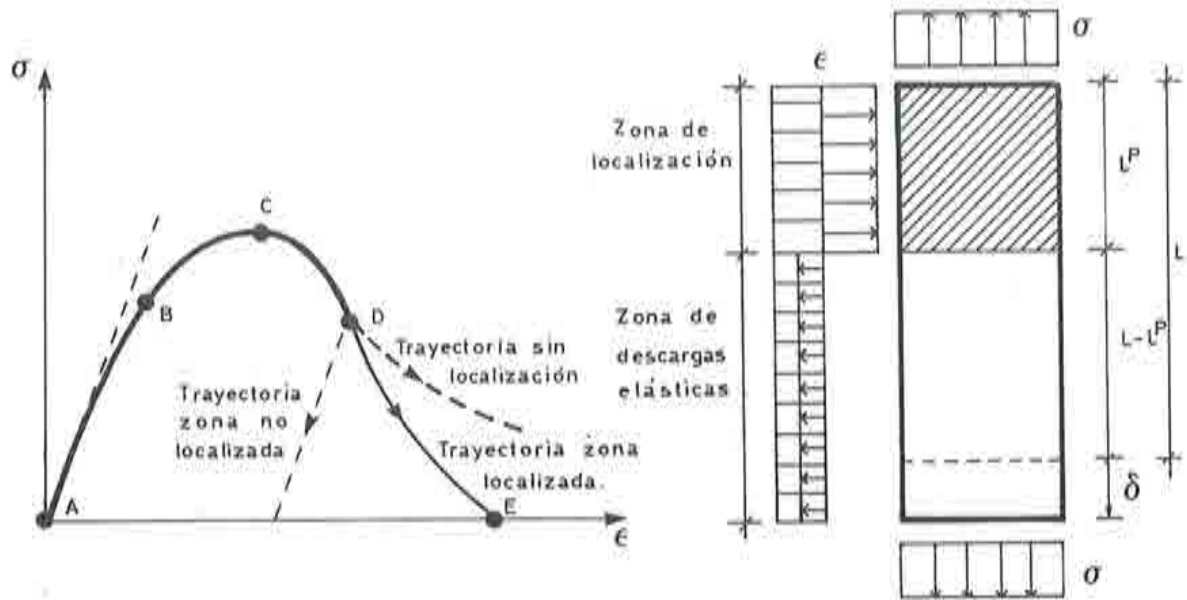


fig.(An-D.1): Localización del daño plástico en una barra sometida a incrementos de desplazamientos controlados en sus extremos.

$$\dot{u} = \left[\frac{L^p}{E_T} + \frac{(L - L^p)}{E_T} \right] \dot{\sigma} = \left[\frac{L^p}{E_T} + \frac{(L - L^p)}{E_S} \right] \dot{\sigma} \quad (\text{An-D.5})$$

donde L^p es la longitud de la zona dañada, E_S el módulo de elasticidad secante, y E_T el módulo de elasticidad tangente, que es negativo para un proceso elasto-plástico con ablandamiento. Para un proceso de carga de este tipo, se tiene que cuando crece \dot{u} decrece $\dot{\sigma}$, de donde resulta que la ecuación anterior se cumple siempre que:

$$\left[\frac{L^p}{E_T} + \frac{(L - L^p)}{E_S} \right] < 0 \quad , \quad (\text{An-D.6})$$

siendo ésta la condición que debe cumplir el tamaño de la zona dañada en función de las rigideces secante y tangente:

$$L \geq L^p \geq \frac{L}{1 - \frac{E_s}{E_T}} \quad (\text{An-D.7})$$

Esta condición ha sido establecida por Z. Bažant ^{[5][14]} (ver su generalización en el *apen-II*), y presentada también por N. Ottosen ^[104], con el fin de establecer una *criterio de estabilidad global para los materiales con ablandamiento por deformación*. Si el fenómeno de localización se produce durante el desarrollo de un proceso elasto-plástico uniaxial, se puede relacionar la ec.(An-D.7) con la pendiente de la curva uniaxial* $\sigma - \epsilon^p$ fig.(An-D.2). Así, esta pendiente puede ser expresada como una función del tamaño de la zona dañada. Esto es:

$$A' = \frac{d\sigma}{d\epsilon^p} = \frac{d\sigma}{(d\epsilon - d\epsilon^c)} = - \frac{E_s}{1 - \frac{E_s}{E_T}} \quad (\text{An-D.8})$$

sustituyendo ésta en la ec.(An-D.7), resulta:

* Nota: Para el caso particular de un material del tipo de Prandtl-Reus (*apart. Ap-I.3.c*), la pendiente de la curva uniaxial $\sigma - \epsilon^p$ coincide con el "parámetro de endurecimiento plástico" A ec.(Ap-I.51) ^[143]. Para este material, se tiene que: $\dot{\mathbf{h}}_{\kappa} = \sigma$ ec.(Ap-I.38), también se tiene una función de fluencia del tipo de la de Von-Mises: $\mathcal{F} = \sqrt{3}J_2 - \bar{\sigma}(\kappa) = 0$ ec.(Ap-I.73), y un incremento de trabajo plástico expresado por la ec.(Ap-I.39,b) $\dot{\kappa} = \bar{\sigma} \dot{\epsilon}^p$. Sustituyendo todo esto en la expresión del parámetro de endurecimiento plástico ec.(Ap-I.51), y considerando el teorema de Euler para funciones homogéneas de grado n en σ , se obtiene:

$$A = \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \left(\dot{\mathbf{h}}_{\kappa}^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right) \right] = \left[\frac{d\bar{\sigma}}{d\epsilon^p} \frac{1}{\bar{\sigma}} (\bar{\sigma}) \right] \equiv A' = \frac{d\bar{\sigma}}{d\epsilon^p}$$

En un caso general, para materiales que no coinciden con el de Prandtl-Reus, sólo se tiene proporcionalidad entre A y A' :

$$L \geq L^p \geq L \left[-\frac{A'}{E_s} \right] \quad (\text{An-D.9})$$

de donde se deducen las condiciones de extremo de A' fig.(An-D.2), las que coinciden con las de Pietruszczac-Mróz ^{[104][111]} :

$$\begin{cases} \text{si : } L^p \rightarrow L \Rightarrow | -A' | \rightarrow | E_s | ; & (\text{plasticidad con ablandamiento}) \\ \text{si : } L^p \rightarrow 0 \Rightarrow | -A' | \rightarrow 0 & , (\text{plasticidad perfecta}) \end{cases}$$

(An-D.10)

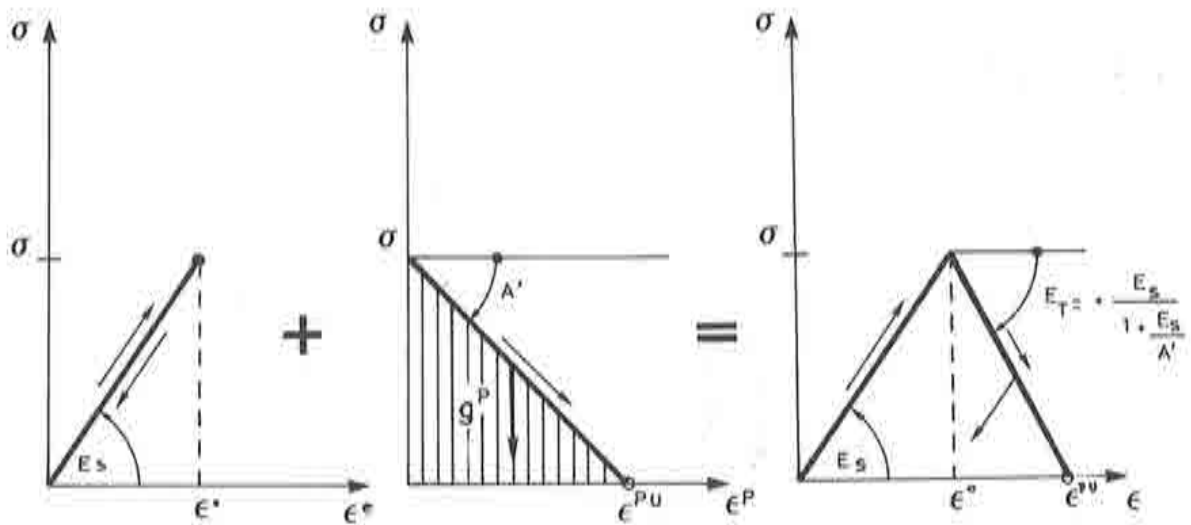


fig.(An-D.2): Esquema uniaxial de la respuesta elasto-plástica de un punto de un material con ablandamiento.

Por otro lado, para este problema uniaxial, la *densidad total de energía disipada* o *energía específica plástica* es igual al área encerrada por la curva $\sigma - \epsilon^p$, o sea:

$$g^p = \int_{t=0}^{\infty} \sigma^T \dot{\epsilon}^p dt = \int_{t=0}^{\infty} \sigma \dot{\epsilon}^p dt \quad , \quad (\text{An-D.11})$$

y la energía disipada por todo el sólido será:

$$W^p = \int_{V^p} g^p dV^p \quad (\text{An-D.12})$$

Se puede probar para este ejemplo simple, con ablandamiento lineal, que cualquiera sea el tamaño de la zona dañada L^p , siempre que cumpla con la ec.(An-D.9), se tendrá la misma energía disipada W^p . Para ello si la longitud de la zona dañada L^p se incrementa ϱ veces, para mantener la misma energía disipada al finalizar el proceso de carga cuasi-estático, será necesario corregir la pendiente A' de la curva uniaxial $\sigma - \epsilon^p$ en la misma proporción. Esto es:

$$\varrho L^p = L \left[- \frac{\varrho A'}{E_s} \right] \quad (\text{An-D.13})$$

resultando de aquí, para una función de ablandamiento lineal fig.(An-D.2), una deformación plástica última, igual a:

$$\epsilon^{pu} = \frac{\sigma^{pic}}{\varrho A'} \quad (\text{An-D.14})$$

y una densidad de energía disipada plásticamente, igual a:

$$g^p = \frac{1}{2} \frac{(\sigma^{pic})^2}{\varrho A'} \quad , \quad (\text{An-D.15})$$

que sustituida en la ec.(An-D.12) permite comprobar que la energía disipada en todo el volumen del sólido es independiente de ϱ , o sea:

$$W^p = \int_{eV^p} g^p dV^p = g^p \varrho V^p = \frac{1}{2} \frac{(\sigma^{pl})^2}{A'} V^p \quad (\text{An-D.16})$$

Como se ha visto, la objetividad ha sido lograda en función de la condición ec.(An-D.9), la que exige una dependencia entre la pendiente de la curva uniaxial $\sigma - \epsilon^p$ (o indirectamente la densidad de energía disipada) y la longitud de daño plástico, quedando la ley constitutiva del material ec.(An-D.4), para este caso particular:

$$\dot{\sigma} = E_T \dot{\epsilon} = \frac{E_S}{1 - \frac{E_S}{A'}} \dot{\epsilon} \quad (\text{An-D.17})$$

donde $A' = - E_S \frac{L^p}{L}$, por lo tanto el incremento de tensión resulta:

$$\dot{\sigma} = \left[E_S \frac{L^p}{L^p - L} \right] \dot{\epsilon}^p \quad (\text{An-D.18})$$

De esta expresión simple, se puede ver que el *ablandamiento* no es una propiedad exclusiva del material E_S , sino que depende también del tamaño de la zona dañada L^p . Se podría decir, que la ec.(An-D.18) constituye una forma de presentar una *formulación no-local* a partir de una ecuación constitutiva que originalmente dependía solamente del punto mismo (*formulación local*).

Es importante observar en la ec.(An-D.12), que la energía total disipada ha sido obtenida a través de una integración en el volumen dañado. Si se quiere, se puede integrar sobre el volumen total, previa consideración de la relación de tamaño que hay entre este volumen y el de la zona dañada. Esto es:

$$r_v = \frac{V^p}{V} \rightarrow dV^p = r_v dV \quad (\text{An-D.19})$$

sustituyendo ésta en la ec.(An-D.12), resulta:

$$W^p = \int_V g^p r_v dV \quad (\text{An-D.20})$$

Esta relación de tamaño, es otra forma de introducir la influencia del comportamiento no-local, sobre la energía específica disipada por cada punto dañado.

- **Energía específica plástica para un proceso de tracción uniaxial – Relación con la energía de fractura G^f .**

La mecánica de fractura, presenta la *energía de fractura por unidad de área* G^f ^{[10][40]} como una propiedad del material, y la define como *la energía que es necesario disipar para abrir una fisura de área unitaria*. Siguiendo con el esquema uniaxial propuesto, se tendrá una energía disipada por unidad de área, para una fisura totalmente abierta, igual a fig.(An-D.3) ^[112] :

$$G^f = \frac{W^f}{A^f} \quad (\text{An-D.21})$$

donde W^f es la energía disipada al final del proceso de carga cuasi-estático, y A^f el área total de la fisura abierta.

Para un modelo de material basado en la *mecánica de los sólidos continuos*, como el que se presenta, será esta energía el parámetro vinculante con la *mecánica de fractura*, que permita obtener objetividad en la respuesta ^[10]. Para ello, se hace la hipótesis de que la energía total disipada durante un proceso de tracción uniaxial elasto-plástico con ablandamiento y sin degradación de rigidez W_T^p , es igual a la energía total disipada por un fenómeno de fractura W^f . Esto es:

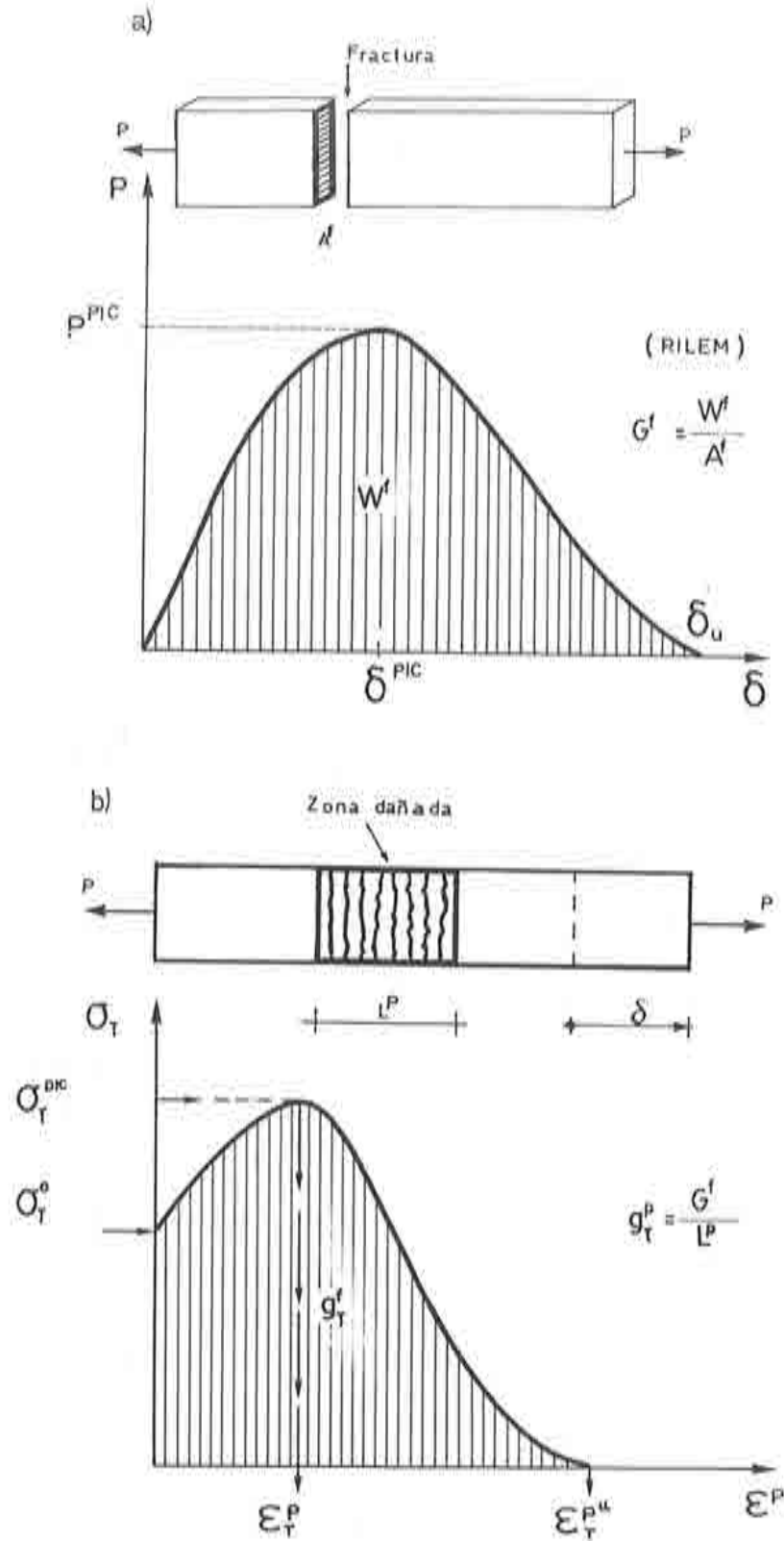


fig.(An-D.3): Esquema de interpretación del daño: a) por la mecánica de fractura, y b) por la mecánica del continuo.

$$W^f = G^f A^f \equiv W_T^p = \int_V g_T^p \frac{V^p}{V} dV \quad (\text{An-D.22})$$

siendo:

g_T^p : la energía específica plástica para un proceso de tracción pura.

Considerando que en el continuo la longitud de la zona dañada vale $L^p = V^p/A^f$ fig.(An-D.3), resulta de la ec.(An-D.22) la siguiente energía de fractura:

$$G^f = \int_V g_T^p \frac{L^p}{V} dV \quad (\text{An-D.23})$$

de donde resulta para este simple ejemplo, la siguiente relación entre el tamaño de la zona dañada y la energía específica plástica ⁽¹⁰⁾ :

$$G^f = g_T^p L^p$$

6

$$g_T^p = \frac{G^f}{L^p} \quad (\text{An-D.24})$$

De esta forma, para cada L^p se obtiene una energía específica g_T^p , que sustituida en la ec.(An-D.11) o en la ec.(An-D.14), permite encontrar el parámetro A^f que interviene en la rigidez tangente y permite definir la ecuación constitutiva ec.(An-D.17).

- Energía específica plástica para un proceso de compresión uniaxial - Relación con la energía G^c

Si el proceso de carga es de *compresión pura*, sin degradación de rigidez el *daño plástico* vendrá provocado por distintos mecanismos, tales como

aplastamiento, distorsión y fisuración transversal a la deformación inelástica de estiramiento (casi paralela a la dirección de compresión máxima [44][72][129]). Consecuentemente, si G^c fuese una propiedad del material, no podría ser identificada con ninguno de los mecanismos físicos antes mencionados. Mas bien, ésta puede ser definida hipotéticamente en función de la energía disipada a partir del instante en que se inicia el proceso de localización de deformaciones (en la rama de ablandamiento), dominio en que la respuesta del sólido se torna sensible al tamaño que tiene la malla de elementos finitos en la zona donde se ha localizado el daño plástico. De acuerdo con esto, una definición consistente de la energía específica plástica, para un proceso de compresión pura g_C^p , surge de considerar la siguiente forma aditiva: $g_C^{p0} + g_C^{p1}$, donde g_C^{p0} es el área que existe por debajo de la curva $\sigma - \epsilon^p$ desde el origen hasta el punto donde se inicia la localización de deformaciones fig.(An-D.4), y g_C^{p1} es la parte restante del área encerrada por la misma curva, por lo que es identificable con los mecanismos de *fisuración transversal por localización de deformaciones inelásticas de estiramiento*. Debido a esto, g_C^{p0} es una energía independiente de la malla de elementos finitos y por lo tanto es una propiedad del material, en cambio g_C^{p1} se postula, por conveniencia, como: $g_C^{p1} = G^{c1} / L^p$, donde L^p es la longitud de la zona dañada y G^{c1} se adopta como una propiedad del material, que puede obtenerse de la siguiente relación:

$$G^{c1} = \frac{W^{c1}}{A^f} \quad , \quad (\text{An-D.25})$$

donde W^{c1} es la energía disipada desde que se inicia la localización de deformaciones en una banda, hasta el final del proceso de carga cuasi-estático, y A^f el área total de las fisuras abiertas fig.(An-D.4).

La explicación del concepto antes mencionado, parte de admitir la hipótesis de que la energía total disipada durante un proceso de compresión uniaxial elasto-plástico con ablandamiento W_C^p , es igual a la energía total disipada en un ensayo uniaxial de compresión uniaxial W^c , que vale:

$$W^e = W^{e0} + W^{e1} = W^{e0} + G^{e1} A' \equiv W_C^p = \int_V g_C^{p0} dV + \int_V g_C^{p1} \frac{V^p}{V} dV ,$$

(An-D.26)

donde W^{e0} y W^{e1} son las energías disipadas por el sólido antes y después del límite de localización respectivamente. Considerando que en el continuo la longitud de la zona dañada vale $L^p = V^p/A'$ fig.(An-D.4), resulta de la ec.(An-D.26) la siguiente energía por unidad de área dañada:

$$G^{e1} = \int_V g_C^{p1} \frac{L^p}{V} dV$$

(An-D.27)

de donde resulta para este simple ejemplo, la siguiente relación entre el tamaño de la zona dañada y la energía específica plástica:

$$G^{e1} = g_C^{p1} L^p$$

6

(An-D.28)

$$g_C^{p1} = \frac{G^{e1}}{L^p}$$

De esta forma, para cada L^p se obtiene una energía específica g_C^{p1} , que sustituida en la ec.(An-D.11) o en la ec.(An-D.14), permite encontrar el parámetro A' que interviene en la rigidez tangente y permite definir la ecuación constitutiva ec.(An-D.17).

• Particularización de la longitud de daño al dominio discreto.

Se hace la hipótesis de que una fisura real (discontinuidad en la masa del sólido) puede ser representada en la *mecánica de los medios continuos* por una zona

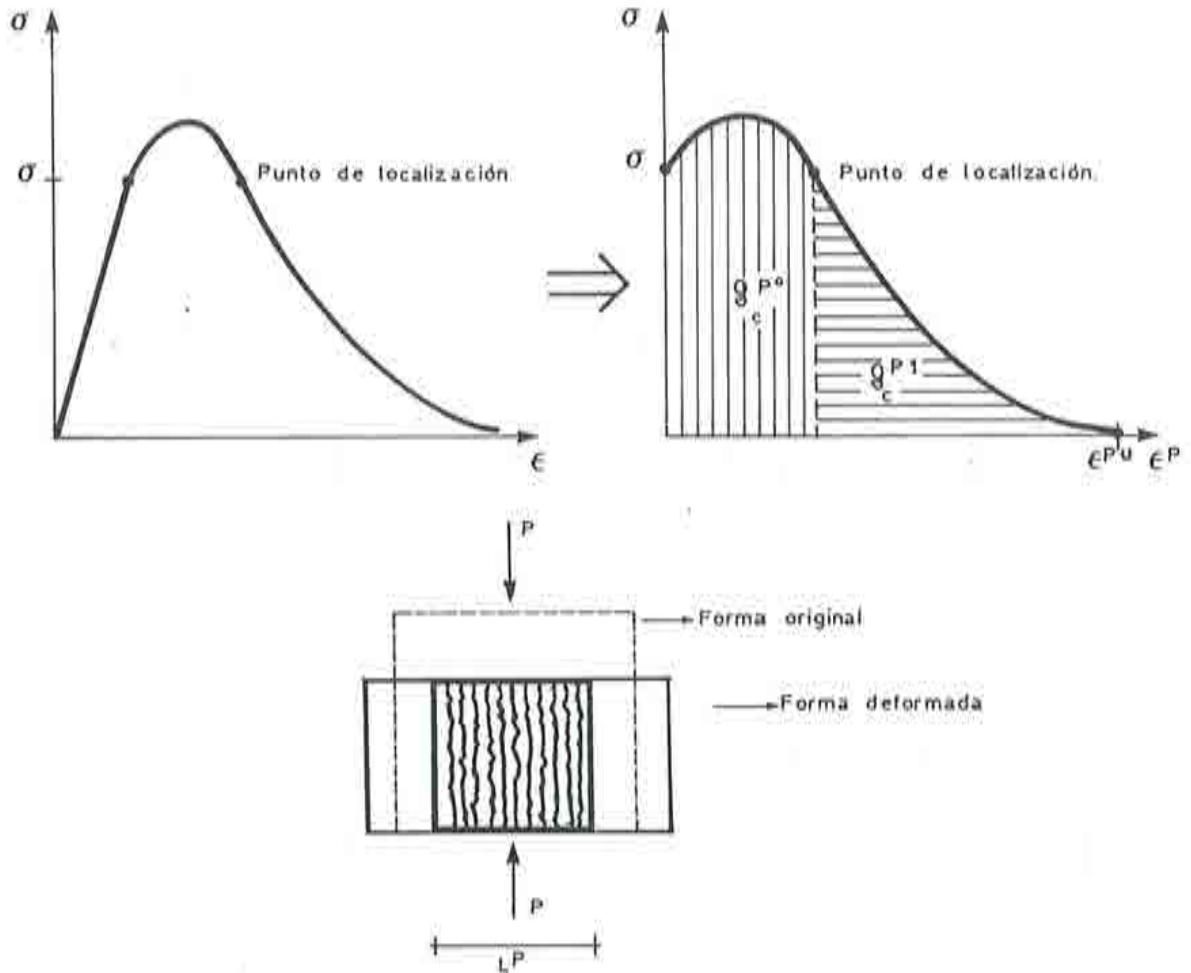


fig.(An-D.4): Esquema de interpretación del daño a compresión

dañada de dimensiones finitas (zona de daño plástico), donde las deformaciones tienden a ser muy grande respecto de las que se desarrollan en la zona no dañada. Por otro lado, también se admite como hipótesis, que en un *sólido* real como el hormigón, en una zona de longitud L^p , se desarrolla un número finito de microfisuras separadas una de otras una longitud L' que depende del tamaño del árido grueso ^[14] fig.(An-D.5). Según esto último, se tiene que en la longitud dañada L^p caben $N^f = L^p/L'$ microfisuras, por lo tanto la ec.(An-D.24) y la ec.(An-D.28) se pueden escribir respectivamente, como:

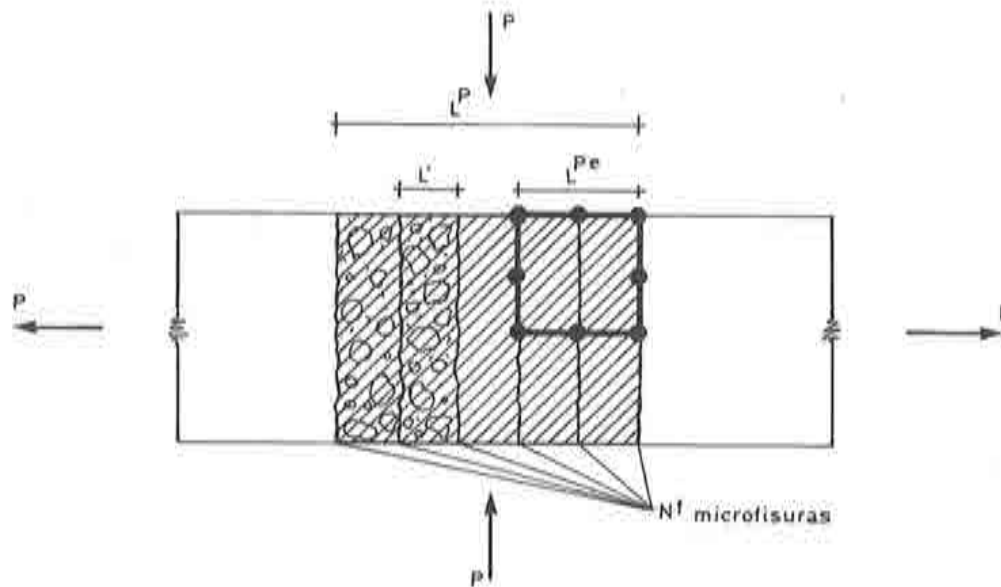


fig.(An-D.5): Micro-fisuración y separación entre micro-fisuras para un material del tipo del hormigón.

$$g_r^p = \frac{G^f}{N^f L'} \quad y \quad g_c^{p,1} = \frac{G^{c,1}}{N^f L'} \quad (An-D.29)$$

Si ahora se discretiza el dominio a través de elementos finitos, resulta que cada elemento podrá contener un número finito de micro-fisuras, igual a:

$$N^f = \frac{L^{p^o}}{L'} \quad (An-D.30)$$

donde L^{p^o} es la longitud característica del elemento finito en la dirección perpendicular a las micro-fisuras. Sustituyendo esta última en la ec.(An-D.29), resultan las energías específicas plásticas afectadas de la longitud característica del elemento finito:

$$g_T^p = \frac{G^I}{L^{p^e}} \quad y \quad g_C^{p,1} = \frac{G^{e,1}}{L^{p^e}} \quad , \quad (An-D.31)$$

para un proceso de tracción y compresión respectivamente. Así , para cada elemento finito, conocida su longitud característica L^{p^e} y las propiedades del material (G^I o $G^{e,1}$), se pueden calcular sus energías específicas plásticas (g_T^p o $g_C^{p,1}$). En función de éstas, se determinan las correspondientes pendientes de las curvas uniaxiales $\sigma - \epsilon^p$ a tracción y compresión, a partir del punto en que se inicia la localización de deformaciones, y con estas últimas se determinan las rigideces tangentes correspondientes:

$$\dot{\sigma} = E_T \dot{\epsilon} = \frac{E_S}{1 - \frac{E_S}{A'}} \dot{\epsilon} \quad (An-D.32)$$

con:

$$A' = A'^e = \infty \quad , \quad \text{para todo proceso elástico} \quad ,$$

$$A' = A'^e = \left\{ \begin{array}{l} A'^e \left(\frac{G^I}{L^{p^e}} \right) \quad , \quad \text{para un comportamiento elasto-plástico a} \\ \text{tracción con ablandamiento} \quad , \\ A'^e \left(g_C^{p,0} \right) \quad , \quad \text{para un comportamiento elasto-plástico a compresión} \\ \text{previo a la localización de deformaciones} \quad , \\ A'^e \left(\frac{G^{e,1}}{L^{p^e}} \right) \quad \text{para un comportamiento elasto-plástico a compresión} \\ \text{con ablandamiento posterior a la localización de} \\ \text{deformaciones} \quad , \end{array} \right.$$

An-D.1.c.2 Problema de objetividad en el modelo multiaxial de daño plástico.

Se ha visto para el caso simple de comportamiento uniaxial, que la objetividad en la respuesta para un proceso con localización de deformaciones y sin degradación de rigidez, se consigue considerando una ley constitutiva para cada elemento finito, obtenida a partir de una medida característica de este ($L^{p''}$) y de un parámetro del material (G^T o G^{c1}), según se desarrolle un proceso de compresión o tracción respectivamente. Así, resulta una energía específica plástica a tracción o compresión (g_T^p o g_C^{p1}) única para cada elemento finito, que permite formular una rigidez tangente.

El modelo que se propone, considera el problema multiaxial como un *problema uniaxial equivalente* mediante la definición de la variable de daño plástico κ^p formulada en la ec.(IV.18):

$$\dot{\kappa}^p = h_n^T(\sigma, \kappa^p, c) \dot{\epsilon}^p = \frac{1}{g_T^p} \sigma_T \dot{\epsilon}_T^p + \frac{1}{g_C^p} \sigma_C \dot{\epsilon}_T^p = \frac{1}{\bar{g}^p} \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (\text{An-D.33})$$

con:

$$g_T^p = \frac{G^T}{L^{p''}}$$

$$g_C^p = g_C^{p1} = \frac{G^{c1}}{L^{p''}}$$

de donde resulta que la variable de endurecimiento es una energía normalizada con respecto a una *energía uniaxial equivalente* \bar{g}^p (desconocida "a priori"), que resulta de la evolución del proceso mismo, como una combinación de dos sub-procesos objetivos (de tracción y/o compresión pura), que hacen que al final de éste $\kappa^p = 1$, garantizando así que la respuesta multiaxial sea también objetiva.

En forma análoga al comportamiento uniaxial descrito en los sub-apartados anteriores, el valor actualizado de la energía normalizada (variable de daño plástico) κ^p , permite obtener el parámetro de endurecimiento A (pendiente de una curva $\bar{\sigma} - \dot{\bar{\epsilon}}^p$ uniaxial equivalente que encierra una energía específica \bar{g}^p)

que interviene en la rigidez tangente de una ley constitutiva definida para cada punto de integración de cada elemento finito:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}_s - \frac{\left[\mathbf{D}_s \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right\} \right] \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_s \right]}{A + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_s \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right]} \dot{\epsilon} \quad (\text{An-D.34})$$

con:

$$A = \left[-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \underbrace{\left(\mathbf{h}_\kappa^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right)}_{\bar{\sigma}} \right] = \left[h_c \left(\mathbf{h}_\kappa^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right) \right] = \frac{1}{\lambda} h_c \dot{\kappa}^p = \frac{1}{\lambda} \dot{c}$$

tal que habrá ablandamiento, siempre que $\dot{c} < 0$, debido a que λ es siempre positivo o nulo.

An-D.1.c.3 Longitud característica de un elemento finito L^p .

En los sub-apartados anteriores, se ha introducido el concepto de *longitud característica* de un elemento finito L^p , como el parámetro geométrico que interviene en la ley constitutiva del material con el fin de hacer que la respuesta del sólido sea insensible al tamaño de la malla de elementos finitos (objetividad). N. Ottosen and O. Dahlblom ^[101] definen esta longitud característica como *la máxima longitud de la región elemental, medida en forma normal al plano de fisura*. Esta definición coincide con la de Z. Bažant ^{[10][14]}. A pesar de la claridad de ésta, para un simple análisis J. Rots et al. ^[123] muestran que esta medida no solo depende de la geometría de la malla, sino que también está influenciada por el estado de deformaciones al que está sometido el elemento finito, y propone en forma *heurística* una longitud característica para cada caso simple fig.(An-D.6).

Según Z. Bažant and B. Oh ^[14], para un elemento finito cuadrado de área A^e , totalmente fisurado, con una orientación de fisura que forma un ángulo ϑ con el eje x_1 del sistema de referencias global fig.(An-D.6), la longitud característica vale:

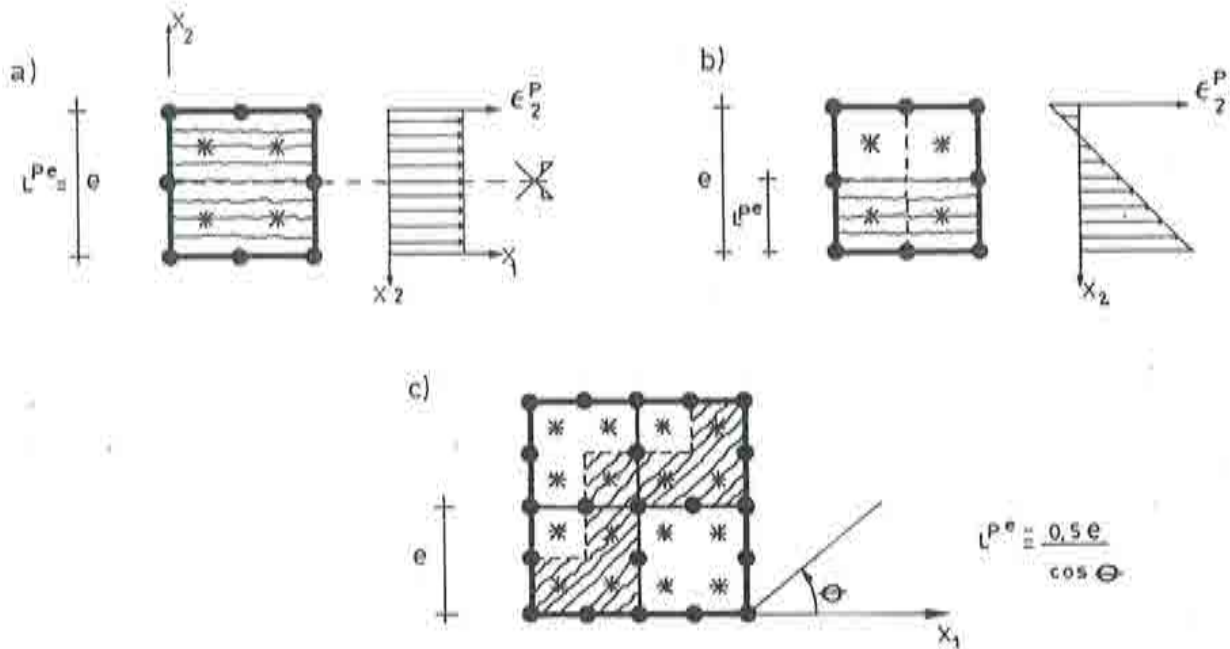


fig.(An-D.6): Estimación de la longitud característica de un elemento finito para diferentes estados de deformación [123].

$$L^{pe} = \frac{\sqrt{A^e}}{\cos \vartheta} \tag{An-D.35}$$

La controversia sobre la determinación de esta longitud crece más aún cuando algunos investigadores hacen depender a esta medida del volumen de influencia de cada punto de integración numérica [31][93][96]. No obstante, las referencias [94][148] demuestran en forma rigurosa que a partir de una condición de disipación de energía a nivel global (de todo el sólido), se obtiene una longitud característica que depende del tamaño del elemento finito, del campo de desplazamiento que actúa sobre él, y de una función que depende de la orientación de la fisura dentro del elemento finito. Para mayor información al respecto, se recomienda recurrir a la referencia citada, ya que el tema está fuera del alcance de esta tesis.

Una conclusión importante de la referencia [94], es que para casos simples,

cuando los elementos son cuadrangulares y de lados aproximadamente iguales, la longitud característica resulta muy aproximada a la propuesta en la referencia ^[14] ec.(An-D.35). Durante las pruebas realizadas con el modelo que se propone, se ha utilizado esta última relación obteniendo respuestas satisfactorias. En cada uno de los ejemplos del cap. V, se menciona la longitud característica adoptada, respetando siempre la desigualdad expresada por la ec.(An-D.241).

An-D.2.- DIRECCIONALIDAD DEL DAÑO PLÁSTICO EN UN PUNTO Y SU RELACION CON EL FLUJO PLÁSTICO - POST-PROCESAMIENTO DE RESULTADOS.

An-D.2.a- Introducción.

Se ha mencionado en el *apart. IV.1*, que se puede considerar el daño en cada punto del sólido (daño local) como un fenómeno adireccional, y que la dirección macroscópica (fisura) viene definida por el lugar geométrico de los puntos dañados. No obstante, cada punto del sólido exhibe un comportamiento isotrópico en el espacio de tensiones, en el espacio de deformaciones plásticas se manifiesta una cierta direccionalidad del daño, que está relacionada con la deformación plástica. Así, se admite como hipótesis que la *dirección y magnitud* del daño local, resultan de un análisis del tensor de deformaciones plásticas ϵ^p :

$$\epsilon^p = \int_{t=0}^t \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma} dt \quad (\text{An-D.36})$$

De esta forma, el parámetro de consistencia plástica $\dot{\lambda}$ puede ser interpretado como la magnitud del incremento del daño en un punto, y el flujo plástico $\frac{\partial G}{\partial \sigma}$ como la orientación del daño en el espacio de tensiones principales.

Debido a que el modelo que se presenta no requiere la *dirección ni la magnitud del daño* durante el proceso resolutivo, esta hipótesis no necesita formar parte del cálculo, sino que sólo se la tiene en cuenta como un post-procesamiento de resultados, para mayor información sobre la respuesta del sólido. Los resultados obtenidos con este análisis (cap. V) coinciden muy bien con los estudios experimentales y también con los obtenidos con otros modelos ortótropos, que sí necesitan determinar la dirección del daño durante el proceso de cálculo.

An-D.2.b- Dirección del daño plástico en función de las deformaciones plásticas - Relación con otros modelos.

La ecuación constitutiva ec.(IV.93), muestra que el incremento de deformación plástica $\dot{\epsilon}^p$ exige una relajación del incremento de tensión $\dot{\sigma}^p$ en la dirección del flujo plástico $\frac{\partial G}{\partial \sigma}$ fig.(An-D.7). Este decrecimiento de la tensión en una cierta dirección dentro del espacio de tensiones, da muestra de la direccionalidad local del daño plástico. Así , el modelo entiende como dirección principal de daño (normal al plano de daño local), la deformación plástica principal mayor ϵ_1^p .

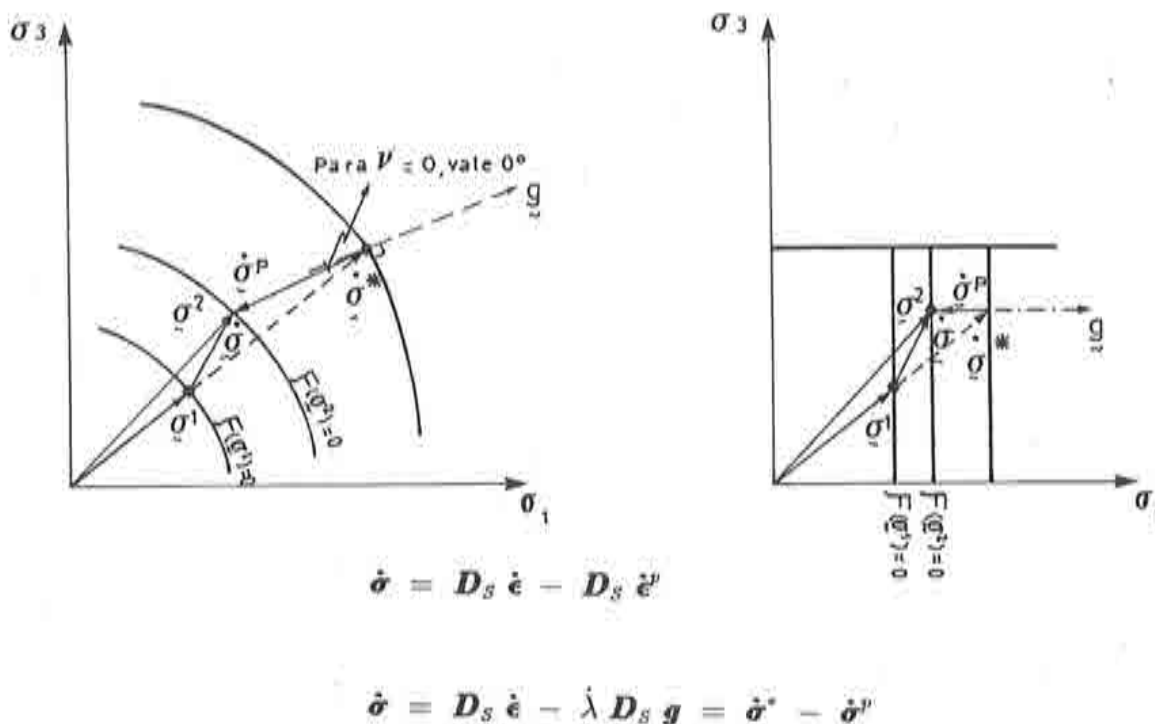


fig.(An-D.7): Dirección del vector de flujo plástico y de tensiones, en el espacio de tensiones principales: a) para una genérica función de potencial G , b) para una función de potencial del tipo Rankine.

Según esta hipótesis, se puede demostrar también que los modelos constitutivos, formulados para tratar el fenómeno de fisuración a tracción del hormigón, que utilizan funciones de fallo del tipo Rankine (apart. Ap-I.3.e) [14][18][22][30][54][93][123], evalúan el daño local (en un punto del sólido discreto)

indirectamente a partir de un análisis de las deformaciones inelásticas o de daño. Para explicar esto, conviene recordar previamente que estos modelos estudian: la *dirección del daño* a partir de un análisis del tensor de tensiones σ , admitiendo como dirección normal a la fisura la de la tensión principal mayor σ_1 , siempre que ésta haya superado el umbral de tracción máxima; y la *magnitud del daño* a partir de la deformación uniaxial ϵ^{cr} (deformación de fisuración). Esta última satisface, durante un proceso de carga con ablandamiento, la siguiente ley constitutiva: $\dot{\sigma}_1^{cr} = E^{cr} \dot{\epsilon}^{cr}$, donde E^{cr} es la pendiente de la curva de ablandamiento $\dot{\sigma}_1 - \dot{\epsilon}^{cr}$, por lo tanto tiene un significado análogo al parámetro de endurecimiento plástico A que actúa en la ecuación constitutiva ec.(An-D.34). Para estos modelos, durante un proceso de tracción sin degradación de rigidez, se puede escribir el incremento de tensión en forma análoga a la ec.(IV.93). Esto es ⁽¹²⁴⁾:

$$\dot{\sigma} = D_S \dot{\epsilon} - D_S \dot{\epsilon}^{cr} = \dot{\sigma}^e - \dot{\sigma}^{cr} \quad (An-D.37)$$

Admitiendo que la deformación inelástica crece según una regla de flujo generalizada como la presentada en el (*apart. Ap-I.3.c*), y que la función de Rankine es utilizada como función de potencial plástico $\mathcal{G} = \max. [\sigma_i] - \sigma_T^{max} = 0$, resulta en el espacio de tensiones principales (sistema de referencia local para cada fisura) para un estado de tensión $\sigma_3 \leq \sigma_2 < \sigma_1$ con $\sigma_1 > 0$, el siguiente incremento de deformación plástica:

$$\dot{\epsilon}^{cr} = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_1} \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_2} \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\lambda} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (An-D.38)$$

transformando esta deformación plástica definida en un sistema de referencia local a uno global, resulta:

$$\dot{\epsilon}^{cr} = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta_\sigma & \sin^2 \vartheta_\sigma & -\frac{1}{2} \sin 2\vartheta_\sigma \\ \sin^2 \vartheta_\sigma & \cos^2 \vartheta_\sigma & \frac{1}{2} \sin 2\vartheta_\sigma \\ \sin 2\vartheta_\sigma & -\sin 2\vartheta_\sigma & \cos 2\vartheta_\sigma \end{bmatrix} \dot{\epsilon}^{cr} = \mathbb{N} \dot{\epsilon}^{cr} \quad (\text{An-D.39})$$

donde ϑ_σ representa el ángulo que hay entre la tensión principal mayor y el eje x_1 del sistema de referencia global, y \mathbb{N} una matriz de transformación de un sistema de referencia local a uno global. Sustituyendo esta última ecuación en la ec.(An-D.37), resulta la ecuación constitutiva expresada en un sistema de referencia global, en la forma tratada por estos modelos de fisuración [123] :

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}_S \dot{\epsilon} - \mathbf{D}_S \mathbb{N} \dot{\epsilon}^{cr} \quad (\text{An-D.40})$$

De todo esto surge, que la dirección del incremento de deformación inelástica $\dot{\epsilon}^{cr}$ definida en coordenadas locales de la fisura, coincide con la dirección del flujo plástico dado por la teoría de Rankine, y a la vez con la dirección de la tensión principal mayor fig.(An-D.7). Así , en el caso particular en que esta superficie de fallo sea adoptada como de potencial plástico, la dirección normal a la fisura puede obtenerse indistintamente a partir de la tensión principal mayor, o de la deformación inelástica mayor.

An-D.2.c- Forma en que se obtiene la dirección del daño plástico, la magnitud, la energía disipada por cada fisura, y el factor de retención de tensiones cortantes.

La magnitud, dirección y demás información sobre el estado de daño local (en un punto del sólido discreto), se obtiene *a posteriori* del proceso de cálculo, una vez que se ha logrado la convergencia hacia un estado de equilibrio.

• **Dirección del daño plástico:** Para este modelo, la iniciación del daño en un punto del espacio discreto, ocurre cuando la variable de daño plástico se hace mayor que cero $\kappa^p > 0$. A partir de este instante, se entiende que hay *daño plástico* orientado según una dirección cuya normal viene definida por la componente principal mayor del tensor de deformación plástica fig.(An-D.8):

$$\vartheta_e = \vartheta(\epsilon^p) \quad (\text{An-D.41})$$

donde ϵ^p es la deformación plástica definida según un sistema de referencias global, y ϑ_e es el ángulo que hay entre la deformación principal mayor y el eje x_1 del mismo sistema de referencia. Para un problema plano se puede escribir la ec.(An-D.41) como:

$$\tan(2 \vartheta_e) = \frac{2 \epsilon_{12}^p}{\epsilon_{11}^p + \epsilon_{22}^p} \quad (\text{An-D.42})$$

La deformación plástica expresada según un sistema de referencia definido en el espacio de daño local ϵ^{cr} , resulta de un cambio de base aplicado sobre ϵ^{cr} , a través de una matriz de transformación de coordenadas \mathbf{T}_e ^[25] fig.(An-D.8). Esto es:

$$\epsilon^{cr} = \mathbf{T}_e \epsilon^p \quad (\text{An-D.43})$$

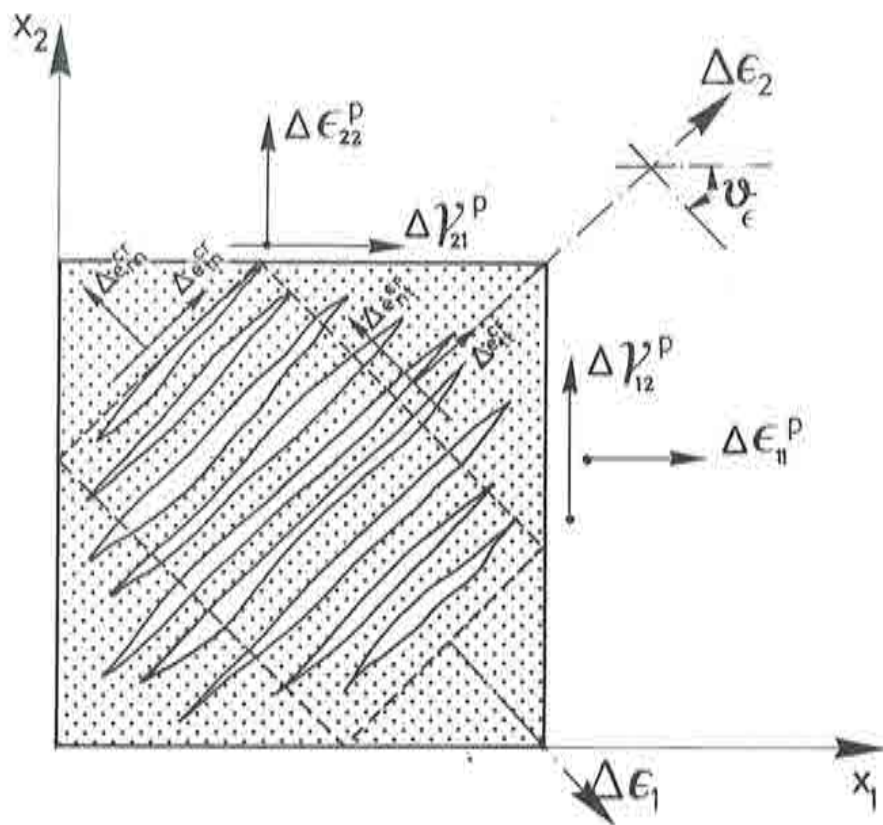
donde:

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta_e & \sin^2 \vartheta_e & \frac{1}{2} \sin 2\vartheta_e \\ \sin^2 \vartheta_e & \cos^2 \vartheta_e & -\frac{1}{2} \sin 2\vartheta_e \\ -\sin 2\vartheta_e & \sin 2\vartheta_e & \cos 2\vartheta_e \end{bmatrix}$$

$$\epsilon^{cr} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon^p = \begin{Bmatrix} \epsilon_{nn}^{cr} \\ \epsilon_{tt}^{cr} \\ \epsilon_{nt}^{cr} \end{Bmatrix}$$

siendo $\mathbf{T}_e^{-1} = \mathbb{N}$ siempre que $\vartheta_o \equiv \vartheta_e$ ec.(An-D.38). Analizando el signo de las componentes principales del tensor de deformación plástica, se sabe si hay aplastamiento o fisuración, o sea que hay aplastamiento si $\epsilon_i^p < 0$ y fisuración si $\epsilon_i^p > 0$.



$$\Delta e^p = \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_{11}^p \\ \Delta \epsilon_{22}^p \\ \Delta \gamma_{12}^p \end{Bmatrix} ; \quad \Delta e^{cr} = \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_{nn}^{cr} \\ \Delta \epsilon_{tt}^{cr} \\ \Delta e_{nt}^{cr} = 0 \end{Bmatrix}$$

fig.(An-D.8): Orientación de la fisuración respecto del sistema de referencia global.

• **Magnitud del daño plástico:** El modelo presentado, basado en la mecánica del continuo, considera el daño como una deformación localizada en una cierta zona de dimensiones finitas a la que se ha denominado *zona de daño plástico* (*apart. IV.1*). En virtud de esto, se puede considerar que una fisura real es la acumulación en una zona de dimensiones infinitesimales de todo el daño distribuido en la *zona de daño plástico* ^[123]. De esta manera, mediante el post-procesado de los resultados, se obtiene una *magnitud de daño equivalente* al de una fisura real. fig.(An-D.9). Esto es:

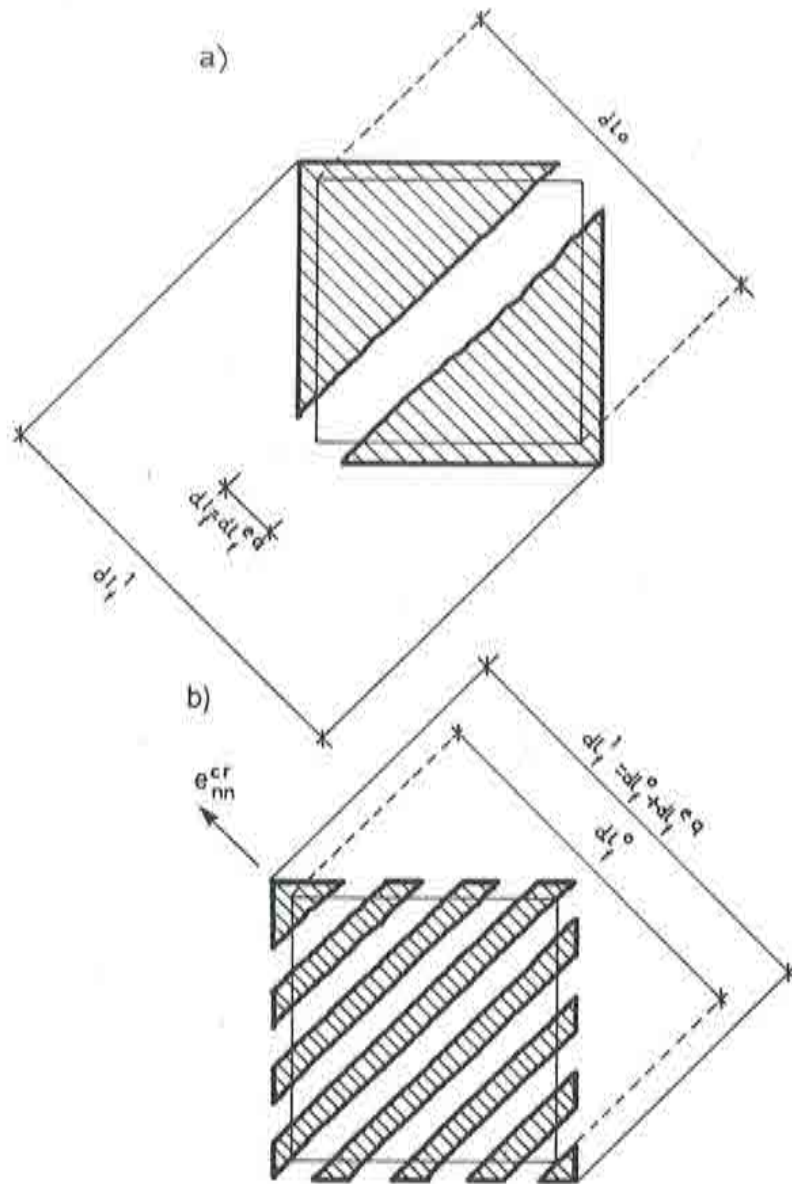


fig.(An-D.9): a) Fisura real, y b) fisura distribuida equivalente a la real.

$$dl_f^{cr} = dl_f^1 - dl_f^0 = [dl_f^0 + e_{nn}^{cr} dl_f^0] - dl_f^0$$

$$dl_f^{cr} = e_{nn}^{cr} dl_f^0$$

(An-D.44)

de donde resulta:

$$l_j^p = \int_{L^{pe}} \epsilon_{un}^{er} dl_j^0 \quad (An-D.45)$$

donde L^{pe} es la longitud característica de un elemento finito, definida en la ec. (An-D.35).

• **Energía disipada por cada punto de la zona dañada:** Debido a que se ha hecho la hipótesis que la energía disipada es igual al trabajo plástico, se tiene:

$$\dot{w}^p = \sigma^T \dot{\epsilon}^p \quad (An-D.46)$$

resultando de aquí que el trabajo plástico total en un cierto instante t del proceso cuasi-estático vale:

$$W^p = \int_{V^p} \left[\int_{t=0}^t \sigma^T \dot{\epsilon}^p \right] dV^p \quad (An-D.47)$$

donde V^p es el volumen de la zona dañada.

• **Factor de retención de tensiones cortantes:** Ciertos modelos de fisuración, como los mencionados en las referencias [18][30][93][123], aceptan que la rigidez al corte en la zona dañada sea constante y aproximadamente igual a $\beta_G G^0$, donde β_G es un factor de reducción de la capacidad inicial de retención de tensión cortante. Así, en un cierto instante del proceso elasto-plástico se tiene una tensión cortante igual a:

$$\sigma_{12} = G_S \gamma_{12} = \beta_G G^0 \gamma_{12} \quad (An-D.48)$$

en cambio, si el proceso de carga hubiese sido totalmente elástico, esta tensión hubiese valido:

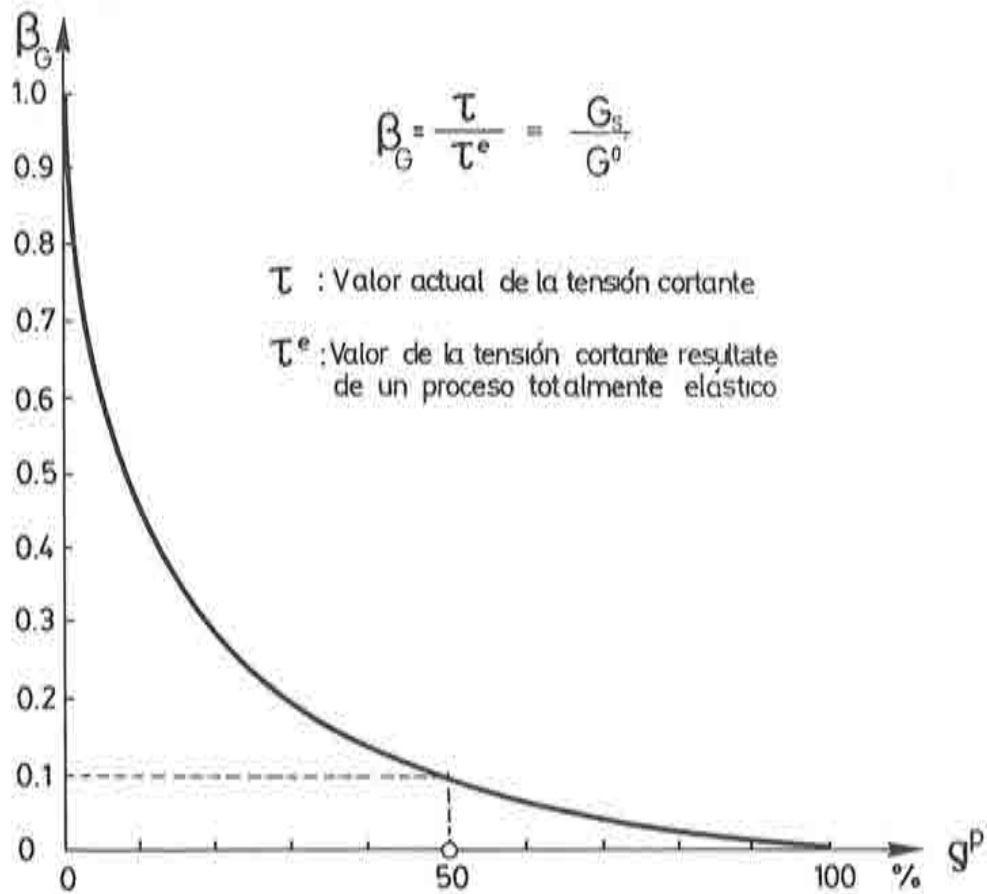


fig.(An-D.10): Evolución del factor de retención de tensiones cortantes a lo largo del proceso plástico

$$\sigma_{12}^e = G^0 \gamma_{12} \tag{An-D.49}$$

De la ec.(An-D.48) y la ec.(An-D.49), se concluye que el factor de retención de tensiones cortantes β_G es la relación que existe entre la tensión cortante en el instante actual σ_{12} y la tensión cortante en el mismo instante para el caso en que el proceso sea totalmente elástico σ_{12}^e . Esto es:

$$\frac{\sigma_{12}}{\sigma'_{12}} = \frac{G_S}{G^0} = \beta_G \quad (\text{An-D.50})$$

En el modelo que se presenta, debido a que se trabaja con una ley constitutiva acoplada ec.(IV.103), la rigidez al corte no necesita ser impuesta a través de un parámetro como el β_G , sino que resulta del proceso mismo. Si se quiere, se puede obtener β_G en este mismo post-proceso, de donde resulta que no es una constante, sino que varía a medida que evoluciona el proceso plástico fig.(An-D.10).

En estudios experimentales llevados a cabo por Cedolin y otros ^[29] se puede

ver que para hormigones resultan curvas $\frac{G_S}{G^0}$ muy parecidas a la que resultan del post-procesado de los resultados obtenidos con el modelo, en los ejemplos analizados en el *cap. V*.

CAPITULO V

EJEMPLOS DE APLICACION.

V.1.- INTRODUCCION.

En este capítulo se presentan los resultados que se han obtenido, con el modelo de daño plástico que se propone, analizando una serie de probetas y elementos estructurales bajo diversas condiciones estáticas y geométricas, llevando siempre el *ensayo numérico* a situaciones últimas, consistente en el *agotamiento total* de la pieza ensayada. Gran parte de estas pruebas, que se han realizado con el objeto de controlar el modelo, corresponden a estudios experimentales y numéricos realizados por diversos investigadores. Debido a que fue necesario desarrollar ejemplos que resaltaran algunos aspectos particulares del modelo que se presenta, de los ocho ejemplos de comprobación que se dan, dos no corresponden a ningún ensayo previo.

La aplicación del *modelo de daño plástico*, ha sido materializada mediante un programa de elementos finitos, desarrollado exclusivamente con esta finalidad (*PLAST-FIS apart. Ap-II.2.*). Este programa se encuentra actualmente capacitado solamente para resolver problemas de tensión y/o deformación plana, a pesar de que el modelo constitutivo goza de la generalidad suficiente para ser utilizado en tres dimensiones.

V.2.- ENSAYO DE COMPRESION Y/O TRACCION BIAXIAL.

V.2.a- Consideraciones generales sobre el ensayo.

Se ha adoptado el ensayo de *Kupfer, Hilsdorf and Rüsch* ^[74] como primera verificación del modelo constitutivo, debido a su amplia documentación y la característica de *ensayo modelo* que ha adquirido, dado la cantidad de

investigadores que lo han utilizado como referencia para verificar ensayos experimentales y numéricos.

De este ensayo, consistente en estudiar el comportamiento de una probeta de hormigón de $20.0 \times 20.0 \times 5.0$ cm. fig.(V.1), sometida a diversos estados de carga fig.(V.2,a), solamente se han verificado los siguientes casos: - Compresión-compresión con una relación de tensiones ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/0$ y $\sigma_{33} = 0$) o *compresión simple*. - Compresión-compresión con una relación de tensiones ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-1$ y $\sigma_{33} = 0$) o *compresión doble simétrica*. - Compresión-compresión con una relación de tensiones ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-0.52$ y $\sigma_{33} = 0$) o *compresión doble asimétrica*. - Tracción-tracción con una relación de tensiones ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = 1/0$ y $\sigma_{33} = 0$) o *tracción simple*. - Tracción-tracción con una relación de tensiones ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = 1/1$ y $\sigma_{33} = 0$) o *tracción doble simétrica*. - Tracción-tracción con una relación de tensiones ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = 1/0.55$ y $\sigma_{33} = 0$) o *tracción doble asimétrica*.

Las características geométricas y mecánicas utilizadas para realizar el ensayo numérico, son las que muestra la fig.(V.1). La mayoría de los datos del *modelo de material* utilizado, surgen de un simple análisis llevado a cabo sobre un ensayo uniaxial a compresión y tracción, para valores menores de la relación de resistencias a compresión uniaxial y a compresión biaxial doble simétrica, que para hormigones es casi una constante $\sigma_{cb}/\sigma_C \simeq 1.16$ ^{[36][74][136]} (*apart. II.3.c*), y la obtención del parámetro γ del criterio de fluencia propuesto, que actúa en problemas de tensión triaxial (*apart. IV.5.b*) y que para el hormigón puede considerarse como una constante $\gamma \simeq 3.5$.

Se ha discretizado el dominio con cuatro elementos finitos planos de cuatro nodos fig.(V.1). Se ha utilizado para cada elemento una integración numérica de Gauss-Legendre ^[144] de 2×2 puntos.

La vinculación y los tipos de cargas aplicados, se muestran en cada una de las figuras que describen la respuesta tensión-deformación para cada caso particular figs.(V.2),(V.3),(V.4).

Con el objeto de mantener la relación de tensiones impuesta σ_{22}/σ_{11} , a lo largo de todo el proceso de carga, ha sido necesario utilizar en todos los casos el método de control de desplazamientos propuesto por Crisfield ^[37] (*apart.*

Ap-II.3.c), que ha permitido obtener la respuesta del sólido en procesos con ablandamiento.

El problema de plasticidad no-asociada conduce a desarrollar una matriz de rigidez tangente no-simétrica, ocasionando serios problemas en la resolución del sistema de ecuaciones (*apart. Ap-II.3.*). Existen distintos caminos para solucionar de *alguna manera* este inconveniente ^{[47][108]}; utilizándose en este caso el método de rigidez inicial K_0 (*apart. Ap-II.3.*).

V.2.b- Análisis del ensayo.

a.-) Compresión-compresión - ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/0$ y $\sigma_{33} = 0$) -.

Como se observa en la fig.(V.2,b) se ha logrado una buena coincidencia de la respuesta $\sigma_{22} - \epsilon_{22}$ con la correspondiente al ensayo experimental tanto en plasticidad asociada como en plasticidad no asociada. En la curva $\sigma_{22} - \epsilon_{11}$, coincide muy bien en el período elástico-degradable y luego se obtiene una buena coincidencia hasta el pico de tensiones con plasticidad no asociada, en cambio con plasticidad asociada se logra mejor aproximación después del pico de tensiones.

En la fig.(V.4,a) se comparan con el ensayo de Kupfer, los resultados numéricos obtenidos por otros investigadores para este mismo tipo de carga. Entre estos, el de Han-Chen ^[56] es uno de los que mejor aproxima el comportamiento uniaxial, observándose para el resto de los ensayos numéricos una gran dispersión en los resultados.

En la fig.(V.6,a) se muestra el estado de fisuración que predice el modelo en los puntos de integración de Gauss-Legendre. El análisis de dicha fisuración se ha realizado de acuerdo a la metodología presentada en el *apart. An-D.2.*; así el post-procesador del modelo interpreta que la fisuración se produce cuando la deformación plástica en el punto tiene una componente positiva (estiramiento inelástico), la orientación de cada fisura se representa mediante un trazo ortogonal a la dirección de la correspondiente deformación plástica principal positiva y la densidad de líneas verticales paralelas da idea cualitativa de la *apertura* de estas fisuras. El esquema de fisuración obtenido para el tipo de carga aplicado, coincide con el descrito por Nilssen ^[33] fig.(II.6) *apart. II.3.c.*

b.-) Compresión-compresión - ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-1$ y $\sigma_{33} = 0$) -.

En la fig.(V.2.c) se observa una buena aproximación con el ensayo experimental, alejándose un poco en la vecindad del pico de tensiones. También conviene observar en esta figura, que al final del ensayo numérico se encuentra un comportamiento con tendencia a una *sobre-rigidización*, comportamiento supuestamente atribuible a un fenómeno de *bloqueo* en los elementos finitos de cuatro nodos ^[40], producido por una integración completa de Gauss-Legendre de (2×2) durante un estado plástico incompresible $\dot{\epsilon}_v = 0$, consecuencia de un campo de deformaciones altamente restringido por el tipo de carga aplicada. Problemas de este tipo han sido recientemente estudiados por Crook and Hinton, en la referencia ^[40].

En la fig.(V.4.b) se comparan con el ensayo de Kupfer, los resultados numéricos obtenidos por otros investigadores para este mismo tipo de carga, pudiéndose observar en este caso mucha mayor dispersión en la respuesta que para el ensayo de compresión uniaxial.

En este caso no se ha detectado fisuración en el plano del ensayo (x_1, x_2) , no obstante, según Nilssen ^[33] fig.(II.6) *apart. II.3.c*, este fenómeno se desarrollaría en planos paralelos al de carga: $\perp x_3$.

c.-) **Compresión-compresión** - $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-0.52$ y $\sigma_{33} = 0)$ -.

En la fig.(V.2.d) se observa una mayor diferencia, que en los casos anteriores, respecto al ensayo experimental de Kupfer. En la curva $\sigma_{22} - \epsilon_{22}$ de esta figura se encuentran errores del 3.0 % y 15.0 % en el pico de tensiones y la correspondiente deformación, respectivamente, con respecto al ensayo experimental. En la curva $\sigma_{22} - \epsilon_{11}$ se desarrolla un proceso *casi* con deformación constante para plasticidad no asociada, y en plasticidad asociada ocurre lo mismo hasta el nivel de tensión pico, desarrollándose luego una pérdida de deformación como consecuencia de la excesiva dilatación que produce la componente de tensión mayor. En ambos casos se tiene una razonable coincidencia hasta el nivel de tensión pico. Al final del proceso se produce un aumento en la deformación ϵ_{11} en el mismo sentido de la tensión σ_{11} , situación que probablemente se debe al daño que ha sufrido el sólido en la dirección paralela a σ_{22} .

En la fig.(V.4.c) se pueden ver los resultados obtenidos por otros modelos numéricos para este mismo tipo de carga. De esta comparación surge que la respuesta que mas se aleja del pico de tensiones está un 10.2 % por encima del

ensayo de Kupfer y el que más se acerca al ensayo de referencia está también por encima del pico de tensiones en un 3.0 % . En lo que respecta a la deformación correspondiente al pico, sólo en el modelo de Klisinski-Mroz ^[70] hay coincidencia (pero en este caso la tensión se encuentra un 6.0 % por encima de la correcta). En general se puede decir que existe poca concordancia con el ensayo de referencia.

En este caso, al igual que para compresión doble simétrica, no aparecen fisuras en el plano del ensayo, pero es razonable intuir que pueden ocurrir en planos paralelos a éste.

d.-) Casos de tracción biaxial.

Los resultados del ensayo de Kupfer et al. ^[74] a tracción biaxial, sólo muestran una rama ascendente, casi lineal, que alcanza en todos los casos una tensión de aproximadamente 30.00 kg/cm^2 . Para tales casos, el modelo propuesto supera escasamente los 31.00 kg/cm^2 figs.(V.3,a),(V.3,c),(V.3,d), con una deformación de pico ligeramente mayor que la obtenida por el ensayo experimental en los tres casos: *tracción simple, tracción doble simétrica y tracción doble asimétrica*.

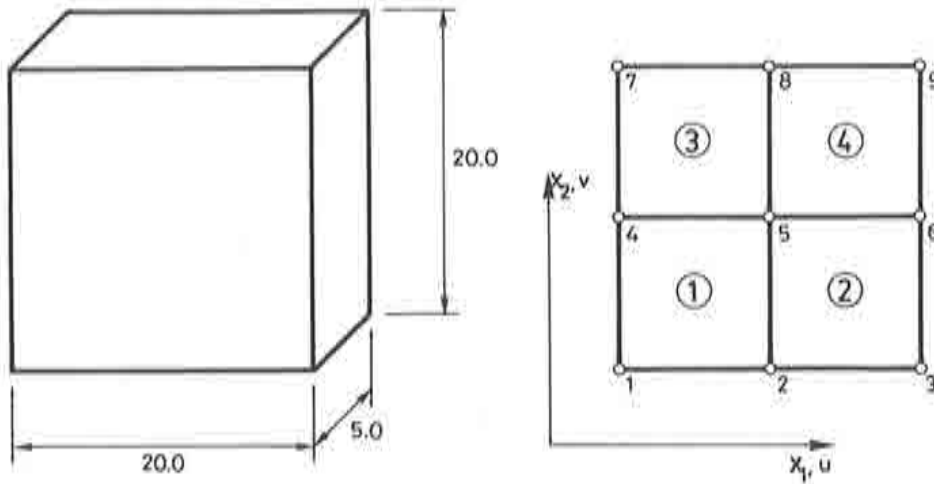
Los modelos numéricos citados en los ensayos anteriores, no brindan resultados de tracción, por lo tanto no ha sido posible presentar una comparación de respuestas de la misma forma que para compresión.

Los estados de fisuración obtenidos para estos tres ensayos de tracción, se muestran en las figs.(V.6,b),(V.6,c),(V.6,d) y coinciden cualitativamente con el esquema de Nilssen ^[33] fig.(II.6) *apart. II.3.c*.

En lo que respecta a la energía disipada durante todo el proceso de compresión simple W^c , se ha obtenido una diferencia del 15.0 % entre la energía G^c impuesta como dato y la correspondiente obtenida al final del proceso elasto-plástico. Este exceso de energía disipada, se debe a que durante el desarrollo de este ensayo numérico, aún no se había considerado la hipótesis realizada por la ec.(An-D.26). En lo que se refiere a la energía disipada durante el desarrollo del proceso de tracción simple W^f , se ha obtenido una exacta coincidencia entre la energía G^f impuesta como dato y la correspondiente obtenida al final del proceso elasto-plástico, cumpliendo totalmente la hipótesis realizada en la ec.(An-D.22). En procesos multiaxiales es más difícil conocer el grado de error cometido por el modelo.

Por último, en la fig.(V.5), se muestra la evolución del factor de retención de tensiones cortantes $\beta_G = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^0} = \frac{G_g}{G^0}$ (apart. An-D.2.c), que resulta del post-procesamiento de los resultados. Debido a que se han normalizado a la unidad las escalas de los ejes de referencia, este gráfico es reflejo de los resultados obtenidos tanto a compresión como a tracción, para un punto de integración que sigue un proceso elasto plástico con ablandamiento. Conviene también observar la coincidencia con los estudios experimentales de Cedolin et al. ^[20] (comparar con la fig.(An-D.10)).

Como comentario final, hay que decir que estos ensayos han sido realizados también con elementos planos de ocho nodos, habiéndose obtenido comportamientos insatisfactorios para todas las combinaciones de carga, al final del proceso elasto-plástico, tanto con reglas de integración reducida como completa (ver también los comentarios hechos por Oliver y Fernandez en la ref. ^[94]).



$$\begin{aligned}
 E_0 &= 395000.00 \text{ kg/cm}^2, \\
 \nu_0 &= 0.24 \\
 \sigma_C^0 &= -229.00 \text{ kg/cm}^2 \\
 \sigma_C^{plc} &= -328.00 \text{ kg/cm}^2 \\
 \sigma_T^0 &= 22.90 \text{ kg/cm}^2 \\
 \alpha &= 0.12 \rightarrow \frac{\sigma_{t0}}{\sigma_{c0}} = 1.16 \\
 \gamma &= 3.0 \\
 p &= 1.0 \\
 G^I &= 0.16 \text{ kg/cm} \\
 G^e &= 16.00 \text{ kg/cm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I^{pe} &= \sqrt{A^e} \\
 \text{Flujo asociado. Criterio de fluencia propuesto} \\
 \text{Flujo no-asociado.} &\left\{ \begin{array}{l} \text{Criterio de fluencia propuesto ;} \\ \text{Func. de potencial de Mohr-Coulomb} \\ \text{con : } \phi = \psi = 15^\circ \end{array} \right. \\
 \text{Función de endurecimiento a compresión } c_C(\kappa) &: F - 3 \\
 \text{Función de endurecimiento a tracción } c_T(\kappa) &: F - 3 \\
 \text{Posición relativa del pico de tensiones : } (\kappa^p)^{plc} &= 0.38 \\
 \text{Con degradación elástica.} \\
 \text{Sin degradación plástica.}
 \end{aligned}$$

fig.(V.1): Ensayo de compresión y/o tracción biaxial – Características geométricas mecánicas y malla de elementos finitos utilizada en el ensayo numérico.

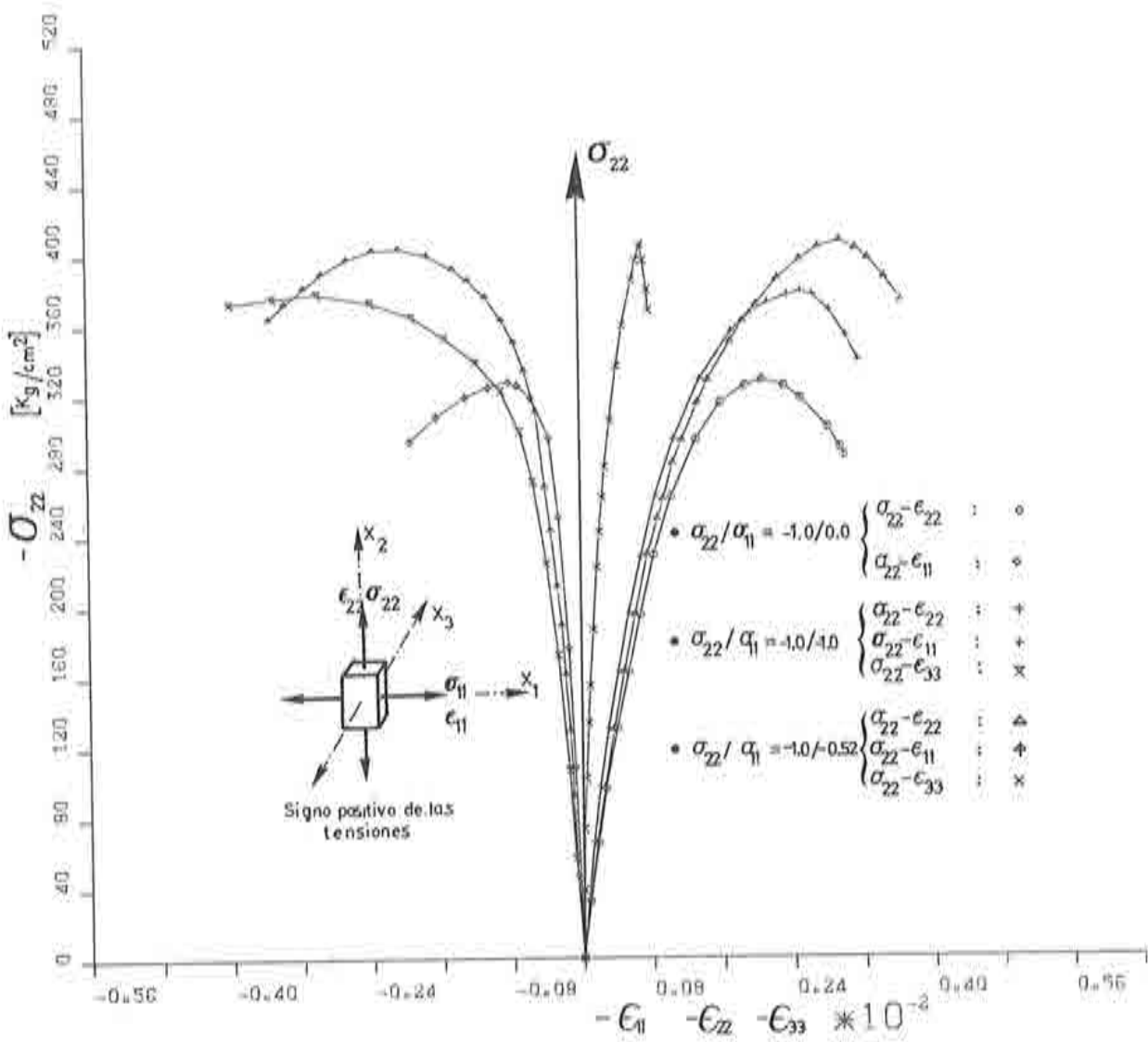


fig.(V.2,a): Resultados del ensayo experimental a compresión de Kupfer et al. [74].

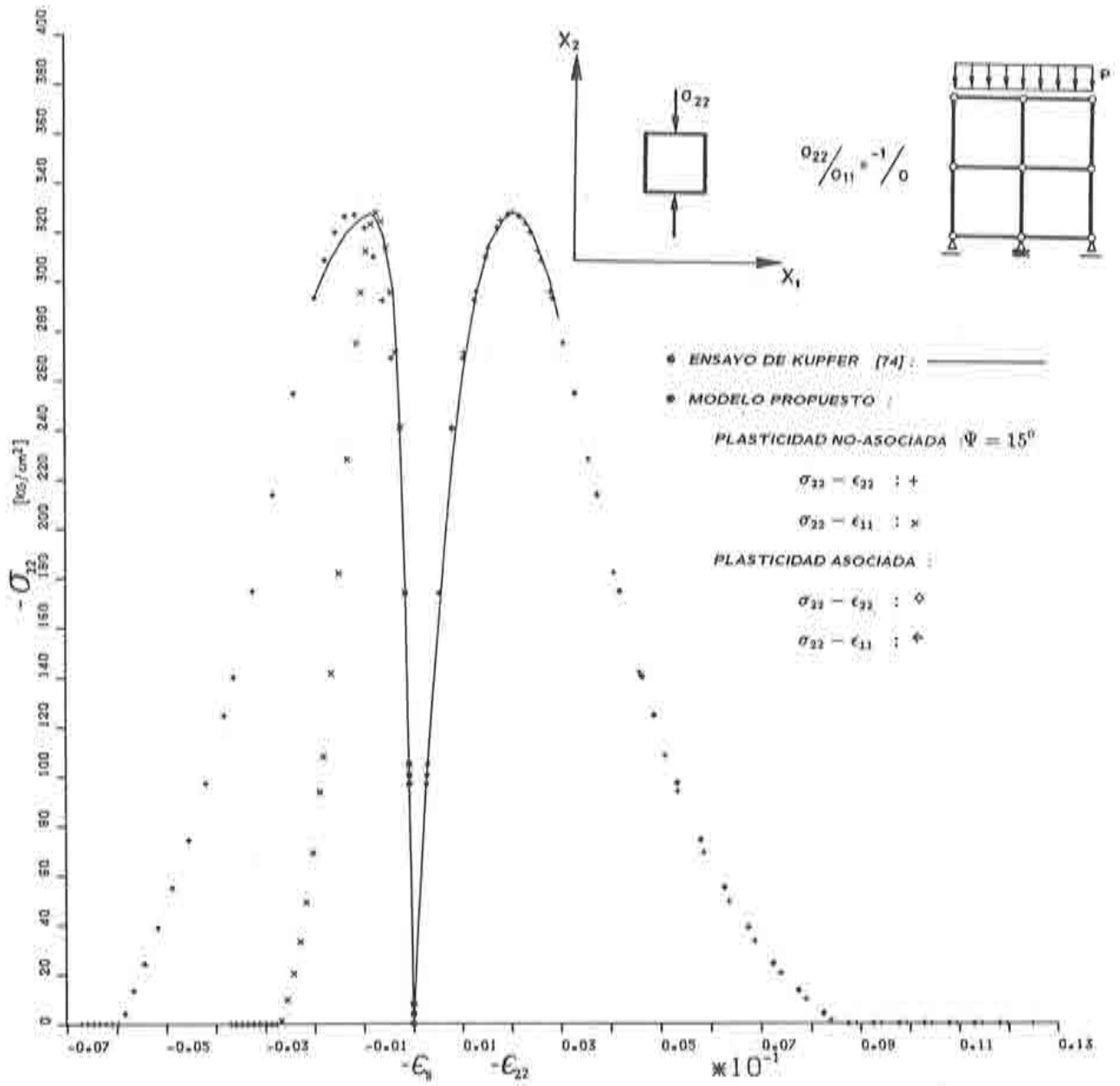


fig.(V.2,b): Comparación entre el resultado obtenido por el modelo, y el ensayo a compresión uniaxial de Kupfer et al. [74] ; Caso de carga a.-: ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/0$ y $\sigma_{33} = 0$)

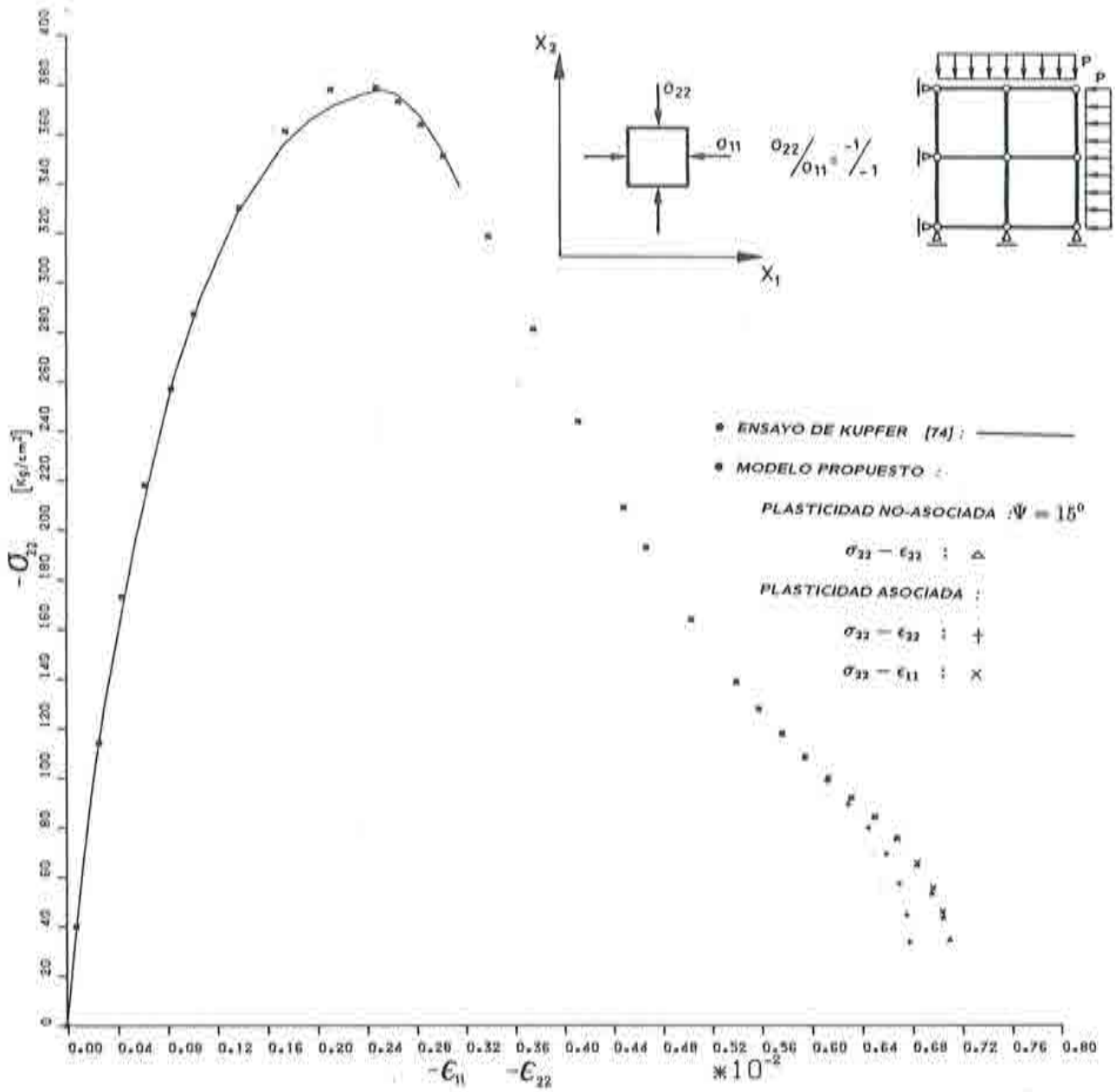


fig.(V.2,c): Comparación entre el resultado obtenido por el modelo, y el ensayo a compresión biaxial doble simétrica de Kupfer et al. [74]. Caso de carga b.-: ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-1$ y $\sigma_{33} = 0$)

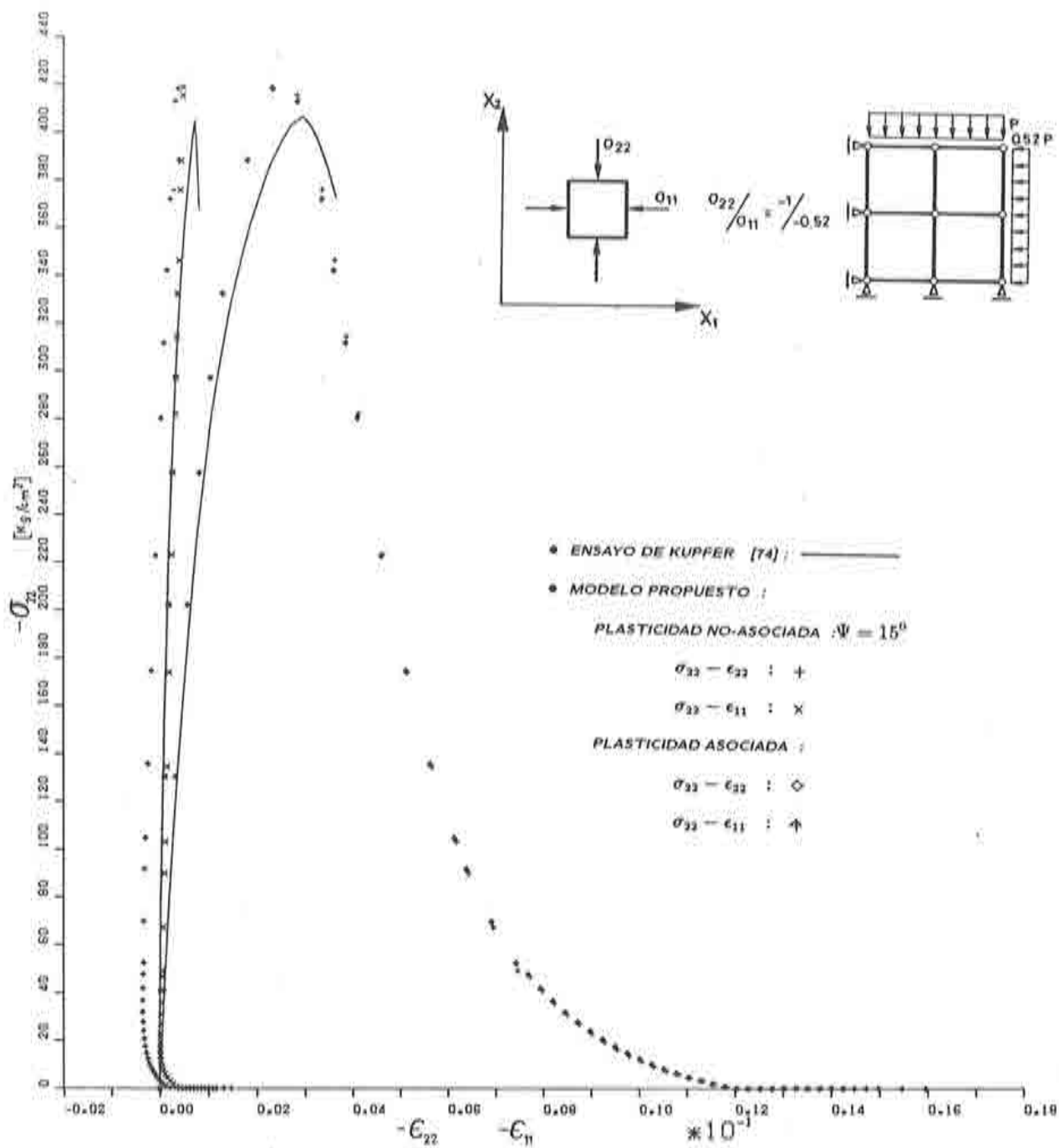


fig.(V.2,d): Comparación entre el resultado obtenido por el modelo, y el ensayo a compresión biaxial doble asimétrica de Kupfer et al. [74]. Caso de carga c.-: ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-0.52$ y $\sigma_{33} = 0$)

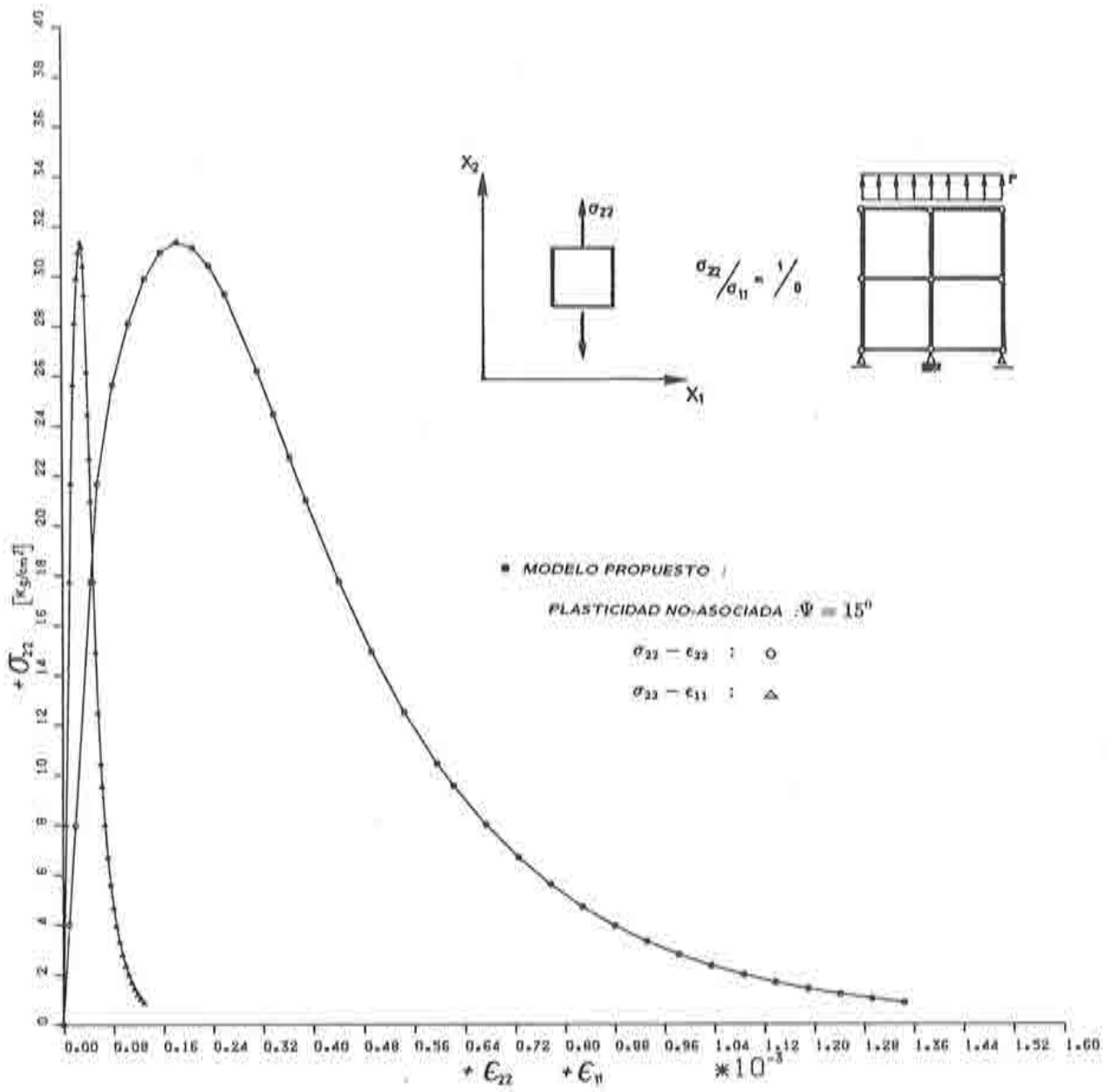


fig.(V.3,a): Resultado obtenido por el modelo durante el ensayo a tracción uniaxial. Caso de carga d.-:
 $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = 1/0 \text{ y } \sigma_{33} = 0)$

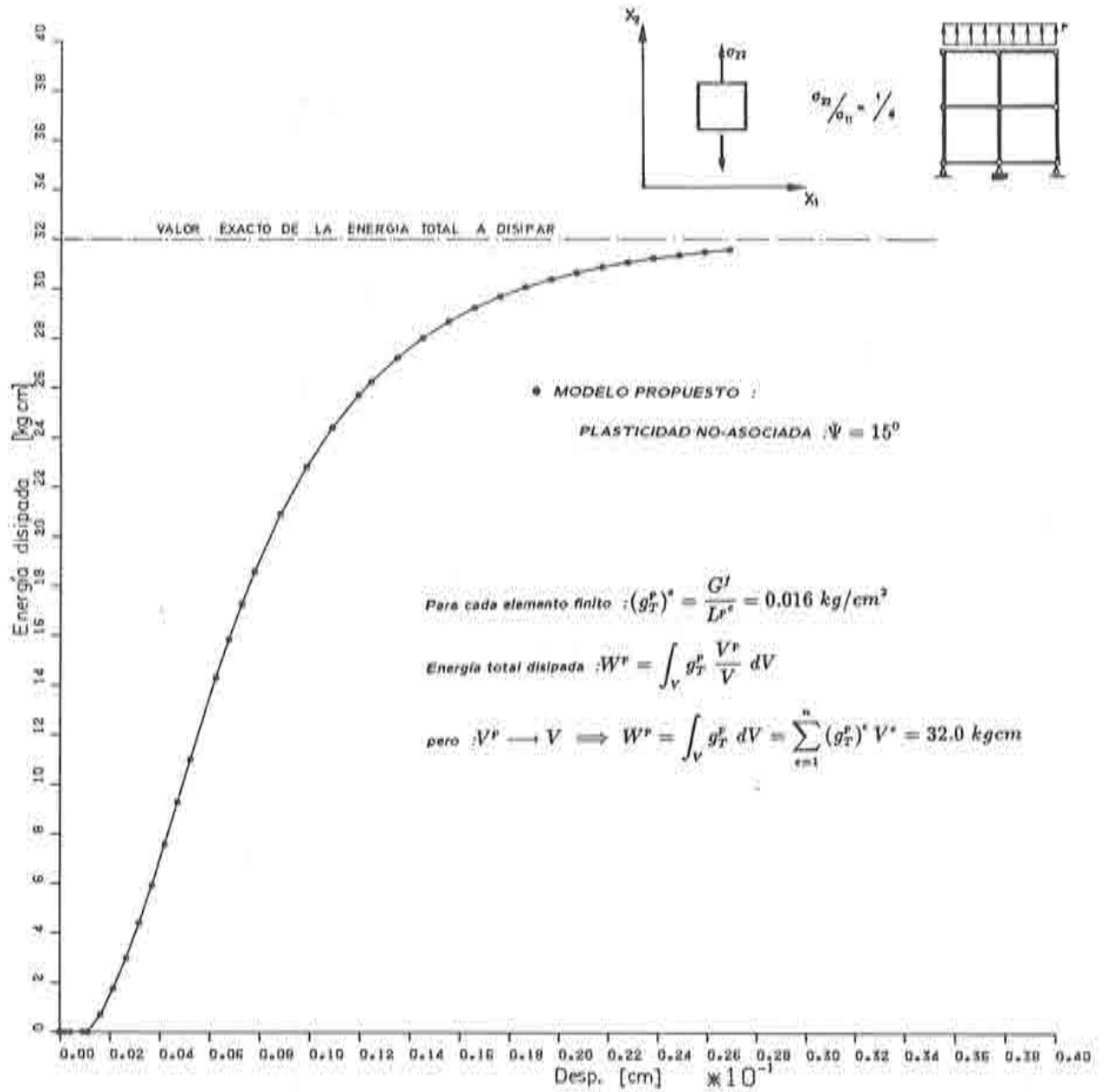


fig.(V.3,b): Energía disipada por el modelo durante el ensayo de tracción uniaxial. Caso de carga d.-: $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = 1/0 \text{ y } \sigma_{33} = 0)$

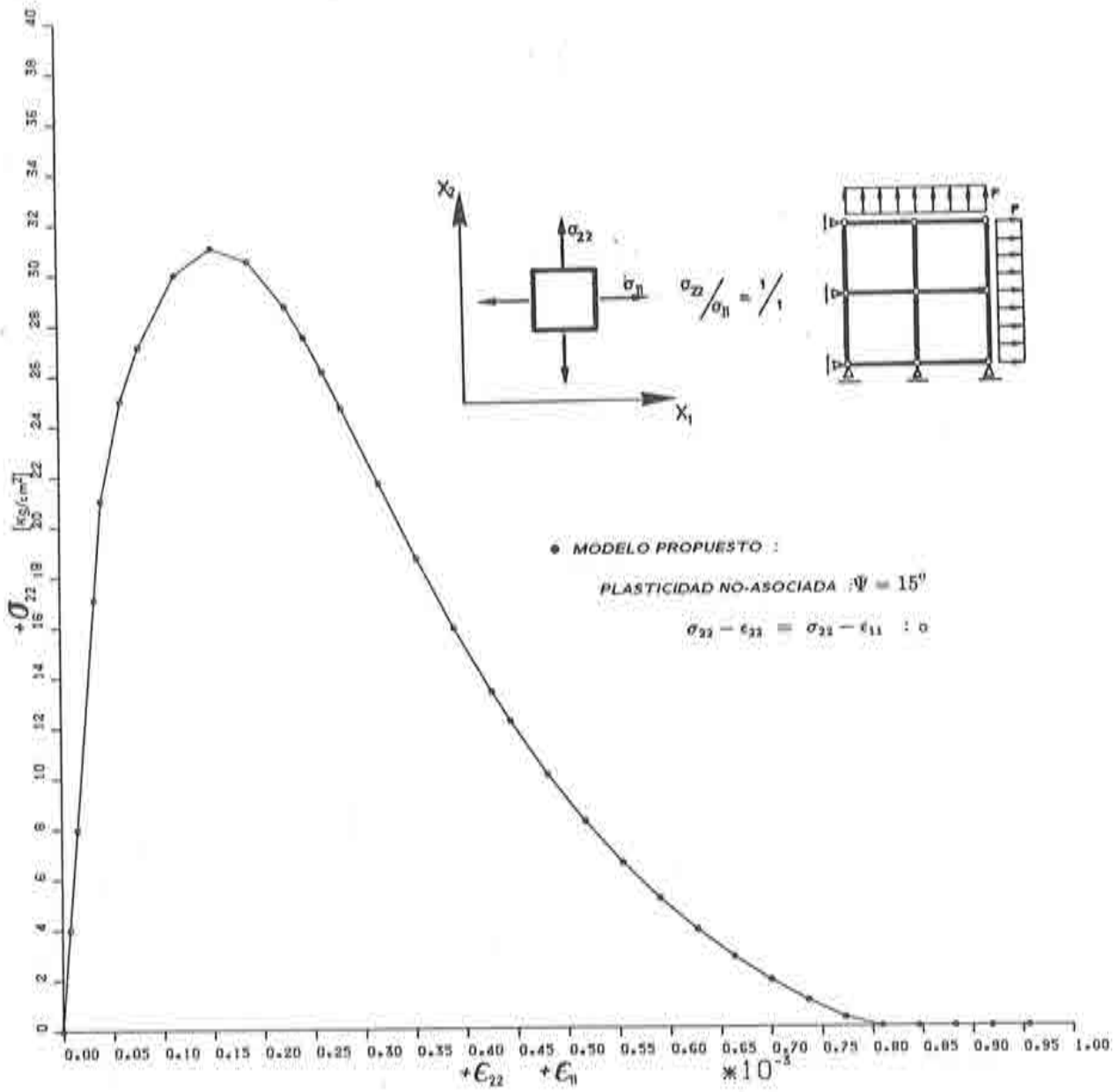


fig.(V.3.c): Resultado obtenido por el modelo durante el ensayo a tracción biaxial doble simétrica. Caso de carga d.-: ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = 1/1$ y $\sigma_{33} = 0$)

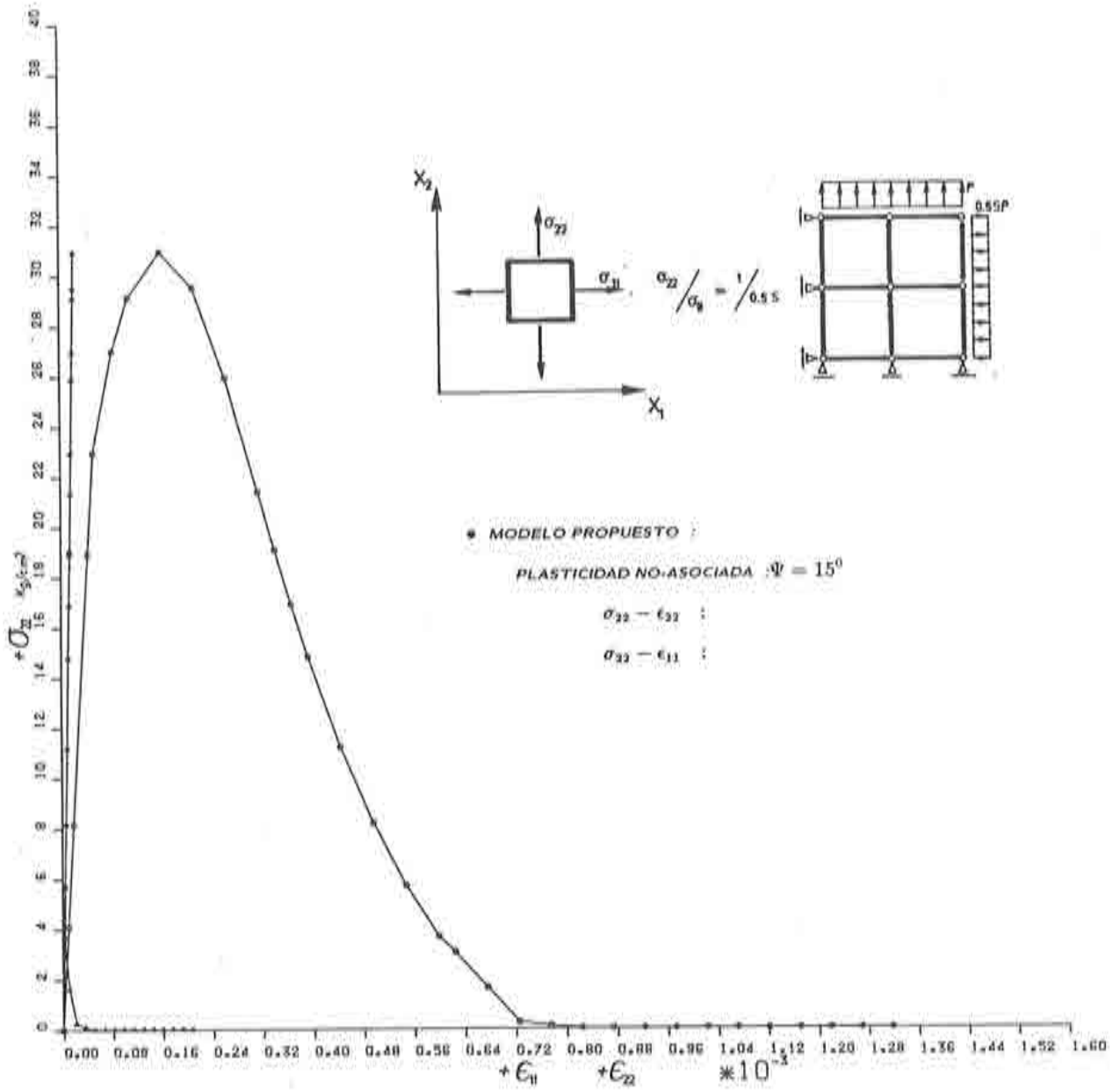


fig.(V.3.d): Resultado obtenido por el modelo durante el ensayo a tracción biaxial doble asimétrica. Caso de carga d.-: ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = 1/0.55$ y $\sigma_{33} = 0$)

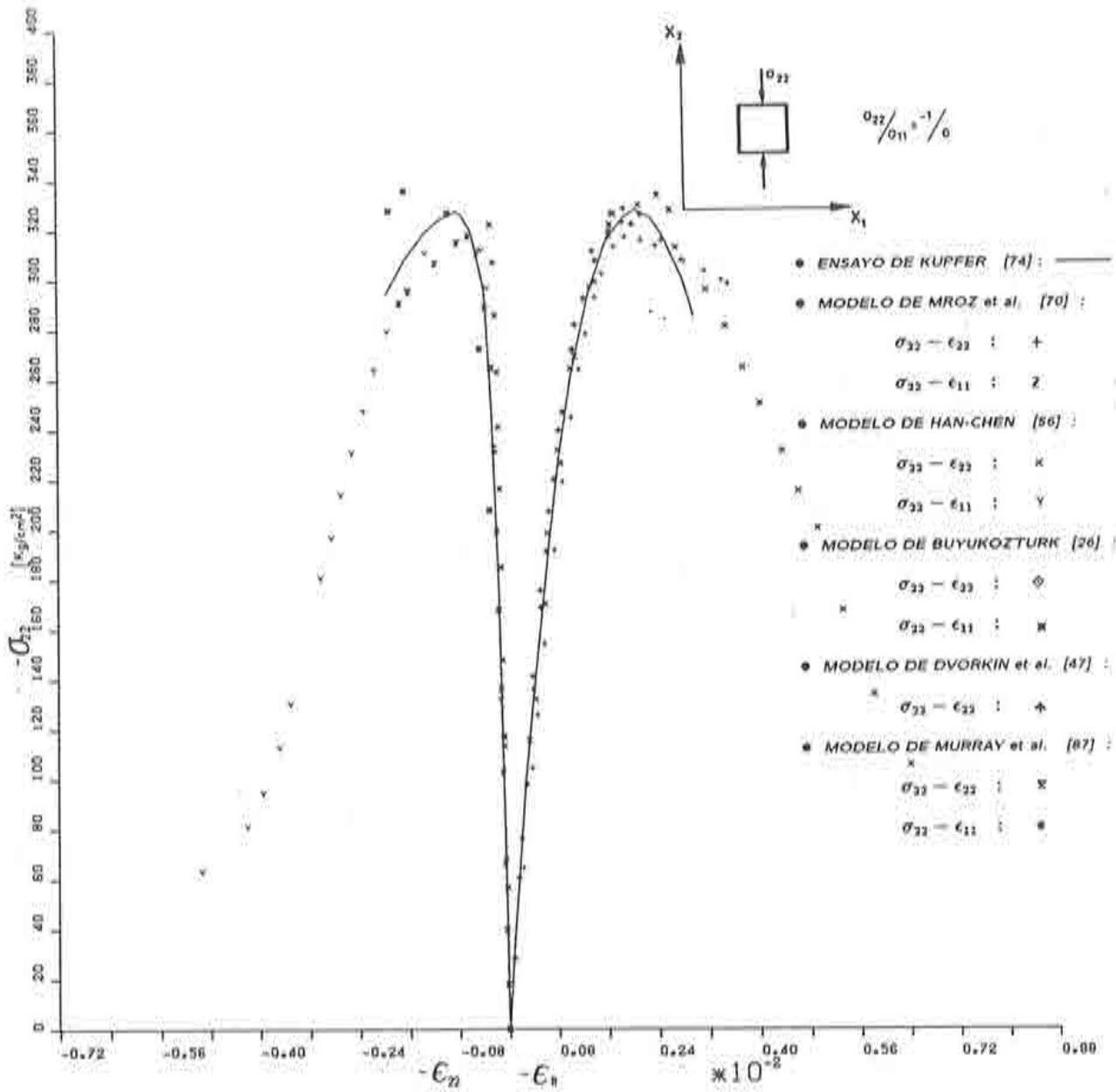


fig.(V.4.a): Comparación entre los resultados obtenidos por algunos modelos numéricos desarrollados por otros investigadores, y el ensayo a compresión uniaxial de Kupfer et al. [74]. Caso de carga $\bar{\alpha}$.-: ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/0$ y $\sigma_{33} = 0$)

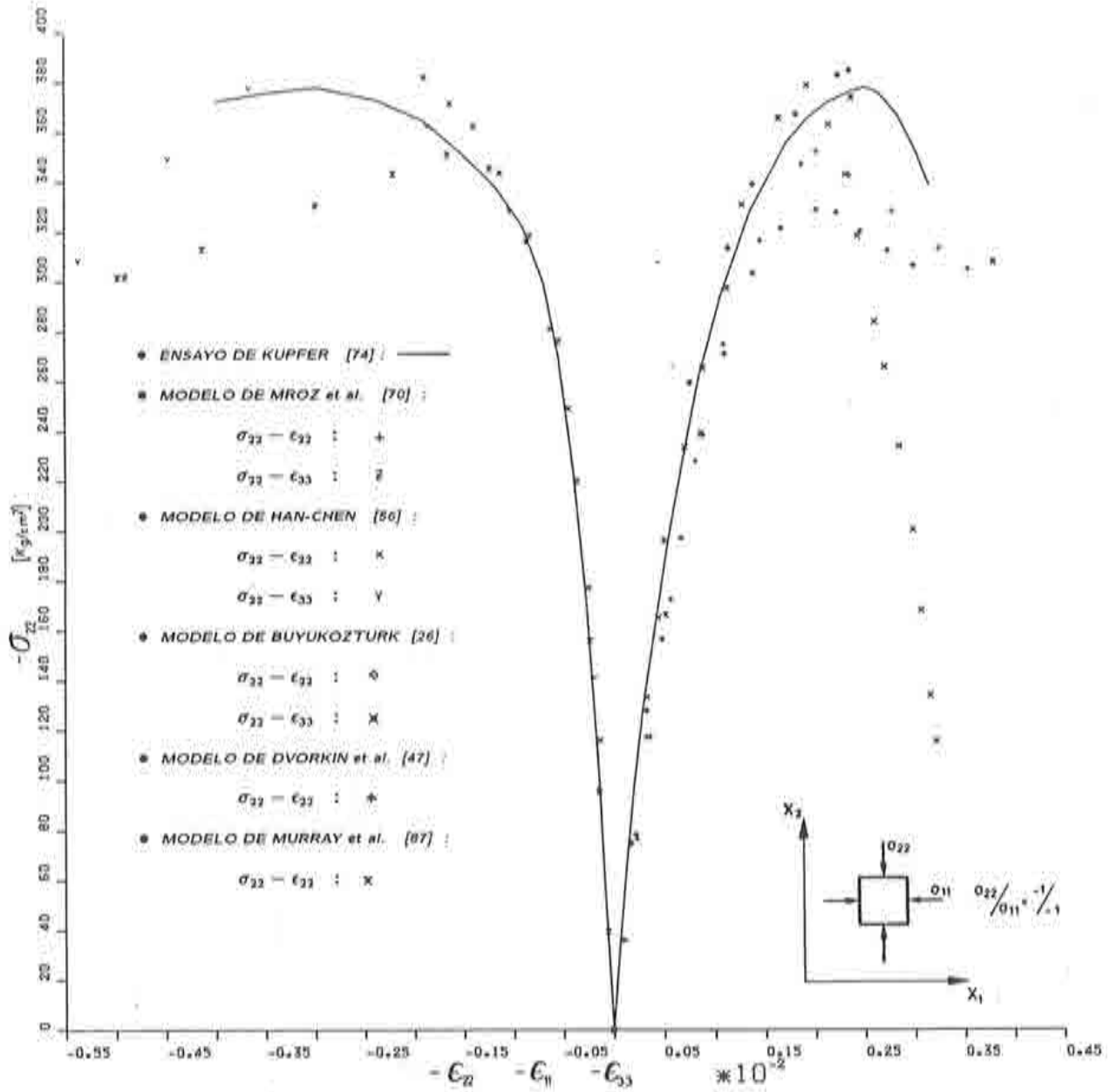


fig.(V.4,b): Comparación entre los resultados obtenidos por algunos modelos numéricos desarrollados por otros investigadores, y el ensayo a compresión biaxial doble simétrica de Kupfer et al. [74]. Caso de carga b.-: ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-1$ y $\sigma_{33} = 0$)

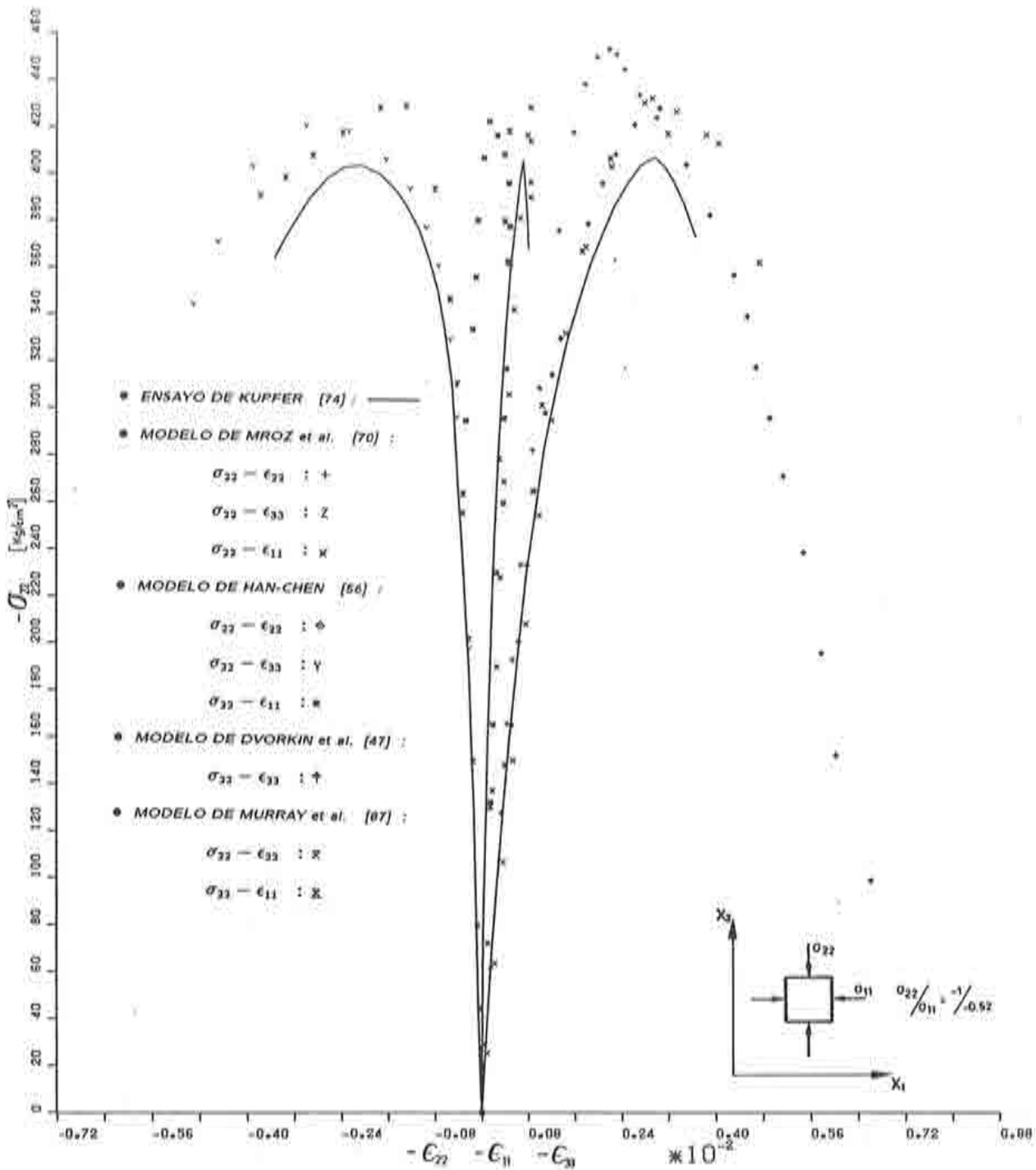


fig.(V.4,c): Comparación entre los resultados obtenidos por algunos modelos numéricos desarrollados por otros investigadores, y el ensayo a compresión biaxial doble asimétrica de Kupfer et al. [74]. Caso de carga c.-: ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-0.52$ y $\sigma_{33} = 0$)

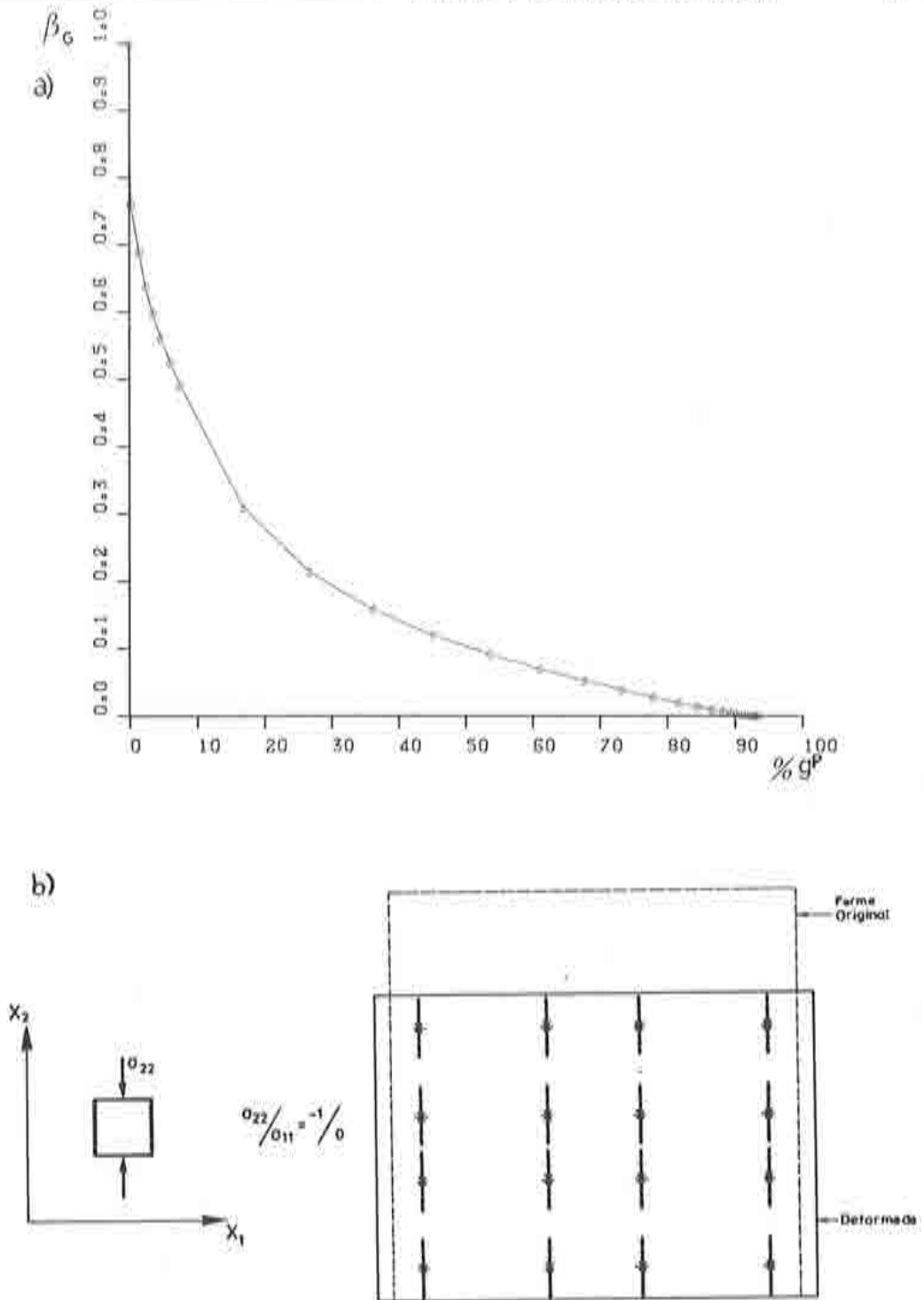


fig.(V.5): a) Forma en que evoluciona el Factor de retención de tensiones cortantes β_c , en un punto de integración numérica, durante el desarrollo de un proceso de carga cuasi estático de tracción o compresión uniaxial. b) Esquema de fisuración para un caso de compresión simple.

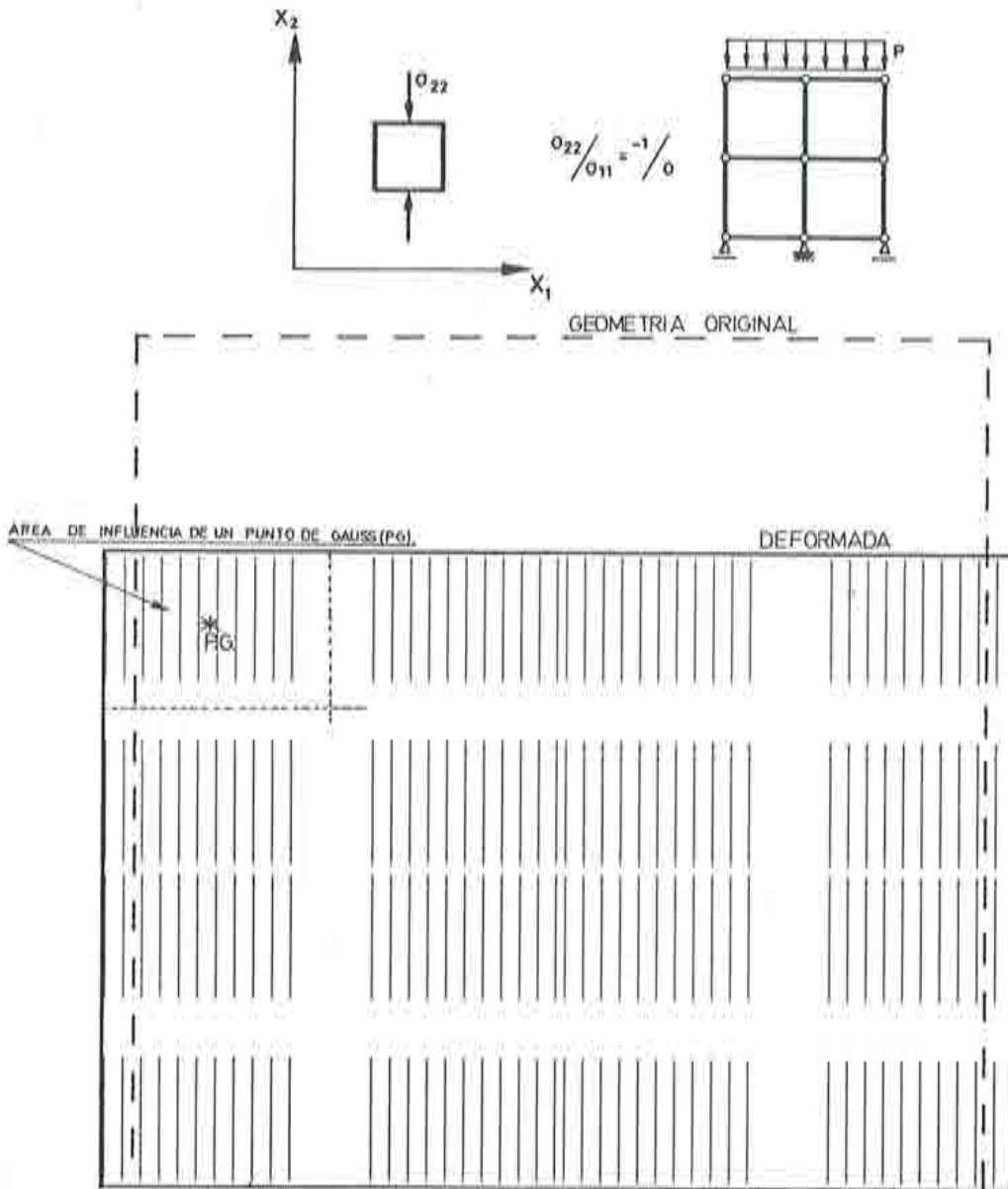


fig.(V.6,a): Tipo de fisuración que predice el modelo, para el caso de carga a.-: ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/0$ y $\sigma_{33} = 0$)

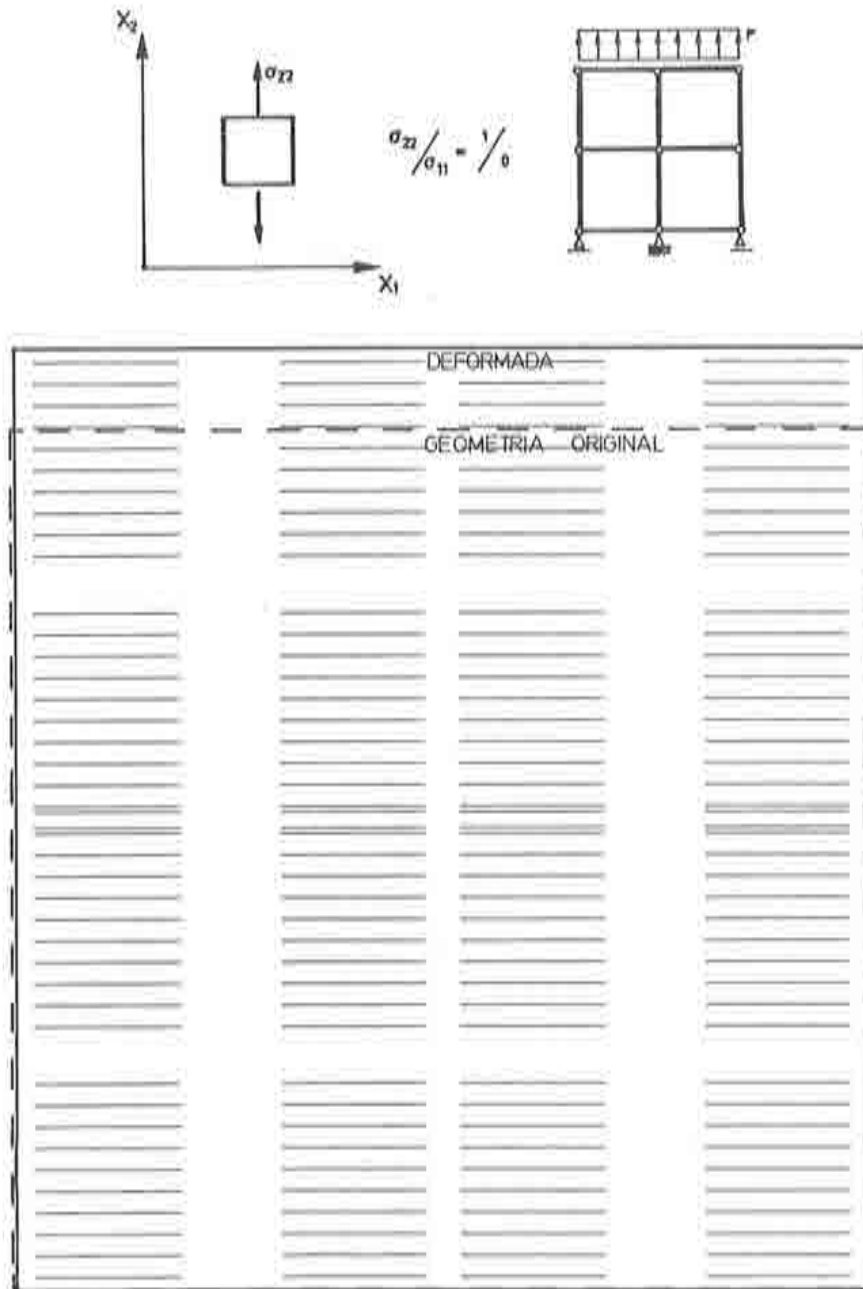


fig.(V.6.b): Tipo de fisuración que predice el modelo, para el caso de carga d.-: ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = 1/0$ y $\sigma_{33} = 0$)

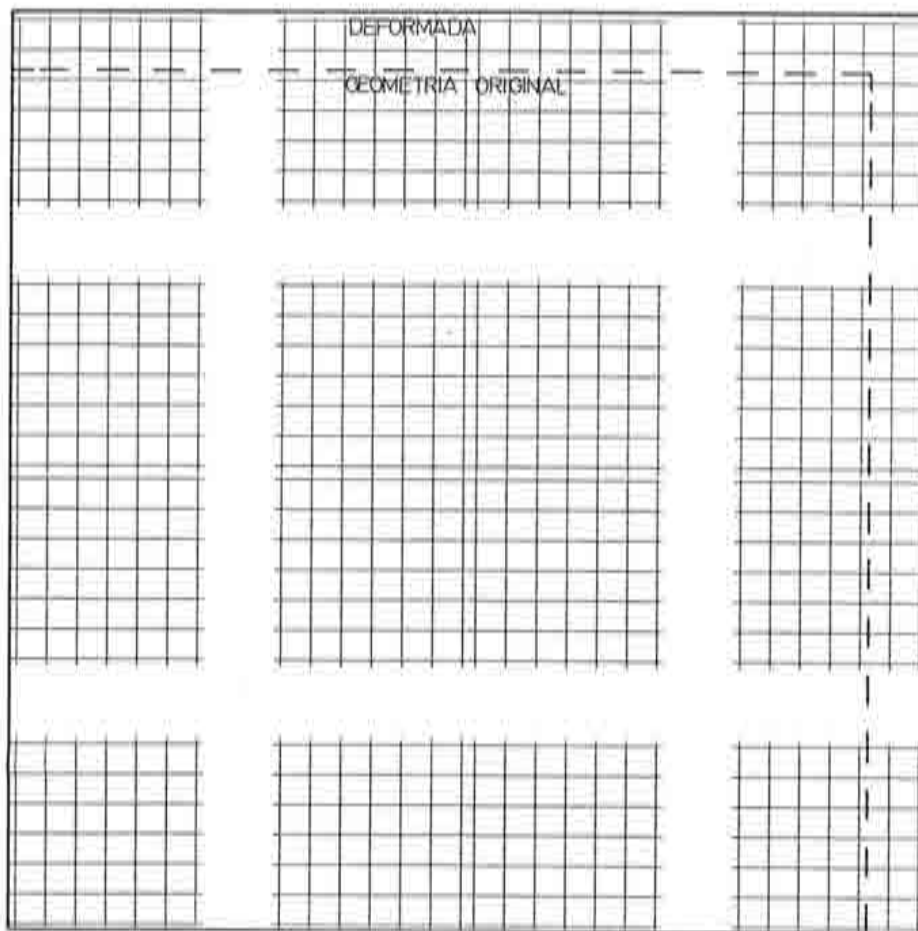
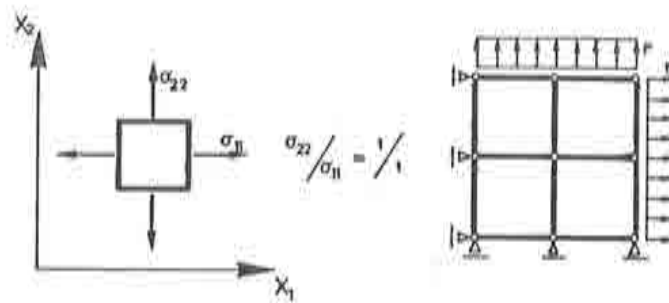


fig.(V.6,c): Tipo de fisuración que predice el modelo, para el caso de carga d.-: ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = 1/1$ y $\sigma_{33} = 0$)

V.3.- ENSAYO DE TRACCION EN DOS DIRECCIONES ORTOGONALES - PRUEBA DE LA DIRECCIONALIDAD DEL DAÑO.

V.3.a- Consideraciones generales sobre el ensayo.

Se ha realizado este ensayo de tracción sobre una probeta de hormigón de $20.0 \times 20.0 \times 5.0$ cm. del tipo de la de Kupfer et al ^[74] fig.(V.7,a), con el fin de mostrar el comportamiento *macro-direccional* que exhibe el daño en la masa del sólido, después de que un cierto número de puntos inician su comportamiento inelástico con ablandamiento (*aparts. IV.1 y An-D.1*).

Esta probeta cúbica ha sido sometida a dos estados de cargas fig.(V.7,b): **Primero** se traccionó en la dirección x_2 (carga P_{AB}), hasta alcanzar el estado último (estado en que el sólido no puede seguir resistiendo cargas); y luego se aplicó la **segunda** carga en la dirección normal a la anterior, x_1 (carga P_{BC}), hasta alcanzar nuevamente un estado de daño considerable.

Las características geométricas y mecánicas utilizadas para realizar el ensayo numérico son las que se muestran en la fig.(V.7). Como se puede observar, el *modelo de material* utilizado coincide con el de Kupfer *apart. V.2*.

Se ha discretizado el dominio del sólido con 121 elementos finitos planos de cuatro nodos, y se ha utilizado para cada elemento una integración numérica de Gauss-Legendre ^[144] de 2×2 puntos.

En el ensayo descrito en el apartado anterior ha sido necesario aplicar cargas, controlando desplazamientos en ciertos puntos mediante el procedimiento de Crisfield ^[37], con el fin de mantener constante la relación de tensiones σ_{22}/σ_{11} durante todo el proceso de carga. En el problema que se está analizando, no ha sido necesario mantener constante esta relación de tensiones, por que son dos ensayos uniaxiales superpuestos. Debido a esto, no se ha utilizado ningún método de control de desplazamientos, y en vez de aplicar cargas, se han impuesto desplazamientos en las caras: primero en la dirección x_2 (δu_{AD}) hasta alcanzar el estado último, y luego se ha aplicado el desplazamiento en la dirección x_1 (δu_{BC}).

Se ha resuelto el problema de plasticidad no-asociada, utilizando el método de rigidez inicial K_0 al igual que en el problema anterior.

V.3.b- Análisis del ensayo.

En la figs.(V.8), se pueden observar las curvas de evolución de la tensión vs. la deformación, para distintos puntos del sólido, tanto en la dirección x_1 como en la x_2 . En ellas, el trazo AB describe el proceso que se desarrolla bajo la aplicación del desplazamiento δu_{AB} , y el trazo $B-C$ describe el proceso que se desarrolla bajo la aplicación del desplazamiento δu_{BC} , mientras se mantiene constante el desplazamiento δu_{AB}^{max} en su valor máximo fig.(V.7.c).

Durante el desarrollo del proceso AB (en la dirección x_2), al llegar al punto L_{AB} figs.(V.8) mas allá del pico de tensiones, se produce una *localización de deformaciones en una banda* definida por los elementos 56 al 66 figs.(V.9,a) y (V.9,b), donde la relación tensión-deformación, para todos los puntos contenidos en esta banda, siguen un proceso con ablandamiento figs.(V.8,a) y (V.8,b). El resto de los puntos que están fuera de la banda de localización, sigue un proceso elasto-plástico con ablandamiento por un camino distinto, hasta alcanzar el límite L'_{AB} figs.(V.8,c) y (V.8,d), a partir del cual inician una descarga elástica.

Alcanzado el valor de desplazamiento δu_{AB}^{max} (Punto B), se aplica un desplazamiento δu_{BC} en la dirección x_1 . Debido a que el daño producido en el proceso anterior se ha localizado en una faja paralela a la dirección x_1 y el resto del sólido no ha agotado su resistencia, sino que la mantiene casi intacta, se pueden aplicar nuevas cargas en direcciones distintas a la x_2 figs.(V.8,e) y (V.8,f). El proceso BC , se inicia con un comportamiento elástico hasta alcanzar el nuevo pico de tensiones, que coincide con el valor de la tensión al límite L_{AB} (inicio de la descarga elástica en el proceso de carga anterior): $\sigma_{BC}^{pic} \equiv \sigma_{AB}^{L_{AB}}$. Si se sigue incrementando el desplazamiento δu_{BC} , se alcanza el límite L_{BC} figs.(V.8), que marca el inicio de una nueva *localización de deformaciones*, en una banda transversal a la anterior, definida por los elementos: 6, 17, 28, 39, 50, 61, 72, 83, 94, 105, 116 figs.(V.9,b), (V.9,c) y (V.9,d), y donde sus puntos siguen con un comportamiento tensión deformación con ablandamiento figs.(V.8,e) y (V.8,f). Entre los puntos restantes que no pertenecen a esta banda, están aquellos que se encuentran dentro de la faja de localización desarrollada durante el proceso anterior, para los cuales la respuesta tensión deformación se desarrolla con una rigidez nula; y están los que no pertenecen a ninguna de estas dos fajas y siguen un proceso elasto-plástico con ablandamiento por un camino

distinto a los puntos dañados, hasta alcanzar el límite L'_{BC} donde se inicia un proceso elástico de descarga fig.(V.8.f).

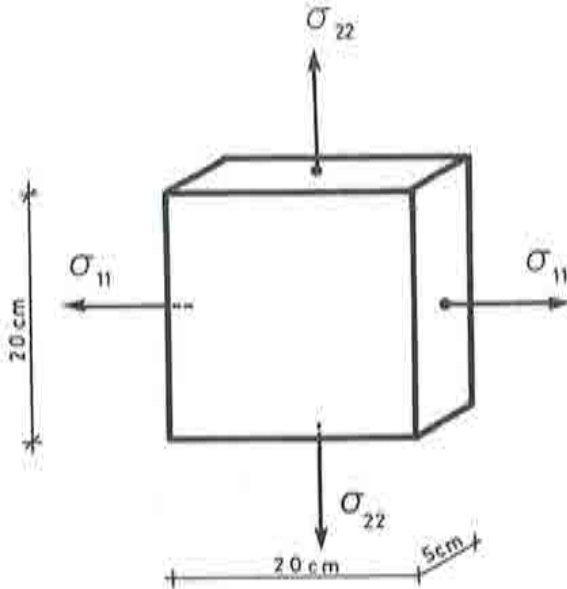
Al concluir el proceso de carga BC , se puede observar en la figs.(V.10) que la banda de localización desarrollada durante el primer caso de carga, no ha respondido frente a la aplicación del segundo caso de carga.

A partir del punto C , se han presentado grandes problemas de convergencia hacia la solución. Debido a que el ensayo tenía por objeto mostrar el fenómeno de macro-ortotropía o macro-direccionalidad, y habiéndose cumplido este objetivo, se consideró innecesario proseguir más allá de este límite.

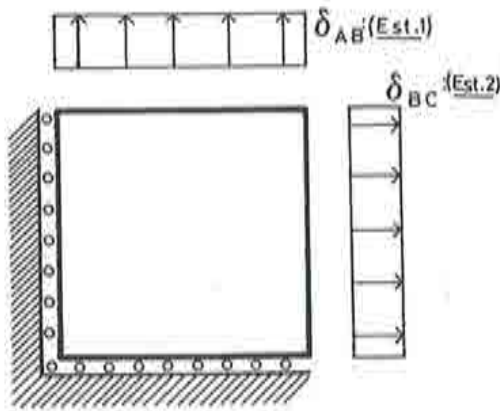
En las figs.(V.9,b) y (V.9,d) se muestra el estado de fisuración que predice el modelo en los puntos de integración de Gauss-Legendre. El análisis de dicha fisuración se ha realizado de acuerdo a la metodología presentada en el *apart. An-D.2.*; así el post-procesador del modelo interpreta que la fisuración se inicia cuando la deformación plástica en el punto tiene una componente positiva (estiramiento inelástico), la orientación de cada fisura se representa mediante un trazo ortogonal a la dirección de la correspondiente deformación plástica principal positiva y la densidad de líneas verticales paralelas da una idea cualitativa de la magnitud de la *apertura* de estas fisuras. El esquema de fisuración obtenido revela la formación de dos fajas donde se ha localizado el *daño plástico* figs.(V.9,a) y (V.9,c).

La energía total disipada al finalizar el proceso de carga AB ha sido de 34.00 kgcm , siendo ésta un poco más elevada que la disipada en el problema anterior (Kupfer et al.), con cuatro elementos finitos. Probablemente esta sobreenergía disipada se deba a que la localización no se produjo inmediatamente después de superar el pico de tensiones.

Al igual que en el ejemplo de Kupfer et al. presentado en el apartado anterior, se han obtenido resultados insatisfactorios con elementos planos de ocho nodos.



a) Geometría y sentido positivo de las tensiones



b) Desplazamientos impuestos al sólido

$$E_0 = 395000.00 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\nu_0 = 0.24$$

$$\sigma_C^0 = -229.00 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_C^{pic} = -328.00 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_T^0 = 22.90 \text{ kg/cm}^2$$

$$\alpha = 0.12 \rightarrow \frac{\sigma_{b0}}{\sigma_{e0}} = 1.16$$

$$\gamma = 3.0$$

$$p = 1.0$$

$$G^I = 0.16 \text{ kg/cm}$$

$$G^e = 16.00 \text{ kg/cm}$$

$$L^{pe} = \sqrt{A^e}$$

Flujo asociado. Criterio de fluencia propuesto

Flujo no-asociado. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Criterio de fluencia propuesto ;} \\ \text{Func. de potencial de Mohr-Coulomb} \\ \text{con : } \phi = \psi = 15^\circ \end{array} \right.$

Función de endurecimiento a compresión $c_C(\kappa) : F - 3$

Función de endurecimiento a tracción $c_T(\kappa) : F - 3$

Posición relativa del pico de tensiones : $(\kappa^p)^{pic} = 0.38$

Con degradación elástica.

Sin degradación plástica.

$$\delta^{\max} = 0.02 \text{ cm}$$

$$\bullet \text{ Est. 1 : } \left\{ \begin{array}{l} \delta_{AB} = \delta^{\max} \\ \delta_{BC} = 0 \end{array} \right. \quad \bullet \text{ Est. 2 : } \left\{ \begin{array}{l} \delta_{AB} = \delta^{\max} \\ \delta_{BC} = \delta^{\max} \times 0.25 \end{array} \right.$$

fig.(V.7): Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales- Características geométricas y mecánicas utilizadas en el ensayo numérico.

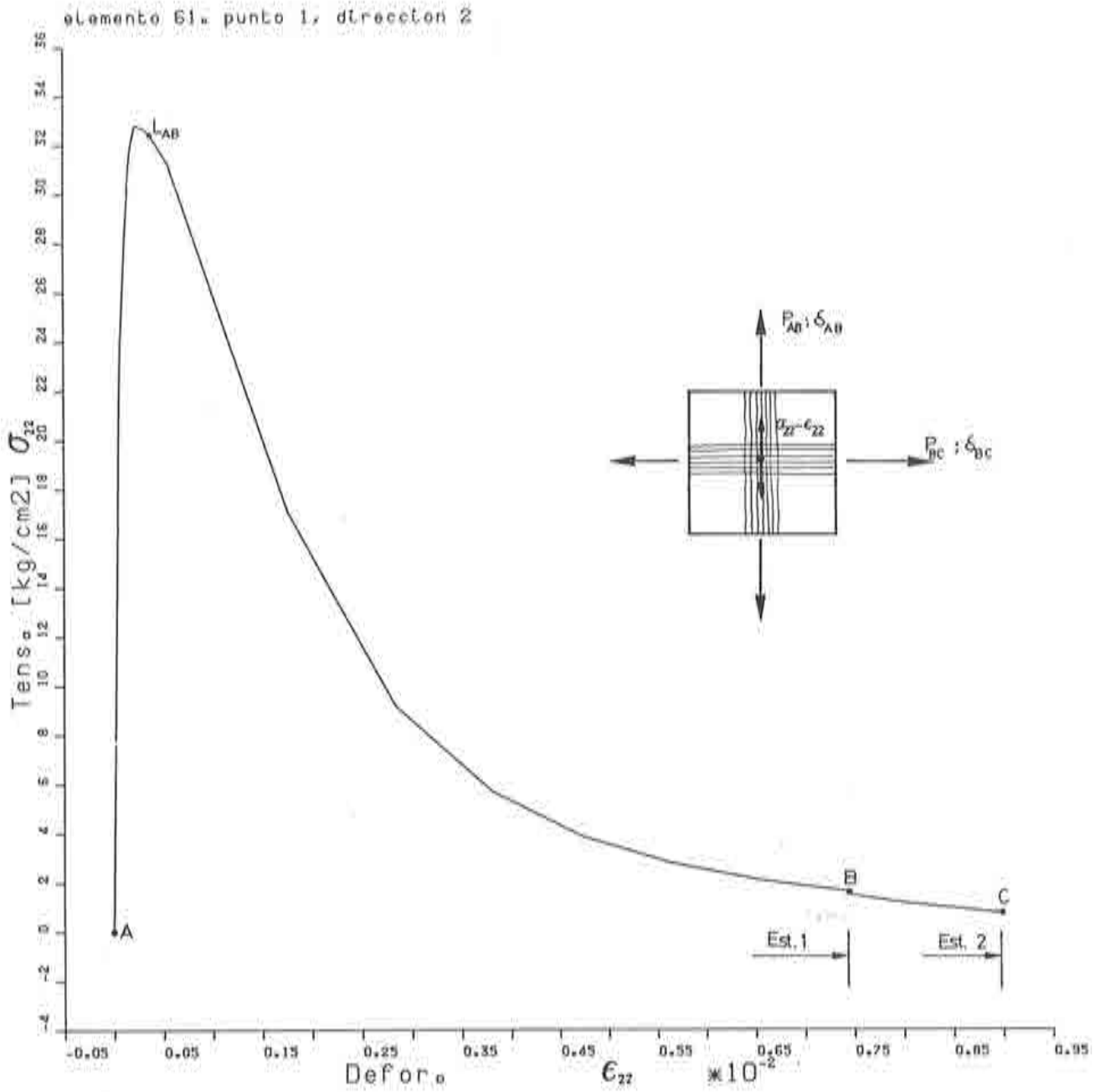


fig.(V.8,a): Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales- Respuesta tensión-deformación $\sigma_{22} - \epsilon_{22}$ para el punto de integración $N^{ro.} 1$, perteneciente al elemento finito $N^{ro.} 61$

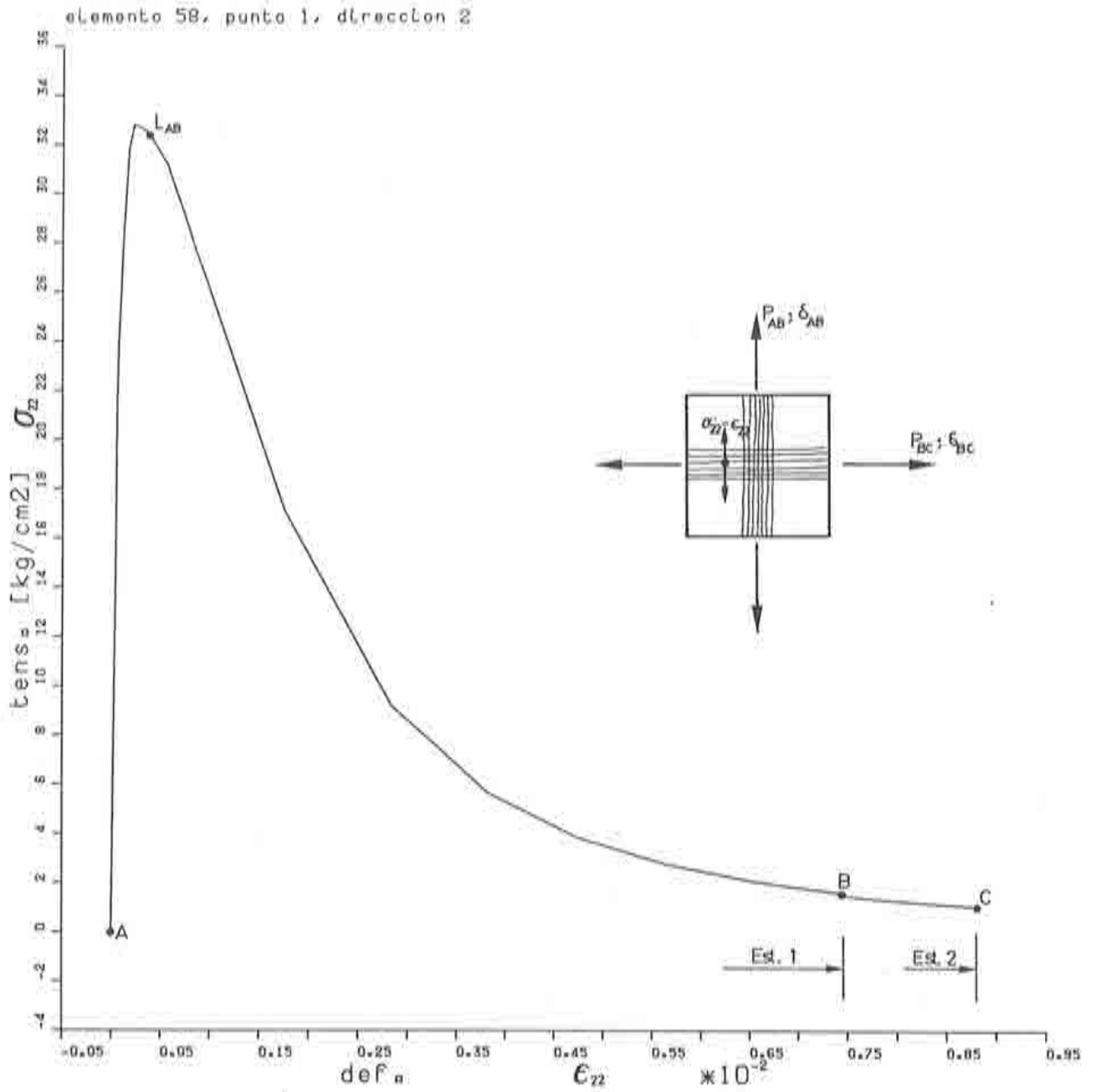


fig.(V.8,b): Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales- Respuesta tensión-deformación $\sigma_{22} - \epsilon_{22}$ para el punto de integración $N^{ro} 1$, perteneciente al elemento finito $N^{ro} 58$

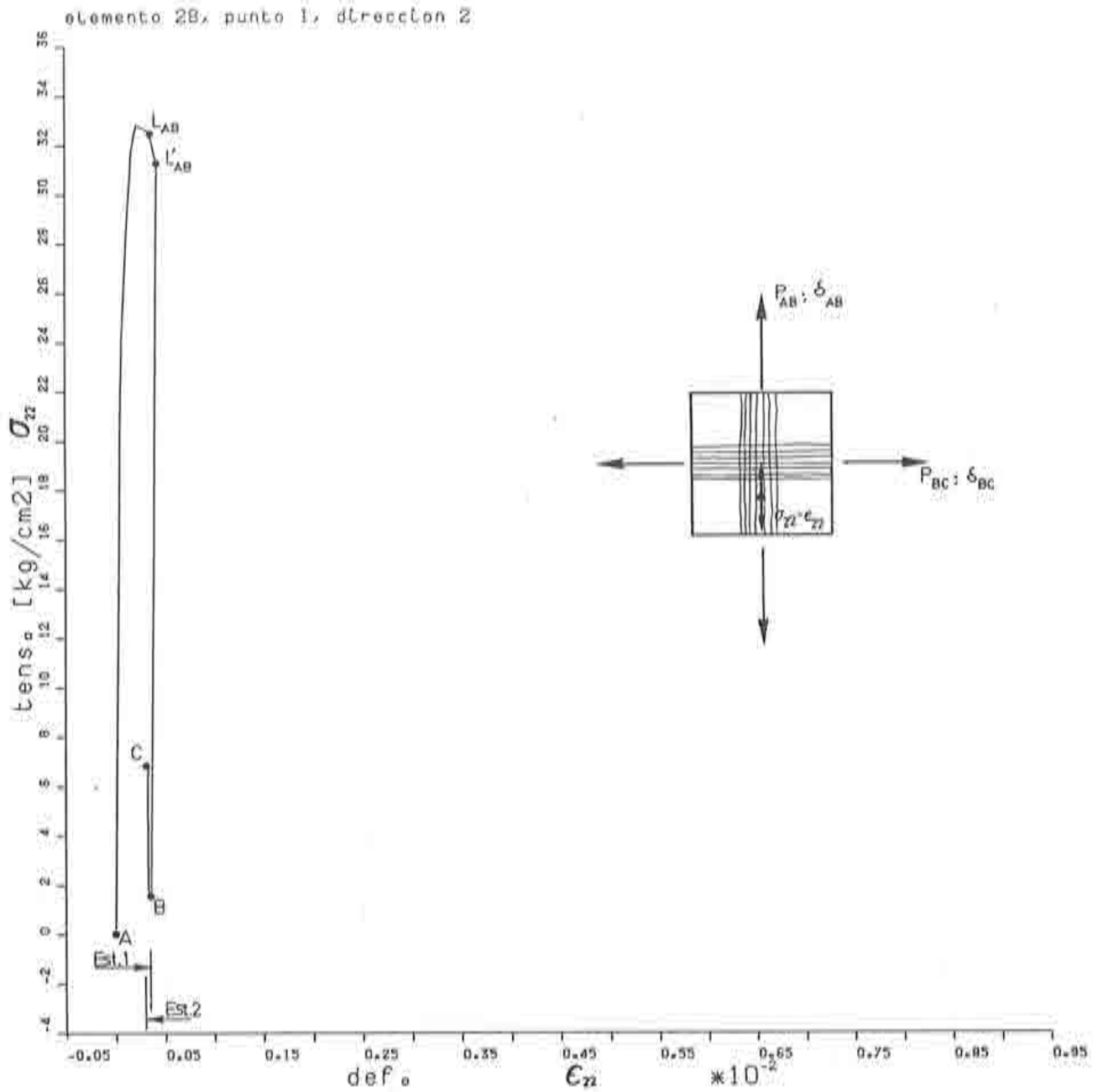


fig.(V.8.c): Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales- Respuesta tensión-deformación $\sigma_{22} - \epsilon_{22}$ para el punto de integración $N^{ro.} 1$, perteneciente al elemento finito $N^{ro.} 28$

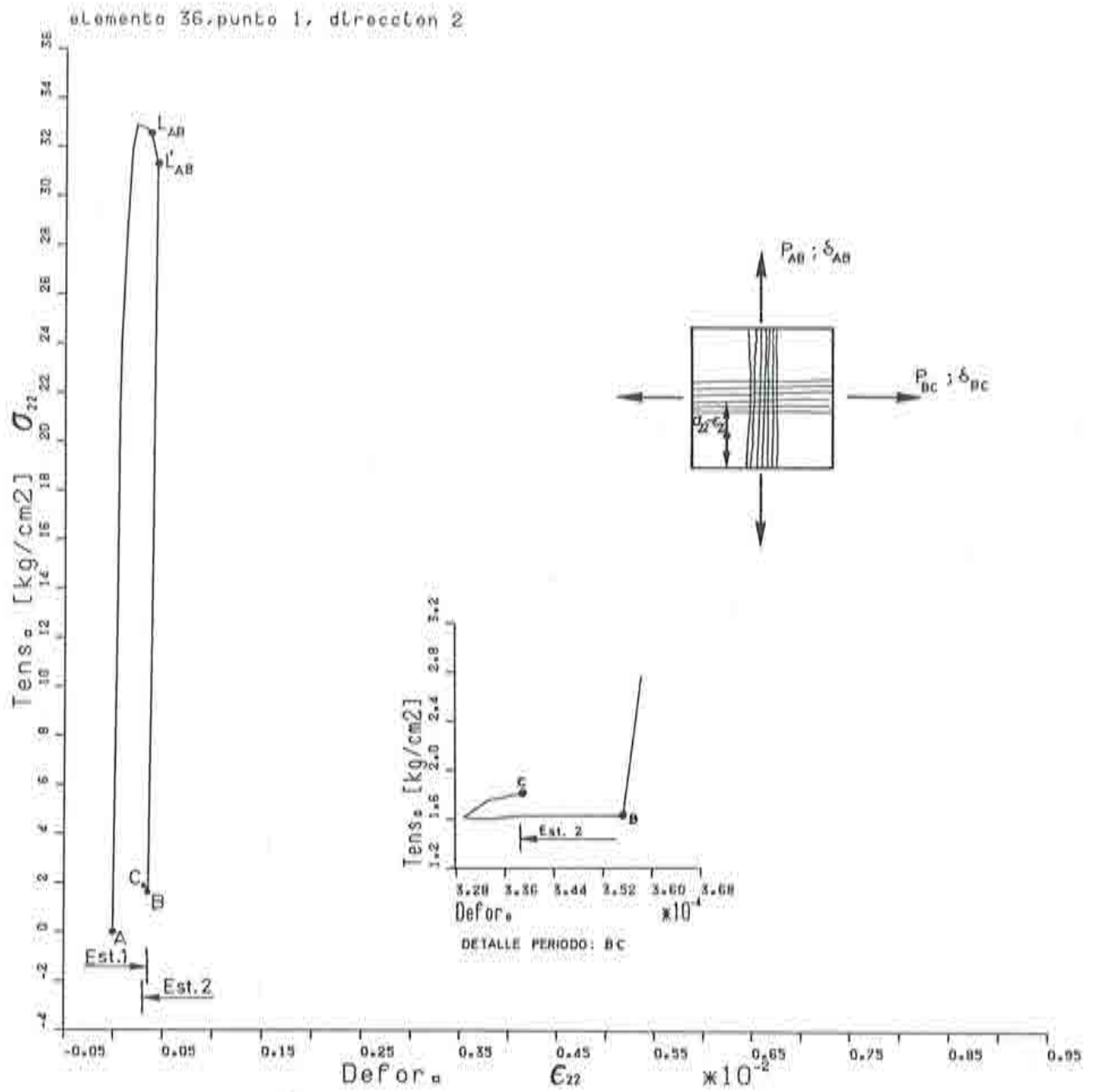


fig.(V.8,d): Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales- Respuesta tensión-deformación $\sigma_{22} - \epsilon_{22}$ para el punto de integración $N^{ro} 1$, perteneciente al elemento finito $N^{ro} 36$

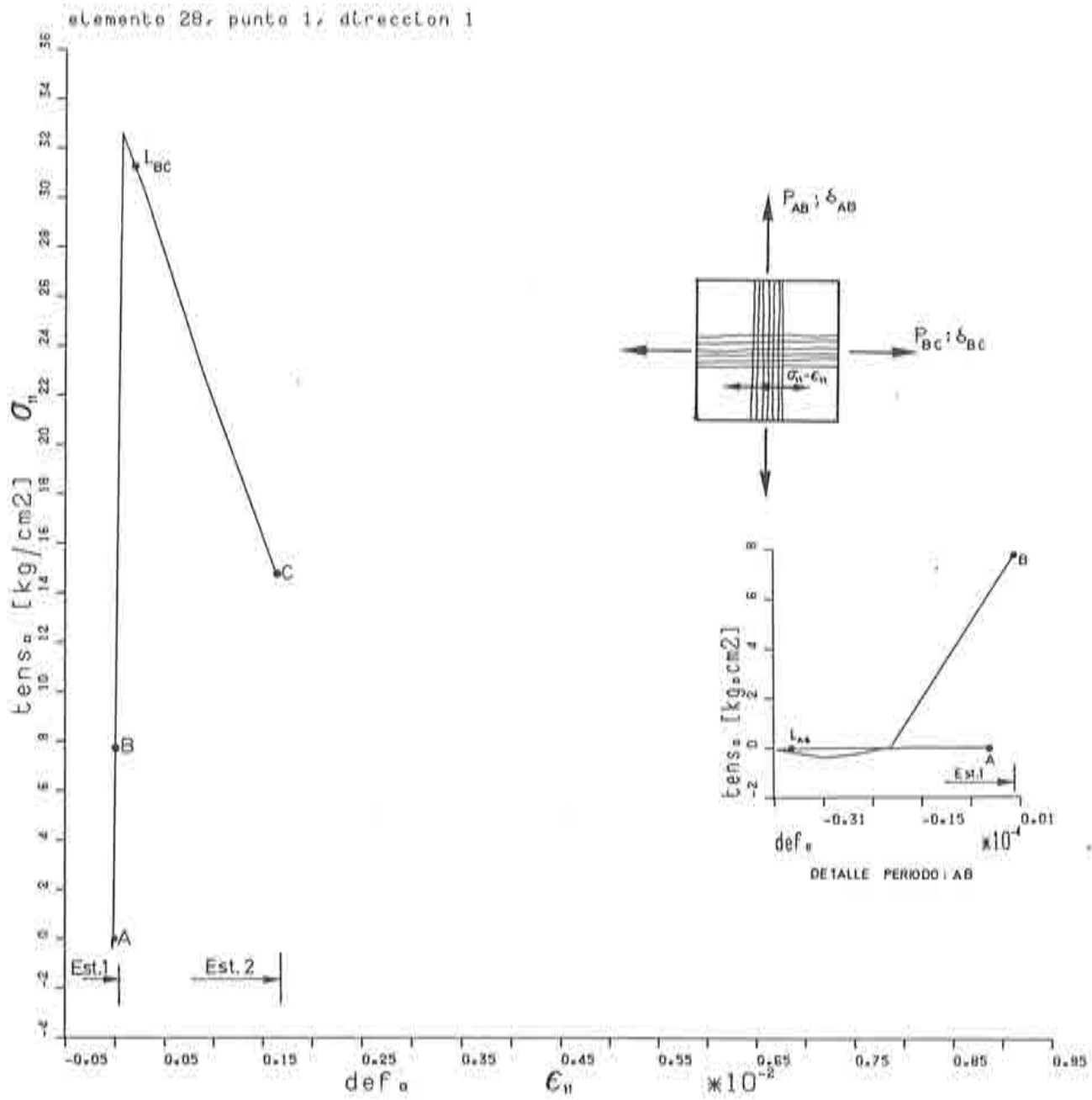


fig.(V.8,e): Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales- Respuesta tensión-deformación $\sigma_{11} - \epsilon_{11}$ para el punto de integración $N^{ro.} 1$, perteneciente al elemento finito $N^{ro.} 28$

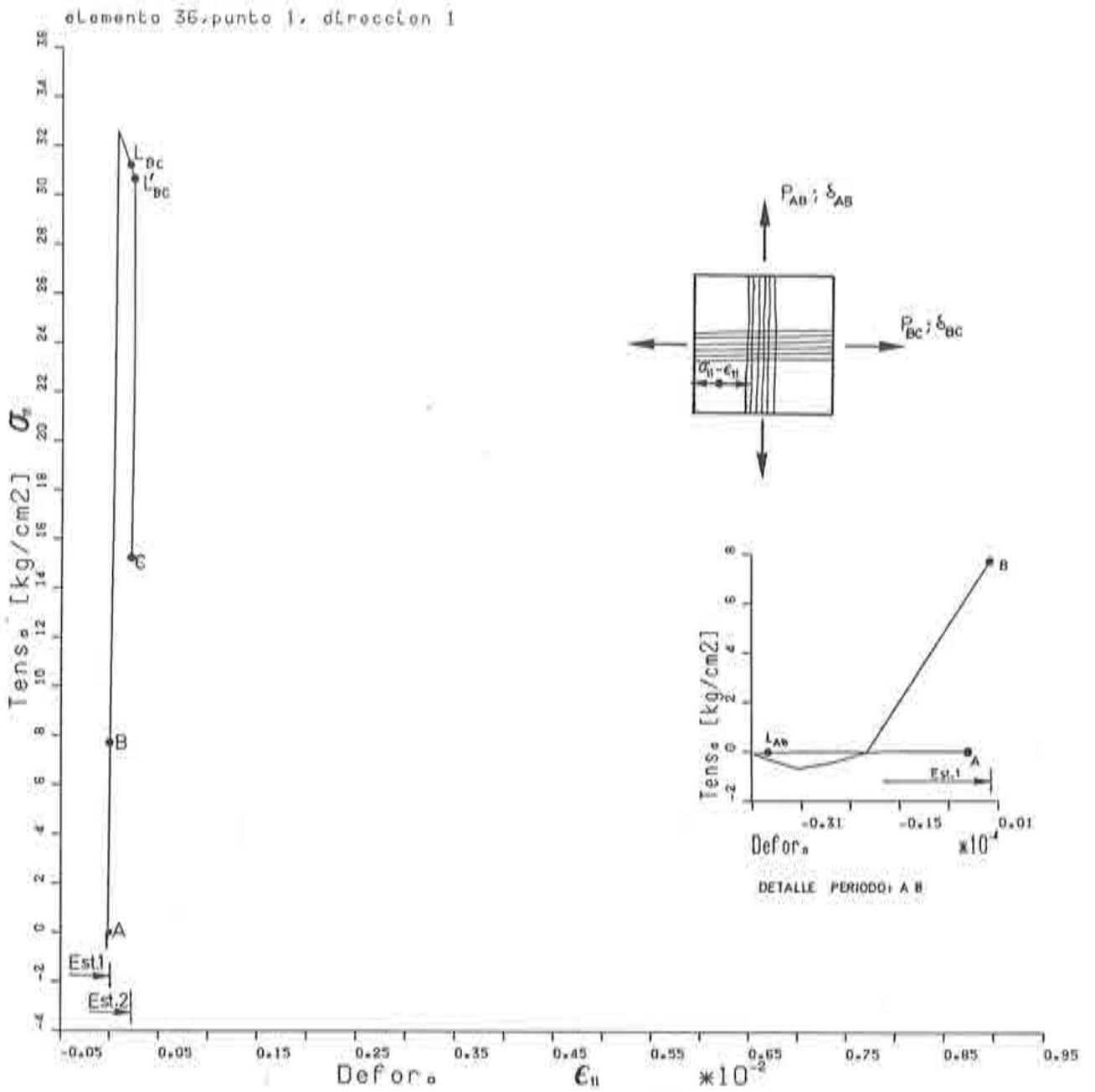


fig.(V.8.f): Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales- Respuesta tensión-deformación $\sigma_{11} - \epsilon_{11}$ para el punto de integración $N^{ro} 1$, perteneciente al elemento finito $N^{ro} 36$.

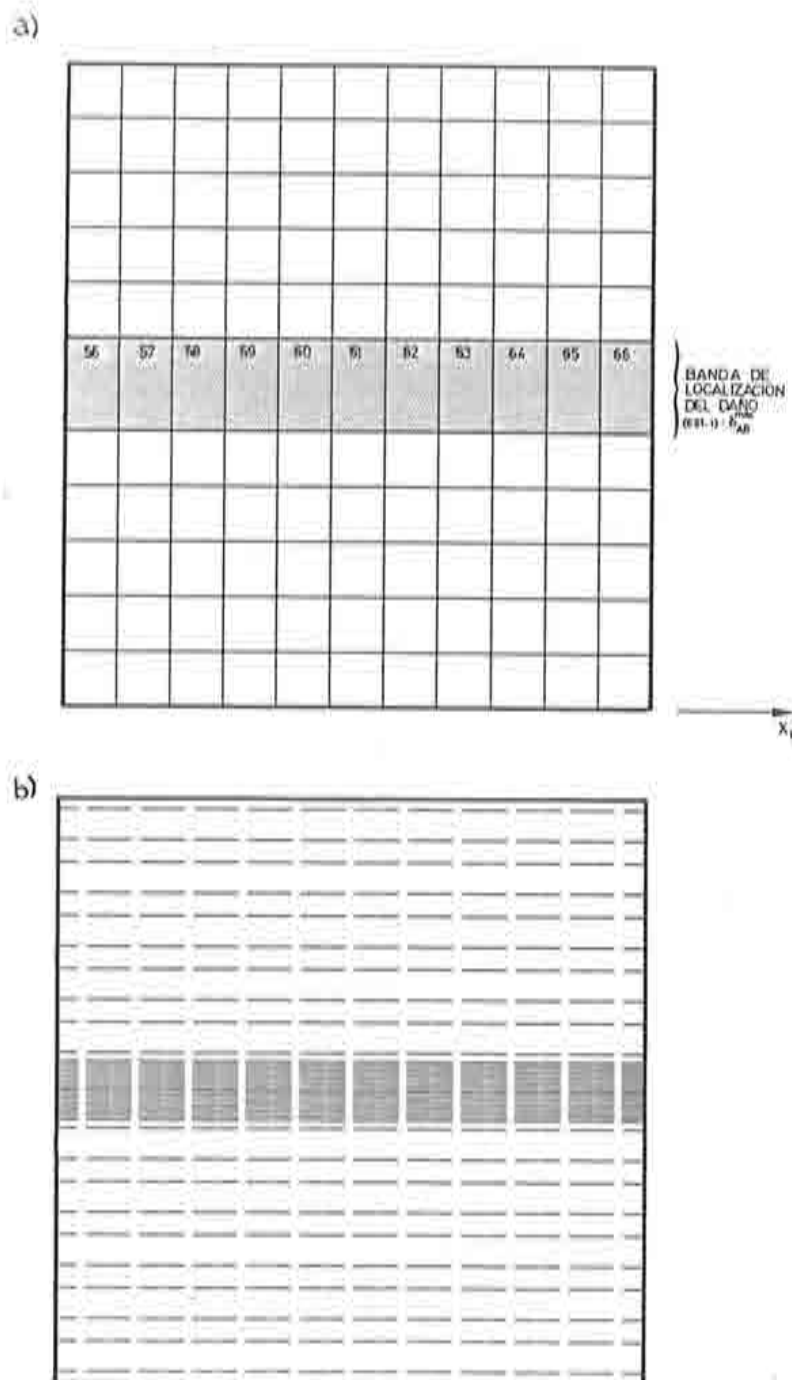


fig.(V.9): a) Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales- Modo de localización de las deformaciones al finalizar la aplicación del desplazamiento δu_{AB} . b) Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales- Estado de fisuración al finalizar la aplicación del desplazamiento δu_{AB} . Representación de todas las fisuras.

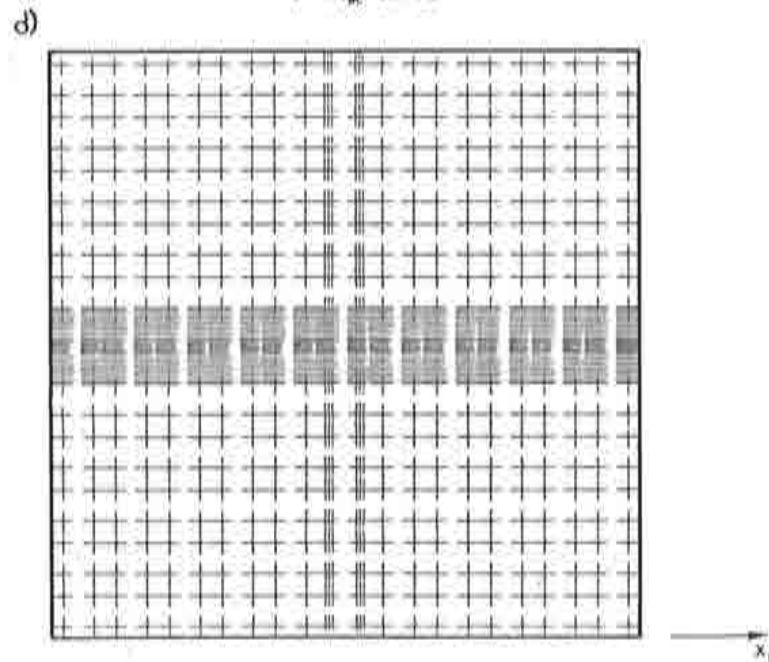
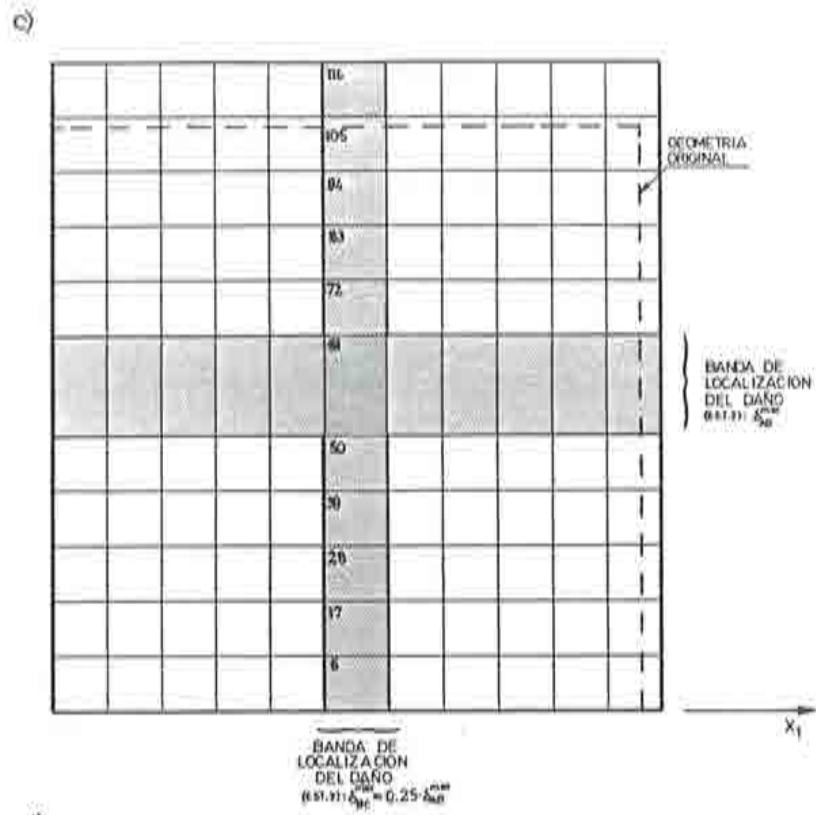


fig.(V.9): c) Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales- Modo de localización de las deformaciones al finalizar la aplicación del desplazamiento δu_{BC} ; d) Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales- Estado de fisuración al finalizar la aplicación del desplazamiento δu_{BC} ; Representación de todas las fisuras.

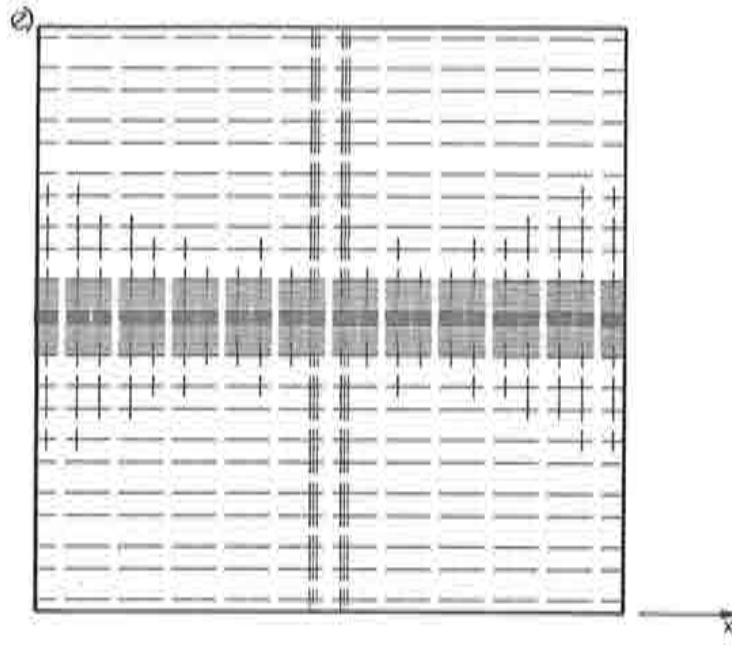


fig.(V.9,e): Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales- Estado de fisuración al finalizar la aplicación del desplazamiento δu_{DC} . Representación de las fisuras mayores al $3^\circ/\sigma$ de la máxima.

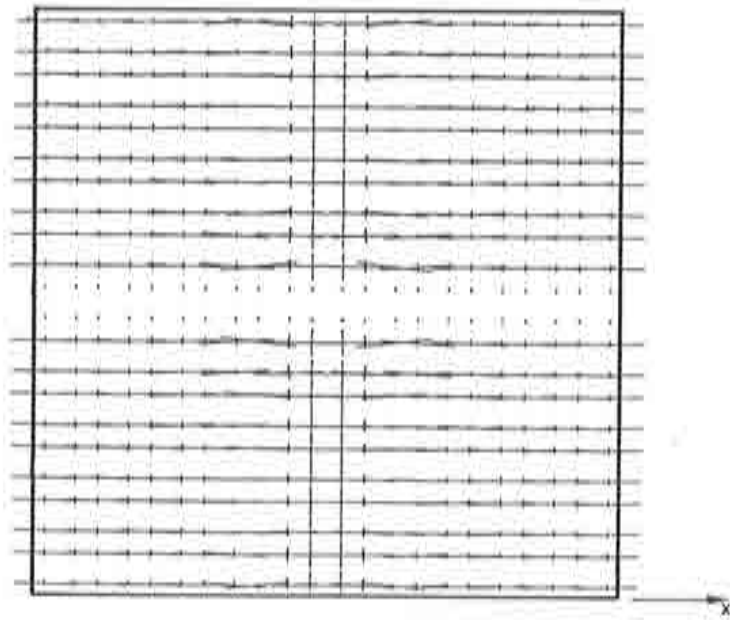


fig.(V.10): Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales- Estado de tensiones al finalizar la aplicación del desplazamiento δu_{DC} .

V.4.- ENSAYO A TRACCION SIMPLE DE UNA PROBETA ENTALLADA.

V.4.a- Consideraciones generales sobre el ensayo.

Este ejemplo ha sido propuesto para probar la *objetividad* en la respuesta del modelo propuesto, respecto de dos mallas de elementos finitos con distinto grado de discretización fig.(V.11,c). Este caso ha sido ensayado por Petersson ^[110] con el fin de determinar la magnitud de la *energía de fractura por unidad de área* G^I , y ha sido analizado en forma numérica por Glemberg ^[64] en su tesis doctoral.

El ensayo consiste en un paralelepípedo entallado fig.(V.11,a) de mortero de cemento, que ha sido sometido a un estiramiento a través de un desplazamiento impuesto en la cara superior de la probeta, hasta agotar totalmente su resistencia a tracción fig.(V.12).

Dada la simetría que presenta la probeta respecto del eje de referencia vertical x_2 , se ha estudiado sólo la parte simétrica derecha del sólido fig.(V.11,b). A pesar de tener también otro plano de simetría horizontal que pasa por el eje x_1 , no se considera la posibilidad de estudiar por separado las sub-partes superior e inferior, debido a que se pretende mostrar la *evolución y localización del daño* en la zona por donde pasa este eje de simetría horizontal.

Se ha discretizado el dominio con dos mallas de elementos finitos de 12 y 30 elementos planos de ocho nodos fig.(V.11,c), y se ha utilizado para cada elemento una integración numérica de Gauss-Legendre ^[144] de 3×3 puntos.

Para la resolución del sistema de ecuaciones no-lineales, se ha utilizado el método de rigidez inicial K_0 *apart. Ap-II.3.*, conjuntamente con la técnica de control de desplazamientos con un camino plano, propuesta en el *apart. Ap-II.3.d.*, combinada a su vez con el método de control de plastificación, propuesto en el *apart. Ap-II.3.e.*

V.4.b- Análisis del ensayo.

En la fig.(V.12) se puede observar las curvas de evolución de carga vs. desplazamiento durante todo el desarrollo del proceso cuasi-estático de carga.

En el ensayo numérico se ha utilizado una cohesión inicial (correspondiente al límite de discontinuidad inicial) de $c^0 = 27.8014 \text{ kg/cm}^2$, que junto al ángulo de rozamiento interno de $\phi = 32^\circ$ y a una relación de resistencias uniaxiales en el límite de discontinuidad inicial igual a $R_{Mohr}^0 = 3.255$ ec.(Ap-1.88), dan una resistencia a tracción máxima inicial de $\sigma_T^0 = 30.82 \text{ kg/cm}^2$ ec.(Ap-1.96). Esta resistencia es un 7 % más baja que la utilizada por Glemberg en su tesis ^[64], por lo tanto la carga máxima alcanzada resulta menor en esta misma proporción fig.(V.12,b) y (V.12,c). No obstante esta diferencia, se ha logrado una buena coincidencia con los resultados del ensayo de Petersson y con el de Glemberg.

La energía disipada con las dos mallas de elementos finitos, tiende a un valor ligeramente superior al que se ha introducido como dato: $W^I \simeq 0.127 \text{ kg/cm} \times (2\text{cm} \times 3\text{cm}) = 0.762 \text{ kgcm}$. fig.(V.12,a), siendo siempre menor la obtenida con la malla más densa.

Las fisuras se inician a ambos lados del eje de simetría horizontal y a medida que evoluciona el proceso de ablandamiento y localización, se observa una pérdida de simetría, quedando definitivamente localizada en una banda de elementos finitos por debajo del eje de simetría fig.(V.13,a). Los puntos que están fuera de dicha banda de localización, inician un proceso de descarga elástico fig.(V.13,b). Al igual que en los problemas antes presentados, el análisis de dicha fisuración se ha realizado de acuerdo a la metodología detallada en el *apart. An-D.2.*; así el post-procesador del modelo interpreta que la fisuración se inicia cuando la deformación plástica en el punto tiene una componente positiva (estiramiento inelástico), la orientación de cada fisura se representa mediante un trazo ortogonal a la dirección de la correspondiente deformación plástica principal positiva y la densidad de líneas verticales paralelas da una idea cualitativa de la magnitud de la *apertura* de estas fisuras.

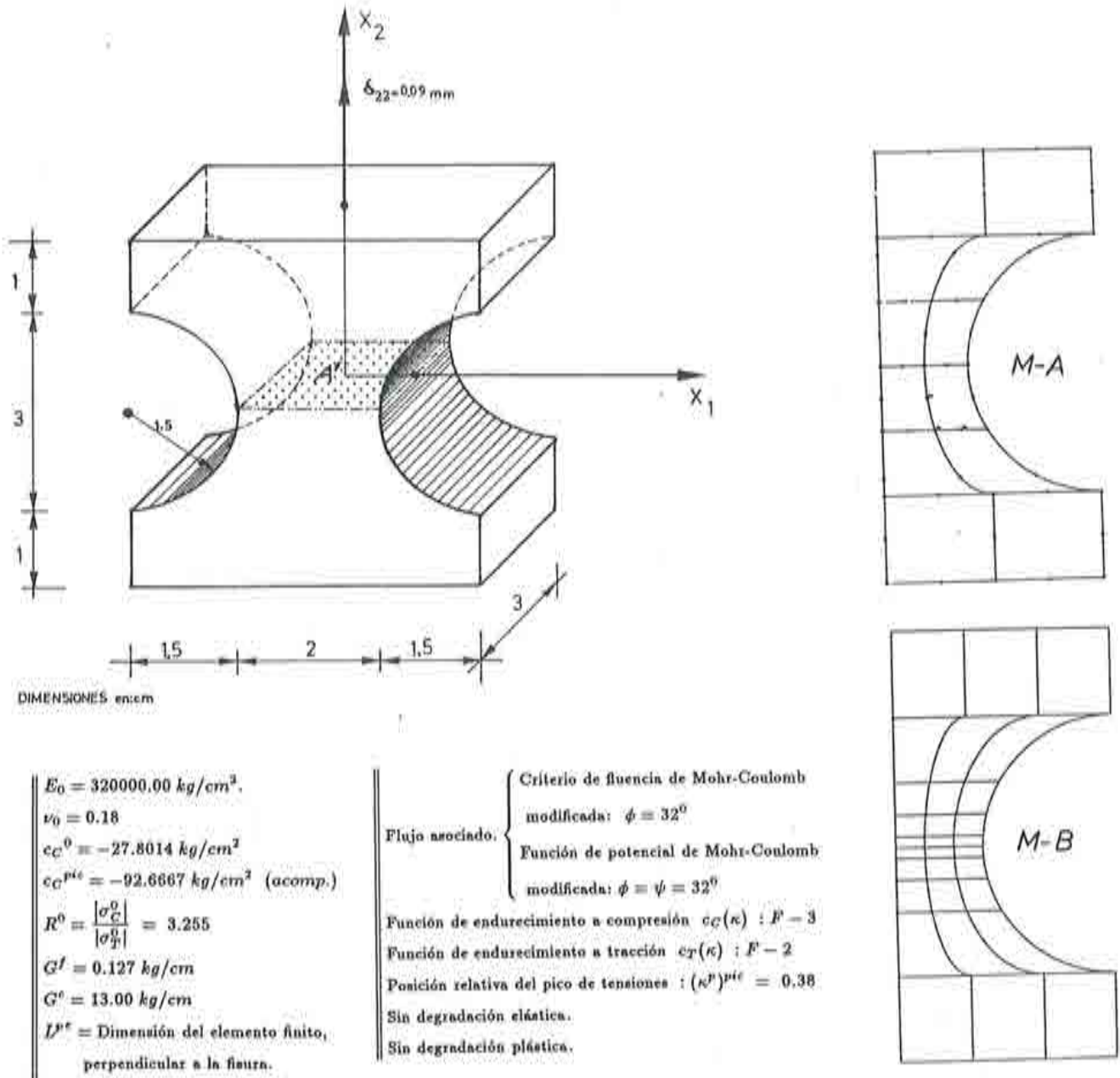


fig.(V.11): Ensayo de una probeta entallada, a tracción simple – Características geométricas mecánicas y malla de elementos finitos utilizada en el ensayo numérico.

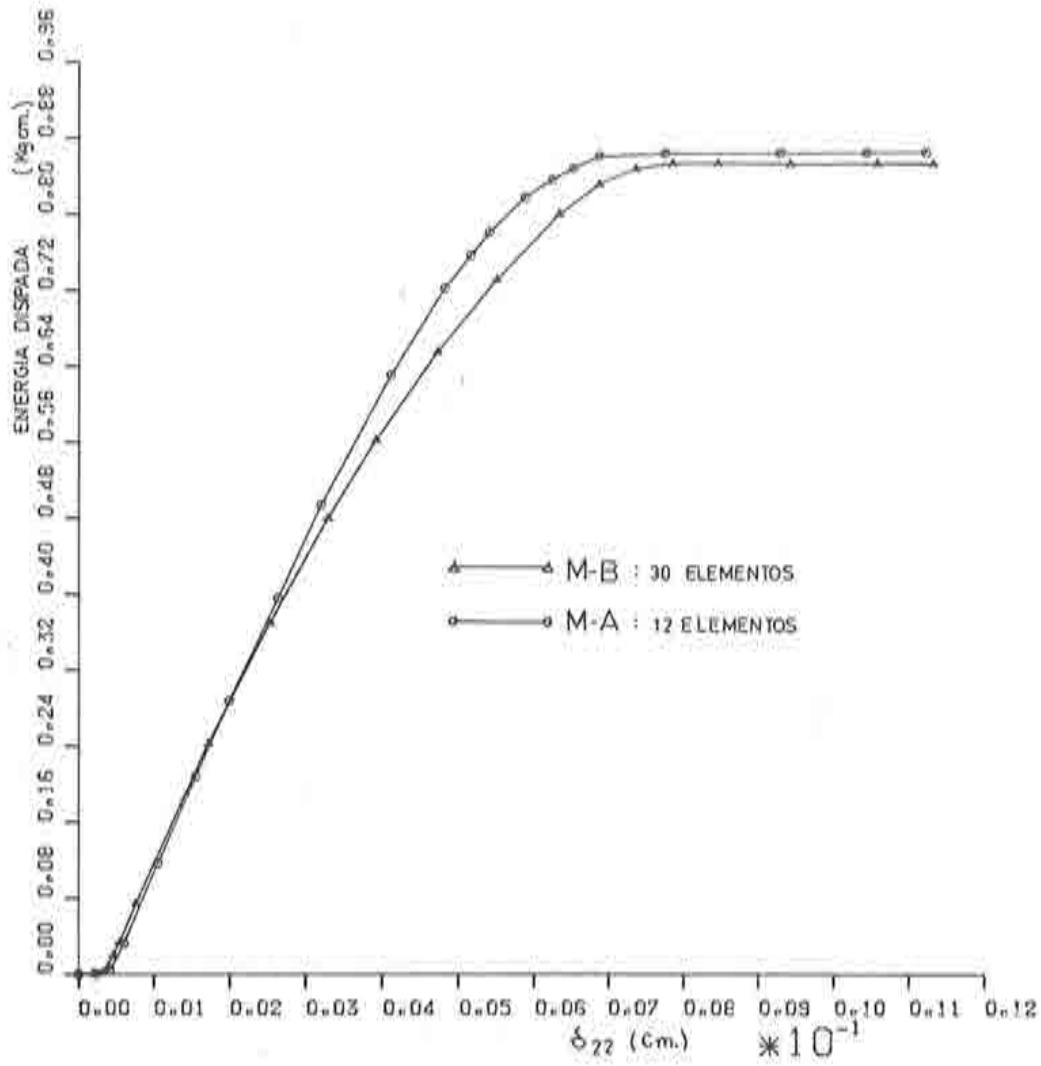


fig.(V.12.a): Ensayo de una probeta entallada, a tracción simple - Energía disipada por el sólido discretizado con las dos mallas de elementos finitos.

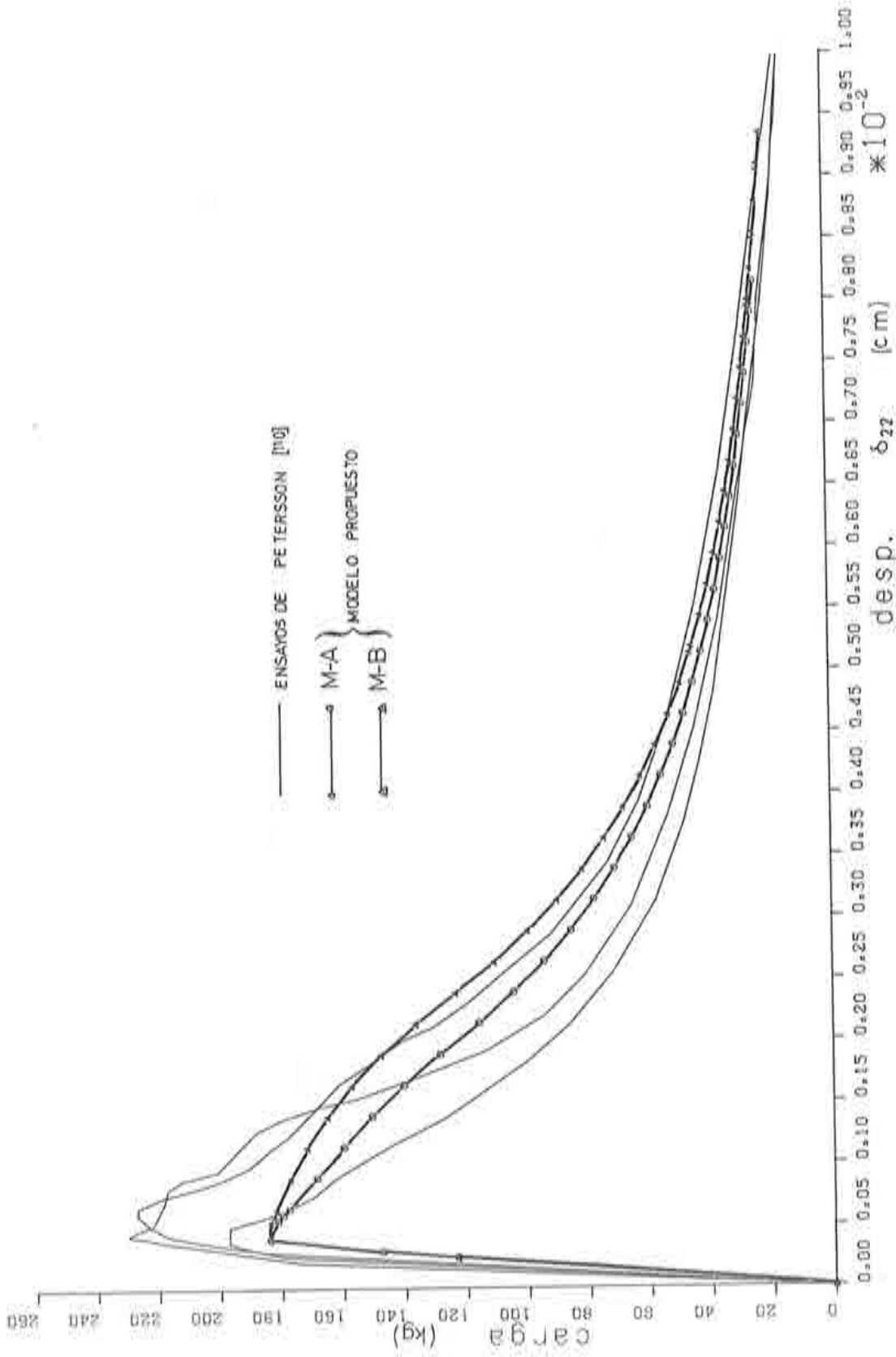


fig.(V.12,b): Ensayo de una probeta entallada, a tracción simple - Comparación de las curvas carga-desplazamiento obtenidas en forma experimental por Petersson [110], con las obtenidas por el modelo de daño plástico con dos mallas de 12 (M-A) y 30 (M-B) elementos finitos.

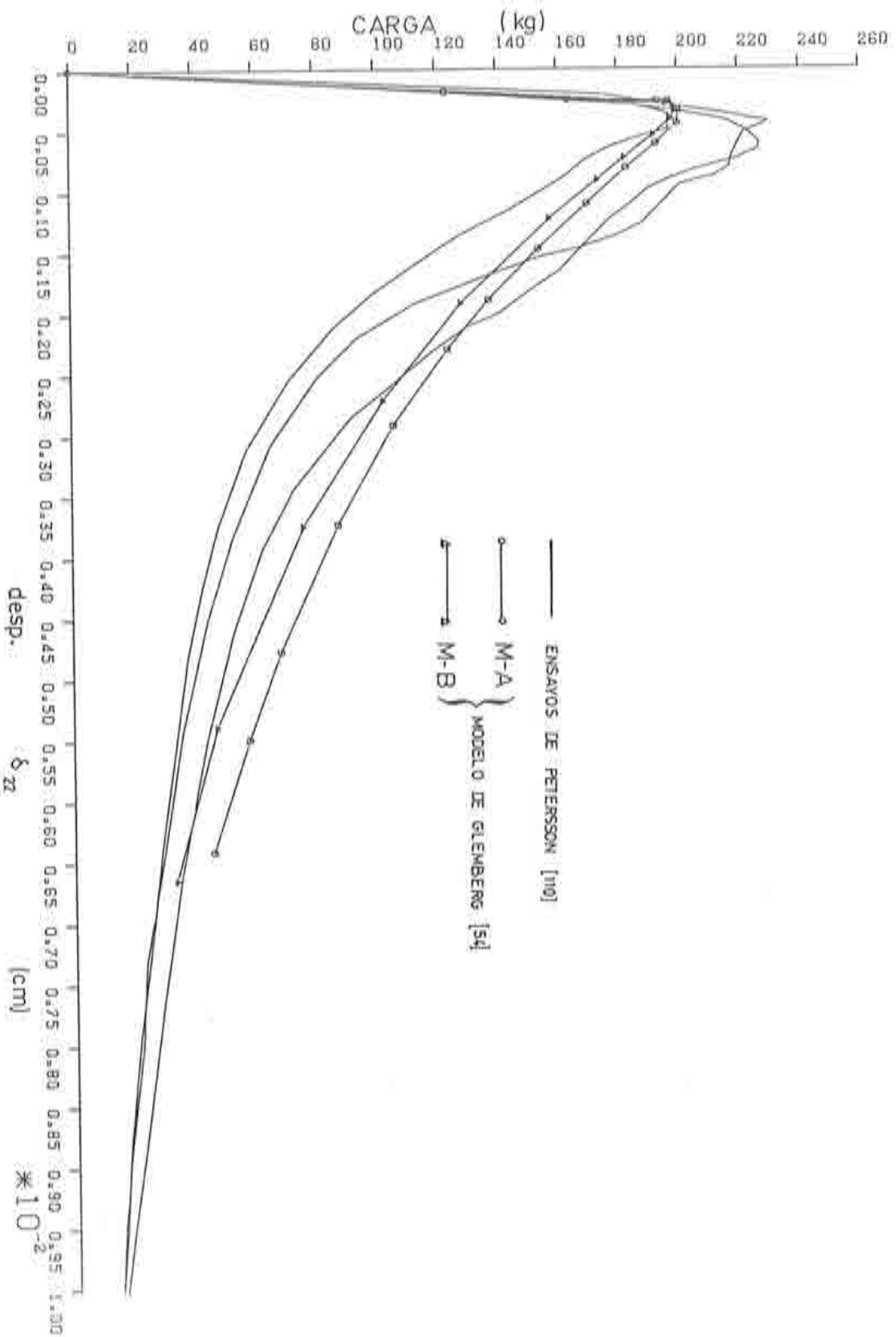


fig.(V.12,c): Ensayo de una probeta entallada, a tracción simple -- Comparación de las curvas carga-desplazamiento obtenidas en forma experimental por Peteresson [110], con las obtenidas por Glemberg [54] con dos mallas de 12 y 30 elementos finitos.

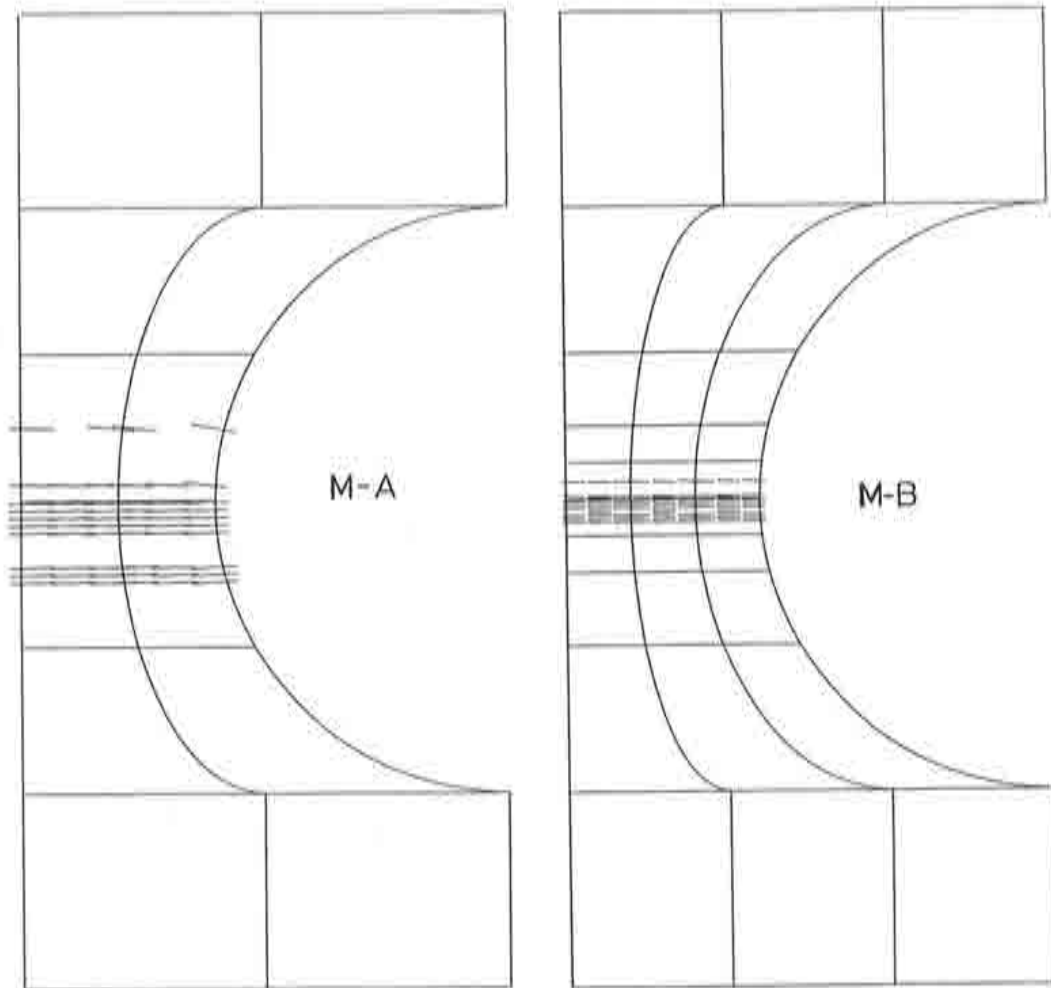


fig.(V.13,a): Ensayo de una probeta entallada, a tracción simple – Estado de fisuración obtenido por el modelo para las probetas discretizadas con las mallas de 12 (M-A) y 30 (M-B) elementos finitos.

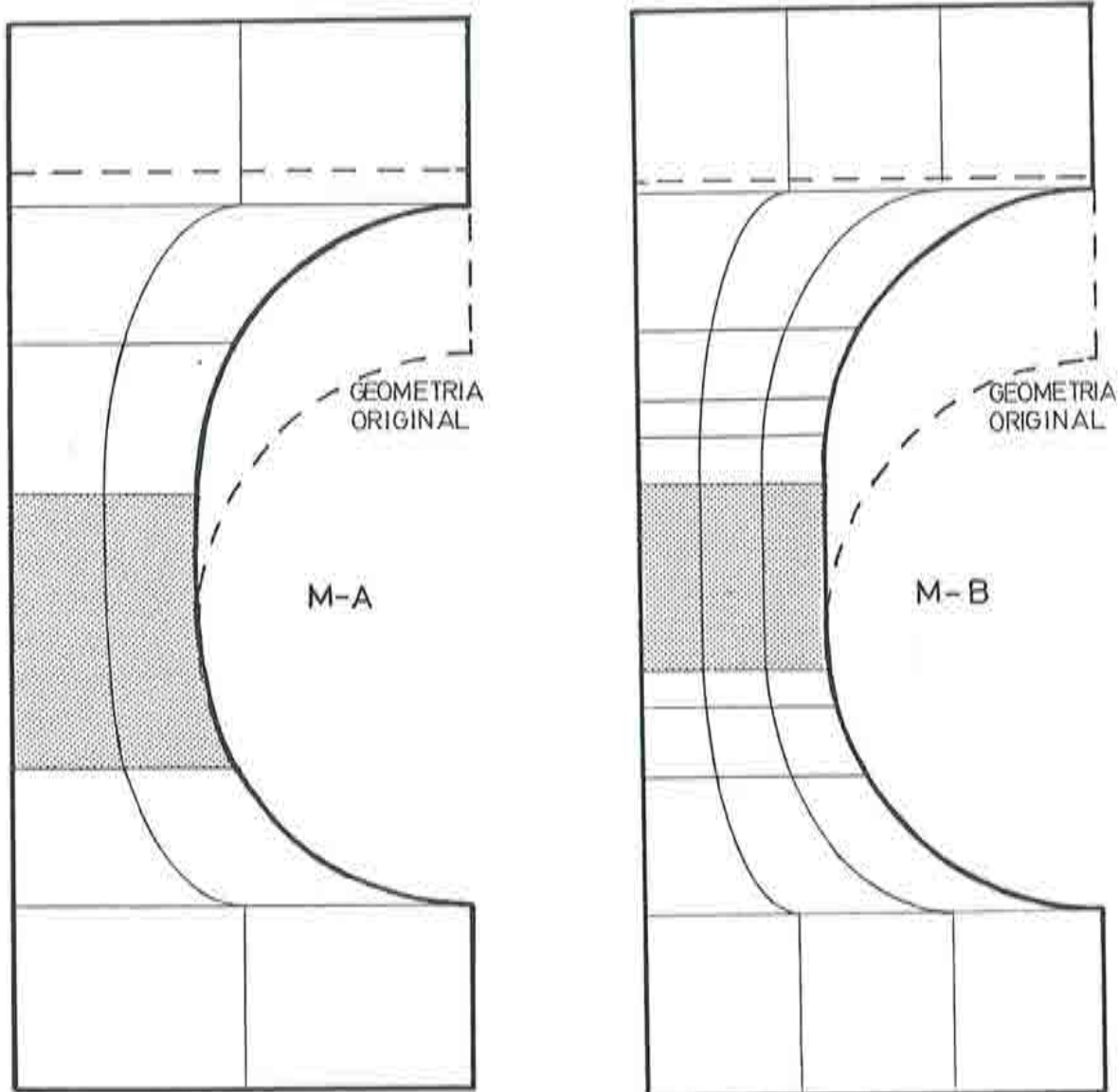


fig.(V.13,b): Ensayo de una probeta entallada, a tracción simple - Deformadas obtenidas por el modelo para las probetas discretizadas con las mallas de 12 (M-A) y 30 (M-B) elementos finitos.

V.5.- ENSAYO A FLEXION DE UNA VIGA EN VOLADIZO.

V.5.a- Consideraciones generales sobre el ensayo.

Este ejemplo se presenta para probar la *objetividad* en la respuesta que ofrece el modelo propuesto respecto del uso de tres mallas de elementos finitos con distinto grado de discretización fig.(V.14), y también para verificar la capacidad del modelo para simular estados de flexión dominante, combinados con corte (flexión transversal).

El ensayo consiste en aplicar un desplazamiento vertical, sobre el eje baricéntrico, en el extremo de una viga en voladizo constituida de hormigón en masa fig.(V.14). El ensayo se desarrolla desde el instante inicial (material inalterado) hasta alcanzar un desplazamiento que provoca la pérdida total de la resistencia de la pieza. fig.(V.15,a).

El dominio de la viga ha sido discretizado con tres mallas de 6, 24 y 96 elementos finitos planos de ocho nodos fig.(V.14), utilizándose una integración numérica de Gauss-Legendre ⁽¹⁴⁴⁾ de 4×4 , 3×3 y 2×2 puntos, respectivamente.

No se ha observado para el caso de sobre-integración el fenómeno de *bloqueo*, ni en el caso de sub-integración el desarrollo de *modos de energía nula*. La razón de utilizar una cuadratura con tantos puntos en la viga de seis elementos finitos, se debe a la necesidad de disponer de puntos más cerca del empotramiento y de aumentar la densidad de estos en la zona dañada, permitiendo así seguir el camino evolutivo de la fractura, por debajo del eje baricéntrico fig.(V.17).

Para la resolución del sistema de ecuaciones no-lineales se ha utilizado el método de rigidez tangente K_T *apart. Ap-II.3.*

Las características geométricas y mecánicas utilizadas para la resolución de este problema, se presentan en la fig.(V.14).

V.5.b- Análisis del ensayo.

La fig.(V.15,a) muestra las curvas de evolución de la carga P vs. el desplazamiento de su punto de aplicación. Es importante notar la total coincidencia de los resultados para las tres mallas de elementos finitos.

La fig.(V.15,b) presenta las curvas de disipación de energía W^p vs. el desplazamiento del extremo, encontrándose para los tres casos una marcada convergencia hacia el valor correcto de la energía disipada $W^p = 495 \text{ kgcm}$, ya que el valor de entrada ha sido $W^p_{entr.} = G^I A^I \simeq 473.0 \text{ kgcm}$. La energía sobre-disipada posiblemente se debe al proceso de aplastamiento que se desarrolla en algunos puntos de la viga.

La fig.(V.15,c) muestra la evolución de las curvas de tensión vs. deformación en el punto más dañado de las tres mallas de elementos finitos. En esta se puede

apreciar que la energía específica $g_T^p = \frac{G^I}{L^{ps}}$ crece con la inversa de la longitud característica plástica del elemento finito $L^{ps} = \sqrt{A^c}$ *apart. An-D.1.c.1*, con el objeto de garantizar la misma energía disipada en las tres mallas.

Las figs.(V.16) muestran la deformada de la viga para las tres mallas de elementos finitos, en los respectivos estados últimos, exhibiendo una marcada *cuña* de localización de deformaciones que delimita el tamaño de la zona dañada. Obsérvese que esta banda de localización se sitúa siempre dentro de la primer columna de elementos finitos, adyacente al empotramiento (formación de una especie de rótula plástica), permitiendo que el resto de la viga se comporte como un sólido rígido.

Las figs.(V.17) presentan el estado de fisuración alcanzado por las tres mallas de elementos finitos. Al igual que en los problemas antes presentados, el análisis de dicha fisuración se ha realizado de acuerdo a la metodología desarrollada en el *apart. An-D.2.*; así el post-procesador del modelo interpreta que la fisuración se inicia cuando la deformación plástica en el punto tiene una componente positiva (estiramiento inelástico), la orientación de cada fisura se representa mediante un trazo ortogonal a la dirección de la correspondiente deformación plástica principal positiva y la densidad de líneas verticales paralelas da idea cualitativa de la magnitud de la *apertura* de estas fisuras. En estas figuras se representan las fisuras que superan el 3 % de la máxima, mostrando una definida forma de *cuña* que decrece hacia el cordón inferior de la viga. Es posible interpretar que estas fisuras distribuidas dentro del elemento finito, representan una simple fractura. En cambio en una región más amplia, que abarca parte de la cara superior de la viga, se presentan fisuras cuya apertura es menor que el 3 % de la máxima,

pudiéndose interpretar a éstas como micro-fisuras que no han prosperado en su proceso evolutivo.

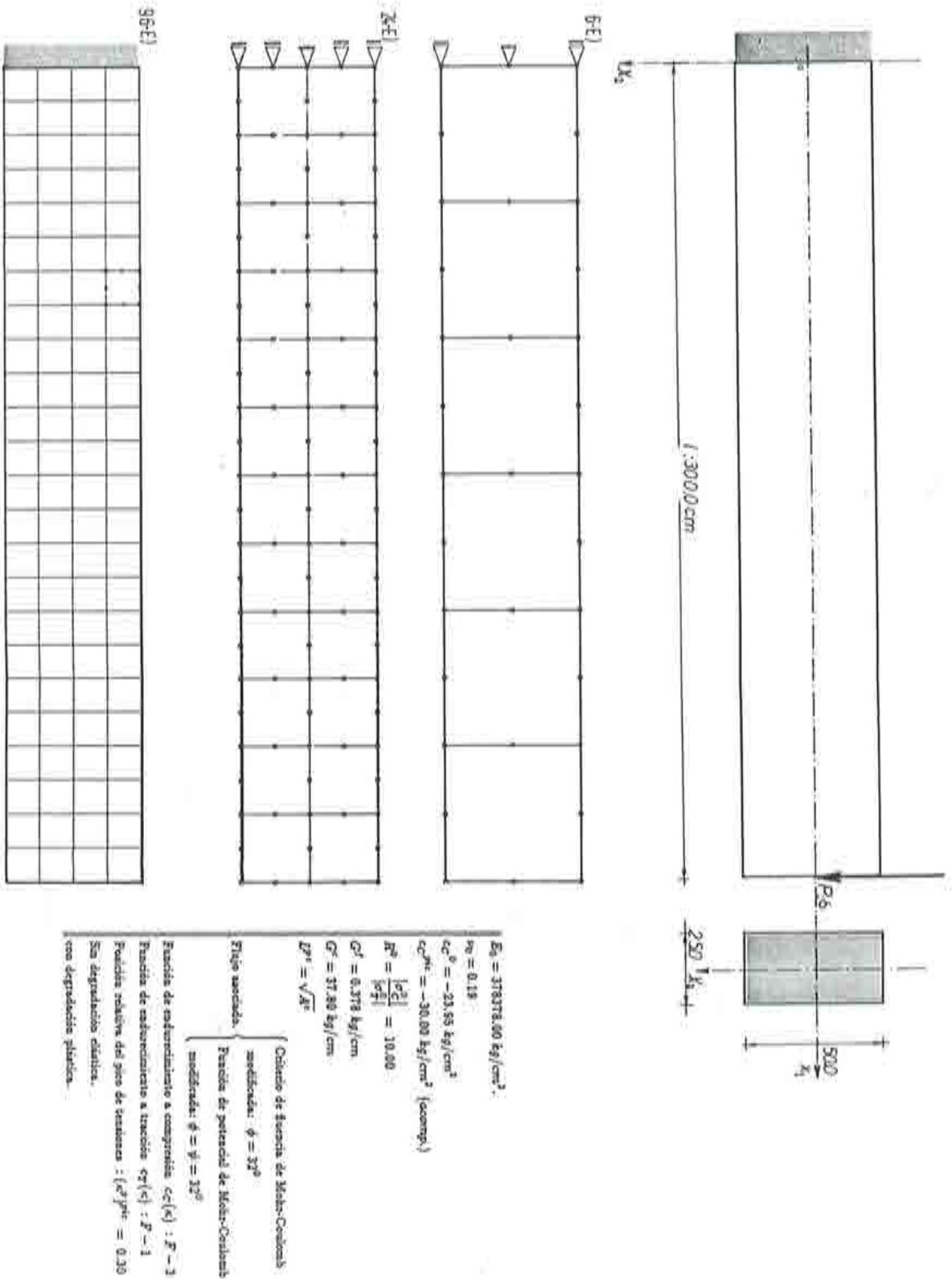


fig.(V.14): Ensayo de una viga en voladizo, a flexión – Características geométricas mecánicas y malla de elementos finitos utilizada en el ensayo numérico.

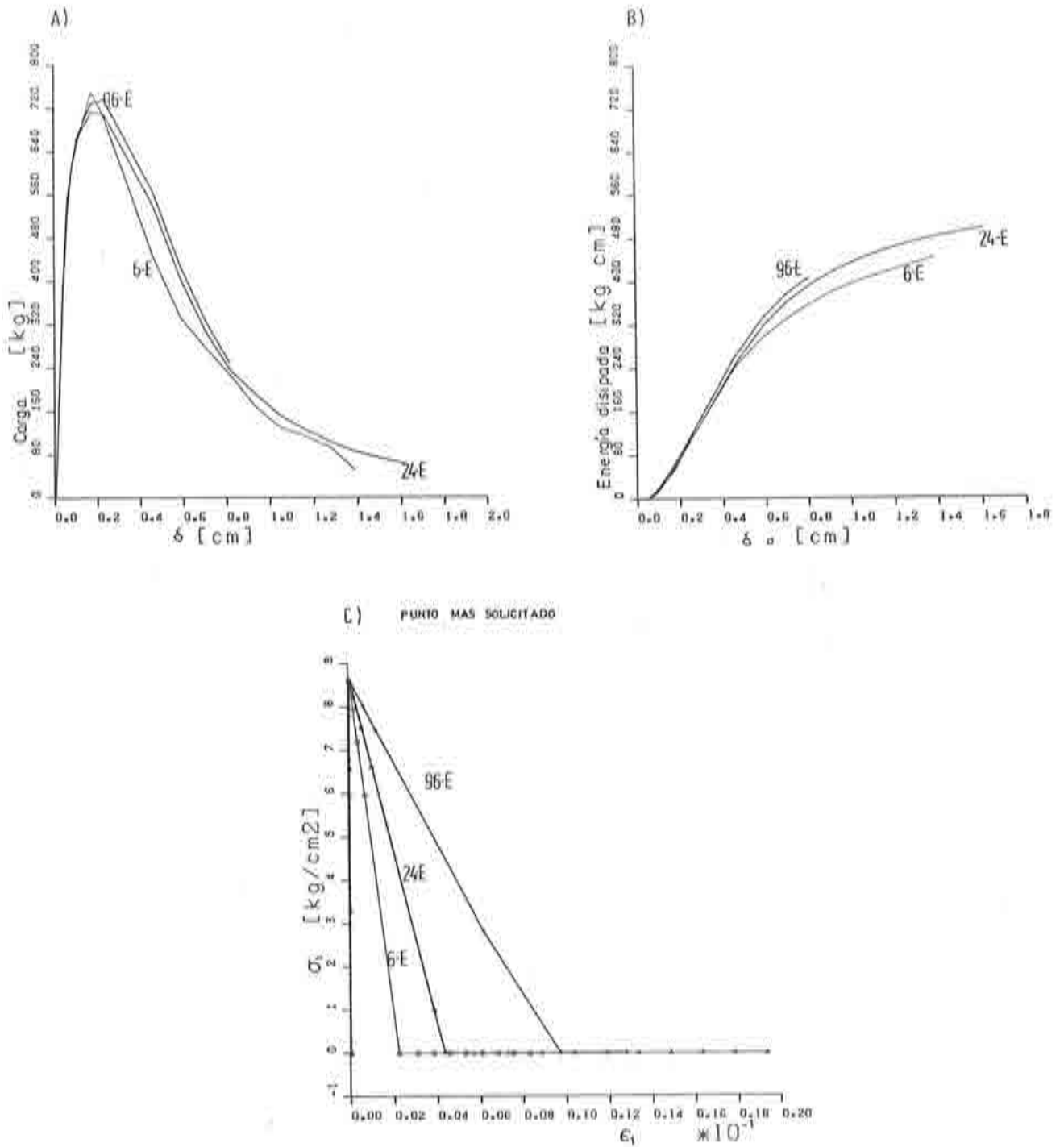


fig.(V.15): Ensayo de una viga en voladizo, a flexión - a) Carga P vs. desplazamiento vertical en el extremo libre. b) Energía total disipada, vs. desplazamiento vertical en el extremo libre. c) Tensión principal máxima de tracción vs. deformación principal máxima de estiramiento, en el punto de integración más dañado (cara superior de la viga, próximo al empotramiento).

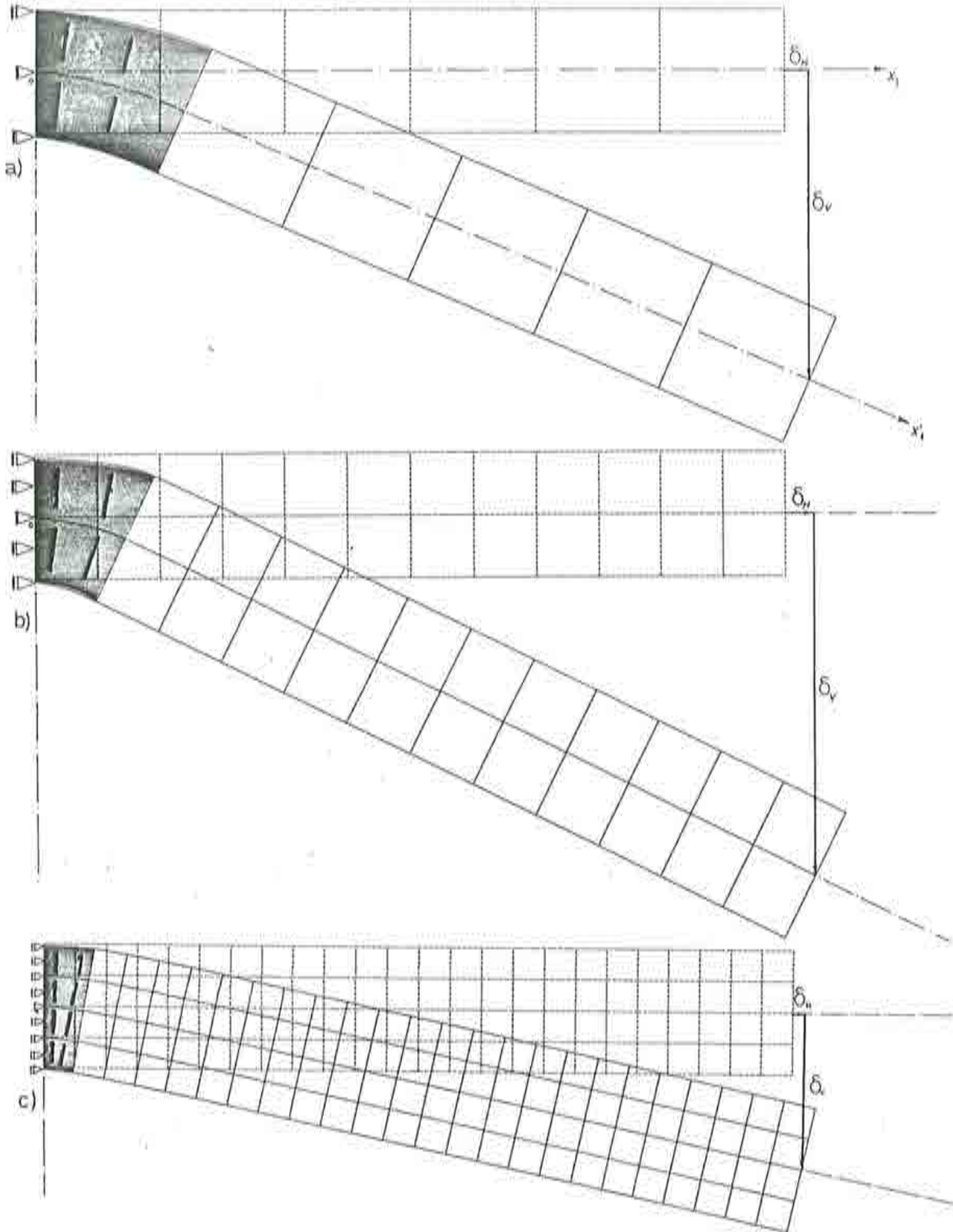
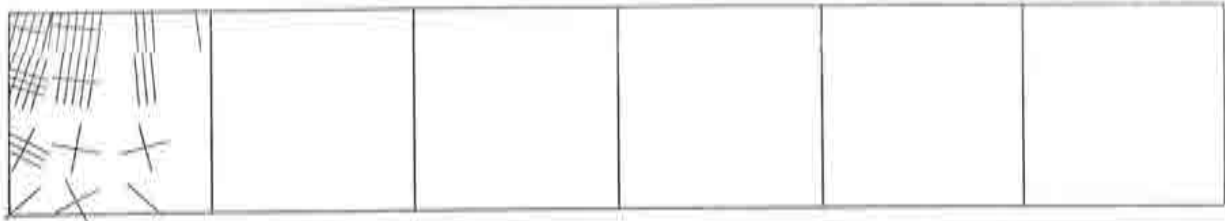
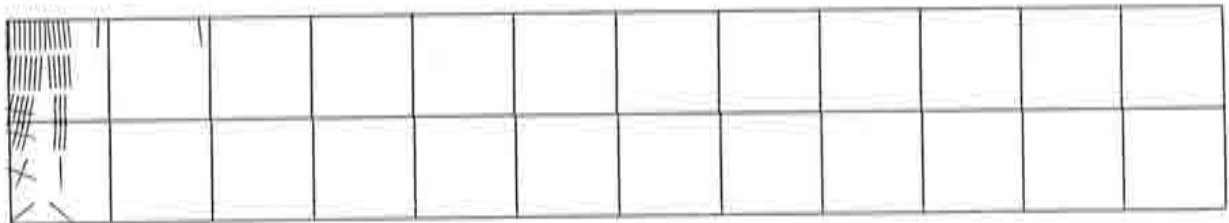


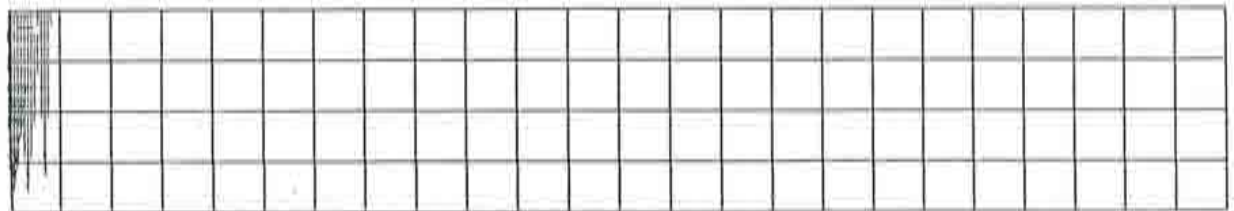
fig.(V.16): Ensayo de una viga en voladizo, a flexión - a) Deformación de la viga de 6 elementos finitos en el estado último - localización del daño -. b) Deformación de la viga de 24 elementos finitos en el estado último - localización del daño -. c) Deformación de la viga de 96 elementos finitos en el estado último - localización del daño -.



a)



b)



c)

fig.(V.17): Ensayo de una viga en voladizo, a flexión - a) Fisuración de la viga de 6 elementos finitos en el estado último - fisuras mayores al 3 % de la máxima-. b) Fisuración de la viga de 24 elementos finitos en el estado último - fisuras mayores al 3 % de la máxima-. c) Fisuración de la viga de 96 elementos finitos en el estado último - fisuras mayores al 3 % de la máxima-.

V.6.- ENSAYO A FLEXION DE UNA VIGA ENTALLADA SIMPLEMENTE APOYADA

V.6.a- Consideraciones generales sobre el ensayo.

Este ejemplo prueba la capacidad del modelo constitutivo, para simular estados de concentración de tensiones en el fondo de una entalla, provocados por un mecanismo de flexión pura. Este problema ha sido analizado experimentalmente por Petersson ^[123] para estudiar la *fractura en modo-I*, y ha sido reproducido en forma numérica por Rots et al. ^[123], Rots ^[124], De Borst ^[18] y Oliver y Fernandez ^[93].

El ensayo consiste en imponer un desplazamiento creciente en el punto medio de la cara superior de una viga de hormigón simple, de sección transversal rectangular, simplemente apoyada, con una entalla en el cordón inferior en el centro de la luz fig.(V.18). El ensayo se desarrolla hasta alcanzar un desplazamiento que provoque un daño considerable en la viga fig.(V.19,a).

El dominio de la viga ha sido discretizado con una malla de 84 elementos finitos planos, de ocho nodos fig.(V.18), utilizándose una integración numérica de Gauss-Legendre ^[144] de 3×3 para la zona vecina a la entalla, y de 2×2 para la zona restante. También se ha probado el uso de una integración reducida de 2×2 en la zona de la entalla, encontrándose problemas de modos de energía nulos para estados plásticos posteriores al pico de tensión. Esta situación había sido advertida por Rots ^[124], utilizando en su trabajo una integración numérica muy particular.

La resolución del sistema de ecuaciones, durante el proceso no-lineal, se ha realizado con el método de rigidez inicial K_0 *apart. Ap-II.3.*

Las características geométricas y mecánicas utilizadas para la resolución de este problema, se presentan en la fig.(V.18).

V.6.b- Análisis del ensayo.

En la referencia ^[123] se presenta la respuesta experimental carga-desplazamiento obtenida por Petersson. En ella se advierte una banda experimental bastante amplia que da muestra de la dispersión obtenida durante estos ensayos. Dicha

situación es posible que se deba a las dificultades que presenta la realización de ensayos precisos durante el período de ablandamiento, donde la rigidez de la máquina de ensayo puede influir sensiblemente en los resultados, dando origen a tales dispersiones. La fig.(V.19,a) muestra la evolución de la carga aplicada P vs. el desplazamiento de su punto de aplicación; en ella se advierte una buena coincidencia con los resultados experimentales obtenidos por Petersson ^[123], ajustándose al límite inferior de la banda experimental antes mencionada. En la fig.(V.19,b) se muestra la relación que hay entre los resultados experimentales y los obtenidos por Rots ^[124] en forma numérica. No obstante esta es la mejor simulación numérica que se encuentra en las referencias, ya que permite observar la sensibilidad de los resultados a la forma de la *función de ablandamiento* impuesta.

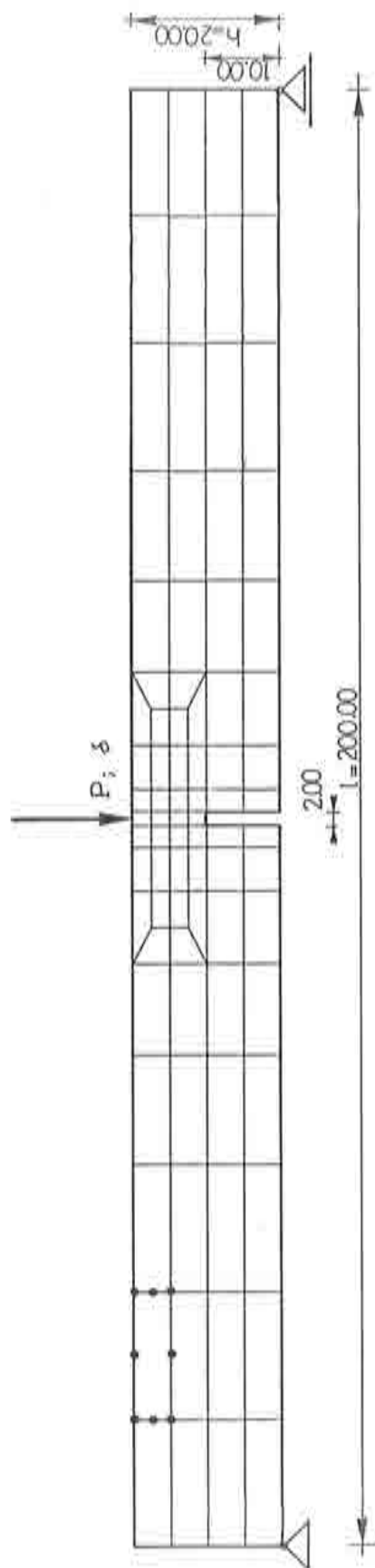
La fig.(V.20), presenta la curva de disipación total de energía que se desarrolla durante todo el proceso de carga. La pendiente de esta curva tiende a hacerse horizontal a medida que crece el daño en el sólido.

En la fig.(V.21), se puede observar la evolución del factor de retención de tensiones cortantes β_G durante el proceso elasto-plástico vs. la energía total disipada en el punto de integración numérica más cercano al fondo de la entalla.

La fig.(V.22) presenta la evolución de la tensión principal mayor vs. la deformación principal mayor, en el punto de integración numérica más cercano al fondo de la entalla.

En las figs.(V.23) y (V.24) se observan respectivamente la deformada de la viga con su banda de localización de daño y el esquema de fisuración que obtiene el modelo para la zona de la entalla, encontrándose total coincidencia con una típica fractura de *modo-I*. Al igual que en los problemas antes presentados, el análisis de dicha fisuración se ha realizado de acuerdo a la metodología desarrollada en el *apart. An-D.2.*; así el post-procesador del modelo interpreta que la fisuración se inicia cuando la deformación plástica en el punto tiene una componente positiva (estiramiento inelástico), la orientación de cada fisura se representa mediante un trazo ortogonal a la dirección de la correspondiente deformación plástica principal positiva y la densidad de líneas verticales paralelas da idea cualitativa de la magnitud de la *apertura* de estas fisuras.

En las figs.(V.25,a) , (V.25,b) y (V.25,c), se dibujan los estados tensionales que alcanza la viga al final del período elástico, en el pico de tensiones, y en el límite último, respectivamente. En ellos, se representan las tensiones principales mediante un trazo, que es proporcional a su magnitud, y se puede observar la forma en que avanza la *zona de material inerte* hacia la cara superior de la viga, estrangulando paulatinamente la zona de compresión, a medida que avanza el proceso de carga.



$$\begin{aligned}
 E_s &= 305510.40 \text{ kg/cm}^2 \\
 \nu_0 &= 0.20 \\
 \sigma_C^0 &= -339.45 \text{ kg/cm}^2 \\
 \sigma_C^{plc} &= -360.00 \text{ kg/cm}^2 \text{ (comp.)} \\
 R^0 &= \frac{|\sigma_C^0|}{|\sigma_C^p|} = 10.00 \\
 \alpha &= 0.12 \rightarrow \frac{\sigma_{plc}}{\sigma_{C0}} = 1.18 \\
 \gamma &= 3.0 \\
 p &= 1.0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G^p &= 0.126 \text{ kg/cm} \\
 G^c &= 12.60 \text{ kg/cm} \\
 D^p &= \sqrt{R^0}
 \end{aligned}$$

Flejo asociada. { Cálculo de flezada propuesta

Función de endurecimiento a compresión: $c_C(\kappa) : P - 3$

Función de endurecimiento a tracción: $c_T(\kappa) : P - 2$

Posición relativa del pico de tensiones : $(\sigma^p)^{plc} = 0.30$

Sin degradación clásica.

Sin degradación plástica.

fig.(V.18): Ensayo a flexión de una viga entallada simplemente apoyada - Características geométricas mecánicas y malla de elementos finitos utilizada en el ensayo numérico.

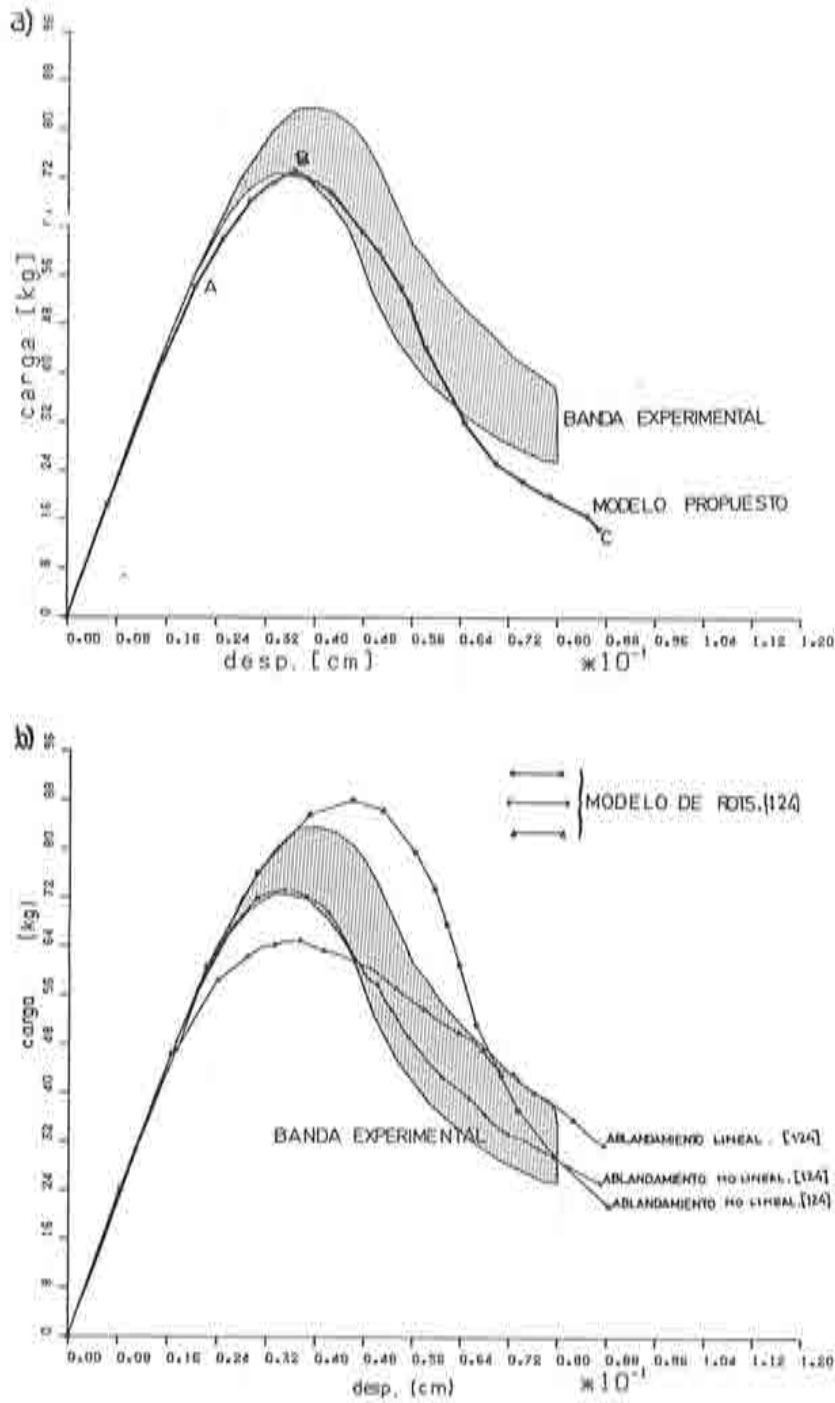


fig.(V.19): Ensayo a flexión de una viga entallada simplemente apoyada - a) Carga aplicada P vs. desplazamiento vertical en su punto de aplicación: comparación entre el modelo propuesto y los resultados experimentales de Petersson [123]. b) Carga aplicada P vs. desplazamiento vertical en su punto de aplicación: comparación entre los resultados de Rots [124] y los estudios experimentales de Petersson [123].

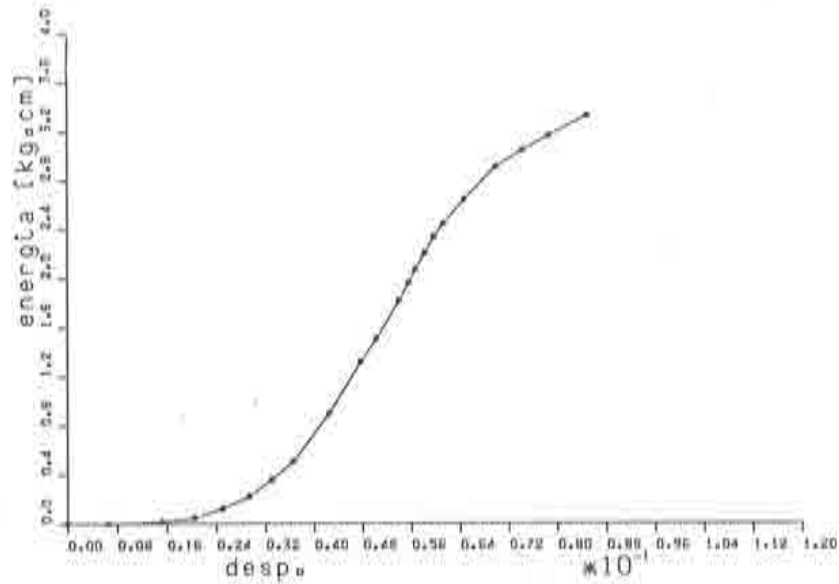


fig.(V.20): Ensayo a flexión de una viga entallada simplemente apoyada – Curva de energía total disipada vs. desplazamiento vertical en el punto de aplicación de la carga.

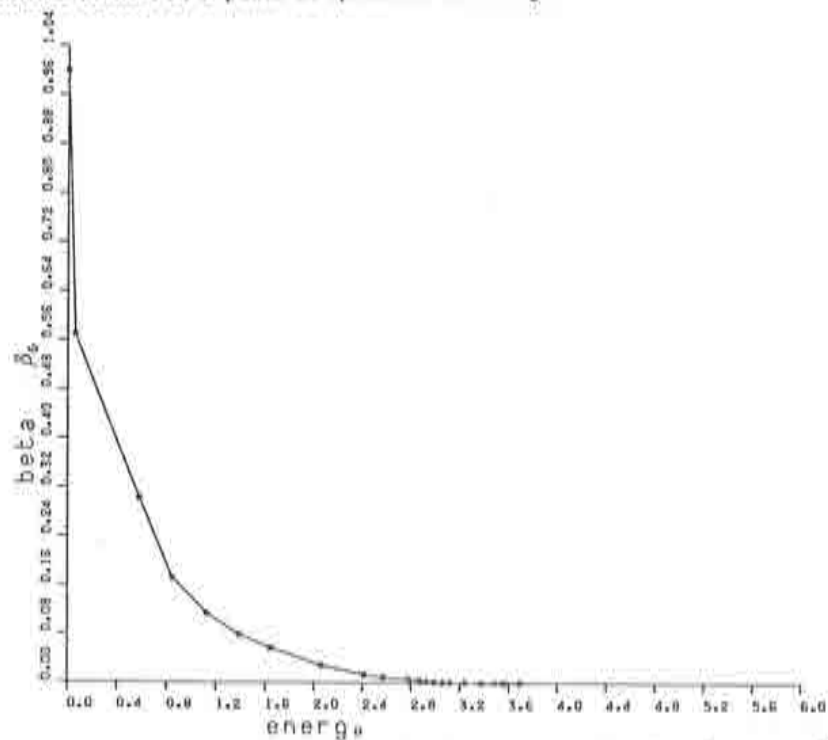


fig.(V.21): Ensayo a flexión de una viga entallada simplemente apoyada – Relación entre β_G y la energía total disipada en el punto de integración numérica más cercana al fondo de la entalla.

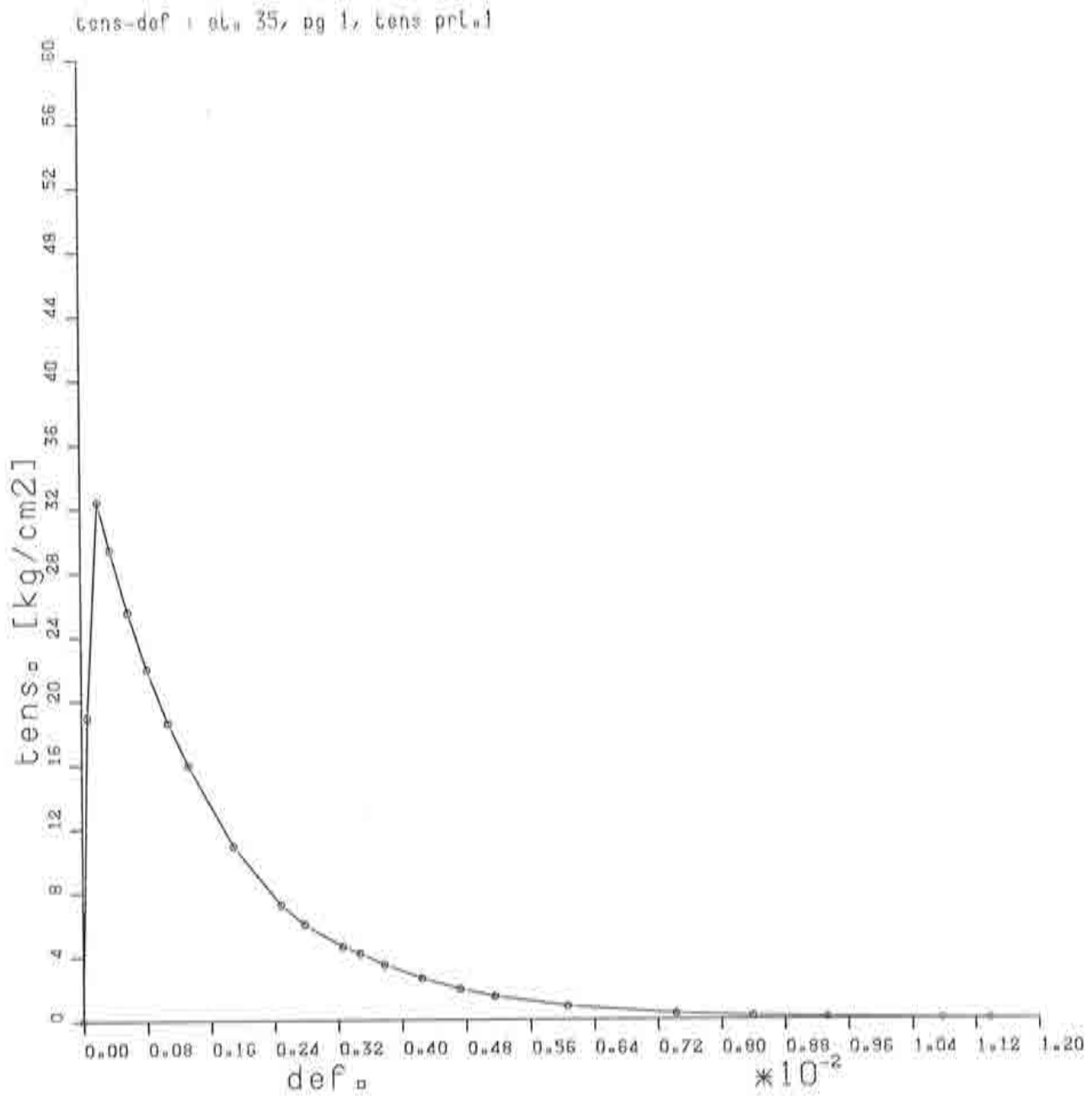


fig.(V.22): Ensayo a flexión de una viga entallada simplemente apoyada – Relación tensión principal mayor vs. deformación principal mayor $\sigma_1 - \epsilon_1$ en el punto de integración numérica más cercana al fondo de la entalla.

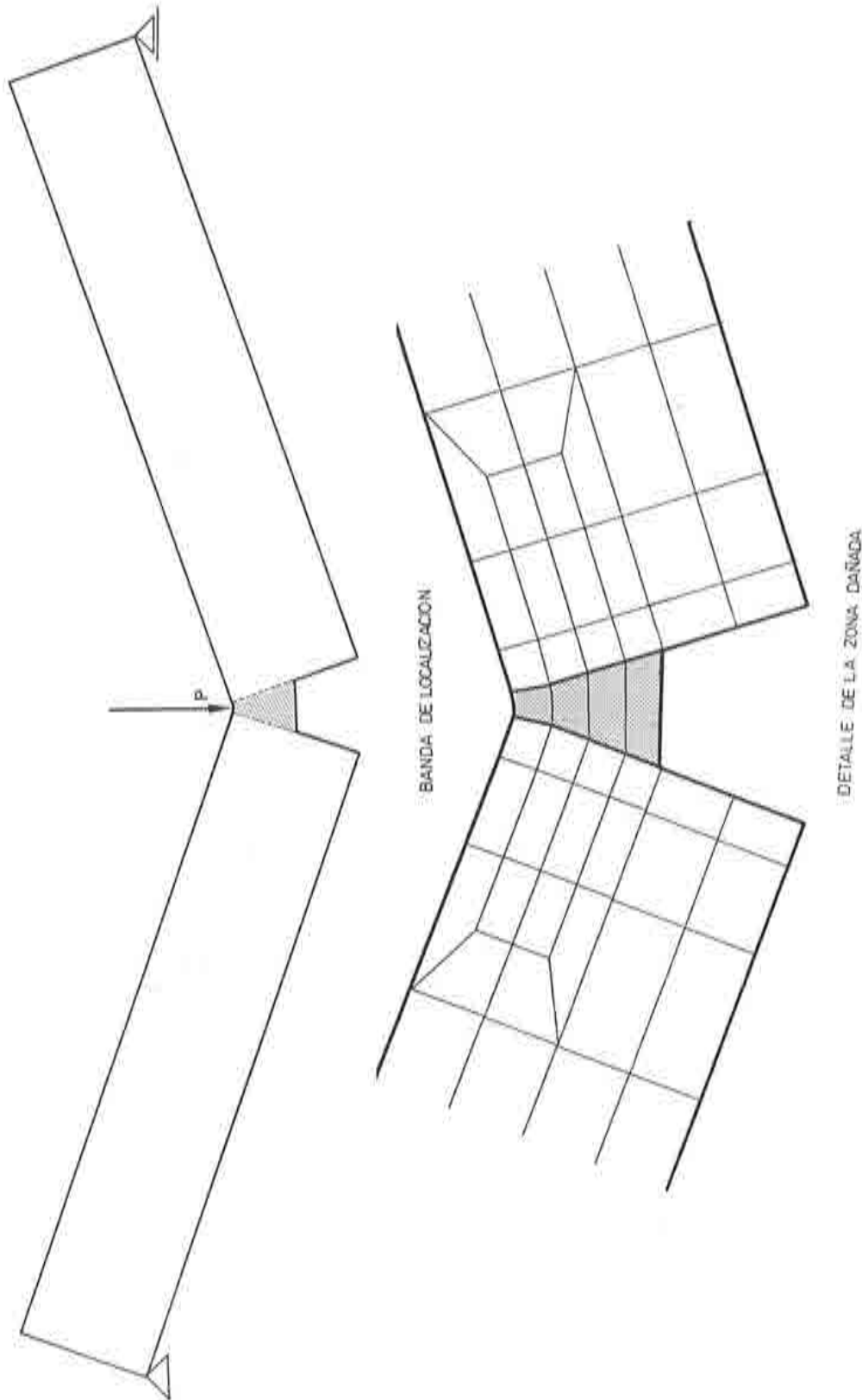


fig.(V.23): Ensayo a flexión de una viga entallada simplemente apoyada – Deformación de la viga y localización de deformaciones en el estado último – ampliación $\times 400.0$.

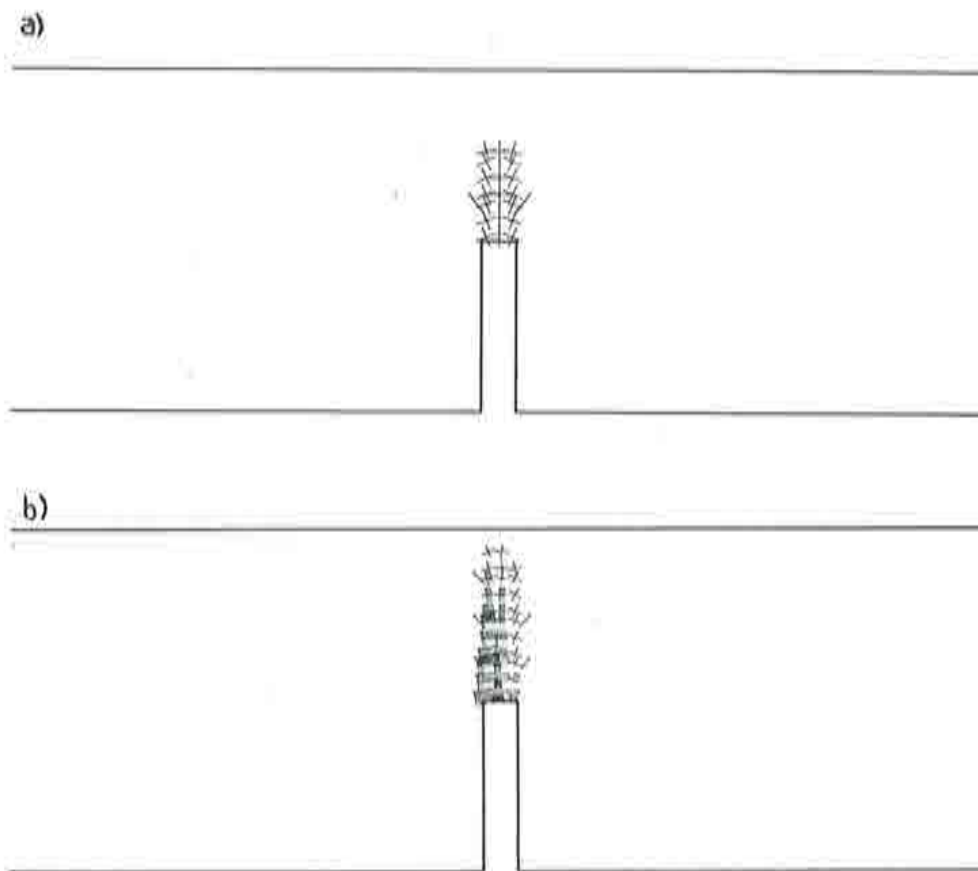


fig.(V.24): Ensayo a flexión de una viga entallada simplemente apoyada – Esquema de fisuración de la viga: a) En el pico de tensiones, y b) en el estado último.

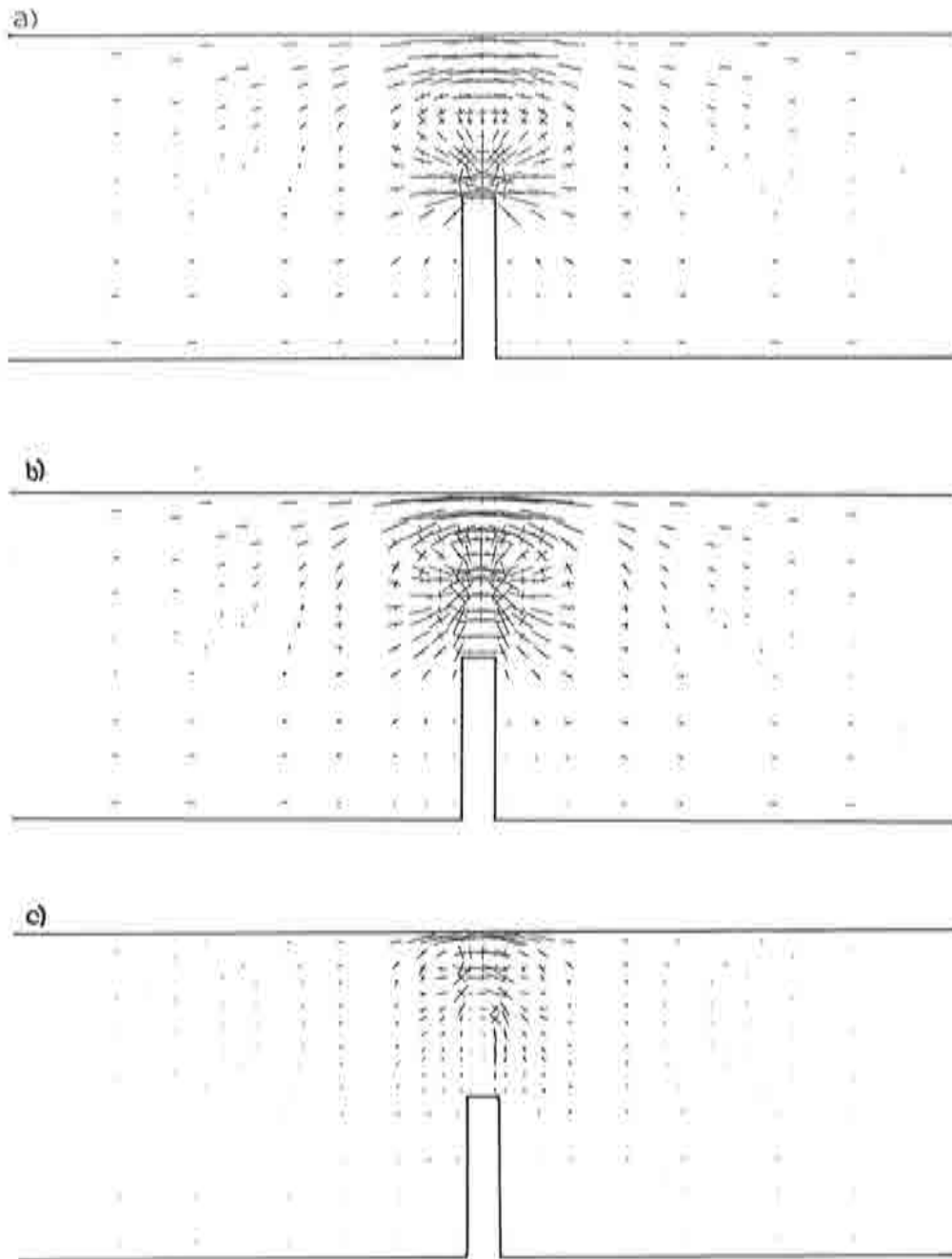


fig.(V.25): Ensayo a flexión de una viga entallada simplemente apoyada – Estado tensional en la viga:
a) al límite elástico, b) al pico de tensiones, c) al límite último de carga aplicada.

V.7.- ENSAYO A TRACCION DE UNA VIGA CANTILEVER PRETENSADA.

V.7.a- Consideraciones generales sobre el ensayo.

El problema que se trata en este apartado, se refiere a una viga cantilever (sección doble T) de hormigón con una entalla en uno de sus extremos situada sobre su propio eje baricéntrico fig.(V.26). La viga ha sido sometida a un ensayo numérico con el objeto de evaluar su respuesta bajo dos tipos de sollicitaciones: a) Pretensado en la dirección paralela al eje baricéntrico, seguido de una b) aplicación de carga perpendicular a dicho eje, que trata de abrir la entalla. La viga ha sido ensayada en forma experimental, bajo estas condiciones de carga, por *Sok, Baron and François* ^[123] y estudiada nuevamente tanto en forma experimental como numérica, con algunas modificaciones en la sección transversal original, por *Rots et al.* ^[123]. Los datos y parámetros del material que se utilizan en este ensayo numérico, han sido extraídos de este último trabajo.

La malla de elementos finitos que se ha utilizado fig.(V.26), está compuesta por elementos planos de cuatro nodos, sobre una faja donde la viga es mas estrecha, y por elementos de ocho nodos en la zona restante. Para todos los elementos se ha utilizado una integración numérica de Gauss-Legendre ^[144] de 2×2 puntos.

Se ha resuelto el problema con plasticidad asociada haciendo uso de la función de fluencia de Mohr-Coulomb modificada (*anezo-C*).

La solución del sistema de ecuaciones no-lineales, se ha llevado a cabo con el método de rigidez inicial K_0 *apart. Ap-II.3.a.*, juntamente con la técnica de control de desplazamientos a través de un camino plano, propuesta en el *apart. Ap-II.3.d.*

Inicialmente se realizó un ensayo sin la aplicación de las cargas de pretensado, pero durante la evolución del proceso inelástico, aparecieron grandes fisuras normales al eje baricéntrico de la pieza, debido a problemas de flexión en los cordones. Situación similar se le presentó a *Rots et al.* en el ensayo numérico de la referencia ^[123], y para evitar este *efecto secundario*, se ha sometido a una carga previa de pretensado, paralela al eje baricéntrico, materializada a través de desplazamientos impuestos en un único incremento, y seguidamente se aplicó la segunda carga, normal al eje baricéntrico, pero en forma incremental fig.(V.26).

V.7.b- Análisis del ensayo.

La curva carga-desplazamiento obtenida con el modelo propuesto, se dibuja en la fig.(V.27,a), donde se compara también con el resultado experimental de Sok et al. ^[123] y con los resultados numéricos de Rots et al ^[123] . En esta figura, se puede observar que se ha logrado una buena concordancia con los resultados experimentales y con las respuestas numéricas de Rots, para el caso en que utiliza una función de ablandamiento bilineal. También se puede apreciar que la carga aplicada no alcanza el valor nulo a pesar de encontrarse en un estado muy próximo al último. Es probable que esto se deba a la componente vertical de la carga de pretensado, que ofrece una resistencia a la apertura de la viga, y al problema de concentración de tensiones ocasionado por la forma en que se ha vinculado la viga en su extremo.

En cada uno de los ensayos numéricos de la referencia ^[123] se ha pre-establecido la energía de fractura por unidad de área fisurada G^f , con el objeto de lograr coincidencias en los valores de las cargas máximas de los ensayos numéricos, con la obtenida en el resultado experimental. En cambio, en el presente ensayo numérico, se ha adoptado una de las energías de fractura: $G^f = 0.255 \text{ kg/cm}$ y directamente, sin ajustes previos, se ha realizado el ensayo numérico.

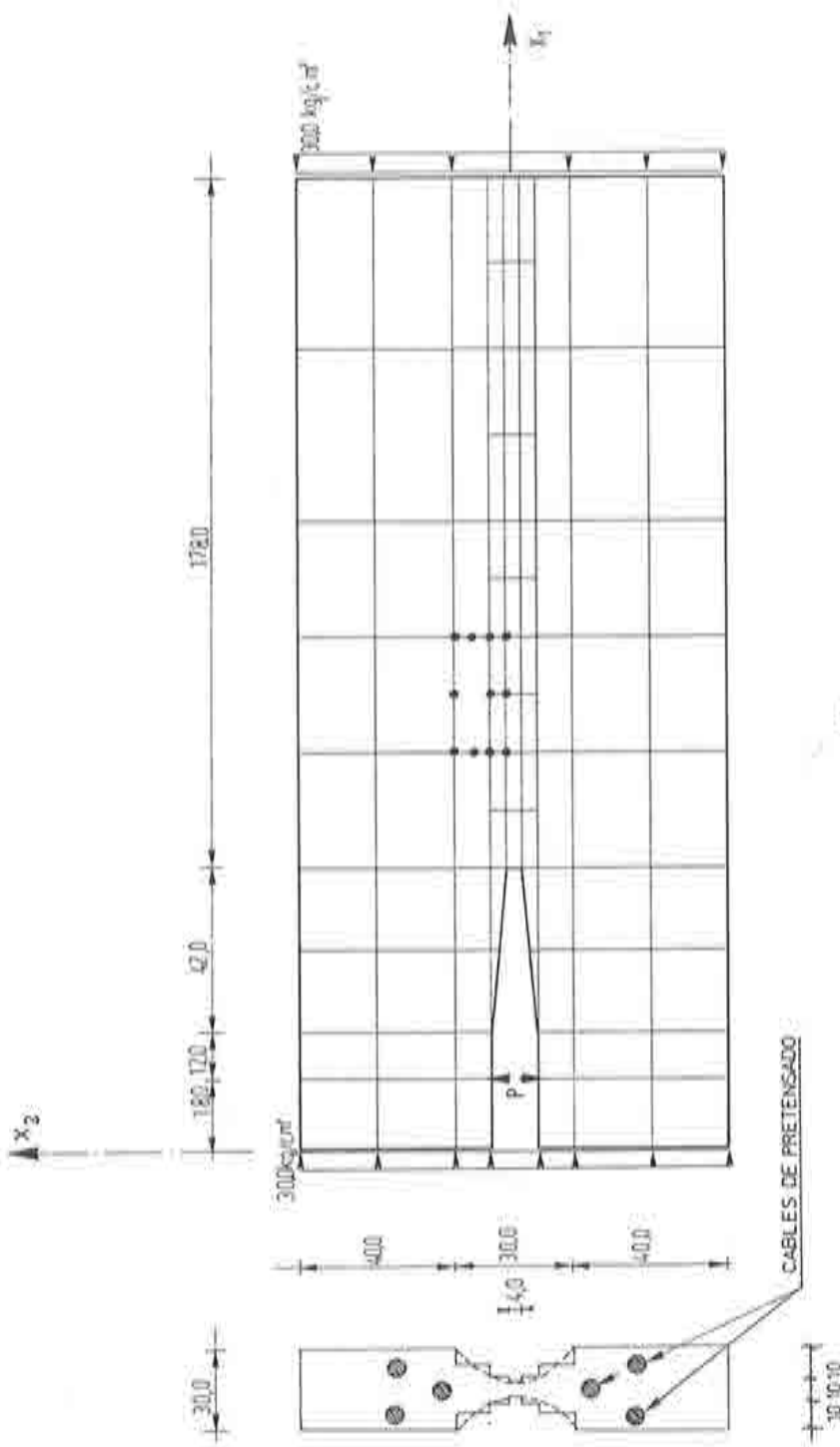
En la figura fig.(V.27,b) se presenta la curva de energía total disipada vs. el desplazamiento entre caras de la entalla. En ella se observa que la energía tiende al valor introducido como dato: $W^p = 0.255 \times (178.0 \times 10.0) = 453.9 \text{ kgcm}$.

En la fig.(V.27,c) se puede ver la evolución de la tensión principal mayor, vs. la deformación principal mayor $\sigma_1 - \epsilon_1$, en el punto más severamente dañado (el más próximo al fondo de la entalla).

La localización de deformaciones se encuentra en la zona esperada, fig.(V.28), y su profundidad abarca de uno a otro extremo de la viga. En la misma figura, se puede ver la evolución de las tensiones en diez puntos alineados, situados en la banda de localización de deformaciones de la viga, para los distintos niveles de carga aplicada. En ésta secuencia de gráficos, se puede observar, cómo un punto que está sometido en un instante del proceso de carga cuasi-estático a un estado de tracción, en un instante posterior puede pasar a un estado de compresión o viceversa. Esto muestra la capacidad del modelo de reproducir procesos de cargas radiales y no-radiales.

El estado de fisuración dominante fig.(V.28), es paralelo al eje de la viga, pero aparecen también, a pesar de la carga de pretensado, fisuras secundarias y ortogonales a la principales.

Por último, en la fig.(V.29) se puede ver el estado tensional al final del proceso, donde se representan las tensiones principales, donde la magnitud del trazo y su orientación dan una idea del estado de sollicitaciones que sufre la viga. En esta figura se aprecia que la zona central está totalmente agotada, no pudiendo resistir más tensiones (zona de material inerte); en cambio la zona restante, mantiene la tensión de pretensado que se le impuso al iniciar el ensayo.



CABLES DE PRETENSADO

$$E_0 = 407747.00 \text{ kg/cm}^2$$

$$\nu_0 = 0.20$$

$$c_C^0 = -112.99 \text{ kg/cm}^2$$

$$c_C^{pic} = -112.99 \text{ kg/cm}^2$$

$$R^0 = \frac{|\sigma_C^0|}{|\sigma_T^0|} = 10.00$$

$$G^I = 0.255 \text{ kg/cm}$$

$$G^c = 25.5 \text{ kg/cm}$$

LP^c = Dimensión del elemento finito,

perpendicular a la fisura.

- Flajo asociado.
 - Criterio de fluencia de Mohr-Coulomb modificada: $\phi = 32^\circ$
 - Función de potencial de Mohr-Coulomb modificada: $\phi = \psi = 32^\circ$
- Función de endurecimiento a compresión $c_C(\kappa) : F - 1$
- Función de endurecimiento a tracción $c_T(\kappa) : F - 1$
- Sin degradación elástica.
- Sin degradación plástica.

fig.(V.26): Ensayo a tracción de una viga cantilever pretensada - Características geométricas mecánicas y malla de elementos finitos utilizada en el ensayo numérico.

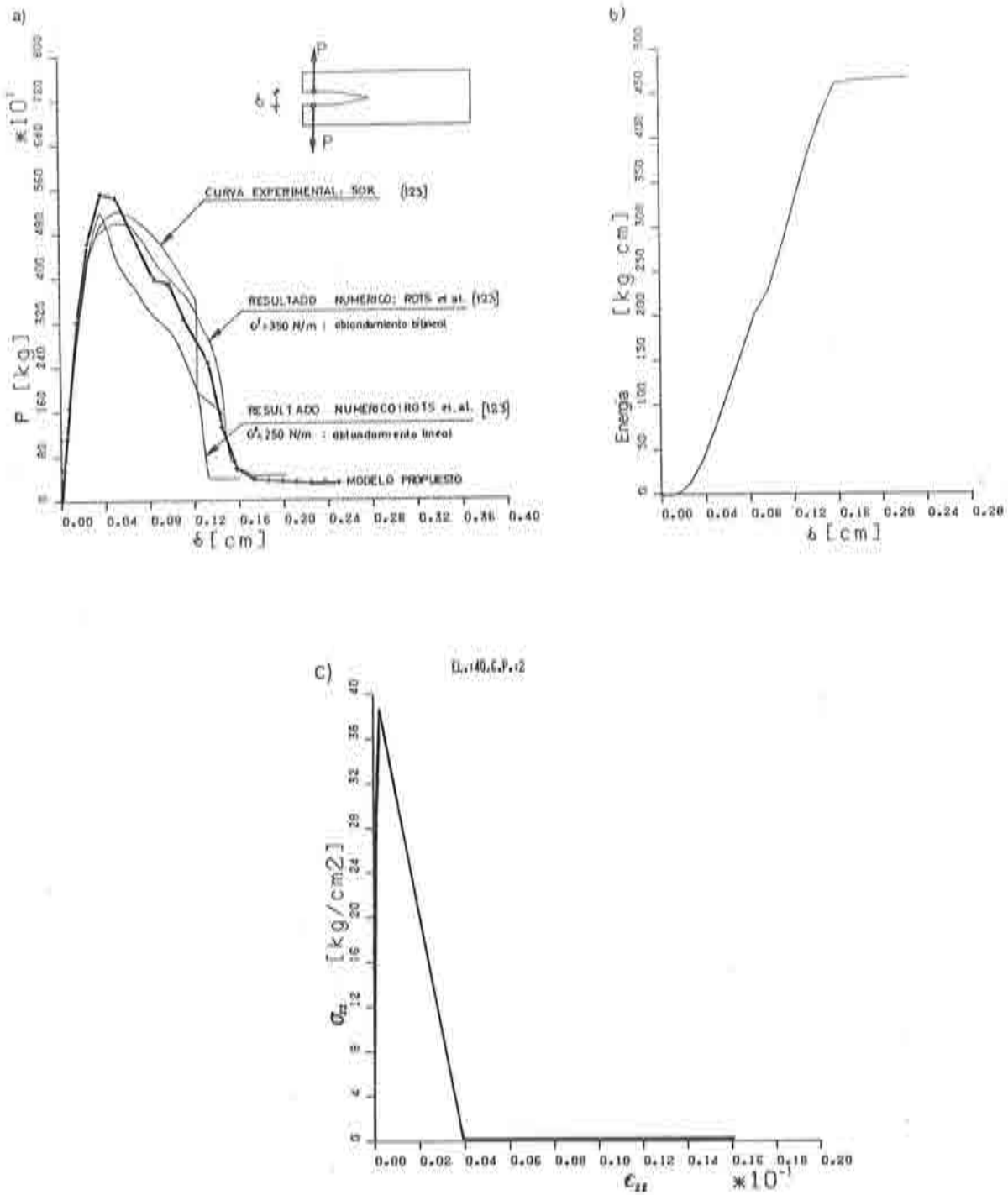


fig.(V.27): Ensayo a tracción de una viga cantilever pretensada - a) Respuesta Carga vs. desplazamiento relativo entre las dos caras de la entalla. b) Disipación de energía vs. desplazamiento relativo entre caras de la entalla. c) Tensión principal mayor Vs. deformación principal mayor $\sigma_1 - \epsilon_1$ en el punto de integración más próximo al fondo de la entalla.

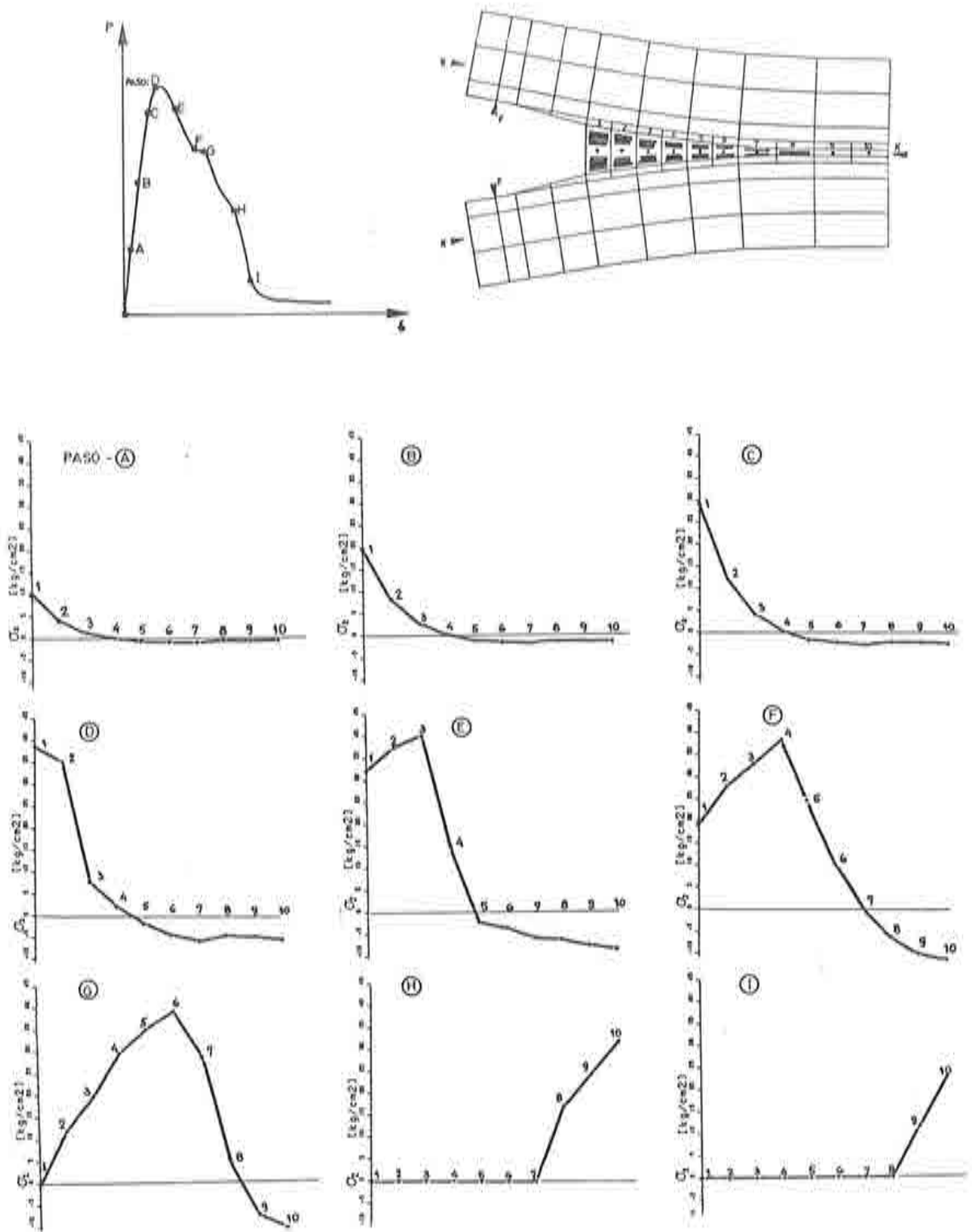


fig.(V.28): Ensayo a tracción de una viga cantilever pretensada - Banda de localización del daño y evolución de las tensiones en los puntos más dañados de esta banda, para cada nivel de carga.

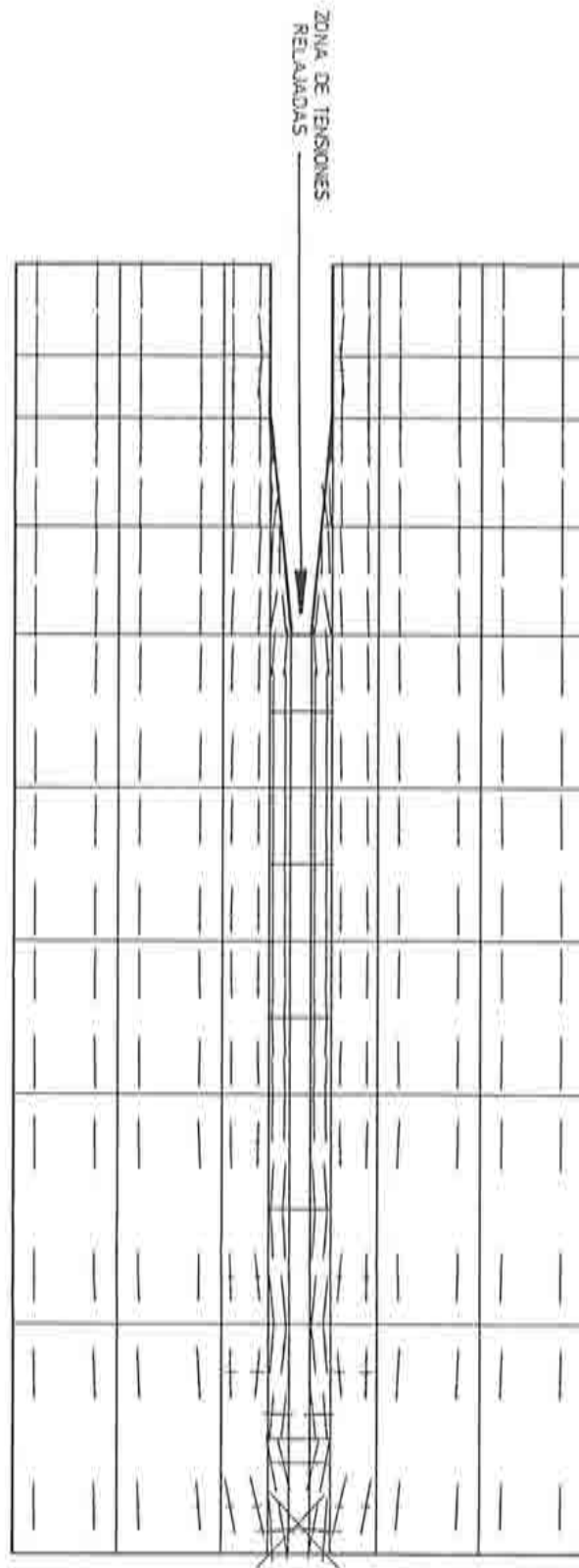


Fig.(V.29): Ensayo a tracción de una viga cantiliver pretensada - Estado tensional al final del proceso elasto-plástico.

V.8.- ENSAYO DE FLEXION Y CORTE EN UNA VIGA ENTALLADA – MODO MIXTO DE FRACTURA: Modos -I- y -II-.

V.8.a- Introducción.

Hasta ahora se ha cotejado el modelo constitutivo propuesto, con ensayos que conducen a una fractura tipificada como de *modo -I-* (fisura que experimenta un desplazamiento normal entre sus caras). En este apartado se verifica la capacidad del modelo para simular el denominado *modo mixto de fractura*, es decir, cuando se desarrolla un mecanismo de fractura que involucra los *modos -I- y -II-* a la vez, produciéndose un desplazamiento normal acompañado de un deslizamiento entre las caras de la fisura ^{[48][123]}. Es muy importante que un modelo numérico sea capaz de representar este comportamiento combinado, ya que a excepción de algunos casos particulares de simetría de carga y forma, las estructuras fallan bajo un modo mixto de fractura ^[64].

De una escasa cantidad de experimentos disponibles sobre el modo-mixto de fractura, se ha elegido como ensayo de referencia el de *Arrea and Ingraffea* ^[2] fig.(V.30), debido a que también ha sido considerado por otros investigadores ^{[10][21][48][64][122][123]} para evaluar sus respectivos modelos numéricos.

Sobre este ensayo se encuentran en las referencias simulaciones numéricas : -1- insatisfactorias ^[123], -2- medianamente satisfactorias ^[64], y -3- bastante bien logradas ^[122]. En el *primer caso*, Rots et al. ^[123] no han podido obtener coincidencia con las curvas de respuesta experimental, ni con el camino que ha seguido la evolución de la fractura; en el *segundo caso*, Glemberg ^[64] ha mejorado las curvas de respuesta, sin llegar a obtener una buena aproximación con los resultados experimentales, y no ha podido seguir un buen camino de evolución de fractura; y en el *tercer caso*, Rots and De Borst ^[122] han logrado una buena aproximación con la respuesta experimental, pero sin obtener un camino correcto en la evolución de la fractura ^{[16][21][123]}. Esta mejora en la aproximación de la respuesta experimental, se ha obtenido gracias a la consideración adicional del *nuevo concepto* de energía de fractura en modo-II-, de bastante discutida existencia ^[123], que ha permitido formular una *función de ablandamiento de las tensiones cortantes*, en forma independiente de las tensiones normales. Este concepto se ha introducido en el *modelo de fisura distribuída* ^{[18][20][22][122][123]} (*apart. III.5.a*), formulado para simular el modo-I- de fractura,

evitando así un comportamiento post-pico sobre-rigidizado como consecuencia de un factor de retención de las tensiones cortantes β_G , que impone una tensión de corte constante durante todo el proceso de fisuración $\tau = \beta_G \tau^c$.

El modelo que se presenta en esta tesis, ha sido formulado para tratar estados tensionales complejos no-radiales, de una manera única (*cap. IV*), sin que sea necesario admitir la existencia de una energía de fractura modo-II-. Así, se verá en este ejemplo, que se obtiene una buena aproximación a la respuesta experimental y una buena predicción del camino de evolución de las fisuras figs.(V.33).

V.8.b- Consideraciones generales sobre el ensayo.

El ensayo consiste en una viga de hormigón en masa, como la que se muestra en la fig.(V.30), cargada en forma asimétrica con el objeto de provocar sobre la entalla un estado tenso-deformacional que conduzca a una fractura en modo-mixto.

La aplicación de la carga se ha realizado en forma indirecta mediante una barra de acero de gran rigidez, colocada sobre la viga de hormigón. Esta forma de aplicar la carga, ha sido realizada con el fin de reproducir de la mejor manera posible el ensayo de Arrea-Ingraffea.

Se ha discretizado el dominio total con 107 elementos finitos planos de ocho nodos fig.(V.30), que han sido integrados numericamente mediante la cuadratura de Gauss-Legendre ^[144] con 3×3 puntos para el hormigón y con 2×2 puntos para la barra de aplicación de cargas. El alto orden de integración para los elementos de hormigón, surge para evitar los modos de energía nulos que se puedan desarrollar ^[21].

El proceso de cargas se ha realizado mediante desplazamientos impuestos en el punto *C* fig.(V.30), y se ha utilizado en la resolución el método de control de desplazamientos propuesto por Crisfield ^[37] (control de desplazamientos según un camino esférico *apart. Ap-II.3.c*), aplicado al grado de libertad más significativo, que en este caso es el deslizamiento entre las caras de la fisura fig.(V.30), en vez de controlar la norma global de todos los desplazamientos. Esta forma de *control indirecto de desplazamientos*, propuesta por R. De Borst ^{[18][21][122]}, permite mantener dentro de los valores deseados el desplazamiento dominante, logrando así una respuesta post-pico bastante estable, a pesar de la fuerte localización

de deformaciones que se produce en ese instante del proceso cuasi-estático. De esta forma, se procura que el incremento de cargas respete la siguiente relación de arco $\Delta l_{i,m}$ (*apart. Ap-II.3.c*):

$$(\Delta u_{qp})_{i,m} (\Delta u_{qp})_{i,m} = \Delta l_{i,m}^2$$

siendo $(\Delta u_{qp})_{i,m}$ el incremento de desplazamiento entre el grado de libertad q y el p , durante la iteración i del incremento de carga m .

La resolución del sistema de ecuaciones no-lineal, se ha llevado a cabo con buena convergencia, con el método de rigidez inicial K_0 .

V.8.c- Análisis del ensayo.

La curva carga-desplazamiento relativo entre las caras de la fisura ($(\Delta u_{155,151})_{i,m} = [u_{155} - u_{151}]_{i,m}$) fig.(V.31,a), muestra una muy buena coincidencia con los resultados experimentales de Arrea-Ingraffea ^[2]. Es importante resaltar, como el modelo *administra internamente* la energía a disipar, utilizando una adecuada combinación de estados tenso-deformacionales uniaxiales (*cap. IV y apart. An-D.1.c.2*).

En las figs.(V.31,b), (V.31,c) y (V.31,d), se muestra la evolución de la carga aplicada respecto de los desplazamientos de los puntos A , B y C , respectivamente. Estas curvas explican la necesidad de controlar el deslizamiento relativo entre las caras de la fisura, y no el desplazamiento del punto de aplicación de carga [18][21][122].

En la fig.(V.31,e) se puede ver la curva de disipación total de energía, respecto del deslizamiento relativo entre caras de fisura.

Al iniciar la aplicación de las cargas, se presenta un caso de flexión dominante, con fuertes tracciones en el cordón superior de la viga fig.(V.32,a) y 9V.32,b) (debajo mismo de la carga aplicada), que conduce a abrir las primeras fisuras fig.(V.33,a) y (V.33,b) (modo-I). Al mismo tiempo, como consecuencia de este fenómeno, se produce una fuerte compresión entre las caras de la entalla. Seguidamente, a medida que se aumenta la carga aplicada, comienza a producirse un deslizamiento entre las caras de la entalla, de donde resultan las primeras fisuras por corte

(extremo superior derecho de la entalladura) (modo-II-), que forman un ángulo de 60° con respecto al eje de referencia global x_1 . Estas fisuras se propagan siguiendo la vertical que pasa por el plano de la entalla fig.(V.33,a). A partir de un determinado punto en la respuesta (pico de carga máxima), comienzan a despegarse las caras de la entalladura como si se tratara de la acción de un efecto de flexión fig.(V.34), y se inicia un cambio de orientación en el camino evolutivo de las fisuras. A partir de este momento, estas progresan como resultante de un modo-mixto de fractura fig.(V.33,b) , (V.33,c) , (V.33,d) y (V.33,e). Debido a este comportamiento, se desarrolla una banda de localización de deformaciones fig.(V.34), que el modelo interpreta como banda de daño.

Por último, conviene observar el estado último de tensiones que adquiere la viga, donde queda perfectamente definida una zona de material inerte, o material que ha perdido la capacidad de responder a esfuerzo alguno fig.(V.32,c) , (V.32,d) y (V.32,e).

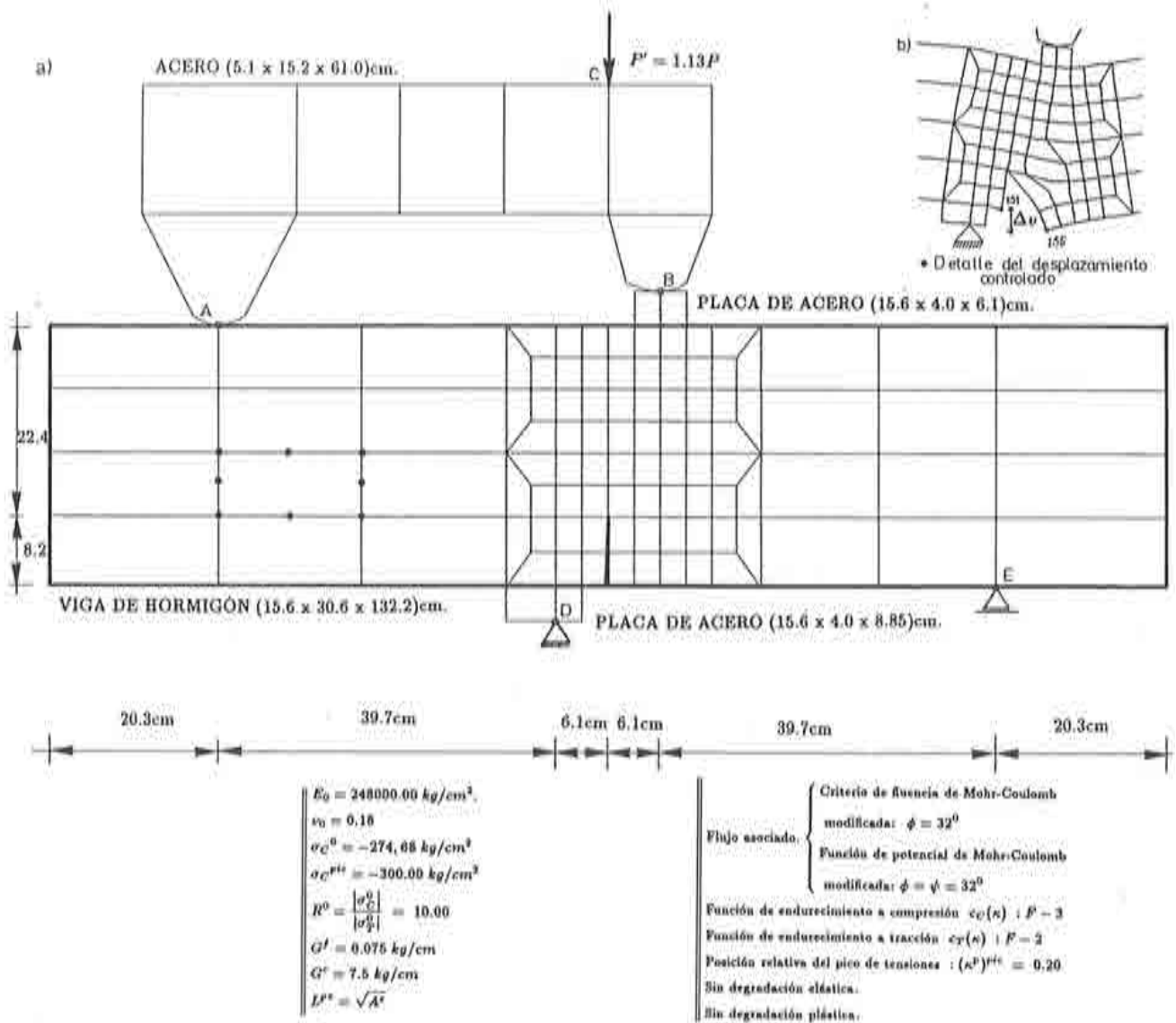


fig.(V.30): Ensayo de flexión y corte en una viga entallada - modo mixto de fractura - Características geométricas mecánicas y malla de elementos finitos utilizada en el ensayo numérico.

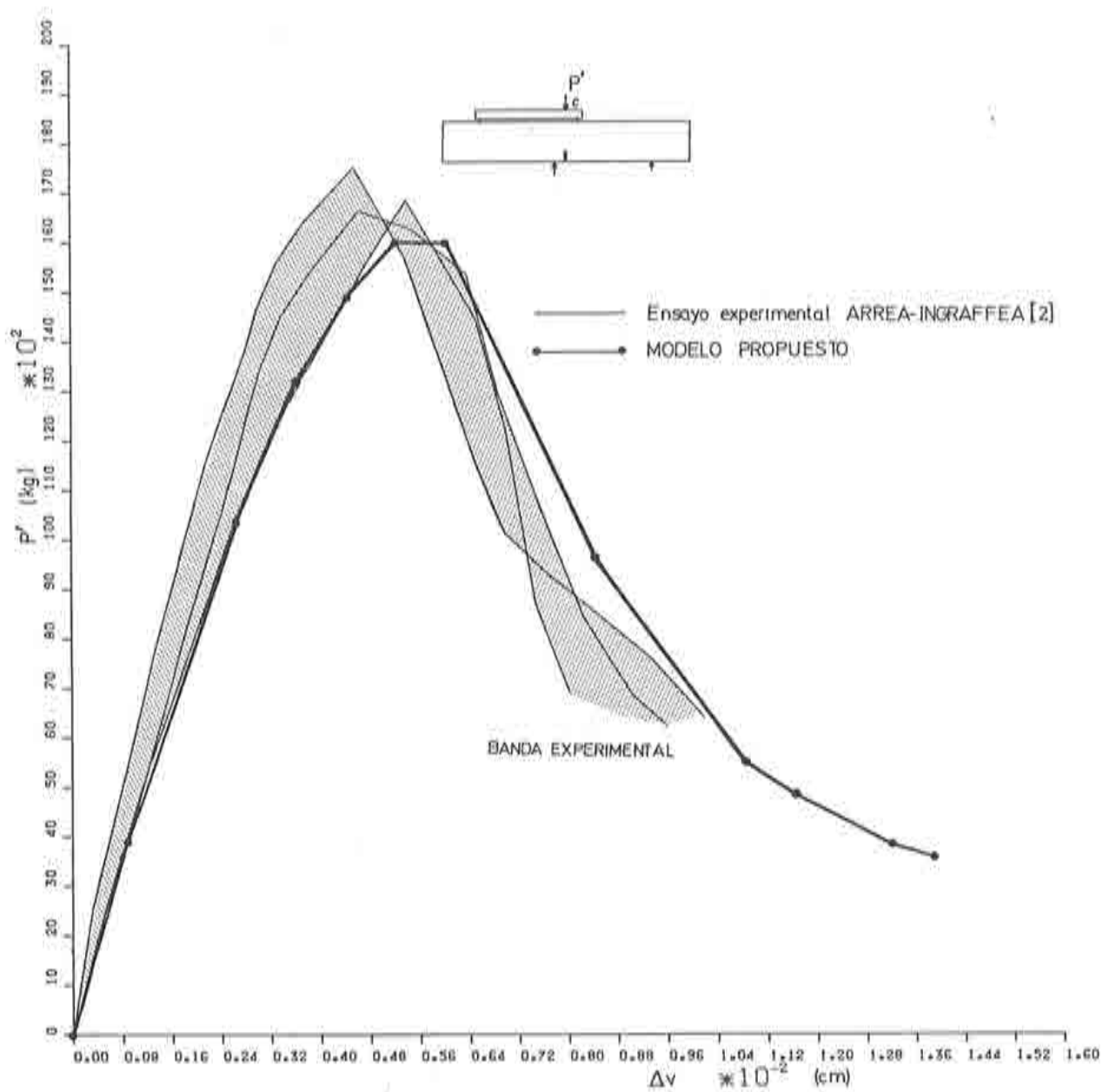


fig.(V.31,a): Ensayo de flexión y corte en una viga entallada – modo mixto de fractura – Curva de carga P' vs. deslizamiento relativo entre caras de la entalla, y su comparación con los resultados experimentales de Arrea-Ingraffea [3]

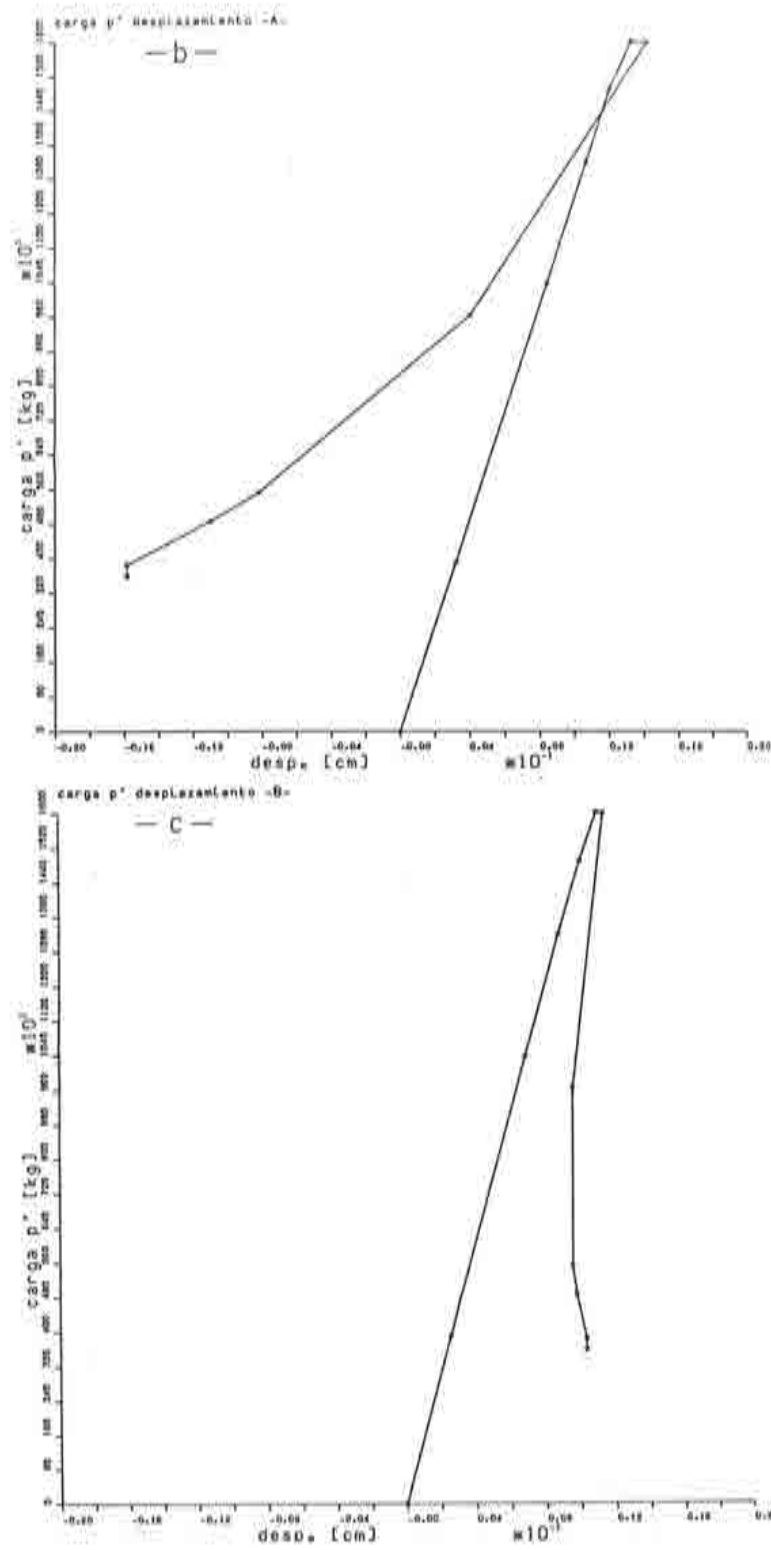


fig.(V.31): b) Ensayo de flexión y corte en una viga entallada - modo mixto de fractura - Carga P' vs. desplazamiento del punto A . c) Ensayo de flexión y corte en una viga entallada - modo mixto de fractura - Carga P' vs. desplazamiento del punto B .

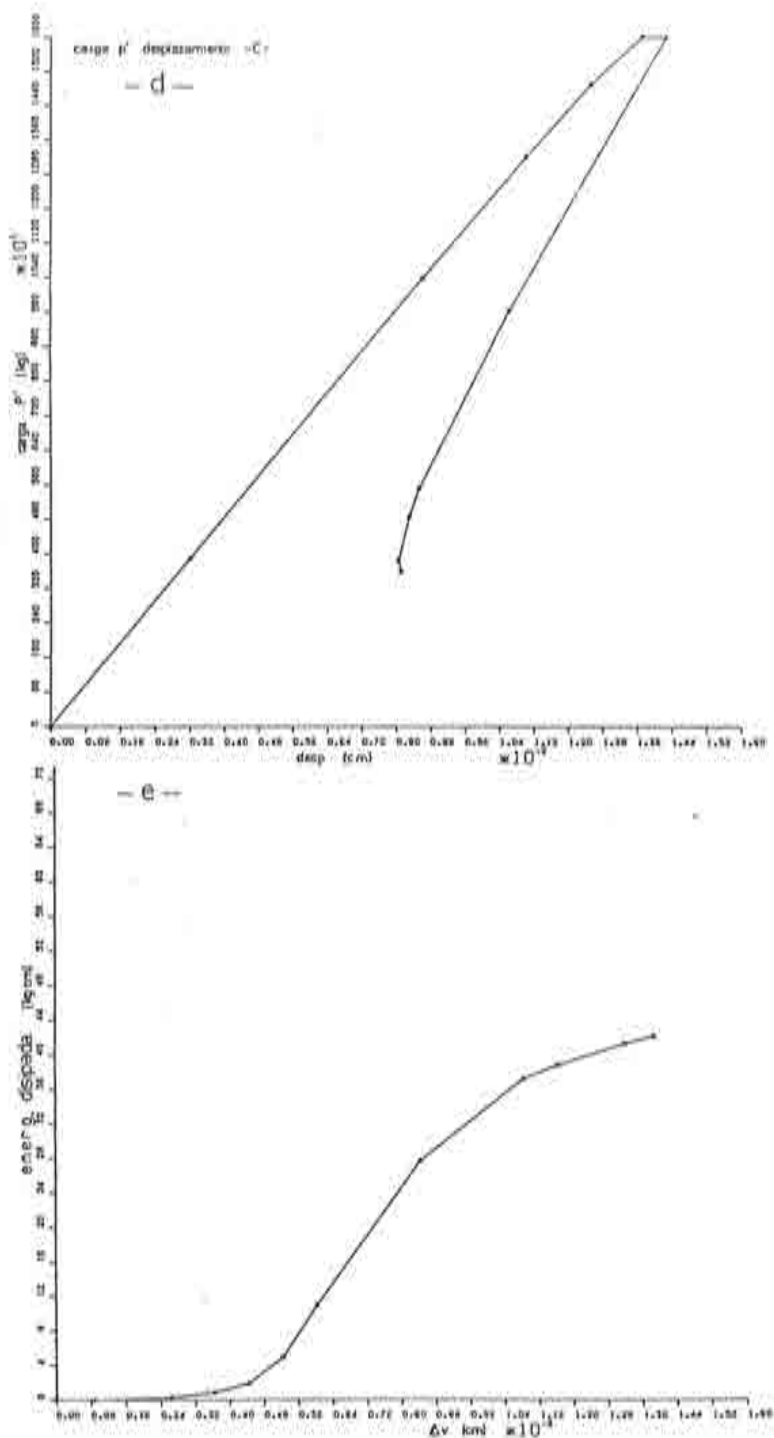


fig.(V.31): d) Ensayo de flexión y corte en una viga entallada - modo mixto de fractura - Carga P' vs. desplazamiento del punto C (punto de aplicación de la carga P'). e) Ensayo de flexión y corte en una viga entallada - modo mixto de fractura - Energía total disipada Vs. deslizamiento relativo entre caras de la entalla.

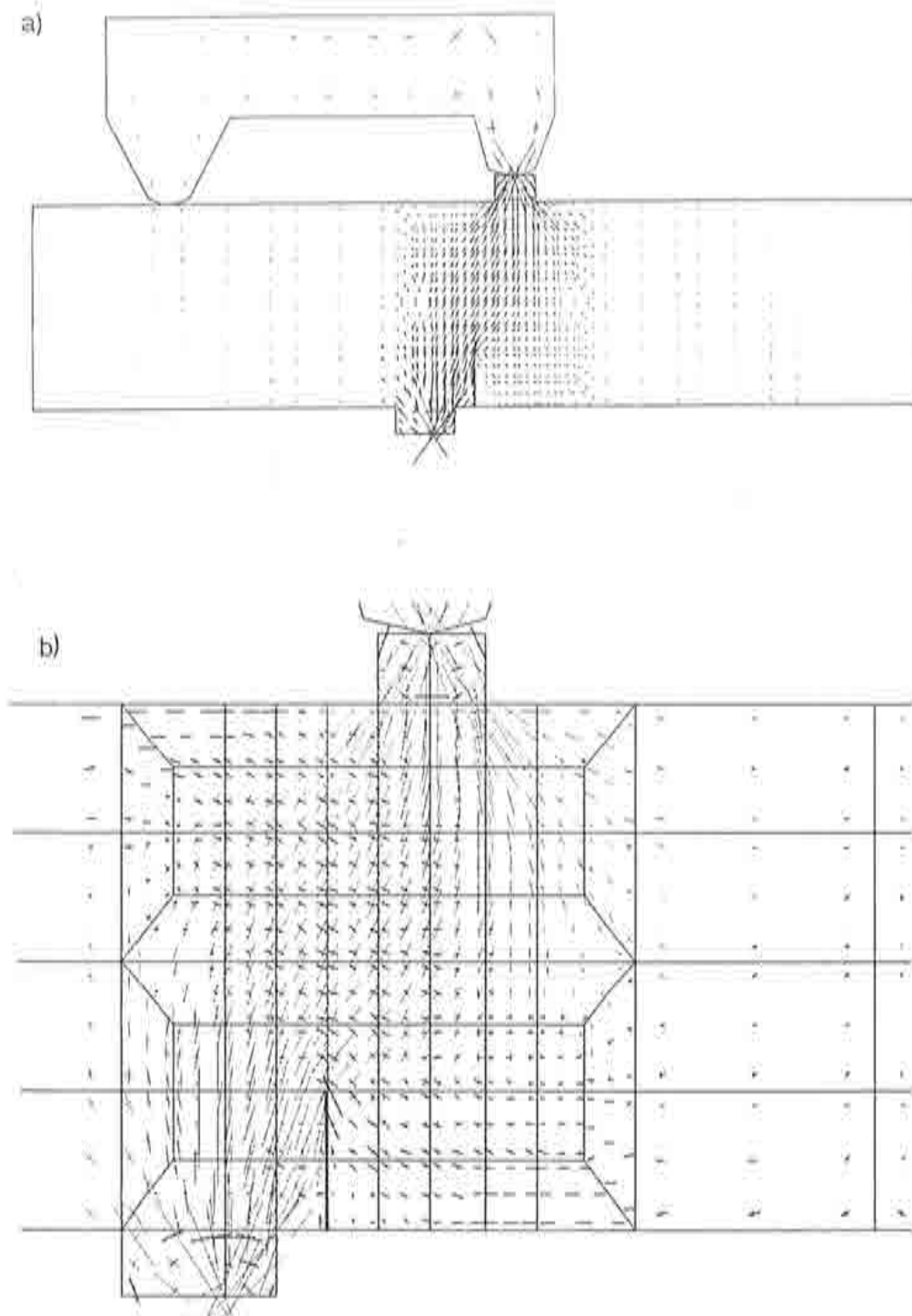


fig.(V.32): Ensayo de flexión y corte en una viga entallada – modo mixto de fractura – a) Estado tensional en toda la viga, al finalizar el período elástico. b) Detalle del estado tensional en la zona crítica, al finalizar el período elástico.

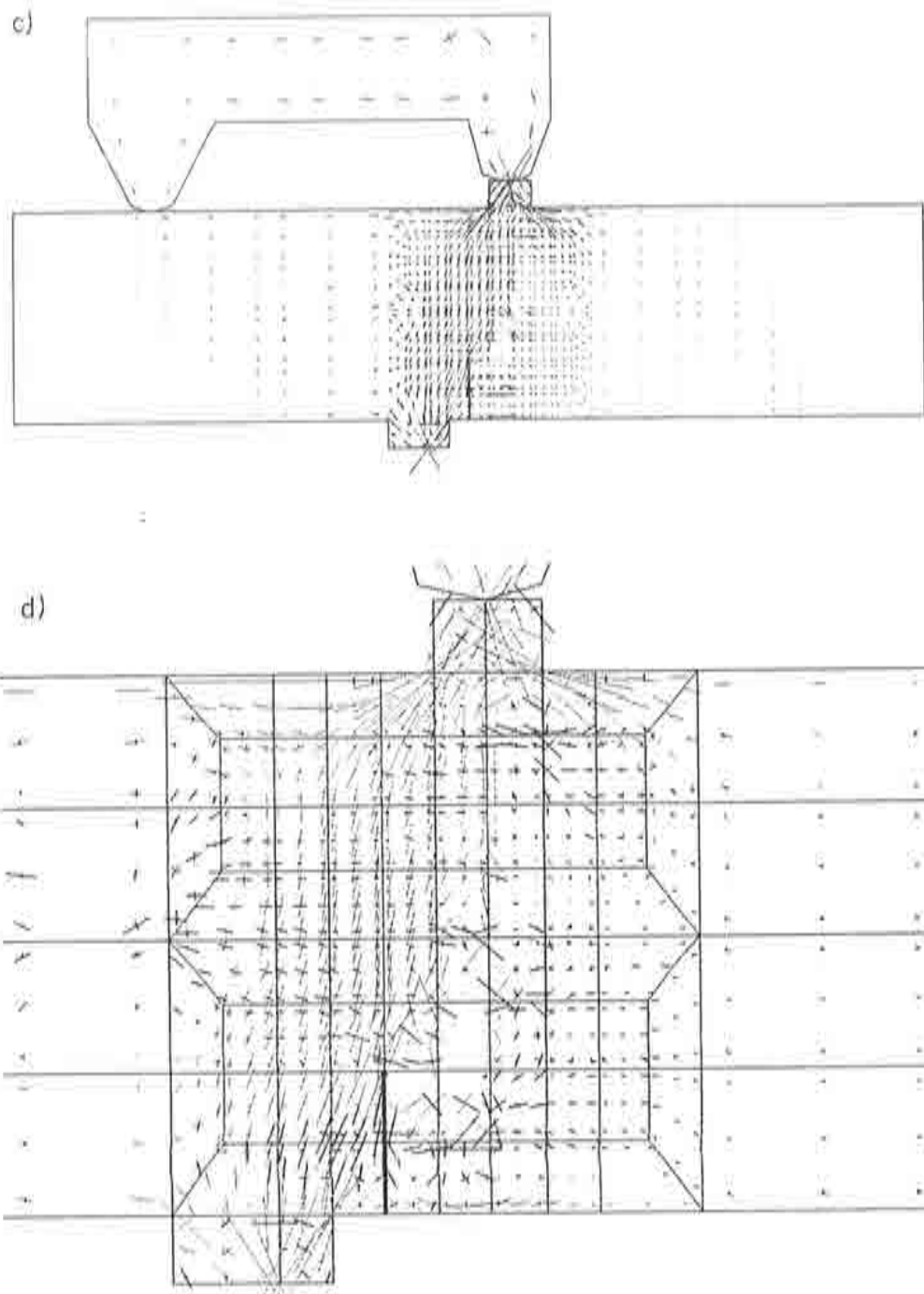


fig.(V.32): Ensayo de flexión y corte en una viga entallada – modo mixto de fractura – c) Estado tensional en toda la viga, al finalizar el período plástico. d) Detalle del estado tensional en la zona crítica, al finalizar el período plástico.

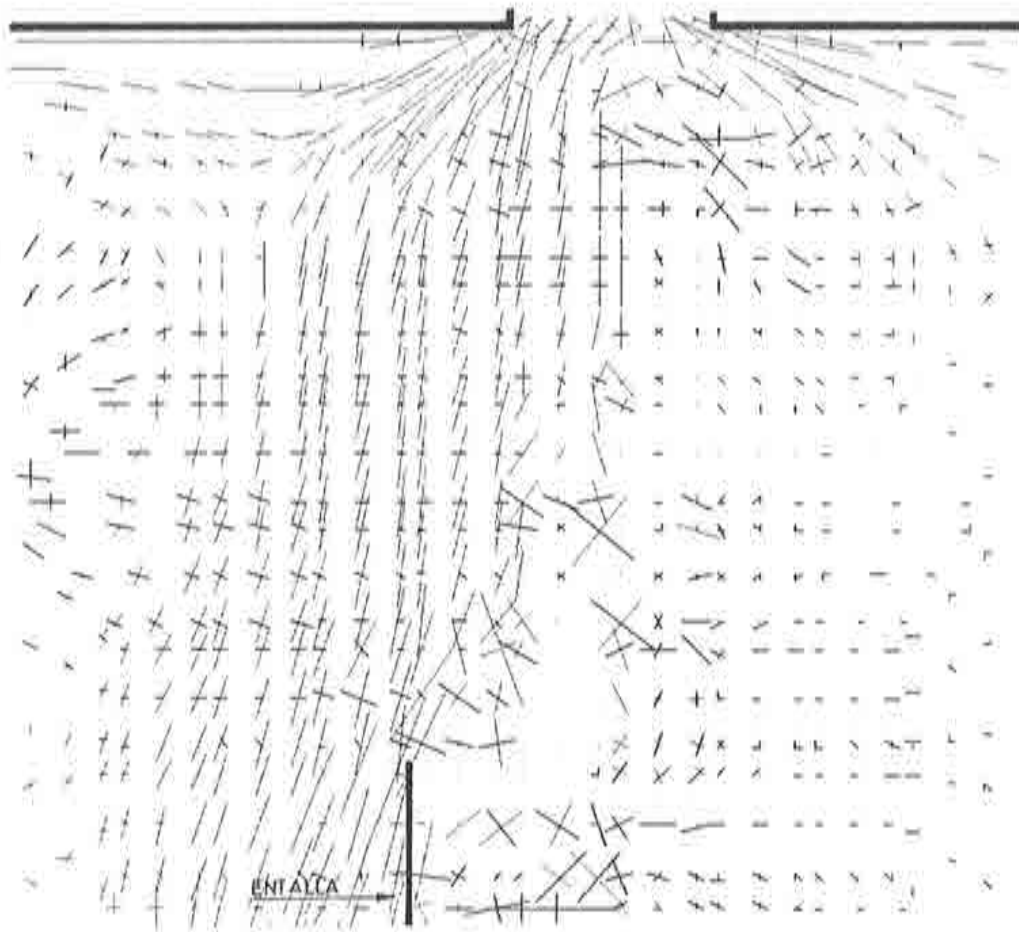


fig.(V.32,e): Ensayo de flexión y corte en una viga entallada - modo mixto de fractura - Detalle del estado tensional al finalizar el período plástico, sin la superposición de la malla de elementos finitos.

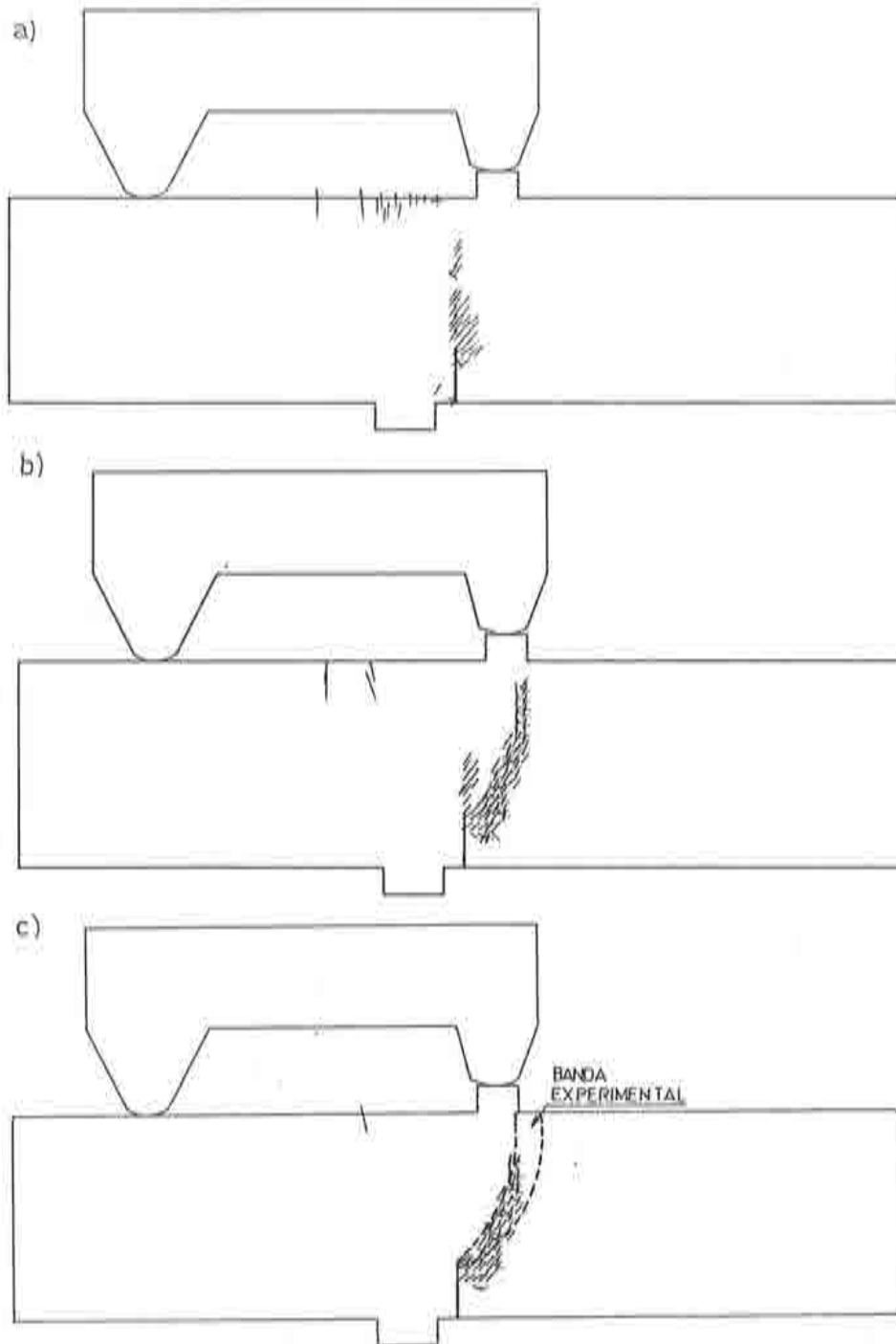


fig.(V.33): Ensayo de flexión y corte en una viga entallada - modo mixto de fractura - a) Estado de fisuración correspondiente al pico de tensiones (fisuras mayores al 2 % de la máxima). b) Estado de fisuración correspondiente al límite último (fisuras mayores al 3 % de la máxima). c) Estado de fisuración correspondiente al límite último (fisuras mayores al 5 % de la máxima).

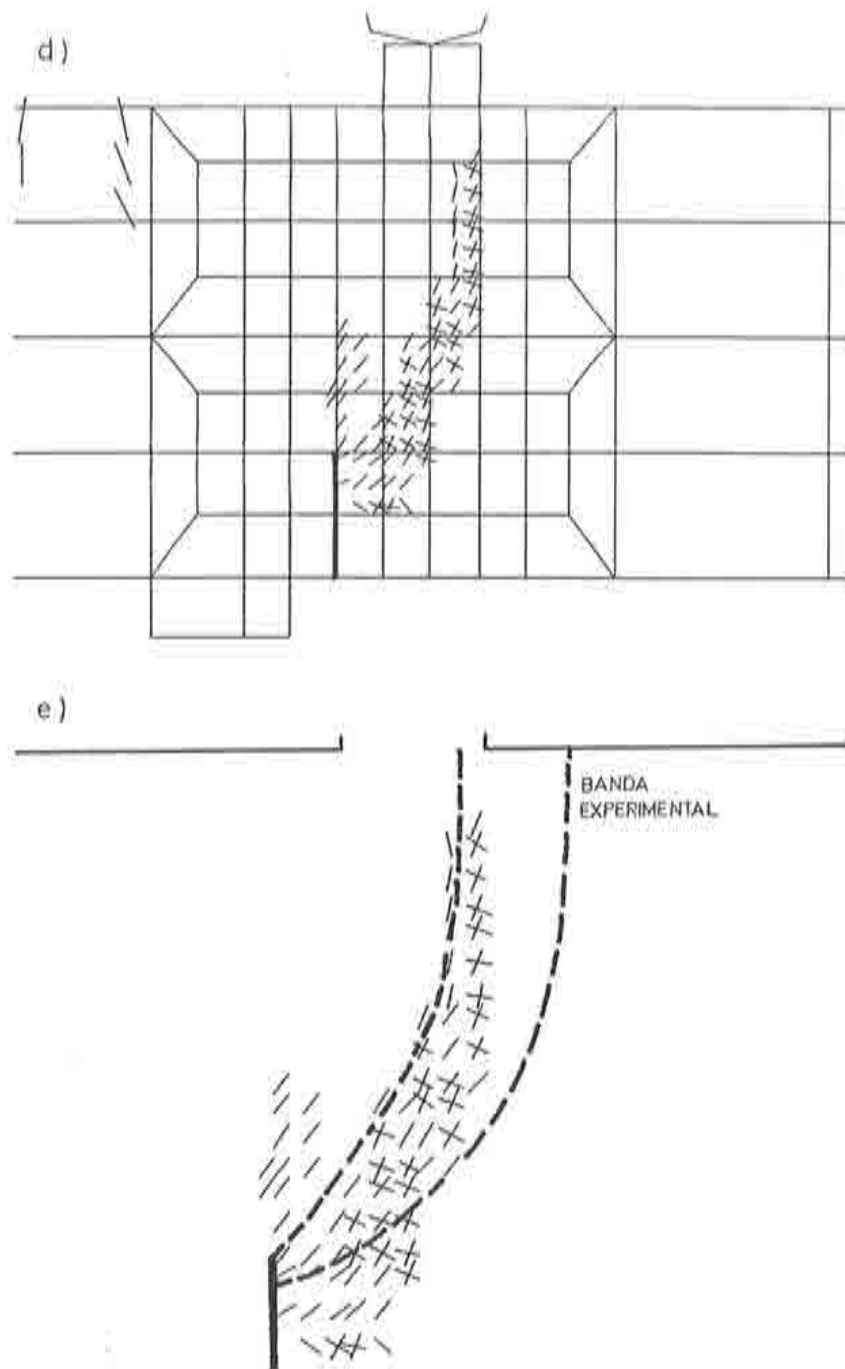


fig.(V.33): Ensayo de flexión y corte en una viga entallada – modo mixto de fractura – d) Detalle del estado de fisuración correspondiente al límite último (fisuras mayores al 2.8 ‰ de la máxima). e) Detalle del estado de fisuración sin la superposición de la malla de elementos finitos, correspondiente al límite último (fisuras mayores al 2.8 ‰ de la máxima).

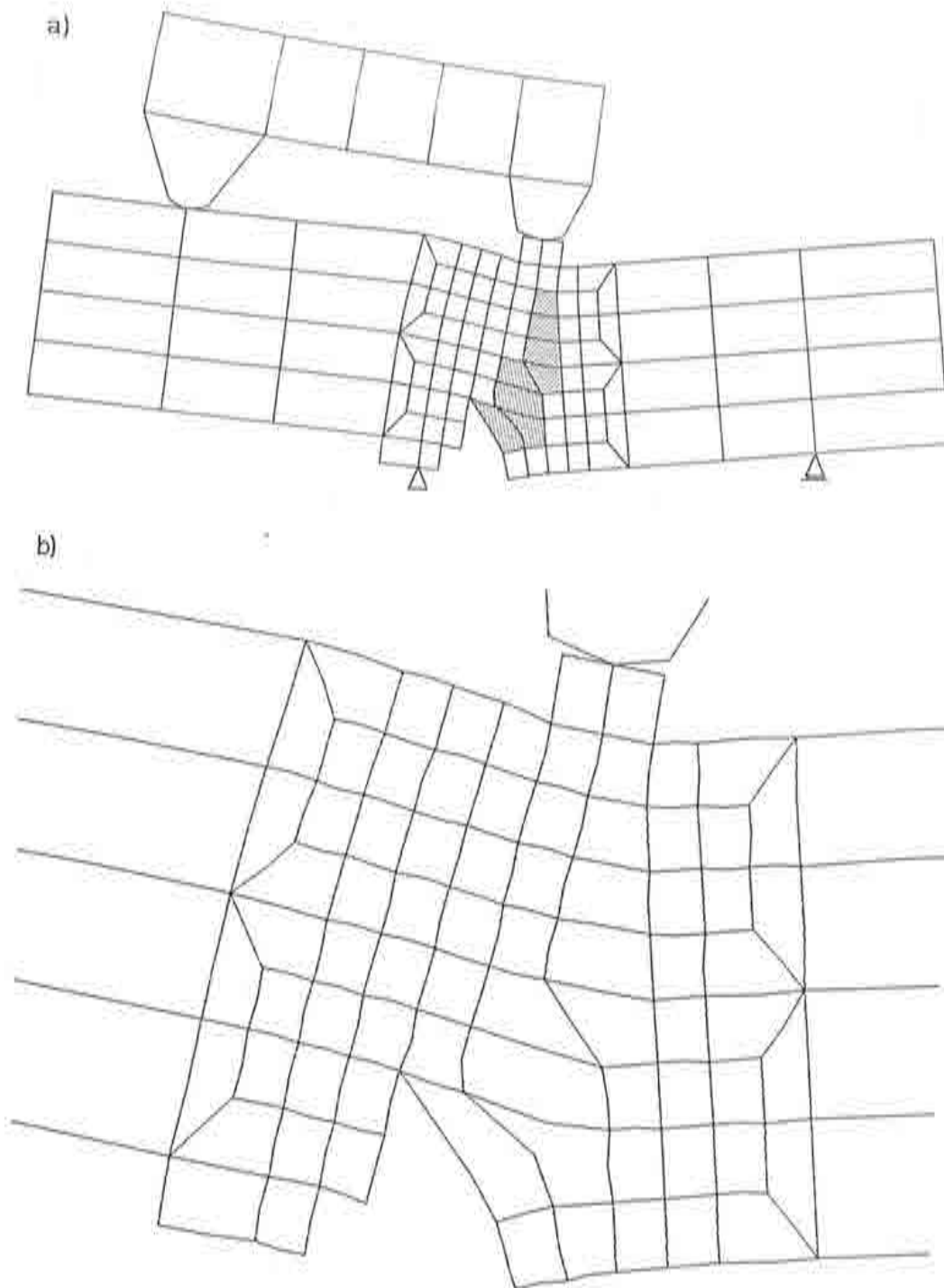


fig.(V.34): Ensayo de flexión y corte en una viga entallada - modo mixto de fractura - a) Deformación de la viga y localización de deformaciones en el estado último (amplificación $\times 300.0$). b) Detalle de la localización de deformaciones en el estado último (amplificación $\times 300.0$).

V.9.- ENSAYO A FLEXION DE UNA VIGA ARMADA.

V.9.a- Consideraciones generales sobre el ensayo.

El problema que se considera en este apartado, se refiere a una viga de hormigón armado simplemente apoyada, como la que se muestra en la fig.(V.35,a), sometida a la acción de dos cargas puntuales iguales y simétricas. Esta fue ensayada experimentalmente por Walraven ^[22] y verificada numéricamente por Borst and Nauta ^[23].

Los parámetros y datos que definen las características físicas, mecánicas y geométricas del ensayo, son las que se muestran en la fig.(V.35).

Se ha discretizado el dominio con una malla de elementos finitos planos de ocho nodos, integrados numéricamente con una cuadratura de Gauss-Legendre de 3×3 puntos. Los elementos finitos de acero y hormigón han sido ensamblados considerando que ambos materiales son infinitamente solidarios en el comportamiento (adherencia perfecta). En caso que se desee considerar este fenómeno, será necesario incluir un *elemento de junta* ^[120], que permita simular la verdadera adherencia entre ambos materiales.

El problema ha sido resuelto con plasticidad asociada, haciendo uso de la función de fluencia propuesta en el *cap. IV*.

La solución del sistema de ecuaciones no-lineales, se ha llevado a cabo con el método de rigidez inicial K_0 *apart. Ap-II.3.a.*, sin encontrar ningún problema hasta que se alcanzan valores de desplazamiento aplicado de 0.5 cm , a partir del cual comienzan algunos problemas de convergencia en la solución.

V.9.b- Análisis del ensayo.

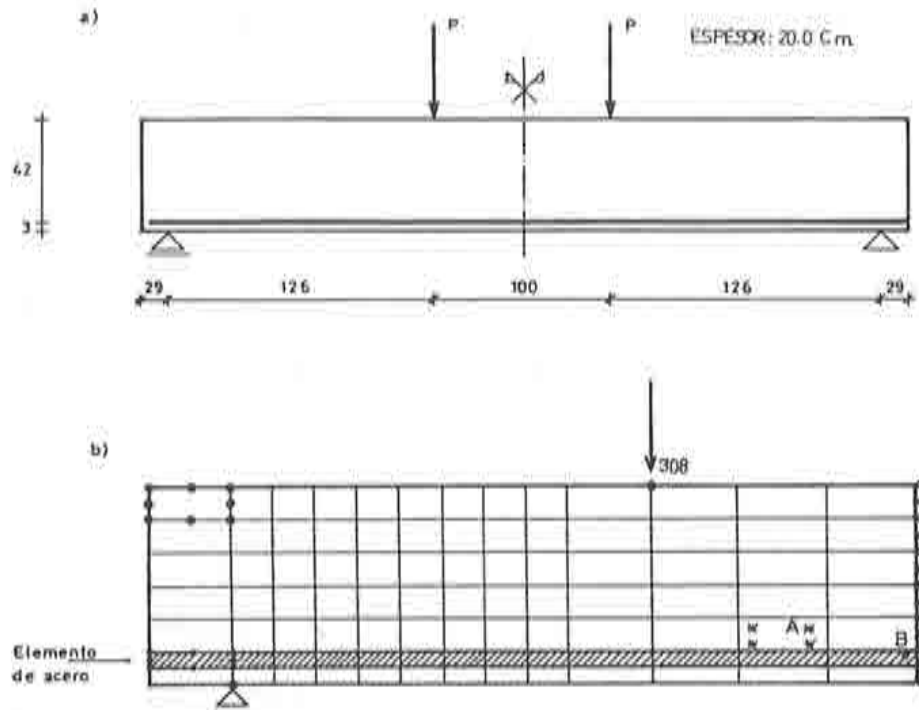
En el ensayo experimental se ha observado, que la falla de la viga se produce por fisuras diagonales, provocadas por corte, como las que exhibe la fig.(V.37,a); no obstante aparecen también otras fisuras verticales que se desarrollan predominantemente en la zona de momentos flectores constantes. En el análisis numérico, también se ha observado la aparición de ambos grupos de fisuras fig.(V.37,b) y (V.37.c). Así, se observa que primeramente aparecen las fisuras verticales, (modo-I-) de fractura fig.(V.37,b), y luego de que el desplazamiento del

punto de aplicación de la carga supera los 0.3cm aproximadamente, comienzan a desarrollarse las nuevas fisuras que nacen desde el apoyo y se orientan hacia el punto de aplicación de la carga, estando provocadas por la acción del corte fig.(V.37,c). Algunas de las fisuras correspondientes a este último grupo, se manifiestan localmente como rotación de las ya existentes. Debido a esto, el modelo presentado por los investigadores de la referencia ^[22], muestran la necesidad de definir el ángulo umbral a partir del cual se permite abrir una nueva fisura. Dado que el presente modelo considera isotropía en el punto de análisis, no es necesario definir dirección de daño en el punto.

La fig.(V.36,a) muestra la respuesta carga vs. desplazamiento, para el modelo de Borst-Nauta ^[22], para el ensayo experimental y para este modelo. En ella se puede ver que la respuesta de este modelo se desarrolla paralelamente a la experimental, pero por debajo de los valores correctos. Es probable que esta diferencia se deba a que en la discretización, se ha situado el eje de los elementos finitos que representan el acero a una distancia de 5.62 cm de la cara inferior de la viga, en cambio, en el ensayo real estaba situado a 3.0 cm .

En la fig.(V.36,b), se observa la curva de tensión vs. deformación en el punto de integración del hormigón que ha sufrido mayor deformación plástica (punto A, fig. V.35,a) solicitado, y en ella se puede ver como este punto describe una trayectoria con ablandamiento, en tanto la respuesta global de la viga muestra un endurecimiento.

En la fig.(V.36,c), se observa la curva tensión-deformación para el punto de integración más solicitado del acero (punto B, fig. V.35,a).



•para el: HORMIGÓN.

$$E_0 = 285423.00 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\nu_0 = 0.20$$

$$\sigma_C^0 = -254.84 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_C^{pic} = -330.00 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_T^0 = 25.48 \text{ kg/cm}^2$$

$$\alpha = 0.12 \rightarrow \frac{\sigma_{b0}}{\sigma_{e0}} = 1.16$$

$$\gamma = 3.0$$

$$p = 1.0$$

$$G^f = 0.06116 \text{ kg/cm}$$

$$G^e = 7.33 \text{ kg/cm}$$

$$L^{pe} = \sqrt{A^e}$$

Flujo asociado. { Criterio de fluencia propuesto ;
Función de potencial asociada a la propuesta

Función de endurecimiento a compresión $c_C(\kappa) : F - 3$

Función de endurecimiento a tracción $c_T(\kappa) : F - 1$

Posición relativa del pico de tensiones : $(\kappa^p)^{pic} = 0.38$

Sin degradación elástica.

Sin degradación plástica.

•para el: ACERO.

$$E_0 = 2140672.00 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\nu_0 = 0.30$$

$$\sigma_C^0 = -4485.21 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_C^{pic} = -5382.00 \text{ kg/cm}^2$$

Flujo asociado. { Criterio de fluencia Von Mises ;
Función de potencial asociada al de fluencia

fig.(V.35): Ensayo de flexión de una viga armada.- Características geométricas mecánicas y malla de elementos finitos utilizada en el ensayo numérico.

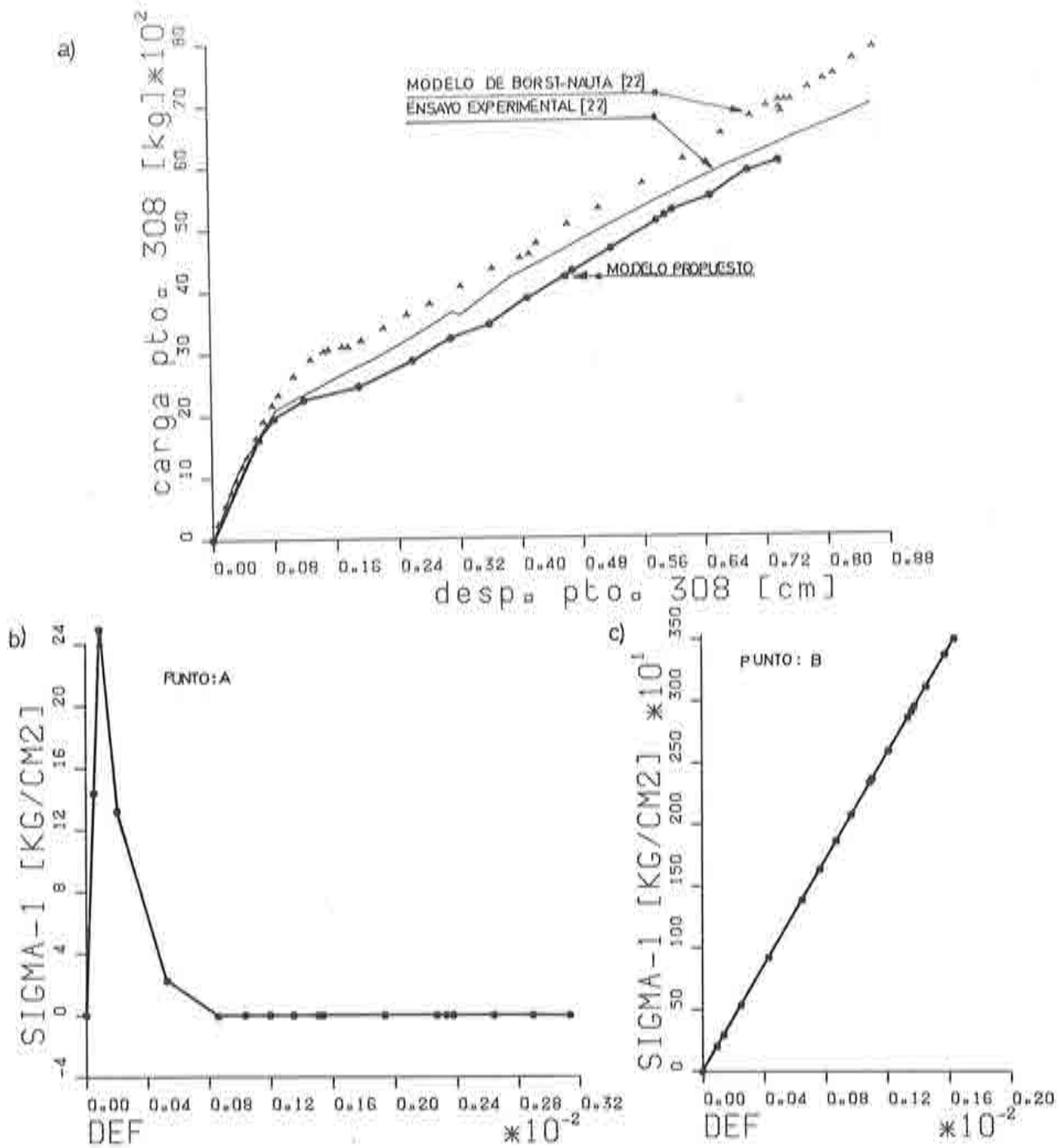


fig.(V.36): Ensayo de flexión de una viga armada.- a) Respuesta carga vs. desplazamiento del pto. de aplicación de la carga - comparación con los resultados experimentales y numéricos reportados en la referencia [22]. b) Respuesta tensión-deformación principal mayor, para el punto de hormigón más solicitado. c) Respuesta tensión-deformación principal mayor, para el punto del acero más solicitado.

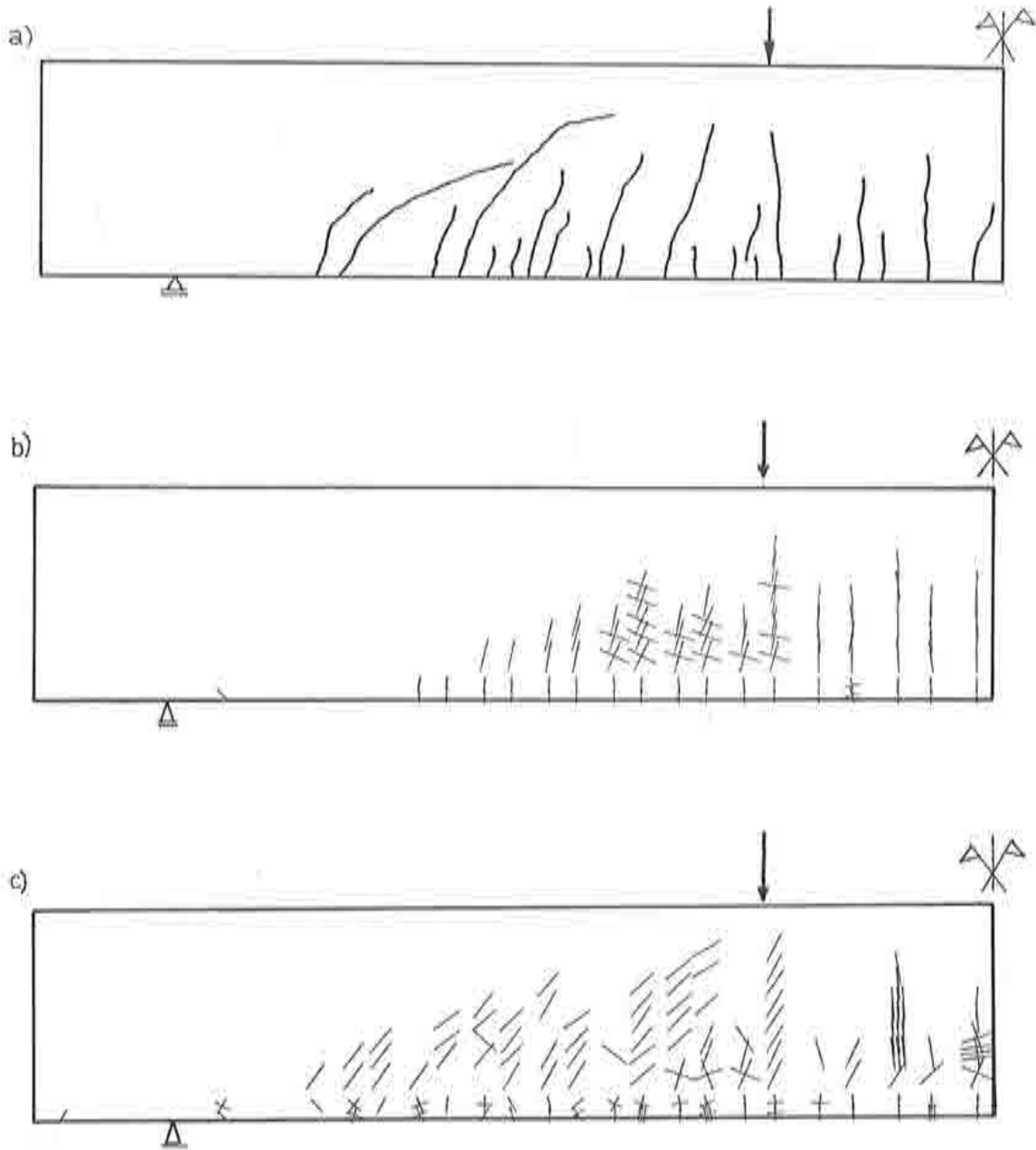


fig.(V.37): Ensayo de flexión de una viga armada.- a) Estado de fisuración último obtenido en el estudio experimental ^[22]. b) Estado de fisuración del ensayo numérico, en el límite correspondiente a $\delta = 0.25 \text{ cm}$ (fisuras mayores que el 1.5‰ de la máxima). b) Estado de fisuración del ensayo numérico, en el límite último, $\delta = 0.75 \text{ cm}$ (fisuras mayores que el 1.5‰ de la máxima).

CONCLUSIONES

• CONCLUSIONES SOBRE LA "FORMULACION DEL MODELO CONSTITUTIVO" PROPUESTO.

En esta tesis, se formula un modelo constitutivo de daño plástico que permite simular, dentro de un rango muy amplio, el comportamiento de los materiales cohesivo-friccionales, con especial orientación hacia el hormigón, dentro de procesos de carga cuasi-estáticos. El modelo ha sido analizado en profundidad y se ha aplicado a diversos ejemplos de comprobación. De su formulación, se podrían destacar las siguientes conclusiones:

- 1 - El modelo constitutivo surge de una *generalización* de los conceptos clásicos de la teoría de la plasticidad, y permite tratar en modo general el comportamiento mecánico del hormigón, bajo complejos estados tensionales que resultan de procesos de cargas *radiales* y *no-radiales*, incluyendo la posibilidad de considerar el fenómeno de degradación de rigidez que se produce durante el desarrollo de procesos elásticos y plásticos. Asimismo permite controlar el fenómeno de dilatación mediante el uso de una regla de flujo no-asociada. La teoría mecánica que respalda los fundamentos del *modelo de daño plástico*, hace de él una formulación consistente factible de ser particularizada o generalizada aún más.
- 2 - La modelización del hormigón ha requerido una nueva definición de la *variable interna de endurecimiento plástico*, denominada en este modelo *variable interna de daño plástico*, la que constituye una "medida relativa" de la energía disipada durante el proceso plástico. Esta variable ha posibilitado

el tratamiento unificado de los procesos multiaxiales en general, que se desarrollan en el hormigón.

- 3 – A la vista de las limitaciones que presentan las formulaciones elasto-plásticas clásicas, para modelar el comportamiento de materiales friccionales mediante el uso de una *función de endurecimiento isotrópico* formulada en forma explícita, ha sido necesario en su lugar definir la *cohesión* como una *variable interna* regulada por la correspondiente ecuación de evolución. Se hace una propuesta general para dicha ecuación de evolución en función de curvas de resistencia (cohesión) obtenidas en ensayos uniaxiales a tracción y compresión. También se proponen tres funciones explícitas para aproximar dichas curvas uniaxiales de cohesión.
- 4 – Se presentan funciones explícitas que definen el valor del ángulo de *rozamiento interno* y de *dilatancia* para cada pseudo-instante del proceso de carga, y se proponen dos funciones simplificadas, respectivamente, para el caso en que se trabaje con hormigones.
- 5 – Se definen los fenómenos de *degradación de rigidez elástica y plástica* a través de dos variables internas y de sus respectivas ecuaciones de evolución, asociadas a cada fenómeno particular. Además se formulan para casos simples de degradación, las expresiones de los tensores de rigidez secante y tangente degradados. Por otra parte se generaliza el concepto de *flujo plástico asociado* para el caso general de procesos con degradación de rigidez.
- 6 – Se formula una *función de fluencia plástica*, homogénea de primer grado en las tensiones, que aproxima muy bien el comportamiento del hormigón y que también puede ser considerada como función de potencial plástico, sin que introduzca una excesiva dilatancia. También se propone una *modificación simple de la función de fluencia de Mohr-Coulomb*, que permite obtener una adecuada relación inicial entre las resistencias uniaxiales a compresión y tracción, para ángulos de rozamiento interno comprendidos dentro de los valores naturales del hormigón. El hecho de utilizar *funciones de fluencia plástica*, homogéneas de primer grado en las tensiones, presenta la ventaja de permitir que el modelo pueda usar, además de las funciones propuestas

en esta tesis, otras que pueden encontrarse en gran cantidad de trabajos y experiencias acumuladas por otros investigadores en este tema. Además, estas funciones permiten definir *reglas de endurecimiento plástico* con un claro significado físico (tensiones o cohesión).

- 7 - El modelo permite simular procesos de carga que conducen al sólido a su estado último, situación en que no puede seguir resistiendo las acciones impuestas. Esto plantea una marcada diferencia con muchos modelos que están formulados para modelar el comportamiento hasta el límite de tensiones máximas (comportamiento pre-pico), o ligeramente más allá de este límite.
- 8 - De la utilización de este modelo, se observa que en algunos problemas simples de carga radial, la respuesta obtenida coincide bastante con los resultados de otros modelos basados en formulaciones más simples. Sin embargo, no se puede extender esta afirmación a problemas donde se desarrollan estados tensionales de compresión pura, o situaciones más complejas (procesos de compresión-tracción, o corte), ni para aquellos casos de procesos de carga no-radial, ya que se pueden desarrollar estados tensionales de difícil simulación, que el presente modelo resuelve satisfactoriamente.
- 9 - El manejo adecuado de los parámetros y conceptos que intervienen en la formulación del modelo constitutivo que se presenta, le proporcionan una gran versatilidad que permite transformarlo en distintos modelos más simples que podrían considerarse como casos particulares de éste. Entre ellos, y a modo de ejemplo, se pueden mencionar los siguientes: Modelo elástico no-lineal con degradación de rigidez; Modelo elasto-plástico con endurecimiento positivo, nulo o negativo, con degradación elástica y/o degradación plástica, etc.

• CONCLUSIONES SOBRE LA "APLICACION DEL MODELO CONSTITUTIVO" PROPUESTO.

La aplicación de la teoría formulada en el presente modelo constitutivo, puede llevarse a cabo, en líneas generales, mediante la forma clásica utilizada para la implementación de las formulaciones no-lineales inelásticas; sin embargo, conviene

resaltar algunos conceptos, sobre los que fué necesario trabajar para conseguir una buena respuesta del modelo:

- 1 - Con el objeto de poder realizar un análisis de procesos de deformación inestables, se propone un *algoritmo de control de desplazamientos* (versión particular del método de *plano normal actualizado* -*normal plane update*-), que permite mejorar la velocidad de convergencia. Este algoritmo, de simple implementación, ha revelado ser eficaz en la obtención del camino de respuesta en algunos ejemplos analizados. Dentro de este mismo contexto, se propone un algoritmo de *control de plastificación* que permite regular el incremento de carga, a partir de una definición automática de la *longitud de arco*, para que en dicho incremento plastifique sólo un punto de integración. Esta técnica de control automático de incremento de carga, está formulado para ser utilizado con cualquier método de *control de desplazamientos* y permite que la disipación de energía durante cada incremento sea mínima.
- 2 - Se propone un *algoritmo para implementar* la técnica de *retorno radial*, que posibilita integrar implícitamente la ecuación constitutiva elasto-plástica. Esta es una técnica de integración, adecuada para los problemas con ablandamiento por deformación (contracción de la superficie de fluencia plástica), y permite una sustancial economía de tiempo de cálculo frente a otras técnicas alternativas.
- 3 - Un post-proceso de los resultados permite obtener en forma simple luego de alcanzar la convergencia, como se muestra en los ejemplos de aplicación presentados, la información sobre el estado de fisuración y/o aplastamiento de cada punto del sólido.
- 4 - Se han analizado una considerable cantidad de *ejemplos* con el modelo propuesto. En cada caso se han exigido condiciones forzadas de cargas y vínculos, que conducían a problemas de difícil resolución, obteniéndose siempre resultados satisfactorios con una buena coincidencia con los ensayos experimentales, inclusive para modo mixto de fractura, caso en que se han reproducido resultados que aún no habían sido logradas por otros modelos

constitutivos. Estos ejemplos indican las posibilidades futuras que puede ofrecer la posterior aplicación del modelo en su estado actual de desarrollo.

- 5 - Durante la resolución de los ejemplos, se ha podido observar que mientras se desarrollan procesos de carga con endurecimiento isotrópico en todos los puntos del sólido, se obtiene la convergencia hacia la solución en forma relativamente rápida, comenzando a decrecer esta velocidad de convergencia a medida que aumentan los puntos que desarrollan proceso elasto-plásticos con ablandamiento, sobre todo después que se inicia el proceso de localización de deformaciones.

El estudio desarrollado en este trabajo, permite plantear nuevas líneas de investigación, a partir de una mayor profundización de algunos temas que en esta tesis no están totalmente cerrados. Entre los más interesantes, se destacan los siguientes:

- 1 - El problema de la objetividad en la solución respecto del tamaño de la malla de elementos finitos. En lo que respecta al comportamiento elasto-plástico con endurecimiento no se presentan problemas de objetividad en las respuestas; y aparentemente, este problema está medianamente solucionado para procesos elasto-plásticos con un comportamiento elástico inicial, seguido de un comportamiento plástico con ablandamiento, aprovechándose en forma satisfactoria en este trabajo la experiencia de otros investigadores que han profundizado en el estudio de este campo. Si embargo, el hormigón como muchos otros materiales friccionales, tiene tanto a tracción como a compresión una respuesta marcada por un proceso elástico, seguido de otro inelástico con endurecimiento que conduce finalmente a un comportamiento con ablandamiento. Este problema de comportamiento, necesita un mayor esfuerzo de investigación que permita dar solución a los inconvenientes de falta de objetividad en la respuesta que se presentan. Dentro de este mismo contexto, también necesita mayor profundidad el estudio de la energía de aplastamiento G^c que se propone en esta tesis, y que en un primer momento ha permitido dar solución a ciertos problemas de comportamiento multiaxial que se han presentado.

- 2 - Conviene estudiar también con más rigor el fenómeno de *localización de deformaciones*, el cual está muy ligado, en este modelo, al problema de la objetividad. Durante el desarrollo de algunos ejemplos de esta tesis se ha permitido que esta localización se desarrolle espontáneamente, en cambio en otros ejemplos ha sido necesario excitar su iniciación.
- 3 - Dada las características de la formulación del modelo, y su capacidad para emular el comportamiento de materiales friccionales frágiles, sería interesante investigar su posible aplicación al análisis del comportamiento de materiales cerámicos.
- 4 - Es también de particular interés la *extensión de esta formulación para materiales friccionales que tengan marcada ortotropía*, como es el caso de la mampostería, e inclusive mejorar la definición del daño local en algunos problemas relacionados con el hormigón.
- 5 - La resolución de un problema cuasi-estático con localización, resulta muy costoso desde el punto de vista del tiempo computacional, siendo necesario dedicar mayor atención en el desarrollo de técnicas que permitan alcanzar la convergencia en la solución con menor esfuerzo.
- 6 - Sería conveniente extender la formulación del presente modelo, para considerar problemas con grandes deformaciones, con el objeto de ampliar su versatilidad y mejorar el tratamiento de los procesos con localización de grandes deformaciones.
- 7 - A pesar que los datos básicos que necesita este modelo surgen de estudios uniaxiales a tracción y compresión del hormigón, puede resultar dificultosa la determinación de algunos parámetros, como la energía de fractura por unidad de área, y por lo tanto es deseable que sucesivas investigaciones sobre el modelo permitan reducir la utilización de algunos de estos parámetros, con el fin de hacer más sencilla su aplicación práctica.
- 8 - Por último, sería de gran importancia realizar distintos *estudios experimentales uniaxiales y multiaxiales* sobre el hormigón, que permitan

aclarar su comportamiento durante determinados procesos de carga, con el objeto de que se pueda ajustar mejor el modelo constitutivo que se presenta.

REFERENCIAS

- [1] - **Andenaes E., Grestle K. and Ko H.** - *Response of mortar and concrete to biaxial compression* - Journal of the Engineering Mechanics Division - ASCE - Vol. 103 - Nro. EM4 - pp. 515, 526 - 1977.
- [2] - **Arrea M. and Ingraffea A. R.** - *Mixed mode crack propagation in mortar and concrete* - Cornell University, Department of Structural Engineering - Report Nro. 81-13 - Ithaca - New York.
- [3] - **Bathe K. J. and Ramaswamy S.** - *On three dimensional non linear analysis of concrete structures* - Nuclear Engineering and Design - Vol. 52 - pp. 385, 409 - 1979.
- [4] - **Batoz J. L. and Dhatt** - *Incremental displacement algorithms for non linear problems* - Int. Journal for Numerical Methods in Engineering - Short communications - pp. 1262, 1267 - 1979.
- [5] - **Bažant Z.** - *Inestability, ductility, and size effect in strain softening concrete* - Journal of The Engineering Mechanics Division - Vol. 102 - Nro. EM2 - pp. 331, 344 - ASCE - 1976.
- [6] - **Bažant Z.** - *Endochronic inelasticity and incremental plasticity* - Int. Jour. of Solids and Structures - Vol. 14 Nro. 9 - pp. 691, 714 - 1978.
- [7] - **Bažant Z.** - *Inestability, ductility, and size effect in strain softening concrete* - Discussion [5] - Journal of The Engineering Mechanics Division - Proc. paper 12042 - ASCE- 1978.
- [8] - **Bažant Z.** - *Crack band model for fracture of Geomaterials* - proc. 4th Int. Conf. on Numer. Methods in Geomech - Edmonton, AB, Canada - Ed. by Z. Eisenstein - Vol. 3 - pp. 1137, 1152 - 1982.
- [9] - **Bažant Z.** - *Comment on Hillerborg's comparison of size effect law with fictitious crack model* - Testimonianze e note scientifiche in onore del settantesimo compleanno de Sandro dei Poli - pp. 335, 338 - Milano - 1985.
- [10] - **Bažant Z.** - *Fracture in concrete and reinforced concrete* - Mechanics of Geomaterials - pp. 259, 303 - Edited by. Z. Bažant - 1985.

- [11] - **Bažant Z.**- *Mechanics of distributed cracking* - Appl. Mech. Rev. - Vol. 39 Nro. 5 - pp. 675, 705 - 1986
- [12] - **Bažant Z. and Cedolin L.**- *Blunt crack propagation in finite element analysis* - Journal of The Engineering Division - Vol. 105 - Nro EM2 - pp. 297, 315 - ASCE - 1979
- [13] - **Bažant Z. and Kim S.**- *Plastic fracturing theory for concrete* - Jour. Engineering Mechanics Division - Vol. 105 - Nro. EM3 - pp. 407, 428 - ASCE - 1979
- [14] - **Bažant Z. and Oh B.**- *Crack band theory for fracture of concrete* - Mat. Construct. 16 (93) - pp. 155, 177 - 1983
- [15] - **Bažant Z., Bishop F. and Chang**- *Compression test of concrete and cement paste at very high pressures and lateral confinement* - Testimonianze e note scientifiche in onore del settantesimo compleanno de Sandro dei Poli - pp. 21, 41 - Milano - 1985.
- [16] - **Belytschko T., Bažant Z., Woong Y. W. and Chang T.** - *Strain softening material and finite element solutions* - Computers and Structures - Vol 23 - Nro. 2 - pp. 163, 180 - 1986.
- [17] - **Bicanic N.**- *Non linear finite element transient response of concrete structures* - Ph. D. Thesis - Univ. College of Swansea - 1978.
- [18] - **Borst R. De** - *Non linear analysis of frictional materials* - Ph. D. Thesis - Delft, The Netherlands - 1986.
- [19] - **Borst R. De** - *Integration of plasticity equations for singular yield functions* - Computer and Structures - Vol. 26 - Nro. 5 - pp. 823, 829 - 1987.
- [20] - **Borst R. De**- *Smearred cracking, plasticity, creep and thermal loading - unified approach* - Computer Meth. Appl. Mech. Engng. 62 , 89 - 110 - 1987.
- [21] - **Borst R. De**- *Computation of post-bifurcation and post-failure behavior of strain-softening solids* - Computer and Structures - Vol. 25 - Nro. 2 - pp. 211, 224 - 1987.
- [22] - **Borst R. De and Nauta P.**- *Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model* - International Report inst. TNO for building material and building structures - Delft, Netherlands - 1984.
- [23] - **Borst R. De and Vermeer P.**- *Non associated plasticity for soils, concrete, and rock* - Heron - Vol. 29 - Delft, Netherlands - 1984.

- [24] - **Borst R. De and Vermeer P.**- *Possibilities and limitations of finite elements for limit analysis* - Geotechnique 34 - Nro. 2 - pp. 199, 210 - 1984.
- [25] - **Brebbia C. A. and Connor J.J.**- *Método de los elementos finitos en ingeniería civil* - Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos - Madrid 1975.
- [26] - **Buyukozturk O. and Shareef S.**- *Constitutive modeling of concrete in finite element analysis* - Computers and Structures - Vol. 21 - Nro. 3 - pp. 581, 610 - 1985.
- [27] - **Calavera J., González Valle E. y González Isabel G.**- *La influencia de los esfuerzos previos de compresión, sobre la resistencia a tracción del hormigón* - Hormigón y Acero - Nro. 119, 120 - pp. 39, 42 - 1977.
- [28] - **Cedolin L.**- *Sulla applicabilità della meccanica della frattura al calcestruzzo* - Testimonianze e note scientifiche in onore del settantesimo compleanno de Sandro dei Poli - pp. 181, 194 - Milano - 1985.
- [29] - **Cedolin L., Crutzen R. and Dei Poli S.**- *Triaxial stress-strain relationship for concrete* - Journal of Engineering Mechanics Division - Vol. 103 - Nro. EM3 - pp. 423, 439 - 1977.
- [30] - **Cervera M. and Hinton E.**- *Nonlinear analysis of reinforced concrete plates and shells using a three dimensional model*- Internal Report - Departament of Civil Engineering Univ. College of Swansea U.K.- 1985.
- [31] - **Cervera M., Hinton E. and Hassan O.**- *Non linear analysis of reinforced plate and shell structures using 20-nodes isoparametric brick elements* - Computer and Structures - Vol. 25 - Nro. 6 - pp. 845, 870 - 1987.
- [32] - **Cesar de Sa J. M. A. and Owen D. R. J.**- *The imposition of the incompressible constraint in finite elements - a review of approaches with a new insight to the locking phenomenon* - 3rd. Int. Conf. on Num. Methods for non linear problems - Dubrovnik - Ed. by Owen D. R. J., Taylor C., Hinton E., Damjanic F. - Pineridge Press - pp. 268, 285 - 1986.
- [33] - **Chen W. F.**- *Plasticity in reinforced Concrete* - Mc Graw Hill - 1982.
- [34] - **Chen A. and Chen W. F.**- *Constitutive Relations for Concrete* - Journal of The Engineering Mechanics Division - Vol. 101 - Nro. EM4 - pp. 465, 481 - ASCE - 1975.

- [35] - **Chen W. F. and Ting E.**- *Constitutive models for concrete structures* - Journal of The Engineering Mechanics Division - Vol. 106 - Nro. EM1 - pp. 1, 18 - ASCE - 1980.
- [36] - **Creus G.**- *Inestabilidad, ductilidad, and size effect in strain softening concrete* - Discussion [5] - Journal of The Engineering Mechanics Division - Proc. paper 12042 - pp. 357, 358 - ASCE - 1977.
- [37] - **Crisfield M. A.**- *A fast incremental iterative solution procedure that handles "snap through"* - Computer and structures - Vol. 13 - pp. 55,62 - 1981.
- [38] - **Crisfield M. A.**- *An arc-length method including line searches and accelerations*- Int. Journal for numerical method in engineering -Vol. 19 - pp. 1269, 1289 - 1983.
- [39] - **Crisfield M. A.**- *Snap-through and snap-back response in concrete structures and the Dangers of Under-integration* - Int.Jour.for Num. Meth. Eng. - Vol. 22 - pp. 751, 756 - 1986.
- [40] - **Crook A. J. L. and Hinton E.**- *Comparison of 2D quadrilateral finite elements for plasticity problems* - Proceedings of the International Conference of Computational Plasticity - Edited by D. R. J. Owen, E. Hinton, E. Oñate - Part 1 - pp. 181, 195 - Pineridge Press - 1987.
- [41] - **Darwin D. et alt.**- *Cracking of concrete members in direct tension* - ACI Journal 224-2R-86 - Reported by ACI Committee 224 - January, February - 1986.
- [42] - **Delibes A.**- *Microfisuración del hormigón por compresión, ¿ Estamos del lado de la seguridad ?* - Informes de la Construcción - Vol. 37 - Nro. 379 - pp. 43, 47 - 1986.
- [43] - **Desai C. and Siriwardane H.**- *Constitutive laws for engineering materials, with emphasis on geologic materials*- Printice Hall - 1984.
- [44] - **Ditomaso A.**- *Evaluation of concrete fracture* - *Fracture Mechanics of Concrete: Material characterization and testing* - Ed. by A. Carpinteri and A. Ingrassia - pp. 31, 65 - Martinus Nijhoff Publishers - 1984.
- [45] - **Dougill J. W.**- *On stable progressively fracturing solids* - Jour. Applied Math. Physics (ZAMP) 27 - 1976.
- [46] - **Dougill J. W.**- *Constitutive Relations for concrete and Rock: Applications and extensions of elasticity and plasticity Theory* - Mechanics of Geomaterials - pp. 21, 46 - Edited by. Z. Bažant - 1985.

- [47] - Dvorkin E., Torrent R. and Alvaredo A.- *A constitutive relation for concrete* - Proceedings of the International Conference of Computational Plasticity - Edited by D. R. J. Owen, E. Hinton, E. Oñate - Part 2 - pp. 1415, 1430 - Pineridge Press - 1987.
- [48] - Elices M.- *Fractura del hormigón : método de cálculo numérico* - Informes de la Construcción - Vol. 37 - Nro. 372 - Madrid 1985.
- [49] - Elices M., Llorca J. e Ingrassia A.- *Fractura del hormigón en régimen elástico y lineal* - Informes de la Construcción - Vol. 37 - Nro. 372 - Madrid - 1985.
- [50] - Fardis M. N. and Chen E. S.- *A cyclic multiaxial model for concrete*- Computational Mechanics - Vol. 1 - pp. 301, 305 - 1986.
- [51] - Frantziskonis G. and Desai G. S.- *Constitutive model with strain softening* - Int. Jour. Solids Structures - Vol. 23 - Nro. 6 - pp. 733, 750 - 1987.
- [52] - Frantziskonis G. and Desai G. S.- *Analysis of strain softening constitutive model* - Int. Jour. Solids Structures - Vol. 23 - Nro. 6 - pp. 751, 767 - 1987.
- [53] - Frantziskonis G., Desai G. S. and Somasundaram S.- *Constitutive Model for non-associative behavior* - Journal of Engineering Mechanics - Vol. 112 - Nro. 9 - ASCE - 1986.
- [54] - Glemberg R.- *Dynamic analysis of concrete structures* - Ph. D. Thesis - Department of structural mechanics, chalmers University of Technology - Goteborg, Sweden - 1984.
- [55] - Green G. E. and Bishop A. W.- *A Note on the Drained strength of sands and generalized strain conditions* - Geotechnique - Vol XIX - Nro. 1 - pp. 144, 149 - 1969.
- [56] - Han D. J. and Chen W. F.- *Strain space plasticity formulation for hardening-softening material with elastoplastic coupling* - Int. Jour. Solids Structures - Vol. 22 - Nro. 8 - pp. 935,950 - 1986.
- [57] - Hansen B.- *Line ruptures regarded as narrow ruptures zones - Basic equations based on kinematic considerations* - Proc. Brussels Conf. 58 on earth pressure problems - 1958.
- [58] - Hill R.- The mathematical theory of plasticity - Oxford University Press - London 1950.
- [59] - Hillerborg A.- *Comparison between the size effect law and the fictitious crack model* - Testimonianze e note scientifiche in onore del settantesimo compleanno de Sandro dei Poli - pp. 329, 334 - Milano - 1985.

- [60] - Hillerborg A., Modéer M. and Petersson P.- *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements* - Cement and Concrete Research - Vol. 6 - Nro. 6 - pp. 773, 782 - 1976.
- [61] - Hillermeier B. and Hilsdorf H. K.- *Fracture mechanics studies of concrete compounds* - Cement Concrete Research - Vol. 7 - pp. 523, 536 - 1977.
- [62] - Hinton E. and Owen D. R. J.- *An introduction to finite element computations* - Pineridge Press Limited - Swansea U.K. - 1979.
- [63] - Hinton E. and Owen D. R. J.- *Finite elements in plasticity* - Pineridge Press Limited - Swansea U.K. - 1980.
- [64] - Hinton E. and Rahman A.- *Finite element model for the analysis of reinforced concrete structures* - Aplicaciones del método de los elementos finitos en ingeniería - Eds. Oñate E., Alonso E., Casteleiro M., - Apéndice - Barcelona 1982.
- [65] - Instrucción Española para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa y armado - (EH-82) - MOPU - 1982.
- [66] - Irons B.- *A frontal solution program for finite element analysis* - Int. Jour. for Num. Meth. in Engineering - Vol.2 - pp. 5, 32 - 1970.
- [67] - Jurina L. and Maier G.- *Inestability, ductility, and size effect in strain softening concrete*- Discussion [5] - Journal of The Engineering Mechanics Division - ASCE - 1977.
- [68] - Kleiber M.- *Influence of nucleation and growth of void limit load capacity of a thick cylinder* - Arch. Mech., 35, 2 - pp. 307, 312 - Warszawa, Poland - 1983.
- [69] - Kleiber M.- *On plastic localization and failure in plane strain and round void containing tensile bars* - Int. Jour. of Plasticity - Vol. 2 - pp. 205, 221 - 1986.
- [70] - Klisinski M. and Mroz Z.- *Description of inelastic deformation and degradation of concrete* - Internal report - Institute of fundamental technological research - Warszawa , Poland - 1987.
- [71] - Koiter W. T.- *General theorems for elastic-plastic solids* - Progress in Solid Mechanics - Vol.1 - pp. 165, 221 - North Holland Publishing Co. Amsterdam - 1960.
- [72] - Kotsovos M. D. and Newman J. B.- *Generalized stress-strain relations for concrete* - Jour. of Engineering Mechanics Division - Vol. 104 - Nro. EM4 - pp. 845, 856 - ASCE -

- 1978.
- [73] - Kupfer H. B. and Gerstle K. H.- *Behavior of concrete under biaxial stress* - Jour. Engineering Mechanics Division - Vol. 99 - pp. 852, 866 - ASCE - 1973.
 - [74] - Kupfer H. B., Hilsdorf H., and Rusch H.- *Behavior of concrete under biaxial stresses* - Journal ACI - Vol. 66 - Nro. 8 - 1969.
 - [75] - Lade P. V. and Duncan J. M.- *Elasto plastic stress-strain theory for cohesionless soil* - Journal of the Geotechnical Engineering Division - ASCE - Vol. 101 - Nro. GT10 - pp. 1037, 1053 - 1975.
 - [76] - Lade P. V. and Musante H. M.- *Three dimensional behavior of remolded clay* - Journal of the Geotechnical Engineering Division - ASCE - Vol. 104 - Nro. GT2 - pp. 193, 209 - 1978.
 - [77] - Lama R. D. and Vutukuri V. S.- *Mechanicals Properties of rocks* - Transtech publications - Vol. II
 - [78] - Lubliner J., Oller S., Oliver J. y Oñate E.- *A plastic damage model for non linear analysis of concrete* - Paper submitted for consideration for publication in: Int. Solids and Structures - 1988.-
 - [79] - Lubliner J.- *Thermomechanics of deformable bodies*- Edited by Department of Civil Engineering University of California, Berkeley - U.S.A. - 1985.
 - [80] - Ma S. Y. A. and May I. M.- *The Newton-Raphson method used in the non-linear analysis of concrete structures* - Computer and Structures - Vol. 24 - Nro. 2 - pp. 177, 185 - 1986.
 - [81] - Malvern L. E.- *Introduction to the mechanics of a continuous medium* - Printice Hall - U.S.A. - 1969.
 - [82] - Marques J. M. M. C.- *Non linear finite element solutions with quasi-and secant-Newton methods* - 3rd. Int. Conf. on Num. Methods for non linear problems - Dubrovnik - Ed. by Owen D. R. J., Taylor C., Hinton E., Damjanic F. - Pineridge Press - 1986.
 - [83] - Matthies H. and Strang G.- *The solution of non-linear finite element equations* - Int. Jour. for Num. Meth. in Engineering - Vol. 14 - pp. 1613, 1626 - 1979.
 - [84] - Mier J. G. M. van- *Examples of non-linear analysis of reinforced concrete structures with DIANA* - Heron - Vol. 32 - Nro. 3 - Delft, Netherlands - 1987.

- [85] - Mindess S.- *Fracture toughness testing of cement and concrete - Fracture mechanics of concrete: Material characterization and testing* - Ed. by A. Carpinteri and A. Ingraffea - pp. 67, 110 - Martinus Nijhoff Publishers - 1984.
- [86] - Mindess S. and Diamond S.- *A preliminary SEM study of crack propagation in mortar* - Cement Concr. Research - Nro. 10 - 1980.
- [87] - Murray D. W., Chitnuyanondh L., Khazal Y. and Chung Wong - *Concrete Plasticity theory of biaxial stress analysis*- Jour. Eng. Mechanics Division - ASCE - Vol. 105 - Nro. EM6 - pp. 989, 1106 - 1979.
- [88] - Nayak G., and Zienkiewicz O.- *Elasto-plastic Stress Analysis. a Generalization for Various constitutive Relations , Including Strain softening* - Int. Jour. for Num. Meth. Eng. - Vol. 5 - pp. 113, 135 - 1972.
- [89] - Needleman A. and Tvergaard V.- *Finite element analysis of localization in plasticity* - From: "Finite elements special problems in solid mechanics"- Vol. 5 - Chap. 3 - pp. 94, 267 - Ed. by Oden J. T., and Carey F. - 1985.
- [90] - Ngo D. and Scordelis A.- *Finite element analysis of reinforced concrete beams*- Journal of A.C.I. - Vol. 64 - Nro. 3 - 1967.
- [91] - Nilson A.- *Non linear analysis of reinforced concrete by finite element method* - Journal A.C.I.- Vol. 65 - Nro. 9 - 1968.
- [92] - Nilsson L. and Oldenburg M.- *Non linear wave propagation in plastic fracturing materials* - A Constitutive Modelling and Finite Element Analysis - IUTAM Symposium - Ed. U. Nigul - (1982) - J. Engeibrecht - Springer Berlin - Heidelberg - 1983.
- [93] - Oliver J. y Fernandez Roure J. R.- *Análisis no lineal de estructuras bidimensionales de hormigón por el método de los elementos finitos* - II Symposium de Aplicaciones del Metodo de los Elementos Finitos en Ingeniería - Eds. Oñate E., Suarez B., Miquel Canet J.- Vol. 1 - pp. 447, 463 - Barcelona 1986.
- [94] - Oliver J. y Fernandez Roure J. R.- *Consideraciones sobre el modelo numérico de distribución para el análisis de la fisuración de hormigón*- Revista Internacional de Metodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería - Vol. 3,4 - pp. 343,368 - 1987.
- [95] - Oller S., Oliver J. y Oñate E.- *Simulación numérica de procesos no lineales de fractura y aplastamiento en hormigón, mediante un modelo plástico*- I Jornadas Ibéricas de fractura - Ed. Farias L. - pp. 223-1, 223-12 - Braga, Portugal - 1987.

- [96] - Oller S., Oñate E. y Oliver J.- *Un modelo de fisuración del hormigón basado en la teoría incremental de la plasticidad*- II Simposium de Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería - Eds. Oñate E., Suarez B., Miquel Canet J.- Vol. 1 - pp. 393, 416 - Barcelona 1986.
- [97] - Oñate E., Oller S., Oliver J. and Lubliner J.- *A constitutive model for cracking of concrete based on de incremental theory of plasticity* - Proceedings of the International Conference of Computational Plasticity - Edited by D. R. J. Owen, E. Hinton, E. Oñate - Part 2 - pp. 1311, 1327 - Pineridge press - Barcelona - 1987 .
- [98] - Oñate E., Oller S., Oliver J. and Lubliner J.- *A fully elastoplastic constitutive model for non linear analysis of concrete* - Int. Conf. on Num. Methods in Ingug., Theory and Applications - NUMETA - Eds. Pande G. and Middleton J. - Martinus Nijhoff Publishers - Swansea U.K. - 1987.
- [99] - Oñate E., Oller S., Oliver J. and Lubliner J.- *A constitutive model of concrete based on the incremental theory of plasticity* - Engineering Computations - Vol. 5, 2 - 1988.
- [100] - Ortiz M., Leroy Y. and Needleman- *A finite element method for localized failure analysis*- Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering - Vol. 61 - pp. 189, 214 - North Holland - 1987.
- [101] - Ottosen N. S. and Dahlblom O.- *Smearred crack analysis using a non linear fracture model for concrete*- 3rd. Int. Conf. on Num. Methods for non linear problems - Dubrovnik - Ed. by Owen D. R. J., Taylor C., Hinton E., Danjanic F. - Pineridge Press - 1986.
- [102] - Ottosen N. S.- *A failure criterion for concrete*- Journal of Engineering Mechanics Division - ASCE - Vol. 103 - Nro. EM4 - pp. 527, 535 - 1977.
- [103] - Ottosen N. S.- *Theoretical framework for modelling the behavior of frictional material*- Int. J. Solis Structures - Vol. 22 - Nro. 11 - pp. 1325, 1342 - 1986.
- [104] - Ottosen N. S.- *Thermodynamic consequences of strain softening in tension* - Journal of Engineering Mechanics Division - ASCE - Vol. 112 - pp. 1152, 1164 - 1986.
- [105] - Owen D. and Gomez C.- *Some recent developments in solution techniques for non linear finite element problems* - Aplicaciones del Método de los elementos finitos en ingeniería - Eds: E. Oñate, E. Alonso, M. Casteleiro - Barcelona - 1982.
- [106] - Padovan J. and Moscarello R.- *Locally bound constrained Newton-Raphson solution algorithms* - Computer and structures - Nro. 2 - pp. 1181, 1197 - 1986.

- [107] - Page A. W.- *Finite Element model for masonry* - Journal of the structural division - ASCE - Vol. 104 - Nro. ST8 - 1978.
- [108] - Pande G. N. and Pietruszczak S.- *Simetric tangencial stiffness formulation for non-associated plasticity* - Computers and Geotechnics - Nro. 2 - pp. 89, 99 - 1986.
- [109] - Papadrakakis M. and Ghionis P.- *Conjugate gradient algorithms in non-linear structural analysis problems* - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering - 59 - pp. 11, 27 - 1986.
- [110] - Petersson P. E.- *Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar material* - Division of Building Material - University of Lund : Institute of Technology - Report TVBM-1006
- [111] - Pietruszczak S. and Mroz Z.- *Finite Element Analysis of deformation of strain softening material*- International Journal for Numerical Methods in Engineering - Vol. 17 - pp. 327, 334 - 1981.
- [112] - Planas J., Elices M.- *Fractura del hormigón en régimen lineal: intentos para medir la energía de fractura* Gf.- Informes de la Construcción - Vol. 37 - Nro. 372 - 1985.
- [113] - Podgorski J.- *General failure criterion for isotropic media* - Journal of Engineering Mechanics - Vol. 111 - Nro. 2 - 1985.
- [114] - Radenkovic D.- *Theoremes limites pour un materau de Coulomb a dilatation non standardisee* - C.R.Ac.Sc. 252 - Paris - 1961.
- [115] - Rashid Y. R.- *Analysis of prestressed concrete pressure vessels* - Nuclear Engineering and Design - Vol. 7 - Nro. 4 - 1968.
- [116] - Read H. E. and Hegemier G. A.- *Strain softening of rock, soil and concrete* - A review article, Mechanics of Materials - Nro. 3 - pp. 271, 294 - 1984.
- [117] - Reinhardt H. W.- *Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete*- Heron - Vol. 29 - Nro. 2 - Delft, Netherlands - 1984.
- [118] - Rice J.- *The localization of plastic deformation* - Theoretical and Applied Mechanics - pp. 207, 220 - Ed. W. T. Koiter - North Holland Publishing Co. - 1976.
- [119] - Riggs R. and Powell G.- *Rough crack model for analysis of concrete* - Journal of Engineering Mechanics - Vol. 112 - Nro. 5 - pp.448, 464 - ASCE -1986.

- [120] - **Riks E.**- *The application of Newton's method to the problem of elastic stability* - Jour. Appl. Mechanics - Vol. 39 - pp. 1060, 1066 -1972.
- [121] - **Ronca P.**- *Simulazione numerica di prove a trazione per elementi bidimensionali in calcestruzzo* - Testimonianze e note scientifiche in onore del settantesimo compleanno de Sandro dei Poli - pp.507, 519 - Milano - 1985.
- [122] - **Rots J. G. and Borst R. De.**- *Analysis of mixed-mode fracture in concrete* - Paper submitted for consideration for publication in : "Journal of Engineering Mechanics" - ASCE - 1986.
- [123] - **Rots J. G., Nauta P., Kusters G. and Blaauwendraand J.**- *Smearred crack approach and fracture localization in concrete* - Heron - Vol. 30 - Delft, Netherlands - 1985.
- [124] - **Rots J. G.**- *Strain softening analysis of concrete fracture specimens* - Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete - p. 133 - Ed. by F. H. Wittman - Amsterdam - 1986.
- [125] - **Rowe P. W.**- *Theoretical meaning and observed values of deformation parameters for soil* - Proc. Rascoe Memorial Symp. on Stress-Strain Behavior of Soils - Cambridge - 1972.
- [126] - **Sacchi Landreani G. e Riccioni R.**- *Compotamento delle strutture Murarie* - Clup - Milano - 1982.
- [127] - **Saenz L. P.**- *Equation for the stress-strain curve of concrete* - Discussion by Desayi and Krishnan - Am. Concr. Inst.- 61 - pp. 1229, 1235 - 1964.
- [128] - **Schweizerhof K. H. and Wriggers P.**- *Consistent linearization for Path following methods in non-linear F. E. analysis* - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering - 59 - pp. 261, 279 - 1986.
- [129] - **Sih G.**- *Mechanics of material damage in Concrete* - *Fracture Mechanics of Concrete: Material characterization and testing* - Ed. by A. Carpinteri and A. Ingraffea - pp. 1, 29 - Martinus Nijhoff Publishers - 1984.
- [130] - **Simo J. C. and Ju J. M.**- *On continuum damage - elastoplasticity at finite strains: a computational framework* - Paper submitted for consideration for publication in: "Computational Mechanics" - 1987.
- [131] - **Simo J. C. and Ju J. M.**- *Strain and stress based continuum damage model - Part I : Formulation* - Int. Solids and Structures - Vol. 23, Nro. 7, pp. 281,841 - 1987.

- [132] - Simo J. C. and Taylor T. L.- *A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity* - Int. Jour. for Numerical Methods in Engineering - Vol. 22 - pp. 649, 670 - 1986.
- [133] - Slate F. and Hover K.- *Microcracking concrete - Fracture mechanics of concrete: Material characterization and testing* - Ed. by A. Carpinteri and A. Ingraffea - pp. 137, 159 - Martinus Nijhoff Publishers - 1984.
- [134] - State of the art report on: Finite Element Analysis of Reinforced concrete - ASCE - 1982.
- [135] - Suidan M. and Schnobrich W.- *Finite element analysis of reinforced concrete* - Journal of the structural division - ASCE - Vol. 99 - Nro. ST10 - pp. 2109, 2122 - 1973.
- [136] - Tasuji E., Slate F. and Nilson A.- *Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading*- Journal ACI - Vol 75 - Nro. 7 - pp. 306, 312 - 1978.
- [137] - Taylor L. and Chen E.- *Microcrack-induced damage accumulation in brittle rock under dynamic loading* - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering - 55 - North Holland - 1986.
- [138] - Valanis K. Z.- *A theory of viscoplasticity without a yield surface -Part I, General theory* - Archives of Mechanics - Vol. 23 - Nro. 4 - pp. 517, 534 -1971.
- [139] - Valanis K. Z.- *A theory of viscoplasticity without a yield surface -Part II, Applications to mechanical behavior of metals*- Archives of Mechanics - Vol. 23 - Nro. 4 - pp. 535, 551 -1971.
- [140] - Valanis K. Z.- *On the uniqueness of solution of the initial value problem in softening materials* - Journal of Applied Mechanics - Vol. 52 - pp. 649, 653 - 1985.
- [141] - Vermeer P. A.- *A modified initial strain method for plasticity problems* - third Int. Conference on Numerical Methods in Geomechanics - Aachen - pp. 377, 387 - 1979.
- [142] - Willam K. and Sobh N.- *Bifurcation analysis of tangential material operators* - Int. Conf. on Num. Methods in Ingng., Theory and Applications - NUMETA - Eds. Pande G. and Middleton J. - Martinus Nijhoff Publishers - Swansea U.K. - 1987.
- [143] - Zienkiewicz O. C., Vallippan S. and King P.- *Elasto plastic solutions of engineering problems "initial-stress", finite element approach* - Int. Jour. for Num. Meth. in Engineering - Vol. 1 - pp. 75, 100 - 1969.

-
- [144] - Zienkiewicz O. C.- El método de los elementos finitos- Edit. Reverté- Barcelona - 1982.
- [145] - Washizu K.- Variational methods in elasticity and plasticity- Pergamon Press - 1974.
- [146] - Zienkiewicz O. C., Humpheson C. and Lewis R. W.- *Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics*- Géotechnique - Vol. 25 , No. 4 - pp. 671, 689 - 1974.
- [147] - Chilov G.- Analyse mathématique- MIR Moscu - 1975.
- [148] - Oliver J.- *A consistent characteristic length for smeared cracking models*- Paper submitted for consideration for publication in: Applied Numerical Methods - 1988.-
- [149] - Oliver J., Oller S., Oñate E.- *Modelos elasto-plásticos para la simulación numérica de procesos de fractura* - V Encuentro del Grupo Español de Fractura - Barcelona 1988.-

- PARTE AUXILIAR -

APENDICE I

FUNDAMENTOS BASICOS DE LOS MODELOS ELASTO-PLASTICOS

Ap-I.1.- TEORIA DE LA PLASTICIDAD CLASICA:

“UN MODELO CONSTITUTIVO ELASTO-PLASTICO” GENERICO — INTRODUCCION

Se denomina **modelo constitutivo de un material**, a una *formulación matemático- numérica capaz de describir su comportamiento mecánico a un nivel macroscópico* [81].

Es muy complejo emular el comportamiento de un **sólido real**, dentro de su *rango total de aplicación*. Esto hace que sea muy costoso (casi imposible) obtener una perfecta simulación *matemático-numérica* del mismo. Además, en la naturaleza no hay dos sólidos con idénticas características mecánicas; sino solo similares. Por todo esto, los *modelos constitutivos* proveen una formulación teórica que *solo pretende aproximar*, tanto como sea posible, el comportamiento de los **sólidos ideales**. Estos representan a los **sólidos reales**, mediante hipótesis que simplifican su respuesta característica. Así, cada **sólido real** será estudiado por medio de un **sólido ideal**, que a su vez será simulado mediante un **modelo constitutivo numérico**. Algunos materiales tienen *comportamiento más claro y con menos dispersión que otros*; así los **materiales metálicos** han sido mejor descritos por estos *modelos matemáticos* que los **geomateriales** en general (incluyendo en este grupo los **hormigones pétreos**). En cualquier caso, los *modelos constitutivos* solo simulan *materiales ideales*, y por lo tanto deberán ser capaces de emular la respuesta de los mismos, *descomponiendo su comportamiento en dos procesos mecánicos* con características y rangos muy diversos, uno *elástico (lineal o no lineal)*, y el otro *inelástico*. A continuación se presentan brevemente ambos conceptos.

Ap-I.2.- SOLIDO ELASTICO IDEAL o SOLIDO HOOKEANO

En mayor o menor medida, *todos los sólidos* tienen un *período durante el proceso de deformación*, en el que su *comportamiento es elástico*, donde la *tensión* en un punto depende solamente del *valor actual* de su *deformación* y no de la historia seguida por ésta durante el proceso de aplicación de cargas. El **sólido elástico ideal** se caracteriza por tener deformaciones totalmente *recuperables* y tensiones obtenidas según el modelo constitutivo más simple, “**la ley de Hooke**”, que para procesos *uniaxiales lineales*, caso trivial, toma la siguiente forma:

$$\sigma = E_S \epsilon \quad , \quad (Ap-I,1)$$

que expresa una relación *secante total* entre la *tensión* σ y la *deformación* ϵ , mediante el *módulo de elasticidad secante* E_S o *módulo de Young*. Esta ecuación constitutiva, para el caso de *corte puro* y simple, resulta:

$$\tau = G_S \gamma \quad , \quad (Ap-1.2)$$

siendo G_S el módulo de corte secante, τ la tensión de corte, y γ la distorsión en un punto del sólido.

La teoría de la elasticidad clásica adopta como *modelo constitutivo*, para procesos multiaxiales, la ley de Hooke en su versión generalizada; expresando cada componente del tensor de tensiones como una combinación lineal de las componentes del tensor de deformaciones. Esto es, en notación indicial:

$$\sigma_{ij} = [D_{ijkl}]_S \epsilon_{kl} \quad , \quad (Ap-1.3,a)$$

o en notación tensorial:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}}_S \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \quad (Ap-1.3,b)$$

Siendo σ_{ij} y ϵ_{ij} los tensores de segundo orden de tensión y deformación respectivamente (anexo-E); y $[D_{ijkl}]_S$ el tensor de cuarto orden de rigidez secante del material^[81]. Las ec.(Ap-1.3) representan nueve ecuaciones que contienen un total de ochenta y un coeficientes del tensor de rigidez del material, siendo *inter-dependientes* entre sí en ciertos casos particulares. Así, cuando los tensores σ_{ij} y ϵ_{ij} son simétricos, se reduce a treinta y seis el número de componentes independientes del tensor de rigidez secante del material $[D_{ijkl}]_S$, llegando a depender solo de dos parámetros independientes, el módulo de Young E_S y el coeficiente de Poisson ν_S , para el caso más simple de materiales isótropos. En esta situación particular, se presenta una total independencia entre las componentes extensionales del tensor de tensiones y las distorsionales del tensor de deformaciones, y viceversa; quedando expresada las ecuaciones (Ap-1.3) como:

$$\sigma_{ij} = K_S^D \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G_S^D \epsilon_{ij} = p \delta_{ij} + s_{ij} \quad (Ap-1.4,a)$$

o bien:

$$\underline{\underline{\sigma}} = 3K_S^D \underline{\underline{\epsilon}}_{oct} + 2G_S^D (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}_{oct}) = \underline{\underline{\sigma}}_{oct} + \underline{\underline{s}} \quad (Ap-1.4,b)$$

siendo :

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{oct} = \begin{bmatrix} \sigma_{oct} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{oct} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{oct} \end{bmatrix} ; \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} ;$$

$$\underline{\epsilon}_{oct} = \begin{bmatrix} \epsilon_{oct} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{oct} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{oct} \end{bmatrix} ; \underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \epsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} ;$$

$$p = K_S^D \epsilon_{kk} \delta_{ij} = K_S^D \epsilon_v = K_S^D (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) ;$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{oct} \delta_{ij} = 2G_S^D \epsilon_{ij} ;$$

$$\epsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} = \epsilon_{ij} - \epsilon_{oct} \delta_{ij} ;$$

$$\delta_{ij} : \text{función de Kronecker} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j ; \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$$K_S^D : \text{módulo extensional secante o módulo volumétrico} = \frac{E_S}{3(1-2\nu_S)}$$

$$G_S^D : \text{módulo de corte secante o módulo distorsional} = \frac{E_S}{2(1+\nu_S)}$$

Las ecs.(Ap-I.4) describen bastante bien el comportamiento de algunos materiales cuando éstos están sometidos a *pequeñas deformaciones* [61]. Estas ecuaciones, también pueden escribirse en forma *matricial* del siguiente modo:

$$\underline{\sigma} = \underline{D}_S \cdot \underline{\epsilon} \tag{Ap-I.5}$$

siendo $\underline{\sigma}$ y $\underline{\epsilon}$ matrices de una columna, *vectores* *, que solo contienen los coeficientes de la parte simétrica de los respectivos tensores de *tensión* σ_{ij} y *deformación* ϵ_{ij} , (*anexo-B*):

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} ; \underline{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2 \epsilon_{12} \\ 2 \epsilon_{23} \\ 2 \epsilon_{31} \end{pmatrix} ;$$

* Nota: En álgebra matricial se denomina vector a un conjunto de elementos ordenados en forma de matriz columna. Se utiliza esta notación, que para este caso particular de aplicación carece de sentido físico, como una forma algorítmica que simplifica el tratamiento de los problemas numéricos.

y D_S la matriz de rigidez secante del material, que contiene los treinta y seis coeficientes del tensor de rigidez secante $[D_{ijkl}]_S$. Esto es :

$$D_S = \frac{E_S}{(1 + \nu_S)(1 - 2\nu_S)} \begin{bmatrix} 1 - \nu_S & \nu_S & \nu_S & 0 & 0 & 0 \\ & 1 - \nu_S & \nu_S & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 - \nu_S & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1 - 2\nu_S}{2} & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & \frac{1 - 2\nu_S}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1 - 2\nu_S}{2} \end{bmatrix}$$

o escrita en función de los módulos K_S^D y G_S^D , queda del siguiente modo:

$$D_S = \begin{bmatrix} D_S^I & D_S^{II} & D_S^{III} & 0 & 0 & 0 \\ & D_S^I & D_S^{II} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_S^I & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_S^D & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & & G_S^D & 0 \\ & & & & & G_S^D \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} D_S^I &= K_S^D + \frac{4}{3}G_S^D \\ D_S^{II} &= K_S^D - \frac{2}{3}G_S^D \end{aligned}$$

esta matriz de rigidez secante se define para los casos particulares de: *tensión plana*, *deformación plana*, y *simetría axial*, como:

- **Tensión plana:** $\sigma_{33} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$ y $\epsilon_{33} \neq 0$, se tiene:

$$D_S = \frac{E_S}{(1 - \nu_S^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_S & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sim.} & & \frac{1 - \nu_S}{2} \end{bmatrix}$$

- **Deformación plana:** $\epsilon_{33} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0$ y $\sigma_{33} \neq 0$, se tiene:

$$D_S = \frac{E_S}{(1 + \nu_S)(1 - 2\nu_S)} \begin{bmatrix} 1 - \nu_S & \nu_S & 0 \\ & 1 - \nu_S & 0 \\ \text{sim.} & & \frac{1 - 2\nu_S}{2} \end{bmatrix}$$

- **Simetría axial:** $\tau_{3\theta} = \tau_{\theta 3} = \gamma_{3\theta} = \gamma_{\theta 3} = 0$ se tiene:

$$D_S = \frac{E_S}{(1 + \nu_S)(1 - 2\nu_S)} \begin{bmatrix} 1 - \nu_S & \nu_S & \nu_S & 0 \\ & 1 - \nu_S & \nu_S & 0 \\ \text{sim.} & & 1 - \nu_S & 0 \\ & & & \frac{1 - 2\nu_S}{2} \end{bmatrix}$$

La ecuación constitutiva elástica lineal ec.(Ap-1.4) puede ser generalizada para procesos elásticos no lineales ^[29], independientes de la historia de deformaciones, si se define el módulo de rigidez extensional K_S^D y el módulo de rigidez cortante G_S^D como funciones del primer invariante I_1 del tensor de tensiones σ_{ij} y del segundo invariante J_2 del tensor desviador de tensiones s_{ij} , respectivamente (anexo-E). Esto es:

$$\begin{aligned} K_S^D &= K_S^D(I_1) = K_S^D(\sigma_{oct}) \\ G_S^D &= G_S^D(J_2) = G_S^D(\tau_{oct}) \end{aligned} \quad (\text{Ap-1.6,a})$$

o bien, a partir de la ec.(Ap-1.5), definiendo :

$$\begin{aligned} E_S &= \frac{9K_S^D(I_1) G_S^D(J_2)}{3K_S^D(I_1) + G_S^D(J_2)} \\ \nu_S &= \frac{3K_S^D(I_1) - G_S^D(J_2)}{2[3K_S^D(I_1) + G_S^D(J_2)]} \end{aligned} \quad (\text{Ap-1.6,b})$$

Para mayores detalles sobre este tema, se recomienda consultar un tratado de *mecánica de los medios continuos* ^{[79] [81]}.

Ap-I.3.- SOLIDO INELÁSTICO IDEAL - TEORÍA DE LA PLASTICIDAD CON PEQUEÑAS DEFORMACIONES.

Ap-I.3.a.- Introducción

Las teorías inelásticas emulan el comportamiento de los sólidos cargados, dentro de un rango de aplicación en el que no es factible hacerlo mediante el uso de la *teoría de la elasticidad*. Estas formulaciones matemáticas se caracterizan por contemplar el fenómeno de *irreversibilidad de las deformaciones*, que induce a un comportamiento energético *no-conservativo* dependiente del camino recorrido. Existen diversos fenómenos físicos que hacen que el sólido tenga una respuesta inelástica ^{[79][81][144]}; en este trabajo solo se estudia una forma de inelasticidad conocida como "plasticidad" ^{[33][43][58][79][81]} o *fluencia instantánea*, y se describirán brevemente sus fundamentos mediante la homónima teoría matemática incremental. Esta se basa en la *mecánica de los sólidos continuos* e intenta emular el *comportamiento físico macroscópico* de los sólidos ideales a partir de los siguientes rasgos característicos, que definen dos estados de comportamiento mecánico:

- Un período inicial elástico, lineal o no lineal.
- Un comportamiento, denominado *elasto-plástico*, que sigue al período inicial, donde el campo de tensiones no crece en forma proporcional al campo de deformaciones, y donde estas deformaciones resultan de la adición de una parte recuperable (cuota

elástica) y otra parte *irrecuperable* (cuota plástica). Esta parte inelástica de la deformación se manifiesta al iniciar un *proceso de descarga*, que por hipótesis será siempre *elástico*.

El límite que marca la separación entre estos dos estados mecánicos se lo conoce como "límite de fluencia" para los *materiales metálicos*, y como "límite de discontinuidad" [33] [34] para los *materiales friccionales*, quedando definido, en cualquiera de los casos, a través de una *función en el espacio de tensiones* que recibe el nombre de *función de fluencia plástica* o *función de discontinuidad*, respectivamente.

La fig.(Ap-1.1), muestra en forma esquemática el *comportamiento uniaxial* de un punto correspondiente a un *material elasto-plástico ideal*. Al comenzar el proceso de carga presenta una *zona elástica lineal* que se mantiene hasta el punto *A* llamado *límite de proporcionalidad*. Seguidamente inicia un proceso *elástico no lineal* hasta alcanzar el punto *A'* llamado *límite de elasticidad*, a partir del cual comienza un proceso *elasto-plástico* caracterizado por un *decrecimiento sostenido del módulo de rigidez tangente* debido a la acción de los *mecanismos inelásticos irreversibles*. Si durante el comportamiento elasto-plástico del punto se inicia un *proceso de descarga*, se observa que solo se recupera la parte *elástica* ϵ^e del total de la *deformación* ϵ , sufrida durante el proceso de carga inelástico, quedando otra parte remanente no recuperable que recibe el nombre de *deformación plástica* ϵ^p .

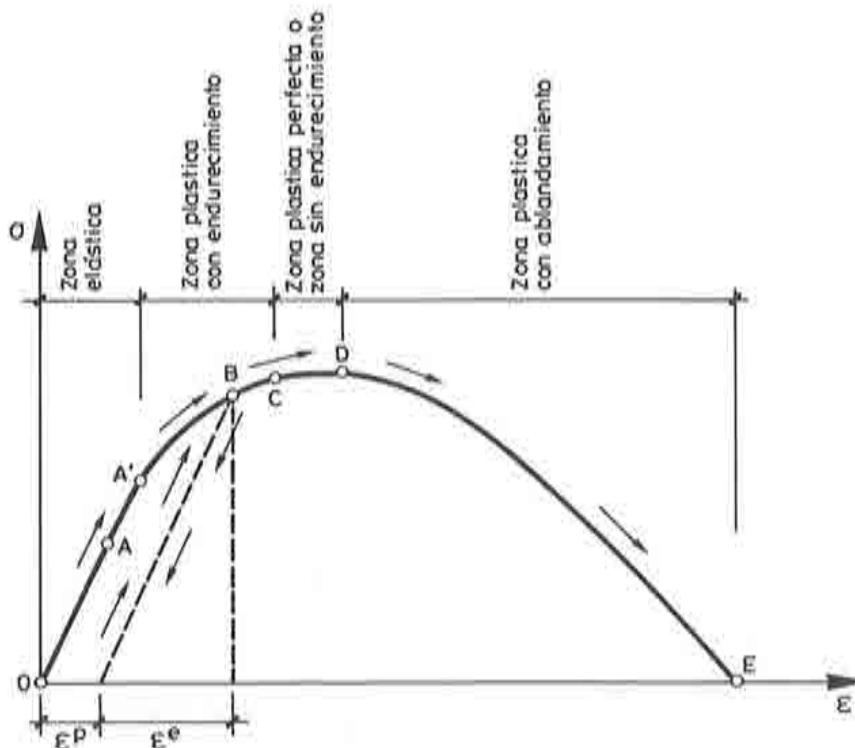


fig.(Ap-1.1): Comportamiento uniaxial esquemático de un "material elasto-plástico ideal"

Dentro del período elasto-plástico se pueden distinguir tres regiones fig.(Ap-I.1):

- Una donde hay crecimiento de la tensión, tramo (A'-C), que recibe el nombre de *zona elasto-plástica con endurecimiento*,
- Otra donde el punto que se analiza no experimenta cambio de tensión, tramo (C-D), y recibe el nombre de *zona elasto-plástica perfecta o de endurecimiento nulo*.
- Por último, una zona donde la tensión decrece bajo crecimiento sostenido de las deformación, tramo (D-E), *período elasto-plástico con ablandamiento*.

Este material elasto-plástico ideal permite representar, bastante bien, el comportamiento de distintos materiales reales (metálicos y no-metálicos), mediante una simple modificación de los límites definidos anteriormente.

De los conceptos detallados, se puede observar que hay dos grandes aspectos a tratar dentro de la teoría matemática de la plasticidad:

- El criterio de fluencia o de discontinuidad, que permite establecer, durante el proceso de carga, el comienzo del proceso inelástico y posterior evolución de las fronteras del dominio elástico dentro del espacio de tensiones.
- El comportamiento más allá del límite elástico, denominado *comportamiento elasto-plástico*, que queda definido a partir de la formulación de: (i) una *descomposición de deformaciones* en una parte elástica y otra plástica; (ii) una *regla de flujo* plástica; (iii) y unas variables internas * q (Se verá más adelante, que la deformación plástica puede también ser tratada como una *variable interna*, por lo tanto la *regla de flujo plástica* será entendida como su *regla de evolución explícita de esta variable interna*).

En los apartados subsiguientes se detallan estos dos conceptos básicos.

Ap-I.3.b.- Criterio de discontinuidad para materiales friccionales, o criterio de fluencia plástico para metales

El criterio de discontinuidad inicial, o *fluencia inicial* para materiales metálicos, establece un *límite de tensiones* para un punto del sólido, a partir del cual se inicia un proceso *tenso-deformacional* ($\sigma-\epsilon$) inelástico en dicho punto, caracterizado por el desarrollo de deformaciones *irrecuperables*. En un *proceso uniaxial de tensión*, se reconoce fácilmente este límite de

* Nota: Las variables Internas de un modelo elasto-plástico son escalares o tensores definidos internamente por el mismo proceso, en forma implícita, a partir de una regla de evolución explícita formulada según la siguiente ley general [70]:

$$\dot{q} = \dot{\lambda} \mathbf{H}(\sigma(t), q(t)) = \dot{\lambda} \begin{Bmatrix} H_c & (\sigma, q) \\ H_\phi & (\sigma, q) \\ H_\psi & (\sigma, q) \\ H_\kappa & (\sigma, q) \\ H_{\epsilon^p} & (\sigma, q) \end{Bmatrix}$$

discontinuidad inicial por tratarse de un *escalar* que adopta un valor equivalente a la *tensión en el límite elástico*; sin embargo para puntos sometidos a *estados multiaxiales de tensión* no resulta tan trivial la definición de ese límite. Para solucionar esta indefinición, se formula a partir de estudios experimentales una expresión matemática llamada *criterio límite de discontinuidad*, que entre otras variables, depende del estado tensional del punto. La "misión" de esta función es "traducir" el estado de tensión multiaxial a uno de característica uniaxial equivalente, comparable con los que resultan de estudios uniaxiales simples.

En forma general, se puede definir el *criterio límite de discontinuidad* como una *función escalar que depende del estado tensional actual del punto del sólido σ y de un grupo de variables internas q* . Esto es:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\sigma(t), q(t)) = 0 \quad (\text{Ap-1.7})$$

siendo:

$\sigma(t)$: tensor de tensiones en el estado actual;

$q(t) = \{ \kappa(t), \eta(t), \epsilon^p(t) \}^T$: vector de variables internas en el estado actual

$\kappa(t)$: variable de endurecimiento plástico isotrópico;

$\eta(t)$: variable de endurecimiento plástico cinemático;

$\epsilon^p(t)$: tensor de deformación plástica.

Se ha visto que la teoría incremental de la plasticidad solo admite *dos estados de comportamiento mecánico* (apart. Ap-I.3.a) para cada punto de la masa del *sólido ideal*:
 -El estado elástico ó -El estado elasto-plástico. La situación de un punto cualquiera, en un determinado instante t del proceso de carga cuasi-estático, queda inequívocamente definido a partir de la condición de consistencia plástica ^{[44][79]} fig.(Ap-1.2), o también llamada condición de consistencia de Prager (apart. Ap-I.3.d); esto es:

- El proceso de deformación de un punto es *elástico* *;

$$\text{si:} \quad \mathcal{F}(\sigma(t), q(t)) < 0 \quad \text{o bien:} \quad \dot{\mathcal{F}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} \dot{q} < 0 \quad (\text{descarga}) \quad (\text{Ap-1.8,a})$$

- El proceso de deformación de un punto es *elasto-plástico*:

* Nota: Para mayor claridad en las expresiones matemáticas, en adelante se sustituirá $\sigma(t)$ y $q(t)$ por σ y q , respectivamente. Entendiéndose, a pesar de la omisión, que son variables que dependen de un pseudo-tiempo t que define un instante en la evolución de un proceso elasto-plástico cuasi-estático.

$$\text{si : } \mathcal{F}(\sigma(t), q(t)) = 0 \quad \text{y : } \dot{\mathcal{F}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} \dot{q} = 0 \quad (\text{carga}) \quad (\text{Ap-1.8,b})$$

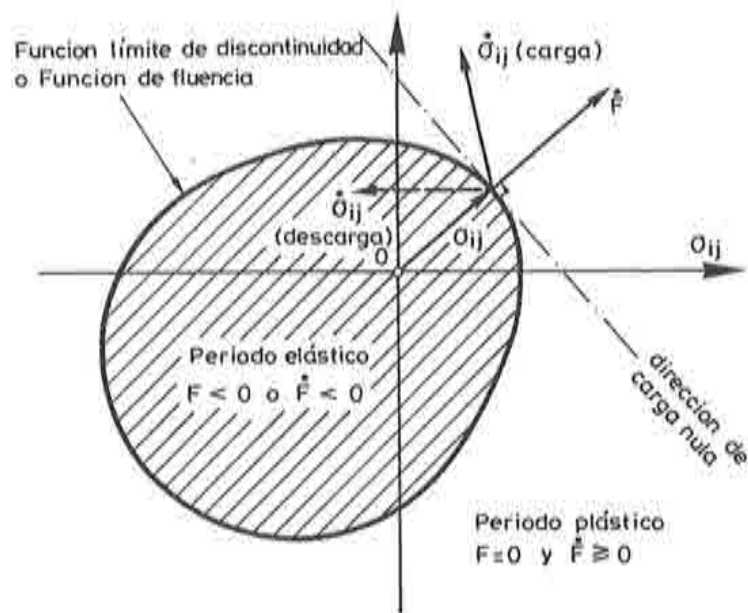


fig.(Ap-1.2): Representación genérica de la "condición general de consistencia plástica" de Prager.

Debido a que en *materiales isótropos ideales*, el tensor de tensiones σ es simétrico, se puede formular un *criterio límite de discontinuidad inicial simplificado*. De esta manera la función (Ap-1.7) pasa a *representar, en el espacio de tensiones principales, una superficie simétrica e independiente del sistema inercial de referencia del sólido*, transformando al modelo elasto-plástico en una *ley constitutiva isótropa*. (sobre la conveniencia del uso de formulaciones isótropas para el hormigón, consultar la referencia [29]).

Estudios experimentales realizados por Bridgeman [81], prueban que la influencia de la *presión hidrostática* sobre la *deformación plástica* es despreciable en *sólidos no porosos* (materiales metálicos); y también muestra que esta deformación plástica depende fundamentalmente de la *tensión desviadora*. Esto asegura que la *deformación volumétrica será siempre elástica, (sólido incompresible)* [79]. Para este caso particular, de material *metálico e isótropo*, el *criterio de fluencia plástico ec.(Ap-1.7)* se reduce a :

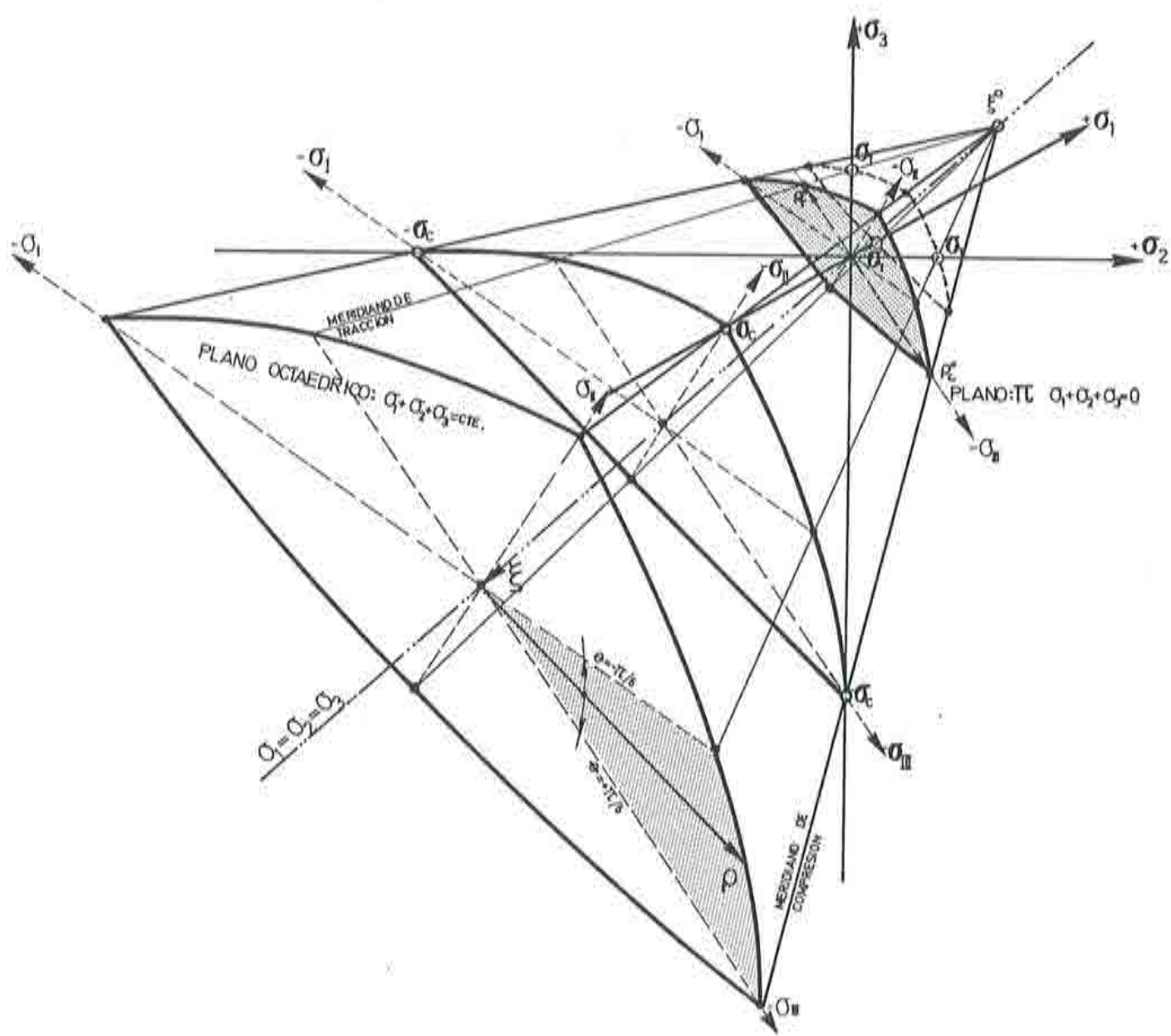


fig.(Ap-1.3,a): Representación de un criterio de fluencia genérico en el espacio de tensiones principales, o espacio de Westergard.

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(J_2, J_3, \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{Ap-I.9})$$

siendo J_2 y J_3 el *segundo* y *tercer invariante del tensor desviador de tensiones*, respectivamente (*anexo-F*).

Para los *materiales friccionales*, es necesario tener en cuenta que las *fuerzas de rozamiento entre partículas* aumentan con la componente normal del tensor de tensiones σ_{ii} (ver también criterio de Mohr-Coulomb *apart. Ap-I.3.f*). Por ello la *resistencia* de estos materiales crece con el aumento de las fuerzas de rozamiento interno, que a su vez vienen influenciadas por la *tensión esférica o hidrostática* (primer invariante del tensor de tensiones I_1), que actúa en la masa del sólido [35]. Tanto el *hormigón* como los *geomateriales* presentan esta característica; por lo tanto deben ser tratados a través de un *criterio límite de discontinuidad* que tenga en cuenta la influencia de I_1 . Esto es :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(I_1, J_2, J_3, \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{Ap-I.10})$$

La representación general de las funciones (Ap-I.9) y (Ap-I.10), se realiza mediante una superficie en el *espacio de tensiones*, donde las direcciones principales de éstas, configuran los ejes de referencia. A este espacio se lo denomina *espacio de tensiones de High-Westergard* [44][113]; fig.(Ap-I.3). Otra forma de describir un *criterio de fluencia*, es mediante una descomposición en planos fig.(Ap-I.3). Esto es:

- **Planos octaédricos:** Estos planos cortan en forma ortogonal al *espacio diagonal de tensiones* (recta definida por: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) y por lo tanto forman igual ángulo con los tres *ejes principales de tensión* ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) que definen el *octante de compresión o tracción total*. En estos planos, como es obvio, el *primer invariante del tensor de tensiones* se mantiene constante $I_1 = cte.$; por lo tanto, a través de este invariante se puede conocer su *posición* a partir del origen de tensiones: $\xi = \sqrt{3}\sigma_{oct} = \sqrt{3}(I_1/3) = I_1/\sqrt{3}$. Su forma depende de otros dos invariantes: del *radio octaédrico* $\rho = \sqrt{3}\tau_{oct} = \sqrt{2J_2}$; y del *ángulo de similaridad de Lode* $\theta = \frac{1}{3}\arcsin[(3\sqrt{3} J_3)/(2(J_2)^{3/2})]$. Se denomina plano π al *plano octaédrico* que pasa por el origen del *espacio diagonal* $\xi = 0$. La intersección de estos planos con la superficie de fluencia, define curvas en el espacio de tensiones, que se denominan *funciones de fluencia según planos octaédricos*.
- **Planos meridianos de compresión máxima:** Estos planos son ortogonales a los *planos octaédricos*, y quedan inequívocamente definidos por la recta que describe el *espacio diagonal* ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), y por cada recta que describe el *radio octaédrico* ρ , cuando $\theta = +\frac{1}{6}\pi; +\frac{5}{6}\pi; +\frac{2}{6}\pi$. Estos planos cortan a los ejes de tensiones principales σ_i , en puntos de valor igual al de la tensión de compresión uniaxial σ_C . La intersección de estos planos con la superficie de fluencia, define curvas en el espacio de tensiones, que se denominan *funciones de fluencia según planos meridianos de compresión*.
- **Planos meridianos de tracción máxima:** Estos planos son ortogonales a los *planos octaédricos*, y quedan inequívocamente definidos por la recta que describe el *espacio diagonal* ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), y por cada recta que describe el *radio octaédrico* ρ , cuando

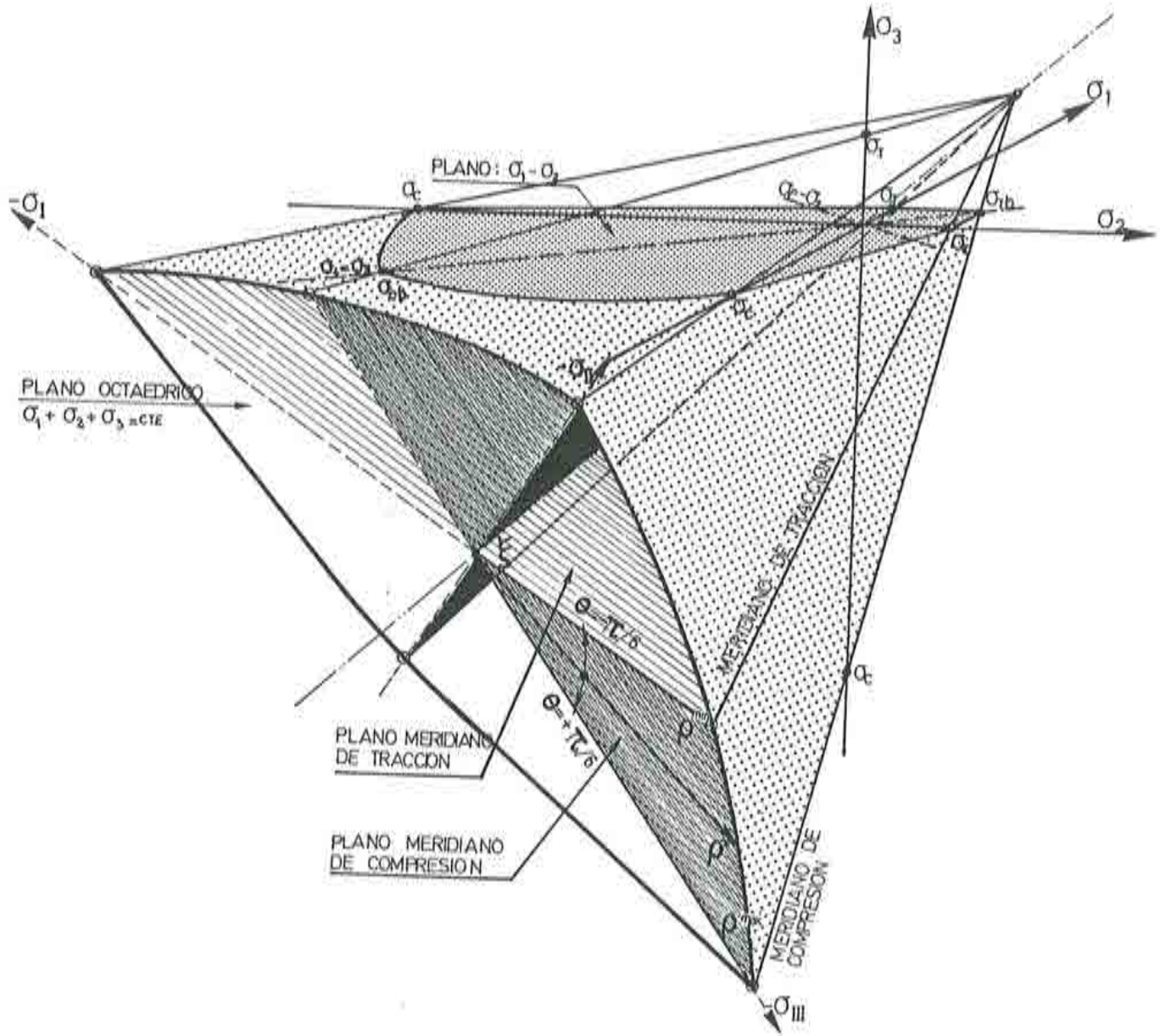
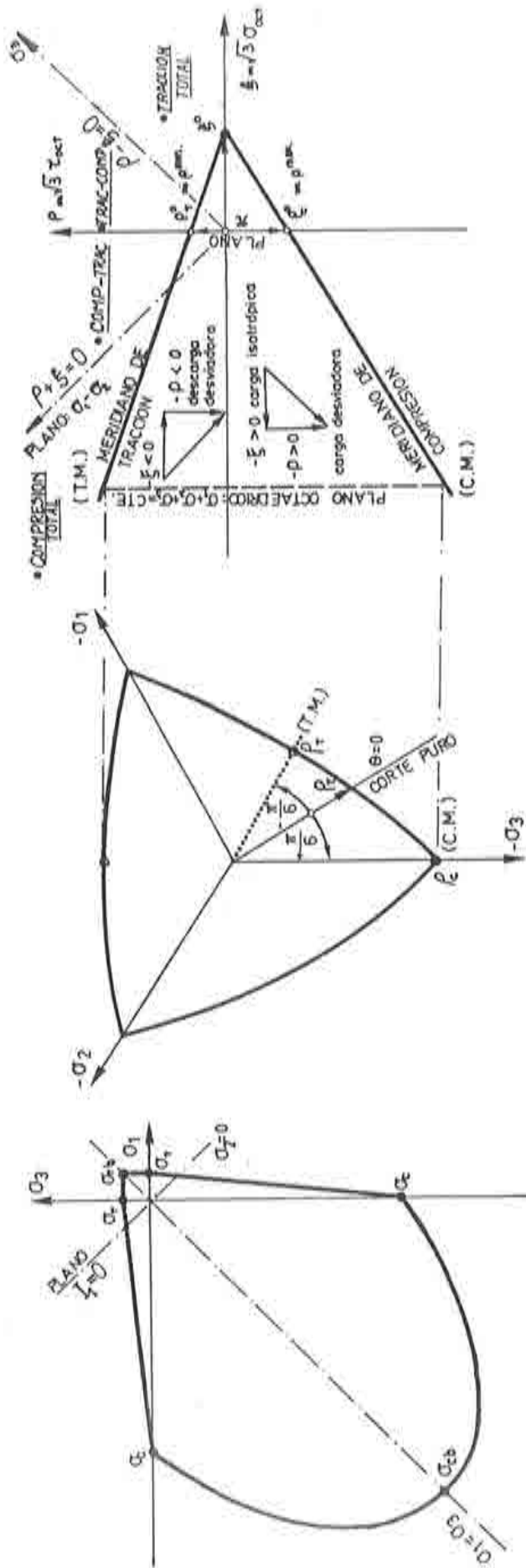


fig.(Ap-1.3,b): Relaciones geométricas entre planos octaédricos, planos meridianos, y plano principal ($\sigma_1 - \sigma_2$); de un criterio de fluencia genérico definido en el espacio de tensiones principales, o espacio de Westergard.



PLANO: $\sigma_1 - \sigma_3 ; \sigma_2 = 0$

PLANO OCTAEDRICO: $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = cte$.

PLANOS MERIDIANOS

fig.(Ap-I.3.c): Descomposición en planos de un criterio de fluencia genérico.

$\theta = -\frac{1}{6}\pi, -\frac{5}{6}\pi, -\frac{7}{6}\pi$. Dichos planos cortan a los ejes de tensiones principales σ_i , en puntos de valor igual al de la tensión de tracción uniaxial σ_T . La intersección de estos planos con la superficie de fluencia, define curvas en el espacio de tensiones, que se denominan *funciones de fluencia según planos meridianos de tracción*.

- **Planos principales:** Son aquellos que quedan definidos por la intersección de dos, de las tres direcciones de tensión principal. La intersección de estos planos con la superficie de fluencia, define curvas en el espacio de tensiones que se denominan *funciones de fluencia según planos de tensión principal*.

Ap-I.3.c.- Comportamiento más allá del límite de elasticidad - Comportamiento elasto-plástico

Teoría de Levy-Mises:

Una forma de modelar el comportamiento *elasto-plástico* de un punto del sólido es mediante la teoría de Levy-Mises. Esta admite, como *primera hipótesis*, que el *incremento temporal de deformación total es igual el incremento temporal de deformación plástica* durante el proceso elasto-plástico. Esta suposición considera que la deformación elástica es próxima a cero, o también que el módulo de Young se hace muy grande en este período ^{[44][58][81]}. Esto es :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^p \Rightarrow \dot{\epsilon}^e \simeq 0 \quad \text{o} \quad E_S \rightarrow \infty \quad (\text{Ap-I.11})$$

Esta teoría también supone, como *segunda hipótesis*, que el *sólido ideal* que se modela es *plásticamente incompresible* $\dot{\epsilon}_v^p = 0$; resultando de aquí y de la hipótesis anterior, que el *incremento temporal del tensor desviador de deformación plástica*, es igual al *incremento temporal del tensor de deformación plástica total*. Esto es :

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\bar{\epsilon}}^p - \dot{\epsilon}_{oct}^p \mathbf{1} = \dot{\bar{\epsilon}}^p - \dot{\bar{\epsilon}}_{oct}^p = \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (\text{Ap-I.12})$$

con:

$$3\dot{\epsilon}_{oct}^p = \dot{\epsilon}_v^p = 0$$

$$\mathbf{1} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^T \quad .$$

resultando de las ec.(Ap-I.11) y (Ap-I.12), para este caso particular:

$$\dot{\bar{\epsilon}} \equiv \dot{\bar{\epsilon}} = \dot{\bar{\epsilon}}^p \equiv \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (\text{Ap-I.13})$$

de esta última expresión se deduce que el sólido ideal de Levy-Mises tiene un *comportamiento elasto-plástico no influenciado por la presión hidrostática* (no depende de I_1).

Un sólido ideal con estas características, se identifica bastante bien con los materiales metálicos, y su comportamiento puede ser descrito por la relación tensión-deformación de Levy-Mises. Esta propone que *los ejes principales de deformación plástica coincidan con los ejes*

principales de tensión, lo que conduce a una proporción constante entre cada componente del tensor desviador de tensiones s_{ij} y el de deformaciones e_{ij} . Esta nueva hipótesis se conoce como regla de flujo asociada al criterio de fluencia de Von Mises, (apart. Ap-I.3.f). Esto es:

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\lambda} \mathbf{s} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{e}} = \dot{\lambda} \mathbf{s} \quad (\text{Ap-I.14})$$

siendo:

- $\dot{\mathbf{e}}$: incremento temporal del tensor de deformaciones ;
- $\dot{\mathbf{e}}$: incremento temporal del tensor desviador de deformaciones ;
- \mathbf{s} : tensor desviador de tensiones actualizado ;
- $\dot{\lambda}$: escalar no negativo que varía a lo largo de la historia de carga.
-parámetro de consistencia plástica.

Teoría de Prandtl-Reus

Otra forma de modelar el comportamiento elasto-plástico de un punto del sólido es a través de la teoría de Prandtl-Reus. Esta constituye una generalización de la teoría de Levy-Mises, a partir de la hipótesis que considera que el incremento temporal de deformación total $\dot{\mathbf{e}}$, resulta de la contribución de una cuota elástica $\dot{\mathbf{e}}^e$ más otra plástica $\dot{\mathbf{e}}^p$ (ecuación de Prandtl-Reus) [44][58][81]. Por esto, la ec.(Ap-I.11) quedará :

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{e}}^e + \dot{\mathbf{e}}^p \quad (\text{Ap-I.15})$$

donde el incremento temporal de deformación elástica $\dot{\mathbf{e}}^e$ será obtenido según las leyes de la teoría de la elasticidad (apart. Ap-I.2.); y el incremento temporal del tensor de deformación plástica $\dot{\mathbf{e}}^p$ se obtendrá como una proporción del tensor desviador de tensiones \mathbf{s} , en cada instante del proceso de cargas. Esta hipótesis se conoce como regla de flujo de Prandtl-Reus:

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{s} \quad (\text{Ap-I.16})$$

siendo:

- $\dot{\mathbf{e}}^p$: incremento temporal del tensor de deformaciones plásticas ;
- \mathbf{s} : tensor desviador de tensiones actualizado ;
- $\dot{\lambda}$: escalar no negativo que varía a lo largo de la historia de carga.
-parámetro de consistencia plástica.

para este material ideal, (sólido de Prandtl-Reus), el parámetro de consistencia plástica $\dot{\lambda}$ tiene un valor particular, que puede ser obtenido en forma inmediata a partir de definir la ec.(Ap-I.16)

en el espacio de tensiones y deformaciones principales:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_1^p &= \dot{\lambda} s_1 \\ \dot{\epsilon}_2^p &= \dot{\lambda} s_2 \\ \dot{\epsilon}_3^p &= \dot{\lambda} s_3\end{aligned}\quad (Ap-I.17)$$

que también puede escribirse como:

$$\begin{aligned}(\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_2^p) &= \dot{\lambda} (s_1 - s_2) \\ (\dot{\epsilon}_2^p - \dot{\epsilon}_3^p) &= \dot{\lambda} (s_2 - s_3) \\ (\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_3^p) &= \dot{\lambda} (s_1 - s_3)\end{aligned}$$

elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro, las ecuaciones anterior, se obtiene:

$$(\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_2^p)^2 + (\dot{\epsilon}_2^p - \dot{\epsilon}_3^p)^2 + (\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_3^p)^2 = \dot{\lambda}^2 [(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_1 - s_3)^2]$$

pero:

$$(s_i - s_j) = \left[\sigma_i - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) \right] - \left[\sigma_j - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) \right] = (\sigma_i - \sigma_j)$$

quedando:

$$(\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_2^p)^2 + (\dot{\epsilon}_2^p - \dot{\epsilon}_3^p)^2 + (\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_3^p)^2 = \dot{\lambda}^2 [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]$$

$$6 J_2^{\prime p} = \dot{\lambda}^2 6 J_2$$

resultando de aquí el *parámetro de consistencia plástica* buscado:

$$\dot{\lambda} = \sqrt{\frac{J_2^{\prime p}}{J_2}} \quad (Ap-I.18)$$

siendo $J_2^{\prime p}$ el segundo invariante del *incremento temporal del tensor desviador de deformaciones plásticas* $\dot{\mathbf{e}}^p$; y J_2 el segundo invariante del *tensor desviador de tensiones* \mathbf{s} . De esta forma, la ec. (Ap-I.16) resulta escrita:

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{s} = \sqrt{\frac{J_2^{\prime p}}{J_2}} \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{J_2}} \quad (Ap-I.19)$$

La ec.(Ap-1.16) y (Ap-1.19) son una generalización de la ec.(Ap-1.14), pero constituyen en ambos casos, debido a las hipótesis de partida, una particularización de la *regla de flujo generalizada* que será tratada en el apartado siguiente.

Teoría de la plasticidad clásica: Descomposición de la deformación total - Regla de flujo generalizada

Cuando el estado tensional de un punto del sólido ideal alcanza el *criterio de discontinuidad inicial*: $\mathcal{F}(\sigma, q) = 0$, y a la vez cumple con la condición de consistencia plástica: $\dot{\mathcal{F}}(\sigma, q) = 0$; se admite, por hipótesis, que este punto se encuentra en estado elasto-plástico. El estudio del comportamiento elasto-plástico, mediante la formulación *clásica general* de la teoría incremental de la plasticidad sin degradación de rigidez, comienza por adoptar como válida la hipótesis de Prandtl-Reus respecto a la descomposición de la deformación total ϵ ,

$$\epsilon = D_s^{-1} \sigma + \epsilon^p = \epsilon^e + \epsilon^p \quad , \quad (Ap-1.20)$$

y luego define una *regla de flujo generalizada* que considera el *incremento temporal de deformación plástica* $\dot{\epsilon}^p$, como una *variable interna* tensorial, cuya regla de evolución establece la proporcionalidad entre las componentes de $\dot{\epsilon}^p$ y las componentes del tensor de flujo plástico g definido en el espacio de tensiones. Esto es:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} H_{\epsilon^p}(\sigma, q) = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{G}(\sigma, q)}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} g \quad (Ap-1.21)$$

esta expresión, que también recibe el nombre de *regla de normalidad* (normal a la superficie de potencial plástico $\mathcal{G}(\sigma, q)$), es una generalización de la ec.(Ap-1.19). En la ec.(Ap-1.21) $\dot{\lambda}$ es un escalar no negativo llamado *parámetro de consistencia plástica* que se determina a partir de la propia *condición de consistencia de Prager* (apart. Ap-1.3.d) y que da la *magnitud* del incremento temporal de deformación plástica $\dot{\epsilon}^p$. La *función de potencial plástico* \mathcal{G} se formula a partir de estudios experimentales ^[1] y es la que define la *dirección* del incremento temporal de deformación plástica $\dot{\epsilon}^p$.

La teoría de la plasticidad considera un caso particular de flujo plástico, cuando por hipótesis se adopta a la *superficie de fluencia plástica* como *superficie de potencial plástico* $\mathcal{G} \equiv \mathcal{F}$. En este caso particular la ec.(Ap-1.21) se reduce a :

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma, q)}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} f \quad (Ap-1.22)$$

y se dice que se trata de una *regla de flujo asociada a la superficie de fluencia*. En caso contrario se dice que se trata de una *regla de flujo no-asociada a la superficie de fluencia*.

Los geomateriales y los hormigones en particular, necesitan normalmente ser considerados mediante una formulación plástica no-asociada para describir adecuadamente su comportamiento ^{[1][23]}.

Se presenta en el (anexo-F) una forma simple y apropiada de definir el tensor de flujo plástico \mathbf{g} para ser tratada en el cálculo numérico. Esta formulación ha sido propuesta originalmente por Nayak-Zienkiewicz ^[88].

Teoría de la plasticidad clásica: Trabajo plástico unitario - Deformación plástica efectiva

El trabajo total desarrollado en una unidad de volumen de un sólido elasto-plástico ideal, durante un pseudo incremento de tiempo ($t \rightarrow t + dt$) ocurrido en un proceso de carga *cuasi-estático*, es conocido con el nombre de *incremento temporal de trabajo unitario o de trabajo específico*; y vale :

$$\dot{w} = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{Ap-1.23})$$

siendo:

$\boldsymbol{\sigma}$: tensor de tensiones actualizado ;

$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$: incremento temporal del tensor de deformaciones totales

La ec.(Ap-1.23) puede ser expresada según la hipótesis de descomposición de deformaciones, ec.(Ap-1.15), como:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \boldsymbol{\sigma}^T (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) , \\ \dot{w} &= \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p , \\ \dot{w} &= \dot{w}^e + \dot{w}^p , \end{aligned} \quad (\text{Ap-1.24})$$

donde \dot{w}^e representa el *incremento temporal de trabajo unitario elástico recuperable* y \dot{w}^p representa el *incremento temporal de trabajo unitario inelástico no-recuperable*, o energía específica disipada, que puede ser expresado como

$$\dot{w}^p = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \left(\frac{1}{3} I_1 \mathbf{1} + \mathbf{s} \right)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{w}_K^p + \dot{w}_G^p \quad (\text{Ap-1.25})$$

siendo:

$$\dot{w}_K^p = \sigma_{oct} \dot{\epsilon}_v^p = \left(\frac{1}{3} I_1 \mathbf{1}\right)^T \dot{\epsilon}^p \quad \text{Incremento temporal}$$

de trabajo plástico unitario volumétrico ,

$$\dot{w}_G^p = \tau_{oct} \dot{\gamma}_{oct}^p = (\mathbf{s})^T \dot{\epsilon}^p \quad \text{Incremento temporal}$$

de trabajo plástico unitario distorsional ,

$$\mathbf{1} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^T .$$

A continuación se deduce para sólidos metálicos ideales * (o sólido de Prandtl-Reus) [49][79][81], la expresión del incremento temporal de trabajo unitario. Esto es:

$$\dot{w}^p = \mathbf{s}^T \dot{\epsilon}^p = \dot{w}_G^p = \tau_{oct} \dot{\gamma}_{oct}^p \quad (Ap-1.26)$$

Sustituyendo la ec.(Ap-1.19) en la ec.(Ap-1.26), se tiene:

$$\dot{w}^p = \frac{1}{\lambda} (\dot{\epsilon}^{pT} \dot{\epsilon}^p) = \sqrt{\frac{J_2}{J_2^p}} (\dot{\epsilon}^{pT} \dot{\epsilon}^p) \quad (Ap-1.27)$$

siendo :

$$J_2^p = \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p) = \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}^{pT} \dot{\epsilon}^p) ,$$

$$\text{pero : } \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_{ij}^p - \underbrace{\frac{1}{3} \dot{\epsilon}_v^p \delta_{ij}}_{\dot{\epsilon}_v^p = 0} ,$$

$$\text{quedando : } J_2^p = \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p) = \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}^{pT} \dot{\epsilon}^p) , \quad (Ap-1.28)$$

* Nota: Características mecánicas más destacadas en los materiales metálicos ideales según las hipótesis de Prandtl-Reus:

-El flujo plástico viene dado por la regla de normalidad de Prandtl-Reus: $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} s_{ij}$.

-El incremento temporal de deformación inelástica volumétrica es nulo $\dot{\epsilon}_v^p = 0$, (material plástico incompresible).

-El incremento temporal de trabajo plástico específico realizado por la presión hidrostática es nulo

$\dot{w}_K^p = \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = \sigma_{oct} \dot{\epsilon}_v^p = 0$.

Sustituyendo el segundo invariante del incremento temporal del tensor desviador de deformaciones plásticas J_2^p , en la ec.(Ap-1.27); resulta el incremento temporal de trabajo plástico específico \dot{w}^p , igual a:

$$\dot{w}^p = \sqrt{2J_2} \frac{(\dot{\epsilon}^p)^T \dot{\epsilon}^p}{\sqrt{(\dot{\epsilon}^p)^T \dot{\epsilon}^p}} = \sqrt{2J_2} \sqrt{(\dot{\epsilon}^p)^T \dot{\epsilon}^p} \quad (\text{Ap-1.29})$$

que constituye una forma de expresar la ec.(Ap-1.25) para el caso particular de materiales metálicos del tipo de Prandtl-Reus. Para este material, también se puede presentar el incremento de trabajo plástico específico como el producto de una tensión uniaxial equivalente $\bar{\sigma}$, por el incremento temporal de una deformación plástica uniaxial equivalente $\dot{\epsilon}^p$. Para ello conviene relacionar término a término la ec.(Ap-1.21) con la ec.(Ap-1.19), de donde surge para este caso particular el siguiente tensor de flujo plástico:

$$\mathbf{g} = \frac{\partial \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{s} \quad (\text{Ap-1.30})$$

La función potencial plástico que cumple con esta particular relación de flujo, es conocida en la actualidad como la función de Von Mises (apart. Ap-I.3.f):

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = J_2(\boldsymbol{\sigma}) - \mathcal{K}^2(\kappa) = 0 \quad , \quad (\text{Ap-1.31})$$

donde :

- κ : variable interna de endurecimiento plástico ;
- $\mathcal{K}(\kappa)$ = función de endurecimiento plástico
- $J_2(\boldsymbol{\sigma})$ = segundo invariante del tensor desviador de tensiones. .

Como se ha visto en la ec.(Ap-1.30), la regla de flujo de Prandtl-Reus, lleva implícita la función potencial (Ap-1.31). Si multiplicamos ambos miembros de la ec.(Ap-1.31) por $\sqrt{3}$, se puede obtener:

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\sigma})} - \sqrt{3} \mathcal{K}(\kappa) = 0 \quad , \quad (\text{Ap-1.32})$$

de donde surge la denominada tensión efectiva, o tensión generalizada, o tensión uniaxial equivalente:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\sigma})} = \sqrt{3} \mathcal{K}(\kappa) \quad , \quad (\text{Ap-1.33})$$

Sustituyendo la ec.(Ap-1.33) en la ec.(Ap-1.29), resulta la siguiente expresión particular del incremento temporal de trabajo plástico específico \dot{w}^p , válida solamente para un material del tipo Prandtl-Reuss:

$$\dot{w}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma} \sqrt{(\dot{\epsilon}^p)^T \dot{\epsilon}^p} = \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (\text{Ap-1.34})$$

de donde se puede obtener la expresión de la deformación plástica efectiva, o también denominada deformación plástica generalizada, o deformación plástica uniaxial equivalente, para un cierto instante t del proceso elasto-plástico. Esto es:

$$\bar{\epsilon}^p = \int_t \dot{\bar{\epsilon}}^p dt = \int_t \frac{\dot{w}^p}{\bar{\sigma}} dt = \int_t \sqrt{\frac{2}{3}} (\dot{\epsilon}^p)^T \dot{\epsilon}^p dt \quad (\text{Ap-1.35})$$

Conviene observar, que las expresiones (Ap-1.29) y (Ap-1.34) constituyen un caso particular de la ec.(Ap-1.25) para materiales del tipo de Prandtl-Reuss, o Von Mises (*apart. Ap-1.3.c*); por lo tanto la ec.(Ap-1.35) * es válida solo para materiales ideales con estas características, no siendo generalizable a ningún material que utilice otra función de potencial plástico.

Teoría de la plasticidad clásica: Superficie de carga plástica - Variable de endurecimiento plástico: κ .

En la fig.(Ap-1.1) se describe el comportamiento uniaxial esquemático de un sólido elasto-plástico ideal. En ella se reconocen *cuatro zonas de comportamiento* muy distinto, de las cuales una sigue estrictamente las leyes de la teoría de la elasticidad, y las otras tres se rigen por la teoría de la plasticidad. El límite entre la zona elástica y la plástica se establece mediante la *superficie de fluencia* o *superficie de discontinuidad*, y a partir de allí esta superficie adquiere movilidad en el espacio de tensiones, a medida que evoluciona el proceso plástico, transformandose en la denominada *superficie de carga plástica*. Esta función de carga no es otra cosa que la actualización de la función límite de discontinuidad (Ap-1.7) para cada valor de las variables internas $q(t)$ correspondiente a cada instante de pseudo tiempo t del proceso elasto-plástico. El fenómeno que gobierna este cambio de posición en el espacio de tensiones, se lo conoce como *endurecimiento plástico*; que puede ser:

* Nota: En condiciones de "carga radial" o "carga proporcional", (o sea cuando se cumple durante todo el proceso de carga la relación $\frac{\sigma_{11}^0}{\sigma_{11}^1} = \frac{\tau_{12}^0}{\tau_{12}^1} = \dots = \frac{\sigma_{33}^0}{\sigma_{33}^1}$ entre las componentes del tensor de tensiones en el estado actual y el estado inicial, respectivamente), se tiene que la ec.(Ap-1.35) se puede escribir:

$$\bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} (\epsilon^p)^T \epsilon^p$$

- **Isotrópico:** si hay movimiento homotético de la superficie de carga plástica. A su vez este movimiento puede ser:
 - o *positivo:* Cuando el movimiento homotético de la superficie de carga plástica es de expansión fig.(Ap-I.4,b). En este caso se habla de un *proceso elasto-plástico con endurecimiento isotrópico*.
 - o *nulo:* Cuando la superficie de carga plástica no evoluciona durante el proceso elasto-plástico fig.(Ap-I.4,a). En este caso se habla de un *proceso elasto-plástico perfecto*.
 - o *negativo:* Cuando el movimiento homotético de la superficie de carga plástica es de contracción. En este caso se habla de un *proceso elasto-plástico con ablandamiento isotrópico*.
- **Cinemático:** si hay movimiento de traslación de la superficie de carga plástica. Este comportamiento plástico tiene por objeto emular el fenómeno físico conocido como efecto **Bauslinger** [58][79][81].

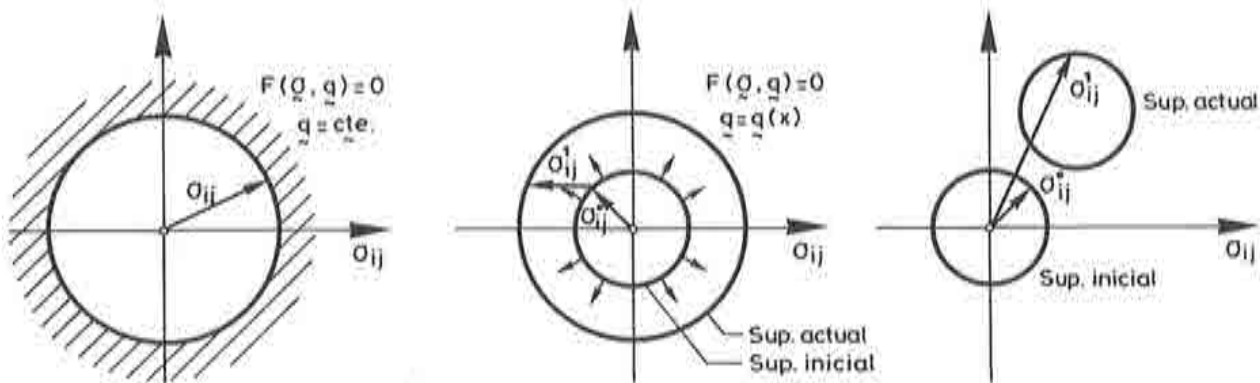


fig.(Ap-I.4): Distintos tipos de endurecimientos considerados por la teoría de la plasticidad.

• El **endurecimiento isotrópico**, movimiento homotético de la función de carga plástica, queda controlado por la evolución de la *función de endurecimiento plástico* $\mathcal{K}(\kappa)$, que depende, de la *variable interna de endurecimiento plástico* κ . La evolución de esta variable interna depende del proceso mismo, y lo hace condicionada por una regla de evolución que se formula explícitamente (*apart. Ap-I.3.a.*). Una manera simple de expresar la *función de carga plástica*, resulta de la siguiente particularización de la ec.(Ap-I.7):

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\sigma, \kappa) = f(\sigma) - \mathcal{K}(\kappa) = 0 \tag{Ap-I.36}$$

Esta función escalar, se caracteriza por ser homogénea de primer grado en las componentes del tensor de tensión σ , y permite relacionar sin ambigüedad la *función de endurecimiento plástico* $\mathcal{K}(\kappa)$ con una *función de tensión uniaxial equivalente* $\bar{\sigma}(\kappa)$ ^[81] (la función (Ap-1.32) también goza de esta característica). Esta función de endurecimiento depende, durante el proceso de carga, de la *variable interna de endurecimiento plástico* κ , y de su ley de evolución, y puede ser expresada matemáticamente en forma general del siguiente modo:

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} H_n(\sigma, \kappa) \equiv \dot{\lambda} \left[\mathbf{h}_n^T(\sigma, \kappa) \frac{\partial g(\sigma, \kappa)}{\partial \sigma} \right] , \tag{Ap-1.37}$$

$$\dot{\kappa} = \mathbf{h}_n^T(\sigma, \kappa) \dot{\epsilon}^p$$

donde $\mathbf{h}_n(\sigma, \kappa)$ es un tensor de segundo orden, función del estado de tensiones actualizado y de la variable de endurecimiento plástico también actualizada; que en el caso más simple de la teoría incremental de la plasticidad toma la forma del tensor de tensiones (para una definición más general de la función $\mathbf{h}_n^T(\sigma, \kappa)$, vease (apart. IV.4.a)). Esto es:

$$\mathbf{h}_n(\sigma, \kappa) \equiv \sigma \tag{Ap-1.38}$$

en esta situación particular, resulta una *variable de endurecimiento plástico* igual al *incremento temporal de trabajo plástico específico*; llamandose por lo tanto *trabajo de endurecimiento plástico específico* ec.(Ap-1.25):

$$\dot{\kappa} = \dot{w}^p = \sigma^T \dot{\epsilon}^p \tag{Ap-1.39,a}$$

Esta simple regla de endurecimiento puede simplificarse aún más si se modela un material metálico que cumple con las hipótesis de Prandtl-Reus; situación que permite formular en modo alternativo la ec.(Ap-1.39,a), como una *variable de endurecimiento basada en la deformación plástica efectiva* ec.(Ap-1.35). Para ello, igualando la ec.(Ap-1.39,a) con la ec.(Ap-1.34), se tiene:

* Nota: $f(\sigma)$ es una función homogénea de grado n en las componentes de tensión, siempre que se cumpla: $f(\alpha \cdot \sigma) \equiv \alpha^n \cdot f(\sigma)$

* Nota: El teorema de Euler, aplicado a funciones $f(\sigma)$, homogéneas de grado n en σ , permite obtener la siguiente transformación: $\{\partial f(\sigma)/\partial \sigma\}^T \sigma = n f(\sigma)$, y por ello, aplicada a una función homogénea de primer grado en las tensiones, del tipo de la ec.(Ap-1.36), permite escribir: $\{\partial g(\sigma)/\partial \sigma\}^T \sigma = f(\sigma) = \mathcal{K}(\kappa)$. Considerando en esta última la ec.(Ap-1.32) (función de Von-Mises tratada como superficie potencial), se obtiene la magnitud de la tensión efectiva: $\{\partial g(\sigma)/\partial \sigma\}^T \sigma = \sqrt{3} \mathcal{K}(\kappa) = \bar{\sigma}$, tal que sustituida en la ec.(Ap-1.39,a), surge para este caso particular la siguiente simplificación en la expresión de la variable de endurecimiento plástico: $\dot{\kappa} = \dot{w}^p = \dot{\lambda} \bar{\sigma}$, donde el parámetro de consistencia plástica vale: $\dot{\lambda} = \dot{\epsilon}^p$.

$$\dot{\kappa} = \dot{w}^p = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (\text{Ap-1.39,b})$$

resultando de aquí la nueva variable de endurecimiento, válida solamente para materiales del tipo de Prandtl-Reus:

$$\dot{\kappa}_e = \dot{\bar{\epsilon}}^p = \frac{\dot{w}^p}{\bar{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} \quad ; \quad (\text{Ap-1.40})$$

Esta regla de evolución de la variable de endurecimiento, formulada en deformaciones efectivas, se puede generalizar para cualquier material ideal, considerando una constante c_κ que se puede determinar a partir de la correspondiente función de potencial plástico \mathcal{Q} . Así la ec.(Ap-1.40) queda:

$$\dot{\kappa}_e = \dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{c_\kappa} \sqrt{(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} \quad (\text{Ap-1.41})$$

* El endurecimiento cinemático, movimiento de traslación de la superficie de carga plástica, queda controlado por la variable interna de endurecimiento plástico cinemático $\boldsymbol{\eta}$, que define las coordenadas del centro del dominio elástico en el espacio de tensiones [43][79][81]. El continuo cambio de estas coordenadas, durante la evolución del proceso elasto-plástico, provoca un movimiento de traslación de la superficie de fluencia que puede o no combinarse con un movimiento isotrópico de expansión o contracción de la misma. En el caso más general se puede escribir la función de carga plástica ec.(Ap-1.36) como:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) = f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\eta}) - \mathcal{K}(\kappa) = 0 \quad (\text{Ap-1.42})$$

siendo:

$$\boldsymbol{q} = \{\kappa, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\epsilon}^p\}^T : \text{vector de variables internas}$$

La ecuación de evolución de la variable interna $\boldsymbol{\eta}$, que define el centro del dominio elástico para cada instante del proceso cuasi-estático, puede escribirse como:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \beta \dot{\kappa} \quad (\text{Ap-1.43})$$

Prager y Melan [43][79][81] propusieron otra ecuación de evolución de $\boldsymbol{\eta}$ más simple, que puede considerarse como un caso particular de la anterior, ya que hace la hipótesis de que esta variable es proporcional al incremento temporal de deformación plástica. Esta regla de evolución considera un endurecimiento cinemático lineal [81]. Esto es:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = c_\eta \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (\text{Ap-1.44})$$

siendo en relación a la ec.(Ap-I.43):

$$\beta = \frac{c_{\kappa}}{\sqrt{c_{\kappa}} \sqrt{(\dot{\epsilon}^p)^T \dot{\epsilon}^p}} \dot{\epsilon}^p \quad ,$$

$$\dot{\kappa}_e = \dot{\epsilon}^p = \sqrt{c_{\kappa}} \sqrt{(\dot{\epsilon}^p)^T \dot{\epsilon}^p} \quad ,$$

c_{κ} = constante que depende de la función de potencial plástico.

Teoría de la plasticidad clásica: Relación tensión deformación generalizada

La ley constitutiva elasto-plástica tangente $\dot{\sigma} = D_T \dot{\epsilon}$ y el parámetro de consistencia plástica $\dot{\lambda}$ pueden ser formulados a partir del criterio general de fluencia plástica o condición de consistencia de Prager (apart. Ap-I.3.d):

$$\mathcal{F}(\sigma, \kappa) = f(\sigma) - \mathcal{K}(\kappa) = 0 \quad , \tag{Ap-I.45,a}$$

$$\dot{\mathcal{F}}(\sigma, \dot{\sigma}, \kappa, \dot{\kappa}) = \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma, \kappa)}{\partial \sigma} \right\}^T \dot{\sigma} + \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma, \kappa)}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = 0 \tag{Ap-I.45,b}$$

Sustituyendo la ec.(Ap-I.45,a) en la ec.(Ap-I.45,b), se tiene

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \dot{\sigma} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = \frac{\partial \mathcal{K}(\kappa)}{\partial \kappa} \dot{\kappa} \tag{Ap-I.46}$$

Sustituyendo la ec.(Ap-I.37) en la ec.(Ap-I.46), resulta:

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \dot{\sigma} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} (\mathbf{h}_{\kappa}^T \dot{\epsilon}^p) \tag{Ap-I.47}$$

y sustituyendo esta última en la regla de flujo generalizada ec.(Ap-I.21), se tiene:

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \dot{\sigma} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \left(\mathbf{h}_{\kappa}^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right) \tag{Ap-I.48}$$

pero el incremento temporal de tensión, durante un proceso de carga plástica, puede ser escrito como:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}_S (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) = \mathbf{D}_S \left(\dot{\epsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right) \quad (\text{Ap-1.49})$$

siendo \mathbf{D}_S el tensor de rigidez elástico secante del material ec.(Ap-1.5).

Sustituyendo la ec.(Ap-1.49) en la ec.(Ap-1.48) resulta:

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_S \dot{\epsilon} - \dot{\lambda} \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_S \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \left(\mathbf{h}_n^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right)$$

agrupando términos se obtiene el parámetro de consistencia plástica. Esto es:

$$\dot{\lambda} \left\{ \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_S \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right] - \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \left(\mathbf{h}_n^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right) \right] \right\} = \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_S \dot{\epsilon}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_S \dot{\epsilon}}{A + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_S \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right]} \quad (\text{Ap-1.50})$$

siendo:

$\dot{\lambda} \geq 0$: parámetro de consistencia plástica ,

$$A = \left[-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \underbrace{\left(\mathbf{h}_n^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right)}_{\bar{\sigma}} \right] : \text{parámetro de endurecimiento plástico} , \quad (\text{Ap-1.51})$$

$\bar{\sigma}$ = tensión uniaxial efectiva, definida para un genérico material.

Sustituyendo la ec.(Ap-1.50) en la ec.(Ap-1.49), resulta la siguiente relación incremental de tensión-deformación:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}_S \dot{\epsilon} - \frac{\left[\mathbf{D}_S \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right\} \right] \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_S \right]}{A + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_S \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right]} \dot{\epsilon} \quad (\text{Ap-1.52})$$

Pudiéndose escribir, finalmente a partir de esta última, la *ley constitutiva incremental tangente* para un proceso elasto-plástico no-asociado y sin degradación de rigidez. Esto es:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}_T^{ep} \dot{\epsilon} \quad (\text{Ap-1.53})$$

siendo \mathbf{D}_T^{ep} el tensor de rigidez elasto-plástico tangente del material:

$$\mathbf{D}_T^{ep} = \mathbf{D}_s - \frac{\left[\mathbf{D}_s \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \right] \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_s \right]}{A + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_s \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right]} \quad (\text{Ap-1.54})$$

este tensor de cuarto orden, escrito en forma de matriz, tiene validez en todo el proceso elasto-plástico. Así, para el caso particular de un proceso puramente elástico, se tiene

que: $-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} = \frac{\partial \mathcal{K}(\kappa)}{\partial \kappa} \rightarrow \infty$, entonces $A \rightarrow \infty$ y por lo tanto $\mathbf{D}_T^{ep} \rightarrow \mathbf{D}_s$.

Ap-I.3.d.- Postulados de estabilidad de DRUCKER – Condiciones de PRAGER

Las definiciones de *material plásticamente estable* dadas por *Drucker* no son más que una generalización al espacio n-dimensional de las conclusiones que se pueden extraer sobre el trabajo plástico desarrollado en un proceso uniaxial causado por un incremento de tensiones bajo la acción de un agente externo. Refiriéndose *exclusivamente a materiales con endurecimiento y flujo asociado* enuncia que un punto de un sólido cargado tiene un comportamiento estable si se cumple lo siguiente [33][43][58][81]:

Postulado (i): *El trabajo plástico realizado por un agente externo, durante la aplicación de un estado adicional de tensiones, es positivo.*

Postulado (ii): *El trabajo neto ejecutado por un agente externo, durante un ciclo de aplicación y remoción de un estado adicional de tensiones, es no negativo.*

Considerando un punto de un sólido sometido a un estado tensión-deformación previo $\sigma - \epsilon$, que es alterado en $\dot{\sigma} - \dot{\epsilon}$ por la acción de un agente externo, se tiene de acuerdo al *postulado(i)*, que la respuesta tensión-deformación del punto es estable si se cumple que *el incremento temporal de trabajo de segundo orden es positivo* fig.(Ap-1.5,a):

$$\text{o si:} \quad \begin{aligned} \dot{\sigma}^T \dot{\epsilon} &> 0 & , \\ \dot{\sigma}^T \dot{\epsilon}^e + \dot{\sigma}^T \dot{\epsilon}^p &> 0 & . \end{aligned} \quad (\text{Ap-1.55})$$

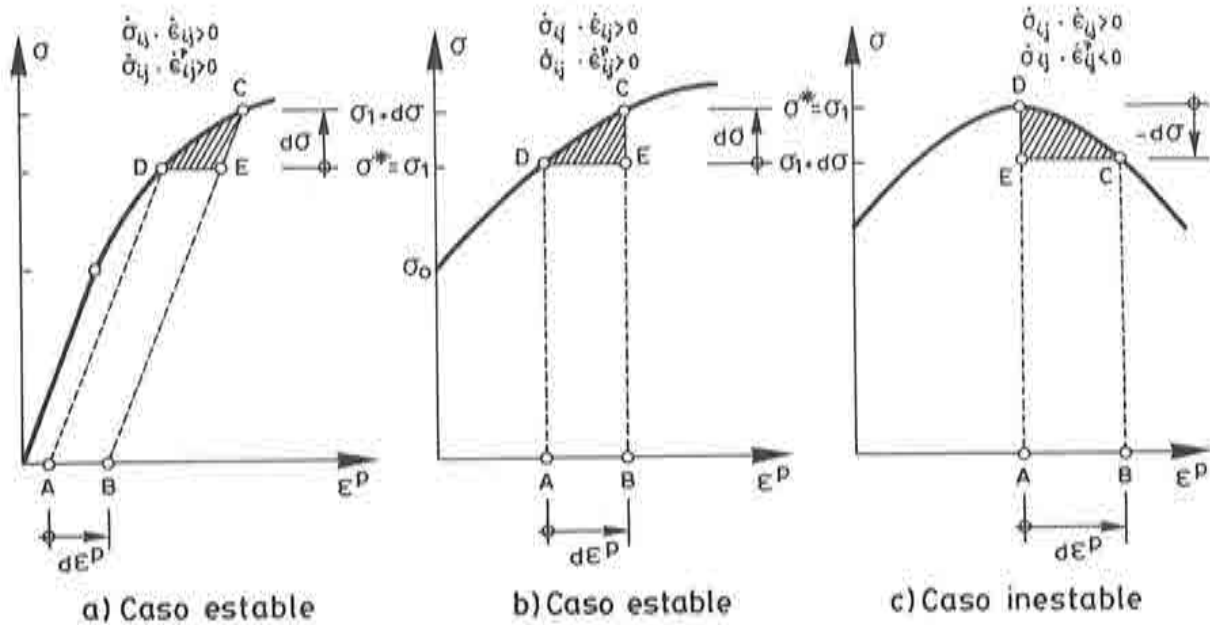


fig.(Ap-1.5): Estabilidad e inestabilidad en un material plástico sometido a un proceso uniaxial

y por el *postulado(ii)*, se tiene estabilidad en la respuesta tensión-deformación plástica de un punto si se cumple que *el incremento temporal de trabajo plástico de segundo orden es no negativo* fig.(Ap-1.5,a) y fig.(Ap-1.5,c):

$$\begin{aligned}
 & (\sigma - \sigma^*)^T \dot{\epsilon}^p \geq 0 \\
 \text{a:} & \quad \dot{\sigma}^T \dot{\epsilon}^p \geq 0
 \end{aligned}
 \quad , \quad (Ap-1.56)$$

donde:

- σ^* : Tensión en el punto al inicio del último incremento de carga.
Este estado satisfizo en el instante previo la ec.(Ap-1.7) ;
- σ : Tensión en el punto en el estado actual del proceso de carga .
Este estado satisface en el instante actual la ec.(Ap-1.7) ;
- $\dot{\epsilon}^p$: Incremento de deformación plástica, desarrollada durante el incremento de tiempo t (al concluir el ciclo de carga).

Además de estos dos postulados, un material con endurecimiento plástico debe satisfacer

Esta ecuación, es considerada como un caso particular del segundo principio de la termodinámica ^[104].

(iv) Condición de consistencia plástica: Esta condición dice que bajo condiciones de carga ($\dot{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \geq 0$), un punto del sólido que se encuentra en estado elasto-plástico, pasa necesariamente a otro estado elasto-plástico. Matemáticamente esto es:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = f(\boldsymbol{\sigma}) - \mathcal{K}(\kappa) = 0 \quad ; \quad (\text{Ap-I.58,a})$$

$$\dot{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = 0 \quad (\text{Ap-I.58,b})$$

Es importante notar, que si un punto del sólido tiene un comportamiento con endurecimiento negativo (ablandamiento), no cumple con el segundo postulado de Drucker, *ec.*(Ap-I.56) *fig.*(Ap-I.6), por lo tanto, según este postulado se trataría de un comportamiento inestable a nivel del punto, o inestable localmente. No obstante, esto no implica que *necesariamente* se trate de un proceso inestable para todo el sólido (condición de estabilidad global, *apen. II*); por lo tanto el segundo postulado de Drucker será considerado solo como una *condición suficiente de estabilidad global*. Otros comentarios sobre la estabilidad de un proceso elasto-plástico pueden ser consultados en las referencias ^{[5][7][11][67][104][140]}.

Ap-I.3.e.- Condiciones de KUHN-TUCKER en plasticidad.

La condición de carga-descarga y la condición de consistencia plástica de Prager, se satisfacen simultáneamente mediante las tres condiciones de Kuhn-Tucker ^[131], que es otra forma de presentar el axioma de la máxima disipación plástica MDP (*apart. IV.8.f*):

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad (\text{Ap-I.58,c})$$

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0 \quad (\text{Ap-I.58,d})$$

$$\dot{\lambda} \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{Ap-I.58,e})$$

De estas tres condiciones se deduce que:

- 1- Si $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) < 0$, la condición de fluencia plástica no se satisface y se desarrolla un proceso puramente elástico, por lo tanto, de la tercera condición de Kuhn-Tucker *ec.*(Ap-I.58,e) se obtiene que $\dot{\lambda} = 0$, de donde se deduce que las variables plásticas internas no evolucionan $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda} \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{q}(t)) = \mathbf{0}$ (*apart. Ap-I.3.a*), (particularmente se tiene que $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \mathbf{0}$).
- 2- Si $\dot{\lambda} > 0$, se deduce a partir de la tercera condición de Kuhn-Tucker *ec.*(Ap-I.58,e) que el proceso debe satisfacer necesariamente la condición de fluencia plástica $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$, significando que se trata de un estado de carga elasto-plástico
- 3- Si $\dot{\lambda} = 0$, se deduce a partir de la tercera condición de Kuhn-Tucker *ec.*(Ap-I.58,e) que $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0$. Para este caso particular se pueden presentar dos situaciones distintas: Un proceso de carga nula donde $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$, o Un proceso de descarga elástico donde $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) < 0$.

Ap-I.3.f.- Criterios clásicos de fluencia, o discontinuidad, plástica.

Se han formulado en los últimos años una gran cantidad de *criterios de fluencia, o discontinuidad plástica*, con el fin de mejorar la simulación del comportamiento mecánico de los sólidos ideales dentro de un cierto rango de trabajo. Hay criterios más aptos para reproducir el funcionamiento *tenso-deformacional* de los *materiales metálicos* y otros que funcionan mejor para los *geomateriales*. En general estos criterios deberían considerar las siguientes características básicas de comportamiento:

- Los **materiales metálicos** tienen una resistencia a tracción y compresión del mismo orden de magnitud. La presión hidrostática, (primer invariante del tensor de tensiones I_1), influye muy poco en la determinación del estado de fluencia plástica. Los cambios de volumen permanente son despreciables (incremento temporal de deformación volumétrica permanente, dilatación, nula $\dot{\epsilon}_v^p = 0$); lo que significa que la forma y tamaño de una sección transversal de la superficie de fluencia (plano octaédrico), se mantiene inalterada tanto a bajas como altas tensiones (no depende del tercer invariante del tensor desviador de tensiones J_3), (ej.: forma cilíndrica: superficie de *Von Mises* que será estudiada más adelante en este mismo apartado). El incremento temporal de deformación plástica $\dot{\epsilon}^p$ depende del tensor desviador de tensiones s en cada instante del proceso de carga cuasi-estático; pudiéndose usar satisfactoriamente la regla de flujo de *Prandtl-Reus* ec.(Ap-1.16), que es lo mismo que utilizar la forma general de la regla de flujo ec.(Ap-1.21), con una función de potencial plástico del tipo de la de *Von Mises* ec.(Ap-1.31). En este caso particular, el tensor de flujo plástico $g = \frac{\partial G}{\partial \sigma}$, es proporcional a s .
- Los **materiales friccionales del tipo de los hormigones pétreos** tienen menor resistencia a tracción que a compresión. La presión hidrostática influye mucho en la *condición de fluencia plástica* para tensiones bajas y moderadas, en cambio comienza a perder importancia en altas tensiones hidrostáticas. El sólido sufre cambios de volumen irreversibles exhibiendo el fenómeno de dilatación $\dot{\epsilon}_v^p \neq 0$. La forma y dimensiones de una sección transversal de la superficie de fluencia (plano octaédrico), es distinta a bajas que a altas tensiones, pasando de una forma casi triangular a otra circular, respectivamente (para bajas presiones hidrostáticas depende del tercer invariante del tensor desviador de tensiones J_3 y se independiza de él en altas presiones). La deformación plástica tiene una dirección distinta a la que da el gradiente de la superficie de fluencia, siendo necesario formular una superficie de potencial plástico distinta a la de fluencia plástica (plasticidad no-asociada). En estos materiales, y a diferencia de los metales, el criterio de fluencia depende, entre otras, de tres variables: la *cohesión interna* entre partículas c , el *rozamiento interno* entre partículas ϕ y la *dilatación interna* ψ . Estas pueden ser tratadas como variables internas del proceso mismo, o también expresadas como una función formulada en forma explícita que depende de la evolución de las variables internas \vec{q} (ej.: en la ec.(Ap-1.36) la *función de endurecimiento plástico* $K(\kappa)$ está expresada como una función explícita que depende, entre otras, de la *variable interna de endurecimiento plástico* κ).

De esta breve descripción surge la necesidad de formular distintos criterios de fluencia y potencial plástico que permitan considerar los requisitos exigidos por cada tipo de material ideal. A continuación, se describen algunos criterios clásicos de fluencia plástica.

Criterio de fluencia plástica de Rankine - De máxima tensión de tracción.

Este criterio fué formulado por Rankine en 1876 y forma parte de los criterios que dependen de un solo parámetro, la máxima resistencia uniaxial de tracción σ_T^{max} . Incluye en su formulación el primer invariante del tensor de tensiones: I_1 y el segundo y tercer invariante del tensor desviador de tensiones: J_2 y J_3 , respectivamente.

Actualmente se lo suele utilizar en procesos de tracción para establecer el límite donde se inicia el fenómeno de fractura frágil en los hormigones; hipótesis que conduce a suponer que la fractura ocurre cuando la máxima tensión principal, en un punto, alcanza el valor de la máxima resistencia uniaxial a tracción $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}(\kappa_0) = \sigma_T^{max}$. La expresión matemática que describe esta función en el espacio de tensiones principales es:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\sigma, \sigma_T^{max}) = \max. [\sigma_i] - \sigma_T^{max} = 0 \quad (\text{Ap-1.59})$$

o bien, en función de los invariantes del tensor de tensiones y de su desviador:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(I_1, J_2, \theta, \sigma_T^{max}) = 2 \sqrt{3} J_2 \cos(\theta + \frac{\pi}{6}) + I_1 - 3 \sigma_T^{max} = 0 \quad (\text{Ap-1.60})$$

o también, a partir de los invariantes definidos en el espacio de Westergard según las coordenadas octaédricas fig.(Ap-1.7):

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\rho, \xi, \theta, \sigma_T^{max}) = \sqrt{2} \rho \cos(\theta + \frac{\pi}{6}) + \xi - \sqrt{3} \sigma_T^{max} = 0 \quad (\text{Ap-1.61})$$

Cualquiera de estas tres expresiones matemáticas describe en el *espacio de tensiones principales* una pirámide de base triangular fig.(Ap-1.7.a). En el *plano octaédrico o desviador*, un triángulo equilátero fig.(Ap-1.7.c). En el *plano meridiano de tracción máxima*, ($\theta = -\frac{\pi}{6}$), una recta de pendiente $1/\sqrt{2}$ y en el *plano meridiano de compresión máxima*, ($\theta = +\frac{\pi}{6}$), una recta de pendiente $\sqrt{2}$ fig.(Ap-1.7.b); ambas rectas meridianas se encuentran en un punto del eje de tensiones hidrostáticas ξ a una distancia del origen: $\xi^0 = \sqrt{3} \sigma_T^{max}$, y cortan al eje de tensión octaédrica de corte ρ en: $\rho_T^0 = \sqrt{3/2} \sigma_T^{max}$ y en: $\rho_C^0 = -\sqrt{6} \sigma_T^{max}$ fig.(Ap-1.7.b).

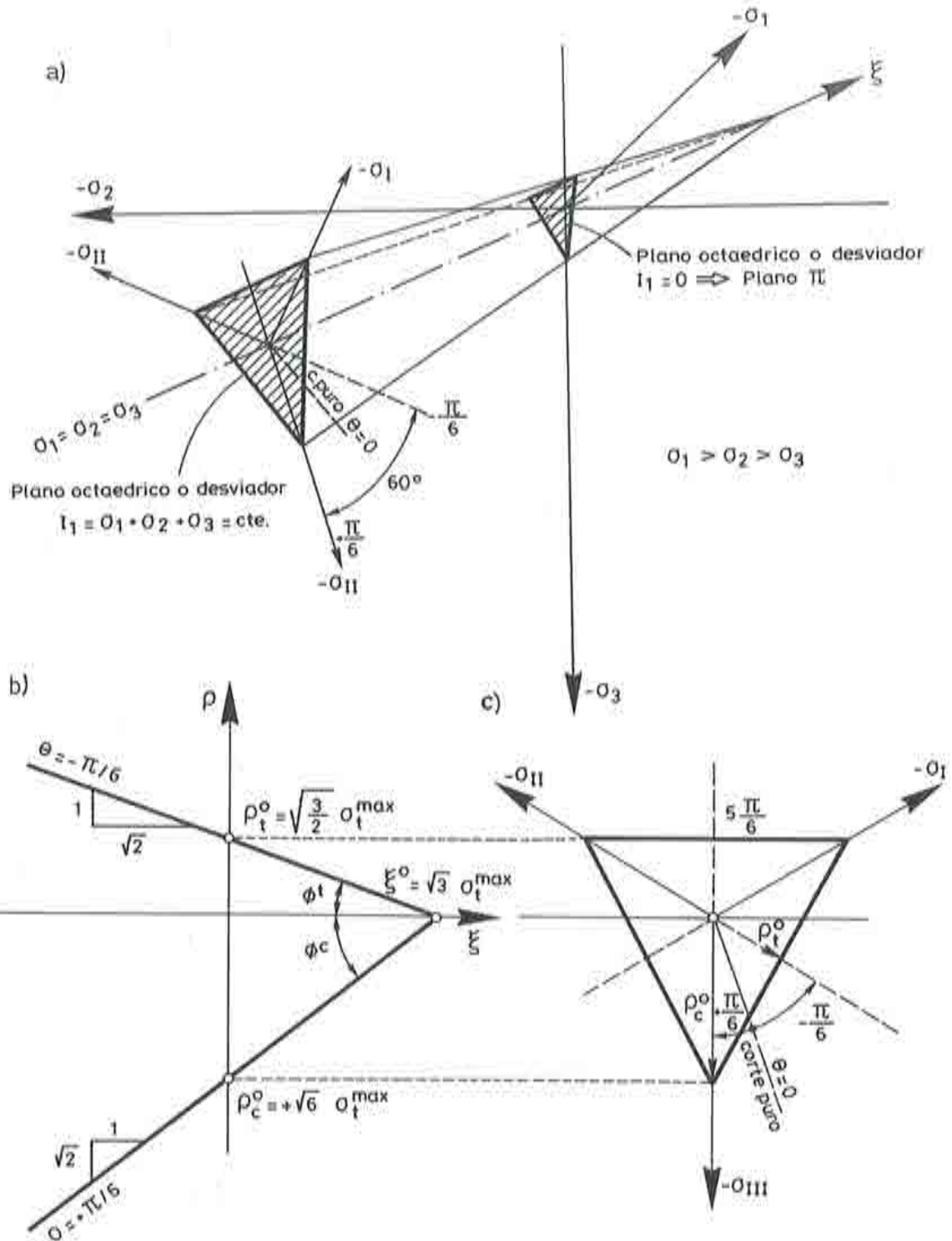


fig.(Ap-I.7): Criterio de fluencia de Rankine:

- a) En el espacio de tensiones principales o espacio de Westergard;
- b) Según los meridianos de tracción y compresión máxima.
- c) Según el plano octaédrico $I_1 = 0$ o plano π ;

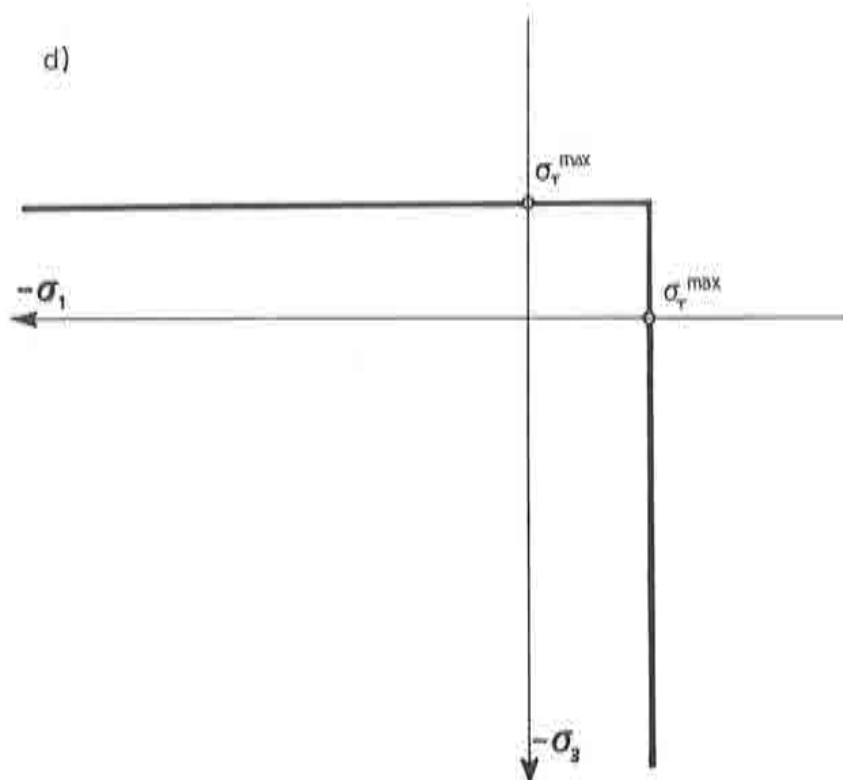


fig.(Ap-1.7): Criterio de fluencia de Rankine:

d) Según el plano $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$.

Normalmente se utiliza el criterio de Rankine como un *criterio de barrera tensional*, para limitar la máxima tensión de tracción que puede soportar un punto del sólido fig.(Ap-1.7,d). Combinado éste con otros criterios de discontinuidad que permiten simular mejor el comportamiento a compresión, puede ser utilizado para tratar materiales del tipo del hormigón.

Criterio de fluencia plástica de Tresca - De máxima tensión cortante.

Este criterio fué formulado por Tresca en 1864, y forma parte de los criterios de fluencia que dependen de un solo parámetro, la máxima resistencia al corte τ^{max} .

El criterio de Tresca incluye en su formulación el segundo y tercer invariante del tensor desviador de tensiones: J_2 y J_3 , respectivamente, e ignora la influencia del primer invariante del tensor de tensiones I_1 , permitiendo simular un comportamiento que se aproxima bastante al de los metales. De acuerdo con este criterio, se alcanza la fluencia plástica cuando el valor de la función de endurecimiento plástico $\mathcal{K}'_0 = \mathcal{K}'(\kappa_0)$, que tiene el significado de una tensión cortante escalada, alcanza la máxima tensión de corte puro τ^{max} .

La forma matemática de expresar el criterio de fluencia plástica de Tresca, en el espacio de tensiones principales, es:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\sigma, \mathcal{K}') = \max. \left[\frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1| \right] - \mathcal{K}'(\kappa) = 0 \quad (\text{Ap-I.62})$$

siendo $\mathcal{K}'(\kappa)$ una función de tensión de corte puro *. También puede expresarse la ec.(Ap-I.62) en función de los invariantes del tensor desviador de tensiones como:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(J_2, \theta, \mathcal{K}') = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos \theta - \mathcal{K}'(\kappa) = 0 \quad (\text{Ap-I.63})$$

* Nota: Esto se puede ver expresando los tensores σ y s , en el espacio de tensiones principales, para un estado plano de corte puro $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma_1$:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_1 \end{bmatrix},$$

$$s = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s_1 \end{bmatrix}, \text{ pero: } I_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = \sigma_1 \\ s_3 = -s_1 = \sigma_3 = -\sigma_1 \end{cases}$$

sustituyendo este estado de tensiones en la ec.(Ap-I.62), resulta

$$\mathcal{F} = \left[\frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1| \right] - \mathcal{K}'(\kappa) = 0,$$

$$\mathcal{F} = \left[\frac{1}{2} |-s_1 - s_1| \right] - \mathcal{K}'(\kappa) = 0,$$

$$\mathcal{F} = |-s_1| - \mathcal{K}'(\kappa) = s_1 - \mathcal{K}'(\kappa) = 0.$$

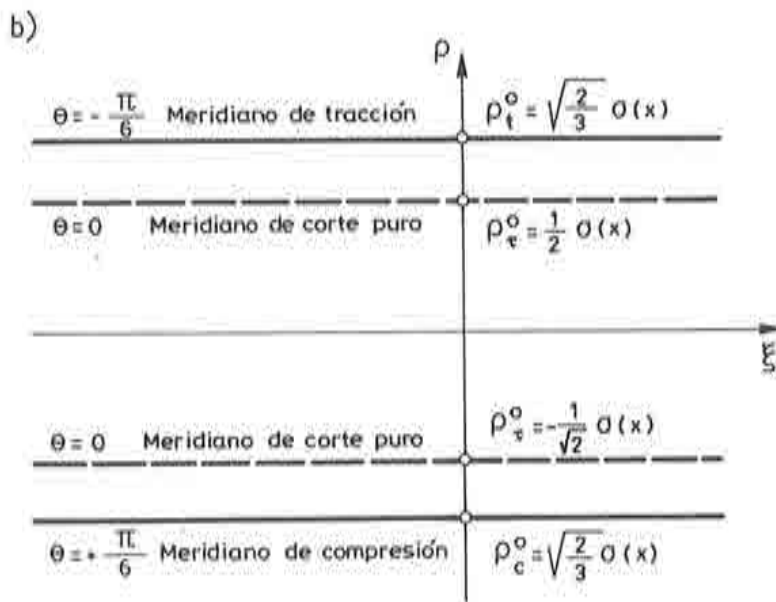
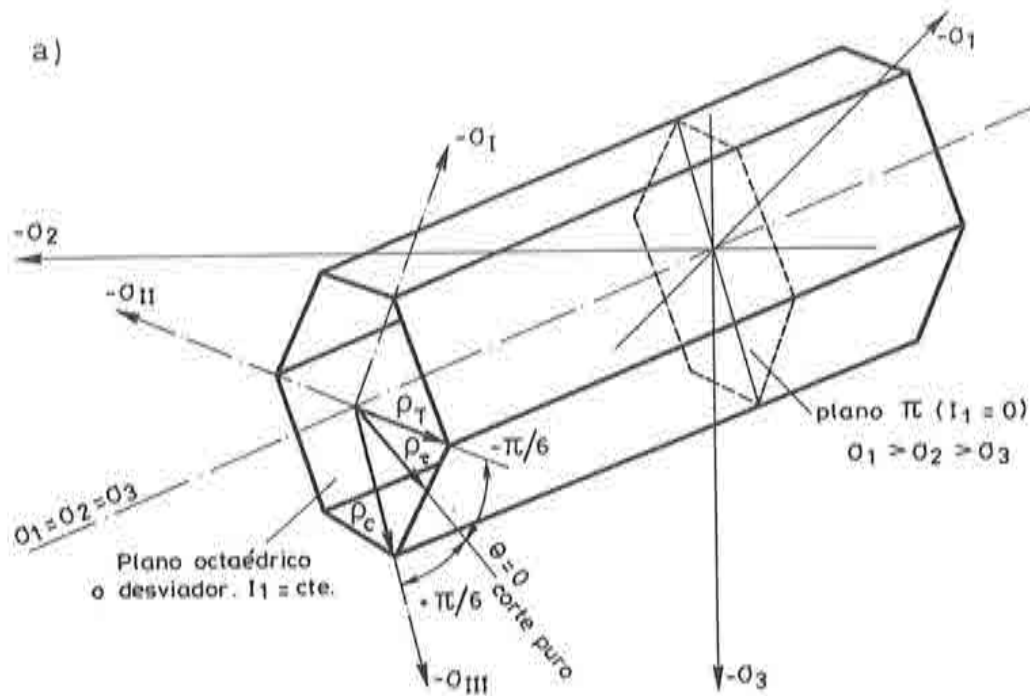


fig.(Ap-1.8): Criterio de fluencia de Tresca:
 a) En el espacio de tensiones principales o espacio de Westergard;
 b) Según los meridianos de tracción y compresión máxima.

Si multiplicamos por $2\sqrt{3}$ la ecuación anterior, se obtiene el criterio de Tresca expresado en valores de *tensión uniaxial efectiva* $\bar{\sigma}$, en vez de la tensión de corte puro \mathcal{K}' . Esto permite utilizar una función de endurecimiento plástico $\bar{\sigma}(\kappa)$ obtenida de un ensayo a tracción o compresión uniaxial:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(J_2, \theta, \mathcal{K}') = 2\sqrt{J_2} \cos \theta - \sqrt{3} \underbrace{[2\mathcal{K}'(\kappa)]}_{\mathcal{K}(\kappa)} = 0, \quad (\text{Ap-1.64})$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(J_2, \theta, \bar{\sigma}) = 2\sqrt{J_2} \cos \theta - \bar{\sigma}(\kappa) = 0.$$

o también puede ser expresada en función de los invariantes definidos en el espacio de *Westergard*, según las *coordenadas octaédricas*, como:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\rho, \theta, \bar{\sigma}) = \rho \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{\sigma}(\kappa) = 0 \quad (\text{Ap-1.65})$$

Como se pudo ver, el primer invariante del tensor de tensiones no interviene en la formulación de las expresiones que definen este criterio de fluencia, por lo tanto el *plano octaédrico* se mantiene constante e igual al plano π cualquiera sea la tensión media: $\sigma_{oct} = \sigma_m = \frac{I_1}{3}$; describiendo en el *espacio de tensiones principales* un prisma de base hexagonal orientado según el eje de presiones hidrostáticas ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) fig.(Ap-1.8,a). En el *plano octaédrico* o desviador representa un hexágono regular fig.(Ap-1.8,c). De la intersección del *plano meridiano de tracción*, ($\theta = -\frac{\pi}{6}$), con la superficie de fluencia surge una recta de pendiente nula, paralela a la que resulta de la intersección del *plano meridiano de compresión*, ($\theta = +\frac{\pi}{6}$), con la superficie de fluencia; ambas rectas meridianas cortan al eje de tensión de

corte octaédrica en $\rho_C^0 = \rho_T^0 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma}(\kappa)$ fig.(Ap-1.8,b). En el *plano* $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$ representa un hexágono deformado según el eje de tensiones $\sigma_1 = \sigma_3$ fig.(Ap-1.8,d).

El criterio de Tresca se utiliza normalmente para estudiar problemas de plasticidad en materiales metálicos.

Criterio de fluencia plástica de Von Mises - De tensión cortante octaédrica.

Este criterio fué formulado por Von Mises en 1913 y forma parte de los criterios que dependen de un solo parámetro, la máxima resistencia de corte octaédrica, τ_{oct} .

El criterio de Von Mises incluye en su formulación solamente el segundo invariante del tensor desviador de tensiones J_2 , y es independiente del primer invariante del tensor de tensiones I_1 y del tercer invariante del tensor desviador de tensiones J_3 . De acuerdo con este criterio, un punto del sólido alcanza la situación de fluencia plástica cuando el valor de la función de endurecimiento plástico $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}(\kappa_0)$, que tiene el significado de una tensión

cortante escalada, alcanza la máxima tensión de corte octaédrica, τ_{oct} .

Este criterio puede escribirse matemáticamente como:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\sigma, \mathcal{K}) = \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] - \mathcal{K}^2(\kappa) = 0 \quad (Ap-1.66)$$

siendo $\mathcal{K}(\kappa)$ una función de tensión cortante *. También a partir de esta última ecuación se puede deducir la relación que hay entre la *tensión uniaxial efectiva* $\bar{\sigma}$ y la tensión de corte \mathcal{K} . Para ello consideremos un estado de tracción simple y arbitrario en el espacio de tensiones principales: $\sigma_1 = \bar{\sigma}_T = \bar{\sigma}_C = \bar{\sigma}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, que sustituido en la ec.(Ap-1.66) da:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{6} \left[(\sigma_1)^2 + (\sigma_1)^2 \right] - \mathcal{K}^2(\kappa) = 0 ,$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{6} \left[2 (\bar{\sigma})^2 \right] - \mathcal{K}^2(\kappa) = 0 , \quad (Ap-1.68)$$

$$\bar{\sigma}(\kappa) = \sqrt{3} \mathcal{K}(\kappa)$$

Sustituyendo la ec.(Ap-1.67) en esta última, resulta la conocida *tensión uniaxial efectiva*, o *tensión uniaxial generalizada*, o *tensión uniaxial equivalente*:

$$\bar{\sigma}(\kappa) = \sqrt{3} \mathcal{K}(\kappa) = \sqrt{3} s_1 \quad (Ap-1.69)$$

Otra forma de expresar la función matemática que describe este criterio de fluencia plástica, resulta de formular la ec.(Ap-1.66) en función del segundo invariante del tensor desviador de tensiones J_2 . Esto es:

$$J_2 - \mathcal{K}^2(\kappa) = 0 , \quad (Ap-1.70)$$

* Nota: Considerando en el espacio de tensiones principales, un arbitrario estado plano de corte puro $\sigma_1, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_1$ y sustituyendo este estado de tensiones en la ec.(Ap-1.66) y considerando que $s_1 = \sigma_1$; $s_3 = -s_1 = \sigma_3 = -\sigma_1$ (ver plé de pág. criterio de Tresca), se tiene:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{6} \left[(\sigma_1)^2 + (-\sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] - \mathcal{K}^2(\kappa) = 0 ,$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{6} \left[(s_1)^2 + (-s_1)^2 + (-s_1 - s_1)^2 \right] - \mathcal{K}^2(\kappa) = 0 , \quad (Ap-1.67)$$

$$\mathcal{F} = s_1 - \mathcal{K}(\kappa) = 0$$

siendo inmediato de aquí presentarla en su forma más conocida:

$$\sqrt{J_2} - \mathcal{K}(\kappa) = 0 \quad , \quad (Ap-I.71)$$

o también, a partir de esta última ecuación se puede formular este criterio en función de la tensión cortante octaédrica, razón por la cual lleva el nombre de criterio de la máxima tensión de corte octaédrica. Esto es:

$$\tau_{oct} \equiv \sqrt{\frac{2}{3} J_2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{K}(\kappa) \quad (Ap-I.72)$$

Otra manera de formular el criterio de fluencia de Von Mises, es en función de la *tensión uniaxial efectiva*. Sustituyendo la ec.(Ap-I.68) en la ec.(Ap-I.71) resulta:

$$\sqrt{3} J_2 - \bar{\sigma}(\kappa) = 0 \quad (Ap-I.73)$$

A partir de la ec.(Ap-I.72) se puede representar también el criterio de Von Mises en función de los invariantes definidos en el espacio de Westergard según las *coordenadas octaédricas* como:

$$\frac{\rho}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{K}(\kappa) = 0 \quad , \quad (Ap-I.74)$$

o multiplicando ambos sumandos por 3 , resulta:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \rho - \sqrt{2} \sqrt{3} \mathcal{K}(\kappa) &= 0 \quad , \\ \sqrt{3} \rho - \sqrt{2} \bar{\sigma}(\kappa) &= 0 \end{aligned} \quad (Ap-I.75)$$

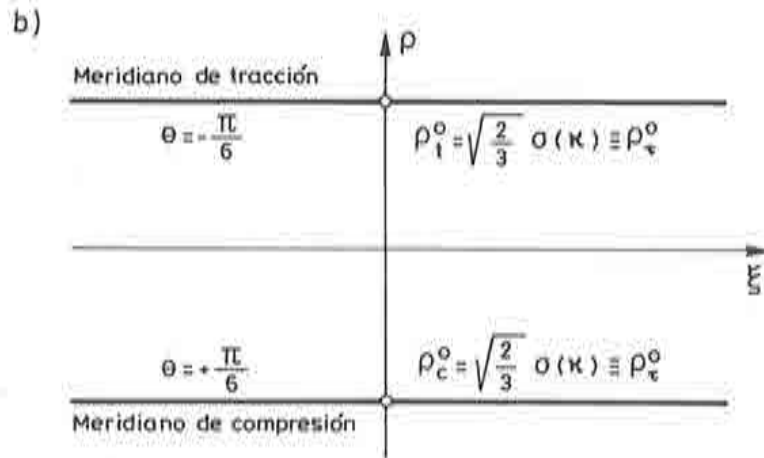
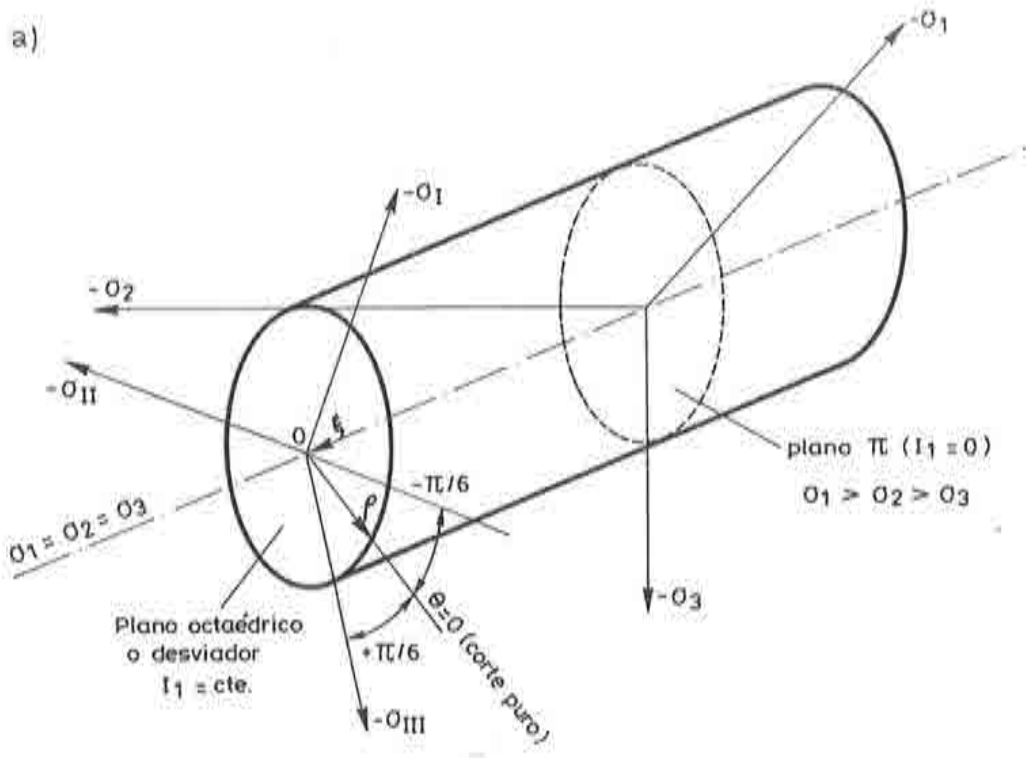


fig.(Ap-1.9): Criterio de fluencia de Von Mises:

- a) En el espacio de tensiones principales o espacio de Westergard;
- b) Según los meridianos de tracción y compresión máxima.

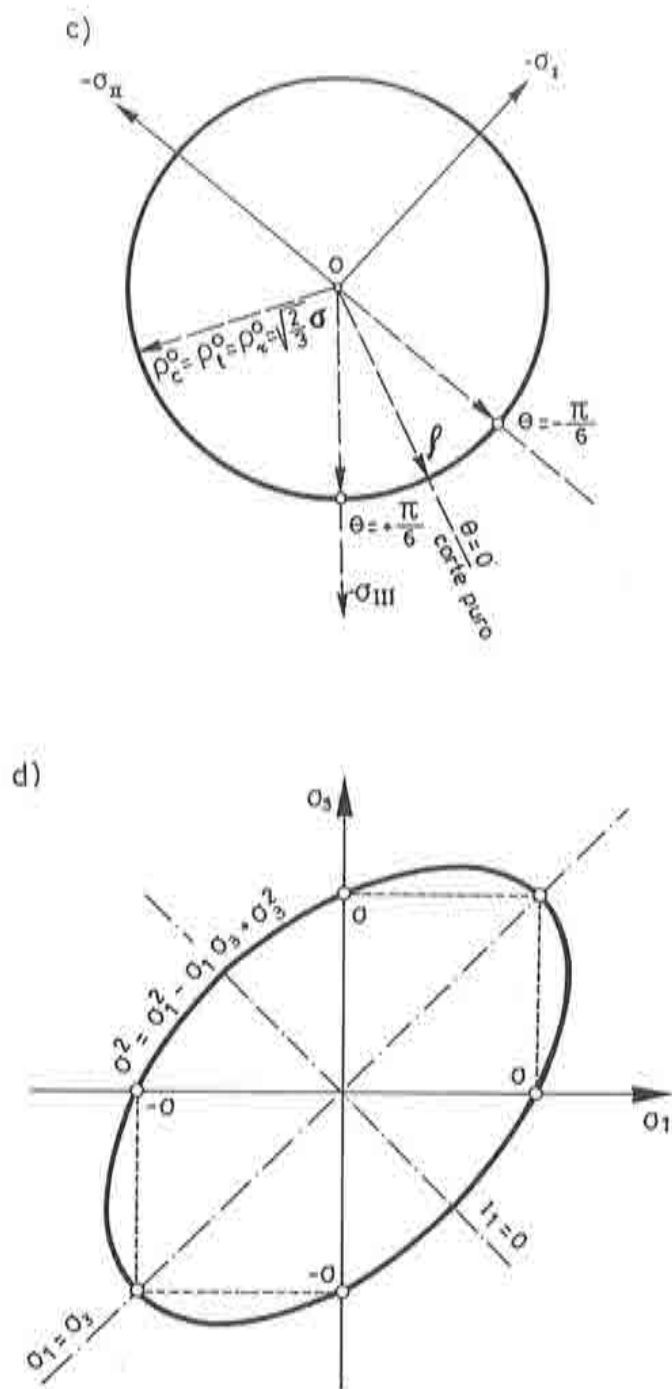


fig.(Ap-1.9): Criterio de fluencia de Von Mises:
 c) Según el plano octaédrico $I_1 = 0$ o plano π ;
 d) Según el plano $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$.

De las distintas formas de presentar el criterio de fluencia de Von Mises, se puede ver que en el *espacio de tensiones principales* dicho criterio representa un cilindro cuyo eje coincide con el eje de presión hidrostática ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) fig.(Ap-1.9,a). Esto se debe a que en el *plano octaédrico* o desviador representa una circunferencia que mantiene constante su diámetro cualquiera sea el valor de I_1 , ya que es independiente de la influencia de la presión hidrostática fig.(Ap-1.9,c). De la intersección del *plano meridiano de tracción máxima*, ($\theta = -\frac{\pi}{6}$), con la superficie de fluencia plástica se obtiene una recta, de pendiente nula, paralela a la que resulta de la intersección con el *plano meridiano de compresión máxima*, ($\theta = +\frac{\pi}{6}$); ambas rectas

cortan al eje de tensión de corte octaédrica en: $\rho_C^0 = \rho_T^0 = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma}(\kappa)$ fig.(Ap-1.9,b). En el *plano* $\sigma_1, \sigma_2 = 0, \sigma_3$ representa una elipse que tiene su radio mayor orientado según el eje de tensiones $\sigma_1 = \sigma_3$ fig.(Ap-1.9,d). La función de esta elipse surge de sustituir un estado de tensión plano $\sigma_1, \sigma_2 = 0, \sigma_3$ en la ec.(Ap-1.66). Esto es:

$$\left[(\sigma_1 - 0)^2 + (0 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = 6 \mathcal{K}^2(\kappa) \quad (\text{Ap-1.76})$$

sustituyendo en ésta la ec.(Ap-1.68) se tiene:

$$2 \sigma_1^2 - 2 \sigma_1 \sigma_3 + 2 \sigma_3^2 = 6 \mathcal{K}^2(\kappa) = 2 \bar{\sigma}^2 \quad (\text{Ap-1.77})$$

Reordenando esta última, se puede presentar la ecuación de la elipse de Von Mises como:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} \right) \left(\frac{\sigma_3}{\bar{\sigma}} \right) + \left(\frac{\sigma_3}{\bar{\sigma}} \right)^2 = 1 \quad (\text{Ap-1.78})$$

La diferencia fundamental entre el criterio de Tresca y el de Von Mises, radica en la forma de considerar los estados tensionales de corte puro:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{de la ec.(Ap-1.65), para TRESCA: } \rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\sigma}(\kappa) \quad ; \text{ para } \theta = 0 \quad , \\ \text{de la ec.(Ap-1.75), para Von MISES: } \rho^0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma}(\kappa) \quad ; \forall \quad \theta \quad , \end{array} \right. \quad (\text{Ap-1.79})$$

tal que la relación de proporción entre ambos *radios octaédricos* es de:

$$\frac{(\rho^0)_{Mises}}{(\rho^0)_{Tresca}} = 1.154700538... \quad (\text{Ap-1.80})$$

siendo más acertado para los materiales metálicos el radio octaédrico previsto por Von Mises.

En estudios numéricos sobre hormigones, llevados a cabo por M. Suidan and W. Schuobrich [135], se utilizó el criterio de fluencia de Von Mises para tratar el material a compresión, combinado con el criterio de Rankine para considerar el comportamiento a tracción (Von Mises con disminución de la tensión límite de tracción). Sobre la combinación de criterios de fluencia plástica, ver (*apart. Ap-I.3.g*).

Criterio de fluencia plástica de Mohr-Coulomb - De tensión cortante octaédrica.

Este criterio, formulado por Coulomb en 1773 y desarrollado en profundidad por Mohr en 1882, forma parte de los criterios que dependen de dos parámetros, siendo éstos la *cohesión interna* entre partículas del sólido c y el *rozamiento interno* entre ellas, medido por el ángulo ϕ . Incluye en su expresión matemática el segundo y tercer invariante del tensor desviador de tensiones: J_2 y J_3 , respectivamente, y a diferencia de los criterios utilizados en materiales metálicos depende del primer invariante del tensor de tensiones I_1 . Esto se debe a que al ser un criterio de fluencia basado en el concepto del rozamiento entre partículas, la fuerza de rozamiento interna desarrollada entre ellas crece con el aumento de la presión en la masa del sólido. Esto es:

$$|\tau| = f(\sigma_m) \quad (\text{Ap-I.81})$$

siendo:

τ : Tensión cortante que se desarrolla en el plano de fallo ,

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} : \text{Tensión media u octaédrica.}$$

En el caso uniaxial representa la tensión normal al plano de fallo σ_u .

A partir de esta idea básica surge el criterio de fallo de Coulomb como:

$$|\tau| = c + \sigma_u \tan \phi \quad (\text{Ap-I.82})$$

siendo:

c : Cohesión interna entre partículas del sólido ,

ϕ : Ángulo de rozamiento interno entre partículas del sólido.

En el caso extremo en que el ángulo de rozamiento interno sea nulo, $\phi = 0$, este criterio de fluencia se transforma en el de Tresca: $\tau = c = K'$ fig.(Ap-I.11,d), y con ello se convierte en un criterio de máxima tensión de corte.

Representando la ec.(Ap-1.82) en el espacio $\tau-\sigma_n$, fig.(Ap-1.10), resultan dos rectas tangentes a los círculos de máxima tensión principal de Mohr. De aquí se tiene que el estado de fluencia plástica se alcanza cuando el estado de tensiones hace que el círculo de Mohr toque las dos rectas envolventes descritas por la ec.(Ap-1.82).

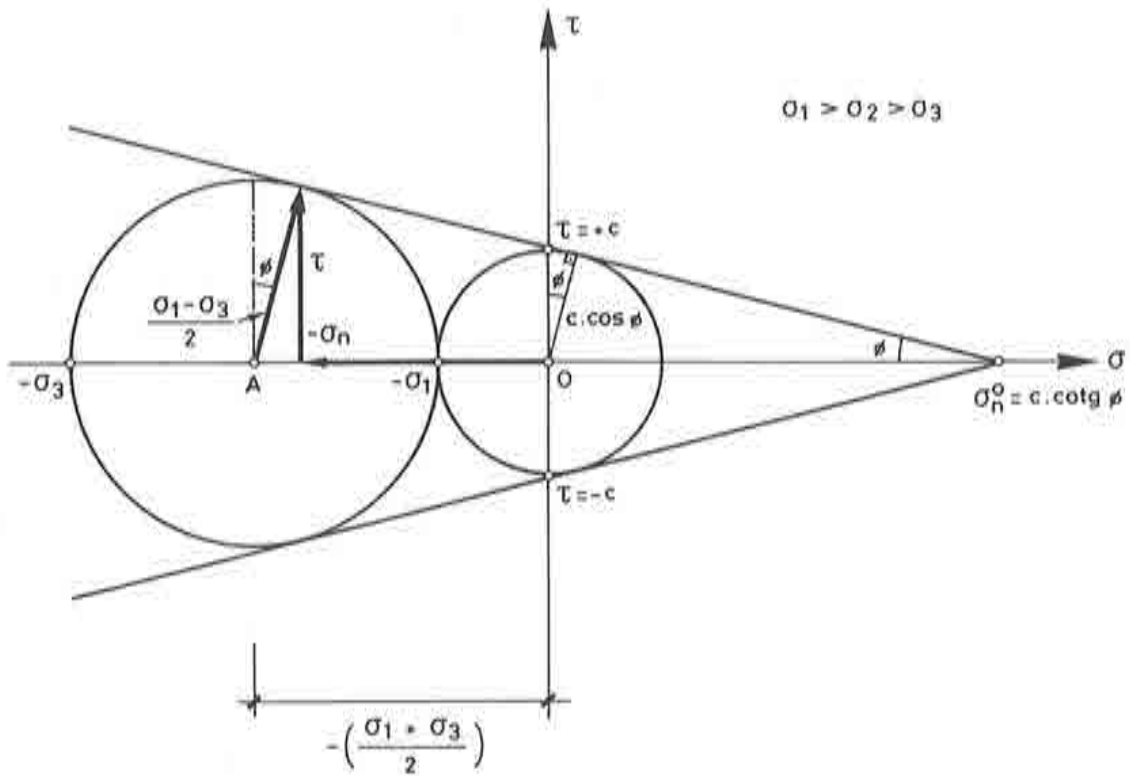


fig.(Ap-1.10): Relación entre las tensiones principales y el criterio de Mohr-Coulomb

A partir de la fig.(Ap-1.10) se puede reescribir la ec.(Ap-1.82) del siguiente modo:

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) \cos \phi = c + \left[-\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) \sin \phi \right] \tan \phi \quad (\text{Ap-1.83})$$

Reordenando algebraicamente esta ecuación, queda:

$$\mathcal{F}(\sigma, c, \phi) = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) \sin \phi - c \cos \phi = 0 \quad (\text{Ap-1.84})$$

siendo:

- σ_1 : Tensión principal mayor ,
- σ_3 : Tensión principal menor ,
- c : Cohesión interna entre partículas del sólido ,
- ϕ : Ángulo de rozamiento interno entre partículas del sólido.

De la ec.(Ap-1.84) se deduce que el criterio de Mohr-Coulomb ignora el efecto de la tensión principal intermedia σ_2 , lo que es un inconveniente para la definición del criterio de fluencia en función de las tres tensiones principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. No obstante, este problema queda resuelto si se escribe su expresión matemática en función del primer invariante del tensor de tensiones I_1 , del segundo invariante del tensor desviador de tensiones J_2 y del ángulo θ que depende de J_2 y J_3 , definiendo así, en forma inequívoca, la posición del estado tensional en el espacio de tensiones principales. Esto es:

$$\mathcal{F}(I_1, J_2, \theta, c, \phi) = \frac{I_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_2} \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta \sin \phi}{\sqrt{3}} \right) - c \cos \phi = 0 \quad (\text{Ap-1.85})$$

o idénticamente, se puede presentar en función de los invariantes definidos en el espacio de Westergard:

$$\mathcal{F}(\rho, \xi, \theta, c, \phi) = \sqrt{2} \xi \sin \phi + \sqrt{3} \rho \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta \sin \phi}{\sqrt{3}} \right) - \sqrt{6} c \cos \phi = 0 \quad (\text{Ap-1.86})$$

Se puede ver en las ecs.(Ap-1.84), (Ap-1.85) y (Ap-1.86), que el criterio de Mohr-Coulomb representa en el espacio de tensiones principales una pirámide de base hexagonal distorsionada, con eje coincidente con el de presión hidrostática $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$ fig.(Ap-1.11,a). Esto se debe a que en el plano octaédrico representa un hexágono deformado que crece a medida que se incrementa la presión hidrostática $\sigma_{oct} = \frac{I_1}{3}$ fig.(Ap-1.11,c). De la intersección del plano meridiano de tracción máxima, $(\theta = -\frac{\pi}{6})$, con la superficie de fluencia resulta una recta de

pendiente: $\frac{2\sqrt{3} \sin \phi}{3 + \sin \phi}$, que corta el eje de tensión cortante octaédrica en: $\rho_T^0 = \frac{2c \sqrt{6} \cos \phi}{3 + \sin \phi}$ y

al eje de tensión normal octaédrica en: $\xi^0 = \sqrt{3} c \cot \phi$. De la intersección del plano meridiano de compresión máxima, $(\theta = +\frac{\pi}{6})$, con la superficie de fluencia resulta una recta de

pendiente mayor que el meridiano de tracción: $\frac{2\sqrt{3} \sin \phi}{3 - \sin \phi}$, que corta el eje de tensión cortante

octaédrica en: $\rho_C^0 = \frac{2c\sqrt{6}\cos\phi}{3-\sin\phi}$ y al eje de tensión normal octaédrica en el mismo punto que el meridiano de tracción fig.(Ap-I.11,b). En el plano $\sigma_1, \sigma_2 = 0, \sigma_3$ representa un hexágono deformado que se orienta según el eje de tensiones $\sigma_1 = \sigma_3$ fig.(Ap-I.11,d).

De las funciones que describen el criterio de fluencia de Mohr-Coulomb y de la fig.(Ap-I.11), resulta claro que este criterio trata en forma diferenciada el comportamiento tensional a tracción y a compresión, admitiendo una relación entre resistencias uniaxiales $R_{Mohr} = \frac{|\sigma_C^0|}{|\sigma_T^0|}$, que solo depende de la magnitud del ángulo de rozamiento interno ϕ fig.(Ap-I.11,d). Esto se puede comprobar escribiendo la ec.(Ap-I.84) a partir de la convención: $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$, por lo tanto $\sigma^{max} = \sigma_1$, y $\sigma^{min} = \sigma_3$:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \sigma_1 \frac{(1 + \sin \phi)}{(1 - \sin \phi)} - 2c \frac{\cos \phi}{(1 - \sin \phi)} \quad , \\ \sigma_3 &= \sigma_1 \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) - 2c \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad , \quad (Ap-I.87) \\ \sigma^{min} &= \sigma^{max} \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) - 2c \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad , \end{aligned}$$

pero haciendo:

$$R_{Mohr} = \frac{|\sigma_C^0|}{|\sigma_T^0|} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad , \quad (Ap-I.88)$$

resulta la siguiente expresión del criterio de Mohr-Coulomb :

$$\sigma^{min} = \sigma^{max} R_{Mohr} - 2c \sqrt{R_{Mohr}} \quad (Ap-I.89)$$

Puesto que las tensiones principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ pueden ir tomando, de una a la vez, los valores de σ^{max} y σ^{min} , resultan de la ec.(Ap-I.89) seis planos en el espacio de tensiones principales, que establecen las seis condiciones de fluencia plástica que delimitan el dominio piramidal del criterio de Mohr-Coulomb. Para expresar estas seis condiciones se estudiará el caso particular de un problema plano, con $\sigma_2 = 0$ fig.(Ap-I.11,d), que permitirá obtener seis ecuaciones de rectas que demarquen el dominio de este criterio en el plano $\sigma_1 - \sigma_3$. Esto es:

o Condición 1-(Tracción-Compresión). Para $\sigma_3 = \sigma^{min} \leq 0 \leq \sigma_1 = \sigma^{max}$, resulta de la ec.(Ap-I.89):

$$-\sigma_3 = \sigma_1 R_{Mohr} - 2c \sqrt{R_{Mohr}} \Rightarrow \begin{cases} \text{Para } \sigma_3 = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{2c}{\sqrt{R_{Mohr}}} \\ \text{Para } \sigma_1 = 0 \Rightarrow \sigma_3 = 2c\sqrt{R_{Mohr}} \end{cases} \quad (Ap-I.90)$$

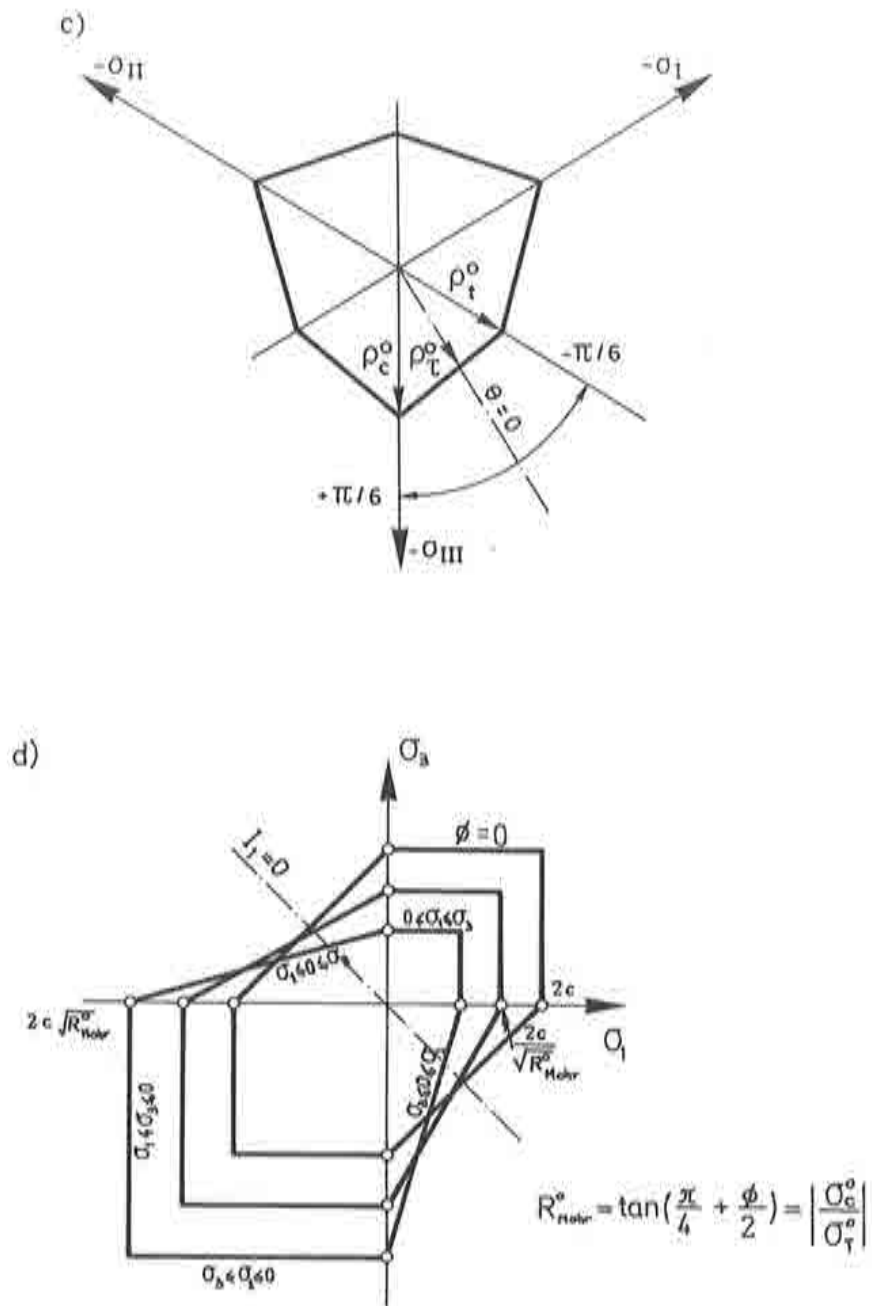


fig.(Ap-I.11): Criterio de fluencia de Mohr-Coulomb;
 c) Según el plano octaédrico $I_1 = 0$ o plano π ;
 d) Según el plano $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$.

- o **Condición 2**-(Compresión-Compresión). Para $\sigma_3 = \sigma^{\min} \leq \sigma_1 = \sigma^{\max} \leq 0$, resulta de la ec.(Ap-I.89):

$$-\sigma_3 = -\sigma_1 R_{Mohr} - 2c \sqrt{R_{Mohr}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Para } \sigma_1 = 0 \Rightarrow \sigma_3 = 2c\sqrt{R_{Mohr}} \end{array} \right. \quad (\text{Ap-I.91})$$

- o **Condición 3**-(Compresión-Compresión). Para $\sigma_1 = \sigma^{\min} \leq \sigma_3 = \sigma^{\max} \leq 0$, resulta de la ec.(Ap-I.89):

$$-\sigma_1 = -\sigma_3 R_{Mohr} - 2c \sqrt{R_{Mohr}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Para } \sigma_3 = 0 \Rightarrow \sigma_1 = 2c\sqrt{R_{Mohr}} \end{array} \right. \quad (\text{Ap-I.92})$$

- o **Condición 4**-(Compresión-Tracción). Para $\sigma_1 = \sigma^{\min} \leq 0 \leq \sigma_3 = \sigma^{\max}$, resulta de la ec.(Ap-I.89):

$$-\sigma_1 = \sigma_3 R_{Mohr} - 2c \sqrt{R_{Mohr}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Para } \sigma_1 = 0 \Rightarrow \sigma_3 = \frac{2c}{\sqrt{R_{Mohr}}} \\ \text{Para } \sigma_3 = 0 \Rightarrow \sigma_1 = 2c\sqrt{R_{Mohr}} \end{array} \right. \quad (\text{Ap-I.93})$$

- o **Condición 5**-(Tracción-Tracción). Para $0 \leq \sigma_1 = \sigma^{\min} \leq \sigma_3 = \sigma^{\max}$, resulta de la ec.(Ap-I.89):

$$\sigma_1 = \sigma_3 R_{Mohr} - 2c \sqrt{R_{Mohr}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Para } \sigma_1 = 0 \Rightarrow \sigma_3 = \frac{2c}{\sqrt{R_{Mohr}}} \end{array} \right. \quad (\text{Ap-I.94})$$

- o **Condición 6**-(Tracción-Tracción). Para $0 \leq \sigma_3 = \sigma^{\min} \leq \sigma_1 = \sigma^{\max}$, resulta de la ec.(Ap-I.89):

$$\sigma_3 = \sigma_1 R_{Mohr} - 2c \sqrt{R_{Mohr}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Para } \sigma_3 = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{2c}{\sqrt{R_{Mohr}}} \end{array} \right. \quad (\text{Ap-I.95})$$

A partir de estas condiciones de fluencia, se puede verificar la relación entre resistencias uniaxiales a compresión y tracción ec.(Ap-I.88). Por ejemplo, a partir de la ec.(Ap-I.90) se tiene:

$$\sigma_1 = \sigma^{\max} = \frac{2c}{\sqrt{R_{Mohr}}} ; \quad \sigma_3 = \sigma^{\min} = 2c\sqrt{R_{Mohr}} , \quad (\text{Ap-1.96})$$

y de aquí resulta:

$$2c = \sigma^{\max} \sqrt{R_{Mohr}} = \frac{\sigma^{\min}}{\sqrt{R_{Mohr}}} \Rightarrow R_{Mohr} = \frac{|\sigma_C^0|}{|\sigma_T^0|} \quad (\text{Ap-1.97})$$

Entre las principales desventajas que presenta el uso de este criterio de fluencia plástica, se pueden mencionar:

- No tiene en cuenta la influencia de la tensión principal intermedia σ_2 , resultando un material con igual resistencia para un estado de compresión biaxial simétrico, que para un estado de compresión uniaxial simple. Los ensayos físicos [74][136], muestran que para alcanzar la resistencia máxima en un estado de compresión biaxial simétrico, es necesario aplicar componentes de tensión algo mayor que la componente correspondiente a un estado de compresión uniaxial. (por ej.: en hormigones sometidos a compresión doble simétrica se alcanzan resistencias 1.16 veces mayor que a compresión uniaxial [74]).
- Los meridianos de tracción y compresión describen líneas rectas ya que son funciones lineales del primer invariante del tensor de tensiones I_1 . Esta aproximación resulta deficiente si se trabaja con estados de tensión hidrostática muy altos, siendo necesario para altas presiones que las curvas de los meridianos de tracción y compresión sean paralelas (Dentro del rango habitual de trabajo de los hormigones no se alcanzan presiones hidrostáticas que hagan necesario considerar esta situación, siendo bastante aproximado considerar meridianos rectos (*apart. IV, 5*) [78]). Entre los criterios de fluencia que satisfacen esta condición se encuentra el conocido con el nombre de *cap-model* [43][131].
- La relación entre resistencias uniaxiales de compresión y tracción *ec.*(Ap-1.88) depende solamente del ángulo de rozamiento interno ϕ , lo que hace difícil adaptar este criterio a un gran número de materiales. En el caso particular de los hormigones se tiene una relación máxima de $R_{Mohr} = |\sigma_C^0|/|\sigma_T^0| \simeq 10.0$ con un ángulo de rozamiento interno $\phi \simeq 32^\circ$. Si se observa la *fig.*(Ap-1.12), esta situación no puede ser satisfecha con el criterio estandar de Mohr-Coulomb. Entre las alternativas más utilizadas para solucionar este problema está la de usar Mohr-Coulomb en la zona de compresión, y en la zona de tracción un *límite de tensión* del tipo Rankine [33], pero la combinación de criterios de fluencia provoca serias singularidades en la zona de unión de ambas superficies si se pretende utilizar el criterio de fluencia como criterio de potencial plástico. Otra forma de resolver el problema es mediante la utilización de un ángulo de rozamiento interno ficticio muy alto $\phi \simeq 55^\circ$ que permita alcanzar una relación de resistencias uniaxiales $R_{Mohr} = |\sigma_C^0|/|\sigma_T^0| \simeq 10.0$. Esta última solución, en

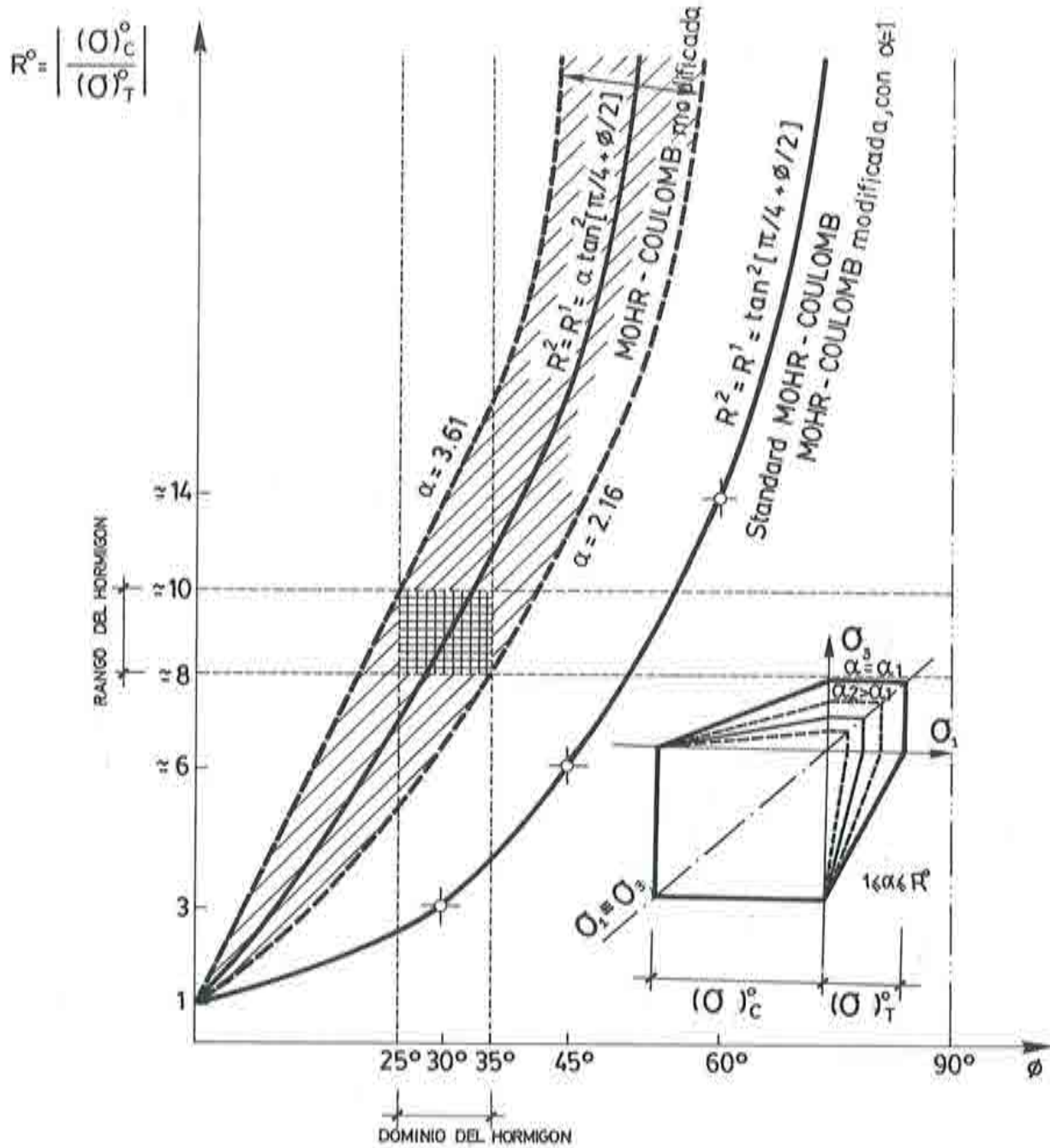


fig.(Ap-I.12): Relación entre el ángulo de rozamiento interno y el parámetro $R_{Mohr} = |\sigma_c^0|/|\sigma_T^0|$

el caso de que se utilice la superficie de fluencia como función de potencial plástico, trae aparejado un excesivo efecto de dilatación fig.(Ap-I.11,b), debido a que al crecer

el ángulo ϕ crece la componente de deformación plástica que provoca este efecto (crecimiento de ϵ_p^0) (apart.IV.4.d).

Criterio de fluencia plástica de Drucker-Prager.

Este criterio, formulado por Drucker y Prager en 1.952, es considerado como una aproximación alisada del criterio de Mohr-Coulomb para evitar sus aristas que producen problemas numéricos cuando se trabaja con plasticidad asociada (ver al final de este apéndice: regla de flujo en puntos singulares (apart. Ap-I.3.h)).

La formulación matemática de este criterio surge como una simple modificación del criterio de Von Mises, donde se incluye el efecto de la presión hidrostática influenciada por una función del ángulo de rozamiento interno $\bar{\alpha}(\phi)$. También depende del segundo invariante del tensor desviador de tensiones J_2 y es independiente de su tercer invariante J_3 . Es un criterio que depende de dos parámetros, siendo éstos la *cohesión interna* entre partículas del sólido c y el *rozamiento interno* entre ellas ϕ .

Su expresión matemática, en función de los invariantes del tensor de tensiones y su tensor desviador, es :

$$\mathcal{F}(I_1, J_2, c, \phi) = \bar{\alpha} I_1 + \sqrt{J_2} - \bar{K}(\kappa) = 0 \tag{Ap-I.98}$$

o idénticamente, se puede presentar en función de los invariantes definidos en el espacio de Westergard:

$$\mathcal{F}(\rho, \xi, c, \phi) = \bar{\alpha} \sqrt{6} \xi + \rho - \sqrt{2} \bar{K}(\kappa) = 0 \tag{Ap-I.99}$$

donde $\bar{\alpha}(\phi)$ y $\bar{K}(\kappa)$ son multiplicadores positivos que permiten ajustar este criterio de fluencia al de Mohr-Coulomb. En el caso particular que $\bar{\alpha} = 0$ se transforma en la teoría de Von Mises *ec.(Ap-I.75)*.

Este criterio de fluencia representa un cono de base circular en el *espacio de tensiones principales*, orientado según el eje de presiones hidrostáticas $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ *fig.(Ap-I.13,a)*. Esto se debe a que el plano octaédrico es una circunferencia que mantiene su geometría, pero cambia su dimensión en función lineal del primer invariante del tensor de tensiones I_1 *fig.(Ap-I.13,c)*. De la intersección del *plano meridiano de tracción máxima*, ($\theta = -\frac{\pi}{6}$), con la superficie de fluencia resulta una recta de pendiente: $\sqrt{\bar{\alpha}}$, que corta al eje de tensión cortante octaédrica en: $\rho_2^0 = \sqrt{2} \bar{K}$ y al eje de tensión normal octaédrica en: $\xi^0 = \frac{\bar{K}}{\sqrt{3} \bar{\alpha}}$. Debido a que este criterio no tiene en cuenta la influencia del tercer invariante del tensor desviador de tensiones, la intersección del *plano meridiano de compresión máxima*, ($\theta = +\frac{\pi}{6}$), con la superficie de fluencia da una recta de igual pendiente que la del meridiano de tracción, coincidiendo también en los puntos de intersección con los ejes octaédricos *fig.(Ap-I.13,b)*. En el *plano* $\sigma_1, \sigma_2 = 0, \sigma_3$ representa un elipse del tipo de la de Von Mises, pero desplazada de su centro por influencia del primer invariante del tensor de tensiones *fig.(Ap-I.13,d)*. Esto es, particularizando la *ec.(Ap-I.98)* en el plano $\sigma_1 - \sigma_3$ resulta:

$$\sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3)} - r = 0 \quad (\text{Ap-I.100})$$

o que es lo mismo:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{3} r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{\sqrt{3} r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 \sigma_3}{3 r^2}\right) - 1 = 0 \quad (\text{Ap-I.101})$$

con:

$$r = \bar{K} - \bar{\alpha}(\sigma_1 + \sigma_3)$$

Esta curva, que está en el plano $\sigma_1 - \sigma_3$, corta los ejes coordenados en:

$$\text{para: } \sigma_1 = 0 \Rightarrow r = \bar{K} - \bar{\alpha} \sigma_3 \Rightarrow \sigma_3 = \frac{\sqrt{3} \bar{K}}{\bar{\alpha} \sqrt{3} \pm 1}, \quad (\text{Ap-I.102})$$

$$\text{para: } \sigma_3 = 0 \Rightarrow r = \bar{K} - \bar{\alpha} \sigma_1 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{\sqrt{3} \bar{K}}{\bar{\alpha} \sqrt{3} \pm 1},$$

y al eje de presiones hidrostáticas en:

$$\text{para: } \sigma_1 = \sigma_3 = \sigma \Rightarrow r = \bar{K} - 2 \bar{\alpha} \sigma \Rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{3} \bar{K}}{2 \bar{\alpha} \sqrt{3} \pm 1} \quad (\text{Ap-I.103})$$

Resultando de éstas, las siguientes relaciones de resistencias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{uniaxial: } R_{\text{Druck}} = \frac{|\sigma_C^0|}{|\sigma_T^0|} = \frac{\frac{\sqrt{3} \bar{K}}{\bar{\alpha} \sqrt{3} - 1}}{\frac{\sqrt{3} \bar{K}}{\bar{\alpha} \sqrt{3} + 1}} = \frac{\bar{\alpha} \sqrt{3} + 1}{\bar{\alpha} \sqrt{3} - 1}, \\ \text{biaxial simétrica (45°): } R_{\text{Druck}}^{45^\circ} = \frac{|\sigma_C^{45^\circ}|}{|\sigma_T^{45^\circ}|} = \frac{2 \bar{\alpha} \sqrt{3} + 1}{2 \bar{\alpha} \sqrt{3} - 1}. \end{array} \right. \quad (\text{Ap-I.104})$$

Entre los distintos caminos que hay para obtener las magnitudes de las *constantes de ajuste* $\bar{\alpha}$ y \bar{K} , se han elegido aquellos que resultan de exigir la coincidencia del criterio de Drucker-Prager con el de Mohr-Coulomb en: a.- sus meridianos de tracción máxima y b.- en sus meridianos de compresión máxima.

- Constante de ajuste que resulta de exigir que el criterio de Drucker-Prager coincida con el de Mohr-Coulomb en sus meridianos de tracción máxima:

$$\begin{cases} (\rho_T^0)_{Mohr} = (\rho_T^0)_{Druck} \Rightarrow \frac{2 c \sqrt{6} \cos \phi}{3 + \sin \phi} = \sqrt{2} \bar{\kappa} , \\ (\xi^0)_{Mohr} = (\xi^0)_{Druck} \Rightarrow \sqrt{3} c \cot \phi = \frac{\bar{\kappa}}{\sqrt{3} \bar{\alpha}} . \end{cases} \quad (Ap-I.105)$$

resultando de este sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{ins} &= \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)} , \\ \bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{ins} &= \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)} . \end{aligned} \quad (Ap-I.106)$$

Estas dos constantes sustituidas en las ecs.(Ap-I.98) y (Ap-I.99) describen un cono inscrito en la pirámide de Mohr-Coulomb, coincidiendo ambos criterios en los meridianos de tracción fig.(Ap-I.14).

- Constante de ajuste que resulta de exigir que el criterio de Drucker-Prager coincida con el de Mohr-Coulomb en sus meridianos de compresión máxima:

$$\begin{cases} (\rho_C^0)_{Mohr} = (\rho_C^0)_{Druck} \Rightarrow \frac{2 c \sqrt{6} \cos \phi}{3 - \sin \phi} = \sqrt{2} \bar{\kappa} , \\ (\xi^0)_{Mohr} = (\xi^0)_{Druck} \Rightarrow \sqrt{3} c \cot \phi = \frac{\bar{\kappa}}{\sqrt{3} \bar{\alpha}} . \end{cases} \quad (Ap-I.107)$$

resultando de este sistema de ecuaciones:

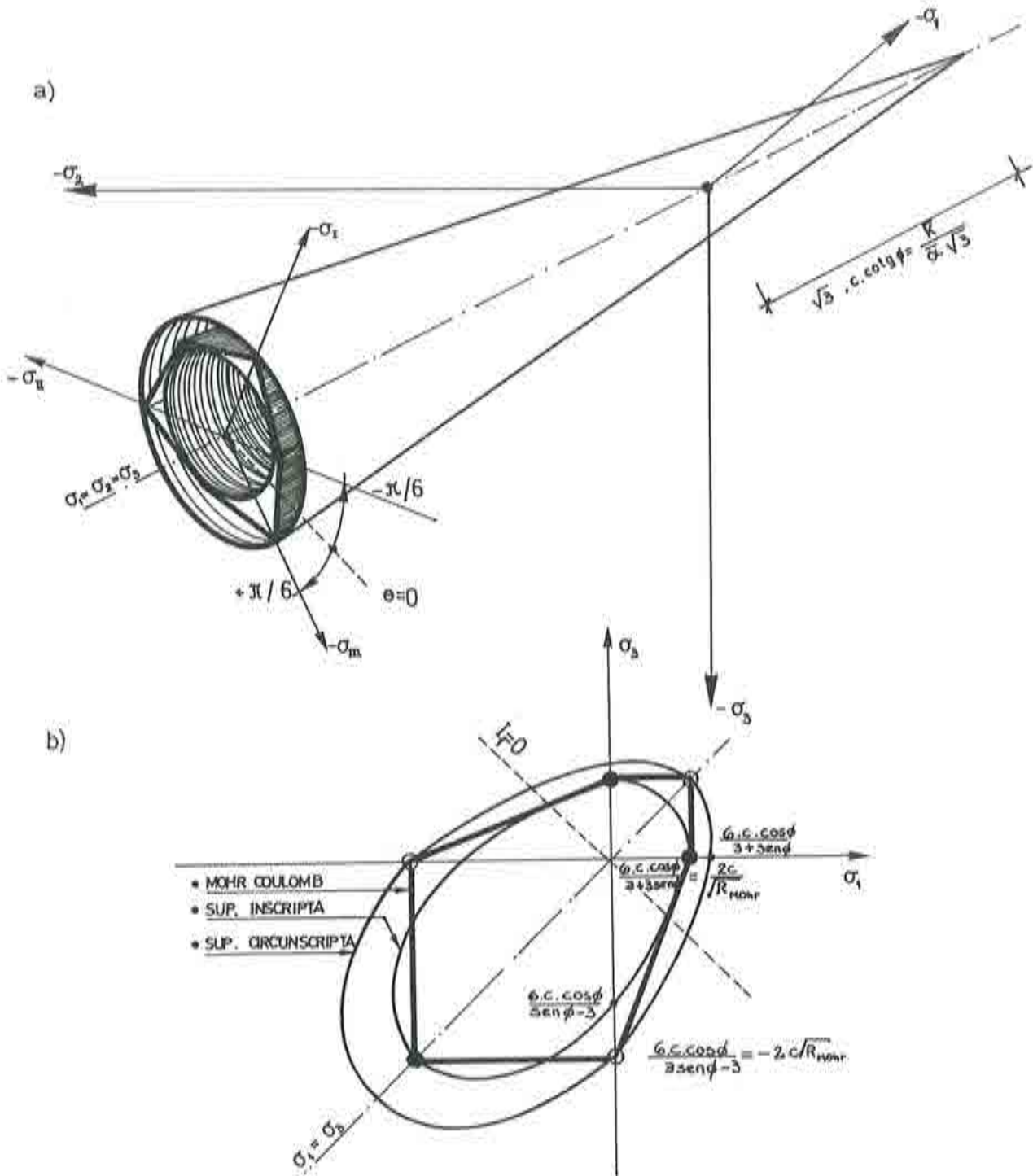


fig.(Ap-1.14): Relación entre los criterios de Mohr-Coulomb y Drucker-Prager:
 a) En el espacio de tensiones principales o espacio de Westergard;
 b) Según el plano $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$.

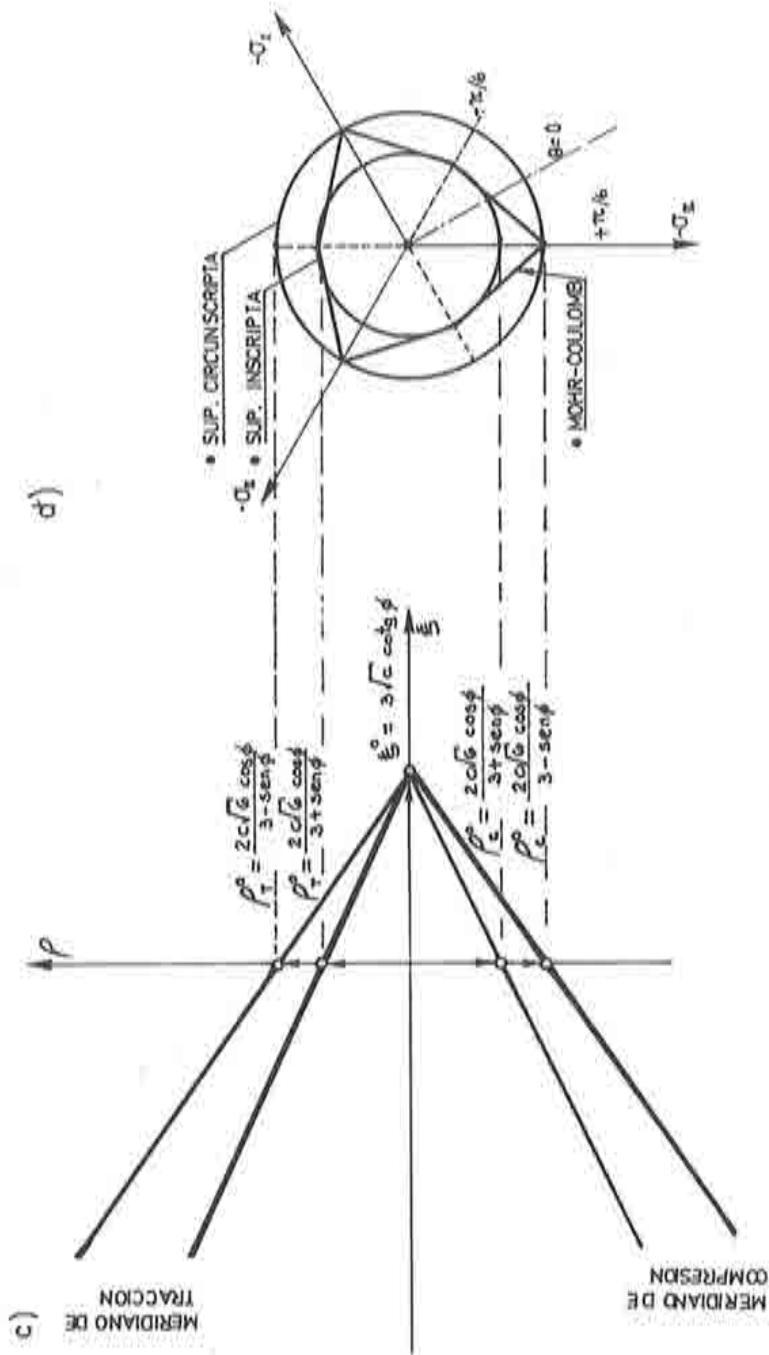


fig.(Ap-I.14): Comparación entre los criterios de Mohr-Coulomb y Drucker-Prager:
 c) Según los meridianos de tracción y compresión máxima.
 d) Según el plano octaédrico $I_1 = 0$ o plano π ;

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{cir} = \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} \quad (Ap-1.108)$$

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{cir} = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)}$$

Estas dos constantes sustituidas en las *ecs.*(Ap-1.98) y (Ap-1.99) describen un cono que circunscribe la pirámide de Mohr-Coulomb, coincidiendo ambos criterios en los meridianos de tracción fig.(Ap-1.14).

Entre las principales desventajas que presenta el uso de este criterio de fluencia plástica, se pueden mencionar:

- Al igual que en la superficie de Mohr-Coulomb, los meridianos de tracción y compresión máxima describen líneas rectas o paralelas, (función lineal de I_1), resultando deficiente su utilización en problemas con grandes presiones hidrostáticas.
- No depende del tercer invariante del tensor desviador de tensiones J_3 , incorporando mayores dificultades que el criterio de Mohr-Coulomb para ajustar el comportamiento de los geomateriales en su rango total de aplicación, (plano octaédrico circular: para cada $\xi \Rightarrow [\rho = cte. \forall \theta]$).
- La relación entre resistencias uniaxiales de compresión y tracción solamente depende de la magnitud del ángulo de rozamiento interno ϕ , lo que hace difícil su adaptación a las características de un gran número de materiales friccionales.

A continuación se detallarán las razones que llevaron a expresar estas dos últimas desventajas del criterio de Drucker-Prager. Sustituyendo en las *ec.*(Ap-1.104) las constantes de ajustes expresadas en las *ec.*(Ap-1.106) y *ec.*(Ap-1.108), resultan cuatro relaciones tensionales: dos que corresponden a la superficie de fluencia de Drucker-Prager inscrita en la de Mohr-Coulomb y dos que corresponden a la superficie de Drucker-Prager que circunscribe a la de Mohr-Coulomb, respectivamente. Esto es:

$$\text{sustituyendo (Ap-1.106) } \mapsto \text{ (Ap-1.104) : } \begin{cases} (R_{Druck})_{ins} = \frac{3 \sin \phi + 3}{\sin \phi - 3} \\ (R_{Druck}^{45^\circ})_{ins} = \frac{5 \sin \phi + 3}{3 \sin \phi - 3} \end{cases} \quad (Ap-1.109,a)$$

$$\text{sustituyendo (Ap-1.108) } \mapsto \text{ (Ap-1.104) : } \begin{cases} (R_{Druck})_{cir} = \frac{\sin \phi + 3}{3 \sin \phi - 3} \\ (R_{Druck}^{45^\circ})_{cir} = \frac{3 \sin \phi + 3}{5 \sin \phi - 3} \end{cases} \quad (Ap-1.109,b)$$

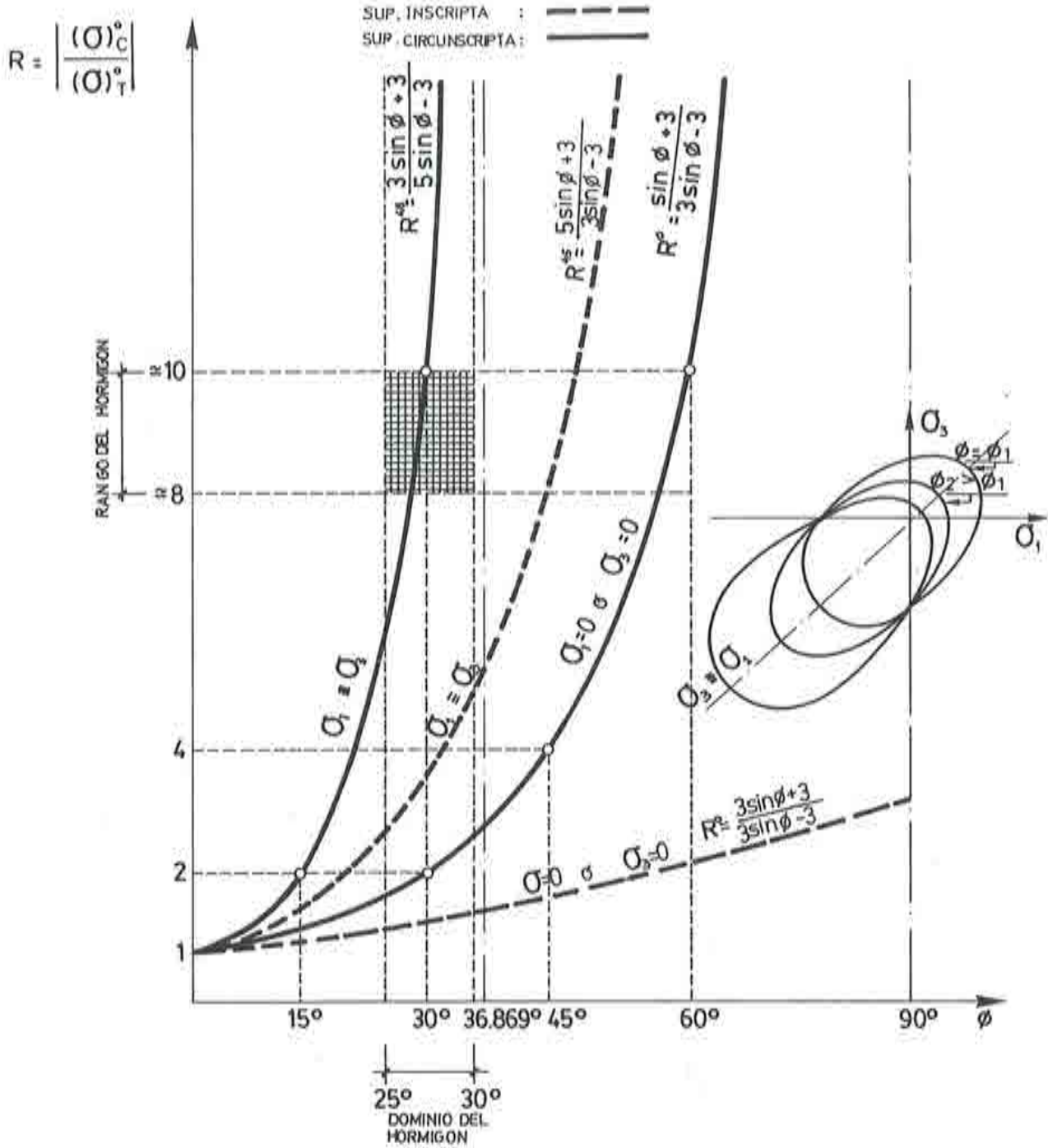


fig.(Ap-I.15):Relación entre el ángulo de rozamiento interno y el prámetro $R_{Druck} = \left| \frac{\sigma_C^0}{\sigma_T^0} \right|$

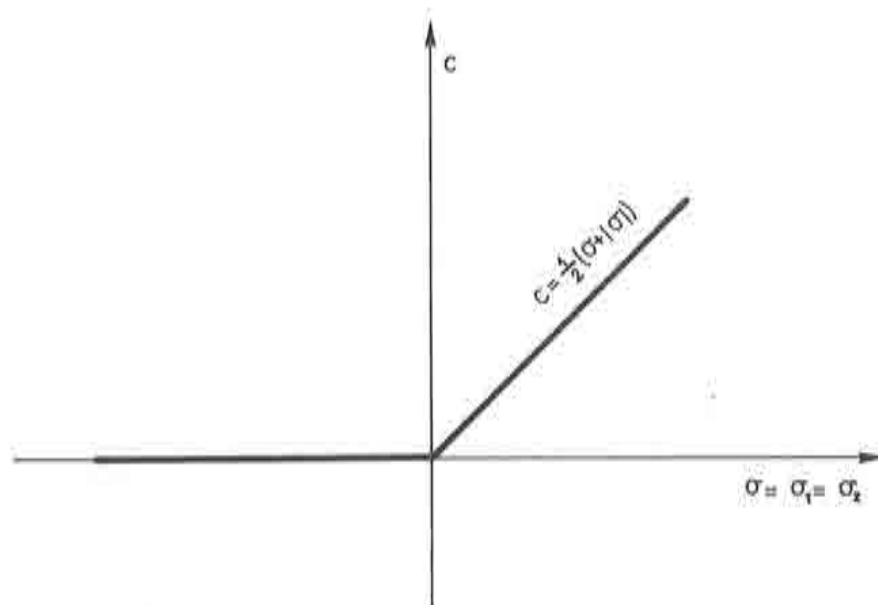


fig.(Ap-I.16): Función de Drucker-Prager para las constantes de ajuste ec.(Ap-I.108), en el caso particular: $\sigma_1 = \sigma_3, \sigma_2 = 0$, $\phi = \arcsin(\frac{3}{5})$.

De analizar las ec.(Ap-I.109,a), para la *superficie inscrita* dentro de la de Mohr-Coulomb, resulta obvio que la función de Drucker-Prager se indetermina en el plano $\sigma_1 - \sigma_3$, para tensiones $-\sigma_1 = -\sigma_3$, en $(R_{Druck}^{45^\circ})_{ins}$ con un ángulo de rozamiento interno de $\phi = \frac{\pi}{2}$ fig.(Ap-I.15). Esto también ocurre en la superficie de Mohr-Coulomb, pero en el criterio de Drucker-Prager hay un problema adicional ya que ni aún para estos ángulos de rozamiento interno tan altos, del orden de $\phi \simeq \frac{\pi}{2}$, se pueden alcanzar relaciones de resistencias uniaxiales superiores a $|R_{Druck}|_{ins} \simeq 3$, magnitud que está muy lejos de la requerida por materiales como los hormigones. Además es necesario observar que estas situaciones extremas conducen a excesivos e irrealistas efectos de dilatancia.

La superficie de Drucker-Prager que *circunscribe* a la de Mohr-Coulomb, permite lograr mayores relaciones de resistencias uniaxial, ec.(Ap-I.109,b) con ángulos de rozamiento más bajos, pero presenta una indeterminación en el plano $\sigma_1 - \sigma_3$, para tensiones $-\sigma_1 = -\sigma_3$, en $(R_{Druck}^{45^\circ})_{ext}$ con un ángulo de rozamiento interno de $\phi = \arcsin(\frac{3}{5}) \simeq 36.8698\dots^\circ$ (valor comprendido dentro de las características del hormigón) fig.(Ap-I.15). Esta indeterminación se debe a un crecimiento desmedido de la superficie en la zona de compresión frente a la de tracción, tal que la curva contenida en el plano meridiano de tracción máxima no alcanza a cortar el plano $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$ fig.(Ap-I.3,a), o en otras palabras que el octante $-\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3$ ha quedado totalmente contenido dentro de la superficie de fluencia plástica. Para este caso particular, la formulación del criterio de Drucker-Prager ec.(Ap-I.98) se reduce a la siguiente expresión matemática:

$$\bar{\alpha} 2 \sigma + \sqrt{\frac{\sigma^2}{3}} - \bar{K} = 0 \quad (Ap-I.110)$$

con: $\sigma = \sigma_1 = \sigma_3, \sigma_2 = 0$

o bien escribiendo la ec.(Ap-I.110) de otro modo, resulta:

$$\sigma = \frac{\sqrt{3} \bar{K}}{2 \sqrt{3} \bar{\alpha} + \text{SIGN}(\sigma)} = \frac{6 c \cos \phi}{4 \sin \phi + \sqrt{3} (3 - \sin \phi) \text{SIGN}(\sigma)} \quad (Ap-I.111)$$

Sustituyendo $\phi = \arcsin(\frac{3}{5})$ en la ec.(Ap-I.108), resulta: $\bar{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ y $\bar{K} = 4 \bar{\alpha} c \Rightarrow \bar{K} = \frac{2}{\sqrt{3}} c$ que reemplazados en la ec.(Ap-I.110) proveen la siguiente relación entre la tensión y la cohesión para este caso particular:

$$c = \frac{1}{2} (\sigma + |\sigma|) = \langle \sigma \rangle \quad (Ap-I.112)$$

Esta particular expresión de la función de Drucker-Prager, representada en el plano $c - \sigma$, permite ver que solo se puede satisfacer la condición de fluencia plástica en el caso particular: $\sigma_1 = \sigma_3, \sigma_2 = 0$, $\phi = \arcsin(\frac{3}{5})$, si y solo si $\sigma \geq 0$, o sea para estados de tracción doble o de tensión nula, ya que en la zona de compresión exige que la cohesión sea nula, situación totalmente inadmisibile fig.(Ap-I.16).

Del análisis de la función de Drucker-Prager que inscribe a la de Mohr-Coulomb, surge que solo es posible su uso con ángulos de rozamiento interno ϕ bastante más bajos que el crítico: $\phi \ll \arcsin(\frac{3}{5})$ y en tal caso se está muy lejos de poder aproximar las propiedades del hornigón.

Ap-I.3.g.- Comentarios sobre la combinación de criterios de fluencia plástica.

Los criterios de fluencia de Tresca y Von Mises fueron formulados para el tratamiento de los materiales metálicos, ajustandose bastante bien a su comportamiento mecánico. No se puede decir lo mismo de los criterios de Mohr-Coulomb y Drucker-Prager, formulados para el tratamiento de los materiales friccionales. Con el fin de solucionar los defectos que presentan estos dos últimos criterios clásicos, normalmente de han seguido tres caminos alternativos:

- 1- Modificar ligeramente un criterio clásico para solucionar un cierto problema puntual. Ver (*anexo-C*): *modificación del criterio de Mohr-Coulomb*. Ver también ref. [33].
- 2- Formular nuevos criterios de fluencia plástica, basados o no en los criterios clásicos, con el fin de mejorar la simulación del comportamiento de los sólidos ideales. Ver

(*apart IV.5.*): *criterio de fluencia propuesto* en esta tesis. Ver también las refs. [36][29][33][34][46][47][51][56][70][72][73][78][87][103][113][131].

- 3- Utilizar distintos criterios de fluencia dentro de cada zona del espacio de tensiones principales (combinación de criterios). Se incluyen aquí los criterios de fluencia *con límite de tensión a tracción* [33][39][54][121][126].

En este apartado solo se hará un comentario sobre la tercera opción para resolver el problema. En general este camino, desde el punto de vista de las técnicas de programación, constituye una opción simple y cómoda que permite considerar uno u otro criterio de fluencia plástica mediante decisiones lógicas. No obstante, esta solución trae problemas desde el punto de vista de la mecánica.

Entre las combinaciones posibles, se tratarán las siguientes:

-1- Criterio de Von Mises a compresión y Rankine (o disminución de tensión) a tracción.

Entre los muchos problemas que presenta esta combinación de criterios, los más serios son:

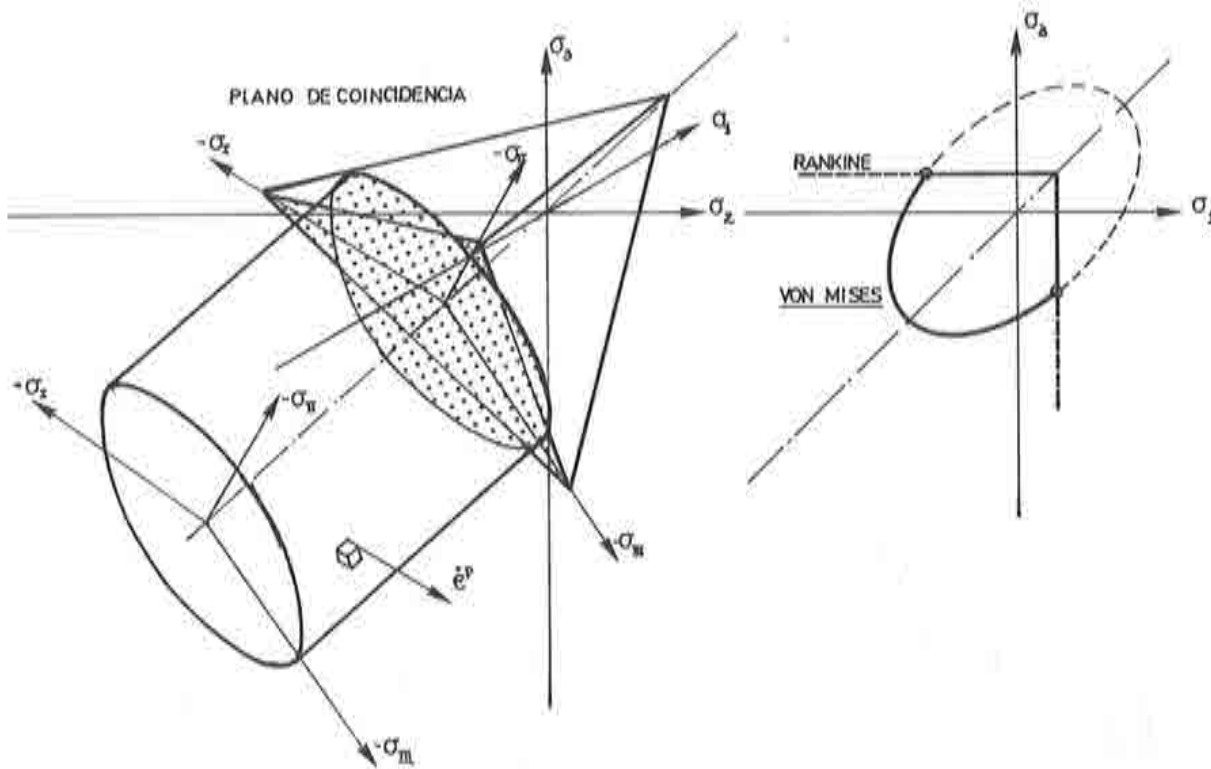


fig.(Ap-1.17): Combinación del criterio de fluencia plástica de Von Mises con el de Rankine en el espacio de Westergard.

- Debido a que la superficie de Von Mises es cilíndrica y la de Rankine una pirámide de base triangular, se presenta una discontinuidad funcional en el *plano o planos de combinación funcional* fig.(Ap-I.17), quedando indefinido, el criterio de fluencia resultante, en esta región. Esto se agrava si se adopta una regla de flujo asociada al criterio de fluencia, ya que se presenta una definición múltiple del flujo plástico en la intersección de ambas superficies. Solamente en el plano $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$ se presenta un caso particular de continuidad funcional con discontinuidad en el flujo plástico fig.(Ap-I.17). Siendo esto último salvable utilizando el criterio de Köiter (*apart. Ap-I.3.h*).
- Los materiales friccionales presentan dilatación $\epsilon_{ij}^p \neq 0$, y esta combinación de criterios de fluencia no tiene en cuenta este efecto en la zona de compresión pura, donde el fenómeno es más importante (desprecia la influencia de I_1), y lo tiene en cuenta en la zona de tracción donde es menos importante debido al bajo nivel de tensiones.
- En la zona de compresión pura desprecia la influencia del tercer invariante del tensor desviador de tensiones J_3 .
- Si se utiliza una variable de endurecimiento simplificada, como la *deformación plástica efectiva* ec.(Ap-I.41), será necesario utilizar una constante c_n para cada superficie de fluencia, esto es:

$$c_n = \begin{cases} (c_n)_{Mises} & \forall I_1 < cte. \\ (c_n)_{Rankine} & \forall I_1 \geq cte. \end{cases} \quad (Ap-I.113)$$

Siendo en estos casos más conveniente trabajar con una variable de endurecimiento del tipo del *trabajo plástico específico* ec.(Ap-I.39).

-2- Criterio de Von Mises a compresión y Mohr-Coulomb a tracción.

Esta combinación, de un cilindro (Von Mises) en la zona de compresión con una pirámide de base exagonal (Mohr-Coulomb) en la zona de tracción, adolece de los mismos defectos que los mencionados en la combinación -1- fig.(Ap-I.10).

-3- Criterio de Von Mises a compresión y Drucker-Prager a tracción.

Se trata de la combinación de un cilindro (Von Mises), en la zona de compresión, con un cono de base circular (Drucker-Prager), en la zona de tracción fig.(Ap-I.19). Tiene una gran ventaja sobre los tratados en los dos apartados anteriores, ya que permite lograr continuidad funcional en los planos de combinación, aunque no en sus derivadas. Debido a esto si se utiliza este criterio de fluencia plástica como criterio de potencial, será necesario definir un flujo único sobre el *plano de combinación*.

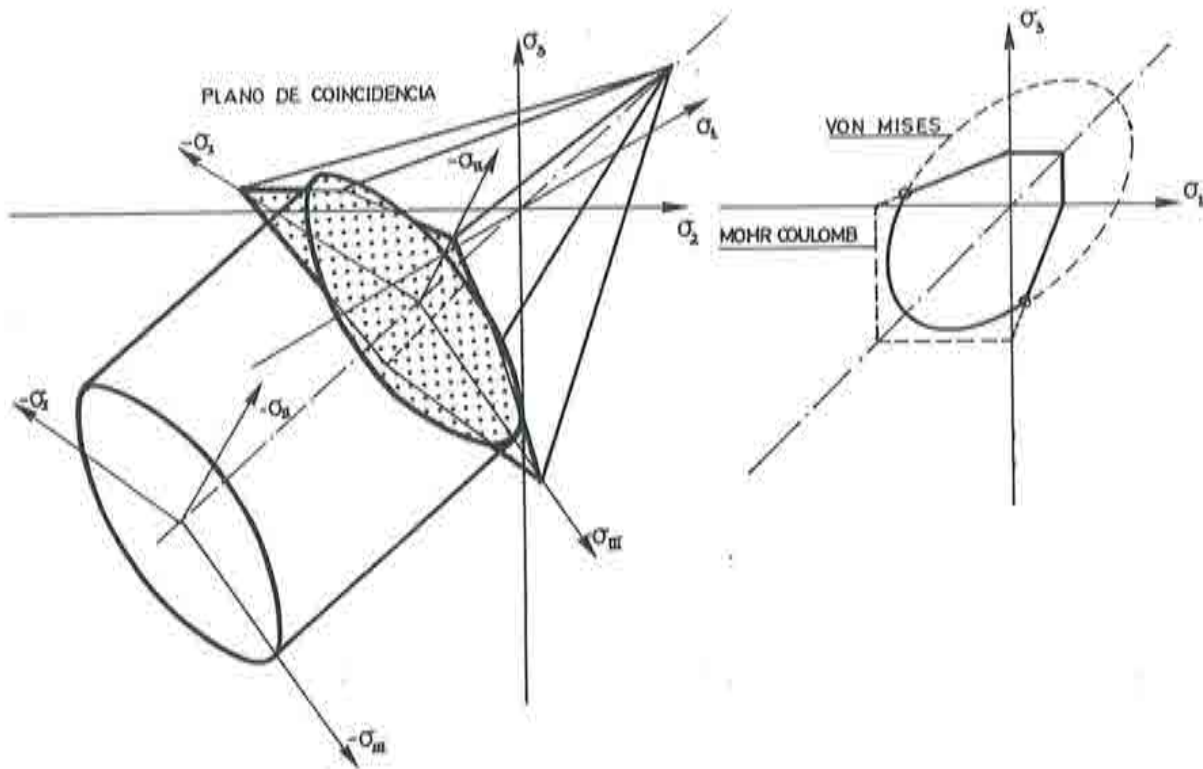


fig.(Ap-I.18): Combinación del criterio de fluencia plástica de Von Mises con el de Mohr-Coulomb en el espacio de Westergard.

Entre los problemas más serios que presenta esta combinación, están:

- Falta total de dilatancia en la zona de compresión, al igual que los tratados anteriormente, debido a que desprecia la influencia del primer invariante del tensor de tensiones en esta zona de trabajo, al igual que las dos combinaciones anteriores.
- Desprecia tanto a tracción como a compresión la influencia del tercer invariante del tensor desviador de tensiones.
- Es necesario trabajar con una variable de endurecimiento plástico del tipo del trabajo plástico específico *ec.*(Ap-I.30), en forma análoga que en las dos combinaciones anteriores.
- Y por último, aparece un problema adicional en la relación de resistencia uniaxial compresión-tracción, que hace que ésta no pueda ser mayor que dos en ningún caso.

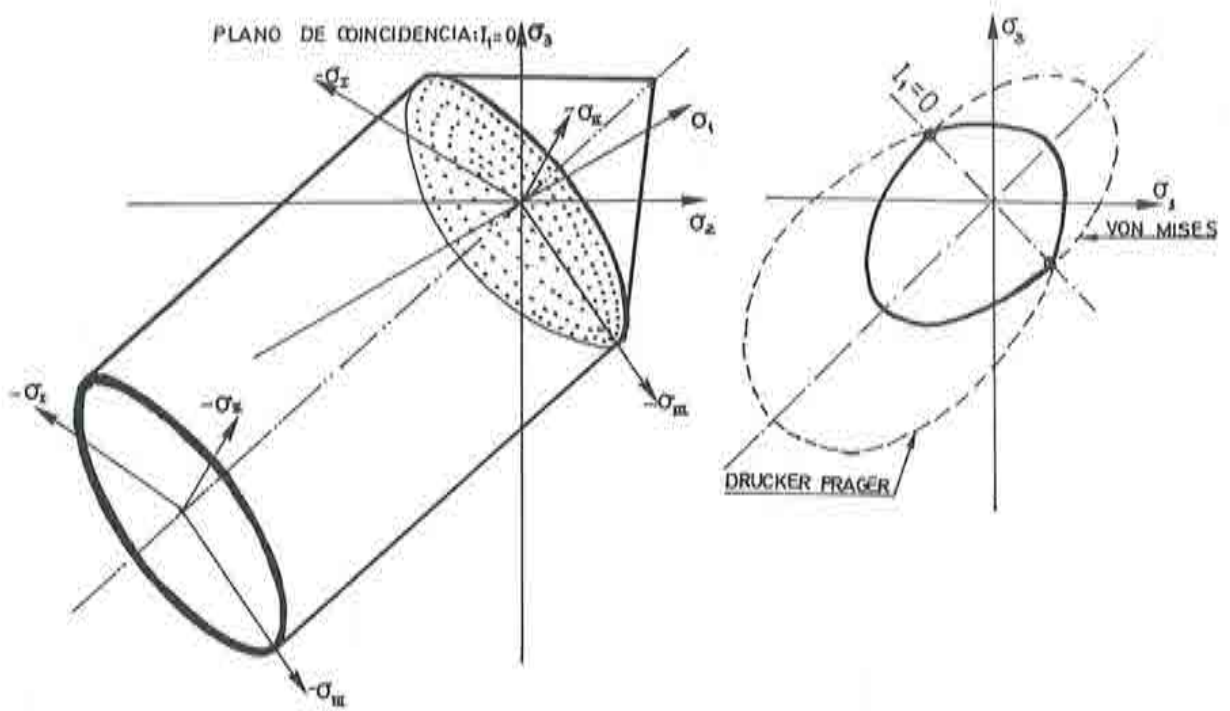


fig.(Ap-I.19): Combinación del criterio de fluencia plástica de Von Mises con el de Drucker-Prager en el espacio de Westergard.

Para explicar este último problema, es conveniente definir previamente la función de fluencia resultante y la condición para que exista coincidencia entre ambas.

$$\mathcal{F}(\sigma, \kappa) = \begin{cases} \sqrt{J_2} - \bar{\kappa}(\kappa) = 0 & ; \quad \forall I_1 < 0 , \\ \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - \bar{\kappa}(\kappa) = 0 & ; \quad \forall I_1 \geq 0 . \end{cases} \quad (\text{Ap-I.114})$$

La función de endurecimiento de la ec.(Ap-I.114,a) debe coincidir con el de la ec.(Ap-I.114,b) en el plano de coincidencia, que por simplicidad elegiremos $I_1 = 0$. Para ello debe cumplirse que:

$$\mathcal{K}(\kappa) \equiv \bar{\mathcal{K}}(\kappa) \quad (\text{Ap-I.115})$$

siendo $\bar{\mathcal{K}}(\kappa)$ la constante de ajuste de Drucker-Prager, definida en las ec.(Ap-I.106) o ec.(Ap-I.108), según se elija un cono inscrito o circunscrito a la superficie de Mohr-Coulomb, respectivamente.

Definida la función de fluencia y la condición de coincidencia, se determinarán los límites de tensión uniaxial y biaxial, y a partir de éstos se obtendrán las relaciones de resistencia buscada. Estos límites de tensión resultarán de la función de Drucker-Prager para $I_1 \geq 0$, y de la de Von Mises para $I_1 < 0$.

- o Tensión de compresión uniaxial: sustituyendo $\sigma_3 = \sigma_C < 0, \sigma_2 = \sigma_1 = 0$ en la ec.(114,a) resulta:

$$\frac{|\sigma_C|}{\sqrt{3}} = \bar{\mathcal{K}}(\kappa) \quad (\text{Ap-I.116})$$

$$|\sigma_C| = |\sigma_3| = \sqrt{3} \bar{\mathcal{K}}(\kappa)$$

- o Tensión de tracción uniaxial: sustituyendo $\sigma_1 = \sigma_T > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ en la ec.(114,b), (ver también ec.(Ap-I.102)), resulta:

$$|\sigma_T| = |\sigma_1| = \frac{\sqrt{3} \bar{\mathcal{K}}(\kappa)}{\bar{\alpha} \sqrt{3} + 1} \quad (\text{Ap-I.117})$$

- o Tensión de compresión biaxial doble simétrica: sustituyendo $\sigma_3 = \sigma_2 = \sigma_C^{45^\circ} < 0, \sigma_1 = 0$ en la ec.(114,a) resulta:

$$\frac{|\sigma_C^{45^\circ}|}{\sqrt{3}} = \bar{\mathcal{K}}(\kappa) \quad (\text{Ap-I.118})$$

$$|\sigma_C^{45^\circ}| = \sqrt{3} \bar{\mathcal{K}}(\kappa)$$

- o Tensión de tracción biaxial doble simétrica: sustituyendo $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_T^{45^\circ} > 0, \sigma_3 = 0$ en la ec.(114,b), (ver también ec.(Ap-I.103)), resulta:

$$|\sigma_T^{45^\circ}| = \frac{\sqrt{3} \bar{\mathcal{K}}(\kappa)}{2 \bar{\alpha} \sqrt{3} + 1} \quad (\text{Ap-I.119})$$

De acuerdo a estos límites de tensiones, resultan las siguientes relaciones de tensión máxima:

- relación de resistencia uniaxial : de la ec.(Ap-I.116) y ec.(Ap-I.117) resulta:

$$|R^0| = \frac{|\sigma_C^0|}{|\sigma_T^0|} = \bar{\alpha} \sqrt{3} + 1 \quad (\text{Ap-I.120})$$

- Para el caso en que la superficie de Drucker-Prager esté inscrita a la de Mohr-Coulomb: $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{ins} = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)}$, Resulta de la ec.(Ap-I.120) $\Rightarrow |R^0| = \frac{3+3 \sin \phi}{3+\sin \phi}$; de donde surge que:

$$\text{para : } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \Rightarrow 1 \leq R^0 \leq 1.5 \quad (\text{Ap-I.121})$$

- Para el caso en que la superficie de Drucker-Prager circunscriba a la de Mohr-Coulomb: $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{cir} = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)}$, Resulta de la ec.(Ap-I.120) $\Rightarrow |R^0| = \frac{3+3 \sin \phi}{3-\sin \phi}$; de donde surge que:

$$\text{para : } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \Rightarrow 1 \leq R^0 \leq 2 \quad (\text{Ap-I.122})$$

- relación de resistencia biaxial doble simétrica: de la ec.(Ap-I.118) y ec.(Ap-I.119) resulta:

$$|R^{45^\circ}| = \frac{|\sigma_C^{45^\circ}|}{|\sigma_T^{45^\circ}|} = 2 \bar{\alpha} \sqrt{3} + 1 \quad (\text{Ap-I.123})$$

- Para el caso en que la superficie de Drucker-Prager esté inscrita en la de Mohr-Coulomb: $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{ins} = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)}$, Resulta de la ec.(Ap-I.123) $\Rightarrow |R^{45^\circ}| = \frac{3+5 \sin \phi}{3+\sin \phi}$; de donde surge que:

$$\text{para : } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \Rightarrow 1 \leq R^{45^\circ} \leq 2 \quad (\text{Ap-I.124})$$

- Para el caso en que la superficie de Drucker-Prager circunscriba a la de Mohr-Coulomb: $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{cir} = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)}$, Resulta de la ec.(Ap-I.123) $\Rightarrow |R^{45^\circ}| = \frac{3+3 \sin \phi}{3-\sin \phi}$; de donde surge que:

$$\text{para : } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \Rightarrow 1 \leq R^{45^\circ} \leq 2 \quad (\text{Ap-I.125})$$

De las *ecs.* (Ap-1.121), (Ap-1.122), (Ap-1.124) y (Ap-1.125) queda claro que esta combinación de criterios no admite relaciones de tensión superior a dos en ningún caso.

-4- Criterio de Mohr-Coulomb a compresión y Rankine a tracción.

La combinación de una pirámide de base exagonal (Mohr-Coulomb) en la zona de compresión, con una pirámide de base triangular (Rankine) en la zona de tracción, adolece de los mismos defectos que la combinación -1- fig.(Ap-1.18).

Se podría continuar mencionando criterios de fluencia plástica que surgen de la combinación de otros, pero en general esta solución adolece de los mismos problemas mencionados en los cuatro apartados anteriores. Por esta razón es más conveniente recurrir a la formulación de un criterio único.

Ap-1.3.h.- Regla de flujo en puntos singulares

Se pueden presentar funciones de *potencial plástico* \mathcal{G} con *puntos singulares*, donde la regla de flujo dada en la *ec.* (Ap-1.21) no tenga definición única. Esto significa que en ciertos puntos, la función \mathcal{G} no tiene derivadas continuas (ej.: las funciones de Mohr-Coulomb y Tresca para $\theta = \pm \frac{\pi}{6}$).

Con el fin de establecer una definición única del flujo plástico, W. Köiter ^[71] propuso una generalización de la *ec.* (Ap-1.21), diciendo que: *el incremento temporal de deformación plástica puede ser obtenido como la suma de los subincrementos de deformación plástica que resultan de la contribución de cada una de las "n" superficies de potencial plástico que concurren al punto singular* fig.(Ap-1.20). Esto es:

$$\dot{\epsilon}^p = p^{(1)} \dot{\lambda}^{(1)} \frac{\partial \mathcal{G}^{(1)}}{\partial \sigma} + p^{(2)} \dot{\lambda}^{(2)} \frac{\partial \mathcal{G}^{(2)}}{\partial \sigma} + \dots + p^{(i)} \dot{\lambda}^{(i)} \frac{\partial \mathcal{G}^{(i)}}{\partial \sigma} + \dots + p^{(n)} \dot{\lambda}^{(n)} \frac{\partial \mathcal{G}^{(n)}}{\partial \sigma} \quad (\text{Ap-1.126})$$

siendo $p^{(i)}$ un factor de peso del flujo plástico, correspondiente a la función de potencial $\mathcal{G}^{(i)}$, que varía entre $0 \leq p^{(i)} \leq 1$ y sirve para ajustar la regla de flujo tanto como sea necesario; y

$$\dot{\lambda}^{(i)} = \frac{\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_S \dot{\epsilon}}{\left[-\frac{\partial \mathcal{F}(\kappa)}{\partial \kappa} \left(\mathbf{h}_n^T \frac{\partial \mathcal{G}^{(i)}}{\partial \sigma} \right) \right] + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_S \frac{\partial \mathcal{G}^{(i)}}{\partial \sigma} \right]}, \quad (\text{Ap-1.127})$$

el parámetro de consistencia plástica correspondiente a la función de potencial $\mathcal{G}^{(i)}$. La definición de este parámetro de consistencia, *ec.* (Ap-1.127), es válido siempre que \mathcal{F} tenga primeras derivadas continuas, caso contrario se tendrá en cuenta en la *ec.* (Ap-1.127) la

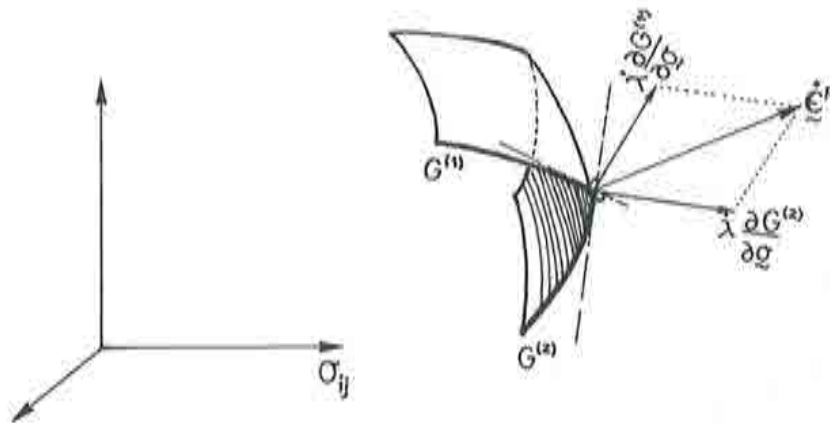


fig.(Ap-I.20): Flujo plástico para una superficie de potencial que presenta puntos singulares

discontinuidad de las derivadas de \mathcal{F} . En el caso de plasticidad asociada $\mathcal{G} \equiv \mathcal{F}$, se deberá también tener en cuenta en la ec.(Ap-I.127) que las derivadas de la función de fluencia plástica son discontinuas.

De esta forma se garantiza en los puntos singulares un flujo plástico único.

Existe otro método para lograr un flujo plástico único en los puntos singulares de la superficie de potencial, cumpliendo así con el requerimiento de Köiter. Éste es conocido como el *método de redondeo de aristas* y fué propuesto por Nayak y Zienkiewicz ⁽⁸⁸⁾.

Para explicar el tratamiento que se da al flujo plástico en los puntos singulares, se presentarán, a modo de ejemplo, los criterios de fluencia de Tresca y Mohr-Coulomb tratados como superficies de potencial plástico. Para ello es necesario definir el criterio en el punto donde se presenta la discontinuidad de su primera derivada. Esto es:

- Criterio de Tresca: Haciendo $\theta = \pm \frac{\pi}{6}$ en la ec.(Ap-I.63), resulta:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(J_2, \theta = \pm \frac{\pi}{6}, \kappa') = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right] - \kappa'(\kappa) = 0 ,$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(J_2, \theta = \pm \frac{\pi}{6}, \kappa') = \sqrt{J_2} - 2 \kappa'(\kappa) = 0 , \tag{Ap-1.128}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(J_2, \theta = \pm \frac{\pi}{6}, \kappa') = \sqrt{J_2} - \kappa(\kappa) = 0$$

Coincidiendo esta última con la expresión matemática de la superficie de Von Mises *ec.(Ap-1.71)*, la cual es continua incluida sus primeras derivadas en todos los puntos, por lo tanto permite definir una dirección única para el vector de flujo plástico en los puntos singulares de la superficie de Tresca *fig.(Ap-1.21)*. Esto se puede interpretar como un redondeo de aristas [63].

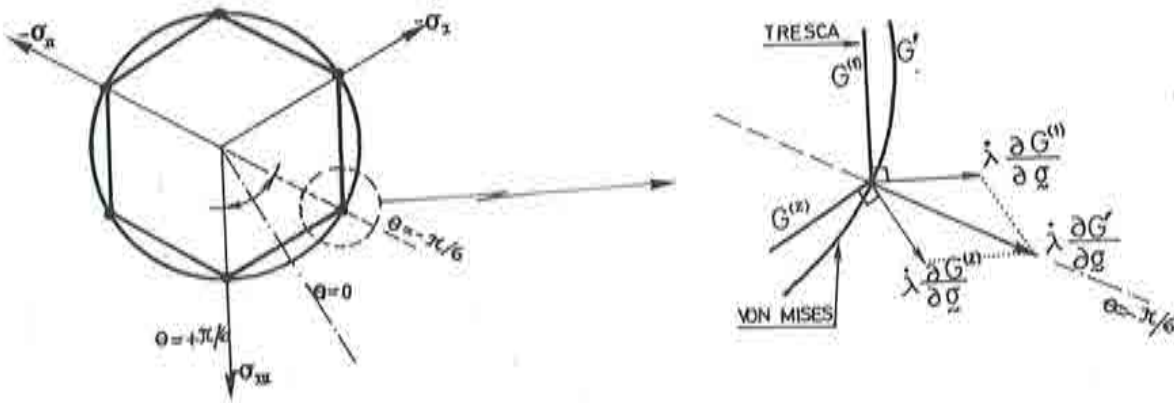


fig.(Ap-1.21): Criterio de Von Mises interpretado como redondeo de aristas del criterio de Tresca.

- Criterio de Mohr-Coulomb - meridianos de compresión: Haciendo $\theta = +\frac{\pi}{6}$ en la *ec.(Ap-1.85)*, resulta:

$$\mathcal{F}(I_1, J_2, \theta = +\frac{\pi}{6}, c, \phi) = \frac{I_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sin \phi}{2\sqrt{3}} \right) - c \cos \phi = 0 ,$$

$$\mathcal{F}(I_1, J_2, \theta = +\frac{\pi}{6}, c, \phi) = \frac{I_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_2} \left(\frac{3 - \sin \phi}{2\sqrt{3}} \right) - c \cos \phi = 0 , \quad (Ap-1.129)$$

$$\mathcal{F}(I_1, J_2, \theta = +\frac{\pi}{6}, c, \phi) = I_1 \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} + \sqrt{J_2} - \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} = 0$$

Comparando esta expresión con la ec.(Ap-1.98), para $\bar{\alpha}$ y \bar{K} dados por la ec.(Ap-1.108), se deduce como conclusión que la superficie de Drucker-Prager (que es continuo incluidas sus derivadas primeras) circunscrita en la de Mohr-Coulomb, provee la dirección única del vector de flujo plástico en los puntos singulares de esta última superficie fig.(Ap-1.22). Esto se puede interpretar como un redondeo de aristas [63] .

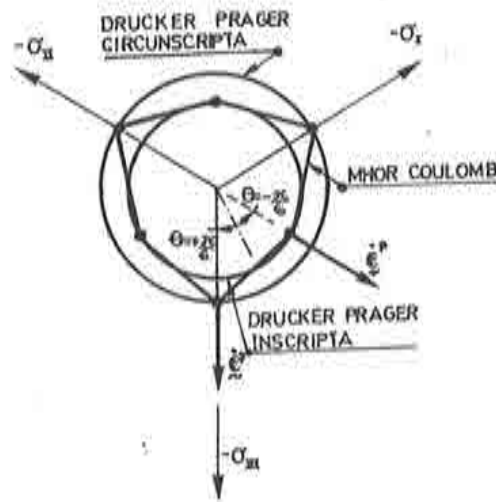


fig.(Ap-1.22): Criterio de Drucker-Prager interpretado como redondeo de aristas del criterio de Mohr-Coulomb.

- Criterio de Mohr-Coulomb - meridianos de tracción: Haciendo $\theta = -\frac{\pi}{6}$ en la ec.(Ap-1.85), resulta:

$$\mathcal{F}(I_1, J_3, \theta = -\frac{\pi}{6}, c, \phi) = I_1 \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} + \sqrt{J_3} - \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} = 0 \quad (\text{Ap-1.130})$$

Comparando esta expresión con la ec.(Ap-1.99), para $\bar{\alpha}$ y \bar{K} dados por la ec.(Ap-1.106), se deduce como conclusión que la superficie de Drucker-Prager (que es continua incluídas sus derivadas primeras) inscrita en la de Mohr-Coulomb, provee la dirección única del vector de flujo plástico en los puntos singulares de esta última superficie fig.(Ap-1.22). Esto, al igual que los casos anteriores se puede interpretar como un redondeo de aristas [63].

(APENDICE I) ANEXO E

TENSOR DE TENSIONES, DEFORMACIONES Y SUS INVARIANTES

An-E.1.- INTRODUCCION.

Los criterios de fluencia, potencial y daño plástico, se formulan a partir del estado de tensiones y/o deformaciones de un punto del sólido. La formulación de estos criterios se simplifica si se trabaja con los *invariantes del tensor de tensiones y deformaciones*. Estos *invariantes*, como su nombre lo expresa, son magnitudes que no sufren alteraciones cuando se cambia la posición de los ejes de referencia.

Se utilizará la siguiente convención de signos para las tensiones y deformaciones fig.(An-E.1):

- Tensiones: *signo positivo* para estados de tracción.
- Deformaciones: *signo positivo* para estados de estiramiento o alargamiento.

An-E.2.- VECTOR DE TENSIONES: ρ_t .

Este vector da la intensidad, dirección y sentido de la tensión en un punto, según un plano cualquiera cuya normal es \vec{l} fig.(An-E.2). Matemáticamente queda definido como:

$$\rho_t = \frac{dP}{dA} \quad (\text{An-E.1})$$

siendo:

ρ_t : Vector de tensiones que representa el estado tensional de un punto según el plano Γ ;

\vec{l} : Versor normal al plano Γ ;

P : Vector de fuerza actuante .

La no coincidencia de las direcciones del vector de tensiones ρ_t con el versor normal \vec{l} , da lugar a dos vectores componentes del de tensiones, σ_{ll} y τ_{ll} uno normal al plano Γ y otro contenido en dicho plano, respectivamente. Esto es:

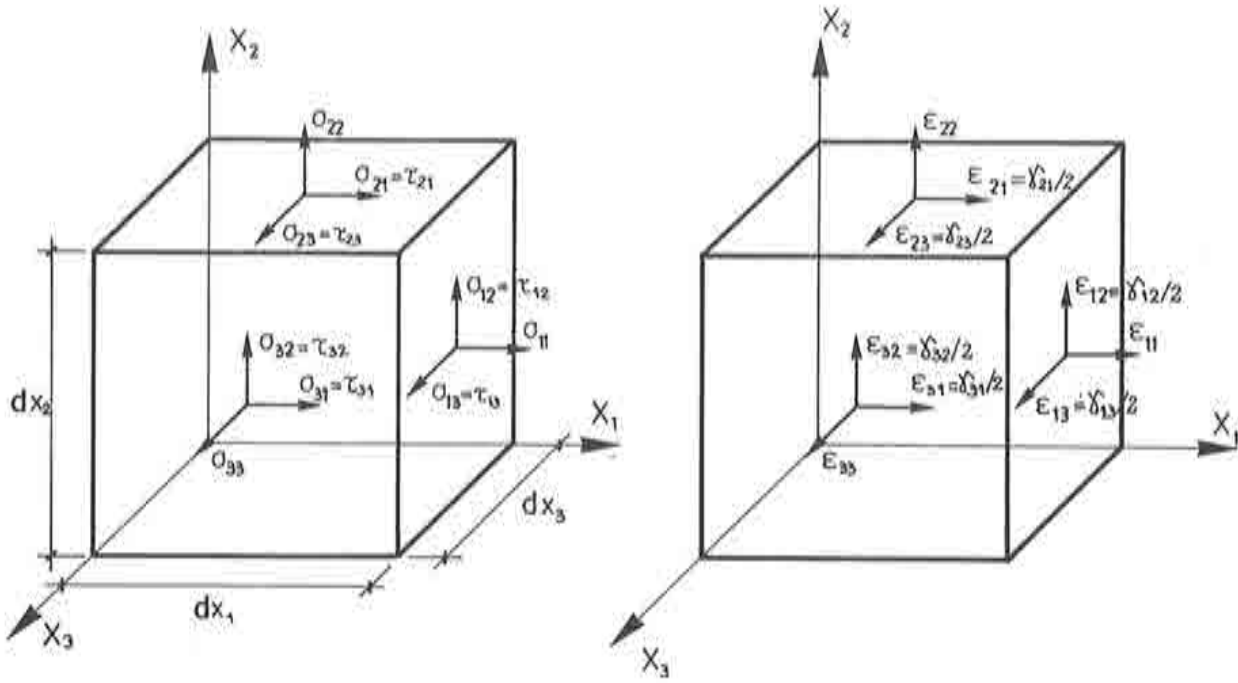


fig.(An-E.1): Estado de tensiones y deformaciones positivas, en un punto del sólido

$$p_l = \sigma_{ll} + \tau_{ll} \quad (An-E.2)$$

$$p_l = \|\sigma_{ll}\| \vec{e} + \|\tau_{ll}\| \vec{e}^*$$

siendo:

- $\|\sigma_{ll}\|$: Módulo de la tensión normal al plano Γ ,
- $\|\tau_{ll}\|$: Módulo de la tensión contenida en el plano Γ ,
- \vec{e}^* : Versor tangencial al plano Γ .

An-E.3.- TENSOR DE TENSIONES: $\underline{\sigma}$:

El estado tensional de un punto puede ser representado mediante tres planos ortogonales fig.(An-E.3) que pasen por dicho punto. En cada plano, el correspondiente *vector de tensiones* puede ser descompuesto en una dirección normal y otra tangencial al mismo; esto es:

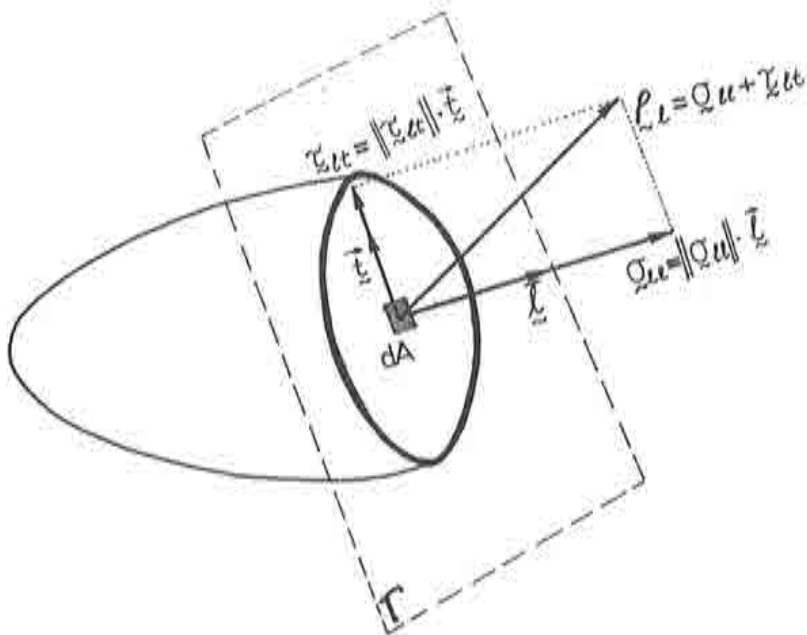


fig.(An-E.2): Vector de tensiones según un plano Γ .

$$\begin{cases} \rho_1 = \{\sigma_{11}, \tau_{1i}\} = \{[\sigma_{11}], [\tau_{12}, \tau_{13}]\} \\ \rho_2 = \{\sigma_{22}, \tau_{2i}\} = \{[\sigma_{22}], [\tau_{21}, \tau_{23}]\} \\ \rho_3 = \{\sigma_{33}, \tau_{3i}\} = \{[\sigma_{33}], [\tau_{31}, \tau_{32}]\} \end{cases}$$

resultando así nueve vectores componentes, asociados a los tres vectores de tensiones correspondientes a tres planos ortogonales entre sí fig.(An-E.3). Estos tres vectores de tensiones dan lugar a un tensor denominado *tensor de tensiones*, de orden dos. Su expresión canónica es:

$$\begin{cases} \rho_1 = \sigma_{11} \vec{v}_1 + \tau_{12} \vec{v}_2 + \tau_{13} \vec{v}_3 \\ \rho_2 = \tau_{21} \vec{v}_1 + \sigma_{22} \vec{v}_2 + \tau_{23} \vec{v}_3 \\ \rho_3 = \tau_{31} \vec{v}_1 + \tau_{32} \vec{v}_2 + \sigma_{33} \vec{v}_3 \end{cases} \quad (\text{An-E.3})$$

en forma indicial resulta:

$$\rho_i = \sigma_{ij} \vec{v}_j \quad (\text{An-E.4})$$

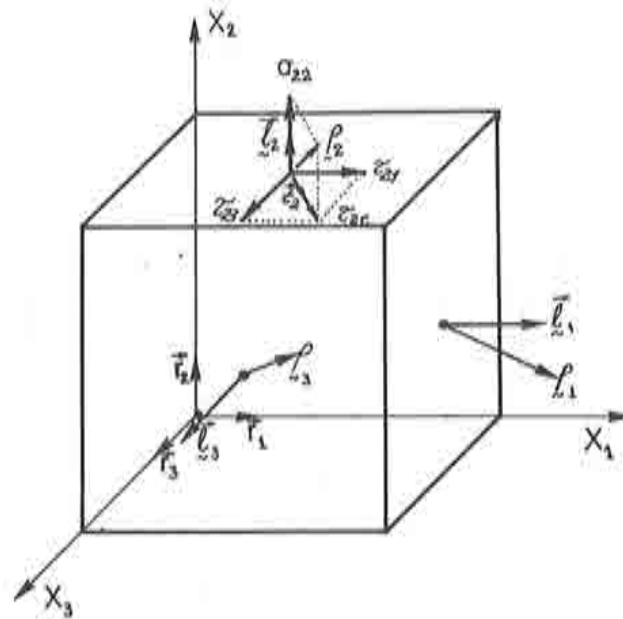


fig.(An-E.3): Representación del estado tensional de un punto según tres planos ortogonales.

o en forma tensorial, queda:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \text{sim.} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ & & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \text{sim.} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ & & \sigma_{33} \end{bmatrix} ;$$

(An-E.5)

con: $\sigma_{ij} \equiv \sigma_{ji}$

$$y : \sigma_{ij} \equiv \begin{cases} \sigma_{ij} & ; \quad \forall i = j \\ \tau_{ij} & ; \quad \forall i \neq j \end{cases}$$

y en forma matricial *, considerando solo la parte simétrica del tensor de tensiones:

* Nota: Cabe observar, que en álgebra matricial una matriz columna recibe el nombre de "vector de tensiones"; pero no tiene el sentido físico dado en el apart. An-E.2., sino solamente el de un //

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{ \begin{matrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{matrix} \right\} \quad (\text{An-E.6})$$

An-E.4.- RELACION ENTRE EL VECTOR DE TENSIONES, CORRESPONDIENTE A UN PLANO CUALQUIERA, Y EL TENSOR DE TENSIONES - TETRAEDRO DE CAUCHY.

Para obtener la relación que hay entre un vector de tensiones correspondiente a un plano cualquiera y los tres vectores asociados a tres planos ortogonales entre sí, es necesario estudiar su estado de equilibrio. Es decir, estudiar el equilibrio entre $\boldsymbol{\rho}_t$ y $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ fig.(An-E.4). Esto es:

$$\boldsymbol{\rho}_t dA - \rho_1 dA_{23} - \rho_2 dA_{13} - \rho_3 dA_{21} = \mathbf{0} \quad , \quad (\text{An-E.7})$$

que escrito en forma indicial resulta:

$$\begin{aligned} \rho_t dA - \rho_i dA_{jk} &= \mathbf{0} \\ \rho_t dA - \rho_i l_i dA &= \mathbf{0} \\ \rho_t - \rho_i l_i &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{An-E.8})$$

siendo:

$$dA_{jk} = l_i dA : \text{ Area del plano } j-k ;$$

$$\vec{l}_i = l_i \vec{r}_i : \text{ Versor normal al plano } j-k ;$$

$$l_i = \begin{cases} l_1 = \cos(\angle AON) , \\ l_2 = \cos(\angle BON) , \\ l_3 = \cos(\angle CON) . \end{cases}$$

Sustituyendo en ésta la ec.(An-E.4), resulta:

$$\boldsymbol{\rho}_t - \sigma_{ij} \vec{r}_j l_i = \mathbf{0} \quad (\text{An-E.9})$$

//conjunto ordenado de magnitudes. Se recurre a esta notación como una forma algorítmica que simplifica el tratamiento de los problemas numéricos.

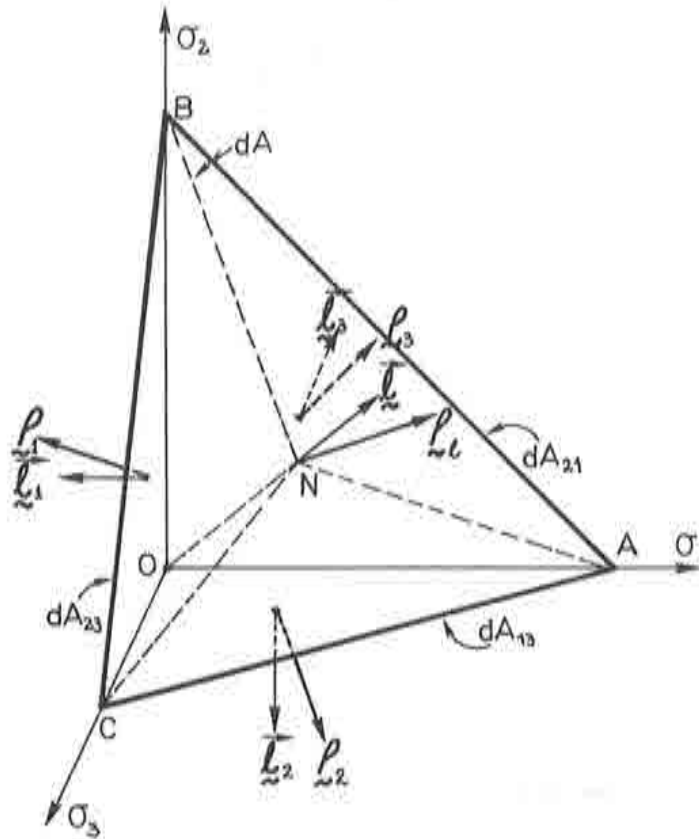


fig.(An-E.4): Relación entre: ρ_l y $\underline{\sigma}$.

Siendo ésta, la ecuación de Cauchy (1822) que relaciona el vector de tensiones, según un plano cualquiera que pase por un punto, con el tensor de tensiones. Desarrollando la ec.(An-E.9), se tiene:

$$\begin{aligned}
 \rho_l &= (\sigma_{11} \vec{r}_1 l_1 + \tau_{12} \vec{r}_2 l_1 + \tau_{13} \vec{r}_3 l_1) + (\tau_{21} \vec{r}_1 l_2 + \sigma_{22} \vec{r}_2 l_2 + \tau_{23} \vec{r}_3 l_2) + \\
 &\quad + (\tau_{31} \vec{r}_1 l_3 + \tau_{32} \vec{r}_2 l_3 + \sigma_{33} \vec{r}_3 l_3) \quad , \\
 \rho_l &= (\sigma_{11} l_1 + \tau_{21} l_2 + \tau_{31} l_3) \vec{r}_1 + (\tau_{12} l_1 + \sigma_{22} l_2 + \tau_{32} l_3) \vec{r}_2 + \\
 &\quad + (\tau_{13} l_1 + \tau_{23} l_2 + \sigma_{33} l_3) \vec{r}_3 \quad , \\
 \rho_l &= \rho_1 \vec{r}_1 + \rho_2 \vec{r}_2 + \rho_3 \vec{r}_3
 \end{aligned}
 \tag{An-E.10}$$

También es habitual encontrar la ecuación de equilibrio de Cauchy, escrita componente a componente. Esto es:

$$\rho_l = \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{Bmatrix} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{\ell} \quad (\text{An-E.11})$$

con:

$$\begin{cases} \rho_1 = (\sigma_{11} \ell_1 + \tau_{21} \ell_2 + \tau_{31} \ell_3) \\ \rho_2 = (\tau_{12} \ell_1 + \sigma_{22} \ell_2 + \tau_{32} \ell_3) \\ \rho_3 = (\tau_{13} \ell_1 + \tau_{23} \ell_2 + \sigma_{33} \ell_3) \end{cases}$$

An-E.5.- DIRECCIONES PRINCIPALES DE TENSION - INVARIANTES DEL TENSOR DE TENSIONES.

Para cada punto del sólido hay infinitos vectores de tensiones, asociados a cada plano que pasa por dicho punto. Interesa encontrar los planos *principales*, que hacen que la tensión normal a él sea máxima. Estas tensiones reciben el nombre de *tensiones principales* y la dirección en que actúan se les llama *direcciones principales*.

El criterio de búsqueda se basa en encontrar un *plano principal*, donde el vector de tensiones coincida con la normal al plano, es decir que su componente tangencial sea nula (la proyección del vector de tensiones sobre el plano principal es nula). Para ello, se puede escribir la ecuación de Cauchy ec.(An-E.11) para un plano principal, como:

$$\rho_l = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{\ell} = \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^* & 0 & 0 \\ \text{sim.} & \sigma^* & 0 \\ & & \sigma^* \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{An-E.12})$$

siendo σ^* el valor de la tensión principal a determinar. La magnitud de cada tensión principal, (tensión principal máxima, intermedia o mínima) resulta de igualar la ec.(An-E.12) con la ec.(An-E.11), vale decir que surge de exigir que uno de los infinitos planos que satisface la ec.(An-E.11) sea un plano principal. Esto es:

$$\rho_l = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{\ell} = \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \vec{\ell} \quad (\text{An-E.13})$$

resultando de aquí :

$$[\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*] \cdot \vec{\ell} = \mathbf{0} \quad (\text{An-E.14})$$

siendo éste un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas, que son los tres cosenos directores de la normal a cada plano principal. Para que el sistema tenga solución distinta de la trivial ($\ell_1 \neq 0 ; \ell_2 \neq 0 ; \ell_3 \neq 0$), $[\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*]$ debe resultar una matriz de determinante nulo.

Así, en este problema de autovalores y autovectores, se tiene para cada valor propio (tensión principal) un vector propio (dirección principal de tensión), o sea que para cada tensión principal habrá un plano normal a ésta, que viene determinado por el vector de cosenos directores $\vec{\ell}$.

La ecuación característica del tensor de tensiones, surge de anular el determinante de la matriz $[\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*]$. Esto es:

$$\det[\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*] = \det[\underline{\underline{\sigma}} - \sigma^* \underline{\underline{I}}] = \det \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma^* & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} - \sigma^* & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} - \sigma^* \end{vmatrix} = 0$$

$$\det[\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*] = (\sigma^*)^3 - I_1 (\sigma^*)^2 + I_2 (\sigma^*) - I_3 = 0 \quad (\text{An-E.15})$$

siendo:

- I_1, I_2, I_3 : INVARIANTES DEL TENSOR DE TENSIONES.

Escalares que no varían con la posición de los planos que pasan por el punto.

- $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$: TENSIONES PRINCIPALES.

Raíces de la ec.(An-E.15), que sustituidas en la ec.(An-E.14) permiten obtener los cosenos directores de la normal a cada plano principal:

$$\text{para: } \sigma_1 \Rightarrow \vec{\ell}_1 = \begin{Bmatrix} (\ell_1)_1 \\ (\ell_2)_1 \\ (\ell_3)_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow (\ell_1)_1^2 + (\ell_2)_1^2 + (\ell_3)_1^2 = 1$$

$$\text{para: } \sigma_2 \Rightarrow \vec{\ell}_2 = \begin{Bmatrix} (\ell_1)_2 \\ (\ell_2)_2 \\ (\ell_3)_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow (\ell_1)_2^2 + (\ell_2)_2^2 + (\ell_3)_2^2 = 1$$

$$\text{para: } \sigma_3 \Rightarrow \vec{\ell}_3 = \begin{Bmatrix} (\ell_1)_3 \\ (\ell_2)_3 \\ (\ell_3)_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow (\ell_1)_3^2 + (\ell_2)_3^2 + (\ell_3)_3^2 = 1$$

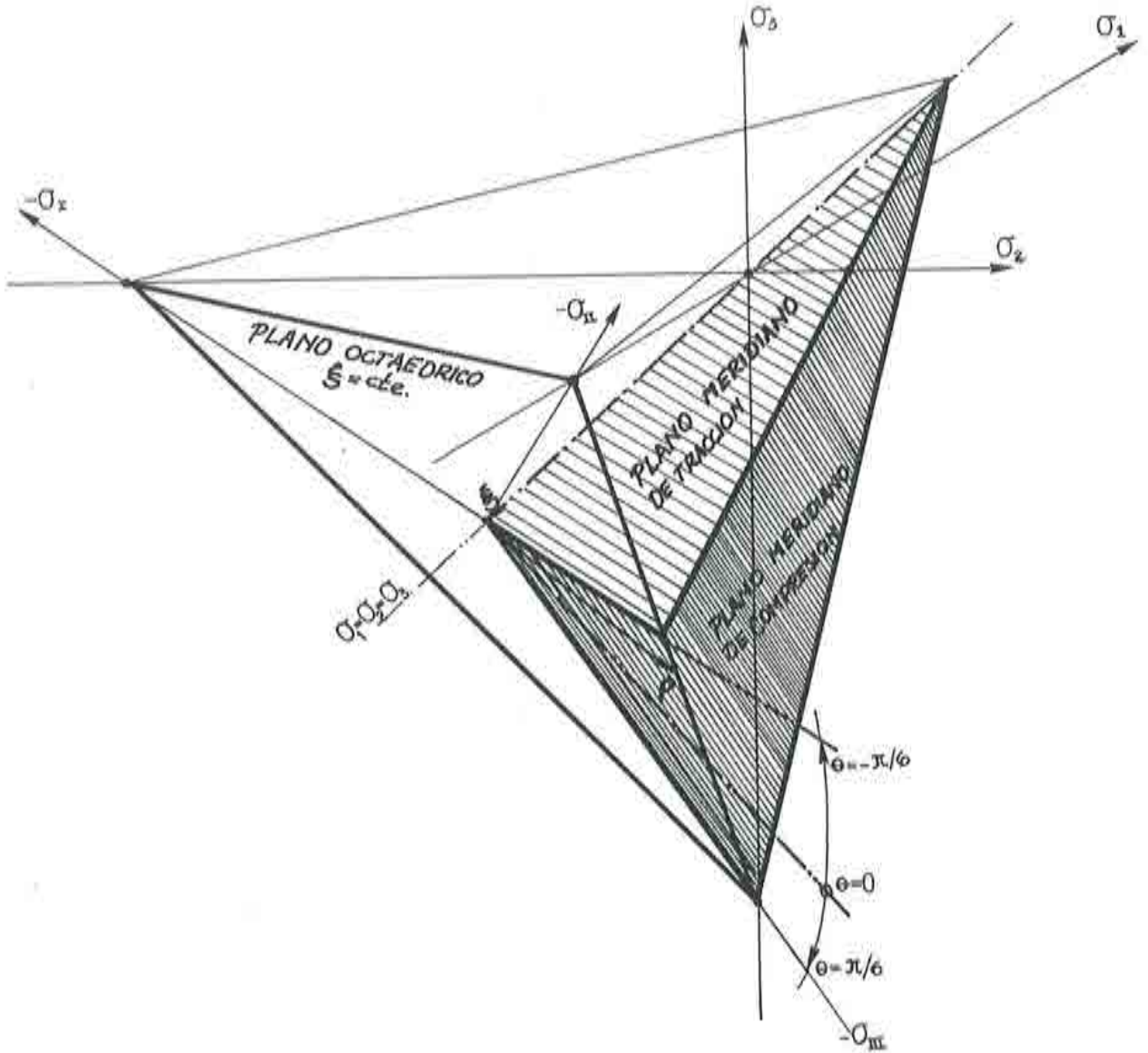


fig.(An-E.5): Coordenadas cilíndricas en el espacio de High-Westergard.

An-E.5.a- Expresiones de los invariantes del tensor de tensiones.

De la ec.(An-E.15), se obtiene en forma explícita la expresión matemática de los invariantes del tensor de tensiones:

- **Primer invariante del tensor de tensiones:** Es el invariante lineal, y es proporcional a la presión hidrostática en un punto. Su expresión matemática es:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{tr}(\underline{\sigma}) \quad (\text{An-E.16})$$

Seleccionando un sistema de referencia que coincida con las direcciones de las tensiones principales, se puede escribir este invariante, como la ecuación del plano desviador (normal al espacio diagonal):

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{tr}(\underline{\sigma}) \quad (\text{An-E.17})$$

La *tensión media u octaédrica* se relaciona con el primer invariante del tensor de tensiones, de la siguiente manera:

$$\sigma_m = \sigma_{oct} = \frac{I_1}{3} \quad (\text{An-E.18})$$

siendo σ_{oct} la tensión normal al plano octaédrico, que es aquel que forma igual ángulo con los tres ejes de tensiones principales fig.(An-E.5). En función de esta tensión media se puede obtener la distancia que hay desde el origen del espacio de tensiones hasta el correspondiente plano octaédrico. Esta magnitud, medida sobre el espacio diagonal, vale:

$$\xi = \sqrt{3} \sigma_m = \sqrt{3} \sigma_{oct} = \sqrt{3} \frac{I_1}{3} = \frac{I_1}{\sqrt{3}} \quad (\text{An-E.19})$$

- Segundo invariante del tensor de tensiones: Es el invariante cuadrático, y vale:

$$\begin{aligned} I_2 &= (\sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{11} \sigma_{33} + \sigma_{22} \sigma_{33}) - \tau_{12}^2 - \tau_{13}^2 - \tau_{31}^2 \\ I_2 &= (\alpha_m)_{11} + (\alpha_m)_{22} + (\alpha_m)_{33} \end{aligned} \quad (\text{An-E.20})$$

siendo $(\alpha_m)_{ii}$ el determinante del menor adjunto correspondiente al cofactor σ_{ii} , del tensor de tensiones.

Si los ejes de referencia coinciden con las tensiones principales, el segundo invariante del tensor de tensiones queda escrito como:

$$I_2 = (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \quad (\text{An-E.21})$$

- Tercer invariante del tensor de tensiones: Es el invariante cúbico, y vale:

$$I_3 = \det(\underline{\sigma}) = (\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\tau_{12}\tau_{13}\tau_{23} - \tau_{12}^2\sigma_{33} - \tau_{13}^2\sigma_{22} - \tau_{23}^2\sigma_{11}) \quad (\text{An-E.22})$$

Si los ejes de referencia coinciden con las tensiones principales, el tercer invariante del tensor de tensiones queda escrito como:

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (\text{An-E.23})$$

An-E.6.- COMPONENTE ESFERICA Y DESVIADORA DEL TENSOR DE TENSIONES.

Siendo el tensor de tensiones un tensor simétrico $\underline{\underline{\sigma}}$, puede ser descompuesto a su vez en dos tensores simétricos, uno que representa estados de corte puro denominado *tensor desviador de tensiones* $\underline{\underline{s}}$ y otro que representa un estado hidrostático de tensión denominado *tensor esférico de tensiones* o *tensor hidrostático de tensiones* $\underline{\underline{p}}$ o también llamado *tensor de tensiones octaédrico* $\underline{\underline{\sigma}}_{\text{oct}}$. Esto es:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{p}} + \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}}_{\text{oct}} + \underline{\underline{s}} \quad (\text{An-E.24})$$

siendo:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} ;$$

$$\underline{\underline{s}} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} ;$$

$$\underline{\underline{p}} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} ;$$

$$p_{ij} = p \delta_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} = \sigma_{\text{oct}} \delta_{ij} = \left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \right) \delta_{ij} = \frac{I_1}{3} \delta_{ij} ;$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{\text{oct}} \delta_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{I_1}{3} \delta_{ij} ;$$

$$\delta_{ij} : \text{función de Kronecker} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j ; \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

An-E.6.a- Expresiones de los invariantes del tensor desviador de tensiones.

Procediendo en manera análoga al apartado (*apart. An-E.5*), se puede obtener la ecuación característica del tensor desviador de tensiones. Esta surge de anular el determinante de la matriz $[\underline{s} - s^* \underline{I}]$. Esto es:

$$\det[\underline{s} - s^* \underline{I}] = \det[\underline{s} - s^* \underline{I}] = \det \begin{vmatrix} s_{11} - s^* & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} - s^* & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} - s^* \end{vmatrix} = 0$$

$$\det[\underline{s} - s^* \underline{I}] = (s^*)^3 - J_1 (s^*)^2 + J_2 (s^*) - J_3 = 0 \quad (\text{An-E.25})$$

siendo:

- J_1, J_2, J_3 : INVARIANTES DEL TENSOR DESVIADOR DE TENSIONES.

Escalares que no varían con la posición de los planos que pasan por el punto.

- s^* : TENSION PRINCIPAL DESVIADORA: $s_3 \leq s_2 \leq s_1$.

Se obtienen como raíces de la ec.(An-E.25), que sustituidas en la ecuación :

$$[\underline{s} - s^* \underline{I}] \cdot \underline{\ell} = \underline{0},$$

permite obtener los cosenos directores de la normal $\underline{\ell}$ a cada plano principal desviador.

De la ec.(An-E.25), se obtiene en forma explícita la expresión matemática de los invariantes del tensor desviador de tensiones:

- Primer invariante del tensor desviador de tensiones: Este invariante es nulo, y su expresión matemática es:

$$J_1 = s_{11} + s_{22} + s_{33} = \text{tr}(\underline{s}) = I_1 - 3\sigma_m = 0 \quad (\text{An-E.26})$$

Seleccionando un sistema de referencia que coincida con las direcciones de las tensiones principales, se puede escribir este invariante como:

$$J_1 = s_1 + s_2 + s_3 = \text{tr}(\underline{s}) \quad (\text{An-E.27})$$

- Segundo invariante del tensor desviador de tensiones: Es el promedio cuadrático de las desviaciones, y vale:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad (\text{An-E.28})$$

Si los ejes de referencia coinciden con las tensiones principales, el segundo invariante del tensor desviador de tensiones queda escrito como:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \quad (\text{An-E.29})$$

También se puede escribir este invariante como el *radio vector* de la curva que delimita el dominio de la función de fluencia en el plano desviador u octaédrico fig.(An-E.5):

$$\rho = \sqrt{3} \tau_{oct} = \sqrt{3} \left[\sqrt{\frac{2}{3} J_2} \right] = \sqrt{2 J_2} \quad (\text{An-E.30})$$

Por último, es importante mencionar que la *tensión uniaxial efectiva* o *tensión uniaxial equivalente* surge como una función de este segundo invariante del tensor desviador de tensiones (ver: ec.(Ap-I.33) y ec.(Ap-I.69)):

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3 J_2} \quad (\text{An-E.31})$$

- **Tercer invariante del tensor desviador de tensiones:** Es el invariante cúbico, y vale:

$$J_3 = \det(\underline{\underline{g}}) \quad (\text{An-E.32})$$

Si los ejes de referencia coinciden con las tensiones principales, el tercer invariante del tensor desviador de tensiones queda escrito como:

$$J_3 = \frac{1}{3} (s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) = s_1 s_2 s_3 \quad (\text{An-E.33})$$

Este invariante, junto a I_1 y J_2 , permite situar de modo inequívoco un punto de tensión en un cierto plano octaédrico fig.(An-E.5); pues el primer invariante del tensor de tensiones I_1 sitúa la posición del plano octaédrico y el segundo invariante fija los contornos de este plano. Así, el tercer invariante del tensor desviador de tensiones J_3 , permite definir la tercera y última coordenada del sistema cilíndrico de High-Westergard, y suele representarse mediante el *ángulo de similaridad de Lode*:

$$3 \theta = \arcsin \left[\frac{\sqrt{2} J_3}{\tau_{oct}} \right] = \arcsin \left[\frac{3\sqrt{3} J_3}{2 (J_2)^{\frac{3}{2}}} \right] ; \quad (\text{An-E.34})$$

$$\text{con: } -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{6} ,$$

Debido a que este ángulo es función del segundo y tercer invariante del tensor desviador, permite junto al primer invariante determinar la magnitud de las tensiones principales ^{[33][63]}. De la ec.(An-E.24) se tiene:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ \sigma_m \end{Bmatrix} \quad , \\ \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} &= \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\theta) \\ \sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) \end{Bmatrix} + \frac{I_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{(An-E.35)} \\ \text{con: } \tau_{oct} &= \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

An-E.7.- TENSOR DE DEFORMACIONES: $\underline{\epsilon}$

Cuando un sólido está sometido a cargas externas experimenta una deformación respecto de su configuración original. Hay distintas maneras de definir las deformaciones, en este trabajo se ha utilizado la definición de deformación dada por Cauchy, que por otro lado es muy apropiada para tratar problemas con deformaciones infinitesimales.

Para cada vector de tensiones existe uno de deformación asociado, o viceversa, de manera que los vectores de deformaciones correspondiente a tres planos ortogonales dan lugar a un tensor de deformaciones del siguiente tipo:

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \epsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \text{sim.} & \epsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ & & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \text{sim.} & & \epsilon_{33} \end{bmatrix} ;$$

con: $\epsilon_{ij} \equiv \epsilon_{ji}$ (An-E.36)

$$y : \epsilon_{ij} \equiv \begin{cases} \epsilon_{ij} & ; \quad \forall i = j \\ \frac{1}{2}\gamma_{ij} & ; \quad \forall i \neq j \end{cases}$$

En notación indicial se puede expresar este tensor de deformaciones, del siguiente modo:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{An-E.37})$$

Escribiendo la parte simétrica del tensor de pequeñas deformaciones, como un conjunto ordenado de magnitudes al igual que en el problema tensional, se tiene el *vector de pequeñas deformaciones*:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2 \epsilon_{12} \\ 2 \epsilon_{23} \\ 2 \epsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (\text{An-E.38})$$

An-E.8.- DIRECCIONES PRINCIPALES DE DEFORMACION - INVARIANTES DEL TENSOR DE DEFORMACIONES.

Procediendo en manera análoga al apartado (*apart. An-E.5*), se puede obtener la ecuación característica del tensor deformaciones. Esta surge de anular el determinante de la matriz $[\boldsymbol{\epsilon} - \epsilon^* \mathbf{I}]$. Esto es:

$$\det[\boldsymbol{\epsilon} - \epsilon^* \mathbf{I}] = \det \begin{vmatrix} \epsilon_{11} - \epsilon^* & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} - \epsilon^* & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} - \epsilon^* \end{vmatrix} = 0$$

$$\det[\boldsymbol{\epsilon} - \epsilon^* \mathbf{I}] = (\epsilon^*)^3 - I'_1 (\epsilon^*)^2 + I'_2 (\epsilon^*) - I'_3 = 0 \quad (\text{An-E.39})$$

siendo:

- I'_1, I'_2, I'_3 : INVARIANTES DEL TENSOR DE DEFORMACIONES.

Escalares que no varían con la posición de los planos que pasan por el punto.

- ϵ^* : DEFORMACION PRINCIPAL: $\epsilon_3 \leq \epsilon_2 \leq \epsilon_1$.

Se obtienen como raíces de la ec.(An-E.39), que sustituidas en la ecuación:

$$[\boldsymbol{\epsilon} - \epsilon^* \mathbf{I}] : \vec{n} = \mathbf{0} ,$$

permite obtener los cosenos directores de la normal \vec{n} a cada plano de deformación principal. La proyección del vector de deformaciones sobre estos planos es nula.

De la ec.(An-E.39), se obtiene en forma explícita la expresión matemática de los invariantes del tensor de deformaciones:

- **Primer invariante del tensor de deformaciones:** Este invariante es lineal, y su expresión matemática es:

$$I'_1 = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \text{tr}(\underline{\underline{g}}) \quad (\text{An-E.40})$$

Seleccionando un sistema de referencia que coincida con las direcciones de las deformaciones principales, se puede escribir este invariante, como:

$$I'_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \text{tr}(\underline{\underline{g}}) \quad (\text{An-E.41})$$

La *deformación volumétrica y la octaédrica* se relacionan con el primer invariante del tensor de deformaciones, a través de la siguiente expresión matemática:

$$\epsilon_{oct} = \frac{1}{3} \epsilon_v = \frac{I'_1}{3} \quad (\text{An-E.42})$$

- **Segundo invariante del tensor de deformaciones:** Es el invariante cuadrático, y vale:

$$\begin{aligned} I'_2 &= (\epsilon_{11} \epsilon_{22} + \epsilon_{11} \epsilon_{33} + \epsilon_{22} \epsilon_{33}) - \epsilon_{12}^2 - \epsilon_{13}^2 - \epsilon_{31}^2 \\ I'_2 &= (\alpha'_m)_{11} + (\alpha'_m)_{22} + (\alpha'_m)_{33} \end{aligned} \quad (\text{An-E.43})$$

siendo $(\alpha'_m)_{ii}$ el determinante del menor adjunto correspondiente al cofactor ϵ_{ii} , del tensor de deformaciones.

Si los ejes de referencia coinciden con las deformaciones principales, el segundo invariante del tensor de deformaciones resulta:

$$I'_2 = (\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_3 + \epsilon_2 \epsilon_3) \quad (\text{An-E.44})$$

- **Tercer invariante del tensor de deformaciones:** Es el invariante cúbico, y vale:

$$I'_3 = \det(\underline{\underline{g}}) = (\epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33} + 2\epsilon_{12}\epsilon_{13}\epsilon_{23} - \epsilon_{12}^2\epsilon_{33} - \epsilon_{13}^2\epsilon_{22} - \epsilon_{33}^2\epsilon_{11}) \quad (\text{An-E.45})$$

Si los ejes de referencia coinciden con las deformaciones principales, el tercer invariante del tensor de deformaciones resulta:

$$I'_3 = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \quad (\text{An-E.46})$$

An-E.9.- COMPONENTE ESFERICA Y DESVIADORA DEL TENSOR DE DEFORMACIONES.

Siendo el tensor de pequeñas deformaciones un tensor simétrico $\underline{\epsilon}$, puede ser descompuesto a su vez en dos tensores simétricos, uno que representa estados distorsionales denominado *tensor desviador de deformaciones* $\underline{\underline{\epsilon}}$ y otro que representa un estado volumétrico de deformación denominado *tensor esférico de deformaciones* o *tensor volumétrico de deformaciones* $\underline{\underline{p}}$ o también llamado *tensor octaédrico de deformaciones* $\underline{\underline{\epsilon}}_{oct}$. Esto es:

$$\underline{\epsilon} = \underline{\underline{p}} + \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}_{oct} + \underline{\underline{\epsilon}} \quad (An-E.47)$$

siendo:

$$p'_{ij} = p' \delta_{ij} = \frac{\epsilon_v}{3} \delta_{ij} = \epsilon_{oct} \delta_{ij} = \left(\frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}}{3} \right) \delta_{ij} = \frac{I'_1}{3} \delta_{ij} \quad ;$$

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij} = \epsilon_{ij} - \epsilon_{oct} \delta_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{I'_1}{3} \delta_{ij} \quad ;$$

$$\delta_{ij} : \text{función de Kronecker} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j ; \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

An-E.9.a- Expresiones de los invariantes del tensor desviador de deformaciones.

Los invariantes del tensor desviador de pequeñas deformaciones se obtienen, al igual que para el tensor desviador de tensiones, a partir de su ecuación característica, la que surge de anular el determinante de la matriz $[\underline{\underline{\epsilon}} - e^* \underline{\underline{I}}]$. Esto es:

$$\det |\underline{\underline{\epsilon}} - e^* \underline{\underline{I}}| = \det \begin{vmatrix} \epsilon_{11} - e^* & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} - e^* & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} - e^* \end{vmatrix} = 0$$

$$\det |\underline{\underline{\epsilon}} - e^* \underline{\underline{I}}| = (e^*)^3 - J'_1 (e^*)^2 + J'_2 (e^*) - J'_3 = 0 \quad (An-E.48)$$

siendo:

- J'_1, J'_2, J'_3 : INVARIANTES DEL TENSOR DESVIADOR DE DEFORMACIONES.

Escalares que no varían con la posición de los planos que pasan por el punto.

- e^* : DEFORMACION PRINCIPAL DESVIADORA: $e_3 \leq e_2 \leq e_1$.

Se obtienen como raíces de la ec.(An-E.48), que sustituidas en la ecuación :

$$[\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{e}}^*] \cdot \vec{n}^* = 0 ,$$

permite obtener los cosenos directores de la normal \vec{n}^* a cada plano principal desviador .

De la ec.(An-E.48), se obtiene en forma explícita la expresión matemática de los invariantes del tensor desviador de deformaciones:

- Primer invariante del tensor desviador de deformaciones: Este invariante es nulo, y su expresión matemática es:

$$J'_1 = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \text{tr}(\underline{\underline{e}}) = I'_1 - \epsilon_v = 0 \quad (\text{An-E.49})$$

Seleccionando un sistema de referencia que coincida con las direcciones de las deformaciones principales, se puede escribir este invariante como:

$$J'_1 = e_1 + e_2 + e_3 = \text{tr}(\underline{\underline{e}}) \quad (\text{An-E.50})$$

- Segundo invariante del tensor desviador de deformaciones: Es el promedio cuadrático de las desviaciones, y vale:

$$J'_2 = \frac{1}{6} [(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + (\epsilon_{22} - \epsilon_{33})^2 + (\epsilon_{33} - \epsilon_{11})^2] + \epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{31}^2 = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} \quad (\text{An-E.51})$$

Si los ejes de referencia coinciden con las tensiones principales, el segundo invariante del tensor desviador de deformaciones, resulta:

$$J'_2 = \frac{1}{6} [(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2] = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \quad (\text{An-E.52})$$

También se puede escribir este invariante, como una distorsión octaédrica:

$$\gamma_{oct} = \sqrt{\frac{8}{3} J'_2} \quad (\text{An-E.53})$$

- Tercer invariante del tensor desviador de deformaciones: Es el invariante cúbico, y vale:

$$J'_3 = \det(\underline{\underline{g}}) \quad (\text{An-E.54})$$

Si los ejes de referencia coinciden con las deformaciones principales, el tercer invariante del tensor desviador de deformaciones queda escrito como:

$$J'_3 = \frac{1}{3} (e_1^3 + e_2^3 + e_3^3) = e_1 e_2 e_3 \quad (\text{An-E.55})$$

(APENDICE I) ANEXO F

CASO PARTICULAR DEL TENSOR DE FLUJO PLASTICO.

An-F.1.- INTRODUCCION.

Para el caso particular en que el tensor de tensiones sea simétrico, es posible definir un *vector de flujo plástico* que contenga solamente la parte simétrica del correspondiente tensor. Esto es:

$$g_{ij} = \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{11}} & \frac{\partial G}{\partial \sigma_{12}} & \frac{\partial G}{\partial \sigma_{13}} \\ \text{sim.} & \frac{\partial G}{\partial \sigma_{22}} & \frac{\partial G}{\partial \sigma_{23}} \\ & & \frac{\partial G}{\partial \sigma_{33}} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial \sigma} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{11}} \\ \frac{\partial G}{\partial \sigma_{22}} \\ \frac{\partial G}{\partial \sigma_{22}} \\ \frac{\partial G}{\partial \sigma_{12}} \\ \frac{\partial G}{\partial \sigma_{13}} \\ \frac{\partial G}{\partial \sigma_{23}} \end{Bmatrix} \quad (\text{An-F.1})$$

Esta notación, es una forma especial de representar la parte simétrica del tensor de flujo plástico de segundo orden. Su utilización simplifica el tratamiento de los problemas numéricos.

Se pueden definir distintos procedimientos que permiten obtener el *vector de flujo plástico* en una forma simple y clara. A continuación se presenta un desarrollo, de este vector de flujo plástico, presentado originalmente por Nayak-Zienkiewicz ^{[63][68][144]} y muy utilizado por su simpleza y generalidad.

An-F.1.- VECTOR DE FLUJO PLASTICO DE NAYAK-ZIENKIEWICZ.

Este vector, se basa en admitir que el flujo plástico resulta de la contribución de tres subvectores, definidos respectivamente en función del primer invariante del tensor de tensiones I_1 , del segundo invariante del tensor desviador de tensiones J_2 y del ángulo de similaridad θ . Esto es:

$$g = \frac{\partial G}{\partial \sigma} = \frac{\partial G}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial G}{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma} + \frac{\partial G}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \quad (\text{An-F.2})$$

pero: $\sin(3\theta) = \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}} \right]$; $\forall -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$, por lo tanto su derivada respecto del vector de tensiones vale:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = -\frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta)} \left[\frac{1}{(J_2)^{3/2}} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} - \frac{3J_3}{(J_2)^3} \frac{\partial (J_2)^{3/2}}{\partial \sigma} \right] \quad (\text{An-F.3})$$

Sustituyendo esta última en la ec.(An-F.2), y operando algebraicamente con ella, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} &= \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial (J_2)^{3/2}} \frac{\partial (J_2)^{3/2}}{\partial \sigma} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta)} \left[\frac{1}{(J_2)^{3/2}} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} - \frac{3J_3}{(J_2)^3} \frac{\partial (J_2)^{3/2}}{\partial \sigma} \right] \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} &= \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial (J_2)^{3/2}} \frac{\partial (J_2)^{3/2}}{\partial \sigma} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta)} \frac{1}{(J_2)^{3/2}} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta)} \frac{3J_3}{(J_2)^3} \frac{\partial (J_2)^{3/2}}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} &= \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial I_1} \right] + \frac{\partial (J_2)^{3/2}}{\partial \sigma} \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial (J_2)^{3/2}} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta)} \frac{3J_3}{(J_2)^3} \right] + \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \left[-\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta)} \frac{1}{(J_2)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{\sin(3\theta)}{\cos(3\theta)(J_2)^{3/2}} \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} &= \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial I_1} \right] + \frac{\partial (J_2)^{3/2}}{\partial \sigma} \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial (J_2)^{3/2}} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \frac{\tan(3\theta)}{(J_2)^{3/2}} \right] + \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \left[-\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta)} \frac{1}{(J_2)^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} = \mathbf{g} = C_1 \mathbf{g}_1 + C_2 \mathbf{g}_2 + C_3 \mathbf{g}_3 ; \quad \forall -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6} \quad (\text{An-F.4})$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} = \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T ; \\ \mathbf{g}_2 &= \frac{\partial (J_2)^{3/2}}{\partial \sigma} = \frac{1}{2(J_2)^{3/2}} \{s_{11} \ s_{22} \ s_{33} \ 2\tau_{23} \ 2\tau_{31} \ 2\tau_{12}\}^T ; \\ \mathbf{g}_3 &= \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = \left\{ \begin{array}{l} (s_{22} s_{33} - \tau_{23}^2) \\ (s_{11} s_{33} - \tau_{13}^2) \\ (s_{11} s_{22} - \tau_{12}^2) \\ 2(\tau_{13}\tau_{12} - s_{11}\tau_{23}) \\ 2(\tau_{12}\tau_{23} - s_{22}\tau_{13}) \\ 2(\tau_{23}\tau_{12} - s_{33}\tau_{13}) \end{array} \right\} + \frac{J_3}{3} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} ; \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial I_1} ;$$

$$C_2 = \frac{\partial \mathcal{G}}{(J_2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \frac{\tan(3\theta)}{(J_2)^{\frac{1}{2}}} ;$$

$$C_3 = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta)} \frac{1}{(J_2)^{\frac{1}{2}}} ;$$

Así, para cada función de potencial plástico, sólo es necesario definir las constantes C_1 , C_2 y C_3 para determinar el vector de flujo plástico.

APENDICE IIALGUNOS ASPECTOS SOBRE EL TRATAMIENTO NUMERICO
DEL MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO PLASTICOAp-II.1.- EQUILIBRIO DEL SOLIDO CONTINUO - PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS
VIRTUALES.

Ap-II.1.a.- Campos virtuales.

Se dice que el *campo de una variable es virtual*, cuando es arbitrario, admisible con las condiciones de contorno forzadas del problema y es independiente de cualquier otra variable.

El principio de los trabajos virtuales PTV puede formularse a través de variables definidas en dos campos virtuales diferentes e independientes entre sí :

- Variables de desplazamientos y deformaciones virtuales: $\delta \underline{u}$, $\delta \underline{\epsilon}$.
- Variables de fuerza y tensiones virtuales: $\delta \underline{f}$, $\delta \underline{\sigma}$.

Dada la orientación que tiene la tesis, hacia una formulación en el *campo primal*, se adopta como campo virtual el correspondiente al espacio de *desplazamiento y deformaciones*, situación que conduce a que la ecuación fundamental del PTV se transforme en una *condición general de equilibrio del sólido continuo*.

Ap-II.1.b.- Campo de desplazamientos virtuales.

Dentro del campo de desplazamientos virtuales, se puede formular un *vector de desplazamientos hipotético* (pero factible), arbitrario, no asociado a ningún sistema de cargas exteriores actuantes (independiente de ellas), y que satisface las *condiciones geométricas de contorno* (condiciones cinemáticas forzadas). Al vector que cumple con estas condiciones, se lo denomina *vector de desplazamiento virtual*.

Condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir $\delta \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$:

• Los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$, deben ser continuos en el dominio del sólido, y deben cumplir con la siguiente condición de compatibilidad:

$$\delta \underline{\underline{\epsilon}}(x_1, x_2, x_3) = \nabla_s(\delta \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)) \quad (Ap-II.1)$$

donde $\nabla_s(\dots) = 1/2 [\nabla_s(\dots) + \nabla_s^T(\dots)]$ es el operador gradiente simétrico.

• Los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$, deben ser infinitesimales.

• Por último, deben cumplir las condiciones de borde geométricas, o condiciones geométricas forzadas (vinculación) $\delta \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$; siendo $\bar{\mathbf{u}}$ los desplazamientos prescritos. De acuerdo con éstas, los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$, deben ser funciones admisibles.

Ap-II.1.c.- Ecuación general de los trabajos virtuales - Identidad fundamental.

La energía virtual interna acumulada en un sólido debido a la acción simultánea de las variables $\delta \underline{\underline{\sigma}}$ y $\delta \underline{\underline{\epsilon}}$, definidas en los dos campos virtuales diferentes e independientes entre sí, es igual a (trabajo virtual de segundo orden):

$$\delta^2 W_{int}(\delta \underline{\underline{\sigma}}, \delta \underline{\underline{\epsilon}}) = \int_V \delta^2 w(\delta \underline{\underline{\sigma}}, \delta \underline{\underline{\epsilon}}) dV \quad (Ap-II.2)$$

donde $\delta^2 w(\delta \underline{\underline{\sigma}}, \delta \underline{\underline{\epsilon}}) = \delta \underline{\underline{\sigma}} \cdot \delta \underline{\underline{\epsilon}} = \delta \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\delta \underline{\underline{\epsilon}}' + \delta \underline{\underline{\epsilon}}'')$ es la energía específica virtual total. Sustituyendo la ecuación de compatibilidad geométrica (ec.(Ap-II.1)) en la ec.(Ap-II.2), se tiene:

$$\delta^2 W_{int}(\delta \underline{\underline{\sigma}}, \delta \underline{\underline{\epsilon}}) = \int_V \delta \underline{\underline{\sigma}} \cdot \delta \underline{\underline{\epsilon}} dV = \int_V \delta \underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla_s(\delta \mathbf{u}) dV \quad (Ap-II.3)$$

integrando por partes esta última, (teorema de Green), resulta la denominada identidad fundamental de los trabajos virtuales:

$$\left[\delta W_{int}^2 = \int_V \delta \underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla_s (\delta \underline{\underline{u}}) dV \right] \equiv \left[\int_V \text{div}(\delta \underline{\underline{\sigma}}) \cdot \delta \underline{\underline{u}} dV + \oint_S \delta \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{\ell} \cdot \delta \underline{\underline{u}} dS = \delta W_{ext}^2 \right] \quad (Ap-II.4)$$

donde:

$$\vec{\ell} = \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{Bmatrix} : \text{Versor normal a la superficie del sólido; con: } \ell_i = \cos(\vec{\ell} \wedge \underline{\underline{x}}_i) .$$

$$\delta \underline{\underline{\epsilon}}(x_1, x_2, x_3) = \nabla_s(\delta \underline{\underline{u}}(x_1, x_2, x_3)) : \text{Ecuación de compatibilidad geométrica .}$$

$$\delta \underline{\underline{f}}_V = \text{div}(\delta \underline{\underline{\sigma}}) : \text{Ecuación de equilibrio en un volumen elemental. Siempre que } \delta \underline{\underline{\sigma}} \text{ sea simétrico: } \delta \sigma_{ij} \equiv \delta \sigma_{ji} .$$

$$\delta \underline{\underline{f}}_S = \delta \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{\ell} : \text{Ecuación de las condiciones de contorno forzadas del tipo estático.}$$

o bien, sustituyendo esto último en la ec.(Ap-II.4), se tiene:

$$\delta^2 W_{int} - \delta^2 W_{ext} = 0$$

(Ap-II.5)

$$\int_V \delta \underline{\underline{\sigma}} \cdot \delta \underline{\underline{\epsilon}} dV - \int_V \delta \underline{\underline{f}}_V \cdot \delta \underline{\underline{u}} dV - \oint_S \delta \underline{\underline{f}}_S \cdot \delta \underline{\underline{u}} dS = 0$$

donde:

$$\delta^2 \rho_V = -\delta \underline{\underline{f}}_V \cdot \delta \underline{\underline{u}} : \text{Potencial específico de las fuerzas virtuales de volumen } \delta \underline{\underline{f}}_V .$$

$$\delta^2 \rho_S = -\delta \underline{\underline{f}}_S \cdot \delta \underline{\underline{u}} : \text{Potencial específico de las fuerzas virtuales de superficie } \delta \underline{\underline{f}}_S .$$

Ap-II.1.d.- Formulación del Principio de los trabajos virtuales a partir de las variables de desplazamientos y deformaciones virtuales – Principio de los desplazamientos virtuales.

Debido a que el *campo real* de una variable, es uno de los posibles *campos virtuales* que ésta puede adoptar, se puede considerar en la *identidad fundamental del PTV* ec.(Ap-II.5), un campo de deformaciones y desplazamientos *virtuales* ($\delta \underline{\underline{u}}$, $\delta \underline{\underline{\epsilon}}$), y un campo de tensión y fuerzas reales ($\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{f}}_V$, $\underline{\underline{f}}_S$). Esto es (trabajo virtual de primer orden):

$$\int_V \underline{\sigma} \cdot \delta \underline{\epsilon} dV - \int_V \underline{f}_V \cdot \delta \underline{u} dV - \oint_S \underline{f}_S \cdot \delta \underline{u} dS = 0 \quad (Ap-II.6)$$

pero el trabajo virtual de las fuerzas de superficie, puede ser presentado como: $\oint_S \underline{f}_S \cdot \delta \underline{u} dS =$

$$\int_{S_F} \underline{f}_{S_F} \cdot \delta \underline{u} dS + \int_{S_D} \underline{f}_{S_D} \cdot \delta \underline{u} dS, \text{ donde } S_D \text{ es la superficie del sólido donde } \underline{u} = \underline{cte.} \text{ (zona}$$

vinculada), por lo tanto se cumple en esta zona que $\delta \underline{u} = \mathbf{0}$; S_F es la superficie del sólido no vinculada, por lo tanto en ella el campo de desplazamientos \underline{u} es incógnita; y \underline{f}_{S_F} , \underline{f}_{S_D} , son las fuerzas superficiales aplicadas y sus correspondientes reacciones, respectivamente. De acuerdo a esto, el trabajo virtual de las fuerzas de superficie queda expresado por:

$$\oint_S \underline{f}_S \cdot \delta \underline{u} dS = \int_{S_F} \underline{f}_{S_F} \cdot \delta \underline{u} dS \quad (Ap-II.7)$$

Sustituyendo ésta en la ec.(Ap-II.6), resulta la expresión de la energía potencial virtual total, desarrollada durante la acción de un desplazamiento virtual $\delta \underline{u}$:

$$\int_V \underline{\sigma} \cdot \delta \underline{\epsilon} dV - \int_V \underline{f}_V \cdot \delta \underline{u} dV - \int_{S_F} \underline{f}_{S_F} \cdot \delta \underline{u} dS = 0 \quad (Ap-II.8)$$

donde:

$$\underline{\sigma} = \int_{t=0}^t \underline{\dot{\sigma}} dt = \int_{t=0}^t \underline{\underline{D}}^{rp} \cdot \underline{\dot{\epsilon}} dt \quad (Ap-II.9)$$

siendo $\underline{\underline{D}}^{rp}$ el tensor de rigidez elasto-plástico tangente, de cuarto orden. De esta forma,

se desarrolla un *trabajo virtual*, por unas *tensiones y fuerzas reales*, durante la acción de unas *deformaciones y desplazamientos virtuales*, (recordar que son campos independientes entre sí).

Debido a que los desplazamientos son virtuales y la deformación es función de estos ec.(Ap-II.1), la ecuación de los trabajos virtuales ec.(Ap-II.8), constituye una *condición general de equilibrio para los sólidos continuos*, formulada de modo integral en el dominio V . De esto se deduce, que es una *forma débil* de la condición de equilibrio formulada a través de una ecuación diferencial aplicada a un volumen elemental, más dos condiciones forzadas, una estática y otra geométrica o cinemática. Su validez se extiende a problemas con *no linealidad en su ley constitutiva*.

Ap-II.1.e.- Criterio de energía para formular la condición de estabilidad en la solución.

Durante la aplicación de incrementos de fuerzas externas, suficientemente pequeños, se puede observar que la respuesta de un punto del sólido tiene distintas relaciones entre las tensiones y deformaciones. Inicialmente se presenta una relación lineal, que gradualmente se desvía de la linealidad hasta alcanzar un punto (tensión máxima), donde la respuesta cesa de ser estable fig.(Ap-II.1), bajo ciertas condiciones de carga [145]. En este apartado se considera la formulación de la condición de estabilidad en la solución, a partir de un criterio de energía. Partiendo de una configuración de equilibrio del sólido, que se denomina en adelante configuración de origen, donde las variables que intervienen en el problema valen: $\mathbf{u}; \underline{\epsilon}; \underline{\sigma}; \mathbf{f}_V; \mathbf{f}_{S_F}$, y por lo tanto su energía potencial total vale: $\Pi = W_{int} + W_{ext}$. Dando un desplazamiento virtual $\delta \mathbf{u}$ (sin violar las condiciones de borde geométricas), se obtiene una nueva configuración, donde las variables que intervienen en el problema valen: $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} \rightarrow \underline{\epsilon}^* = \underline{\epsilon} + \delta \underline{\epsilon} \rightarrow \underline{\sigma}^* = \underline{\sigma} + \delta \underline{\sigma}; \mathbf{f}_V^* = \mathbf{f}_V; \mathbf{f}_{S_F}^* = \mathbf{f}_{S_F}$, y por lo tanto su energía potencial total vale: $\Pi^* = W_{int}^* + W_{ext}^*$.

Si el incremento de trabajo virtual desarrollado por las fuerzas externas, durante la aplicación de un desplazamiento virtual, tiende a cero, no hay incremento en la energía almacenada, y se dice entonces que la configuración de origen es estable [146]. Por el contrario, si esto no se satisface, el exceso de energía aparece en forma de energía cinética, indicando una inestabilidad en la configuración original [146].

Estas consideraciones, conducen a la siguiente formulación matemática, donde la energía potencial en la nueva configuración puede ser aproximada por el siguiente desarrollo en serie de Taylor:

$$\Pi^* = \Pi + \delta \Pi + \frac{1}{2!} \delta^2 \Pi + \frac{1}{3!} \delta^3 \Pi + \dots \tag{Ap-II.10}$$

donde $\frac{1}{i!} \delta^i \Pi$ representa la *i*-ésima variación de la energía potencial total. Despreciando la influencia de las variaciones de orden superior a dos, se puede obtener de la anterior el incremento de trabajo virtual total como:

$$\Delta \Pi = \Pi^* - \Pi \simeq \delta \Pi + \frac{1}{2!} \delta^2 \Pi \tag{Ap-II.11}$$

A pesar de que en plasticidad no siempre se puede conocer la expresión del funcional de energía potencial total Π (sólo se puede conocer explícitamente su forma matemática en determinados casos simples - ver K. Washizu [145] -), es posible conocer su primera variación $\delta \Pi$ y su segunda variación $\delta^2 \Pi$, ya sea: — mediante una formulación implícita factible de ser derivada* a través de la aplicación del teorema de las funciones implícitas [147]; — o bien, en este caso particular, se puede conocer su primera variación $\delta \Pi$ a través de la energía

* Nota: Si la primera variación del funcional de energía potencial total, vale:

$$\delta \Pi = \int_V \underline{\sigma} : \delta \underline{\epsilon} dV - \int_V \mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{S_F} \mathbf{f}_{S_F} \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0 \quad //$$

potencial total que se desarrolla durante la aplicación de un desplazamiento virtual *ec.(Ap-II.8)*, y su segunda variación $\delta^2\Pi$ mediante la energía desarrollada durante la aplicación de un campo de fuerzas y desplazamientos virtuales *ec.(Ap-II.5)*. Esto es:

$$\delta\Pi = \int_V \underline{\underline{\sigma}} \cdot \delta\underline{\underline{\epsilon}} dV - \int_V \underline{\underline{f}}_V \cdot \delta\underline{\underline{u}} dV - \int_{S_f} \underline{\underline{f}}_{S_f} \cdot \delta\underline{\underline{u}} dS \quad (\text{Ap-II.12,a})$$

$$\delta^2\Pi = \int_V \delta\underline{\underline{\sigma}} \cdot \delta\underline{\underline{\epsilon}} dV - \int_V \delta\underline{\underline{f}}_V \cdot \delta\underline{\underline{u}} dV - \int_S \delta\underline{\underline{f}}_S \cdot \delta\underline{\underline{u}} dS \quad (\text{Ap-II.12,b})$$

Pero debido a que el desplazamiento virtual $\delta\underline{\underline{u}}$ configura un *campo admisible y arbitrario* que actúa sobre un sólido en equilibrio, se tiene que el trabajo virtual desarrollado es nulo, por lo tanto se puede decir que se trata de un proceso estacionario donde la *primera variación del funcional de energía potencial total* es nula $\delta\Pi = 0$ (Condición de equilibrio en la configuración original).

Sustituyendo la *condición de estacionaridad* en la *ec.(Ap-II.11)*, resulta que el incremento total de trabajo virtual es igual a la *segunda variación del funcional de energía potencial total*, que coincide en este caso con la energía desarrollada durante la aplicación de *dos campos virtuales ec.(Ap-II.12,b)* (trabajo virtual de segundo orden)

$$\Delta\Pi \simeq \underbrace{\delta\Pi}_{=0} + \frac{1}{2}\delta^2\Pi \Rightarrow \Delta\Pi \simeq \frac{1}{2}\delta^2\Pi \quad (\text{Ap-II.13})$$

Con las consideraciones realizadas, se puede concluir en que *la estabilidad de la configuración original* en las vecindades del punto de equilibrio, puede determinarse a través del signo de la segunda variación del funcional de energía potencial total. Esto es:

// se puede escribir en forma implícita el funcional como:

$$\Pi = \int_V w dV + \int_V \rho_V dV - \int_{S_f} \rho_{S_f} dS$$

donde si se conocen las primeras variaciones de:

$$\delta w = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\epsilon}}) \cdot \delta\underline{\underline{\epsilon}} ; \delta\rho_V = -\underline{\underline{f}}_V \cdot \delta\underline{\underline{u}} ; \delta\rho_S = -\underline{\underline{f}}_S \cdot \delta\underline{\underline{u}}$$

$$\Delta\Pi \simeq \frac{1}{2}\delta^2\Pi \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \begin{cases} \text{La configuración original es estable} \\ \text{para cualquier desplazamiento} \\ \text{virtual.} \\ \\ \text{La configuración} \\ \text{original es inestable para al menos} \\ \text{un desplazamiento virtual.} \end{cases} \quad (\text{Ap-II.14})$$

Si se introduce la ec.(Ap-II.12,b) en la ec.(Ap-II.14), y en la que resulte de aquí se sustituyen las variables virtuales por sus correspondientes valores ($\delta\mathbf{u} \rightarrow \delta\boldsymbol{\xi} = \nabla_r(\mathbf{u}) \rightarrow \delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{ep}\delta\boldsymbol{\xi}$; $\delta\mathbf{f}_V \equiv \mathbf{0}$; $\delta\mathbf{f}_{S^p} \equiv \mathbf{0}$), se obtiene la expresión general explícita que estudia la estabilidad de la solución en la configuración original ^[11]:

$$\Delta\Pi \simeq \frac{1}{2} \int_V \delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\xi} dV \quad (\text{Ap-II.15})$$

Según Bažant ^[11], esta condición aplicada a materiales con ablandamiento, permite definir un tamaño de zona de localización de deformaciones plásticas, donde se desarrolla un incremento de deformación positivo que junto al incremento de deformación negativo que se produce en la zona no plastificada, conduce a un incremento de trabajo de segundo orden positivo y máximo sobre todo el volumen del sólido. Así, a partir de la ec.(Ap-II.15), la solución será estable en un determinado instante del proceso de carga cuasi-estático, si se cumple que fig.(Ap-II.1):

$$\Delta\Pi \simeq \frac{1}{2} \int_V \delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\xi} dV = \frac{1}{2} \left[\int_{V^0} \delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\xi} dV + \int_{V^p} \delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\xi} dV \right]^{max.} > 0 \quad (\text{Ap-II.16})$$

$$\Delta\Pi \simeq \{[\Delta\Pi]_{V^0} + [\Delta\Pi]_{V^p}\}^{max.} > 0$$

donde V^0 es el volumen de la zona no plastificada o elástica, V^p es el volumen de la zona plastificada con ablandamiento, $[\Delta\Pi]_{V^0} = \frac{1}{2} \int_{V^0} \delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\xi} dV > 0$ es el trabajo de segundo orden desarrollado en la zona que no ha plastificado; y $[\Delta\Pi]_{V^p} = \frac{1}{2} \int_{V^p} \delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\xi} dV + \frac{1}{2} \int_{V^p} \delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\xi}^p dV > 0$ es el trabajo de segundo orden desarrollado en la zona que ha plastificado.

En la ec.(Ap-II.16), se observa claramente, que para que el trabajo global de segundo orden sea mayor que cero, el volumen de la zona dañada no debe superar de una cierta dimensión. Esto garantiza que se pueda cumplir durante todo el proceso elasto-plástico con ablandamiento, que: $|\int_{V^p} \delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\xi}^p dV| \leq |\int_{V^0} \delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\xi} dV| + |\int_{V^p} \delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\xi} dV|$

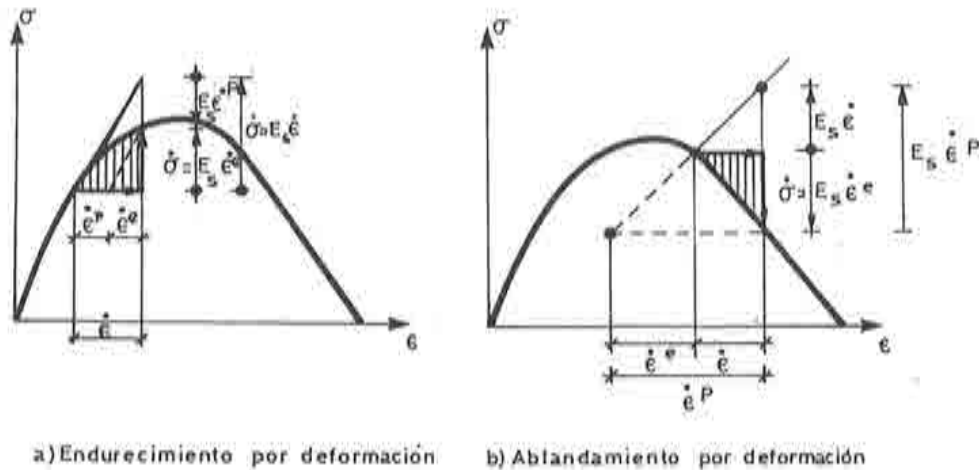


fig.(Ap-II.1): Respuesta esquemática uniaxial, para estados elasto-plásticos: a) Con endurecimiento. b) Con ablandamiento.

Es importante observar la diferencia entre la condición de estabilidad global, dada por la ec.(Ap-II.16), y la de estabilidad local de Drucker (condición suficiente) dados por la ec.(Ap-I.55) y la ec.(Ap-I.56). De todo esto, se puede concluir que en un punto del sólido es posible que se viole la condición de estabilidad de Drucker, sin que la respuesta global sea inestable (consultar también [5][7][11][67][104][140][145])

Ap-II.1.f.- Criterio de energía para formular la condición de unicidad en la solución.

Si a partir de un estado de equilibrio de un punto del sólido (configuración de origen) $\underline{\epsilon}$, $\underline{\sigma}$, se consideran dos incrementos de desplazamientos virtuales (arbitrarios y cinemáticamente admisibles) $\delta \underline{u}_1$, $\delta \underline{u}_2$, se podría medir la *diferencia de energía potencial total* entre una y otra de estas dos *nuevas configuraciones* que ha adquirido el sólido, si se aplica sobre éste un único desplazamiento $\Delta(\delta \underline{u}) = \delta \underline{u}_2 - \delta \underline{u}_1$. Este nuevo desplazamiento será también virtual (arbitrario y cinemáticamente admisible), y dará lugar a una variación de deformación: $\Delta(\delta \underline{\epsilon})$ y a una tensión: $\Delta(\delta \underline{\sigma})$; de donde resulta un trabajo virtual de segundo orden igual a ec.(Ap-I.15):

$$\Delta(\delta^2\Pi) = \int_V \Delta(\delta\underline{\sigma}) \cdot \Delta(\delta\underline{\epsilon}) dV \quad (Ap-II.17)$$

de donde se deduce que si la variación de tensión $\Delta(\delta\underline{\sigma})$ producida por el desplazamiento virtual $\Delta(\delta\underline{u})$ es nula ($\Delta(\delta\underline{\sigma}) = \mathbf{0}$), se tiene para los dos estados de desplazamientos cinemáticamente admisibles e independientes $\delta\underline{u}_2 \neq \delta\underline{u}_1$, el mismo incremento de tensión $\delta\underline{\sigma}_2 \equiv \delta\underline{\sigma}_1$, por lo tanto la solución no es única, y resulta de la ec.(Ap-II.17) que:

$$\Delta(\delta^2\Pi) \equiv 0 \quad (Ap-II.18)$$

y debe ser entendida como una bifurcación en la respuesta ^[18]; por lo tanto la ec.(Ap-II.18) será una condición necesaria para que haya bifurcación en la respuesta. De esto se deduce que la unicidad en la solución está garantizada ^[18] si se cumple:

$$\Delta(\delta^2\Pi) > 0 \quad (Ap-II.19)$$

e incluso para $\Delta(\delta^2\Pi) < 0$. Pero en este caso es posible violar la condición de estabilidad dada por la ec.(Ap-II.14) ^[18].

Ap-II.2.- EQUILIBRIO DEL SOLIDO DISCRETO.

Para una región de dimensiones finitas $\Gamma^{(e)}$, que en adelante representará el dominio de un elemento finito, se puede aproximar en forma polinómica el campo de desplazamientos del sólido continuo $\mathbf{u}^{(e)}(x_1, x_2, x_3)$ mediante el campo de desplazamiento del sólido discreto $\mathbf{U}^{(e)}$, a través de la siguiente expresión:

$$\mathbf{u}^{(e)}(x_1, x_2, x_3) \simeq \mathbf{N}^{(e)}(x_1, x_2, x_3) \mathbf{U}^{(e)} \quad (Ap-II.20)$$

donde $\mathbf{u}^{(e)}(x_1, x_2, x_3)$ representa el campo de desplazamiento del sólido continuo en la región de dominio $\Gamma^{(e)}$, $\mathbf{N}^{(e)}(x_1, x_2, x_3)$ una cierta función polinómica, denominada función de forma, que interpola el campo de desplazamiento del sólido discreto $\mathbf{U}^{(e)}$ en la misma región $\Gamma^{(e)}$.

Además, el campo de deformaciones del dominio continuo puede ser expresado mediante la siguiente ecuación de compatibilidad:

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon}^{(e)}(x_1, x_2, x_3) &\simeq \nabla_s(\mathbf{u}^{(e)}(x_1, x_2, x_3)) \\ \text{o en forma matricial} & \\ \underline{\epsilon}^{(e)}(x_1, x_2, x_3) &\simeq \mathcal{D}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \quad (Ap-II.21)$$

donde $\mathcal{D}^{(e)}$ es un operador diferencial en forma de matriz ^{[25][144]}, que para el caso de problemas geoméricamente lineales se mantiene constante e independiente de \mathbf{u} . Sustituyendo la ec.(Ap-II.20) en ec.(Ap-II.21), resulta el siguiente campo de deformaciones aproximado, para el sólido continuo, en la región elemental $\Gamma^{(e)}$:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(e)}(x_1, x_2, x_3) \simeq \underbrace{\mathcal{D}^{(e)} \mathbf{N}^{(e)}(x_1, x_2, x_3)}_{\mathbf{B}^{(e)}} \mathbf{U}^{(e)} \quad (\text{Ap-II.22})$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(e)}(x_1, x_2, x_3) \simeq \mathbf{B}^{(e)}(x_1, x_2, x_3) \mathbf{U}^{(e)}$$

Sustituyendo las ecs.(Ap-II.22) y (Ap-II.20) en la ecuación de los trabajos virtuales ec.(Ap-II.8), resulta la condición de equilibrio para un sólido discretizado de dominio $\Gamma^{(e)}$ (por simplicidad operativa en el cálculo numérico, en lo sucesivo se utilizan matrices de una columna en lugar de los tensores simétricos de segundo orden, y matrices cuadradas en lugar de los tensores de cuarto orden (anexo-E)):

$$\left\{ \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV - \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{f}_V^{(e)} dV - \int_{S_F^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{f}_{S_F}^{(e)} dS \right\} \delta \mathbf{U}^{(e)} = 0 \quad (\text{Ap-II.23})$$

para que ésta tenga solución distinta de la trivial, debe ocurrir necesariamente que $\delta \mathbf{U}^{(e)} \neq \mathbf{0}$, situación que puede interpretarse como que la condición anterior debe cumplirse para cualquier desplazamiento virtual del sólido discretizado $\delta \mathbf{U}^{(e)}$. Quedando la condición de equilibrio de la región $\Gamma^{(e)}$ del sólido discretizado, como:

$$\mathbf{R}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV - \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{f}_V dV - \int_{S_F^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{f}_{S_F}^{(e)} dS = 0 \quad (\text{Ap-II.24})$$

$$\mathbf{R}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV - \mathbf{R}^{(e)} = 0$$

siendo $\mathbf{R}^{(e)}$ el vector de fuerzas residuales, y $\mathbf{R}^{(e)}$ las fuerzas nodales equivalentes.

La ec.(Ap-II.24) establece el equilibrio de una región elemental $\Gamma^{(e)}$ discretizada. Si ahora se propone discretizar el sólido con n regiones elementales, de dominio $\Gamma_n^{(e)}$ cada una, el

equilibrio global de todos estos sub-dominios ensamblados, que cubren todo el dominio del sólido, surge de una generalización del equilibrio elemental ec.(Ap-II.24). Esto es:

$$\mathbf{R} = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \left[\int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV \right] - \mathbf{R}^e = 0 \quad (\text{Ap-II.25})$$

siendo una operación sumatoria especial la que se enuncia en la ec.(Ap-II.25), denominada ensamblaje, pues se debe sumar respetando las coincidencias nodales [35][144]; así pues, el vector de fuerzas residuales surge: $\mathbf{R} = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \mathbf{R}^{(e)}$ y el vector global de fuerzas nodales: $\mathbf{R}^e = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \mathbf{R}^{(e)}$.

En problemas no-lineales, como el que presenta la teoría de la plasticidad, la ec.(Ap-II.25) debe ser resuelta en forma iterativa a través de linealizaciones sucesivas de la ley constitutiva dentro de incrementos de cargas muy pequeños. En la actualidad existe una gran cantidad de métodos que permiten la resolución no lineal del sistema de la ec.(Ap-II.25), que pueden ser consultados en las referencias [18][37][38][39][63][80][82][88][105][143] (ver también la presentación sintética que se hace en el apart. Ap-II.3.). Gran parte de estos métodos, utilizan la denominada matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_T^{(e)}$ del dominio elemental $\Gamma^{(e)}$. Esta se obtiene haciendo la hipótesis, de que dentro de un incremento de carga la ley constitutiva es lineal (la matriz elasto-plástica para cada punto del dominio $\Gamma^{(e)}$ no se actualiza $\mathbf{D}^{ep^{(e)}} = \text{cte.}$), por lo tanto la ecuación de equilibrio elemental ec.(Ap-II.24) puede ser linealizada, y en tal caso se puede obtener la derivada de las fuerzas residuales respecto al campo de desplazamientos discreto:

$$\mathbf{K}_T^{(e)} = \frac{\partial (\mathbf{R}^{(e)})}{\partial \mathbf{U}^{(e)}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}^{(e)}} \left[\int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV - \mathbf{R}^{(e)} \right]$$

$$\mathbf{K}_T^{(e)} = \frac{\partial (\mathbf{R}^{(e)})}{\partial \mathbf{U}^{(e)}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}^{(e)}} \left[\int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{ep^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} dV - \mathbf{R}^{(e)} \right]$$

(Ap-II.26)

$$\mathbf{K}_T^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{ep^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)} dV$$

$$\mathbf{K}_T = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \mathbf{K}_T^{(e)} = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{ep^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)} dV$$

entendiéndose nuevamente el sumatorio, como un ensamblaje. A continuación, se puede observar un diagrama de flujo esquemático, donde se muestra muy someramente el ordenamiento del programa de elementos finitos con el que se han resuelto los problemas presentado en el cap. V, y donde se puede ver el proceso de resolución no lineal del sistema de la ec.(Ap-II.25)

Diagrama esquemático de un programa de Elementos Finitos
 problemas con no-linealidad en su ecuación constitutiva

INICIO

↓

Definición e inicialización a cero de las variables del problema
 Incremento de cargas $m = 1$. Iteración $n = 1$.

↓

Definición de las fuerzas nodales :

R^e

↓

1 - Aplicación de una parte de las fuerzas nodales, como
 incremento de carga:

$$\Delta R_{i,m} = \mu_m R^e$$

↓

En la primera iteración $i = 1$ adopta como fuerzas residuales:

$$\Delta R_{i,m}^{(e)} = -\Delta R_{i,m}^{(e)}$$

↓

↓

2 - Obtención de los desplazamientos nodales, a nivel global, para el incremento de carga impuesto:

$$\mathbf{K}_{T_{i,m}} = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \mathbf{K}_{T_{i,m}}^{(e)} = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{ep(e)} \mathbf{B}^{(e)} dV \Big|_{i,m}$$

$$\Delta \mathbf{R}_{i,m} = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \Delta \mathbf{R}_{i,m}^{(e)}$$

$$\mathbf{K}_{T_{i,m}} \Delta \mathbf{U}_{i,m} = \Delta \mathbf{R}_{i,m}$$

↓

Obtención de las deformaciones en cada punto de integración del elemento finito, y actualización de las variables de deformación y desplazamiento:

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \Delta \mathbf{U}_{i,m}^{(e)}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{i+1,m}^{(e)} = \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{(e)} + \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{(e)}$$

$$\mathbf{U}_{i+1,m}^{(e)} = \mathbf{U}_{i,m}^{(e)} + \Delta \mathbf{U}_{i,m}^{(e)}$$

↓

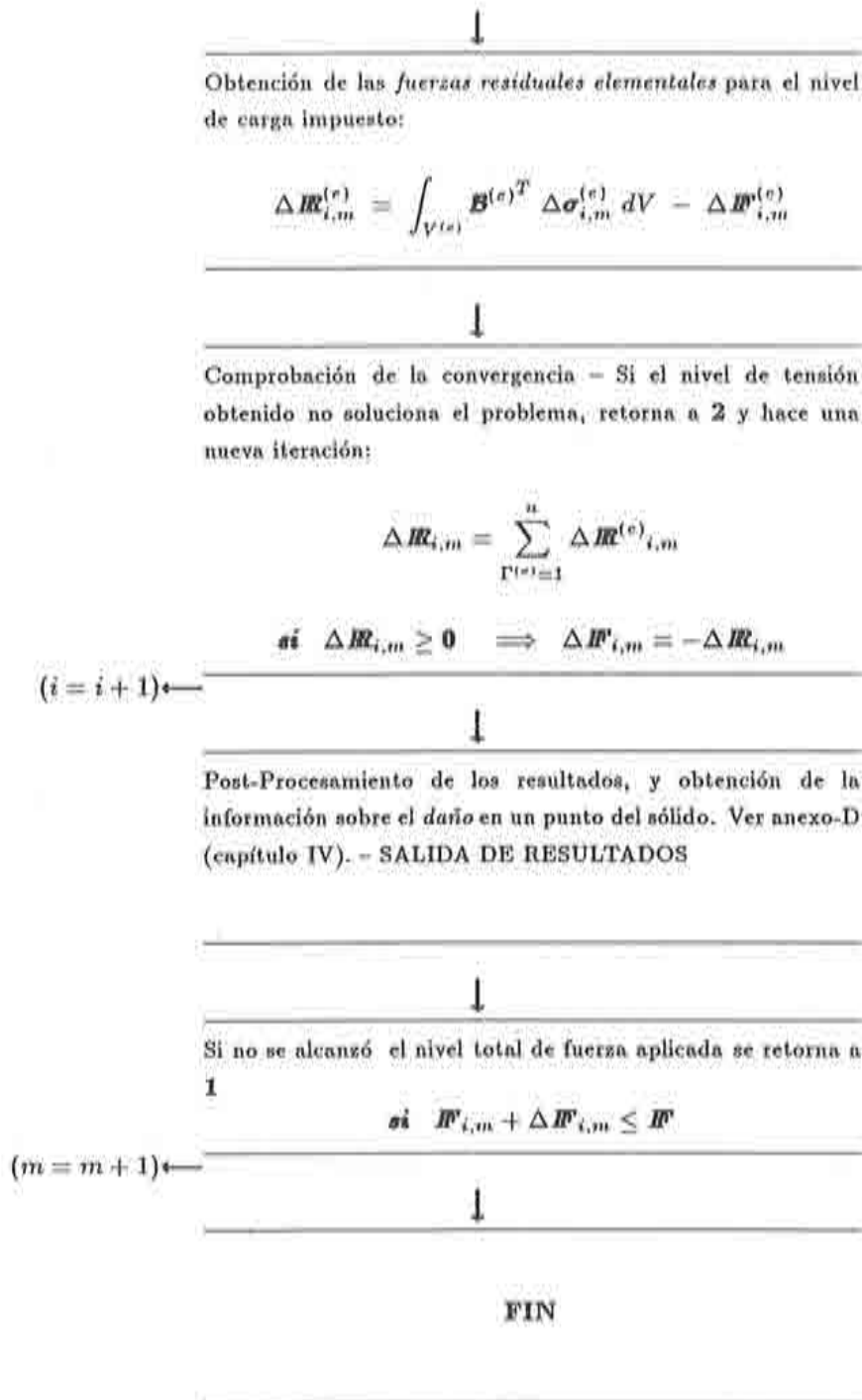
Integración de la ecuación constitutiva (ver apart. Ap-II.4):

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} = \mathbf{D}_{i,m}^{ep(e)} \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{(e)}$$

y actualización de las tensiones:

$$\boldsymbol{\sigma}_{i+1,m}^{(e)} = \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} + \Delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)}$$

↓



Ap-II.3.- RESOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO NO LINEAL - METODO DE CONTROL DE RESPUESTA - PROPUESTA DE UNA SIMPLE VARIANTE DE CONTROL A TRAVES DE UN CAMINO PLANO - PROPUESTA DE UN ALGORITMO DE CONTROL DE PLASTIFICACION.

Ap-II.3.a.- introducción.

Cuando la respuesta de un material no es lineal, como la que resulta de un comportamiento elasto-plástico, la resolución de las ecuaciones de equilibrio del sólido discretizado *ec.(Ap-II.25)*, constituye todavía un problema delicado y costoso dentro del uso del método de los elementos finitos. La solución de este sistema de ecuaciones viene dada a través de diversos procedimientos iterativos que tienden a converger hacia la solución del problema a medida que van disipando el error residual. En otras palabras, significa que es necesario ejecutar un cierto número de iteraciones, para cada incremento de carga, hasta que el criterio de convergencia indique que se satisface la condición de equilibrio dada por la *ec.(Ap-II.25)*. La convergencia se controla mediante distintos tipos de normas residuales ^{[63][82][105]}, que en general se pueden agrupar en: *normas en fuerzas, normas en desplazamiento y normas en energía.*

A continuación se citan en forma breve, algunas de las técnicas de resolución de sistemas de ecuaciones no-lineales más utilizadas:

- **Iteración directa:** El desplazamiento correspondiente a la solución previa es usado para predecir el valor actual de la rigidez estructural.
- **Newton-Raphson :** También denominado de *rigidez tangente*, por que utiliza esta matriz actualizada, para predecir la siguiente solución.
- **Newton-Raphson modificado:** Para evitar el costo de cálculo que significa la evaluación de la matriz tangente en todas las iteraciones, se han propuesto distintas modificaciones del procedimiento original: - K_0 Método de *rigidez inicial*, que como su nombre lo indica, utiliza la matriz de rigidez elástica inicial durante todo el proceso no-lineal. - K_1 La matriz de rigidez tangente se calcula en la primera iteración de cada incremento de carga. - K_2 La matriz de rigidez tangente se calcula en la segunda iteración de cada incremento de carga .
- **Newton Conjugado:** Produce una mejora en la búsqueda de la solución, corrigiendo los desplazamientos en una nueva dirección. Un caso particular de estos métodos, es el denominado *búsqueda direccional* (line search), el cual elige la dirección de búsqueda según aquella que signifique un mínimo en la energía potencial.
- **Cuasi Newton:** Constituye una nueva clase de técnica de solución no-lineal, basada en ejecutar en cada iteración una modificación de los elementos de la matriz de rigidez global, con el fin de satisfacer una condición *secante local*. Existen varios métodos que se basan en esta técnica, y que llevan el nombre de sus autores: - *actualización directa de Davidon* (Davidon direct update), - *Davidon, Fletcher, Powell* - *Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno* **BFGS**.
- **Newton Secante:** Esta técnica puede considerarse como otra versión de los *Cuasi Newton*. Fue presentada por Crisfield, y tiene cinco variantes de uso.

No se entrará en particularizaciones sobre cada una de estas técnicas enunciadas, ya que no es el objeto de esta tesis, pero sí es necesario advertir que bajo estados de carga sostenida en materiales dominados por el *ablandamiento* post-pico (pérdida de carga con crecimiento de desplazamientos), es posible que no se puede encontrar la solución de la ec.(Ap-II.25) usando simplemente cualquiera de los métodos antes mencionados. Para ello es necesario recurrir al uso de las técnicas citadas, conjuntamente con *técnicas de control de respuesta* como la propuesta inicialmente por E. Riks [120]. Estos procedimientos, conocidos con el nombre de *longitud de arco* (arc-length), han sido desarrollados para seguir el camino del equilibrio luego de superar puntos críticos de carga máxima, a partir de los cuales, la solución se encuentra siempre para un nivel de carga inferior al que se tenía en el paso anterior. El método fue propuesto originalmente por E. Riks [120] y por G.A. Wempner y modificado por M. Crisfield y E. Ramm [38].

La idea original de Riks consiste en introducir una *ecuación de constricción* adicional a las ecuaciones de equilibrio. A partir de esta base, se han propuesto distintas *ecuaciones de constricción*, dando origen a distintas variantes del método de Riks.

Ap-II.3.b.- Método general de control de respuesta.

Se puede formular la ecuación de equilibrio global del sólido ec.(Ap-II.25), para un cierto incremento de carga m , como:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_m, \mu_m) = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \left[\int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV \right]_m - \mu_m \mathbf{R} = 0 \quad (\text{Ap-II.27})$$

A diferencia de cualquier procedimiento incremental, el multiplicador μ_m , que regula la intensidad del paso de cargas, es una variable que se ajusta en forma automática hasta encontrar el nivel de carga adecuado que satisface la ec.(Ap-II.27). Este ajuste debe ser controlado a través de una *ecuación de constricción*, de cumplimiento necesario, del siguiente tipo:

$$f(\mathbf{U}_m, \mu_m) = 0 \quad (\text{Ap-II.28})$$

De acuerdo a la ec.(Ap-II.27) y la ec.(Ap-II.28), la solución del problema, será la que cumpla con:

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\mathbf{U}_m, \mu_m) = \mathbf{0} \\ f(\mathbf{U}_m, \mu_m) = 0 \end{cases} \quad (\text{Ap-II.29})$$

Para conocer el estado de desplazamiento, y el factor de carga que satisfacen estas expresiones, se desarrolla en serie de Taylor el vector de fuerzas residuales, con el fin de

aproximar la solución del problema. Truncando este desarrollo en la primera variación, se tiene para el incremento de carga m , iteración i :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbb{R}(\mathbf{U}_{i-1,m} + \delta\mathbf{U}_{i,m}, \mu_{i-1,m} + \delta\mu_{i,m}) \simeq \\ &\simeq \mathbb{R}(\mathbf{U}_{i-1,m}, \mu_{i-1,m}) + \left. \frac{\partial \mathbb{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{i-1,m} \delta\mathbf{U}_{i,m} + \left. \frac{\partial \mathbb{R}}{\partial \mu_m} \right|_{i-1,m} \delta\mu_{i,m} + \dots \end{aligned} \quad (Ap-II.30)$$

donde:

$$\frac{\partial \mathbb{R}}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{K}_T \quad : \quad \text{Rigidez tangente global.}$$

$$\frac{\partial \mathbb{R}}{\partial \mu} = -\mathbb{F} \quad : \quad \text{Carga total en el sistema global.}$$

de esta forma la ec.(Ap-II.30) puede escribirse como:

$$\mathbf{0} = \mathbb{R}(\mathbf{U}_{i-1,m}, \mu_{i-1,m}) + \mathbf{K}_T(\mathbf{U}_{i-1,m}) \delta\mathbf{U}_{i,m} - \mathbb{F} \delta\mu_{i,m}$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{U}_{i-1,m}) \delta\mathbf{U}_{i,m} = -\mathbb{R}(\mathbf{U}_{i-1,m}, \mu_{i-1,m}) + \mathbb{F} \delta\mu_{i,m}$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{U}_{i-1,m}) \delta\mathbf{U}_{i,m} = - \left[\sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \left[\int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV \right]_{i-1,m} - \mu_{i-1,m} \mathbb{F} \right] + \mathbb{F} \delta\mu_{i,m}$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{U}_{i-1,m}) \delta\mathbf{U}_{i,m} = - \left[\mathbf{K}_T(\mathbf{U}_{i-1,m}) \delta\hat{\mathbf{U}}_{i,m} \right] + \mathbf{K}_T(\mathbf{U}_{i-1,m}) [\mathbf{U}_i]_I \delta\mu_{i,m}$$

(Ap-II.31)

premultiplicando ambos miembros por \mathbf{K}_T^{-1} , se obtiene la variación del desplazamiento dentro de la iteración i , bajo las condiciones impuestas:

$$\delta\mathbf{U}_{i,m} = -\delta\hat{\mathbf{U}}_{i,m} + \delta\mu_{i,m} [\mathbf{U}_i]_I \quad (Ap-II.32)$$

el desplazamiento correspondiente al incremento de carga resultará:

$$\Delta\mathbf{U}_{i,m} = \Delta\mathbf{U}_{i-1,m} + \delta\mathbf{U}_{i,m} \quad (Ap-II.33)$$

sustituyendo la ec.(Ap-II.33) en la ecuación de constricción ec.(Ap-II.29), resulta la variación del incremento de cargas, correspondiente a la iteración i y a partir de ésta se obtiene el factor de carga que satisface las ecs.(Ap-II.39)

$$\mu_{i,m} = \mu_{i-1,m} + \delta\mu_i \quad (Ap-II.34)$$

El procedimiento operativo puede resumirse en los siguientes pasos:

- Obtención de la variación de desplazamiento para el nivel actual de fuerzas residuales:

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{U}_{i-1,m}) \delta\hat{\mathbf{U}}_{i,m} = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \left[\int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV \right]_{i-1,m} - \mu_{i-1,m} \mathbf{R}$$

- Obtención del desplazamiento total para el nivel de carga total:

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{U}_{i-1,m}) [\mathbf{U}_i]_I = \mathbf{R}$$

- Obtención de las soluciones de la ecuación de constricción:

$$f(\mathbf{U}_{i,m}, \delta\mu_{i,m}) = 0 \rightarrow \delta\mu_{i,m}$$

- Actualización de los desplazamientos, según las ecs.(Ap-II.32), (Ap-II.33), y del nivel de carga según la ec.(Ap-II.34).

Ap-II.3.c.- Método de control de respuesta, a través de un camino esférico ^[37]

La variante del método de control de respuesta, denominada de *camino esférico*, ha sido propuesta inicialmente por Riks ^[120]. Se fundamenta en expresar una ecuación de constricción en función del nivel de desplazamientos y carga a la vez. Esto es:

$$\Delta\mathbf{U}_{i,m}^T \Delta\mathbf{U}_{i,m} + b^2 \delta\mu_{i,m}^2 \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \Delta l_{i,m}^2 \quad (Ap-II.35)$$

donde:

$$\Delta\mathbf{U}_{i,m} = \Delta\mathbf{U}_{i-1,m} + \delta\mathbf{U}_{i,m} \quad : \quad \text{Incremento de desplazamientos para el nivel de carga } m, \text{ iteración } i.$$

$$\delta\mathbf{U}_{i,m} = -\delta\hat{\mathbf{U}}_{i,m} + \delta\mu_{i,m} [\mathbf{U}_i]_I \quad : \quad \text{Variación del incremento de desplazamientos en la iteración } i.$$

$$\mathbf{R} \quad : \quad \text{Nivel de carga total.}$$

$$\Delta l_{i,m}^2 \quad : \quad \text{Incremento de longitud de arco para el nivel de carga } m, \text{ iteración } i.$$

$$b \quad : \quad \text{Parámetro de escala de carga.}$$

Esta ecuación fué modificada por Crisfield [37], haciendo constante e igual a cero, el parámetro de escala de cargas $b = 0.0$ en la ec.(Ap-II.35). De esta forma, la ecuación de constricción queda totalmente definida en el espacio de los desplazamientos fig.(Ap-II.2), y por lo tanto se transforma en una técnica de *control de desplazamientos*, quedando su ecuación de constricción, como:

$$\Delta \mathbf{U}_{i,m}^T \Delta \mathbf{U}_{i,m} = \Delta l_{i,m}^2 \quad (\text{Ap-II.36})$$

Desarrollando esta ecuación, resulta la siguiente expresión cuadrática:

$$C_1 \delta \mu_{i,m}^2 + C_2 \delta \mu_{i,m} + C_3 = 0 \quad (\text{Ap-II.37})$$

con:

$$C_1 = [\mathbf{U}_i]_I^T [\mathbf{U}_i]_I$$

$$C_2 = 2 [\delta \mathbf{U}_{i,m} - \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m}]^T [\mathbf{U}_i]_I$$

$$C_3 = [\delta \mathbf{U}_{i,m} - \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m}]^T [\delta \mathbf{U}_{i,m} - \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m}] - \Delta l_{i,m}^2$$

resultando de la resolución de ésta, dos raíces, tal que una llevará a que el arco corte el camino del equilibrio en **A**, y la otra en **B** fig.(Ap-II.2).

Se debe elegir la raíz de la ec.(Ap-II.37) $(\delta \mu_{i,m})_{1,2}$ que haga mínimo el ángulo $\varphi_{\Delta U}$ entre los desplazamientos $\Delta \mathbf{U}_{i,m}$ y $\Delta \mathbf{U}_{i-1,m}$. Esto es:

$$\cos \varphi_{\Delta U} \begin{cases} = [\Delta \mathbf{U}_{i-1,m} + -\delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m} + (\delta \mu_{i,m})_1 [\mathbf{U}_i]_I]^T \Delta \mathbf{U}_{i-1,m} \\ = [\Delta \mathbf{U}_{i-1,m} + -\delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m} + (\delta \mu_{i,m})_2 [\mathbf{U}_i]_I]^T \Delta \mathbf{U}_{i-1,m} \end{cases} \quad (\text{Ap-II.38})$$

siendo mínimo el ángulo, que da un coseno positivo. Si los dos cosenos son positivos, la raíz de la ec.(Ap-II.37) más apropiada es la que está más cerca de la solución lineal. Por lo tanto, será:

$$\delta \mu_{i,m} = - \frac{C_3}{C_2} \quad (\text{Ap-II.39})$$

Una vez conocida la variación del incremento de cargas, se obtiene el desplazamiento a través de la ec.(Ap-II.33), y el factor de carga de la ec.(Ap-II.34).

de esta tesis. Sólo encuentra la respuesta en procesos con ablandamiento y avance en los desplazamientos, y no puede encontrar el equilibrio cuando hay retrocesos de desplazamientos. Consiste en un control de desplazamientos a partir de una ecuación de constricción que involucra el estado de desplazamientos actual $\Delta \mathbf{U}_{i,m}$ y el correspondiente a la iteración anterior $\Delta \mathbf{U}_{i-1,m}$. Esto es:

$$\Delta \mathbf{U}_{i,m}^T \Delta \mathbf{U}_{i-1,m} = \Delta l_{i,m}^2 \quad (\text{Ap-II.40})$$

donde $\Delta l_{i,m}^2$ es el incremento de longitud de arco para el nivel de carga m , iteración i . Esta ecuación es una linealización de la ec.(Ap-II.36) y da origen a una familia de métodos que reciben el nombre de *plano normal actualizado*. Existen varias maneras de metodizar su uso, una es la que se propone en esta tesis a partir de la formulación de una ecuación lineal en $\delta \mu_{i,m}$:

$$C_1 + C_2 + \delta \mu_{i,m} C_3 = \Delta l_{i,m}^2 \quad (\text{Ap-II.41})$$

con:

$$C_1 = \Delta \mathbf{U}_{i-1,m}^T \Delta \mathbf{U}_{i-1,m}$$

$$C_2 = -\delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m}^T \Delta \mathbf{U}_{i-1,m}$$

$$C_3 = [\mathbf{U}_i]_r^T \Delta \mathbf{U}_{i-1,m}$$

resultando de aquí una raíz única:

$$\delta \mu_{i,m} = \frac{\Delta l_{i,m}^2 - C_1 - C_2}{C_3} \quad (\text{Ap-II.42})$$

de donde se deduce que el plano normal cortará el camino de la respuesta sólo en el punto B fig.(Ap-II.3).

De esta manera, se puede calcular el desplazamiento a través de la ec.(Ap-II.33), y el factor de carga de la ec.(Ap-II.34).

Durante el procedimiento de solución, cabe observar que esta formulación presenta un indefinición en la primera iteración de cada incremento de carga ($i = 1$) , pues $\Delta \mathbf{U}_{0,m} = \mathbf{0} \Rightarrow C_3 = 0$. En tal caso, se procede en la primera iteración con una técnica cualquiera de control de desplazamientos, y en las subsiguientes con el método propuesto.

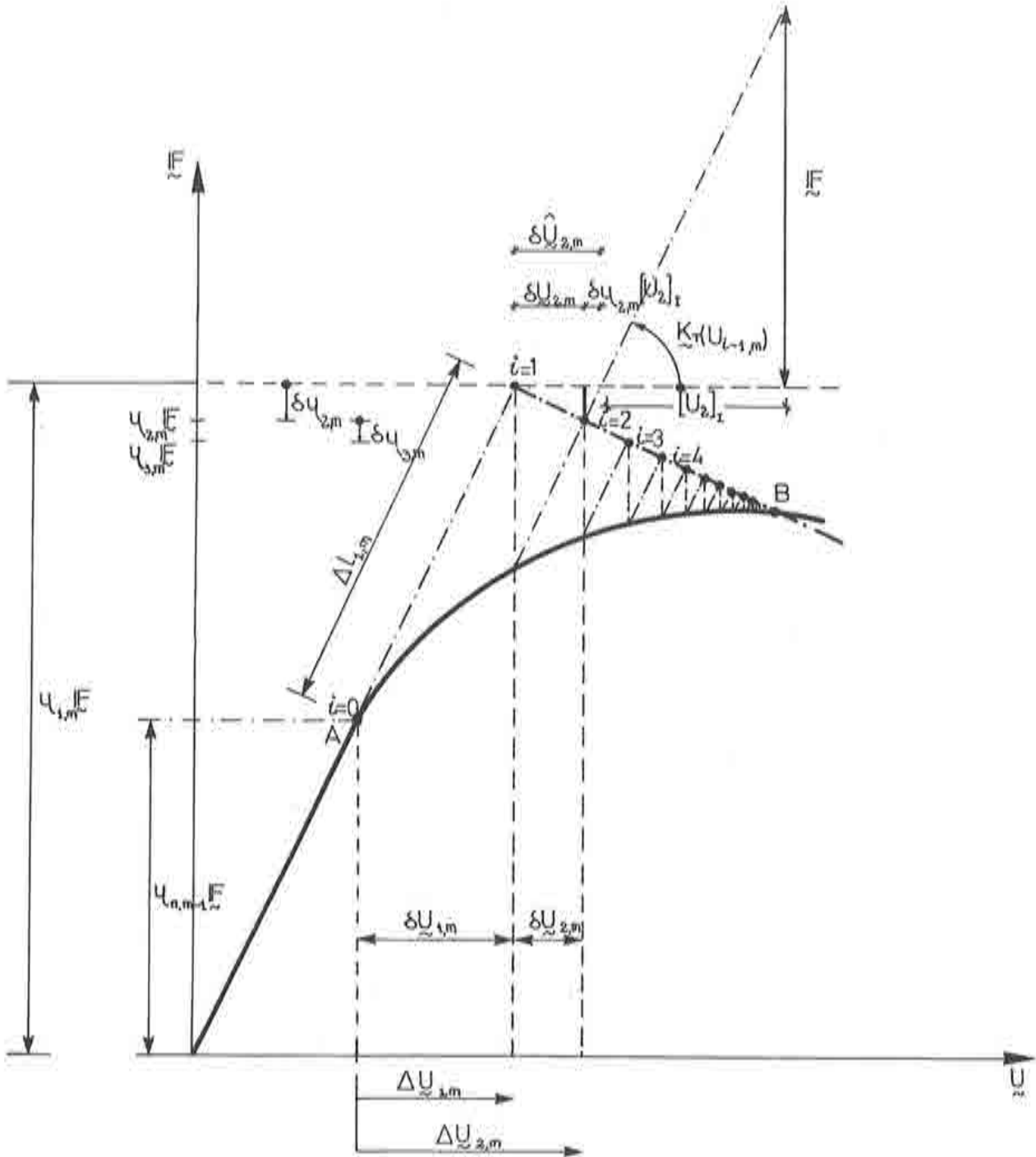


fig.(Ap-II.3): Procedimiento básico de control de desplazamiento, a través de un camino plano.

Ap-II.3.e.- Algoritmo de control de plastificación – Cálculo automático de Δl .

La técnica anterior permite obtener el *equilibrio del sólido*, bajo cargas o desplazamientos impuestos, a partir de una *restricción en el campo de los desplazamientos*. Sin embargo, resulta también importante procurar que el incremento de carga sea tal, que en dicho incremento sólo plastifique un punto. Para ello se propone en este apartado, un concepto de *control de plastificación, dentro de la técnica de control de desplazamientos*, el cual consiste en obtener la longitud de arco Δl necesaria, que permita al punto más cercano a la superficie de fluencia, alcanzar su estado de plastificación. En otras palabras, esta técnica se basa en obtener para cada instante t del proceso cuasi estático, la *distancia* que hay entre la tensión de cada punto del sólido discreto y la superficie de fluencia, seleccionar la menor de ellas y con base en ésta calcular una *longitud de arco* que permita plastificar solamente al punto más cercano a la superficie de fluencia.

Indirectamente, esta técnica garantiza que el camino de la respuesta que sigue el sólido, corresponda al de la mínima energía.

* **Relación entre el arco del método del “camino esférico” y la distancia a la superficie de fluencia.**

Debido a que la plasticidad trata un *problema lineal de compatibilidad entre desplazamientos y deformaciones ec.(Ap-II.21)*, se puede definir un factor de *reducción de desplazamientos* r_{Δ} que permita obtener el desplazamiento necesario para que el punto de tensión más cercano a la superficie de fluencia llegue a situarse sobre ella. Así, a partir de este desplazamiento reducido, se obtiene una longitud de arco que puede ser considerada dentro de una técnica de control de desplazamiento. Esto es:

$$\Delta l_{i,m}^2 = f(r_{\Delta}) \tag{Ap-II.43}$$

siendo $f(r_{\Delta})$ una función que depende del tipo de ecuación de constricción, y del factor de reducción de desplazamientos. De esta forma, para una ecuación del tipo de la *ec.(Ap-II.36)*, se tiene:

$$\Delta l_{i,m}^2 = \Delta \mathbf{U}_{i,m}^T \Delta \mathbf{U}_{i,m} \tag{Ap-II.44}$$

siendo $\Delta \mathbf{U}_{i,m} = \Delta \mathbf{U}_{i-1,m} + \delta \mathbf{U}_{i,m}$, donde el incremento de desplazamientos correspondiente a la iteración y el incremento de carga actual puede ser escrito como:

$$\delta \mathbf{U}_{i,m} = r_{\Delta} \hat{\delta \mathbf{U}}_{i,m} \tag{Ap-II.45}$$

siendo $\hat{\delta \mathbf{U}}_{i,m}$ el desplazamiento que resulta del incremento de carga impuesto, y $\delta \mathbf{U}_{i,m}$ el incremento de desplazamiento deseado para que sólo plastifique un punto. Considerando la *ec.(Ap-II.45)*, se puede escribir la *ec.(Ap-II.44)* como:

$$\Delta l_{i,m}^2 = \left(\Delta \mathbf{U}_{i-1,m} + r_{\Delta} \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m} \right)^T \left(\Delta \mathbf{U}_{i-1,m} + r_{\Delta} \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m} \right) \quad (\text{Ap-II.46})$$

Operando algebraicamente con esta última, se puede escribir la ecuación de constricción de desplazamientos para el método de control de desplazamientos del *camino esférico*, como:

$$\Delta l_{i,m}^2 = \left(\Delta \mathbf{U}_{i-1,m}^T \Delta \mathbf{U}_{i-1,m} \right) + 2 r_{\Delta} \left(\Delta \mathbf{U}_{i-1,m}^T \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m} \right) + r_{\Delta}^2 \left(\delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m}^T \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m} \right) \quad (\text{Ap-II.47})$$

Así, conociendo el *factor de reducción* r_{Δ} , se puede encontrar la longitud de arco Δl necesaria, para obtener un $\delta \mu_{i,m}$ que permita situar el punto del sólido más cercano a la superficie de fluencia, sobre ella.

- **Relación entre el arco del método del "camino plano" y la distancia a la superficie de fluencia.**

Este constituye un caso particular del anterior, por lo tanto se pueden hacer las mismas consideraciones para obtener la relación que hay entre la *distancia al plano* (longitud de arco en el caso anterior), y el factor de reducción de desplazamientos.

La ecuación de constricción que se toma en este caso es la *ec. (Ap-II.40)*:

$$\Delta l_{i,m}^2 = \Delta \mathbf{U}_{i,m}^T \Delta \mathbf{U}_{i-1,m} \quad (\text{Ap-II.48})$$

sustituyendo en ella el incremento de desplazamiento en función del *factor de reducción* $\Delta \mathbf{U}_{i,m} = \Delta \mathbf{U}_{i-1,m} + r_{\Delta} \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m}$ y operando algebraicamente, se puede obtener la expresión que relaciona este factor con la *distancia al plano normal*, que podrá ser considerada dentro de la técnica homónima de control de desplazamiento. Esto es:

$$\Delta l_{i,m}^2 = \Delta \mathbf{U}_{i,m} = \left[\Delta \mathbf{U}_{i-1,m} + r_{\Delta} \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m} \right]^T \Delta \mathbf{U}_{i-1,m} \quad (\text{Ap-II.49})$$

- **Obtención del coeficiente de reducción r_{Δ} .**

Dada la linealidad que existe entre los desplazamientos y deformaciones y entre los incrementos de estas últimas y los incrementos de tensión para una iteración i dentro del incremento de carga m (linealización de un proceso no lineal mediante iteraciones sucesivas), se puede obtener el *factor de reducción de deformaciones*, como si fuese la *distancia del punto de tensión a la superficie de fluencia*, mediante una relación lineal formulada por Nayak-Zienkiewicz [88]. Esto es:

$$r_{\Delta} = - \frac{\mathcal{F}^0(\sigma_{i-1,m})}{\mathcal{F}^1(\sigma_{i,m}) - \mathcal{F}^0(\sigma_{i-1,m})} = - \frac{\mathcal{F}^0(\sigma_{i-1,m})}{\mathcal{F}^1(\sigma_{i-1,m} + \mathbf{D}_S \Delta \epsilon_{i,m}) - \mathcal{F}^0(\sigma_{i-1,m})} \quad (\text{Ap-II.50})$$

Este factor de reducción es aproximado, y puede ser calculado con más exactitud a partir de la siguiente corrección [88] :

$$\delta r_{\Delta} = \frac{\mathcal{F}^2(\sigma_{i-1,m} + r_{\Delta} \mathbf{D}_S \Delta \epsilon_{i,m})}{\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma)}{\partial \sigma} \right\}_{i-1,m}^T \mathbf{D}_S \Delta \epsilon_{i,m}} \quad (\text{Ap-II.51})$$

siendo \mathcal{F}^0 , \mathcal{F}^1 y \mathcal{F}^2 las funciones de fluencia evaluadas para los estados de tensión previo, actual y posterior a la primera corrección, respectivamente. Para mayor información sobre la expresión que da la distancia de un punto de tensión, a otro donde se intersecta con la superficie de fluencia, se recomienda consultar la referencia de origen [88] .

• **Implementación del algoritmo de control de plastificación.**

A continuación se presentan en forma breve, los pasos generales para la implementación del algoritmo de control de plastificación:

- a.- Cálculo de la función de fluencia para la iteración i , incremento de carga m , para todos los puntos de integración del sólido discreto:

$$\mathcal{F}^1(\sigma_{i,m}) \quad ; \quad \sigma_{i,m} = \sigma_{i-1,m} + \mathbf{D}_S \Delta \epsilon_{i,m}$$

- b.- Identificación de los puntos que cumplan con la *condición de fluencia plástica*, o aquellos que la violen. En caso que no haya ningún punto en estas condiciones, el proceso es elástico y por lo tanto no es necesario el uso de este algoritmo.

$$\text{Puntos que cumplen con:} \quad \mathcal{F}^1(\sigma_{i,m}) \geq 0$$

- c.- Determinación de los puntos que plastificaron durante esta iteración. Los restantes no entran en este proceso.

$$\text{Puntos que cumplen con:} \quad \begin{cases} \mathcal{F}^1(\sigma_{i,m}) \geq 0 \\ \mathcal{F}^0(\sigma_{i-1,m}) < 0 \end{cases}$$

- d.- Selección del punto que cumple con las condiciones c, y que se encontraba, antes del incremento de tensión $\Delta \sigma_{i,m}$, más cerca de la superficie de fluencia plástica.

$$\text{Puntos que cumplen con:} \quad \mathcal{F}^1(\sigma_{i,m}) \Big|_{\max.}$$

e.- Obtención del factor de reducción de desplazamientos.

$$r_{\Delta} = - \frac{\mathcal{F}^0(\sigma_{i-1,m})}{\mathcal{F}^1(\sigma_{i,m})|^{max} - \mathcal{F}^0(\sigma_{i-1,m})}$$

f.- Obtención de la longitud de arco correspondiente.

$$\Delta l_{i,m}^2 = f(r_{\Delta})$$

g.- Continuación del cálculo, con una técnica de control de desplazamientos.

Ap-II.4.- INTEGRACION DE LA ECUACION CONSTITUTIVA.

Ap-II.4.a.- introducción.

Existen diversos procedimientos numéricos para la integración de la ecuación constitutiva elasto-plástica:

$$\dot{\sigma} = D_S (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p)$$

$$\dot{\sigma} = D_S \dot{\epsilon} - \dot{\lambda} D_S \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (Ap-II.52)$$

$$\dot{\sigma} = D_T^{ep} \dot{\epsilon}$$

En general, las técnicas de integración de la ecuación constitutiva elasto-plástica, pueden clasificarse dentro de dos grupos:

a.- **Métodos de avance directo -Integración explícita-**. Basados en dividir el incremento de desplazamiento correspondiente a la iteración actual $\Delta U_{i,m}$ en una gran cantidad de sub-incrementos para los cuales se calcula el sub-incremento de deformación. A partir de estos y la matriz elasto-plástica actualizada se obtiene el correspondiente sub-incremento de tensión *ec.*(Ap-II.52). En forma esquemática se tiene *para cada punto de integración* de un elemento finito $\Gamma^{(e)}$ (Ver la inserción en el programa general de elementos finitos *apart. Ap-II.2.*):

↓

Dado el estado de tensión y deformación para la iteración previa: $\sigma_{i-1,m}^{(e)}$ y $\epsilon_{i-1,m}^{(e)}$, y los incrementos de desplazamiento y deformación: $\Delta U_{i,m}^{(e)}$ y $\Delta \epsilon_{i,m}^{(e)}$, se calculan los sub incrementos de desplazamiento y deformación:

$$\left(\Delta U_{i,m}^{(e)}\right)_j = \frac{\Delta U_{i,m}^{(e)}}{n} \Rightarrow \left(\Delta \epsilon_{i,m}^{(e)}\right)_j$$

↓

1 - Cálculo de:

$$\left(D_{T}^{ep(e)}\right)_j$$

↓

Cálculo de:

$$\left(\Delta \sigma_{i,m}^{(e)}\right)_j = \left(D_{T}^{ep(e)}\right)_j \left(\Delta \epsilon_{i,m}^{(e)}\right)_j$$

$$\left(\Delta \epsilon_{i,m}^{(e)}\right)_j = D_S^{-1} \left(\Delta \sigma_{i,m}^{(e)}\right)_j$$

$$\left(\Delta \epsilon_{i,m}^{p(e)}\right)_j = \left(\Delta \epsilon_{i,m}^{(e)}\right)_j - \left(\Delta \epsilon_{i,m}^{(e)}\right)_j$$

↓

Incremento del estado tensional:

$$\left(\sigma_{i,m}^{(e)}\right)_j = \left(\sigma_{i,m}^{(e)}\right)_{j-1} + \left(\Delta \sigma_{i,m}^{(e)}\right)_j$$

↓

Obtención de:

$$\kappa^p \rightarrow A$$

$(j = j + 1) \leftarrow$

↓

b.- Métodos de retorno radial de Euler -Integración implícita-. Debido al problema de *ablandamiento* que presenta la respuesta tensión deformación del hormigón, se ha utilizado para resolver la *ecuación constitutiva* de este modelo, una técnica de retorno radial propuesta por Zienkiewicz [146] para visco-plasticidad, y utilizada en plasticidad por De Borst and Vermeer [10][24], con ligeras modificaciones en su implementación.

Sean $(i-1, m)$ e (i, m) los índices que simbolizan los estados correspondientes a la iteración anterior y actual dentro de un incremento de carga m , respectivamente fig.(Ap-II.4). Se tiene para cada punto de integración de un elemento finito $\Gamma^{(e)}$:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{i,m}^{(e)} &= \sigma_{i,m}^{(e)} - \sigma_{i-1,m}^{(e)} \\ \Delta \epsilon_{i,m}^{(e)} &= \epsilon_{i,m}^{(e)} - \epsilon_{i-1,m}^{(e)} \end{aligned} \tag{Ap-II.53}$$

donde el incremento de tensión vale:

$$\Delta \sigma_{i,m}^{(e)} = \mathbf{D}_S \Delta \epsilon_{i,m}^{(e)} = \mathbf{D}_S \left(\Delta \epsilon_{i,m}^{(e)} - \Delta \epsilon_{i,m}^{p(e)} \right) \tag{Ap-II.54}$$

con:

$$\Delta \epsilon_{i,m}^{p(e)} = \Delta \lambda_{i,m}^{(e)} \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right|_{i,m}^{(e)} \tag{Ap-II.55}$$

$$\Delta \lambda_{i,m}^{(e)} = \frac{\langle \mathcal{F}^1(\sigma_{i,m}^{(e)}) \rangle}{A_{i-1,m}^{(e)} + \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma)}{\partial \sigma} \right\}_{\sigma_{i,m}^{(e)}}^T \mathbf{D}_S \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}(\sigma)}{\partial \sigma} \right\}_{\sigma_{i,m}^{(e)}}} \tag{Ap-II.56}$$

$$\sigma_{i,m}^{(e)} = \sigma_{i-1,m}^{(e)} + \mathbf{D}_S \Delta \epsilon_{i,m}^{(e)} \tag{Ap-II.57}$$

sustituyendo la ec.(Ap-II.55) en la ec.(Ap-II.54), se tiene:

$$\Delta \sigma_{i,m}^{(e)} = \mathbf{D}_S \left(\Delta \epsilon_{i,m}^{(e)} - \Delta \lambda_{i,m}^{(e)} \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right|_{i,m}^{(e)} \right) \tag{Ap-II.58}$$

y sustituyendo ésta en la ec.(Ap-II.53), permite obtener la siguiente expresión para la tensión actual:

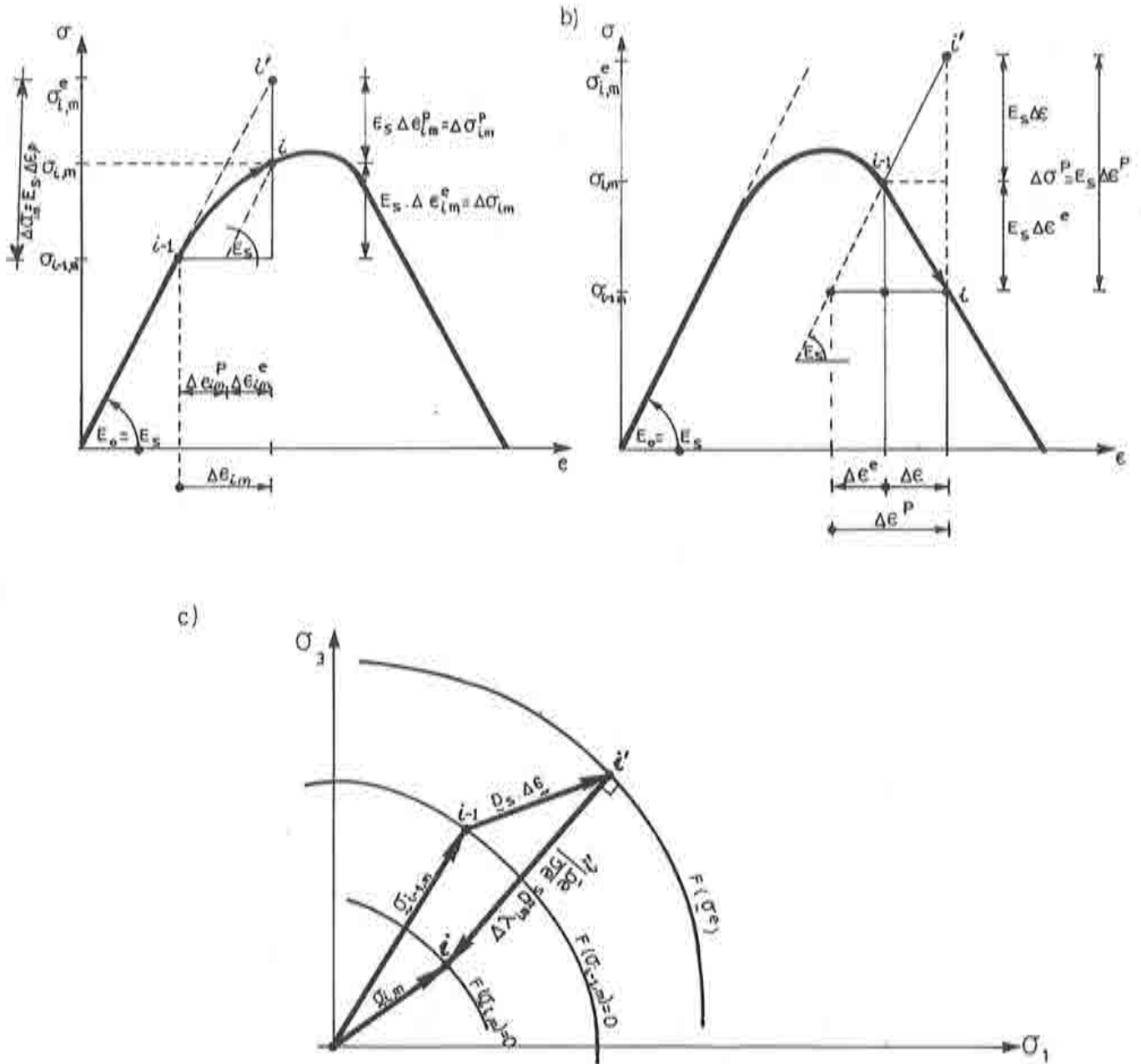


fig.(Ap-II.4): Esquema de integración de la ley tensión deformación: a) Para un caso uniaxial equivalente con endurecimiento b) Para un caso uniaxial equivalente con ablandamiento c) Para un caso biaxial con ablandamiento.

$$\sigma_{i,m}^{(e)} = \sigma_{i-1,m}^{(e)} + \mathbf{D}_S \left(\Delta \epsilon_{i,m}^{(e)} - \Delta \lambda_{i,m}^{(e)} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \Big|_{i,m}^{(e)} \right) \quad (\text{Ap-II.59})$$

La mayor ventaja de esta técnica para integrar la ecuación constitutiva, se basa en la forma de presentar el factor de consistencia plástica $\Delta \lambda_{i,m}^{(e)}$ (ec.(Ap-II.55)) [19][24], y en la evaluación

$$\text{de } \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma)}{\partial \sigma} \right\}_{\sigma_{i,m}^{(e)}} \text{ y } \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}(\sigma)}{\partial \sigma} \right\}_{\sigma_{i,m}^{(e)}} \text{ para el estado } \sigma_{i,m}^{(e)} = \sigma_{i-1,m}^{(e)} + \mathbf{D}_S \Delta \epsilon_{i,m}^{(e)}.$$

Ap-II.4.b.- Justificación y validez del factor de consistencia plástica adoptado.

En la ec.(Ap-I.50), se ha presentado el factor de consistencia plástica para un material sin degradación de rigidez, como:

$$\dot{\lambda} = \frac{\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_S \dot{\epsilon}}{A + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_S \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right]} \quad (\text{Ap-II.60})$$

siendo:

$$\dot{\lambda} \geq 0 : \text{parámetro de consistencia plástica ,}$$

$$A = \left[\underbrace{-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa}}_{h_c} \left(\mathbf{h}_n^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right) \right] : \text{parámetro de endurecimiento plástico ,} \quad (\text{Ap-II.61})$$

donde las derivadas están evaluadas en el paso anterior $(i-1, m)$. Desarrollando en serie de Taylor la función de fluencia, para un estado de tensión $\sigma_{i,m}^{(e)} = \sigma_{i-1,m}^{(e)} + \mathbf{D}_S \dot{\epsilon}_{i,m}^{(e)}$, y truncando en el término de primer orden, se tiene:

$$\mathcal{F}(\sigma_{i-1,m}^{(e)} + \dot{\sigma}_{i,m}^{(e)}) = \mathcal{F}(\sigma_{i-1,m}^{(e)}) + \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma)}{\partial \sigma} \right\}_{\sigma_{i-1,m}^{(e)}}^T \dot{\sigma}_{i,m}^{(e)} + \dots \quad (\text{Ap-II.62})$$

de donde se puede aproximar:

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}_{\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)}}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{i,m}^{(e)} \simeq \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{i,m}^{(e)}) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)}) \quad (\text{Ap-II.63})$$

Pero se supone que en el estado de tensiones previo se satisfizo la condición de fluencia plástica : $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)}) = 0$. Por lo tanto, de la ec.(Ap-II.63) se obtiene:

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}_{\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)}}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{i,m}^{(e)} \simeq \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{i,m}^{(e)}) \quad (\text{Ap-II.64})$$

Sustituyendo esta última en la ec.(Ap-I.50), queda:

$$\dot{\lambda}_{i,m}^{(e)} = \frac{\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{i,m}^{(e)})}{A_{i-1,m}^{(e)} + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}_{\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)}}^T \mathbf{D}_S \left\{ \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}_{\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)}} \right]} \quad (\text{Ap-II.55})$$

la ventaja de utilizar este factor de consistencia plástica, consiste en que parte de la condición $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)}) = 0$, por lo tanto no es necesario encontrar el punto de intersección con la superficie de fluencia durante la transición de un estado elástico a uno plástico ($\dot{\lambda}_{i,m}^{(e)}$ se mide a partir de la superficie de fluencia).

Ap-II.4.c.- Implementación del algoritmo de retorno radial.

Este método, permite un rápido acercamiento a la nueva superficie de carga, mediante un numero finito de iteraciones. Una vez obtenido el estado tensional $\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)}$ mediante la ec.(Ap-

II.59), es necesario comprobar si satisface la condición de fluencia plástica $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)}) = 0$. En caso de no cumplir con esta condición, es necesario realizar un número de iteraciones que tiendan a corregir el error remanente. A continuación se detallan los pasos básicos para la implementación de esta técnica de integración implícita de la ecuación constitutiva elástico plástica, en un punto de integración de la región elemental $\Gamma^{(e)}$:

a.- Magnitud del incremento de tensión y deformación al iniciar la integración de la

ecuación constitutiva elasto-plástica:

$$\left(\Delta \epsilon_{i,m}^{(e)}\right)_0 = \mathbf{B}^{(e)T} \left(\Delta \mathbf{U}_{i,m}^{(e)}\right)_0$$

$$\left(\Delta \sigma_{i,m}^{(e)}\right)_0 = \mathbf{D}_S \left(\Delta \epsilon_{i,m}^{(e)}\right)_0$$

$$\left(\Delta \epsilon_{i,m}^{(p)}\right)_0 = \mathbf{0}$$

b.- Actualización de las tensiones y deformaciones:

$$\epsilon_{i,m}^{(e)} = \epsilon_{i-1,m}^{(e)} + \left(\Delta \epsilon_{i,m}^{(e)}\right)_0$$

$$\sigma_{i,m}^{(e)} = \sigma_{i-1,m}^{(e)} + \left(\Delta \sigma_{i,m}^{(e)}\right)_0$$

c.- Se verifica si los puntos de la región discretizada $\Gamma^{(e)}$ han dejado de comportarse elásticamente:

$$\mathcal{F}(\sigma_{i,m}^{(e)}) \geq 0$$

En caso de que el comportamiento del punto siga siendo elástico, se considera como válida la actualización de tensiones y deformaciones llevados a cabo en b, y se salta al punto k.

d.- En caso que el punto siga un proceso elasto-plástico, se verifica si se trata de un estado de carga o descarga.

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma)}{\partial \sigma} \right\}_{\sigma_{i-1,m}^{(e)}}^T \left(\Delta \sigma_{i,m}^{(e)}\right)_0 \begin{cases} \leq 0 & \text{descarga: proceso elástico} \\ & \text{- va al punto k} \\ > 0 & \text{carga: proceso elasto-plástico} \\ & \text{- va al punto siguiente} \end{cases}$$

(Esta verificación también puede ser realizada mediante las condiciones de Kuhn-Tucker ec.(Ap-I.58,c))

e.- En caso de tratarse de un proceso de carga, se calcula el factor de consistencia plástica como en la ec.(Ap-II.55):

$$\delta \lambda_{i,m}^{(e)} = \frac{\mathcal{F}(\sigma_{i,m}^{(e)})}{A_{i-1,m}^{(e)} + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}_{\sigma_{i,m}^{(e)}}^T \mathbf{D}_S \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right\}_{\sigma_{i,m}^{(e)}} \right]}$$

f.- Se calcula el incremento de deformación plástica:

$$\delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{p(e)} = \int_{t_{i-1,m}}^{t_{i,m}} \dot{\lambda}_t^{(e)} \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_t dt \simeq \delta \lambda_{i,m}^{(e)} \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)}}$$

g.- Se obtiene la magnitud de la tensión excedida:

$$\delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{p(e)} = \mathbf{D}_S \delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{p(e)}$$

h.- Se calcula el nuevo incremento de deformación plástica, el de tensión y la tensión actualizada:

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{p(e)} = \left(\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{p(e)} \right)_0 + \delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{p(e)}$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} = \left(\Delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} \right)_0 - \delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{p(e)}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} = \boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)} + \Delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)}$$

i.- Se calcula la deformación elástica, a partir del verdadero incremento de tensión:

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{e(e)} = \mathbf{D}_S^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)}$$

j.- Verificación del cumplimiento de la condición de consistencia plástica:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)}) = 0$$

Si no la cumple, se transforma este estado último en un nuevo estado inicial:

$$\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{e(e)} = \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} \quad , \quad \left(\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{p(e)} \right)_0 = \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{p(e)} \quad , \quad \left(\Delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} \right)_0 = \Delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)}$$

y se regresa al punto e.

k.- Fin del proceso de integración de la ecuación constitutiva del punto.

FE DE ERRATAS

-
- En la página 27, donde dice....., se recurre a la *formulación total hipocelástica* debe decir....., se recurre a la *formulación total hiperelástica*
 - En la página 210, donde dice.....
-

$$W^I = G^I A^I \equiv W_T^I = \int_V g_T^I \frac{V^I}{V} dV \quad (\text{An-D.22})$$

debe decir.....

$$W^I = G^I A^I \equiv W_T^I = \int_{V^I} g_T^I dV^I \quad (\text{An-D.22})$$

- En la página 210, donde dice.....

$$G^I = \int_V g_T^I \frac{L^I}{V} dV \quad (\text{An-D.23})$$

debe decir.....

$$G^I = \int_{L^I} g_T^I dL^I \quad (\text{An-D.23})$$

- En la página 212, donde dice.....

$$W^c = W^{c0} + W^{c1} = W^{c0} + G^{c1} A^I \equiv W_C^c = \int_V g_C^{c0} dV + \int_V g_C^{c1} \frac{V^I}{V} dV, \quad (\text{An-D.26})$$

debe decir.....

$$W^c = W^{c0} + W^{c1} = W^{c0} + G^{c1} A^I \equiv W_C^c = \int_{V^I} g_C^{c0} dV^I + \int_{V^I} g_C^{c1} dV^I, \quad (\text{An-D.26})$$

- En la página 212, donde dice.....

$$G^{c1} = \int_V g_C^{c1} \frac{L^I}{V} dV \quad (\text{An-D.27})$$

debe decir.....

$$G^{(1)} = \int_{V^p} g_C^{p,1} dV^p \quad (\text{An-D.27})$$

• En la página 226, donde dice.....

$$W^p = \int_{V^p} \left[\int_{t=0}^t \sigma^T \dot{\epsilon}^p \right] dV^p \quad (\text{An-D.47})$$

debe decir.....

$$W^p = \int_{V^p} \left[\int_{t=0}^t \sigma^T \dot{\epsilon}^p dt \right] dV^p \quad (\text{An-D.47})$$

• En la página 241, donde dice.....

$$W^p = \int_V g_T^p \frac{V^p}{V} dV$$

debe decir.....

$$W^p = \int_{V^p} g_T^p dV^p$$

• En la página 456, donde dice..... *ecs.(Ap-II.39)*

debe decir..... *ecs.(Ap-II.29)*

• En la página 462, donde dice.....

$$\Delta l_{i,m}^2 = \Delta \mathbf{U}_{i,m} = \left[\Delta \mathbf{U}_{i-1,m} + r_{\Delta} \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m} \right]^T \Delta \mathbf{U}_{i-1,m} \quad (\text{Ap-II.49})$$

debe decir.....

$$\Delta l_{i,m}^2 = \left[\Delta \mathbf{U}_{i-1,m} + r_{\Delta} \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m} \right]^T \Delta \mathbf{U}_{i-1,m} \quad (\text{Ap-II.49})$$