Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 7, 3, 347–361(1991)

PRINCIPIOS VARIACIONALES PARAMETRIZADOS QUE ABARCAN ELASTICIDAD COMPRESIBLE E INCOMPRESIBLE

CARLOS A. FELIPPA

Dept. of Aerospace Engineering Sciences
& Center for Space Structures and Controls,
University of Colorado,
Boulder, Colorado 80309-0429, USA.

RESUMEN

Se presenta una familia de principios variacionales parametrizados, con cinco campos independientes, que pueden abarcar hiperelasticidad compresible e incompresible. Los campos independientes son tensiones medias (presiones) y desviadoras, deformaciones medias y desviadoras, y desplazamientos. Con una selección adecuada de los parámetros y de la descomposición de tensiones y desplazamientos, el funcional se reduce a los derivados previamente por Atluri-Reissner, Herrmann, y Franca.

SUMMARY

A parametrized five-field family of variacional principles that can accomodate both compressible and incompressible hyperelasticity is presented. The primary variables are mean and deviatoric stresses, mean and deviatoric strains, and displacements. Through appropriate selection of parameters and stress-strain splittings the functional specializes to those previously presented by Atluri-Reissner, Herrmann, and Franca.

ECUACIONES FUNDAMENTALES

Consideremos un *cuerpo linear hiperelástico* bajo cargas estáticas que ocupa el volumen V. El cuerpo es limitado por su superficie de frontera S, que se descompone en $S : S_d \cup S_t$. Desplazamientos se especifican en S_d mientras que tracciones se especifican en S_t. La normal unitaria exterior en S se denota por $\mathbf{n} \equiv n_i$.

Los tres campos de volumen desconocidos son los desplazamientos $\mathbf{u} \equiv u_i$, las deformaciones infinitesimales $\mathbf{e} \equiv e_{ij}$, y las tensiones $\boldsymbol{\sigma} \equiv \sigma_{ij}$. Los datos del problema son: las fuerzas de cuerpo $\mathbf{b} \equiv b_i$ en V, desplazamientos $\hat{\mathbf{d}} \equiv \hat{d}_i$ especificados en S_d, y tracciones de superficie $\hat{\mathbf{t}} \equiv \hat{t}_i$ especificadas en S_t.

Las relaciones entre los campos de volumen son las ecuaciones de deformaciones-desplazamiento

$$\mathbf{e} = \tfrac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}) = \mathbf{D}\mathbf{u} \qquad \text{ó} \qquad e_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{en } V, \tag{1}$$

Recibido: Septiembre 1990

las ecuaciones constitutivas

$$\sigma = \mathbf{E}\,\mathbf{e} \qquad \text{ó} \qquad \sigma_{ij} = E_{ijkl}e_{kl} \quad \text{en } V, \tag{2}$$

y las ecuaciones de equilibrio

$$-\,\mathbf{div}\,\sigma = \mathbf{D}^{*}\sigma = \mathbf{b} \qquad \text{ó} \qquad \sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{en } V, \tag{3}$$

en la que $\mathbf{D}^{*} = -\,\mathbf{div}$ denota el operator adjunto del gradiente simétrico $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^T)$.

El vector de tensiones con respecto a una dirección definida por el vector unitario $\mathbf{v}$ se llama $\sigma_v = \sigma.\mathbf{v}$, ó $\sigma_{vi} = \sigma_{ij}v_j$. En la frontera S el vector de tensión se define como $\sigma_n = \sigma.\mathbf{n}$ ó $\sigma_{ni} = \sigma_{ij}n_j$. Con esta notación, las condiciones de frontera en tracciones y desplazamientos se escriben

$$\sigma_n = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{ó} \quad \sigma_{ij}n_j = \hat{t}_i \quad \text{en } S_t, \qquad \text{y} \qquad \mathbf{u} = \hat{\mathbf{d}} \quad \text{ó} \quad u_i = \hat{d}_i \quad \text{en } S_d. \tag{4}$$

NOTACION

Campos Dependientes e Independientes

En la investigación de métodos variacionales que sigue, se usan las convenciones notacionales de Referencias[1-6]. Un campo *variado independientemente* se identifica con un guiño superimpuesto, por ejemplo $\tilde{\mathbf{u}}$. Un campo *dependiente* se identifica escribiendo el símbolo del campo independiente como índice superior (superscripto). Por ejemplo, si los desplazamientos $\mathbf{u}$ se hacen variar independientemente, los campos de deformaciones y tensiones derivados son

$$\mathbf{e}^u = \tfrac{1}{2}(\nabla + \nabla^T)\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}, \qquad \sigma^u = \mathbf{E}\mathbf{e}^u = \mathbf{E}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}. \tag{5}$$

Usando esta convención, símbolos sin guiños como $\mathbf{u}$, $\mathbf{e}$ y σ se reservan para campos *exactos* ó *genéricos*.

Abreviación de Integrales

Integrales de volumen y superficie pueden ser abreviadas poniendo paréntesis y corchetes, respectivamente, alrededor del integrando, con un índice que identifica el dominio. Por ejemplo:

$$(f)_V \stackrel{\text{def}}{=} \int_V f\,dV, \qquad [f]_S \stackrel{\text{def}}{=} \int_S f\,dS, \qquad [f]_{S_d} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{S_d} f\,dS, \qquad [f]_{S_t} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{S_t} f\,dS. \tag{6}$$

Si $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son funciones vectoriales y $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ funciones tensoriales, el producto interno sobre V se denota en la manera usual:

$$(\mathbf{f},\mathbf{g})_V \stackrel{\text{def}}{=} \int_V f_i g_i\,dV, \qquad (\mathbf{p},\mathbf{q})_V \stackrel{\text{def}}{=} \int_V p_{ij}q_{ij}\,dV, \tag{7}$$

y similarmente para integrales de superficie, en cuyo caso se usarán corchetes.

Vectores de Deformaciones y Tensiones

Para facilitar la construcción de expresiones variacionales matriciales, tensiones y deformacions se arreglarán como vectores columna de seis componentes construidos con las componentes de los tensores σ_{ij} y e_{ij} siguiendo las convenciones usuales de mecánica estructural:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{e} = \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{12} \\ 2e_{23} \\ 2e_{31} \end{Bmatrix}. \tag{8}$$

Entonces $(\sigma, \mathbf{e})_V = (\sigma_{ij}e_{ij})_V = (\sigma^T\mathbf{e})_V$, etc. Similarmente, tensores constitutivos de cuarto orden como E_{ijkl} se arreglan como matrices simétricas de orden 6×6 (resultando de la restricción al espacio de tensores tensión-deformación simétricos) en la forma usual.

DESCOMPOSICION DE TENSIONES Y DEFORMACIONES

En el caso de materiales incompresibles, en los que $\mathbf{div}\,\mathbf{u} = \mathbf{tr}\,\nabla\mathbf{u} = u_{i,i} = 0$, la relación tensión-deformacion (2) solamente vale en el espacio de tensores de deformación con traza nula, y la relación inversa no existe. Para facilitar la inclusión simultánea de compresibidad e incompresibilidad en los principios variacionales, varias descomposiciones generales de los campos de tensiones y deformaciones se estudian en esta Sección. Definamos presión p y condensación volumétrica total θ (la negativa de la deformación volumétrica) como

$$\begin{aligned} p &= -\tfrac{1}{3}\,\mathbf{tr}\,\sigma = -\tfrac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) \\ \theta &= -\,\mathbf{tr}\,\mathbf{e} = -(e_{11}+e_{22}+e_{33}) = -\,\mathbf{div}\,\mathbf{u}. \end{aligned} \tag{9}$$

En este trabajo se asume que el material is *volumétricamente isótropo* en el sentido

$$p = k\theta, \tag{10}$$

donde $k > 0$ es el módulo de compresión (un tercio del "bulk modulus" K). En el límite de incompresibilidad, $k \to \infty$.

Descomposición Parametrizada

Una familia de descomposiciones de los tensores de tensiones y deformaciones que se consideran aquí es

$$\sigma_{ij} = s(\xi)_{ij} - \xi p\,\delta_{ij}, \qquad e_{ij} = g(\eta)_{ij} - \tfrac{1}{3}\eta\theta\delta_{ij}, \tag{11}$$

donde δ_{ij} es el delta de Kronecker, y ξ y η son escalares en el intervalo $[0,1]$ que determinan la descomposición. Si $\xi = 0$, $s(0)_{ij} \equiv \sigma_{ij}$, mientras que si $\xi = 1$, $s(1)_{ij}$

se reduce a las tensiones desviadoras convencionales s_{ij} y se omitirá el argumento ξ. Si $\xi = 0$, $g(0)_{ij} \equiv e_{ij}$, mientras que si $\eta = 1$, $g(1)_{ij}$ se reduce a las deformaciones desviadoras convencionales g_{ij} y se omitirá el argumento η.

Usando la notación matricial (8) para tensiones y deformaciones, la descomposición (11) se representa como

$$\sigma = \mathbf{s}(\xi) - \xi p\mathbf{h}, \qquad \mathbf{e} = \mathbf{g}(\eta) - \eta\theta\mathbf{h}, \tag{12}$$

donde $\mathbf{h}$ es el vector columna de orden 6:

$$\mathbf{h} = \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T. \tag{13}$$

Note que $\mathbf{h}^T\mathbf{h} = 3$, $\mathbf{h}^T\sigma = \mathbf{tr}\,\sigma = -3p$, $\mathbf{h}^T\mathbf{e} = \mathbf{tr}\,\mathbf{e} = -\theta$, $\mathbf{h}^T\mathbf{s}(\xi) = \mathbf{tr}\,\mathbf{s}(\xi) = -3(1-\xi)p$, $\mathbf{h}^T\mathbf{g}(\eta) = \mathbf{tr}\,\mathbf{g}(\eta) = -(1-\eta)\theta$, y $\mathbf{h}^T\mathbf{s} = \mathbf{h}^T\mathbf{g} = 0$.

Condiciones en ξ y η

Los parámetros ξ y η no son independientes; se escogen de modo que $\mathbf{s}(\xi)$ y $\mathbf{g}(\eta)$ estén conectados por una ecuación constitutiva "desviadora" invertible

$$\mathbf{s}(\xi) = \mathbf{C}\mathbf{g}(\eta), \qquad \text{ó} \quad s(\xi)_{ij} = C_{ijk\ell}\, g(\eta)_{k\ell}, \tag{14}$$

donde la matriz $\mathbf{C}$ es finita y no singular. Se asume que esta condición se verifica si $\xi = \eta = 1$ para cualquier material. Para otros valores de ξ y η la selección es posible si el material es *completamente isótropo* pues entonces (2) puede escribirse (véase, por ejemplo, Sección 22 de Gurtin[7])

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk}, \qquad \text{ó} \quad \sigma = 2\mu\mathbf{e} - \lambda\,\theta\mathbf{h}, \tag{15}$$

donde μ y λ son los coeficientes de Lamé (μ coincide con el módulo de corte G), de modo que $\mathbf{C} = 2\mu\mathbf{I}$. Además μ, λ y k están conectados con el modulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson ν a través de las relaciones

$$k = \frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu} = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \tfrac{1}{3}(3\lambda + 2\mu), \qquad \mu = \frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu} = \tfrac{3}{2}(k-\lambda) = \frac{E}{2(1+\nu)}, \tag{16}$$

Substituyendo estas relaciones en (15) y (14) se obtiene la condición

$$(1+\nu)\xi - (1-2\nu)\eta = 3\nu. \tag{17}$$

El par $\xi = \eta = 1$ satisface esta condición por cualquier ν. Si $\nu \neq \frac{1}{2}$, especificando $0 \leq \xi < 1$ ó η determina la otra; por ejemplo si $\eta = 0$, $\xi = 3\nu/(1+\nu)$. Si el material es incompresible ($\nu = \frac{1}{2}$), $\xi = 1$ independiente del valor de η.

Descomposición Desviadora

La descomposición desviadora convencional de los tensores de tensión y deformación se obtiene si se pone $\xi = \eta = 1$:

$$\sigma = \mathbf{s} - p\mathbf{h}, \qquad \mathbf{e} = \mathbf{g} - \tfrac{1}{3}\theta\mathbf{h}. \tag{18}$$

Como se ha indicado previamente, esta selección satisface la condición (14) para materiales isótropos y anisótropos.

Descomposición de Lamé

La descomposición de Lamé para materiales isótropos —llamada así por su conexión intima con la relación constitutiva (15) que manifiesta los dos coeficientes de Lamé— se obtiene si $\eta = 0$ de modo que $\mathbf{g} = \mathbf{e}$. Entonces ξ se escoge para que $\tau = \mathbf{s}(\xi) = 2\mu\mathbf{e}$:

$$\sigma = \mathbf{C}\mathbf{e} - \xi p\mathbf{h} = 2\mu\mathbf{e} - \frac{3\nu}{1+\nu}p\mathbf{h} = \tau - q\mathbf{h}. \tag{19}$$

En la literatura $q = \xi p$ se llama la pseudo-presión en tanto que $\tau = \mathbf{s}(\xi) = 2\mu\mathbf{e} = \mathbf{C}\mathbf{e}$ se llama la extra tensión, aunque un nombre mejor sería pseudo tensión desviadora. En el límite de incompresibilidad, pseudo presión q y extra tensión τ se reducen a presión ordinaria p y tensión desviadora $\mathbf{s}$, respectivamente. Aunque la descomposición de Lamé puede en principio extenderse a materiales anisotrópicos, el parámetro ξ se convierte en una matriz: $\mathbf{I} - (3k)^{-1}\mathbf{C}$, lo que complica sustancialmente las derivaciones. Lo mismo sucede con (12) a menos que $\xi = \eta = 1$. La conclusión general es que descomposiciones diferentes de (18) son de valor pequeño para comportamiento no isótropo.

LA ENERGIA DE DEFORMACION GENERALIZADA

Los principios variacionales de elasticidad lineal estudiados aquí toman la forma general

$$\Pi = U - P. \tag{20}$$

En esta forma U es la energía de deformación generalizada, que caracteriza la energía almacenada, y P es el potencial de esfuerzos (o potencial de solicitaciones), que caracteriza todas las otras contribuciones. La forma convencional de P es

$$P^c = (\mathbf{b}, \mathbf{u})_V + [\hat{\mathbf{d}}, \sigma_n]_{S_d} + [\hat{\mathbf{t}}, \mathbf{u}]_{S_t}. \tag{21}$$

Otras dos formas de P, que son de interés en formulaciones híbridas de elementos finitos, llamadas P^d y P^t por "displacement-generalized" y "traction-generalized," respectivamente, se estudian en otros articulos[1-3]. Como P no está afectado por el comportamiento del material, la atención se concentrará en U.

En un material *compresible*, la energía de deformación generalizada estudiada por Felippa y Militello[4-6] tiene la estructura parametrizada

$$U = \tfrac{1}{2}j_{11}(\tilde{\sigma}, \mathbf{e}^{\sigma})_V + j_{12}(\tilde{\sigma}, \tilde{\mathbf{e}})_V + j_{13}(\tilde{\sigma}, \mathbf{e}^u)_V + \tfrac{1}{2}j_{22}(\sigma^e, \tilde{\mathbf{e}})_V + j_{23}(\sigma^e, \mathbf{e}^u)_V + \tfrac{1}{2}j_{33}(\sigma^u, \mathbf{e}^u)_V, \tag{22}$$

donde j_{11} hasta j_{33} son coeficientes numéricos. Los tres campos de variación independiente son las tensiones $\tilde{\sigma}$, deformaciones $\tilde{\mathbf{e}}$ y desplazamientos $\tilde{\mathbf{u}}$. Siguiendo la notación explicada previamente, los campos derivados que aparecen en (22) se escriben

$$\sigma^e = \mathbf{E}\tilde{\mathbf{e}}, \quad \sigma^u = \mathbf{E}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{e}^\sigma = \mathbf{E}^{-1}\tilde{\sigma}, \quad \mathbf{e}^u = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}. \tag{23}$$

Por ejemplo, la U del funcional de Hu-Washizu se obtiene poniendo $j_{12} = -1$, $j_{13} = 1$, $j_{22} = 1$, otros cero, en (22):

$$U_H(\tilde{\sigma}, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \tfrac{1}{2}(\sigma^e, \tilde{\mathbf{e}})_V + \tfrac{1}{2}(\tilde{\sigma}, \mathbf{e}^u - \tilde{\mathbf{e}})_V + \tfrac{1}{2}(\sigma^u - \sigma^e, \mathbf{e}^\sigma)_V = \tfrac{1}{2}(\sigma^e, \tilde{\mathbf{e}})_V + (\tilde{\sigma}, \mathbf{e}^u - \tilde{\mathbf{e}})_V. \tag{24}$$

La ecuación (22) puede escribirse en forma matricial como

$$U = \tfrac{1}{2}\int_V \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma} \\ \sigma^e \\ \sigma^u \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} j_{11}\mathbf{I} & j_{12}\mathbf{I} & j_{13}\mathbf{I} \\ & j_{22}\mathbf{I} & j_{23}\mathbf{I} \\ symm & & j_{33}\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}^\sigma \\ \tilde{\mathbf{e}} \\ \mathbf{e}^u \end{Bmatrix} dV. \tag{25}$$

donde $\mathbf{I}$ denota la matriz identidad de orden 6. La matriz funcional-generadora simétrica*

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{12} & j_{22} & j_{23} \\ j_{13} & j_{23} & j_{33} \end{bmatrix} \tag{26}$$

caracteriza completamente (22) y por lo tanto, una vez seleccionado el potencial de esfuerzos P, el funcional (20).†

Reemplazando (23) en (22), U puede expresarse como función de los campos independientes:

$$U = \tfrac{1}{2}\int_V \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma} \\ \tilde{\mathbf{e}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} j_{11}\mathbf{E}^{-1} & j_{12}\mathbf{I} & j_{13}\mathbf{D} \\ j_{12}\mathbf{I} & j_{22}\mathbf{E} & j_{23}\mathbf{E}\mathbf{D} \\ j_{13}\mathbf{D}^T & j_{23}\mathbf{D}^T\mathbf{E} & j_{33}\mathbf{D}^T\mathbf{E}\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma} \\ \tilde{\mathbf{e}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} dV, \tag{27}$$

que verifica la simetría de $\mathbf{J}_3$. Usando (27) la primera variación de U se obtiene

$$\delta U = (\Delta\mathbf{e}, \delta\tilde{\sigma})_V + (\Delta\sigma, \delta\tilde{\mathbf{e}})_V - (\,\mathbf{div}\,\sigma', \delta\tilde{\mathbf{u}})_V + [\sigma'_n, \delta\tilde{\mathbf{u}}]_S, \tag{28}$$

donde

$$\Delta\mathbf{e} = j_{11}\mathbf{e}^\sigma + j_{12}\tilde{\mathbf{e}} + j_{13}\mathbf{e}^u, \quad \Delta\sigma = j_{12}\tilde{\sigma} + j_{22}\sigma^e + j_{23}\sigma^u, \quad \sigma' = j_{13}\tilde{\sigma} + j_{23}\sigma^e + j_{33}\sigma^u. \tag{29}$$

Los dos términos últimos en (28) se combinan con contribuciones de la variación del potencial de esfuerzos. Por ejemplo, si P es el potencial de esfuerzos (21), la variación completa de $\Pi^c = U - P^c$ es

$$\delta\Pi^c = (\Delta\mathbf{e}, \delta\tilde{\sigma})_V + (\Delta\sigma, \delta\tilde{\mathbf{e}})_V - (\,\mathbf{div}\,\sigma' + \mathbf{b}, \delta\tilde{\mathbf{u}})_V + [\sigma'_n - \hat{\mathbf{t}}, \delta\tilde{\mathbf{u}}]_{S_t} - [\tilde{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{d}}, \delta\tilde{\sigma}_n]_{S_d}. \tag{30}$$

* Para justificar la simetría notese, por ejemplo, que $j_{13}\left(\tilde{\sigma}, \mathbf{e}^u\right)_V = \frac{1}{2}j_{13}\left(\tilde{\sigma}, \mathbf{e}^u\right)_V + \frac{1}{2}j_{13}\left(\mathbf{e}^\sigma, \sigma^u\right)_V$, etc.

† El índice de $\mathbf{J}$ identifica el número de parámetros independientes ó libres, como se muestra más adelante.

El uso de P^d ó P^t no modifica los términos volumétricos. En consecuencia las ecuaciones de Euler asociadas con las integrales de volumen son

$$\Delta \mathbf{e} = 0, \qquad \Delta \sigma = 0, \qquad \mathbf{div}\, \sigma' + \mathbf{b} = 0, \tag{31}$$

independientemente del potencial de esfuerzos.

Para forzar la consistencia de las ecuaciones de Euler con las ecuaciones de campo (1–3) se debe verificar $\Delta \mathbf{e} = 0$, $\Delta \sigma = 0$ y $\sigma' = \sigma$ si los campos de tensiones y deformaciones asumidos se reducen a los exactos. En consecuencia

$$\begin{aligned} j_{11} + j_{12} + j_{13} &= 0, \\ j_{12} + j_{22} + j_{23} &= 0, \\ j_{13} + j_{23} + j_{33} &= 1. \end{aligned} \tag{32}$$

Resulta de aquí que el número máximo de parámetros *independientes* que definen los elementos de $\mathbf{J}_3$ es $6 - 3 = 3$ como anticipado. La especialización de este funcional general a formas convencionales y parametrizadas ha sido estudiada por Felippa y Militello[4–6].

FORMA DESCOMPUESTA DE LA ENERGIA DE DEFORMACION GENERALIZADA

La expresión (22) de U falla si el material es incompresible. Para construir formas parametrizadas que acomodan incompresibilidad, la energía de deformación generalizada se aumenta con campos independientes adicionales, uno de los cuales debe ser la presión. Hay varias formas de proceder para arribar al objetivo indicado. En esta Sección el punto de partida es la descomposición desviadora convencional (18); el uso de la descomposición de Lamé (19) se considera más adelante.

Una energía de deformación generalizada "aumentada"‡ U_{ds} se construye como función de los cinco campos independientes $\tilde{\mathbf{s}}$, $\tilde{\mathbf{g}}$, $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{p}$ y $\tilde{\theta}$. Utilizando (25) como un "esqueleto" se postula la forma cuadrática siguiente:

$$U_{ds} = \frac{1}{2} \int_V \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{s}} \\ \mathbf{s}^g \\ \mathbf{s}^u \\ \tilde{p} \\ p^\theta \\ p^u \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} j_{11}\mathbf{I} & j_{12}\mathbf{I} & j_{13}\mathbf{I} & j_{14}\mathbf{h} & j_{15}\mathbf{h} & j_{16}\mathbf{h} \\ j_{21}\mathbf{I} & j_{22}\mathbf{I} & j_{23}\mathbf{I} & j_{24}\mathbf{h} & j_{25}\mathbf{h} & j_{26}\mathbf{h} \\ j_{31}\mathbf{I} & j_{32}\mathbf{I} & j_{33}\mathbf{I} & j_{34}\mathbf{h} & j_{35}\mathbf{h} & j_{36}\mathbf{h} \\ j_{41}\mathbf{h}^T & j_{42}\mathbf{h}^T & j_{43}\mathbf{h}^T & j_{44} & j_{45} & j_{46} \\ j_{51}\mathbf{h}^T & j_{52}\mathbf{h}^T & j_{53}\mathbf{h}^T & j_{54} & j_{55} & j_{56} \\ j_{61}\mathbf{h}^T & j_{62}\mathbf{h}^T & j_{63}\mathbf{h}^T & j_{64} & j_{65} & j_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}^s \\ \tilde{\mathbf{g}} \\ \mathbf{g}^u \\ \theta^p \\ \tilde{\theta} \\ \theta^u \end{Bmatrix} dV, \tag{33}$$

en la que los campos derivados son

$$\begin{aligned} &\mathbf{g}^u = (\mathbf{D} - \tfrac{1}{3}\mathbf{h}\ \mathbf{div}\,)\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{D}_g\tilde{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{g}^s = \mathbf{C}^{-1}\tilde{\mathbf{s}}, \quad \theta^p = k^{-1}\tilde{p}, \quad \theta^u = -\,\mathbf{div}\,\tilde{\mathbf{u}}, \\ &\mathbf{s}^g = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{g}}, \quad \mathbf{s}^u = \mathbf{C}\mathbf{g}^u = \mathbf{C}\mathbf{D}_g\tilde{\mathbf{u}}, \quad p^\theta = k\tilde{\theta}, \quad p^u = k\theta^u = -k\ \mathbf{div}\,\tilde{\mathbf{u}}. \end{aligned} \tag{34}$$

‡ Los índices de U se refieren al "deviatoric split"

La matriz núcleo de la forma cuadrática (33) es ahora 21×21 y está caracterizada por los 36 coeficientes j. A diferencia del tratamiento del caso compresible, las condiciones de simetría en estos coeficientes no se especifican *ab initio*. Substituyendo (34) en (33), U_{ds} puede escribirse como función de los cinco campos independientes en la forma cuadrática

$$U_{ds} = \frac{1}{2} \int_V \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{s}} \\ \tilde{\mathbf{g}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{p} \\ \tilde{\theta} \end{Bmatrix}^T \left[\begin{matrix} j_{11}\mathbf{C}^{-1} & j_{12}\mathbf{I} \\ j_{21}\mathbf{I} & j_{22}\mathbf{C} \\ j_{31}\mathbf{D}_g^T + j_{61} k \,\mathbf{grad}\, \mathbf{h}^T \mathbf{C}^{-1} & j_{32}\mathbf{D}_g^T \mathbf{C} + j_{62} k \,\mathbf{grad}\, \mathbf{h}^T \\ j_{41}\, \mathbf{h}^T \mathbf{C}^{-1} & j_{42}\, \mathbf{h}^T \\ j_{51} k \mathbf{h}^T \mathbf{C}^{-1} & j_{52} k \mathbf{h}^T \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} j_{13}\mathbf{D}_g + j_{16}\,\mathbf{h}\,\mathbf{div} & j_{14}k^{-1}\mathbf{h} & j_{15}\,\mathbf{h} \\ j_{23}\mathbf{C}\mathbf{D}_g + j_{26}\mathbf{C}\mathbf{h}\,\mathbf{div} & j_{24}k^{-1}\mathbf{C}\mathbf{h} & j_{25}\mathbf{C}\mathbf{h} \\ \mathbf{D}_g^T\mathbf{C}(j_{33}\mathbf{D}_g + j_{36}\,\mathbf{h}\,\mathbf{div}\,) & j_{34}k^{-1}\mathbf{D}_g^T\mathbf{C}\mathbf{h}+ & j_{35}\mathbf{D}_g^T\mathbf{C}\mathbf{h}+ \\ +k\,\mathbf{grad}\,(j_{63}\,\mathbf{h}^T\mathbf{D}_g + j_{66}\,\mathbf{div}\,) & +j_{64}\,\mathbf{grad} & +j_{65}k\,\mathbf{grad} \\ j_{43}\,\mathbf{h}^T\mathbf{D}_g + j_{46}\,\mathbf{div} & j_{44}k^{-1} & j_{45} \\ j_{53}k\mathbf{h}^T\mathbf{D}_g + j_{56}k\,\mathbf{div} & j_{54} & j_{55}k \end{matrix} \right] \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{s}} \\ \tilde{\mathbf{g}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{p} \\ \tilde{\theta} \end{Bmatrix} dV. \tag{35}$$

donde $\mathbf{grad} \equiv \mathbf{div}^T = \{\partial/\partial x_1 \quad \partial/\partial x_2 \quad \partial/\partial x_3\}^T$ cuando se aplica a una función escalar. La matriz núcleo en (35) debe ser simétrica, un requisito que implica las condiciones de simetría

$$\begin{gathered} j_{mn} = j_{nm}, \quad m = 1,2,3 \quad n = 1,2,3 \qquad j_{mn} = j_{nm}, \quad m = 4,5,6 \quad n = 4,5,6 \\ j_{mn}\mathbf{I} = j_{nm}k^{-1}\mathbf{C}, \quad m = 4,5,6 \quad n = 1,2,3. \end{gathered} \tag{36}$$

Si estas condiciones se imponen en (33) la matriz núcleo se convierte en

$$\begin{bmatrix} j_{11}\mathbf{I} & j_{12}\mathbf{I} & j_{13}\mathbf{I} & j_{14}\mathbf{h} & j_{15}\mathbf{h} & j_{16}\mathbf{h} \\ j_{12}\mathbf{I} & j_{22}\mathbf{I} & j_{23}\mathbf{I} & j_{24}\mathbf{h} & j_{25}\mathbf{h} & j_{26}\mathbf{h} \\ j_{13}\mathbf{I} & j_{32}\mathbf{I} & j_{33}\mathbf{I} & j_{34}\mathbf{h} & j_{35}\mathbf{h} & j_{36}\mathbf{h} \\ j_{14}k^{-1}\mathbf{C}\mathbf{h}^T & j_{24}k^{-1}\mathbf{C}\mathbf{h}^T & j_{34}k^{-1}\mathbf{C}\mathbf{h}^T & j_{44} & j_{45} & j_{46} \\ j_{15}k^{-1}\mathbf{C}\mathbf{h}^T & j_{25}k^{-1}\mathbf{C}\mathbf{h}^T & j_{35}k^{-1}\mathbf{C}\mathbf{h}^T & j_{45} & j_{55} & j_{56} \\ j_{16}k^{-1}\mathbf{C}\mathbf{h}^T & j_{26}k^{-1}\mathbf{C}\mathbf{h}^T & j_{36}k^{-1}\mathbf{C}\mathbf{h}^T & j_{46} & j_{56} & j_{66} \end{bmatrix}, \tag{37}$$

que está completamente caracterizada por la matriz funcional-generadora simétrica¶

$$\mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} & j_{15} & j_{16} \\ j_{12} & j_{22} & j_{23} & j_{24} & j_{25} & j_{26} \\ j_{13} & j_{23} & j_{33} & j_{34} & j_{35} & j_{36} \\ j_{14} & j_{24} & j_{34} & j_{44} & j_{45} & j_{46} \\ j_{15} & j_{25} & j_{35} & j_{45} & j_{55} & j_{56} \\ j_{16} & j_{26} & j_{36} & j_{46} & j_{56} & j_{66} \end{bmatrix} \tag{38}$$

¶ Recordemos que el índice de $\mathbf{J}$ indica el número de parámetros libres.

La matriz núcleo de (35) es

$$\begin{bmatrix} j_{11}\mathbf{C}^{-1} & j_{12}\mathbf{I} & j_{13}\mathbf{D}_g - j_{16}\mathbf{h}\,\mathbf{div} & j_{14}k^{-1}\mathbf{h} & j_{15}\mathbf{h} \\ & j_{22}\mathbf{C} & j_{23}\mathbf{C}\mathbf{D}_g - j_{26}\mathbf{C}\mathbf{h}\,\mathbf{div} & j_{24}k^{-1}\mathbf{C}\mathbf{h} & j_{25}\mathbf{C}\mathbf{h} \\ & & j_{33}\mathbf{D}_g^T\mathbf{C}\mathbf{D}_g + j_{66}k\,\mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,) & j_{34}k^{-1}\mathbf{D}_g^T\mathbf{C}\mathbf{h} & j_{35}\mathbf{D}_g^T\mathbf{C}\mathbf{h} \\ & & -j_{36}(\mathbf{D}_g^T\mathbf{C}\mathbf{h}\,\mathbf{div} + \mathbf{grad}\,\mathbf{h}^T\mathbf{C}\mathbf{D}_g) & -j_{46}\,\mathbf{grad} & -j_{56}k\,\mathbf{grad} \\ & & & j_{44}k^{-1} & j_{45} \\ symm & & & & j_{55}k \end{bmatrix} \tag{39}$$

La primera variación de (35) es

$$\delta U_{ds} = (\Delta\mathbf{g}, \delta\tilde{\mathbf{s}})_V + (\Delta\mathbf{s}, \delta\tilde{\mathbf{g}})_V - (\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}', \delta\tilde{\mathbf{u}})_V + (\Delta\theta, \delta\tilde{p})_V + (\Delta p, \delta\tilde{\theta})_V + [\boldsymbol{\sigma}'_n, \delta\tilde{\mathbf{u}}]_S, \tag{40}$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{g} &= j_{11}\mathbf{g}^s + j_{12}\tilde{\mathbf{g}} + j_{13}\mathbf{g}^u + \mathbf{h}(j_{14}\theta^p + j_{15}\tilde{\theta} + j_{16}\theta^u), \\ \Delta\mathbf{s} &= j_{12}\tilde{\mathbf{s}} + j_{22}\tilde{\mathbf{s}}^g + j_{23}\mathbf{s}^u + \mathbf{C}\mathbf{h}(j_{24}\theta^p + j_{25}\tilde{\theta} + j_{26}\theta^u), \\ \boldsymbol{\sigma}' &= j_{13}\tilde{\mathbf{s}} + j_{23}\mathbf{s}^g + j_{33}\mathbf{s}^u + \mathbf{B}(j_{34}\theta^p + j_{35}\theta + j_{36}\theta^u) \\ &\quad + \mathbf{h}\mathbf{h}^T(j_{16}\tilde{\mathbf{s}} + j_{26}\mathbf{s}^g + j_{36}\mathbf{s}^u) - \mathbf{h}(j_{46}p + j_{56}p^\theta + j_{66}p^u) \\ &= j_{13}\tilde{\mathbf{s}} + j_{23}\mathbf{s}^g + j_{33}\mathbf{s}^u + \mathbf{B}(j_{34}\theta^p + j_{35}\theta + j_{36}\theta^u) - \mathbf{h}(j_{46}p + j_{56}p^\theta + j_{66}p^u), \\ \Delta\theta &= \mathbf{h}^T k^{-1}(j_{14}\tilde{\mathbf{s}} + j_{24}\mathbf{s}^g + j_{34}\mathbf{s}^u) + j_{44}\theta^p + j_{45}\tilde{\theta} + j_{46}\theta^u = j_{44}\theta^p + j_{45}\tilde{\theta} + j_{46}\theta^u, \\ \Delta p &= \mathbf{h}^T(j_{15}\tilde{\mathbf{s}} + j_{25}\mathbf{s}^g + j_{35}\mathbf{s}^u) + j_{45}\tilde{p} + j_{55}p^\theta + j_{56}p^u = j_{45}\tilde{p} + j_{55}p^\theta + j_{56}p^u. \end{aligned} \tag{41}$$

donde $\mathbf{B} = (\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{h}\mathbf{h}^T)\mathbf{C}\mathbf{h}$, y las simplificaciones en $\boldsymbol{\sigma}'$, $\Delta\theta$ y Δp resultan de $\mathbf{h}^T\mathbf{s} = \mathbf{h}^T\mathbf{s}^g = \mathbf{h}^T\mathbf{s}^u = 0$ pues el tensor de tensiones desviadoras tiene traza nula. Usando nuevamente el argumento de consistencia y notando que componentes medias y desviadoras pueden variar independientemente, se obtienen las condiciones

$$\begin{aligned} &j_{11} + j_{12} + j_{13} = 0, \qquad j_{14} + j_{15} + j_{16} = 0, \qquad j_{12} + j_{22} + j_{23} = 0, \\ &j_{24} + j_{25} + j_{26} = 0, \qquad j_{13} + j_{23} + j_{33} = 1, \qquad j_{34} + j_{35} + j_{36} = 0, \\ &j_{46} + j_{56} + j_{66} = 1, \qquad j_{44} + j_{45} + j_{46} = 0, \qquad j_{45} + j_{55} + j_{56} = 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Como consecuencia de estas nueve condiciones de vínculo, el número máximo de parámetros libres que define los coeficientes de la matriz (38) es $21 - 9 = 12$ como se ha previsto.

SIMPLIFICACIONES

La derivación de una familia de funcionales con 12 "grados de libertad" para construir métodos de aproximación como elementos finitos deja la selección demasiado abierta. En la ausencia de información al contrario, parece prudente reducir el número de parámetros libres anulando los coeficientes que acoplan las variables medias y desviadoras:

$$\mathbf{J}_6 = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & 0 & 0 & 0 \\ j_{12} & j_{22} & j_{23} & 0 & 0 & 0 \\ j_{13} & j_{32} & j_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j_{44} & j_{45} & j_{46} \\ 0 & 0 & 0 & j_{45} & j_{55} & j_{56} \\ 0 & 0 & 0 & j_{46} & j_{56} & j_{66} \end{bmatrix} \tag{43}$$

sometida a la restricción que las sumas de filas (y de columnas, pues la matriz es simétrica) sean 0, 0, 1, 0, 0 y 1, respectivamente. Esta forma simplificada exhibe seis parámetros libres.

La cuestión siguiente es como *incluir incompresibilidad exacta*, en cuyo caso $k \to \infty$. El estudio de la matriz (39) revela que los únicos coeficientes que afectan los términos multiplicados por k son j_{55} y j_{66}. Una solución posible sería tomar $j_{55} = j'_{55}/k$ y $j_{66} = j'_{66}/k$, y fijando j'_{55} y j'_{66}. Una solución más simple es anular ambos coeficientes, lo que reduce (43) a

$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & 0 & 0 & 0 \\ j_{12} & j_{22} & j_{23} & 0 & 0 & 0 \\ j_{13} & j_{32} & j_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\omega-1 & -\omega & 1-\omega \\ 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1-\omega & \omega & 0 \end{bmatrix} \tag{44}$$

donde ω es un parámetro libre que determina el 3×3 menor principal inferior. El número de parametros libres se reduce a cuatro, uno más que en elasticidad compresible. De aquí emerge la siguiente regla práctica: cualquier principio de elasticidad compresible caracterizado por los coeficientes (26) puede extenderse para incluir incompresibilidad modificando U en la forma siguiente:

(I) Reemplace $\boldsymbol{\sigma}$ y $\mathbf{e}$ por $\mathbf{s}$ y $\mathbf{g}$, respectivamente. (En realidad, solamente la primera modificacion es necesaria, pues $\mathbf{s}^T\mathbf{g} = \mathbf{s}^T\mathbf{e}$, etc.)

(II) Añade términos de presión y deformación volumétrica caracterizados por el 3×3 menor principal inferior en (44). Si ω es cero la deformación volumétrica desaparece como campo independiente, y los términos adicionales se reducen a

$$\tfrac{1}{2}(\tilde{p}, \theta^u - \theta^p)_V + \tfrac{1}{2}(p^u, \theta^p)_V = -\int_V \left(\frac{\tilde{p}^2}{2k} + \tilde{p}\,\mathbf{div}\,\tilde{\mathbf{u}}\right) dV. \tag{45}$$

En el límite de incompresibilidad exacta, sólo sobrevive el término $-\tilde{p}\,\mathbf{div}\,\mathbf{u}$.

DESCOMPOSICION DE LAME

La consideración de la descomposición de Lamé (19) es de interés por razones históricas, pues el primer principio variacional mixto abarcando elasticidad compresible e incompresible construido por Herrmann[8] fué basado en esa descomposición. Podemos nuevamente empezar postulando una forma cuadrática para la energía de deformación generalizada[§] U_{Ls}

$$U_{Ls} = \frac{1}{2}\int_V \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\tau}} \\ \boldsymbol{\tau}^e \\ \boldsymbol{\tau}^u \\ \tilde{q} \\ q^\theta \\ q^u \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \ell_{11}\mathbf{I} & \ell_{12}\mathbf{I} & \ell_{13}\mathbf{I} & \ell_{14}\mathbf{h} & \ell_{15}\mathbf{h} & \ell_{16}\mathbf{h} \\ \ell_{21}\mathbf{I} & \ell_{22}\mathbf{I} & \ell_{23}\mathbf{I} & \ell_{24}\mathbf{h} & \ell_{25}\mathbf{h} & \ell_{26}\mathbf{h} \\ \ell_{31}\mathbf{I} & \ell_{32}\mathbf{I} & \ell_{33}\mathbf{I} & \ell_{34}\mathbf{h} & \ell_{35}\mathbf{h} & \ell_{36}\mathbf{h} \\ \ell_{41}\mathbf{h}^T & \ell_{42}\mathbf{h}^T & \ell_{43}\mathbf{h}^T & \ell_{44} & \ell_{45} & \ell_{46} \\ \ell_{51}\mathbf{h}^T & \ell_{52}\mathbf{h}^T & \ell_{53}\mathbf{h}^T & \ell_{54} & \ell_{55} & \ell_{56} \\ \ell_{61}\mathbf{h}^T & \ell_{62}\mathbf{h}^T & \ell_{63}\mathbf{h}^T & \ell_{64} & \ell_{65} & \ell_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}^\tau \\ \tilde{\mathbf{e}} \\ \mathbf{e}^u \\ \theta^q \\ \tilde{\theta} \\ \theta^u \end{Bmatrix} dV, \qquad (46)$$

donde los coeficientes ℓ's toman el lugar de los j's, y los nuevos términos son

$$\begin{gathered} \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\sigma} - q\mathbf{h}, \qquad \boldsymbol{\tau}^e = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{e}}, \qquad \boldsymbol{\tau}^u = \mathbf{CDu}, \qquad \mathbf{e}^\tau = \mathbf{C}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \\ \xi = 3\nu/(1+\nu), \qquad \tilde{q} = \xi\tilde{p}, \qquad q^\theta = \xi\lambda\tilde{\theta}, \qquad q^u = -\xi\lambda\,\mathbf{div}\,\tilde{\mathbf{u}}, \qquad \theta^q = q/\lambda. \end{gathered} \qquad (47)$$

Procediendo en la misma forma que en el caso de la descomposición desviadora, se deducen relaciones similares a (35)-(40), con $\mathbf{s}$, $\mathbf{g}$, p, k y $\mathbf{D}_g$ reemplazadas por $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{e}$, q, λ y $\mathbf{D}$, respectivamente. Pero ahora $\mathbf{h}^T\boldsymbol{\tau}$ no es automáticamente cero y por lo tanto las ecuaciones correspondientes a (41) retienen más términos:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{e} &= \ell_{11}\mathbf{e}^\tau + \ell_{12}\tilde{\mathbf{e}} + \ell_{13}\mathbf{e}^u + \mathbf{h}(\ell_{14}\theta^q + \ell_{15}\tilde{\theta} + \ell_{16}\theta^u), \\ \Delta\boldsymbol{\tau} &= \ell_{12}\tilde{\boldsymbol{\tau}} + \ell_{22}\tilde{\boldsymbol{\tau}}^e + \ell_{23}\boldsymbol{\tau}^u + \mathbf{Ch}(\ell_{24}\theta^q + \ell_{25}\tilde{\theta} + \ell_{26}\theta^u), \\ \boldsymbol{\sigma}' &= \ell_{13}\tilde{\boldsymbol{\tau}} + \ell_{23}\boldsymbol{\tau}^e + \ell_{33}\boldsymbol{\tau}^u + \mathbf{Ch}(\ell_{34}\theta^q + \ell_{35}\theta + \ell_{36}\theta^u) \\ &\quad + \mathbf{hh}^T(\ell_{16}\tilde{\boldsymbol{\tau}} + \ell_{26}\boldsymbol{\tau}^e + \ell_{36}\boldsymbol{\tau}^u) - \mathbf{h}(\ell_{46}p + \ell_{56}p^\theta + \ell_{66}p^u), \\ \Delta\theta &= \mathbf{h}^T\lambda^{-1}(\ell_{14}\tilde{\boldsymbol{\tau}} + \ell_{24}\boldsymbol{\tau}^e + \ell_{34}\boldsymbol{\tau}^u) + \ell_{44}\theta^q + \ell_{45}\tilde{\theta} + \ell_{46}\theta^u, \\ \Delta q &= \mathbf{h}^T(\ell_{15}\tilde{\boldsymbol{\tau}} + \ell_{25}\boldsymbol{\tau}^e + \ell_{35}\boldsymbol{\tau}^u) + \ell_{45}\tilde{q} + \ell_{55}q^\theta + \ell_{56}q^u. \end{aligned} \qquad (48)$$

La consistencia con las ecuaciones de campo provee doce condiciones:

$$\begin{array}{lll} \ell_{11} + \ell_{12} + \ell_{13} = 0, & \ell_{14} + \ell_{15} + \ell_{16} = 0, & \ell_{12} + \ell_{22} + \ell_{23} = 0, \\ \ell_{24} + \ell_{25} + \ell_{26} = 0, & \ell_{13} + \ell_{23} + \ell_{33} = 1, & \ell_{34} + \ell_{35} + \ell_{36} = 0, \\ \ell_{16} + \ell_{26} + \ell_{36} = 0, & \ell_{46} + \ell_{56} + \ell_{66} = 1, & \ell_{14} + \ell_{24} + \ell_{34} = 0, \\ \ell_{44} + \ell_{45} + \ell_{46} = 0, & \ell_{15} + \ell_{25} + \ell_{35} = 0, & \ell_{45} + \ell_{55} + \ell_{56} = 0. \end{array} \qquad (49)$$

[§] Los índices de U se refieren al "Lamé splitting".

Estas restricciones dejan $21 - 12 = 9$ parámetros independientes en la matriz funcional-generadora simétrica

$$\mathbf{L}_9 = \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} & \ell_{14} & \ell_{15} & \ell_{16} \\ \ell_{12} & \ell_{22} & \ell_{23} & \ell_{24} & \ell_{25} & \ell_{26} \\ \ell_{13} & \ell_{23} & \ell_{33} & \ell_{34} & \ell_{35} & \ell_{36} \\ \ell_{14} & \ell_{24} & \ell_{34} & \ell_{44} & \ell_{45} & \ell_{46} \\ \ell_{15} & \ell_{25} & \ell_{35} & \ell_{45} & \ell_{55} & \ell_{56} \\ \ell_{16} & \ell_{26} & \ell_{36} & \ell_{46} & \ell_{56} & \ell_{66} \end{bmatrix}. \tag{50}$$

Si las submatrices j_{mn} y j_{nm}, $m = 1,2,3$, $n = 4,5,6$ de esta matriz se anulan como en (43), $\mathbf{L}_9$ se reduce a $\mathbf{L}_6$, en la que las condiciones en los coeficientes no nulos son idénticas a las enunciadas para $\mathbf{J}_6$.

El tratamiento de la descomposición más general (12) con $\eta \neq 0$ no causa dificultades especiales. Sin embargo, como descomposiciones diferentes de (18) no acomodan naturalmente materiales anisótropos, este caso no será investigado con más detalle.

ESPECIALIZACIONES

El principio variacional más sencillo (en el sentido de tener la matriz $\mathbf{J}$ más rala) que abarca elasticidad compresible e incompresible se obtiene especializando (44) a

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{51}$$

Esta selección deja solamente desplazamientos y presiones como variables independientes y provee el funcional

$$U_P(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{p}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{s}^u,\mathbf{g}^u)_V - \left(\tilde{p}, \frac{\tilde{p}}{2k} + \operatorname{\mathbf{div}} \tilde{\mathbf{u}}\right)_V = \tfrac{1}{2}(\mathbf{s}^u,\mathbf{e}^u)_V - \left(\frac{\tilde{p}^2}{2k} + \tilde{p}\operatorname{\mathbf{div}}\tilde{\mathbf{u}}\right)_V, \tag{52}$$

que puede considerarse como una modificación del funcional de energía potencial mínima. Para la utilización práctica es importante observar que $\mathbf{g}^u$ puede reemplazarse con $\mathbf{e}^u$ en el primera integral pues el tensor s^u_{ij} tiene traza nula. En el límite incompresible U_P se reduce a $\frac{1}{2}(\mathbf{s}^u,\mathbf{e}^u)_V - (\tilde{p}, \operatorname{\mathbf{div}}\tilde{\mathbf{u}})_V$.

La especialización

$$\mathbf{J}_{AR} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{53}$$

reduce $U_{Ds} - P$ al funcional de cinco campos presentado por Atluri y Reissner[9] (en ese artículo p y θ se definen como los negativos de las campos utilizados aquí.) Obsérvese que como los dos menores principales de orden 3 en $\mathbf{J}_{AR}$ tienen la estructura numérica del principio Hu-Washizu de elasticidad compresible, el uso de la receta (24) da

$$U_{AR} = U_H(\tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{g}}, \tilde{\mathbf{u}}) + U_H(\tilde{p}\mathbf{h}, \tilde{\theta}\mathbf{h}, \theta^u\mathbf{h}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{s}^g, \tilde{\mathbf{g}})_V + (\tilde{\mathbf{s}}, \mathbf{g}^u - \tilde{\mathbf{g}})_V + \tfrac{1}{2}(p^\theta, \tilde{\theta})_V + \tilde{p}(\theta^u - \tilde{\theta})_V, \tag{54}$$

en donde $\mathbf{g}^u$ y $\tilde{\mathbf{g}}$ pueden reemplazarse por $\mathbf{e}^u$ y $\tilde{\mathbf{e}}$, respectivamente. Como $j_{55} \neq 0$, este funcional no acomoda incompresibilidad exacta. Esta desventaja puede corregirse fácilmente, sin embargo, usando el procedimiento explicado previamente.

Finalmente, la especialización de (50) a

$$\mathbf{L}_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{L}_F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{55}$$

reduce el funcional $U_{Ls} - P$ a los presentadas por Herrmann[8] y Franca[10], respectivamente; que son identificadas por $U_H - P$ y $U_F - P$ en lo que sigue.

El funcional de Herrmann, que como se ha notado tiene importancia histórica, contiene dos campos independientes: desplazamientos $\mathbf{u}$ y pseudo presión q. Su funcional U es

$$U_H(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{q}) = \tfrac{1}{2}(\tau^u, \mathbf{e}^u)_V - \left(\frac{\tilde{q}^2}{2\lambda} + \tilde{q}\,\mathbf{div}\,\tilde{\mathbf{u}}\right)_V \tag{56}$$

Los dos menores principales de orden 3 en $\mathbf{L}_F$ tienen la estructura numérica de los funcionales de energía potencial mínima y tensión-desplazamiento-Reissner en elasticidad compresible, respectivamente.

El funcional de Franca contiene cuatro campos independientes: extra tensión τ, deformaciones totales $\mathbf{e}$, desplazamientos $\mathbf{u}$ y pseudo presión q. Su funcional U es

$$U_F(\tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{q}) = \tfrac{1}{2}(\tau^e, \tilde{\mathbf{e}})_V + (\tilde{\tau}, \mathbf{e}^u - \tilde{\mathbf{e}})_V - \left(\frac{\tilde{q}^2}{2\lambda} + \tilde{q}\,\mathbf{div}\,\tilde{\mathbf{u}}\right)_V \tag{57}$$

Los dos menores principales de orden 3 en $\mathbf{L}_F$ tienen la estructura numérica de los funcionales de Hu-Washizu y tensión-desplazamiento-Reissner en elasticidad compresible, respectivamente.

CONCLUSIONES

Los funcionales parametrizados presentados aquí extienden los funcionales presentadòs por Felippa y Militello[4–6] para acomodar incompresibilidad. La extensión conduce a funcionales con un gran número de parámetros libres. Este fenómeno promueve una examinación de si las ventajas de la formulación parametrizada compensan el notable incremento de posibilidades, con el consecuente riesgo de confusión.

En el lado positivo, la formulación de principios variacionales parametrizados ofrece ventajas conceptuales y prácticas. En el contexto conceptual el método es intelectualmente satisfactorio en el sentido que todas (o al menos un conjunto) las formas variacionales posibles se obtienen de una vez. Esto se contrasta a la derivación caso-por-caso que solamente puede dar "puntos" en el espacio infinito de funcionales posibles. La ventaja práctica más importante en el contexto de aplicación a elementos finitos, es que los coeficientes de las matrices generadoras pueden mantenerse libres hasta el nivel de elementos, y usarse para mejorar la aproximación númerica[1–6].

Pero un encuentro brusco con 12 parámetros libres como en (38) puede causar confusión y efectivamente anular los beneficios de generalidad. Las simplificaciones subsiguientes que conducen a (43) y (44) parecen razonables desde el punto de vista de aplicaciones numéricas pues (1) el número de parámetros libres es reducido significantemente mientras que se retiene flexibilidad en el "peso" de los campos independientes, y (2) todos los funcionales específicos de importancia aparecen como casos especiales.

Finalmente, la simplicidad y generalidad de los funcionales basadas en la descomposición desviadora (18) debe notarse. Es difícil entender por qué la literatura de elementos finitos está todavía preocupada con la descomposición de Lamé y los funcionales asociados. No sólo es esa descomposición artificial para materiales anisotrópicos, pero nótese que funcionales asociados como (56) y (57) degeneran si $\lambda = 0$, que ocurre si $\nu = 0$. Con este valor de ν, $\xi = 0$, q se anula idénticamente, y términos de tipo $0/0$, que requieren tratamiento especial, aparecen en U. Visto que un valor cero del coeficiente de Poisson es físicamente posible, la pretensión de generalidad de aplicación, aún con restricción a comportamiento isótropo, se debilita seriamente.

AGRADECIMIENTO

El apoyo económico para esta investigación ha sido proporcionado por NASA Lewis Research Center a través de Grant NAG 3-934.

REFERENCIAS

1. C.A. Felippa, "Parametrized Multifield Variational Principles in Elasticity: I. Mixed Functionals," *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. **5**, pp. 79–88, (1989).
2. C.A. Felippa, "Parametrized Multifield Variational Principles in Elasticity: II. Hybrid Functionals and the Free Formulation," *Communications in Applied Numerical Methods*,

Vol. **5**, pp. 89–98, (1989).

3. C.A. Felippa, "The Extended Free Formulation of Finite Elements in Linear Elasticity", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. **56**, pp. 609–616, (1989).
4. C.A. Felippa y C. Militello, "Developments in Variational Methods for High-performance Plate and Shell Elements", en *Analytical and Computational Methods for Shells*, CAD Vol. **3**, A.K. Noor, T. Belytschko and J.C. Simo (eds.), American Society of Mechanical Engineers, ASME, New York, pp. 191–216, (1989).
5. C.A. Felippa y C. Militello, "The Variational Formulation of High-performance Finite Elements: Parametrized Variational Principles," *Computers & Structures*, Vol. **36**, pp. 1–11, (1990).
6. C.A. Felippa y C. Militello, "Principios Variacionales Parametrizados en Elasticidad Lineal", *Revista Internacional de Métodos Númericos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **6**, pp. 333–342, (1990).
7. M. Gurtin, "The Linear Theory of Elasticity", en Volume VIa/2 de *Encyclopedia of Physics*, C. Truesdell (ed.), Springer-Verlag, Berlin, (1972).
8. L.R. Herrmann, "Elasticity Equations for Nearly Incompressible Materials by a Variational Theorem", *AIAA Journal*, Vol. **3**, pp. 1896–1900, (1965).
9. S.N. Atluri y E. Reissner, "On the Formulation of Variational Theorems Involving Volume Constraints", *Computational Mechanics*, Vol. **5**, pp. 337–344, (1989).
10. L.P. Franca, "Analysis and Finite Element Approximation of Compressible and Incompressible Linear Isotropic Elasticity Based Upon a Variational Principle", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **76**, pp. 259–273, (1989).